

N° 202

**Relations d'ordre et structures
associatives**

Thérèse MERLIER

26659

N° 202



RELATIONS D'ORDRE ET
STRUCTURES ASSOCIATIVES

Thérèse MERLIER

A LA MEMOIRE DE

Madame M.L. DUBREIL - JACOTIN

RELATIONS D'ORDRE

ET

STRUCTURES ASSOCIATIVES

INTRODUCTION

Les relations d'ordre apparaissent naturellement dans de nombreuses études mathématiques ; les propriétés supplémentaires que l'on peut attribuer à ces relations, ou même le simple fait de les considérer permettent souvent de démontrer des propriétés des ensembles sur lesquels elles sont définies : par exemple, la notion de déviation (ou dimension de Krull) dans les modules conduit à certains énoncés : "Tout module non nul avec déviation est de dimension finie". (cf [13] et [14]). De même le fait d'imposer au treillis des idéaux d'un anneau d'être distributif conduit à l'importante classe des anneaux arithmétiques, cf [10].

Dans le cas où E est un ensemble sur lequel est définie une loi associative (que nous noterons toujours multiplicativement) et sur lequel est définie une relation d'ordre isotone par rapport à cette multiplication, les propriétés de E sont assez mal connues. Des études assez complètes ont été faites dans le cas où E est un groupe, un anneau ou un corps, cf [9] et [22], mais peu de choses ont été faites dans le cas où E est un demi-groupe, i.e. ^{un} ensemble sur lequel est définie une loi associative.

De telles structures ordonnées se rencontrent cependant couramment : $\mathcal{P}(X)$, ensemble des parties de X , si l'on a défini sur X une loi associative, $\mathcal{V}(E, F)$, ensemble des applications de E dans F où F est par exemple un groupe ordonné.

Une grande partie de notre travail est consacrée à la théorie des demi-groupes totalement ordonnés. Le but recherché était de trouver des conditions nécessaires et suffisantes, algébriques, pour qu'un demi-groupe S puisse être totalement ordonné, c'est-à-dire pour que l'on puisse définir sur S une relation d'ordre total $\leq$ telle que : $a \leq b$ implique $ac \leq bc$ et $ca \leq cb$ pour tout a, b, c de S . On dit encore dans ce cas que S est un σ -demi-groupe. Ce problème était "ouvert" depuis le début de la théorie des demi-groupes ordonnés. Les premières recherches sur ces demi-groupes ont été faites dès 1950, par Alimov [1]. Depuis, de nombreuses questions ont

été posées sur ce sujet par L. Fuchs dans son livre "Partially ordered algebraic systems" et par l'école russe dans "les cahiers de Sverdlovsk" [29].

Lors des premiers essais de caractérisation "des σ -demi-groupes" on imposa aux demi-groupes des propriétés supplémentaires : commutativité [5], idempotence [26], ou on imposa à la relation d'ordre des propriétés supplémentaires : ordre naturel [6], ordre tel que le demi-groupe n'admette pas de sous demi-groupes convexes [18].

Nous avons, nous aussi, effectué des recherches dans ces deux directions, mais nous avons donné également deux caractérisations dans le cas général (chapitre 3). Nous donnons un résultat important (Théorème 3.2.) qui permet de se ramener au cas des demi-groupes finiment engendrés. Cela nous conduit à décrire les σ -demi-groupes localement finis et à étudier les bandes, les nildemi-groupes, les demi-groupes nilpotents. Ces derniers σ -demi-groupes sont totalement caractérisés (chapitre 4, chapitre 5).

D'autre part, la considération des demi-groupes ordonnés nous a amenée à étudier les propriétés de certains demi-groupes et même à étudier certains anneaux.

Les méthodes utilisées sont de plus originales.

De façon plus détaillée, le plan de notre travail s'établit ainsi :

Les deux premiers chapitres traitent des nildemi-groupes (demi-groupes avec zéro dans lesquels tout élément a une puissance nulle), des demi-groupes nilpotents (demi-groupes S tels que $S^n = 0$) et des demi-groupes dont une puissance est un idéal (0)-minimal (à gauche). Ces demi-groupes sont encore appelés demi-groupes de profondeur finie (de profondeur gauche finie), et sont utiles en théorie des codes bipréfixes, cf. par exemple la thèse de D. Perrin [24] .

Nous caractérisons ces demi-groupes par leurs idéaux. Les demi-groupes de profondeur finie forment une bonne généralisation des demi-groupes nilpotents quant aux propriétés de leurs idéaux. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de les étudier systématiquement, après l'étude des

demi-groupes nilpotents.

D'autre part, peu de choses ont été faites sur les nilpotents, cas très pathologique dans l'étude des demi-groupes. Cependant, comme d'après [25] , tout demi-groupe abélien fini est par exemple produit sous direct de groupes et de demi-groupes nilpotents, l'étude qui est faite ici revêt une certaine importance en théorie des demi-groupes.

Le chapitre 3 se divise en deux parties. Dans le premier paragraphe, nous apportons une réponse à un problème posé par L. Fuchs [[9], problème n°41] à savoir : caractériser les demi-groupes réticulés qui sont produit sous direct de demi-groupes totalement ordonnés. Cela nous permet de donner en un premier temps une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe soit un σ -demi-groupe. Dans le second paragraphe, nous abordons ce problème par le biais du Calcul Propositionnel, et démontrons [Théorème 3.2.] qu'un demi-groupe est un σ -demi-groupe, si et seulement si tout sous demi-groupe de type fini est un σ -demi-groupe. Un corollaire immédiat, mais important est qu'alors un demi-groupe localement fini est un σ -demi-groupe, si et seulement si tous ses sous demi-groupes finis sont des σ -demi-groupes. Nous examinons donc de tels demi-groupes dans les chapitres suivants .

Ainsi dans le chapitre 4 nous considérons les demi-groupes nilpotents et les nil demi-groupes et caractérisons ceux qui sont des σ -demi-groupes.

Dans le chapitre 5, nous caractérisons les demi-groupes idempotents finis (ou bandes) qui sont totalement "ordonnables". Cela permet de les construire et de caractériser toutes les σ -bandes.

Dans un article [28] , T. Saito avait décrit les demi-groupes complètement simples (donc sans zéro) qui sont totalement ordonnables. Dans le chapitre 6, nous examinons le cas des demi-groupes avec zéro 0-simples et complètement 0-simples. Nous caractérisons ceux de ces derniers qui sont des σ -demi-groupes et ce, en utilisant la représentation en matrices de Rees des demi-groupes complètement 0-simples. Les demi-groupes complètement 0-simples ordonnés ont été étudiés, par E.A. Behrens dans [2] ; leur

étude peut se rattacher à celle des anneaux premiers et arithmétiques. Nous déterminons aussi (Théorème 6.16) tous les demi-groupes de Matrices de Rees qui sont des σ -demi-groupes.

Le chapitre 7 traite lui aussi des demi-groupes ordonnés, mais nous nous préoccuons essentiellement des sous demi-groupes convexes et des idéaux convexes de ces demi-groupes. Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous caractérisons les demi-groupes ordonnés dont l'ensemble des sous demi-groupes convexes est une chaîne de $\mathcal{P}(S)$, ou plus généralement un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$ (Théorème 7.4, 7.5, 7.8). Dans la seconde partie, nous apportons une solution à un problème posé par E. Ja. Gabovic [29] : déterminer les demi-groupes ordonnés n'admettant aucun idéal convexe propre.

Les deux derniers chapitres apportent une certaine contribution à la théorie des anneaux (non unitaires). Le chapitre 8 a trait aux idempotents d'un anneau : nous démontrons en particulier [Théorème 8.12] que si e est un idempotent non nul tel que $ef = e$ pour tout idempotent f non nul, alors $gf = g$ pour tout autre idempotent g .

Le chapitre 9 traite des anneaux dont une puissance est somme de corps ; nous les caractérisons dans le cas abélien. Nous en donnons des propriétés dans le cas général et montrons que certaines de leurs propriétés sont semblables à celles des anneaux artiniens (non unitaires) : identité entre idéaux premiers et idéaux maximaux, radical de Jacobson nilpotent. Le dernier chapitre est à relier au second, qui traitait d'un problème analogue, mais dans le cadre "demi-groupe".

Une grande partie des résultats énoncés dans ce travail ont déjà été publiés. Lorsque nous pensons qu'il est inutile d'y apporter des modifications, nous les insérons (entièrement ou en partie).

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur L. LESIEUR qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et me permettre de travailler durant ces dernières années sous sa direction.

Je remercie également Monsieur M.P. SCHUTZENBERGER pour ses encouragements qui ont été si utiles et pour sa participation à ce jury. Je sais gré à Monsieur G. SABBAGH de s'être intéressé à mon travail et de m'avoir préparé un sujet de seconde thèse. Mes remerciements vont également à Madame M.P. MALLIAVIN et à Monsieur Y. MEYER qui ont bien voulu être membres du Jury.

Je voudrais aussi remercier tous ceux qui à des titres divers m'ont aidée dans la réalisation de ce travail ; notamment Monsieur J.F. PERROT pour son amical soutien et Monsieur P. DUBREIL dont le séminaire d'Algèbre m'a été d'une grande utilité, et qui de plus m'a toujours témoigné des marques de bienveillance

Mes remerciements vont aussi aux équipes de dactylographie et d'imprimerie des U.E.R. 47 et 110 de l'Université Pierre et Marie Curie, sans qui les difficultés matérielles n'auraient pu être aplanies.

Qu'il me soit enfin permis de rendre hommage à la mémoire de Madame M.L. DUBREIL-JACOTIN dont l'enseignement et la bienveillance amicale m'ont encouragée à entreprendre et à poursuivre des recherches mathématiques. Une grande partie de cette thèse a été écrite sous sa direction ; je ne saurais l'oublier.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : Idéaux des demi-groupes nilpotents	page 9
Chapitre 2 : Généralisation des demi-groupes nilpotents	page 17
§1. Demi-groupes de profondeur gauche finie	page 18
§2. Exemples. Contre exemples	page 25
§3. Demi-groupes G -potents, G^0 -potents	page 26
Chapitre 3 : Demi-groupes réticulés et totalement ordonnés	page 28
§1. Sur les demi-groupes réticulés et les σ -demi-groupes	page 29
§2. Calcul Propositionnel et demi-groupes totalement ordonnés	page 36
Chapitre 4 : Demi-groupes nilpotents et nildemi-groupes totalement ordonnés	page 39
§0. Préliminaires	page 40
§1. Quelques propriétés algébriques des nildemi-groupes totalement ordonnés	page 42
§2. Caractérisation des nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés	page 43
§3. Nildemi-groupes vérifiant (*) totalement ordonnés	page 46
§4. Exemples	page 48
§5. Nildemi-groupes quelconques totalement ordonnés	page 50
§6. Cas particulier	page 51
Chapitre 5 : Bandes totalement ordonnées	page 53
§1. Introduction	page 54
§2. Caractérisation des σ -bandes finies	page 56
§3. Construction des σ -bandes finies	page 73
§4. Compléments	page 77

Chapitre 6 : Demi-groupes complètement 0-simples ; demi-groupes de Matrices de Rees totalement ordonnés	page 83
§1. Demi-groupes 0-simples totalement ordonnés	page 83
§2. Demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés	page 85
§3. Matrices de Rees sur un groupe avec zéro	page 87
Chapitre 7 : Sous demi-groupes convexes. Idéaux convexes dans les demi-groupes ordonnés	page 95
§1. Sous demi-groupes convexes des demi-groupes réticulés et totalement ordonnés	page 96
§2. Demi-groupes totalement ordonnés sans idéaux convexes	page 102
A. Quelques propriétés des demi-groupes ordonnés c-simples	page 103
B. Demi-groupes périodiques totalement ordonnés c-simples	page 106
C. Construction des demi-groupes totalement ordonnés c-simples	page 109
Chapitre 8 : Sur les Idempotents d'un anneau	page 111
§1. σ -demi-groupes et anneaux	page 111
§2. Idempotents d'un anneau	page 114
Chapitre 9 : Anneaux dont une puissance est une somme de corps	page 118
§1. Anneaux K-potents	page 119
§2. Généralisation de la notion d'anneau K-potent	page 120
Bibliographie	page 125

Dans les pages qui suivent, nous conservons les notations et définitions de [7] en ce qui concerne les demi-groupes et celles de [9], en ce qui concerne les structures ordonnées.

Rappelons les définitions essentielles, utilisées dans la suite sans rappel :

Si S est un demi-groupe, i.e. un ensemble muni d'une loi associative notée $\cdot$, S^1 désigne le demi-groupe unitaire, ou monoïde, associé : $S^1 = S \cup \{1\}$, dans lequel $1.x = x.1 = x$ pour tout x de S , $1.1 = 1$.

$\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ désignent les équivalences de Green et elles sont définies dans S par :

$$a \equiv b(\mathcal{L}) \iff S^1 a = S^1 b$$

$$a \equiv b(\mathcal{R}) \iff a S^1 = b S^1$$

$$a \equiv b(\mathcal{H}) \iff a \equiv b(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$$

$$a \equiv b(\mathcal{D}) \iff \exists c \in S, \text{ tq } a \equiv c(\mathcal{L}) \text{ et } c \equiv b(\mathcal{R})$$

$$\iff \exists d \in S, \text{ tq } a \equiv d(\mathcal{R}) \text{ et } d \equiv b(\mathcal{L}).$$

I est un idéal à gauche [à droite, bilatère], si I est une partie permise à gauche [à droite, des deux côtés], c'est-à-dire si $SI \subseteq I$.

CHAPITRE 1

IDEAUX DES DEMI-GROUPES NILPOTENTS

Le sujet de ce chapitre a déjà donné lieu à l'une de nos publications, $[M_1]$. Toutefois, tous les résultats donnés dans cet article $[M_1]$ ne figurent pas dans ce chapitre ; d'autre part, les Propositions 1.3, 1.4, et le Théorème 1.5 sont nouveaux et n'ont été ni publiés, ni exposés.

Dans ce premier chapitre, nous établissons plusieurs propriétés du treillis des idéaux d'un demi-groupe nilpotent. En particulier, nous caractérisons ces demi-groupes par le treillis de leurs idéaux bilatères (Théorème 1.5). Nous généralisons également un théorème de T. Tamura et M. Yamada $[31]$, ce qui nous permet d'affirmer, que tout demi-groupe nilpotent, s'il est de cardinal supérieur ou égal à 2, est extension idéale d'un demi-groupe nilpotent par un zéro-demi-groupe d'ordre 2. Tamura et M. Yamada établissaient ce théorème seulement dans le cas fini et abélien.

Les résultats de ce chapitre nous seront utiles dans le chapitre 4.

Rappelons quelques définitions.

DEFINITION 1.1.

Un demi-groupe S est nilpotent (d'indice n), si S est un demi-groupe avec zéro, 0 , et si tout produit de n facteurs est nul, ce qui s'écrit $S^n = 0$.

DEFINITION 1.2.

Un nildemi-groupe S est un demi-groupe avec zéro, 0 , dans lequel pour tout élément x , il existe un entier p tel que $x^p = 0$.

Il est clair que tout demi-groupe nilpotent est un nildemi-groupe. La réciproque est en général fausse, mais vraie dans le cas où le treillis des idéaux vérifie la condition de chaîne descendante ; la démonstration est alors semblable à celle donnée pour les anneaux dans [17], ch. 4 §10. Il y a donc en particulier identité entre les nildemi-groupes finis et les demi-groupes nilpotents finis. Les nildemi-groupes finis abéliens ont été étudiés par T. Tamura et M. Yamada, dans [30] et [31] .

Dans un nildemi-groupe, si $x = xay$ avec $(x,y) \in S \times S^1 \cup S^1 \times S$, $a = x^n ay^n$ pour tout entier n , donc $a = 0$. Il en résulte que les équivalences de Green sont l'égalité dans les nildemi-groupes.

Par convention $\emptyset$ est un idéal, et si 0 est le zéro, 0 est le plus petit idéal non vide.

PROPOSITION 1.3.

Soit S un demi-groupe nilpotent, et soient I et J deux idéaux bilatères [à gauche, à droite] de S , tels que I est strictement inclus dans J . Alors il existe un élément x de $J-I$ tel que $I \cup \{x\}$ est un idéal bilatère [à gauche, à droite] de S .

Nous raisonnons dans le cas où I est un idéal bilatère. Si I est $\emptyset$, on prend $x = 0$. Sinon, $I \cup S^1 \times S^1$ étant un idéal, il nous suffit, de trouver un élément x de $J-I$ tel que $I \cup S^1 \times S^1 = I \cup \{x\}$, c'est-à-dire un élément x vérifiant :

$$x \in J-I \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in S \times S^1 \cup S^1 \times S, \alpha x \beta \in I.$$

(On ne peut en effet avoir $\alpha x \beta = x$ puisque x est non nul).

