Séminaire H.ROSENBERG (Mars 1969)

Le théorème de fibration de J.Stallings

François LAUDENBACH

SEMINAIRE H. ROSENBERG
Orsay, 1968-1969

LE THEOREME DE FIBRATION DE J. STALLINGS

François LAUDENBACH
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes - Paris V - France

N° M13.369

Mars 1969

SEMINAIRE DE H. ROSENBERG
Orsay . 1968 - 1969

LE THEOREME DE FIBRATION DE J. STALLINGS

(exposé par F. LAUDENBACH)

Soit E une variété compacte connexe, fibrée sur le cercle S^1 avec pour fibre F une sous-variété compacte. D'après la suite exacte d'homotopie de la fibration, $\pi_1(E)$ a un sous-groupe invariant de type fini $\pi_1(F)$ de quotient $\mathbb{Z}$.

Pour certaines variétés de dimension 3, J. Stallings a établi dans [9] une réciproque à ce fait :

Théorème I : Si E est une variété différentiable ou PL, compacte connexe de dimension 3, et si $\pi_1(E)$ a un sous-groupe invariant de type fini G, de quotient $\mathbb{Z}$, alors G est en fait le groupe fondamental d'une sous-variété T compacte connexe de dimension 2 dans E, l'inclusion de T dans E induisant l'inclusion naturelle de G dans $\pi_1(E)$.

Théorème II : Sous les hypotèse du théorème I, si G est distinct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et si E est irréductible (ie toute 2-sphère "tame" dans E borde une boule) alors E est l'espace total d'une fibration sur S^1 admettant pour fibre la sous-variété T fournie par le théorème I.

Préliminaires :

Les démonstrations dans la catégorie PL sont tout à fait parallèles à celles de la catégorie DIFF. En effet, les théorèmes de position générale auxquels nous aurons recours pour le cas DIFF existent aussi dans la catégorie PL.

Se donner G, sous-groupe invariant de $\pi_1(E)$ de quotient Z, c'est se donner un homomorphisme surjectif $\varphi:\pi_1(E)\to \mathbb{Z}$ avec Ker $\varphi = G$. Etant donné que S^1 est asphérique (ie : $\pi_k(S^1) = 0$ pour $k\geq 2$), et en utilisant une triangulation de E, on ne rencontre aucune obstruction à construire une application continue $f:E\to S^1$ de telle sorte que $f_* = \varphi$. Pour la même raison on pourra construire une homotopie entre deux telles f . Autrement dit φ détermine f de façon unique à homotopie près.

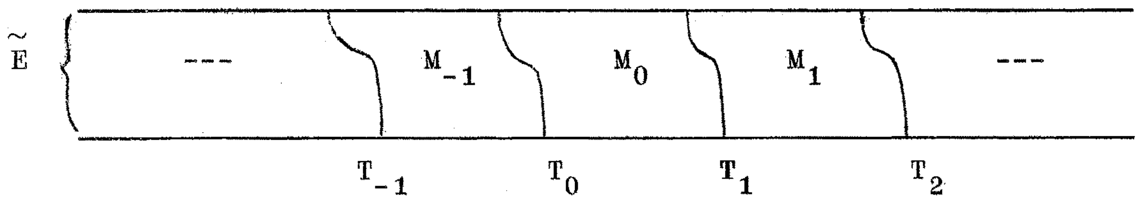
Par transversalité, il existe dans la classe des applications représentant φ une application différentiable f, transverse régulière au-dessus d'un point donné $\{*\}$ de S^1. Alors $T \equiv f^{-1}(\{*\})$ est une sous-variété compacte de dimension 2 dans E, <u>à fibré normal trivial</u>. Nous noterons $i:T\to E$ l'injection canonique. Il faut remarquer qu'à priori T n'est pas connexe et que $i_* : \pi_1(T) \to \pi_1(E)$ n'est pas un isomorphisme sur Ker φ. Dans la démonstration du théorème I nous introduirons deux types de modification de f, sans changer sa classe d'homotopie, l'un pour rendre T connexe, l'autre pour rendre i_* injectif; il s'en suivra alors que i_* sera nécessairement un isomorphisme sur Ker φ.

Un fois que nous aurons déterminé la fibre T, nous "couperons" E le long de T, qui est connexe. La surjectivité de φ imposant la connexité de E-T, cette opération fournit un cobordisme M entre deux exemplaires T_0 et T_1 de T. Sous les hypotèse du théorème II, on montrera que cobordisme est trivial et que, par conséquent, E est fibré sur S^1 avec pour fibre T.

DEMONSTRATION DU THEOREME I.

A. Quelle que soit la dimension de E, si Kerφ est de type fini, si T est connexe et si $i_*:\pi_1(T)\to\pi_1(E)$ est injectif, alors l'image de i_* est Ker φ.