Supposons que ceci soit faux, et soit $x_1 \in J-I$; il existe $(\alpha_1, \beta_1) \in S \times S^1 \cup S^1 \times S$ tel que $\alpha_1 x_1 \beta_1 \notin I$, mais $x_1 \in J$ (idéal) implique $\alpha_1 x_1 \beta_1 \in J$, donc $x_2 = \alpha_1 x_1 \beta_1 \in J-I$. Donc il existe $(\alpha_2, \beta_2) \in S^1 \times S \cup S \times S^1$, tel que $x_3 = \alpha_2 x_2 \beta_2 = \alpha_2 \alpha_1 x_1 \beta_1 \beta_2 \in J-I$. En itérant l'opération, on trouve x_{p+1} avec $x_{p+1} \in J-I$ et $x_{p+1} = \alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_1 x_1 \beta_1 \dots \beta_{p-1} \beta_p$, où pour tout i , α_i ou $\beta_i \in S$. Par suite, x_{p+1} est produit d'au moins $p+1$ facteurs et est égal à 0, si S^p est nul. On a ainsi une contradiction : $x_{p+1} \notin I$ et $x_{p+1} = 0$.

PROPOSITION 1.4.

Toute chaîne maximale d'idéaux à droite [à gauche, bilatères] d'un demi-groupe nilpotent S est une chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$, ensemble des parties de S .

Soit $\mathcal{C} = (I_\lambda), \lambda \in \Lambda$ une chaîne maximale d'idéaux, à droite par exemple, de S . Cette chaîne contient nécessairement $\emptyset, \{0\}$ et S . Pour toute sous famille $(I_\alpha), \alpha \in M$, $\bigcap_\alpha I_\alpha$ et $\bigcup_\alpha I_\alpha$ appartiennent à $\mathcal{C}$: il est en effet immédiat de vérifier que tout idéal I de $\mathcal{C}$ est comparable à $\bigcap_\alpha I_\alpha$ et à $\bigcup_\alpha I_\alpha$. Supposons que $\mathcal{C}$ n'est pas une chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$; alors il existe un élément A de $\mathcal{P}(S)$, tel que $\mathcal{C} \cup \{A\}$ est une chaîne de $\mathcal{P}(S)$ et tel que A n'est pas un idéal à droite ($A \notin \mathcal{C}$). A ne peut être $\emptyset, \{0\}$ ou S . Donc il existe des éléments I_λ et I_μ de $\mathcal{C}$, tels que $I_\lambda \subsetneq A \subsetneq I_\mu$. Soit $J = \bigcup I_\beta$, $I_\beta \in \mathcal{C}$ et $I_\beta \subset A$, et soit $K = \bigcap I_\gamma$, $I_\gamma \in \mathcal{C}$, $A \subset I_\gamma$. Les idéaux J et K appartiennent à $\mathcal{C}$ et vérifient $J \subsetneq A \subsetneq K$, puisque A n'est pas un idéal. Si I est un élément quelconque de $\mathcal{C}$, on a $I \subset A$ ou $A \subset I$, étant donné que $I \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C} \cup \{A\}$, chaîne de $\mathcal{P}(S)$; donc $I \subsetneq J$ ou $K \subsetneq I$. Mais des inégalités strictes $J \subsetneq A \subsetneq K$, il résulte d'après la Proposition 1.3., qu'il existe un élément x de $K-J$, tel que $J \subset J \cup \{x\} \subsetneq K$ et tel que $J \cup \{x\}$ est un idéal à droite ; mais alors tout idéal de $\mathcal{C}$ est aussi comparable à $J \cup \{x\}$ et $\mathcal{C} \cup \{J \cup \{x\}\}$ est une chaîne d'idéaux contenant strictement $\mathcal{C}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$.

THEOREME 1.5.

Un demi-groupe S est nilpotent, si et seulement si S admet au plus un idempotent et si S admet une chaîne d'idéaux bilatères, qui est une chaîne maximale de l'ensemble des parties de S , $\mathcal{P}(S)$, ayant pour éléments particuliers $S, S^2, \dots, S^n, \dots$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Condition Nécessaire.

Si S est nilpotent d'indice p , nous avons la chaîne d'idéaux : $\emptyset \subset \{0\} = S^p \subset S^{p-1} \subset \dots \subset S^2 \subset S$. Cette chaîne d'idéaux peut se raffiner en une chaîne maximale d'idéaux bilatères, grâce au théorème de Zorn. Mais d'après la Proposition 1.4., cette chaîne maximale d'idéaux est une chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$. Enfin tout idempotent d'un demi-groupe nilpotent est nul, puisqu'il appartient à S^n pour tout n .

Condition Suffisante.

Soit $\mathcal{C}$ cette chaîne maximale d'idéaux de S , maximale dans $\mathcal{P}(S)$. Le plus petit élément de $\mathcal{C}$ est $\emptyset$, le plus grand S . Toute chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$ a un atome qui est réduit à un seul élément de S ; cela signifie donc que S admet un idéal réduit à un élément, c'est-à-dire un zéro, noté 0 . Soit $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S^n$: tous les éléments S^n , $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à $\mathcal{C}$; donc si K est un élément quelconque de $\mathcal{C}$, il est comparable à I . Comme $\mathcal{C}$ est maximale, I est un élément de $\mathcal{C}$. Montrons maintenant que $I = S^k$ pour un certain entier k . Si $I = S$, le problème est résolu. Si $I \neq S$, il existe un élément t , $t \notin I$, tel que $I \cup \{t\}$ est un idéal bilatère de S et appartient à $\mathcal{C}$ ($I \cup \{t\}$ est l'élément de $\mathcal{C}$ couvrant I dans $\mathcal{C}$). Or $t \notin I$ implique qu'il existe k tel que $t \notin S^k$ et alors $S^k \subsetneq I \cup \{t\}$, puisque S^k et $I \cup \{t\}$ appartiennent à $\mathcal{C}$ d'où $I \subsetneq S^k \subsetneq I \cup \{t\}$, et par suite $I = S^k$. $I = S^k$ implique $I = S^k = S^{k+1}$. Montrons que $I = 0$. Si $I \neq 0$, il existe un élément $x \neq 0$, tel que $I - \{x\}$ est un idéal bilatère, puisque $\mathcal{C}$ est une chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$; donc $S(I - \{x\}) \subseteq I - \{x\}$ et $(I - \{x\})S \subseteq I - \{x\}$, ce qui signifie encore que $x \notin Sy \cup zS$ pour tout y et z de $I - \{x\}$. Mais $x \in I = IS$, donc $x = tt'$ avec $t \in I$ et $t' \in S$; comme $x \notin (I - \{x\})S$, nécessairement $t = x$ et $x = xt'$. D'où $x = xt'^k$,

avec $t'^k \in S^k = I$; et par suite $t'^k = x$, puisque $x \notin S(I - \{x\})$. Donc $x = x^2$ est un idempotent, nécessairement nul par hypothèse ; il y a contradiction. Ainsi $I = S^k$ est l'idéal 0 et S est un demi-groupe nilpotent.

Suivant la terminologie de G. Birkhoff [3], nous dirons qu'un treillis fini T est de longueur n , si les chaînes maximales de T ont $n+1$ éléments ; dans le cas où le treillis est distributif, si l'une des chaînes maximales est de longueur n , les autres chaînes ont même longueur. Avec ces définitions et propriétés, et en utilisant le résultat classique à savoir que l'ensemble des idéaux d'un demi-groupe est un treillis distributif, on a :

THEOREME 1.6.

Un demi-groupe S fini, ayant n éléments, est un nildemi-groupe si et seulement si, S admet au plus un idempotent et si le treillis des idéaux de S est de longueur n .

Si S est fini d'ordre n et si le treillis des idéaux de S est de longueur n , on a une chaîne maximale d'idéaux $\emptyset \subset I_1 \subset I_2 \dots \subset I_n = S$, qui est une chaîne maximale de $\mathcal{P}(S)$. Donc $I_1 = \{0\}$ où 0 est le zéro de S . Tout élément x étant d'ordre fini, l'une de ses puissances x^p est un idempotent donc égale 0 , et S est un nildemi-groupe.

Réciproquement, si on applique la Proposition 1.3. à l'idéal 0 de S et à S , il existe a_2 tel que $\{0, a_2\}$ est un idéal de cardinal 2. On construit ainsi par adjonction successive d'éléments une suite strictement croissante, évidemment maximale, d'idéaux de S , de longueur n : $\emptyset \subset \{0\} \subset \{0, a_2\} = I_2 \subset \dots \subset I_n = \{0, a_2, \dots, a_n\} = S$. Le treillis des idéaux de S est donc bien de longueur n .

PROPOSITION 1.7.

Soit S un demi-groupe nilpotent d'indice p ; si I est un idéal bilatère (à gauche, à droite) non vide, il existe x dans I , tel que $I - \{x\}$ est un idéal bilatère (à gauche, à droite) de S .

Raisonnons dans le cas où I est un idéal bilatère ; si $SI = IS = 0$, il est clair que $I - \{x\}$ est pour tout $x \neq 0$ un idéal de S ; si $I = 0$, l'idéal vide $\emptyset$ répond à la question. Si SI est différent de 0 , montrons que $SI \cup IS$ est strictement inclus dans I . Si nous avons $SI \cup IS = I$, alors pour tout x de I , il existerait $s_1 \in S, i_1 \in I$ tels que $x = s_1 i_1$ par exemple, mais comme $i_1 = i_2 s_2$ ou $s_2 i_2$ avec $i_2 \in I$, on pourrait décomposer x en p facteurs, et on aurait $x = 0$. De l'inégalité $SI \cup IS \subsetneq I$ résulte qu'il existe $x \in I, x \notin SI \cup IS$, et par suite on a bien les inclusions $S(I - \{x\}) \subseteq I - \{x\}, (I - \{x\})S \subseteq I - \{x\}$, et $I - \{x\}$ est un idéal bilatère.

Nous allons maintenant étudier les extensions de demi-groupes nilpotents. Pour les définitions et propriétés des extensions idéales de demi-groupes, nous renvoyons à [7], chapitre 4. Rappelons cependant :

DEFINITION 1.8.

Si I est un idéal bilatère d'un demi-groupe S , notons $\equiv$ la relation d'équivalence définie par : $a \equiv b$ (I) si et seulement si a et b appartiennent à I ou si $a = b$; alors le demi-groupe quotient $S/\equiv$ est appelé quotient de Rees de S par I et est noté S/I .

DEFINITION 1.9.

Soient S et T deux demi-groupes disjoints, T ayant un zéro 0 . Un demi-groupe $\sum$ est appelé extension (idéale) de S par T si $\sum$ admet S comme idéal bilatère et si le demi-groupe quotient de Rees $\sum/S$ est isomorphe à T .

PROPOSITION 1.10.

Tout nildemi-groupe fini d'ordre $n \geq 2$ est extension idéale d'un nildemi-groupe d'ordre $n-1$ par un zéro-demi-groupe d'ordre 2 .

D'après la proposition 1.7., il existe un élément x du nildemi-groupe fini S , tel que $S - \{x\}$ soit un idéal ; dans ce cas, le quotient de Rees $S/S - \{x\}$ est un zéro-demi-groupe d'ordre 2 .

Cette propriété était donnée dans le cas abélien et fini par T. Tamura dans [30]. Dans le cas où S est nilpotent, on peut d'ailleurs énoncer un théorème analogue à celui donné dans le cas où S est un nilsemi-groupe abélien fini. Plus exactement on a

THEOREME 1.11.

Soit S un demi-groupe nilpotent, sur lequel on a pu définir deux applications φ et ψ vérifiant :

- φ est une translation à droite

$$(\forall x, \forall y \in S, \varphi(xy) = x\varphi(y))$$

- ψ est une translation à gauche

$$(\forall x, \forall y \in S, \psi(xy) = \psi(x)y)$$

- $\forall x \in S, \forall y \in S, \varphi(x)y = x\psi(y)$

- φ^2 et ψ^2 sont respectivement les translations internes à droite

et à gauche définies par un élément b de S .

$$(\varphi^2(x) = xb, \psi^2(x) = bx.)$$

Alors $T = \{a\} \cup S$, où $a \notin S$, est une extension idéale de S par un zéro-demi-groupe d'ordre 2, si l'on définit dans T l'opération , par

$$x..y = \begin{cases} = xy & , \text{ si } x \text{ et } y \in S \\ = \varphi(x) & , \text{ si } y = a \text{ et } x \in S \\ = \psi(y) & , \text{ si } x = a \text{ et } y \in S \\ = b & , \text{ si } x \text{ et } y = a \end{cases}$$

et de plus, T est un demi-groupe nilpotent pour l'opération . ;

Réciproquement, tout demi-groupe nilpotent (d'ordre ≥ 2) s'obtient de cette façon.

Les conditions imposées sur φ et ψ permettent de voir que . est une opération associative, et que par suite T est nilpotent.

Réciproquement, si T est un demi-groupe nilpotent, il existe (cf. Proposition 1.7.

un élément a tel que $T = \{a\} \cup S$, où $a \notin S$ et où S est un idéal de T . Si

nous appelons φ l'application de S dans T définie par $\varphi(x) = xa$, ψ l'application de S dans T définie par $\psi(x) = ax$, φ et ψ sont en fait des applications de S dans S , qui vérifient bien les conditions du Théorème ; b est alors égal à a^2 .

CHAPITRE 2

GENERALISATION DES DEMI-GROUPES NILPOTENTS

Si S est un demi-groupe, pour tout entier n , le quotient de Rees S/S^n (pour la définition, voir Chapitre 1, Définition 1.8.) est nilpotent. Nous allons, dans ce chapitre, montrer que si S^n a pour un certain entier n une propriété de minimalité (à savoir S^n est un idéal 0 minimal d'un côté), S se caractérise au moyen de S^n et S/S^n , Théorèmes 2.12 et 2.16. De plus, dans ce cas, les idéaux de S ont des propriétés analogues à celles des demi-groupes nilpotents.

Cette situation peut se produire dans le cas où le demi-groupe S admet un groupe G comme puissance $n^{\text{ième}}$ [S est alors dit G^0 -potent]. Elle apparaît aussi de façon naturelle (et indispensable) dans l'étude des codes, cf [24]. En particulier, on trouve dans [24], le théorème : un code fini C est bipréfixe, si et seulement si le demi-groupe M associé au monoïde syntaxique $M(C^*)$ est tel que l'une de ses puissances M^n est égale à l'idéal minimal de M . On dit alors que M est de profondeur finie. Aussi la suite de D. Perrin, nous donnerons la définition suivante :

DEFINITION 2.1. : Un demi-groupe S est de profondeur gauche [droite] finie, s'il existe un entier n tel que S^n est un idéal (0) -minimal à gauche, [à droite] .

Les propriétés élémentaires des idéaux (0) -minimaux sont donnés dans [7], Chapitre 2.

Nous^{me} considérerons ici que des demi-groupes avec zéro. Si un demi-groupe S est sans zéro, il suffit pour lui appliquer les résultats qui vont suivre de lui adjoindre formellement un zéro, et de considérer S^0 .

Les résultats concernant les demi-groupes G^0 -potents ont été exposés

dans $[M_2]$, au cours du Séminaire de 1975 ; on y trouvera d'ailleurs quelques propriétés supplémentaires. Par contre, tous les théorèmes relatifs aux demi-groupes dont une puissance est un idéal 0-minimal d'un côté (i.e. demi-groupes de profondeur gauche ou droite finie) sont nouveaux.

§1. Demi-groupes de profondeur gauche finie.

Soit S un demi-groupe non nilpotent tel que $M = S^n$ est un idéal 0-minimal à gauche. (i.e. M est un idéal minimal parmi les idéaux à gauche non nuls de S).

LEMME 2.1. : M est un demi-groupe 0-simple à gauche.

Il faut donc démontrer que M^2 est non nul et que les seuls idéaux à gauche de M sont 0 et M . M est un idéal bilatère, puisqu'il est égal à S^n . Comme S n'est pas nilpotent, M^2 n'est pas nul ; donc M est un idéal 0-minimal bilatère. D'après le lemme 2.35 de [7], M étant idéal 0-minimal de S et contenant un idéal 0-minimal à gauche de S , à savoir lui-même, tout idéal à gauche de M est aussi idéal à gauche de S . Comme M est 0-minimal à gauche dans S , M est un demi-groupe 0-simple à gauche. Ainsi $Ma = M$ pour tout a de M , $a \neq 0$.

DEFINITION 2.2. : E est un zéro-demi-groupe à gauche si $ef = e$ pour tout e et tout f du demi-groupe E .

LEMME 2.3. : Si M est un demi-groupe 0-simple à gauche, $M - \{0\} = M^*$ est un demi-groupe.

LEMME 2.4. : Soit M un demi-groupe 0-simple à gauche, dont l'ensemble E des idempotents non nuls est ^{non}vide. Alors

- a) M^* est simplifiable à droite ($ab = cb \implies a = c$)
- b) M^* vérifie l'axiome des quotients à gauche : $\forall x \in M^*, \forall y \in M^*,$

$\exists! z \in M^*, zy = x.$

c) E est un zéro-demi-groupe à gauche.

d) $\forall f \in E, \forall x \in M \quad xf = x.$

e) $\forall e \in E, eM^*$ est un groupe.

f) $\forall e \in E, M^*$ est isomorphe au produit direct $eM^* \times E.$

Ces résultats sont donnés dans [7], Chapitre 1 et 2.

NOTATIONS. Si un demi-groupe est sans zéro, nous noterons S^0 le demi-groupe avec zéro associé à $S : S^0 = S \cup \{0\}.$

Si S est un demi-groupe avec zéro, intègre, S^* désigne le demi-groupe $S - \{0\}.$

LEMME 2.5. : Soit S un demi-groupe dont l'ensemble E des idempotents non nuls est non vide ; si $S^n = M$ est un idéal 0-minimal à gauche, alors :

$$\forall e \in E, \forall x \in S, \exists f \in E^0 \text{ tel que } xe = fx.$$

Si $xe = 0$, on choisit $f = 0.$

Si $xe \neq 0$, on peut appliquer les lemmes 2.1, 2.3 et 2.4, puisque S n'est pas nilpotent (il contient des idempotents non nuls). Comme $e \in M$, $xe \in M^*$, donc d'après le lemme 2.4. b) il existe f tel que $fxe = xe$; d'où $fxe = f^2xe$ et par simplification $f = f^2 \in E.$ Dans ce cas fx appartient à M^* et $fxe = fx$ (L. 2.4 d) et finalement $xe = fx.$

LEMME 2.6. : Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le lemme 2.5, on a : $\forall e \in E, \forall x \in S$, il y a équivalence entre

a) $ex = 0$

b) $xe = 0$

c) $x^n = 0.$

a) $\implies$ b). Si $xe \neq 0$, d'après le lemme 2.5., il existe f , élément de E tel que $fx = xe.$ Comme E est un zéro-demi-groupe à gauche, $fe = f$ et $xe = fexe = 0$ si $ex = 0$; d'où une contradiction.

b) $\implies$ c). Puisque $M = S^n$, x^n appartient à M ; $xe = 0$ implique

$x^n e = 0$, donc $x^n = 0$, d'après le lemme 2.4. d).

c) $\implies$ a). Si $x = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $x \neq 0$, soit $k \leq n$, l'entier tel que $x^k = 0$ et $x^{k-1} \neq 0$; alors ex^{k-1} appartient à M^* .

D'où $ex^{k-1} = ex^{k-1}e \neq 0$ par application du lemme 2.4. d) et $ex^k = ex^{k-1}ex = 0$; comme ex appartient à M , ex est nul d'après le lemme 2.3.

NOTATION 2.7. : Si S est le produit direct de demi-groupes S_i , $i \in I$, p_{S_i} est la projection de S sur la composante S_i .

DEFINITION 2.8. : Un demi-groupe S est produit sous direct du produit direct $\prod_{i \in I} S_i$ des demi-groupes S_i s'il existe un homomorphisme φ injectif de S dans $\prod S_i$, $i \in I$, tel que $p_{S_i} \circ \varphi$ est surjectif de S sur S_i , pour tout i de I .

THEOREME 2.9. : Un demi-groupe S de profondeur gauche finie, dont l'ensemble E des idempotents non nuls est non vide et vérifie : $\forall x \in S, \forall e \in E, \forall f \in E \quad xe = xf$, est produit sous direct de $N \times (G \times E)^\circ$ où N est un demi-groupe nilpotent, G un groupe, E un zéro-demi-groupe à gauche. (De plus, on a N isomorphe à S/S^n et $(G \times E)^\circ$ isomorphe à S^n pour un certain entier n).

Par définition, puisque S est de profondeur gauche finie, il existe un entier n tel que S^n est un idéal 0-minimal à gauche. Dans ce cas, le quotient de Rees S/S^n est un demi-groupe nilpotent d'indice inférieur ou égal à n ; notons ce demi-groupe N . Soit e , fixé, un idempotent non nul de S . D'après le lemme 2.4. e) $eM^* = G$ est un groupe et E , ensemble des idempotents non nuls de M (ou S) est un zéro-demi-groupe à gauche.

Considérons l'application φ de S dans $N \times (G \times E)^\circ$ définie par :

$\varphi(x) = (\bar{x}, ex, f)$ si $ex \neq 0$, avec $\bar{x}$ image de x par l'homomorphisme canonique de S sur S/S^n , et f unique élément de E vérifiant $fx = xe$.

$\varphi(x) = (\bar{x}, 0, 0)$ si $ex = 0$.

Cette application est bien définie puisque d'après le lemme 2.6. $ex = 0$ si et seulement si $xe = 0$ et que si xe est $\neq 0$ il existe $f \in E$ (nécessairement unique) tel que $xe = fx$ (Lemme 2.5.).

Montrons que φ est injective : si $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\bar{x} = \bar{y}$; mais $\bar{x} \neq 0$ implique $x \notin M$, $\bar{x} = x$, en identifiant les éléments de $S - M$ et de S/M . Donc $\bar{x} = \bar{y} \neq 0$ entraîne $x = y$. Si $\bar{x} = \bar{y} = 0$, x et y appartiennent à M ; si de plus $\varphi(x) = (0, 0, 0)$, $ex = 0 = ey$ et comme dans M , il n'y a pas de diviseur de zéro, $x = y = 0$. Si $\varphi(x) = (0, ex, f) = (0, ey, g) = \varphi(y)$, alors $f = g$, $ex = ey$, $fx = xe$, $fy = ye$ d'où $xe = fx = fex = fey = fy = ye$ et en simplifiant dans M^* $xe = ye$ implique $x = y$; et φ est injective.

Montrons que φ est un homomorphisme : si $\varphi(x) = (\bar{x}, ex, f)$ et $\varphi(y) = (\bar{y}, 0, 0)$, $ey = ye = 0$ donc $xye = 0 = exy = eyx = 0$ et dans ce cas $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$. Dans le cas où $\varphi(x) = (\bar{x}, ex, f)$ et $\varphi(y) = (\bar{y}, ey, g)$, on a $fx = xe \neq 0$, $gy = ye \neq 0$, $ex \neq 0$, $ey \neq 0$; il en résulte que $exy = exey$ est différent de 0, puisque ex et ey appartiennent au demi-groupe M^* . Reste à prouver que $fgxy = xye$; mais $fgxy$ est égal à $fxxy$ puisque $fg = f$ (Lemme 2.4 c) ; d'où $fxxy = xxy = xgy$ (car $xe = xg$). Donc dans les cas on a montré que $\varphi(xy)$ est égal à $\varphi(x) \varphi(y)$.

Soit $\bar{y}$ un élément de $N = S/M$: si $\bar{y} = 0$, pour tout y de M , $p_N \circ \varphi(y) = \bar{y} = 0$. Si $\bar{y}$ est non nul, y n'appartient pas à M et $p_N \circ \varphi(y) = \bar{y}$ et ainsi $p_N \circ \varphi$ est surjective. Soit (a, f) un élément de $(G \times E)$. Si $(a, f) = (0, 0)$, $p_{(G \times E)} \circ \varphi(x) = (0, 0)$, si x^n égale 0 d'après le lemme 2.6. Si $(a, f) \neq (0, 0)$; $a = ea$ comme élément de eM et a est tel que $a^n \neq 0$. Donc fae est tel que $p_{(G \times E)} \circ \varphi(fae) = (a, f)$. On a donc bien démontré que S est produit sous direct du produit $N \times (G \times E)^\circ$.

PROPOSITION 2.10. : Soit S un sous demi-groupe, produit sous direct du produit direct $N \times (G \times E)^\circ$ où N est un demi-groupe nilpotent, G un groupe, E un zéro-demi-groupe à gauche ; alors il existe un entier p , tel que S^p est un idéal 0-minimal à gauche de S . De plus, l'ensemble $\mathcal{E}$ des idempotents

non nuls de S est non vide et vérifie : $\forall x \in S, \forall e \in \mathcal{E}, \forall f \in \mathcal{E} \quad xe = xf$.

Puisque N est nilpotent, il existe un entier n tel que $N^n = 0$; donc S^n est inclus dans $[N \times (G \times E)^0]^n = 0 \times (G \times E)^0$. Montrons l'inclusion inverse ; soit $x = (0, g, e)$, $g \in G, e \in E$: comme $p_{(G \times E)^0}$ est surjective de S sur $(G \times E)^0$, (S est produit sous direct), il existe y dans S tel que $y = (\alpha, g, e)$. Mais G étant un groupe, $G = G^n$ et par suite il existe $g_1, g_2, \dots, g_n$, élément de G tels que $g = g_1 g_2 \dots g_n$ et pour tout i, $1 \leq i \leq n$, il existe x_i , appartenant à S, tels que $x_i = (\alpha_i, g_i, e)$. Considérons le produit $x_1 x_2 \dots x_n = z$; $z = (0, g, e)$, puisque $e = e^2$ et que N est nilpotent d'indice n. Donc $x = z$ appartient à S^n ; d'où l'égalité $S^n = 0 \times (G \times E)^0$. Ainsi, S^n est isomorphe à $(G \times E)^0$. Donc S^n est d'après le théorème 1.27 de [7], un demi-groupe 0-simple à gauche et S^n est alors un idéal 0-minimal à gauche de S. S admet des idempotents non nuls, à savoir tous les éléments de la forme $(0, \varepsilon, e)$ où ε est l'élément neutre de G, et e un élément quelconque de E ; l'ensemble $\mathcal{E}$ des idempotents non nuls de S est d'ailleurs isomorphe à E. Si x est un élément quelconque de S et α un élément de $\mathcal{E}$, on a $x = (n, g, e)$, $\alpha = (0, \varepsilon, f)$, d'où $x\alpha = (0, g, e)$, ce qui prouve immédiatement que $x\alpha = x\beta$ pour tout autre idempotent β non nul de S.

THEOREME 2.11: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe S soit de profondeur gauche finie et admette des idempotents non nuls, vérifiant : $\forall x \in S, \forall e = e^2, \forall f = f^2, xe = xf$ est que S soit produit sous direct d'un produit direct $N \times (G \times E)^0$, où N est un demi-groupe nilpotent, G un groupe, E un zéro demi-groupe à gauche.

La condition suffisante est la Proposition précédente.

La condition nécessaire résulte du théorème 2.9. en identifiant S et $\psi(S)$.

Etudions maintenant les idéaux des demi-groupes précédemment étudiés.

PROPOSITION 2.12. : Si un demi-groupe S admet des idempotents et si S^n est un idéal 0-minimal à gauche, tout idéal à gauche de S est ou nilpotent ou contient S^n .

Si I est un idéal non nilpotent, on a $0 \subsetneq I^n \subset S^n$, d'où $I^n = S^n \subseteq I$, puisque I^n est aussi un idéal à gauche et que S^n est minimal à gauche.

PROPOSITION 2.13. : Si un demi-groupe S admet des idempotents, et s'il est de profondeur gauche finie, il existe une injection de l'ensemble des idéaux (à gauche, à droite, bilatères) nilpotents de S dans l'ensemble des idéaux (à gauche, à droite, bilatères) de S/S^n .

D'après le Théorème 2.9., S est un sous demi-groupe, produit sous direct de $N \times (G \times E)^\circ$ avec $N = S/S^n$, en identifiant S et $\varphi(S)$. Soit I un idéal nilpotent de S ; $I^p = 0$ implique que nécessairement I est inclus dans $N \times 0 \times 0$ puisque $(G \times E)^p = G \times E$. Donc I est de la forme $J \times 0 \times 0$, avec J idéal de N , et $J = p_N(I)$.



DEFINITION 2.14. Un demi-groupe S avec zéro est appelé groupe à gauche avec zéro, si S est produit direct d'un groupe par un zéro-demi-groupe à gauche. (Il y a identité entre les groupes à gauche avec zéro et les demi-groupes 0-simples à gauche avec idempotents d'après [7], Th. 1.27.

THEOREME 2.15. Un demi-groupe S ayant des idempotents non nuls est de profondeur gauche finie, si et seulement si S est extension idéale d'un groupe à gauche avec zéro par un demi-groupe nilpotent.

Si $S^n = M$ est idéal 0-minimal à gauche de S et si S admet des idempotents, alors, d'après le lemme 2.4., M est un groupe à gauche avec zéro et $S/S^n = S/M$ est nilpotent.

Réciproquement, si $(S, .)$ est extension idéale d'un groupe à gauche avec zéro, K° , par un demi-groupe nilpotent T , il est facile de vérifier que $S = K^\circ \cup T^*$ où $T^* = T - \{0\}$ est un demi-groupe de profondeur gauche

finie, avec des idempotents non nuls, le produit dans S prolongeant le produit dans K^0 . (On a alors $S^n = K^0$, $T^n = 0$)

LEMME 2.16. Si un demi-groupe S vérifie les conditions du Théorème 2.15, il y a bijection entre les idéaux à gauche de S non nilpotents et les idéaux du demi-groupe S/S^n .

L'application ψ de S sur S/S^n est, rappelons le, définie par $\psi(x) = x$ si $x \notin S^n$ et $\psi(x) = 0$ si $x \in S^n$ et le produit dans S^n est défini par $x \circ y = xy$ si $xy \notin S^n$ et 0 si $xy \in S^n$. Aussi à tout idéal I à gauche de S non nilpotent donc contenant S^n d'après la proposition 2.12, on peut associer $\psi(I) = (I - S^n) \cup \{0\}$ et à tout idéal I' de S/S^n , on peut faire correspondre $I = I'^* \cup S^n = \psi^{-1}(I')$. Donc $\psi^{-1} \circ \psi(I) = I$, $\psi \circ \psi^{-1}(I') = I'$. De plus cette bijection conserve l'inclusion des idéaux.

PROPOSITION 2.17. Les idéaux bilatères non nilpotents d'un demi-groupe S , de profondeur gauche finie, ayant des idempotents non nuls, forment un treillis $\mathcal{C}$ de plus grand élément S , de plus petit élément S^n . En particulier pour tout $I \neq S$ de $\mathcal{C}$, il existe un élément x de $S - I$ tel que $I \cup \{x\}$ est encore un idéal bilatère.

(On a un résultat analogue pour les idéaux à gauche).

Cette proposition est un corollaire du lemme précédent et de la Proposition 1.3, puisque S/S^n est nilpotent.

Dans une dernière partie de ce chapitre, nous allons examiner le cas particulier des demi-groupes dont une puissance est un groupe (ou un groupe avec zéro). Il est bien connu que dans un demi-groupe S , tout idéal à gauche, à droite ou bilatère qui rencontre un groupe, sous demi-groupe de S , le contient. Donc si $S^n = M$ est un groupe (avec zéro), M est un idéal à gauche 0-minimal (et aussi à droite).

Donnons cependant auparavant quelques exemples et contre-exemples.

§ 2. Exemples. Contre-exemples.

Donnons deux demi-groupes de profondeur gauche finie. Soient $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ un ensemble formé de 5 éléments. Soient x et y deux transformations de X données par les tableaux :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les deux applications x et y engendrent un demi-groupe S_1 , sous demi-groupe de X^X . De plus $S_1^3 = \{x^2, y^2, yx, xyx\}$ est un idéal 0-minimal à gauche de S_1 , zéro à gauche. Donc S_1 est de profondeur gauche finie. Mais dans S_1 , on peut trouver deux idempotents non nuls x^2 et yx par exemple tels que $x \cdot x^2 \neq x \cdot yx$. Donc S_1 ne peut être produit sous direct de $S_1^3 \times S_1/S_1^3$.

Toujours, sur le même ensemble X considérons maintenant les deux transformations x_2 et y_2 définies par :

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Elles engendrent un demi-groupe S_2 , dont les idempotents sont x_2^2 et y_2^2 . Il est facile de vérifier que ce demi-groupe vérifie les conditions du Théorème 2.9. et par suite S_2 est produit sous direct de $S_2^2 \times S_2/S_2^2$.

D'autre part nous savons (lemme 2.6.) que dans un demi-groupe S de profondeur gauche finie, admettant des idempotents non nuls, il y a équivalence entre : $\forall e, e = e^2 \neq 0, \forall x \in S, ex = 0$ et il existe n tel que $x^n = 0$. Nous allons voir que ce résultat ne subsiste pas dans le cas où S est de profondeur finie (i.e. il existe un entier n tel que S^n est un idéal 0-minimal bilatère). Considérons dans l'ensemble des matrices $M_3(\mathbb{R})$ le demi-groupe multiplicatif S engendré par les deux matrices

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Cet exemple nous a été fourni par G. Lallement [21]]. Le demi-groupe S contient trois idempotents x^2y , xyx et yx^2 ; de plus $I = S^5$ est idéal 0-minimal bilatère; mais dans ce demi-groupe $x(xyx)$ est non nul alors que $x^3 = 0$. Donc les conditions du lemme 2.6. ne sont plus équivalentes.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir un cas particulier important de demi-groupes de profondeur finie.

§ 3. Demi-groupes G-potents, G° -potents .

DEFINITION 2.18. Un demi-groupe S est dit G-potent, s'il existe un entier n tel que S^n est un groupe G.

Si S est G-potent, et si G se réduit à un élément z , cet élément z est zéro de S et S devient nilpotent. Les propriétés des demi-groupes G-potents généralisent donc les propriétés des demi-groupes nilpotents.

DEFINITION 2.19. Un demi-groupe avec zéro est dit G° -potent, s'il existe un entier n tel que S^n est un groupe avec zéro, G° .

Dans le cas où S n'admet pas de diviseur de zéro, S est G° -potent si et seulement si le demi-groupe $S^* = S - \{0\}$ est G-potent.