Pour démontrer ce fait, on utilise une construction classique en théorie des noeuds(cf. L. Neuwirth, [4] ou [5]). On considère le revêtement ∞-cyclique de E, $\tilde{E} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} M_k$, où M_k est un exemplaire de M, c'est à dire de E coupé le long de T, cobordisme dont l'origine et l'extrémité sont difféormorphes à T; la réunion est prise ici dans le sens que M_k est recollé à M_{k+1} en identifiant l'origine de M_{k+1} avec l'extrémité de M_k :



Il est facile de voir que $\tilde{E}$ est le revêtement ∞-cyclique, image réciproque du revêtement universel de S^2 par f. Il suit de la propriété universelle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle{\exp.} \\ E & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

que $\pi_1(\tilde{E}) = \text{Ker } f_*$.

Notons $G_n = \pi_1\left(\bigcup_{=n}^{+n} M_k\right)$. Il découle de l'hypotèse que, pour tout k, $\pi_1(T_k)\to\pi_1(M_k)$ et $(\pi_1(T_k)\to\pi_1(M_{k-1})$ sont injectifs. Alors d'après Van Kampen, la suite des groupes G_n est une suite croissante et

$\pi_1(\tilde{E}) = \varinjlim\{G_n\}$. De plus si $\pi_1(T_k) \to \pi_1(M_k)$ n'est pas surjectif, la suite $\{G_n\}$ est strictement croissante et $\pi_1(\tilde{E})$ ne saurait être de type fini, ce qui est contraire à l'hypotèse faite sur Ker φ. On a donc nécessairement les égalités suivantes $\pi_1(T) = \pi_1(M) = \pi_1(\tilde{E}) = \mathrm{Ker}\varphi$.

<u>Remarque</u> : Grâce à cette construction, et sans hypotèse de finitude sur Ker φ, il est facile de voir l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $\pi_1(T) \to \pi_1(E)$ est injectif
2) $\pi_1(T_0) \to \pi_1(M)$ et $\pi_1(T_1) \to \pi_1(M)$ sont injectifs.

Cette remarque nous sera utile plus loin, car, alors que T n'est pas dans le bord de E, en revanche T_0 et T_1 sont dans le bord de M.

B. <u>Quelle que soit la dimension de E, si Ker φ est de type fini, il existe une modification de f pour rendre la fibre connexe.</u>

Soient $T_1, T_2, \ldots T_n$ les composantes connexes de T. Ce sont des sous-variétés de E, de codimension 1, sans bord relatif et en bonne position par rapport au bord de E. Elles déterminent sur E une stratification dont le nerf est un complexe Γ de dimension 1, de support topologique inclus dans E : on prend un point a_i dans chaque T_i et un point b_α dans chaque composante E_α de E-T. Si T_i est dans l'adhérence de la strate E_α, on joint a_i et b_α par un arc $A_{i\alpha}$ dans $\bar{E}_\alpha$ de telle sorte que $A_{i\alpha} \cap A_{i\beta} = \{a_i\}$ et $A_{i\alpha} \cap A_{j\alpha} = \{b_\alpha\}$. Si T_i a ses deux "côtés" dans E_α, alors on joint a_i et b_α par deux arcs $A_{i\alpha}$ et $A'_{i\alpha}$ dont la réunion forme un cercle traversant T_i en a_i.

Construisons une rétraction $\rho : E \to \Gamma$. On commence par poser $\rho(T_i) = \{a_i\}$ et $\rho_{|\Gamma} = \mathrm{Id}_{|\Gamma}$. Puisque chaque T_i a un voisinage tubulaire trivial, il est facile de prolonger ρ à un voisinage régulier N du sous-complexe $T \cup \Gamma$ de E, de telle sorte que $\rho^{-1}(a_i) = T_i$. Ensuite il n'y a aucune obstruction à prolonger ρ à E de telle sorte que $\rho|E-\mathring{N}$ soit à image dans $\Gamma - \cup\{a_i\}$, ce qui assurera toujours $\rho^{-1}(a_i) = T_i$; en effet, sur la strate E_α, ρ sera à image dans l'espace contractible constitué de l'étoile ouverte de b_j dans Γ.

Les applications f et $f\rho$ coïncident sur $T \cup \Gamma$ et sont donc homotopes sur N, par une homotopie qui sur ∂N est à valeurs dans $S^1 - \{*\}$. Il n'y a alors aucune obstruction à prolonger à E une telle homotopie.