COROLLAIRE 2.20. Tout demi-groupe G° -potent est extension d'un groupe avec zéro par un demi-groupe nilpotent, et réciproquement, tout demi-groupe extension d'un groupe avec zéro par un demi-groupe nilpotent est G° -potent.

Ce résultat se déduit immédiatement du Théorème 2.15.

COROLLAIRE 2.21. Un demi-groupe est G° -potent si et seulement si, il est produit sous direct du produit direct d'un groupe avec zéro par un demi-groupe nilpotent.

Ceci résulte du Théorème 2.11 ; si S est G° -potent et si $S^n = G^\circ$, on peut considérer l'application φ de S dans $S/G^\circ \times G^\circ$ définie par $\varphi(x) = (\bar{x}, ex)$, où e désigne l'élément neutre de G et $\bar{x}$ l'image de x dans S/G° . Ceci prouve (cf. Th. 2.9) que S est produit sous direct de $S/G^\circ \times G^\circ$. La démonstration de la réciproque se déduit de celle de la proposition 2.10 : E est ici réduit au seul élément e , neutre de G , donc S^D est isomorphe à $(G \times \{e\})^\circ$, soit à G° et ainsi S est bien G° -potent.

COROLLAIRE 2.22. Le treillis des idéaux bilatères [resp. à gauche, à droite] d'un demi-groupe G -potent S est un treillis isomorphe en tant qu'ensemble ordonné au treillis des idéaux bilatères [resp. à gauche, à droite] du demi-groupe nilpotent S/G , quotient de Rees de S par G .

Puisque nous supposons S G -potent, tous les idéaux de S contiennent G ; il nous suffit alors d'appliquer le lemme 2.16.

CHAPITRE 3

DEMI-GROUPES RETICULES ET TOTALEMENT ORDONNES

Généralités.

Le but de ce chapitre est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe S , quelconque, puisse être totalement ordonné, c'est-à-dire pour que l'on puisse définir sur S une relation d'ordre total, notée $\leq$, isotone :

$$\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S, a \leq b \implies ac \leq bc, ca \leq cb .$$

Un demi-groupe qui peut être totalement ordonné sera appelé ou σ -demi-groupe, ou demi-groupe ordonnable. Jusqu'à ce que nous entreprenions cette étude aucune condition dans le cas général n'avait été donnée.

Ce chapitre se divise en deux parties. Dans la première partie, nous étudions les demi-groupes réticulés, qui sont des demi-groupes ordonnés en treillis et cherchons leurs représentations en demi-groupes totalement ordonnés. Nous obtenons alors comme Corollaire un théorème de caractérisation des σ -demi-groupes. Cette première partie sera une reproduction de notre article $[M_3]$. Nous donnons ensuite un exemple d'application de ce Théorème

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous montrons qu'un demi-groupe S est un σ -demi-groupe, si et seulement si tout sous demi-groupe de S engendré par un nombre fini d'éléments est un σ -demi-groupe. Cela résultera d'un théorème classique du Calcul Propositionnel.

Cela nous conduira donc par la suite à étudier les demi-groupes dont tout sous demi-groupe est engendré par un nombre fini d'éléments : demi-groupes idempotents, nilpotents par exemple.

Semigroup Forum, Vol. 2 (1971), 64-70.

§.1.

SUR LES DEMI-GROUPES RETICULES ET LES O-DEMI-GROUPES

Thérèse Merlier

Présenté par Madame le Professeur M. L. Dubreil-Jacotin *

A necessary and sufficient condition is given in order that a lattice-ordered semigroup admit a totally ordered ℓ -homomorphic image (Theorem 1). This permits us to give (Theorem 2) a necessary and sufficient condition that a lattice-ordered semigroup be representable, that is, that it be ℓ -isomorphic to a subdirect product of totally ordered semigroups, thereby solving a problem posed by L. Fuchs ([2], p.289). We also establish a necessary and sufficient condition that a semigroup be an o-semigroup, that is, that it admit a structure of totally ordered semigroup (Theorem 3).

Rappelons tout d'abord quelques notations qui sont généralement celles de [1]. S étant un demi-groupe, S^1 est le demi-groupe unitaire associé à S ; si H est une partie de S , a un élément de S , $(H..a)$ désigne l'ensemble des couples (x,y) de $S \times S$ tels que $xay \in H$ et $(H..a)_1$ celui des couples (x,y) de $S^1 \times S^1$ tels que $xay \in H$. $\mathcal{C}_H$ et $\mathcal{C}_H^1$ sont les équivalences de Croisot relatives à H , définies dans S respectivement par $a \equiv b (\mathcal{C}_H)$ si et seulement si $(H..a) = (H..b)$, et $a \equiv b (\mathcal{C}_H^1)$ si et seulement si $(H..a)_1 = (H..b)_1$. D'autre part, un demi-groupe S est

* . The central results of this note were presented by M. L. Dubreil-Jacotin in an invited address at the Symposium on Semigroups and the Multiplication Structure of Rings held at the University of Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico, March 9-13, 1970.

2.

MERLIER.

réticulé s'il est ordonné en treillis et si, de plus, on a les distributivités suivantes: $\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S^1, \forall d \in S^1$, $c(a \vee b)d = cad \vee cbd$ et $c(a \wedge b)d = cad \wedge cbd$. Dans un tel demi-groupe, un l-homomorphisme est un homomorphisme pour les trois opérations $\vee$, $\wedge$ et la multiplication, un l-idéal est un idéal du treillis sous jacent, c'est à dire un sous treillis partie héréditaire de S ; enfin une partie H est $\wedge$ -première si :

$$a \wedge b \in H \text{ entraîne } a \text{ ou } b \in H.$$

THEOREME 1. Un demi-groupe réticulé S admet une image l-homomorphe qui est un demi-groupe totalement ordonné non trivial, si et seulement si, il existe dans S une partie H qui est un l-idéal propre de S , $\wedge$ -premier et tel que l'ensemble des $(H..a)$, $a \in S$, forme une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S \times S$.

La condition est nécessaire.

Soit Σ , un demi-groupe totalement ordonné non réduit à un élément, tel que φ soit un l-homomorphisme de S sur Σ . Il existe donc deux éléments de Σ , $\bar{a}$ et $\bar{b}$, distincts, comparables, tels que $\bar{a} = \varphi(a)$, $\bar{b} = \varphi(b)$ et $\bar{a} < \bar{b}$ dans Σ par exemple. Considérons le sous ensemble de S , $H = \{x \in S; \varphi(x) \leq \varphi(a)\}$. H n'est pas vide et il est distinct de S ($a \in H$ et $b \notin H$). Il est clair que H est une partie héréditaire; de plus, si x et y appartiennent à H , $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \leq \varphi(a)$ et $x \vee y$ appartient à H . Si $x \wedge y$ appartient à H , $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ est inférieur ou égal à $\varphi(a)$; Σ étant totalement ordonné, $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x)$ (ou $\varphi(y)$) et x (ou y) appartient à H . H est donc un l-idéal $\wedge$ -premier.

Considérons maintenant les sous ensembles $(H..s)$, $s \in S$, de $S \times S$. Supposons $(H..s)$ non contenu dans $(H..t)$: il existe donc x et $y \in S$ tels que $xsy \in H$ et $xt y \notin H$. Il en résulte $\varphi(x)\varphi(s)\varphi(y) \leq \varphi(a)$ et $\varphi(x)\varphi(t)\varphi(y) \not\leq \varphi(a)$, c'est à dire $\varphi(a) < \varphi(x)\varphi(t)\varphi(y)$ puisque Σ est totalement ordonné; donc $\varphi(s) < \varphi(t)$. Par suite si $(z, z') \in (H..t)$, $\varphi(z)\varphi(t)\varphi(z')$ est inférieur ou égal à $\varphi(a)$, $\varphi(z)\varphi(s)\varphi(z')$ aussi et (z, z') appartient à $(H..s)$, d'où l'inclusion $(H..t) \subseteq (H..s)$.

MERLIER.

3.

REMARQUE 1. L'équivalence d'application $\mathcal{N}_\varphi$ associée à l'homomorphisme φ est visiblement plus fine que l'équivalence de Croisot $\mathcal{C}_H$.

La condition est suffisante.

Soit H un $\wedge$ -idéal propre, $\wedge$ -premier tel que l'ensemble des $(H..a)$, $a \in S$, est une chaîne dans $S \times S$. On sait que l'équivalence $\mathcal{C}_H$ est une congruence de demi-groupe [1]. Ici, c'est de plus une congruence de treillis grâce aux hypothèses faites sur H . Supposons en effet $a \equiv b \ (\mathcal{C}_H)$: si $x(a \vee c)y \in H$, xay et $xcy \in H$ puisque H est héréditaire; xby appartient donc aussi à H . Mais H est un $\wedge$ -idéal, donc $xby \vee xcy$ qui est égal à $x(b \vee c)y$ appartient à H et $(H..a \vee c)$ est contenu dans $(H..b \vee c)$. Par symétrie nous avons l'égalité $(H..a \vee c) = (H..b \vee c)$ pour tout c de S et $a \vee c \equiv b \vee c \ (\mathcal{C}_H)$.

Si $x(a \wedge c)y = xay \wedge xcy \in H$, on a, H étant $\wedge$ -premier, soit $xay \in H$, soit $xcy \in H$; dans le premier cas $xby \in H$ ($a \equiv b \ (\mathcal{C}_H)$) et ainsi dans les deux cas $x(b \wedge c)y \in H$. Par suite $(H..a \wedge c)$ est contenu dans $(H..b \wedge c)$ et finalement $(H..a \wedge c)$ égale pour tout c de S $(H..b \wedge c)$. $S_H = S/\mathcal{C}_H$ est donc un demi-groupe réticulé, image $\wedge$ -homomorphe de S .

De plus, si les $(H..a)$, $a \in S$, forment une chaîne, l'ordre défini précédemment est total. En effet, si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont deux éléments de S_H , classes de a et b respectivement, nous avons dans S_H $\bar{a} \leq \bar{b}$ si et seulement si $\overline{a \wedge b} = \bar{a}$, c'est à dire si $(H..a \wedge b) = (H..a)$; mais H étant une partie héréditaire, nous avons toujours $(H..b)$ contenu dans $(H..a \wedge b)$. Donc si $\bar{a} \leq \bar{b}$, $(H..b)$ est contenu dans $(H..a)$. Réciproquement, supposons $(H..b)$ contenu dans $(H..a)$: si $x(a \wedge b)y \in H$, xay ou $xby \in H$, puisque H est $\wedge$ -premier, et dans chacun des deux cas xay appartient à H . $(H..a \wedge b)$ est contenu dans $(H..a)$ et $\overline{a \wedge b} = \bar{a}$. L'ordre sur S_H est en fait aussi défini par $\bar{a} \leq \bar{b}$ si et seulement si $(H..b) \subseteq (H..a)$, et S_H est totalement ordonné.

REMARQUE 2. Le Théorème 1 reste valable lorsqu'on remplace la condition " la famille des $(H..a)$, $a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S \times S$ " par la condition:

4.

MERLIER .

"la famille des $(H..a)_1, a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S^1 \times S^1$ ". Il suffit en effet de considérer les équivalences $\mathcal{C}_H^1$ au lieu de $\mathcal{C}_H$. Si, en particulier, nous reprenons la démonstration de la condition nécessaire et désignons par H_x l'image réciproque de la section commençante de $\varphi(x)$ dans Σ , nous avons, pour tout x , $\mathcal{N}_\varphi \subseteq \mathcal{C}_{H_x}^1$ (cf. Remarque 1), mais si $a \neq b$ ($\mathcal{N}_\varphi$), $\varphi(a) < \varphi(b)$ par exemple et $a \neq b$ ($\mathcal{C}_{H_a}^1$). Dans ce cas, nous avons l'égalité $\mathcal{N}_\varphi = \bigcap_{a \in S} \mathcal{C}_{H_a}^1$.

COROLLAIRE 1. Un demi-groupe S unitaire, commutatif et réticulé admet une image l-homomorphe qui est un demi-groupe totalement ordonné non trivial, si et seulement si, il existe dans S, une partie H, l-idéal propre, Λ -premier.

D'après le Théorème 1, il suffit de montrer que si H est un l-idéal propre, Λ -premier, la famille des $(H..a), (a \in S)$ est une chaîne dans $S \times S$.

Supposons $(H..a)$ non contenu dans $(H..b)$; il existe donc deux éléments de S, x et y, tels que $xay \in H$ et $xby \notin H$. Nous avons alors, H étant héréditaire, $x(a \wedge b)y \in H$ et pour tout (z,t) appartenant à $(H..b)$, $z(a \wedge b)t \in H$. La commutativité entraîne : $zt(a \wedge b) \in H$ et de même $xy(a \wedge b) \in H$; H étant un l-idéal, en utilisant la distributivité, on obtient $(zt \vee xy)(a \wedge b) \in H$, c'est à dire $(zt \vee xy)a \wedge (zt \vee xy)b \in H$. Mais $xby \notin H$, donc a fortiori $(zt \vee xy)b \notin H$. Comme H est une partie Λ -première, nous avons nécessairement $(zt \vee xy)a \in H$ et $zat \in H$. Donc $(H..b)$ est contenu dans $(H..a)$ et les $(H..x), (x \in S)$, forment bien une chaîne.

THEOREME 2. Un demi-groupe S réticulé est l-isomorphe à un produit sous direct de demi-groupes $S_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ totalement ordonnés si et seulement si, il existe une famille $H_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ de l-idéaux Λ -premiers de S, tels que

1°) $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{C}_{H_\alpha}^1$ est l'égalité.

2°) $\forall \alpha \in \Lambda$, l'ensemble des $(H_\alpha..s)_1, (s \in S)$, est une chaîne de $S^1 \times S^1$ pour l'inclusion.

MERLIER.

5

Les conditions sont nécessaires.

Soit φ l'application 1-isomorphisme de S sur le produit sous direct des S_λ et désignons par φ_λ le produit $p_\lambda \circ \varphi$ où p_λ est la projection d'un élément du produit sous direct sur S_λ . φ_λ est donc un 1-homomorphisme de S sur S_λ , demi-groupe totalement ordonné; d'après la remarque 2 et le théorème 1, on sait qu'il existe dans S une famille $H_{\lambda,s}$ ($\lambda \in \Lambda$, $s \in S$) de 1-idéaux Λ -premiers tels que l'ensemble des $(H_{\lambda,s..a})_1$, ($a \in S$) est une chaîne de $S^1 \times S^1$ et tels que $\bigcap_{s \in S} \mathcal{C}_{H_{\lambda,s}}^1$ est égale à $\mathcal{N}_{\varphi_\lambda}$. Mais $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{N}_{\varphi_\lambda}$ est l'égalité puisque φ est un 1-isomorphisme; $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{s \in S} \mathcal{C}_{H_{\lambda,s}}^1$ est donc aussi l'égalité. De plus, pour tout s de S et tout λ de Λ , la famille des $(H_{\lambda,s..a})_1$, ($a \in S$) est une chaîne pour l'inclusion dans $S^1 \times S^1$.

Les conditions sont suffisantes.

Soit H_α ($\alpha \in A$) une famille de 1-idéaux Λ -premiers de S , vérifiant 1°) et 2°). Chaque $S_\alpha = S/\mathcal{C}_{H_\alpha}^1$ est un demi-groupe totalement ordonné, image 1-homomorphe de S (Th. 1). L'homomorphisme de S dans $\prod_{\alpha \in A} S_\alpha$ a pour équivalence d'application $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{C}_{H_\alpha}^1$ qui est l'égalité d'après la condition 1°), et par suite est un 1-isomorphisme dans $\prod_{\alpha \in A} S_\alpha$.

COROLLAIRE 2. Un demi-groupe S abélien, unitaire et réticulé est représentable si et seulement si le treillis sous jacent est distributif.

Si S est représentable, c'est à dire 1-isomorphe à un produit sous direct de demi-groupes S_λ ($\lambda \in \Lambda$) totalement ordonnés, tout élément a s'identifie à la famille des $\varphi_\lambda(a)$, $\lambda \in \Lambda$, avec les notations du Th. 2. Comme chaque φ_λ est un 1-homomorphisme de S sur S_λ , demi-groupe totalement ordonné, $(a \vee b)_\lambda c$ et $(a_\lambda c) \vee (b_\lambda c)$ ont la même représentation et par suite sont égaux et le treillis est distributif.

Réciproquement, considérons la famille H_α , $\alpha \in A$, de tous les 1-idéaux Λ -premiers de S ; d'après un résultat d'Iséki, [3],

6

MERLIER.

si a et b sont deux éléments distincts de S , il existe un λ -idéal Λ -premier contenant a et ne contenant pas b ; nous avons donc $a \neq b \ (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_{H_\lambda}^1)$ et ainsi $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_{H_\lambda}^1$ est l'égalité. En appliquant le Corollaire 1 et le Théorème 2, nous pouvons affirmer que S est représentable.

REMARQUE 3. On retrouve ainsi un résultat de L. Fuchs (résultat démontré directement et non publié) à savoir que " tout demi-groupe abélien, unitaire, réticulé, dont le treillis sous jacent est distributif, est représentable."

THEOREME 3. Un demi-groupe S est un o-demi-groupe si et seulement si, il existe une famille H_λ , ($\lambda \in \Lambda$) de parties non vides de S , telles que:

$\alpha)$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_{H_\lambda}^1$ est l'égalité.