En regardant les applications induites sur les groupes fondamentaux on a l'égalité $f_* = (f_{|\Gamma})_* \rho_*$. Puisque ρ est une rétraction, il suit que ρ_* est surjectif de $\operatorname{Ker} f_*$ sur $\operatorname{Ker} (f_{|\Gamma})_*$, donc que $\operatorname{Ker} (f_{|\Gamma})_*$ est de type fini; en outre c'est un sous-groupe invariant du groupe libre $\pi_1(\Gamma)$ et le quotient est $\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f_* \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(E) \arrow[dr, "f_*"] \arrow[d, "\rho_*"'] & \\
\operatorname{Ker} (f_{|\Gamma})_* \arrow[r] & \pi_1(\Gamma) \arrow[r, "(f_{|\Gamma})_*"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

D'après un résultat d'algèbre dont une démonstration originale est donnée en appendice, il suit que $\operatorname{Ker} (f_{|\Gamma})_*$ est réduit à l'élément neutre, autrement dit que $(f_{|\Gamma})_*$ est un isomorphisme, ou encore, d'après J.H.C. Whitehead, que $f_{|\Gamma}$ est une équivalence d'homotopie de Γ sur S^1. Comme Γ est un CW-complexe de dimension 1, il est alors homéomorphe à un cercle auquel sont attachés des arbres. On peut donc modifier $f_{|\Gamma}$ en une application homotope $g : \Gamma \to S^1$ telle que $g^{-1}(\{*\})$ soit constitué d'un seul sommet $\{a_i\}$. L'application $g\rho : E \to S^1$ est homotope à f et telle que $(g\rho)^{-1}(\{*\}) = T_i$, une des composantes connexes de $f^{-1}(\{*\})$. Il faut cependant remarquer que l'on ne peut choisir arbitrairement la composante T_i de $f^{-1}(\{*\})$ qui sera la nouvelle fibre : on ne peut prendre T_i que si a_i appartient à l'unique boucle de Γ.

C. <u>Si E est de dimension 3 et si Ker φ est de type fini, il existe une modification de f pour rendre $\pi_1(T) \to \pi_1(E)$ injectif.</u>

Nous rencontrons pour la première fois ici une hypothèse de dimension. Nous allons décrire une opération qui, partant d'une fibre connexe T, telle que $\pi_1(T) \to \pi_1(E)$ ne soit pas injectif, fournit une fibre connexe $\hat{T}$ avec une caractéristique d'Euler strictement plus grande que celle de T. Or les variétés compactes de dimension 2 ont une caractéristique d'Euler bornée supérieurement par +2, le maximum n'étant atteint que pour S^2([2] et [10]). L'opération précédente ne pourra donc être effectuée qu'un nombre fini de fois, ce qui signifie qu'on sera arrivé à une fibre connexe dont le groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1(E)$. Si l'on fait ici encore l'hypothèse que Ker φ est de type fini, c'est que, pour conserver la connexité de la fibre nous aurons éventuellementà appliquer la modification décrite en B.

Si $\pi_1(T) \to \pi_1(E)$ n'est pas injectif, d'après une remarque faite à la fin du paragraphe A, alors $\pi_1(T_0) \to \pi_1(M)$ (ou $\pi_1(T_1) \to \pi_1(M)$) n'est pas injectif, où T_0 (resp. T_1) est l'origine (resp. l'extrémité) du cobordisme M obtenu en coupant E le long de T. D'après le "Loop" théorème (cf.[8]), il existe dans T_0 une courbe simple, non homotope à zéro dans T_0, bordant un disque D plongé dans M, bien situé par rapport au bord. Comme on peut supposer que int D est plongé dans int M, la même situation existe pour la paire (E,T). Autrement dit, on peut à partir de cette courbe simple γ de T, faire une chirurgie sur T, plongée dans E. Soient W le cobordisme élémentaire réalisant cette chirurgie et T' le résultat de la chirurgie; $\partial W = T \cup (\partial T \times [0,1]) \cup T'$. Suivant un procédé décrit par A. Haefliger dans [1]; le plongement canonique de T dans E peut être prolongé en un plongement de (W,T,T') dans $E \times ([0,1],0,1)$. Par un raisonnement d'obstruction inexistante, il est facile de construire $F : E \times [0,1] \to S^1$ telle que $F^{-1}(\{*\}) = W$ et que $F_{|E\times\{0\}} = f$; on a donc remplacé f par une application f' de fibre T'.

Calculons les caractéristiques d'Euler :
$\chi(W,T) = \chi(W) - \chi(T)$ et $\chi(W,T') = \chi(W) - \chi(T')$. Mais (W,T) a l'homologie de (D^2,S^1) et (W,T') celle de (D^1,S^0); donc $\chi(W,T) = +1$, $\chi(W,T') = -1$ et $\underline{\chi(T') = \chi(T)+2}$.

Dans le cas où T' n'est pas connexe (T' a au plus deux composantes), il faut encore effectuer la modification décrite en B. Mais on remarque qu'aucune des deux composantes T'_1 ou T'_2 n'est une sphère, sinon l'on aurait fait une chirurgie sur un lacet homotope à zéro dans T. Donc $\chi(T'_1)$ et $\chi(T'_2)$ sont inférieurs à +1, et, pour $i = 1,2$, $\underline{\chi(T'_i) \geq \chi(T)+1}$.

Finalement si T' est connexe $\hat{T} = T'$ et $\chi(\hat{T}) \geq \chi(T)+2$, et, si T' n'est pas connexe, $\hat{T}$ est une des composantes de T' et $\chi(\hat{T}) \geq \chi(T)+1$. Dans les deux cas l'opération C a pour effet d'augmenter srictement la caractéristique d'Euler.

c.q.f.d.

DEMONSTRATION DU THEOREME II.

Considérons de nouveau le cobordisme M, obtenu en coupant E suivant T. Son origine T_0 et son extrémité T_1 sont deux exemplaires de T. On rappelle que M, T_0, T_1 sont connexes et que les injections naturelles induisent des isomorphismes $\pi_1(T_0) \to \pi_1(T_1)$ et $\pi_1(T_1) \to \pi_1(M)$ (voir le paragraphe A).

Il s'agit de montrer, sous l'hypotèse que E est irréductible, qu'alors M est un cobordisme trivial. Le plan de la démonstration est le suivant : on met en évidence un sous-cobordisme de M de dimension 2, dont on montre la trivialité par des arguments homologiques et en utilisant la classification des variétés de dimension 2 [2] ;ce sous-cobordisme aura été choisi de telle sorte que le complémentaire de son intérieur dans l'intérieur de M soit homéomorphe à une boule.

La construction est plus facile dans le cas où T a un bord, le cobordisme entre ∂T_0 et ∂T_1 faisant alors partie du sous-cobordisme cherché.

Lemme : Si E est irréductible, alors M est irréductible.

Preuve : Soit $f : S^2 \to M$, un plongement qu'on peut supposer à image dans l'intérieur de M. Soit $p : M \to E$ la projection naturelle. La sphère $pf(S^2)$ borde une boule B dans E. Soit A l'autre composante de $E - pf(S^2)$. Si l'on montre que T est inclus dans A, alors $f(S^2)$ borde la boule $p^{-1}(B)$. Or si T est inclus dans B, T est orientable et sépare B, et aussi E, en deux composantes, ce qui n'est justement pas le cas.

c.q.f.d.

En fait, puisque $\pi_1(T_0) = \pi_1(T_1) = \pi_1(M)$, l'irréductibilité de M est équivalente à l'irréductibilité de E.

1er cas : ∂T n'est pas vide

Nous noterons $\Delta^i M$ une composante de $\partial M - (\text{int } T_0 \cup \text{int } T_1)$ rencontrant soit T_0 soit T_1, et $\partial' M$ une composante fermée de $\partial M - \text{int}(T_0 \cup T_1)$.

Lemme : ∂M est connexe et chaque $\Delta^i M$ rencontre T_0 et T_1.

Preuve : Montrons d'abord que $H_1(\Delta^i M) \neq 0$ et que, si $\partial' M$ est non vide, $H_1(\partial' M) \neq 0$. Ces deux faits sont dus à l'irréductibilité de M. Pour $\Delta^i M$ qui a un bord non vide, le seul cas à éliminer est celui où $\Delta^i M$ est un disque. Si $\Delta^i M$ est un disque, son bord est contenu par exemple dans T_0 et $\Delta^i M$ ne rencontre pas T_1. Mais le cercle qui le borde homotope à zéro dans M doit l'être aussi dans T_0, pour respecter l'isomorphisme $\pi_1(T_0) \to \pi_1(T_1)$. Ceci implique que T_0 est un disque, qu'une des composantes de ∂M est une sphère, $T_0 \cup \Delta^i M$, et enfin que M est une boule, ce qui est impossible étant donné que $T_0 \cup \Delta^i M$ ne constitue pas tout le bord de M.

Pour la même raison un composante fermée $\partial' M$ ne peut être une sphère, donc $H_1(\partial' M) \neq 0$.

Supposons maintenant l'existence de $\partial' M$ ou qu'un certain $\Delta^i M$, rencontrant T_0 ne rencontre pas T_1. Puisque $H_1(T_1) \to H_1(M)$ est injectif, $H_1(\partial M - \text{int. } T_0)$ contient $H_1(T_1) \oplus H_1(\partial' M) \oplus H_1(\Delta^i M)$. Mais cette somme ne peut s'injecter dans $H_1(M)$ puisque $H_1(T_1) \to H_1(M)$ est surjectif et que $H_1(\partial' M) \oplus H_1(\Delta^i M) \neq 0$. Il s'en suit grâce à la suite exacte de la paire $(M, \partial M - \text{int.} T_0)$ que $H_2(M, \partial M - \text{int.} T_0) \neq 0$ et par dualité que $H^1(M, T_0)$ et aussi $H_1(M, T_0)$ ne sont pas nuls, ce qui contredit la surjectivité $H_1(T_0) \to H_1(M)$.

c.q.f.d.