$\beta)$ Pour tout λ de Λ , la famille des $(H_\lambda \cdot a)_1$, ($a \in S$) est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S_1 \times S_1$ et de plus, si a et b sont deux éléments quelconques de S , on a

$(H_\lambda \cdot a)_1 \cap (H_\lambda \cdot b)_1 = (H_\lambda \cdot a)_1$ pour tout λ de Λ , ou

$(H_\lambda \cdot a)_1 \cap (H_\lambda \cdot b)_1 = (H_\lambda \cdot b)_1$ pour tout λ de Λ .

Les conditions sont nécessaires.

Si S est un demi-groupe totalement ordonné, la famille des sections commençantes H_x , ($x \in S$), vérifie α et β . En effet, si l'élément a de S est distinct de b , a est strictement inférieur à b par exemple et b n'appartient pas à la section commençante H_a de a ; donc $a \neq b \ (\mathcal{C}_{H_a}^1)$ et $a \neq b \ (\bigcap_{x \in S} \mathcal{C}_{H_x}^1)$, d'où α). Si $a \leq b$, pour toute section commençante H_x , on a :

$(H_x \cdot b)_1$ contenu dans $(H_x \cdot a)_1$ et la condition β) est vérifiée.

Les conditions sont suffisantes.

Si $\lambda \in \Lambda$ et si a_λ désigne la classe de a mod. $\mathcal{C}_{H_\lambda}^1$, définissons dans $S_\lambda = S/\mathcal{C}_{H_\lambda}^1$ la relation suivante:

$a_\lambda \leq b_\lambda \iff (H_\lambda \cdot b)_1 \leq (H_\lambda \cdot a)_1$. Cette relation induit

un ordre total sur S_λ puisque la famille des $(H_\lambda \cdot x)_1$, $x \in S$, est une chaîne; elle est isotone: en effet, si $a_\lambda \leq b_\lambda$,

MERLIER.

7.

$\forall (z, z') \in S^1 \times S^1, z b z' \in H_\lambda \Rightarrow z a z' \in H_\lambda$, donc en particulier
 $\forall x \in S, \forall (z, z') \in S^1 \times S^1, z x b z' \in H_\lambda \Rightarrow z x a z' \in H_\lambda$, et
 $(x a)_\lambda = x_\lambda a_\lambda \leq x_\lambda b_\lambda = (x b)_\lambda$ et de même $a_\lambda x_\lambda \leq b_\lambda x_\lambda$ pour tout x_λ
de S_λ , qui est de ce fait un demi-groupe totalement ordonné.
Considérons alors le produit direct des S_λ ($\lambda \in \Lambda$); en vertu de
la condition α), S est isomorphe à un produit sous direct de ce
produit. Ordonnons S par:
 $a \leq b \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, a_\lambda \leq b_\lambda$ dans S_λ . Cette relation évidemment
réflexive et transitive est antisymétrique d'après la condition
 α); nous avons aussi l'isotonie, puisque de $a_\lambda \leq b_\lambda$, on déduit
 $x_\lambda a_\lambda \leq x_\lambda b_\lambda$ et $a_\lambda x_\lambda \leq b_\lambda x_\lambda$ dans chaque S_λ . Enfin S est totale-
ment ordonné: si a et b sont deux éléments distincts, il existe
au moins un indice μ de Λ , tel que $a_\mu \neq b_\mu$ et tel que $a_\mu < b_\mu$
dans S_μ par exemple. Donc $(H_\mu \dots a)_1 \cap (H_\mu \dots b)_1$ est égal à
 $(H_\mu \dots b)_1$ et d'après β), on a pour tout λ de Λ $(H_\lambda \dots b)_1$ qui
est égal à $(H_\lambda \dots a)_1 \cap (H_\lambda \dots b)_1$, et $a_\lambda \leq b_\lambda$ pour tout λ de Λ .
Ainsi $a < b$ dans S et le demi-groupe S est un o-demi-groupe
puisque'il a pu être totalement ordonné.

REFERENCES

1. Clifford, A.H. and G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups. A.M.S. 1967. Vol. II.
2. Fuchs, L., Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1966.
3. Iséki, K., A characterisation of distributive lattices. Proc. Amst. Ser. A 54 (1954), 388-389.

Thérèse Merlier
Faculté des Sciences de PARIS
Adresse de l'auteur:
15, Boulevard de la République
92-FONTENAY-AUX-ROSES
FRANCE

Received July 22, 1970

Donnons un exemple d'application du théorème 3 précédent. Ce théorème est assez facile d'emploi dans le cas des demi-groupes finis. En effet quelque soient les éléments x et y du demi-groupe S , on peut calculer à la main ou sur machine les sous ensembles $(x : y)_1$ et par suite pour tout sous ensemble H de S , on a $(H..y)_1 = \bigcup_{x \in H} (x..y)_1$. Ainsi, considérons le demi-groupe S défini par sa table de Cayley, (S est commutatif) :

	a	b	c	d
a	a	a	c	a
b	a	b	c	b
c	c	c	a	c
d	a	b	c	b

$$\begin{aligned}
 \text{Nous avons alors } (a : a)_1 &= \{1, a, b, d\} = (c : c)_1 \\
 (a : c)_1 &= (c : a)_1 = \{c\} = (c : b)_1 = (c : d)_1 = \\
 (a : b)_1 &= (a : d)_1 = \{a\} \\
 (d : a)_1 &= (d : b)_1 = (d : c)_1 = \emptyset ; (d : d)_1 = \{1\} \\
 (b : a)_1 &= (b : c)_1 = \emptyset ; (b : b)_1 = (b : d)_1 = \{b, d\} .
 \end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout x de S $(x : b)_1 = (x : d)_1$; donc on ne pourra trouver de sous ensembles $H_i, i \in I$ de S tels que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_{H_i} = \text{Egalité}$, puisque pour tout H_i nous avons $b \equiv d \in \mathcal{C}_{H_i}$. Donc le demi-groupe considéré ne peut être totalement ordonné.

§.2.

Calcul Propositionnel et demi-groupes totalement ordonnés.

Pour les éléments de Calcul Propositionnel nécessaires à l'établissement de ce paragraphe, nous renvoyons à [20], chapitre 1. Rappelons cependant l'important théorème suivant :

THEOREME 3.1: Un ensemble $\mathcal{A}$ de formules propositionnelles est satisfaisable, si et seulement si tout sous ensemble fini de $\mathcal{A}$ est satisfaisable.

Appliquons ce Théorème aux demi-groupes ; ainsi, à un demi-groupe D , nous pouvons associer l'ensemble $D \times D$ de variables propositionnelles et le système $\mathcal{A}_D$ suivant de formules

$$\mathcal{A}_D = \begin{cases} 1^\circ) (a,a) \text{ pour tout } a \text{ de } D. \\ 2^\circ) (a,b) \vee (b,a) \text{ pour tout } a \text{ et tout } b \text{ de } D. \\ 3^\circ) \neg [(a,b) \wedge (b,a)] \text{ pour tout } a \text{ et tout } b \text{ distincts de } D. \\ 4^\circ) (a,b) \wedge (b,c) \longrightarrow (a,c) \text{ pour tout } a, \text{ tout } b, \text{ tout } c \text{ de } D. \\ 5^\circ) (a,b) \longrightarrow (a,c) \wedge (b,c) \text{ pour tout } a, \text{ tout } b, \text{ tout } c \text{ de } D. \end{cases}$$

Si $\mathcal{A}_D$ est satisfaisable, cela signifie, par définition, qu'il existe une application δ de $D \times D$ dans $\{0,1\}$ et par extension de l'ensemble des formules propositionnelles dans $\{0,1\}$, telle que $\delta F = 1$ pour toute formule F de $\mathcal{A}_D$.

Il est facile de vérifier que D peut être totalement ordonné, si et seulement si le système $\mathcal{A}_D$ est satisfaisable pour une distribution δ ; il suffit de poser $a \leq b$ si $\delta(a,b) = 1$ et réciproquement.

THEOREME 3.2. : Un demi-groupe S peut être totalement ordonné, si et seulement si tout sous demi-groupe engendré par un nombre fini d'éléments peut l'être.

Si un demi-groupe est un σ -demi-groupe, tout sous demi-groupe est aussi un σ -demi-groupe ; il suffit de considérer la restriction de la relation d'ordre total de S aux sous demi-groupes.

Réciproquement, supposons que tout sous demi-groupe de S est un σ -demi-groupe ; utilisons le Théorème 3.1. Soit $\mathcal{B}$ un sous ensemble fini de $\mathcal{A}_S$ et soit H l'ensemble des éléments de S intervenant dans les formules de $\mathcal{B}$: par exemple, si la formule " $(a,b) \longrightarrow (a,c) \wedge (b,c)$ " figure dans $\mathcal{B}$, les éléments a, b, ac, bc, ca, cb appartiennent à H .

H est un sous ensemble fini de S ; soit K le sous demi-groupe de S engendré par H . Par hypothèse, K est un σ -demi-groupe ; donc le système $\mathcal{A}_K$ de formules propositionnelles construit sur l'ensemble $K \times K$ de variables propositionnelles est satisfaisable. Mais $\mathcal{B}$ est un sous ensemble de $\mathcal{A}_K$; donc $\mathcal{B}$ est lui aussi satisfaisable.

Ainsi tout sous ensemble fini de $\mathcal{A}_S$ est satisfaisable ; d'après le Théorème 3.1., $\mathcal{A}_S$ est lui-même satisfaisable, donc le demi-groupe S

peut être totalement ordonné.

Le Théorème 3.2. était bien connu, et appliqué, dans le cas des groupes ; cf [9] , par exemple.

DEFINITION 3.3. : Un demi-groupe est localement fini, si tout sous demi-groupe engendré par un nombre fini d'éléments est fini.

COROLLAIRE 3.4. : Un demi-groupe localement fini est un σ -demi-groupe, si et seulement si tout sous demi-groupe fini est un σ -demi-groupe.

De ce corollaire, il résulte que pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes plus précises que celle donnée dans le paragraphe 1, il sera utile d'examiner les demi-groupes localement finis.

CHAPITRE 4

DEMI-GROUPES NILPOTENTS ET NILDEMI-GROUPES

TOTALEMENT ORDONNES

Nous avons vu dès le Chapitre 1 que tout demi-groupe S nilpotent ($S^n = 0$) est un nildemi-groupe ($\forall x \in S, \exists p \in \mathbb{N} ; x^p = 0$) et que réciproquement, tout nildemi-groupe fini est nilpotent.

De plus, nous allons voir que les demi-groupes nilpotents sont localement finis, et que les nildemi-groupes totalement ordonnables sont aussi localement finis.

D'après le Chapitre 3, Corollaire 3, nous devons donc chercher une condition nécessaire et suffisante d'ordonnabilité des demi-groupes nilpotents finis, i.e. des nildemi-groupes finis.

Nous avons donné cette condition dans $[M_4]$. Nous reproduirons donc une partie de cet article ici.

Nous verrons que la condition $*$: $ab=0 \implies a^2, \text{ ou } b^2=0$, joue un grand rôle et surtout que nous avons un résultat important : le problème de savoir à quelle condition un nildemi-groupe est ordonnable est résolu s'il l'est pour les nildemi-groupes vérifiant $(*)$.

Les paragraphes 1, 2 et 3 seront consacrés à ce problème. Nous donnerons des exemples de nildemi-groupes vérifiant $*$, ne vérifiant pas $*$, pouvant et ne pouvant être totalement ordonnés dans le paragraphe 4.

PRELIMINAIRES

LEMME 4.1. Un demi-groupe nilpotent est localement fini.

Soit S un demi-groupe nilpotent et soit S' le sous demi-groupe engendré par k éléments. Si $S^n = 0$, S' est nécessairement fini puisqu'il est formé de produits ayant au maximum n éléments choisis par k , (S' est de cardinal inférieur à $\sum_{p=1}^n k^p$).

COROLLAIRE 4.2. Un demi-groupe nilpotent S est un σ -demi-groupe, si et seulement si tout sous demi-groupe fini de S est un σ -demi-groupe.

Par suite, on connaîtra une condition nécessaire et suffisante d'ordonnabilité des demi-groupes nilpotents quand on connaîtra une condition pour les nil-demi-groupes finis.

LEMME 4.2. Si un nildemi-groupe S vérifie la condition :

(C) " $a^n = 0 \implies$ tout produit fini d'éléments dans lequel a figure au moins n fois est égal à 0 ".

alors S est localement fini.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_k$ k éléments de S et soit D le demi-groupe qu'ils engendrent. Montrons que D est fini ; puisque S est un nil-demi-groupe, on peut supposer $a_1^n = a_2^n = \dots = a_k^n = 0$. Si nous considérons un élément $y \neq 0$ de D , il se décompose en un produit fini d'éléments de $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ et d'après la condition (C), les occurrences de a_i , $1 \leq i \leq k$, dans y sont inférieures ou égales à $n-1$. Il en résulte que D n'a qu'un nombre fini d'éléments, et le cardinal de D est majoré par $\sum_{p=1}^{k(n-1)} k^p$.

COROLLAIRE 4.3. Tout nildemi-groupe abélien est localement fini.

La condition (C) est trivialement vérifiée dans tout demi-groupe abélien.

LEMME 4.4. Un demi-groupe avec zéro totalement ordonné vérifie la condition (C).

Soit S un demi-groupe, totalement ordonné par $\leq$, de zéro 0 , et soit a un

élément tel que $a^n = 0$. Considérons t un élément de la forme

$t = a^{\alpha_1} x_1 a^{\alpha_2} x_2 \dots a^{\alpha_{p-1}} x_{p-1} a^{\alpha_p}$, où $x_i \neq 0$ pour tout i , où $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1} + \alpha_p \geq n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geq 0$ (avec par convention a^{α_i} disparaît si $\alpha_i = 0$).

Soit x le plus grand des éléments $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, et soit y le plus petit. Alors on a : $v = a^{\alpha_1} y a^{\alpha_2} y \dots y a^{\alpha_p} \leq t \leq a^{\alpha_1} x a^{\alpha_2} x \dots x a^{\alpha_p} = u$. Mais S étant totalement ordonné, on a, par exemple, $xa \leq ax$, et par récurrence il en résulte $xa^s \leq a^s x$ pour tout entier s , et par conséquent, $t \leq u \leq a^{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i} x^{p-1} = 0$ puisque $\sum \alpha_i \geq n$. De même $0 \leq v \leq t$; donc $t = 0$ et la condition (C) est satisfaite.

THEOREME 4.5. Soit S un nildemi-groupe ; S peut être totalement ordonné, si et seulement si S est localement fini et si tout sous demi-groupe fini de S peut être totalement ordonné.

Condition nécessaire : Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné par la relation $\leq$. D'après le lemme 4.4., S vérifie la condition (C) ; donc en appliquant le lemme 4.2., on trouve que S est localement fini. D'autre part tous les sous demi-groupes de S sont totalement ordonnés par $\leq$.

Condition suffisante : il faut appliquer le Corollaire 3.4

COROLLAIRE 4.6. Un nildemi-groupe abélien S est un σ -demi-groupe, si et seulement si tout sous demi-groupe fini de S est un σ -demi-groupe.

Cela résulte du Corollaire 4.3. et du Théorème 4.5.

Le Théorème 4.5., comme le Corollaire 4.2., nous montrent qu'il faut tout d'abord essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe fini soit un σ -demi-groupe. Cette condition a été démontrée dans $[M_4]$. Nous reprenons donc intégralement le début de cet article. Les trois premiers paragraphes tendent à prouver que le problème de savoir à quelle condition un nildemi-groupe peut être totalement ordonné est résolu s'il l'est pour les nil-demi-groupes vérifiant " $ab = 0 \implies a^2$ ou $b^2 = 0$ ".

NILDEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS

THÉRÈSE MERLIER, Paris

(Reçu le 30. Janvier 1973)

La terminologie utilisée est celle de A. H. CLIFFORD et G. P. PRESTON [1] et de L. FUCHS [2].

Un nildemi-groupe S est un demi-groupe ayant un zéro, noté 0 , et dont tout élément est nilpotent: $\forall x \in S, \exists n \in \mathbb{N}^*; x^n = 0$.

($\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels positifs.) Dans un nildemi-groupe, nous appellerons index de l'élément x , le plus petit entier n tel que $x^n = 0$ et nous noterons $i(x) = n$.

Nous nous proposons de déterminer les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, c'est-à-dire sur lesquels on peut définir une relation d'ordre total isotone:

$$a \leq b, \quad c \leq d \Rightarrow ac \leq bd \quad \text{pour tout } a, b, c, d.$$

Ceci répond au problème posé par E. JA. GABOVIČ dans [3], problème 13.

Si S_2 est l'ensemble des éléments d'index 2 d'un nildemi-groupe S totalement ordonné, $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe et par suite, on a: un nildemi-groupe S égal à $S_2 \cup \{0\}$ peut être totalement ordonné, si et seulement si, S est un zéro-demi-groupe. Nous ne nous intéresserons plus à ce cas dans la suite, mais nous retenons la condition nécessaire: $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe.