Nous sommes donc dans la situation où $\partial M = T_0 \underset{\partial T_0}{\cup} \Delta M \underset{\partial T_1}{\cup} T_1$; ΔM est le cobordisme entre ∂T_0 et ∂T_1, dont chaque composante $\Delta^i M$ va d'un bord à l'autre.

D. Le cobordisme ΔM est trivial.

Sachant déjà que $\Delta^i M$ a au moins deux cercles dans son bord l'un dans T_0 l'autre dans T_1, pour montrer que c'est un cylindre, il suffit de montrer que $\chi(\Delta^i M) = 0$.

On a l'égalité $\chi(\partial M) = 2\chi(M)$; en effet $\chi(\text{double de } M) = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$ et toute variété fermée de dimension 3 a une caractéristique d'Euler nulle. D'autre part $\chi(\partial M) = \Sigma\, \chi(\Delta^i M) + \chi(T_0) + \chi(T_1)$

$$= \Sigma\, \chi(\Delta^i M) + 2\chi(T).$$

Or $H_1(\Delta^i M)$ étant non nul , $\chi(\Delta^i M) \leq 0$. Donc $\chi(\partial M) \leq 2\chi(T)$, l'égalité n'ayant lieu que si $\chi(\Delta^i M) = 0$ pour tout i.
Mais $\frac{1}{2}\, \chi(\partial M) = \chi(M) \geq 1 - \text{rg } H_1(M) = 1 - \text{rg } H_1(T) = \chi(T)$.

Finalement $\chi(\partial M) = 2\chi(T)$.

c.q.f.d.

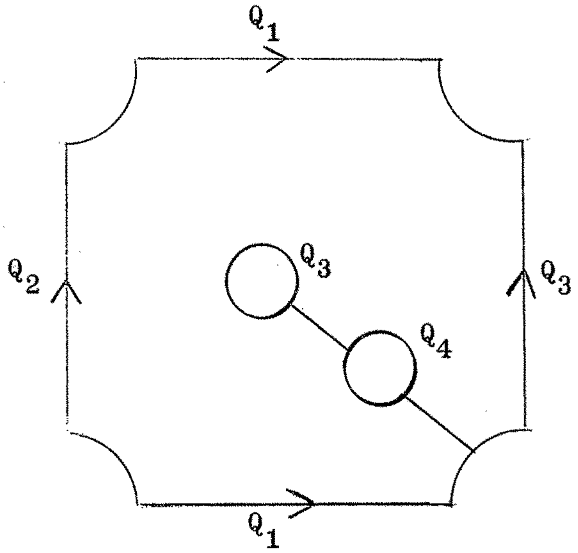
E. Construction d'un sous-cobordisme de M.

Lemme : Soit T une surface compacte connexe à bord non vide. Alors

a) T est asphérique; plus précisément T se rétracte par déformation sur un sous-complexe de dimension 1.

b) Il existe un famille d'arcs disjoints $Q_1, \ldots Q_n$ tels que $T - (\partial T \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_n)$ soit une 2-cellule.

Preuve : On sait que toute surface fermée peut être représentée comme le quotient d'un polygone du plan avec une identification convenable de ses côtés, identification qui identifie tous les sommets entre eux (cf. [2]). Pour obtenir une surface à bord, on fait un certain nombre de trous dans une surface fermée; l'un des trous sera choisi au point d'identification de tous les sommets du polygône précédent.



On joint les trous par des arêtes ne formant pas de circuit (sur la figure, Q_3, Q_4). Les autres arêtes annoncées dans b) sont les classes d'identification des côtés du polygône (Q_1, Q_2); elles sont sans point commun puisque l'on a percé la surface fermée précisément au point où elles se rencontraient. A partir de là le lemme est évident.

<u>Corollaire</u> : $\chi(T) = 1 - n$.

<u>Il existe une rétraction $r : M \to T_0$ qui prolonge la rétraction de ΔM sur ∂T_0 donnée par une trivialisation du cobordisme ΔM</u>.

On commence par construire une application $r_0 : M \to T_0$, telle que $r_{0*} : \pi_1(M) \to \pi_1(T_0)$ soit l'isomorphisme inverse de celui induit par l'injection $T_0 \hookrightarrow M$. On ne rencontre aucune obstruction dans la construction d'une telle application puisque T_0 est asphérique. Soit N un voisinage régulier de $T_0 \cup \Delta M$. Toutes les rétractions de N sont homotopes entre elles; en particulier $r_0|_{\Delta M}$ est homotope à une rétraction $r : N \to T_0$ qui sur ΔM a la propriété voulue. Mais $N \hookrightarrow M$ étant une cofibration r est prolongeable à M pour donner la rétraction cherchée.

De plus on pourra choisir r différentiable et transverse régulière sur les arcs Q_i que le lemme précédent nous aura fournis sur T_0.