§ 1. Quelques propriétés algébriques des nildemi-groupes totalement ordonnés. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné par la relation $\leq$, et soient $P = \{x \in S; x \leq 0\}$, $N = \{x \in S; x \geq 0\}$. Désignons par S^* l'ensemble des éléments de S d'index supérieur ou égal à 3 et posons $P^* = P \cap S^*$, $N^* = N \cap S^*$. (Ces notations seront conservées dans la suite.)

On a alors les propriétés suivantes:

- a) $PN = NP = \{0\}$.
- b) P est un demi-groupe positivement ordonné ($\forall a \in P, \forall b \in P, a \leq ab, b \leq ab$) et dualement, N est un demi-groupe négativement ordonné.
- c) Si a et b sont deux éléments d'index strictement supérieur à 2,

$$ab = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad ba = 0.$$

Si $ab = 0$ et si a et b sont d'index supérieur à 2 strictement, on a nécessairement $a \in P$ et $b \in N$ par exemple, car si a et b appartaient à P on aurait $a < b < 0$ par exemple, d'où $0 = ab \leq b^2 \leq 0$ et b appartiendrait à S_2 .

Soit, I la relation binaire définie dans S^* par

$$a \equiv b (I) \Leftrightarrow \forall x \in S^*, \quad xa = 0 \Leftrightarrow xb = 0.$$

Il est clair que I est une relation d'équivalence de S^* et que si S est un nildemi-groupe, qui peut être totalement ordonné, $I = J$ où J est la relation définie par:

$$a \equiv b (J) \Leftrightarrow \forall x \in S^*, \quad ax = 0 \Leftrightarrow bx = 0,$$

d'après la propriété c) précédente.

De plus

Proposition 1. *Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné; alors les classes mod. I sont P^* et N^* .*

En effet si $a \equiv b (I)$, ab est distinct de 0 puisque a^2 est distinct de 0; donc a et b appartiennent tous deux à N^* ou P^* . Réciproquement, si a et b appartiennent à P^* et si $ax = 0$, avec $x \in S^*$, x appartient nécessairement à N^* et par suite $bx = 0$ et ainsi $a \equiv b (I)$. Donc les classes mod. I sont bien N^* et P^* .

Ceci nous prouve en particulier que les éléments d'index strictement supérieur à 2 se partagent en éléments positifs et négatifs et ceci de façon algébrique, indépendamment de toute relation d'ordre.

Remarque. Si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, I admet une seule classe, si et seulement si „ $ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$ “ pour tout a et tout b de S .

En effet I admet une seule classe, si et seulement si $S^* = P^*$ par exemple. Dans ce cas si $ab = 0$, a et b ne peuvent tous deux appartenir à S^* , donc a ou b est d'index 1 ou 2.

Nous noterons désormais (*) la condition

$$ab = 0 \Rightarrow a^2 \text{ ou } b^2 = 0.$$

§ 2. Caractérisation des nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés. Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour caractériser les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, il suffit de savoir caractériser ceux qui vérifient (*);

Théorème 1. *Si S est un nildemi-groupe vérifiant (*) et totalement ordonné, alors S peut également être totalement ordonné, de telle sorte que 0 soit élément minimum ou maximum.*

Supposons S totalement ordonné par $\leq$; puisque S vérifie (*), d'après la remarque précédente P^* ou N^* (relatifs à $\leq$, mais aussi relatifs à toute autre relation d'ordre total d'après la Proposition 1) est vide. Supposons donc N^* vide; dans ce cas, si $i(x) > 2$, on a $x < 0$; et si $i(x) = 2$, on peut avoir $0 < x$ mais alors $xS = Sx = 0$. Définissons alors une nouvelle relation d'ordre total $\leq$ sur S :

$$a \leq 0 \quad \forall a \in S,$$

$$a \leq b, \quad \text{si } a \text{ et } b \text{ sont différents de } 0 \text{ et } a \leq b.$$

Il est facile de vérifier que $\leq$ fait de S un demi-groupe totalement ordonné.

On pourra donc toujours supposer si S est un nildemi-groupe totalement ordonné vérifiant (*), que 0 en est élément maximum ou minimum.

Notation. S^2 désigne l'ensemble des éléments de S admettant au moins une décomposition en deux facteurs a et b de S : $S^2 = \{x \in S, \exists a \in S, b \in S \text{ tels que } x = ab\}$. Ainsi, dire qu'un élément x appartient à $S - S^2$, c'est dire que x ne peut se décomposer en un produit de deux ou plusieurs facteurs; on dit encore (cf. T. TAMURA [7]) que x est premier.

Théorème 2. Soit S un nildemi-groupe et soit Σ_2 l'ensemble: $\{x \in S; x \neq 0, Sx = xS = 0 \text{ et } x \in S - S^2\}$.

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si $S - \Sigma_2$ peut être totalement ordonné.

$S - \Sigma_2$ est toujours un sous demi-groupe de S ; donc si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, il en est évidemment de même de $S - \Sigma_2$.

Supposons donc réciproquement que $S - \Sigma_2$ est totalement ordonné par $\leq$. Nous pouvons ordonner totalement $\Sigma_2 \cup \{0\}$, puisque c'est un zéro-demi-groupe. Définissons alors dans S une relation binaire $\leq$ qui prolonge les relations d'ordre sur $S - \Sigma_2$, et $\Sigma_2 \cup \{0\}$ et telle que, de plus, si $a \in S - \Sigma_2$ et $a < 0$ dans $S - \Sigma_2$, si $b \in S - \Sigma_2$ et $0 < b$ dans $S - \Sigma_2$ et si $x \in \Sigma_2 \cup \{0\}$, alors $a < x < b$ dans S .

Cette relation est évidemment une relation d'ordre total dans S et il est facile de voir que les lois d'isotonie sont satisfaites, en utilisant le fait que $a \leq b$ dans $S - \Sigma_2$ implique $xa \leq xb$, $ax \leq bx$ pour tout x de S .

Définition. Un élément de Σ_2 est appelé „élément superflu“ du demi-groupe S . D'après le théorème 1, il nous suffit d'étudier les nildemi-groupes sans éléments superflus.

Lemme. Soit S un nildemi-groupe sans éléments superflus. Supposons que

a) $S_2^2 = \{0\}$.

b) Si a et b sont d'index strictement supérieur à 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.

c) La relation d'équivalence I définie sur S^* admet exactement deux classes P^* et N^* , vérifiant $S^1 P^* S^1 \cap S^1 N^* S^1 = \{0\}$.

d) $\forall x \in S_2, xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow (xN^* \cup N^*x) = \{0\}$.

Désignant alors par

$$\Sigma_P = \{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1 P^* S^1 \cap S_2\} \cup P^* \cup \{0\},$$

$$\Sigma_N = \{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1 N^* S^1 \cap S_2\} \cup N^* \cup \{0\},$$

on a: Σ_P et Σ_N sont deux nilsemi-groupes, vérifiant $*$, tels que

$$S = \Sigma_P \cup \Sigma_N \text{ et } \Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}.$$

Montrons tout d'abord que les deux classes P^* et N^* vérifient $P^*N^* = N^*P^* = 0$. Soient en effet $a \in P^*$ et $b \in N^*$; on a donc $a \neq b (I)$, et par suite, il existe $x \in S^*$ tel que $ax = 0$ et $bx \neq 0$. Comme $a^2 \neq 0$, $x \neq a (I)$, donc $x \in N^*$ et $x \equiv b (I)$, donc $ax = 0$ implique $ab = 0$, et $ba = 0$ d'après la condition b). On a d'ailleurs $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$; en effet, si $x = u a v$, avec $a \in S$, $u \in P^*$, $v \in N^*$, alors si $a \in S^*$, $a \in P^*$ ou N^* , donc av ou $ua = 0$ puisque $P^*N^* = N^*P^* = 0$, et si $a \in S_2$, si av est distinct de 0, d'après la condition d) $ua = 0$. Donc dans tous les cas $x = 0$.

L'idéal engendré par $P^*, S^1 P^* S^1$, est contenu dans Σ_P , car si $x \in S^1 P^* S^1 \cap (S_2 \cup \{0\})$, il appartient par définition à Σ_P et si $x \in S^1 P^* S^1 \cap S^*$, alors $x^2 \neq 0$ implique $x \in P^*$ car sinon $x^2 \in S^1 P^* S^1 N^* = 0$ d'après ce qui précède. De même, $S^1 N^* S^1$ est contenu dans Σ_N et ainsi, Σ_P et Σ_N sont des nilsemi-groupes, sous demi-groupes de S . Ils vérifient $*$, car si nous avons $ab = 0$ avec a et $b \in N^* [P^*]$, alors $a \equiv b (I)$ et $ab = 0$ implique $b^2 = 0$, ce qui n'est pas.

Pour montrer que $\Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}$, il nous suffit de montrer que les sous ensembles suivants:

$$\{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\},$$

$$\{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{S^1 N^* S^1 \cap S_2\},$$

et

$$\{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{S^1 P^* S^1 \cap S_2\}$$

sont vides.

Il résulte trivialement de la condition d) que le premier ensemble est vide. Le deuxième et le troisième ensembles sont vides, car si, par exemple, $x \in S_2 \cap S^1 N^* S^1$, pour tout y de P^* on a $xy = yx = 0$, puisque $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$.

Théorème 3. Soit S un nilsemi-groupe, sans éléments superflus et ne vérifiant pas „ $ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$ “.

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si

a) $S_2^2 = \{0\}$.

- b) Si a et b sont d'index strictement supérieur à 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.
- c) La relation d'équivalence I admet exactement deux classes P^* et N^* telles que $S^1 P^* S^1 \cap S^1 N^* S^1 = \{0\}$.
- d) $\forall x \in S_2, xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow xN^* \cup N^*x = \{0\}$.
- e) Σ_N et Σ_P peuvent être totalement ordonnés.

(Σ_N et Σ_P sont définis dans le lemme précédent.)

Condition Suffisante. Σ_N et Σ_P sont, d'après le lemme précédent, deux nildemi-groupes vérifiant (*) donc, d'après le Théorème 1 et la condition e), on peut ordonner totalement Σ_P avec 0 comme élément maximum et Σ_N avec 0 comme élément minimum. Comme d'après le lemme, $\Sigma_N \cup \Sigma_P = S$ et $\Sigma_N \cap \Sigma_P = \{0\}$, nous pourrions définir une relation d'ordre total sur S , $\leq$, prolongeant les relations sur Σ_N et Σ_P , en posant

$$a < 0 < b, \quad \forall a \neq 0, \quad a \in \Sigma_P, \quad \forall b \neq 0, \quad b \in \Sigma_N.$$

Il nous suffit de montrer que $\Sigma_N \Sigma_P = \Sigma_P \Sigma_N = \{0\}$, pour que l'on soit assuré de l'isotonie.

Soient $a \in \Sigma_P, b \in \Sigma_N$; si a et $b \in S_2, ab = ba = 0$ d'après la condition a); si $a \in P^*, b \in N^*, ab = ba = 0$ d'après la démonstration du lemme; si $a \in \Sigma_P \cap S_2$ et si $b \in N^*$. D'après la définition de Σ_P , on sait qu'alors, ou $a \in S^1 P^* S^1$ et alors on a vu que $S^1 P^* S^1 N^* = 0$ dans le lemme, donc $ab = 0$, ou il existe $y \in P^*$ tel que ay ou $ya \neq 0$; mais alors, d'après la condition d) $a N^* = 0$ et $ab = 0$.

Condition Nécessaire. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné. On a vu dans l'introduction que l'on avait nécessairement $S_2^2 = \{0\}$, d'où a). Comme S ne vérifie pas la condition (*), d'après la Proposition 1 et la Remarque qui la suit, on a c) qui est vérifié, avec $P^* = \{x \in S; i(x) \geq 3, x < 0\}$ et $N^* = \{x \in S; i(x) \geq 3, x > 0\}$. La condition b) est satisfaite comme on l'a vu au § 1. Enfin si $xP^* \cup P^*x \neq 0$, on a nécessairement $x < 0$, donc $xN^* = N^*x = 0$ et d) est satisfait. Les conditions a, b, c et d du lemme étant alors satisfaits, Σ_N et Σ_P sont sous demi-groupes de S , donc peuvent être totalement ordonnés.

Ce théorème nous prouve que le problème de savoir à quelle condition un nildemi-groupe S peut être totalement ordonné sera résolu s'il l'est pour les nildemi-groupes vérifiant $ab = 0$ implique a^2 ou $b^2 = 0$ (*). Pour étudier ces nildemi-groupes, nous distinguons le cas fini du cas quelconque.

§ 3. Nildemi-groupes finis vérifiant (*) totalement ordonnés. Nous avons démontré dans [5]⁽¹⁾ qu'un demi-groupe S fini d'ordre p est un nildemi-groupe, si et seulement si, S admet au plus un idempotent, et si le treillis des idéaux (non vides) de S est de longueur $p - 1$.

Donc, si S est un nildemi-groupe fini, d'ordre p , toute chaîne maximale d'idéaux est de longueur $p - 1$. On peut alors énoncer:

(1) Nous renvoyons également au Chapitre 1, Théorème 1.6.

Théorème 4. Soit S un nildemi-groupe fini d'ordre p , vérifiant (*). S peut être totalement ordonné, si et seulement si l'une des chaînes maximales, $I_1 = \{0\}$, $I_2, \dots, I_p = S$ d'idéaux de S vérifie

$$\begin{aligned} \forall x \in S, \quad \forall r, \forall s \in \{1, 2, \dots, p\} \\ xI_r \subseteq I_s \Leftrightarrow x(I_r - I_{r-1}) \cap I_s \neq \emptyset \\ I_r x \subseteq I_s \Leftrightarrow (I_r - I_{r-1})x \cap I_s \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Condition Nécessaire. Si S est totalement ordonné, on peut d'après le théorème 1, supposer que 0 en est le plus petit élément. Dans ce cas, les sections commençantes $x^{\leq}$ sont des idéaux de S , formant une chaîne maximale de $\{0\}$ à S de longueur $p - 1$. Si l'on a $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_p$, alors en posant $I_n = a^{\leq}$, il est clair que, $xa_k \in I_s$ implique $xa_k^{\leq} \subseteq I_s$ et par suite $x(I_k - I_{k-1}) \cap I_s \neq \emptyset$ implique $xI_k \subseteq I_s$.

Condition Suffisante. Nous supposons qu'une chaîne maximale $I_1 = \{0\} \subset I_2, \dots, \subset I_p = S$ vérifie les conditions du Théorème 4, et nous posons $a_k = I_k - I_{k-1}$ et ordonnons S par $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Cette relation est isotone; il suffit de vérifier que $a_i < a_{i+1}$ implique $xa_i \leq xa_{i+1}$ et $a_{i+1}x \leq a_ix$. Or si $xa_{i+1} \in I_s$, $xa_i \in I_s$ car $a_i \in I_{i+1}$ et nous avons nécessairement $xa_i \leq xa_{i+1}$.

Ainsi, la conjonction des Théorèmes 2, 3 et 4 permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe fini puisse être totalement ordonné.

References

- [1] A. H. Clifford et G. B. Preston: The algebraic theory of semigroups AMS 1961. Vol. I.
- [2] L. Fuchs: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1966.
- [3] E. Ja. Gabovitch: Unsolved problems in the theory of semigroups (Russian). Sverdlovsk 1969.
- [4] T. Merlier: Nildemi-groupes totalement ordonnés. C. R. Acad. Sc. Paris t. 274, p. 1779-1782, 19 Juin 72, Série A.
- [5] T. Merlier: Sur les idéaux des demi-groupes nilpotents. Semigroup Forum (to appear).
- [6] T. Merlier: Sur les demi-groupes réticulés et les o-demi-groupes. Semigroup Forum. Vol. 2, 1971, p. 64-70.
- [7] T. Tamura: The theory of construction of finite semigroups. Osaka Math. J. 10, 1958, p. 191-204.

Adresse de l'auteur: (Mlle) Thérèse Merlier, Université de Paris VI, Mathématiques Pures, 4 Place Jussieu, 75230 Paris — Cedex 05, France.

§4. Exemples

a) Donnons un exemple de demi-groupe qui est un nildemi-groupe, qui ne vérifie pas la condition * :

$$(*) : xy = 0 \implies x^2 \text{ ou } y^2 = 0 ;$$

Considérons l'ensemble S des matrices 4×4 sur le corps des réels $\mathbb{R}$, triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire si $a = (a_{ij})$, on a $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$.

Il est bien connu que S est un demi-groupe multiplicatif tel que $S^4 = 0$.

Ce demi-groupe S ne vérifie pas la condition $*$; considérons en effet les deux matrices x et y de S définies par :

$$x = (x_{i,j}) \text{ avec } x_{1,3} = x_{1,4} = x_{2,4} = x_{3,4} = 1, \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

$$y = (y_{i,j}) \text{ avec } y_{1,2} = y_{1,3} = y_{1,4} = y_{2,4} = 1, \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

On a alors $x^2 = (a_{ij})$ avec $a_{1,4} = 1$ et 0 ailleurs ; $y^2 = x^2 \neq 0$. Mais $xy = 0$.

De plus, S ne vérifie pas la condition b) du théorème 3, ce qui prouve qu'il ne peut être totalement ordonné.