Suivant un processus décrit au paragraphe C, il est possible de modifier r de sorte que, pour chaque composante R_j de $\cup\, r^{-1}(Q_i)$, l'inclusion $R_j \hookrightarrow M$ induise un monomorphisme $\pi_1(R_j) \to \pi_1(M)$. Notons simplement que le "Loop theorem" est applicable à R_j qui a un fibré normal trivial; si R_j sépare M en deux composantes cela résulte directement du théorème de Van Kampen; sinon on fait la construction de revêtement décrite au paragraphe A et on relit la remarque qui termine ce paragraphe. Enfin le fait que la modification sphérique effectuée sur R_j soit l'effet d'une homotopie de r découle de l'asphéricité de T_0.

Si on est arrivé à la situation où $R_j \hookrightarrow M$ induit un monomorphisme de groupes fondamentaux, alors $\pi_1(R_j)$ est nécessairement nul puisque $r(R_j)$ est inclus dans l'arc Q_j et que $r_* : \pi_1(M) \to \pi_1(T_0)$ est un isomorphisme. En particulier si R_j a un bord non vide, R_j est un disque; c'est le cas de la composante de $r^{-1}(Q_i)$ qui contient Q_i et que nous noterons D_i.

Un tel disque D_i rencontre T_0 suivant Q_i, ΔM suivant deux segments (relativement à la trivialisation qu'on a choisi pour ΔM) et T_1 suivant un arc Q_i'. Alors $\Delta M \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$ est un sous-cobordisme trivial de M entre $\partial T_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ et $\partial T_1 \cup Q_1' \cup \ldots \cup Q_n'$. Puisque M et $T_0 \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_n)$ sont connexes, il suit que le cobordisme complémentaire du précédent est connexe et que $T_1-(Q_1' \cup \ldots \cup Q_n')$ est connexe. Sachant que $\chi(T_1) = 1-n$ et que $\chi(T_1) = \chi(T_1-(Q_1' \cup \ldots \cup Q_n')) - n$, on voit que $T_1-(Q_1' \cup \ldots \cup Q_n')$ est un disque.

F. Construction d'une trivialisation de M.

Avec tous les renseignements que nous venons d'accumuler, il est facile de construire un prolongement
$h : T_0 \cup \Delta M \cup T_1 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n \to T_0 \times [0,1]$, prolongeant la trivialisation choisie de ΔM. On prolonge alors h à un voisinage régulier N. On remarque que $T_0 \times [0,1] - h(N)$ est une 3-cellule. Donc ∂N est une sphère qui borde une boule dans M. Alors le plongement
$h : \partial N \to T_0 \times [0,1]$ se prolonge en un isomorphisme de M-intN sur $T_0 \times [0,1] - h(\mathrm{int}\, N)$. Finalement on a bien une trivialisation du cobordisme M.

2éme cas : $\partial T = \emptyset$.

L'hypothèse d'irréductibilité interdit que T soit une sphère et $\mathbb{P}^2$ est également exclu. Les autres variétés fermées de dimension 2 ont les deux propriétés suivantes : elles sont asphériques et elles portent une courbe à deux côtés ne les séparant pas.

Soit C une telle courbe sur T. Comme dans le 1er cas il est possible de construire une rétraction $r : M \to T_0$, induisant l'isomorphisme inverse de celui induit par l'inclusion sur les groupes fondamentaux, et r pourra être choisie transverse régulière le long de C. Soit K la composante connexe de $r^{-1}(C)$ contenant C'. Par application du "Loop theorem" on se ramènera au cas où $\pi_1(K) \to \pi_1(M)$ est injectif. Dans ce cas, puisque K se projette sur C qui représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(T_0)$, nécessairement $\pi_1(K) = \mathbb{Z}$. Alors K est un anneau s'appuyant sur T_0 et T_1.

Soit M* le complémentaire dans M d'un voisinage tubulaire de K. Posons pour $i = 0,1$ $T_i^* = M^* \cap T_i$. M* est un cobordisme irréductible de T_0^* et T_1^*.

Si l'on parvient à démontrer que $T_0^* = T_1^*$ et que $\pi_1(T_i^*) \to \pi_1(M^*)$ est un isomorphisme, l'étude précédente permet d'affirmer que M* est un cobordisme trivial et qu'il en existe une trivialisation prolongeant une trivialisation donnée à l'avance de son "sous-cobordisme bord". Alors M, qui est la réunion sur le bord de deux cobordismes à bord, trivialisables tous les deux par des trivialisations coïcidant sur le bord, sera lui-même un cobordisme trivial, ce qui démontrera le théorème II.