En effet les deux matrices x et y précédemment décrites, sont telles, que $xy = 0$ et que $yx = (b_{ij})$ avec $b_{1,4} = 2$ et 0 ailleurs. Donc x et y sont d'ordre supérieur à 2 (4 exactement) et on a $xy = 0$ et $yx \neq 0$.

b) Donnons maintenant un exemple de demi-groupe, nilpotent fini, vérifiant la condition (*) et ne pouvant être totalement ordonné.

Considérons l'ensemble D des matrices 3×3 sur le corps $\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$, triangulaires supérieures strictes, i.e. si $a = (a_{ij})$ $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$. D est évidemment un demi-groupe fini, qui est nilpotent ; $S^3 = 0$. Ecrivons toute matrice de D

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sous la forme } (a, b, c).$$

Nous avons $(a, b, c)(a', b', c') = (0, ac', 0)$. Cela nous prouve immédiatement que D vérifie la condition $*$. D peut-il être totalement ordonné ? Nous allons utiliser le théorème 4. (On peut de plus vérifier que D n'admet pas d'éléments superflus).

Remarquons tout d'abord que tout élément $x = (0, c, 0)$ engendre un idéal

$X = \{x, 0\}$, et que tout élément $y = (a, b, c)$ avec a ou c non nul engendre un idéal bilatère égal à $Y = \{y, 0, (0, x, 0) ; x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$. Donc toute chaîne maximale d'idéaux de D est de la forme :

$$0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k \subset I_{p-1} \subset J_1 \subset J_2 \dots \subset D, \text{ avec}$$

$$I_k - I_{k-1} = \{(0, x_k, 0)\} \text{ et par exemple } I_1 = \{(0, 1, 0) ; 0\}.$$

Mais si l'on considère deux éléments $u = (a, b, c)$ et $u' = (a', b', c')$ avec $a \neq a'$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, il existe au moins un idéal J_k qui contient u et u' ; donc il existe un idéal J_n qui contient u et u' et tel que u' par exemple n'appartient pas à J_{n-1} : c'est-à-dire que l'on a :

$$J_{n-1} \subsetneq J_n, J_n \setminus J_{n-1} = u', u \in J_{n-1}.$$

On a $u' = (a', b', c')$ et comme a est supposé non nul, on a en posant

$$v = (1, 1, a'^{-1}), u v = (0, 1, 0).$$

Donc $(J_n - J_{n-1})v \cap I_1 \neq \emptyset$; comme $u v = (0, a a'^{-1}, 0)$ et comme $a' \neq a$, $a a'^{-1} \neq 1$, et par suite uv n'appartient pas à I_1 . A fortiori on n'a pas $J_n v \subseteq I_1$.

Le demi-groupe D ne peut donc être totalement ordonné en vertu du théorème 4.



c) Donnons enfin un exemple de nilsemi-groupe totalement ordonnable.

Considérons le demi-groupe abélien libre L engendré par a et b . Fixons n dans $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, et considérons dans L , l'idéal bilatère $I = \{a^i b^j \in L ; i+j \geq n\}$. Et soit S le quotient de Rees, L/I . Alors S est un nilsemi-groupe d'indice n exactement et dans S , $a^i b^j = 0$ si et seulement si $i+j \geq n$. S vérifie la condition $*$; $xy = 0 \implies x^2$ ou $y^2 = 0$.

Vérifions que S est un demi-groupe totalement ordonnable.

On peut considérer les idéaux bilatères de S définies par : pour tout (i, j) , $i+j \neq 0$ $X_{i,j} = \{x^\lambda b^\mu ; i+j < \lambda + \mu \text{ ou } i+j = \lambda + \mu \text{ et } i \leq \lambda\}$. On peut voir que :

$X_{i,j} \subseteq X_{i',j'}$ si et seulement si $i'+j' < i+j$ ou $i'+j' = i+j$ et $i \leq i'$ et que les $X_{i,j}$ forment une chaîne maximale d'idéaux de S . De plus, on a

$$X_{i,j+1} - X_{i+1,j} = \{a^i b^{j+1}\} \text{ et } X_{k-1,0} - X_{0,k} = \{a^{k-1}\};$$

il est alors facile de voir que les conditions du théorème 4 sont satisfaites.

S est alors totalement ordonné par la relation suivante :

$$0 \leq a^i b^j \text{ pour tout } i \text{ et tout } j, i+j \neq 0$$

$$a^\lambda b^\mu \leq a^{\lambda'} b^{\mu'} \iff \lambda + \mu > \lambda' + \mu' \text{ ou}$$

$$\lambda + \mu = \lambda' + \mu' \text{ et } \lambda \geq \lambda'$$

§5. Nildemi-groupes quelconques totalement ordonnés.

Les théorèmes 2,3,4 précédents nous donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe fini puisse être totalement ordonné. Le théorème 4.5. nous donne alors une condition dans le cas général.

Toutefois, on peut aussi appliquer le théorème 3 (dans la reproduction de l'article [M₃] du chapitre 3). Rappelons ce théorème :

"Un demi-groupe S est totalement ordonnable, si et seulement si, il existe une famille $H_\lambda, \lambda \in \Lambda$, de parties non vides de S telles que :

$$\alpha) \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \text{ est l'égalité.}$$

$\beta)$ Pour tout λ de Λ , la famille des $(H_\lambda \dots a)_1, a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S^1 \times S^1$ et de plus, si a et b sont deux éléments quelconques de S on a

$$(H_\lambda \dots a)_1 \cap (H_\lambda \dots b)_1 = (H_\lambda \dots a)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda \text{ ou}$$

$$(H_\lambda \dots a)_1 \cap (H_\lambda \dots b)_1 = (H_\lambda \dots b)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda.$$

$[(H \dots a)_1]$ est l'ensemble des couples (x,y) de $S^1 \times S^1$ tels que xay appartient à H].

Dans le cas où S est un nildemi-groupe vérifiant (*) on a :

THEOREME 4.7. Soit S un nildemi-groupe vérifiant (*)⁽¹⁾. S peut être totalement ordonné, si et seulement si

a) il existe une famille $I_\lambda, \lambda \in \Lambda$, d'idéaux bilatères de S vérifiant :

$$ab \in I_\lambda \implies a^2 \text{ ou } b^2 \in I_\lambda.$$

(1) Condition * : $ab = 0 \implies a^2 \text{ ou } b^2 = 0.$

b) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_{I_\lambda}^1$ est l'égalité.

c) Pour tout λ de Λ , la famille des $(I_\lambda \dots a)_1$, $a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S^1 \times S^1$, et de plus, si a et b sont deux éléments quelconques de S , on a $(I_\lambda \dots a)_1 \cap (I_\lambda \dots b)_1 = (I_\lambda \dots a)_1$ pour tout λ de Λ ou $(I_\lambda \dots b)_1$ pour tout λ de Λ .

Ces conditions sont suffisantes d'après le théorème 3 (article $[M_3]$) du chapitre 3. Inversement, elles sont nécessaires, car si S est un nildemi-groupe totalement ordonné par $\leq$, vérifiant $\ast$, alors pour tout x , $x^{\leq} = \{y \in S ; y \leq x\}$ est un idéal bilatère. Et il est facile de vérifier que les idéaux $x^{\leq}$, $x \in S$, vérifient les conditions du Théorème 4.7.

§ 6. Cas particulier.

Il peut arriver que l'on puisse, dans certains cas particuliers, donner de façon plus simple une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe puisse être totalement ordonné. Ainsi l'on a :

THEOREME 4.8. Soit S un nildemi-groupe admettant un seul élément d'index 2, à savoir " a ". S peut être totalement ordonné si et seulement si

- 1) Tout élément de S est d'index inférieur ou égal à 3,
- 2) Si x et y sont deux éléments de $S - \{0, a\}$, $xy = a$.
- 3) $\forall x \in S$, $xa = ax = 0$.

Condition Suffisante. Ordonnons S de la façon suivante ; soit

$S_3 = \{\text{éléments d'index 3}\}$; nous posons $0 < a < x$ pour tout x de S_3 .

L'isotonie se vérifie aisément grâce aux propriétés 2) et 3).

Condition Nécessaire. Montrons tout d'abord que tout élément est d'index inférieur ou égal à 3. Soit x , tel que $i(x) = 2p$ avec $p > 1$. Alors $(x^p)^2 = 0$ et comme x^p est différent de 0, x^p est d'index 2 et est égal à a . Mais $(x^{p+1})^2 = 0$ et x^{p+1} est différent de 0, car $x^{p+1} = 0$ implique $i(x) = 2p \leq p+1$ ce qui n'est pas. Donc $x^{p+1} = a = x^p$; on a alors $x^{2p} = x^{2p-1} = 0$ en multipliant par x^{p-1} ; d'où $i(x) \leq 2p-1$. Ainsi tout élément d'index pair est nécessairement d'index 2 et égal à a . Soit maintenant x , tel que $i(x) = 2p+1$ avec $p > 1$.

Si $x^{2p+1} = 0$, $(x^{p+1})^2 = 0$ et x^{p+1} est différent de 0, puisque x est d'index $2p+1 > p+1$. Donc $x^{p+1} = a$, et de même $x^{p+2} = a$ et $x^{p+1} = x^{p+2}$, ce qui est impossible, car on en déduit $x^{2p} = 0$. La condition 1) est donc satisfaite.

Comme dans tout demi-groupe totalement ordonné, xy est compris entre x^2 et y^2 , et comme $i(x) = 3$ implique $i(x^2) = 2$, on a pour tout x, y de

$$S_3, x = y = xy = a.$$

Enfin, si x appartient à S_3 , $a^2 \leq xa \leq x^2$, donc $xa = a$ ou $xa = 0 = a^2$ (nous avons implicitement supposé que S admettait 0 pour élément minimum ce qui est possible d'après le Théorème 1 du §2). Mais $xa = a$ est impossible, car cela implique $x^2 a = a = 0$ donc $xa = 0$ et de même $ax = 0$.

Ainsi, si nous considérons le demi-groupe S dont la table est la suivante :

	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
b	0	0	a	a	a
c	0	0	a	a	0
d	0	0	a	0	a

c' est un nildemi-groupe qui vérifie les conditions 1) et 3) mais pas la condition 2) ; par suite, il ne peut être totalement ordonné.

CHAPITRE 5

BANDES TOTALEMENT ORDONNEES

Une bande est un demi-groupe idempotent, c'est-à-dire un demi-groupe, dont tout élément x vérifie $x = x^2$.

Dans le chapitre 3, Corollaire 3.4., nous avons vu le rôle important que jouent dans la théorie des demi-groupes ordonnés, les demi-groupes localement finis. Or dans [15], on trouve le résultat suivant :

LEMME 5.0. : Tout demi-groupe idempotent est localement fini.

Nous en déduisons donc immédiatement, grâce au Corollaire 3.4.

THEOREME 5.1. : Une bande S est une σ -bande, si et seulement si toute sous bande finie de S est une σ -bande.

"Remarque sur l'étude des demi-groupes idempotents totalement ordonnés.

Dans un article [26], T. Saïto avait donné de nombreuses propriétés de ces demi-groupes. Dès le début de nos travaux de recherche, ce problème de caractériser les σ -bandes nous avait intéressée. Comme nous savions que les bandes étaient localement finies, il nous semblait nécessaire de commencer par l'étude des σ -bandes finies. D'où notre travail $[M_8]$ de 1971, qui répondait à nos vœux et donnait une caractérisation. Nous essayons ensuite de montrer algébriquement "qu'une bande est une σ -bande, si et seulement si, toute sous bande finie est une σ -bande". Durant ce temps, T. Saïto publia lui-même une caractérisation dans le cas général [27]. Dans le même temps, par des méthodes classiques de Calcul Propositionnel, exposées ici et devant paraître aux Proc. Jap. Acad. nous arrivions au résultat voulu : une bande est une σ -bande si et seulement si toute sous bande finie a la même propriété. Cela confirmait bien notre idée de départ, et nous permettait de caractériser les σ -bandes dans le cas général".

Consacrons nous donc aux bandes finies et trouvons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une bande finie soit une σ -bande.

La partie A de notre travail $[M_8]$ donne une réponse à cette question. Nous le reproduisons ici avant de donner quelques compléments.

Semigroup Forum, Vol. 4 (1972), 124-149.

RESEARCH ARTICLE

SUR LES σ -BANDES FINIES ET LES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNES σ -SIMPLES

Thérèse Merlier

Communicated by T. Saïto*

This paper is divided into sections A and B. In section A, we characterize those finite bands which can be totally ordered, σ -bands, (Theorem 1-2), and we establish a process (§3) for constructing them. In section B, we answer in part a question proposed by E. Ya. Gabovič in [4], since this section is concerned with totally ordered semigroups which are σ -simple, i.e. they contain no proper convex ideals. We give, in particular, a characterization of totally ordered σ -simple finite bands and also of σ -simple finite σ -bands.

A - σ -Bandes finies

§1 - Introduction.

Soit S une bande, c'est à dire suivant la terminologie de A. H. Clifford [1] un demi-groupe idempotent. Dans une bande, les équivalences de Green $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ sont respectivement définies par $a \equiv b (\mathcal{L}) \iff a = ab$ et $b = ba$, $a \equiv b (\mathcal{R}) \iff a = ba$ et $b = ab$, $a \equiv b (\mathcal{D}) \iff a = aba$ et $b = bab$. [6].

* Les résultats de cet article concernant les σ -bandes ont été présentés aux " Journées sur les demi-groupes " Lyon 10-13 Mai 1971.

MERLIER

De plus, l'équivalence de Green $\mathcal{D}$ est une congruence et $S^* = S/\mathcal{D}$ est une bande commutative, donc un inf-demi-treillis pour la relation d'ordre $\preceq$, $D_a \preceq D_b \Leftrightarrow D_{ab} = D_a$. (D_a désigne la $\mathcal{D}$ -classe de l'élément a). Si S^* admet un plus petit élément D_0 , ce qui est évidemment le cas si S est une bande finie, nous avons :

Lemme 1-1 : [Résultat de Y. Matsushima (7)] . D_0 est réduit à un élément z , si et seulement si, S admet un zéro z .

D_0 est une $\mathcal{L}$ -classe [$\mathcal{R}$ -classe], si et seulement si, D_0 est l'ensemble des zéros à gauche [à droite] de S .

(Ce résultat, établi dans le cas d'une bande finie, est valable dans une bande quelconque).

Lemme 1-2 : Dans une bande S , ab est zéro à gauche, [à droite], si et seulement si ba l'est.

Si $ab = z$ où z est un zéro à gauche, $ba = ba ba = b \cdot z a = b z$ et par suite ba est zéro à gauche.

Rappelons qu'un ensemble ordonné E est un arbre, si pour tout x de E , l'ensemble des éléments inférieurs ou égaux à x est une chaîne.

Si une bande est une σ -bande (i.e. admet une structure de demi-groupe totalement ordonné), nous avons :

Lemme 1-3 : [Résultat de T. Saïto (9)] . Si S est une σ -bande, S^* est un arbre-inf-demi-treillis.

Lemme 1-4 : [Résultat de T. Saïto (9)] . Dans une σ -bande, toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe.

MERLIER

§ 2 - Caractérisation des σ -bandes finies.

Il est facile de voir que toutes les bandes de cardinal inférieur ou égal à 3 sont des σ -bandes, mais il n'en est déjà plus de même des bandes d'ordre 4. Par exemple la bande S, dont la table est la suivante ne peut être totalement ordonnée.

	a	b	z_1	z_2
a	a	z_1	z_1	z_1
b	z_1	b	z_1	z_1
z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
z_2	z_2	z_2	z_2	z_2

Supposons en effet que pour une certaine relation d'ordre total nous ayons $a < b$. Alors par isotonie $a^2 = a < ab = z_1 < b^2 = b$. (Le produit de deux éléments est toujours compris entre ces éléments dans une bande ordonnée. Nous utiliserons cette propriété dans la suite).

Mais $b \cdot z_2 = z_1$, donc z_1 est entre b et z_2 et $z_2 < z_1 < b$, d'autre part $a \cdot z_2 = z_1$, donc $a < z_1 < z_2$, et les deux inégalités strictes $z_2 < z_1$, $z_1 < z_2$ nous prouvent que l'hypothèse $a < b$ était absurde. Supposer $b < a$ est de même absurde. La bande S n'est donc pas une σ -bande.

D'après les lemmes 1 et 4, il est clair que les zéros à gauche ou à droite d'une σ -bande finie jouent un rôle important.

Supposons que S soit une bande finie totalement ordonnée par la relation $\leq$, et supposons que S admette n zéros à gauche, $n > 1$. ($a < b$ signifie $a \leq b$ et $a \neq b$). Soit Z l'ensemble de ces zéros, ordonnés par restriction de l'ordre de S à Z de la façon suivante : $z_1 < z_2 \dots < z_n$. Appelons

$$X_0 = \{x \in S ; x < z_1\}, \quad X_i = \{x \in S ; z_i < x < z_{i+1}\} \text{ avec } i \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

$$X_n = \{x \in S ; z_n < x\}.$$

Nous pouvons alors énoncer

MERLIER

Théorème 1-1 : Soit S une bande finie totalement ordonnée, avant n zéros à gauche, $n > 1$. Avec les notations précédentes on a

a) Chacun des X_j , s'il n'est pas vide, est un sous demi-groupe de S .

b) Si $x \in X_0$ et $y \notin X_0$, $xy = z_1$

Pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, si $x \in X_i$ et $y \leq z_i$, $xy = z_i$

et si $y \geq z_{i+1}$, $xy = z_{i+1}$. Si $x \in X_n$ et $y \notin X_n$, $xy = z_n$.