• <u>$\pi_1(T_0^*) \to \pi_1(M^*)$ est injectif.</u>

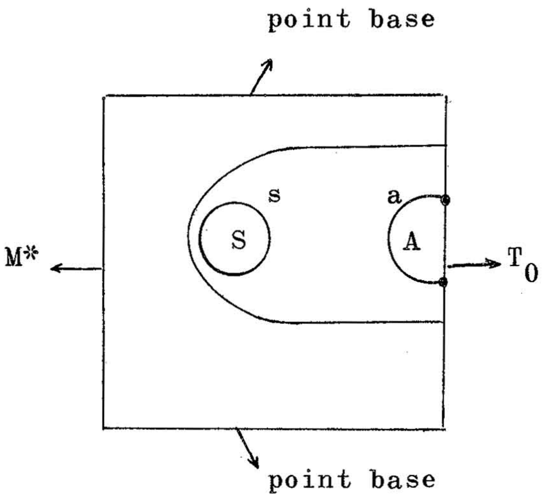
Par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(M^*) \arrow[dr] & \\ \pi_1(T_0^*) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(M) \\ & \pi_1(T_0) \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

il suffit de démontrer que $\pi_1(T_0^*) \to \pi_1(T_0)$ est injectif. Or C n'étant pas homotope à zéro dans T_0, $\pi_1(T_0^*)$ est un sous-groupe de $\pi_1(\tilde{T}_0)$, où $\tilde{T}_0$ est le revêtement ∞-cylindrique de T_0 obtenu en recollant bord à bord une infinité d'exemplaires de T_0^* (cf. paragraphe A).

• <u>$\pi_1(T_0^*) \to \pi_1(M^*)$ est surjectif.</u>

On sait qu'un lacet de M^* est déformable, à travers M, en un lacet de T_0. On met cette homotopie en position générale par rapport à K; nous avons donc une application $f : I \times I \to M$ telle que $f(I \times 0) = f(I \times 1) =$ le point base choisi dans T_0^*, que $f(0 \times I) \subset M - K$ et $f(1 \times I) \subset T_0$; enfin $f^{-1}(K)$ est formé d'un nombre fini de courbes fermées simples et d'arcs dont les extrémités appartiennent à $1 \times I$, toutes ces courbes étant disjointes.



Soient s une telle courbe fermée et S le domaine qu'elle limite (voir la figure). Puisque $\pi_1(K) \to \pi_1(M)$ est injectif, il est possible de modifier f sur S de sorte que $f(S) \subset K$. Si U est un voisinage de S assez petit, $f(U - S)$ se trouve d'un même côté de K. Alors il existe une homotopie à support dans U fournissant une nouvelle application $f : I \times I \to M$ telle que $f(U) \cap K = \emptyset$. Cette opération ne fait apparaitre aucune intersection nouvelle.

Soient maintenant $\underline{a}$ un arc de $f^{-1}(K)$ et A la partie qu'il délimite avec $1 \times I$. Puisque K est un cylindre on peut changer f sur A pour que $f(A) \subset K$ et que $f_{|A}$ soit une homotopie sur le cylindre de l'arc $f(\underline{a})$ jusqu'à sa projection sur C, qui est la base du cylindre. Pour la même raison que plus haut, si on met cette application en position générale par rapport à K, on tue l'intersection $\underline{a}$ sans faire apparaitre de nouvelles intersections.

On démontre de la même façon que $\pi_1(T_1^*) \to \pi_1(M^*)$ est un isomorphisme. En particulier T_0^* et T_1^* ont même groupe fondamental. Puisqu'elles sont simultanément orientables ou non, et qu'elles ont chacune un bord formé de deux cercles, il suit de la classification des variétés de dimension 2 que T_0^* et T_1^* sont difféomorphes.

C.Q.F.D.

REMARQUES SUR L'IRREDUCTIBILITE

Remarque 1 : Milnor a montré dans [3] l'équivalence suivante pour une variété M de dimension 3, fermée, connexe orientée, distincte de S^3 et de $S^1 \times S^2$:

1) M est irréductible

2) M est indécomposable dans le monoïde des variétés de dimension 3 pour l'opération de somme connexe.

Remarque 2 : J.H.C. Whitehead a prouvé dans [11] que si M est irréductible alors $\pi_2(M) = 0$. Dans [3], Milnor démontre que, si l'hypothèse de Poincaré est vraie, alors l'irréductibilité de M est équivalente à $\pi_2(M) = 0$.

Remarque 3 : Soit M un h-cobordisme entre deux variétés de dimension 2 T_o et T_1, difféomorphes, distinctes de P^2 et de S^2. Si T_o et T_1 ont un bord non vide, pour des raisons homologiques le cobordisme bord ∂M est trivial. Nous avons démontré qu'il existait une sous-variété W dans l'intérieur de M, bordé par une sphère S^2, de telle sorte que M - int W soit difféomorphe à $T_o \times [0,1]$ - un disque standard. Il est facile de vérifier que le W que nous avons construit est simplement connexe. Finalement, nous avons prouvé le théorème suivant :

Si M est un h-cobordisme et si $T_o \neq \mathbb{P}^2, S^2$, alors M est la somme connexe dans l'intérieur d'un cobordisme trivial avec une sphère de Poincaré.

L'hypothèse d'irréductibilité que nous avons faite sur M pour démontrer le théorème II, servait donc à affirmer que la sphère de Poincaré fournie par le théorème précédent était en fait une sphère standard.

UNE APPLICATION DU THEOREME DE FIBRATION

Ce qui suit a été également établi par L. Neuwirth [7].

Soit k un noeud dans S^3. Soit $G = \pi_1(S^2 - k)$ son groupe de noeud. On s'intéresse aux noeuds qui ont la propriété que $[G,G]$ est de type fini. L. Neuwirth démontre dans [6] que $[G,G]$ est libre de rang 2g et que k est le bord d'une surface S de genre g. Enfin $G/[G,G] = Z$. Si maintenant U désigne un voisinage tubulaire de k dans S^3 et si on note encore par S la trace de la surface précédente sur $S^3 - U$, on voit que S dans $S^3 - U$ satisfait toutes les conditions du théorème I, pour la paire de groupes $(G,[G,G])$. Puisque S^3 est irréductible, donc que le complémentaire dans S^3 de toute partie connexe est irréductible, le théorème II dit qu'il existe une fibration de $S^3 - U$ sur S^1 admettant S pour fibre.

Si l'on part d'un noeud k torique de type (p,q), où p et q sont deux entiers premiers entre eux, le genre est donné par la formule $g = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ ([6]). Ainsi g peut prendre toutes les valeurs possibles.

A l'aide de la fibration, on peut construire un feuilletage, admettant une composante de Reeb dans U et dans le complémentaire de U des feuilles non compactes homéomorphes à une surface de genre g moins un point. Cette remarque m'a été faite par A. Haefliger.

APPENDICE

<u>Proposition</u> : Soit G un groupe libre. Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe invariant d'indice infini. Alors, si H n'est pas réduit à l'élément neutre, H n'est pas de type fini.
(On rappelle que d'après Schreier H est libre).

<u>Démonstration</u> : Il existe un bouquet de cercles $X = V(S_i^1,\ i \in I)$ tel que G s'identifie au groupe fondamental de X relativement à son point base canonique x_o. Considérons un revêtement $E \xrightarrow{p} X$ de X et un point base $e_o \in E$ au-dessus de x_o, tels que $p_*(\pi_1(E,e_o)) = H$. Puisque H est d'indice infini dans G, $p^{-1}(x_o)$ est un ensemble infini. Soit alors $h \in H$, $h \neq 1$; cet élément est représenté par le lacet (minimal) λ de X obtenu en décrivant, dans des sens convenables, certains cercles du bouquet X. Dans $p^{-1}(x_o)$ il existe une infinité de points e_n, $n \in N$, tels que les relèvements λ_n de λ à partir de e_n soient tous disjoints. Puisque H est invariant dans G les λ_n sont des lacets en e_n : en effet, il existe $g_n \in G$, représenté par un lacet de X dont le relèvement dans E à partir de e_o ait pour extrémité e_n ; puisque $g_n\ h\ g_n^{-1} \in H$, $g_n\ h\ g_n^{-1}$ est représenté par un lacet qui se relève en un lacet, ce qui implique que λ_n est un lacet d'origine e_n. Alors, dans le CW-complexe E de dimension 1, un arbre maximal A (qui contient donc tous les sommets de E), ne contient jamais λ_n, quelque soit $n \in N$. Il en résulte que $H \cong \pi_1(E,e_o)$ n'est pas de type fini.

<u>cqfd</u>

<u>Remarque</u> : le raisonnement précédent permet de retrouver aussi le fait que tout $h \in H$, $h \neq 1$, appartient à une famille basique de H, avec la seule hypothèse que G soit libre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Haefliger, Knotted (4k - 1)-spheres in 6k-space,
Ann. of Math. 75 (1962) p. 452-466. (Lire p. 460-461).

[2] S. Lefschetz, Introduction to topology,
Princeton University Press, 1949.

[3] J. Milnor, A unique decomposition theorem for 3-manifolds,
Amer. J. of Math. 84 (1962), p. 1-7.

[4] L. Neuwirth, Thèse, Princeton University, 1959.

[5] L. Neuwirth, Knot groups, Annals of Math. Study 56,
Princeton University Press, 1965 (Cf. Chap. IV).

[6] L. Neuwirth, The algebraic determination of the genus of knots,
Amer. J. Math. 82 (1960), p. 781-798.

[7] L. Neuwirth, On Stallings fibrations,
Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), p. 380-381.

[8] C.D. Papakyriakopoulos, On solid tori,
Proc. London Math. Soc. (3) Vol. 7 (1957), p. 281-299.

[9] J. Stallings, On fibering certain 3-manifolds, Topology of
3-manifolds and related topics,
Proceedings of the 1961 Topology Institute, Prentice Hall.

[10] A. Wallace, Differential topology, Benjamin 1968.

[11] J.H.C. Whitehead, 2-spheres in 3-manifolds,
Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), p. 161-166.