En effet le produit de deux éléments x et y étant compris entre x et y dans une bande totalement ordonnée, chacun des X_j est un sous demi-groupe. Montrons que $X_0 (S - X_0) = z_1$; soient $x \in X_0$ et $y \notin X_0$: alors $x < z_1 \leq y$; d'où par isotonie $xy \leq z_1, y = z_1$ puisque z_1 est zéro à gauche, et $x z_1 \leq xy$. Comme $x z_1$ est aussi zéro à gauche, $z_1 \leq x z_1$ et par suite $xy = z_1$.

Soit $x \in X_i$; nous avons donc $z_i < x < z_{i+1}$; si $y \geq z_{i+1}$ $xy \geq x z_{i+1} \geq x$ et $xy \leq z_{i+1}, y = z_{i+1}$, donc

$z_i < x \leq x z_{i+1} \leq xy \leq z_{i+1}$; comme $x z_{i+1}$ est zéro à gauche, il est nécessairement égal à z_{i+1} , donc $xy = z_{i+1}$.

De même, si $y \leq z_i$, $xy = z_i$, et $X_n (S - X_n) = z_n$.

Il résulte de ce théorème, que la table de Cayley est de la forme suivante :

	X_0	z_1	z_i	X_i	z_{i+1}	z_n	X_n
X_0	X_0	z_1					
z_1							
z_i							
X_i			z_i	X_i	z_{i+1}		
z_{i+1}							
z_n							
X_n						z_n	X_n

MERLIER

Plus particulièrement, nous voyons que

1°) Pour tout x de S , le cardinal de xZ , $|xZ|$, est égal à 1 ou 2.

2°) Si nous désignons par H_i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$, le sous-ensemble de $Z \{z_1, \dots, z_n\}$, à tout élément de X_i , on peut associer le triplet (z_i, H_i, z_{i+1}) , avec $x H_i = z_i$ et $x(Z - H_i) = z_{i+1}$. Les sous-ensembles H_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, forment une chaîne de $\mathcal{P}(Z)$, ensemble des parties de Z .

Par analogie, à un élément x de X_0 , on peut associer le triplet $(\square, \phi, z_0)$ et à y de X_n , le triplet $(z_n, Z, \square)$. Ainsi, à tout x de $S-Z$, est associé un triplet (z_x, H_x, z'_x) où $H_x \in \mathcal{P}(Z)$, peut être ϕ (ou Z), au quel cas z_x (ou z'_x) est remplacé par le signe $\square$, de telle sorte que $x H_x = z_x$, $x(Z - H_x) = z'_x$, les H_x forment une chaîne de $\mathcal{P}(Z)$.

Ceci nous conduit à donner la définition suivante :

Définition : Soit S une bande, et soit Z , l'ensemble supposé non vide, des zéros à gauche de S . Z est enchaîné, si les conditions suivantes sont satisfaites:

1°) Pour tout x de S , $|xZ| = 1$ ou 2 , c'est-à-dire que $xZ = \{z_x\} \cup \{z'_x\}$, ou $xZ = \{z_x\}$,

2°) A tout x de $S-Z$ est associé un triplet (z_x, H_x, z'_x) tel que H_x est le sous-ensemble de Z , pouvant être ϕ ou Z , vérifiant $x H_x = \{z_x\}$ et $x(Z - H_x) = \{z'_x\}$ et tel que les H_x , $x \in S-Z$, forment une chaîne de $\mathcal{P}(Z)$.

MERLIER

3°) Etant donnés deux triplets (z_x, H_x, z'_x) , (z_y, H_y, z'_y) tels que $H_x \subsetneq H_y$, z'_x appartient à H_y , z_y n'appartient pas à H_x et $z'_x = z_y$ si et seulement si $H_y = H_x \cup \{z'_x\}$.

La définition est analogue dans le cas où Z est l'ensemble des zéros à droite. Nous avons alors

Proposition 1-1 L'ensemble des zéros (d'un côté) d'une bande totalement ordonnée est enchaîné.

Nous appelons S_1, S_2, S_3, S_4 les quatre bandes suivantes dont les tables de Cayley sont :

S_1

	a	b	c	z
a	a	z	z	z
b	z	b	z	z
c	z	z	c	z
z	z	z	z	z

S_2

	a	b	z	z'
a	a	z	z	z
b	z	b	z	z
z	z	z	z	z
z'	z'	z'	z'	z'

S_3

	a	b	z	z'
a	a	a	z	z
b	a	b	z	z'
z	z	z	z	z
z'	z'	z'	z'	z'

S_4

	a	b	z	z'
a	a	a	z	z
b	b	b	z'	z'
z	z	z	z	z
z'	z'	z'	z'	z'

Lemme 1-5 : Les quatre bandes S_1, S_2, S_3, S_4 ne peuvent être totalement ordonnées.

- S_1 est une bande commutative admettant z comme zéro.
Comme $ab = ac = bc = z$, si S_1 était totalement ordonnée, z serait compris entre a et b , entre a et c et entre b et c , ce qui est impossible.
- S_2 : nous avons considéré cette bande dans l'introduction et montré que ce n'était pas une σ -bande.

MERLIER

- S_3 est une bande unitaire d'élément unité b . Or $az' = z$ donc est distinct de a et de z' ; d'après le Théorème de [2], S_3 n'est pas une σ -bande.

- S_4 : Si dans cette bande, supposée totalement ordonnée, nous avons $z < z'$, l'égalité $az' = z$ impliquerait $a < z < z'$ et l'égalité $bz = z'$ impliquerait $z < z' < b$. Nous aurions donc $a < z < b$ et en vertu de l'isotonie, on aurait $a^2 = a < az = z < ab = a$ ce qui est impossible. L'inégalité $z' < z$ conduit à la même absurdité, S_4 n'est donc pas une σ -bande. Rappelons qu'un demi-groupe S' est dual d'un demi-groupe S , si S et S' sont définis à partir du même ensemble X et si les opérations de multiplication $\circ$ et $*$ de S et S' respectivement sont telles que $a * b = b \circ a$ pour tout a et b de X . Il est clair que si S est un σ -demi-groupe, il en est de même de son dual S' .

Théorème 1-2 : Une bande finie S est une σ -bande, si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes :

- 1°) S^* est un arbre inf-demi-treillis,
- 2°) Toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe,
- 3°) S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , ou à leurs duaux,
- 4°) Pour tout sous demi-groupe D de S , réunion de $\mathcal{D}$ -classes de S , dont Z_D est l'ensemble des zéros à gauche [à droite], on a :
 - α) Si a, b, c sont trois éléments de $D - Z_D$, z_1 et z_2 deux éléments distincts de Z_D et si $aZ_D = z_1$, $bZ_D = z_2$, $cz_1 = cz_2$, alors $cZ_D = z_1$ ou z_2 .
 - β) Z_D est enchaîné.

Condition Nécessaire.

Ces conditions sont nécessaires d'après les lemmes 1-3, 1-4, 1-5 le Théorème 1-1 et la Proposition 1-1, puisque, si S est une bande totalement ordonnée, tous sous demi-groupe de S est une bande totalement ordonnée.

MERLIER

Condition Suffisante.

Soit S une bande finie ; puisque S^* admet un plus petit élément D_0 et que d'après la condition 2) D_0 est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe, on peut affirmer, en vertu du lemme 1, que $D_0 = \{z\}$ où z est zéro de S ou que D_0 est de cardinal supérieur à 1 et est l'ensemble des zéros à gauche, par exemple, de S .

Cas I. S admet un zéro z .

1) Si $S - \{z\}$ est un demi-groupe, S est une σ -bande, si et seulement si $S - \{z\}$ est une σ -bande ; il suffit de prolonger un ordre total sur $S - \{z\}$ en posant $x < z$ pour tout x de $S - \{z\}$.

2) Si $S - \{z\}$ n'est pas un demi-groupe, il existe donc deux éléments $a \neq z$ et $b \neq z$ tels que $ab = z$. Soit alors c un élément de $S - \{z\}$; si $ac = z$ ($= ca$ d'après le lemme 2), alors $bc \neq z$, car sinon $\{a, b, c, z\}$ formerait un sous demi-groupe isomorphe à S_1 . Mais $ac \neq z$ et $bc \neq z$ ne peuvent être réalisés simultanément ; on aurait en effet, dans S^* , $D_z \prec D_{ac} \prec D_c$, $D_z \prec D_{bc} \prec D_c$ et comme S^* est un arbre inf-demi-treillis, D_{ac} et D_{bc} seraient comparables. Or $D_{ac} \cdot D_{bc} = D_{abc} = D_z$, donc $D_{ac} \cdot D_{bc}$ ne peut être égal ni à D_{ac} , ni à D_{bc} .

Par conséquent si $c \in S - \{z\}$, ac ou $bc = z$ et S admet la partition $S = S' \cup \{z\} \cup S''$ où $S' = \{x \in S - \{z\} ; ax = z\}$ et $S'' = \{x \in S - \{z\} ; bx = z\}$.

S' est un sous demi-groupe de S : si $ax = ay = z$, $axy = z$ et xy est distinct de z car sinon $\{a, x, y, z\}$ est isomorphe à S_1 .

S' est saturé modulo $\mathcal{D}$: si $x \in S'$: $ax = z$ et si $y \equiv x (\mathcal{D})$, $ay \equiv ax (\mathcal{D})$ car $\mathcal{D}$ est une congruence ; comme $ax = z$ est le seul élément de sa $\mathcal{D}$ -classe $ay = z$.

De même, S'' est un sous demi-groupe de S , saturé modulo $\mathcal{D}$.

Montrons enfin que $S' S'' = S'' S' = z$

Soient $x' \in S'$ et $y \in S''$; $xa = ax = yb = by = z$, d'où $yxa = z$, $xyb = z$, mais $xya \equiv yxa (\mathcal{D})$ puisque $xy \equiv yx (\mathcal{D})$, donc $xya = z = xyb$ et nécessairement $xy = z = yx$.

MERLIER

S sera alors une $\mathcal{O}$ -bande si S' et S'' sont des $\mathcal{O}$ -bandes, car il suffira, si S' et S'' sont totalement ordonnées, d'ordonner S par une relation d'ordre prolongeant celles définies sur S' et S'' , et telle que $x < z < y$ pour tout x de S' , y de S'' .

Cas II. S admet n zéros à gauche, $n > 1$.

Soit Z l'ensemble de ces zéros à gauche, qui est le $\mathcal{D}$ -classe minimum de S^* .

a) S'il existe $z \in Z$ tel que $A = \{x \in S-Z ; xZ = z\}$ est non vide, A est un sous demi-groupe de S saturé modulo $\mathcal{D}$.

Soient x et y , deux éléments de A ; $xZ = z$, $yZ = z$, donc $xyZ = z$ et de même $yxZ = z$; si xy est distinct de z , xy appartient à A . Si $xy = z$, $yx = z$ (lemme 2). Soit alors z' un zéro à gauche distinct de z , $\{x, y, z, z'\}$ est un sous demi-groupe de S isomorphe à S_2 , ce qui est impossible. Le produit xy appartient donc à A .

A est saturé modulo $\mathcal{D}$; car si x appartient à A , $xZ = z$ et si $y \equiv x (\mathcal{D})$, $y = yxy$ et $yZ = yxyZ = yz$, qui est un zéro à gauche. Montrons que $yz = z$; toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe ; si $x \equiv y (\mathcal{R})$ $xy = y$ et $yz = xyz = z$, si $x \equiv y (\mathcal{L})$, $yx = y$, $xy = x$ et si yz était égal à z' ; $\{x, y, z, z'\}$ serait isomorphe à S_4 , ce qui ne peut être.

b) Si H est un sous-ensemble de Z et s'il existe x et y, éléments de S tels que $xH = z$, $x(Z-H) = z'$, $z \neq z'$, $yH = z_1$, $y(Z-H) = z'_1$, $z_1 \neq z'_1$, alors $z = z_1$ et $z' = z'_1$.

Si $xH = z$ et $x(Z-H) = z'$, $xz = x^2H = xH = z$, donc z appartient à H . De même z_1 appartient à H . $xyH = xz_1$ est donc égal à z et de même $yxH = z_1$; supposons $z \neq z_1$:

MERLIER

comme $x y x H = z$, $x y x$ est distinct de $y x$, donc $x y$ est équivalent à $y x \bmod \mathcal{L}$ [car $xy \equiv yx \mathcal{D}$, donc $xy \equiv yx (\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{R})$]. Dans ce cas $\{xy, yx, z, z_1\}$ est isomorphe à S_4 .
Donc $z = z_1$ et de même $z' = z'_1$.

c) Définition d'une relation d'ordre sur les zéros à gauche de S

Puisque Z , ensemble des zéros à gauche de S , est enchaîné, à tout élément x de $S-Z$, on peut associer le triplet (z_x, H_x, z'_x) où H_x est éventuellement vide, les H_x formant une chaîne $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(Z)$

.) S'il existe x de $S-Z$, tel que $x Z = z$ (à x est donc associé (α, β, z) par exemple, nous posons $z = z_1$. Dans ce cas,

d'après la condition 4- α , s'il existe y de $S-Z$ tel que $y Z = z' \neq z_1$, à y est associé (z', Z, α) et nous posons $z' = z_n$ et si $t Z = z''$ alors $z'' = z_1$ ou z_n .

.) S'il n'existe pas d'élément x de $S-Z$, tel que $x = (\alpha, \beta, z)$, considérons H_1 plus petit élément de la chaîne $\mathcal{C}$; nous sommes donc assurés de l'existence d'un élément x de $S-Z$ tel que le triplet (z_i, H_i, z_j) corresponde à x avec H_i de cardinal supérieur ou égal à 1.

S'il existe un élément y auquel est associé le triplet (z'_i, H_i, z'_j) alors d'après b) $z_i = z'_i$ et $z_j = z'_j$.

Si H_i est de cardinal k , $H_i = \{z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,k-1}, z_i\}$.
Nous ordonnons alors les zéros de $H_i \cup \{z_j\}$ par

$$z_{i,1} = z_1 < z_{i,2} = z_2 \dots < z_{i,k-1} = z_{k-1} < z_i = z_k < z_j = z_{k+1}.$$

L'ordre sur $\{z_{i,1}, \dots, z_{i,k-1}\}$ est arbitraire.

MERLIER

Supposons que nous ayons ordonné Z jusqu'à z_k [z_k pouvant être z_1]. Il existe donc x , élément de $S-Z$, tel que le triplet associé à x est (z_{k-1}, H_{k-1}, z_k) (qui peut être $(\emptyset, \emptyset, z_1)$ avec $H_{k-1} = \{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ [ou $\emptyset$]).

Soit H_ℓ le plus petit sous ensemble de $\mathcal{P}(Z)$ contenant strictement H_{k-1} et appartenant à la chaîne $\mathcal{C}$. Puisque Z est enchaîné, H_ℓ contient H_{k-1} et z_k et il existe un élément y auquel est associé (z_ℓ, H_ℓ, z_m) , z_ℓ n'appartenant pas à H_{k-1} . Si $H_\ell = H_{k-1} \cup \{z_k\}$, $z_\ell = z_k$ et nous posons $z_m = z_{k+1}$ et ordonnons : $z_k < z_{k+1}$.

Si $H_\ell = H_{k-1} \cup \{z_k, z_{k,1}, \dots, z_{k,p-1}, z_\ell\}$, nous posons alors $z_{k,1} = z_{k+1}, \dots, z_{k,p-1} = z_{k+p-1}$, $z_\ell = z_{k+p}$, $z_m = z_{k+p+1}$ et ordonnons par :

$z_k < z_{k+1} < \dots < z_{k+p} < z_{k+p+1}$; l'ordre sur $\{z_{k,1}, \dots, z_{k,p-1}\}$ (qui peut être vide) est arbitraire.

Si H_{k-1} est maximum dans $\mathcal{C}$ et si à x est associé

(z_{k-1}, H_{k-1}, z_k) , nous ordonnons alors arbitrairement $Z - \{H_{k-1} \cup \{z_k\}\} = \{z_{k+1}, \dots, z_n\}$ par $z_{k+1} < z_{k+2} \dots < z_n$ avec de plus $z_k < z_{k+1}$.

Finalement, Z est totalement ordonné par

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n.$$

Nous posons alors :

$X_0 = \{x \in S-Z ; x Z = z_1\}$, $X_n = \{x \in S-Z , x Z = z_n\}$
et $X_i = \{x \in S-Z ; \text{le triplet associé à } x \text{ est } (z_i, H_i, z_{i+1})\}$
avec $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

X_0, X_n, X_i peuvent être vides.

X_i est encore l'ensemble suivant : $\{x \in S ; xz_1 = xz_2 = \dots = xz_i = z_i ;$
 $xz_{i+1} = \dots = xz_n = z_{i+1}\}$

MERLIER

D'après a) , nous savons déjà que X_0 et X_n sont ou vides, ou des sous demi-groupes de S , saturés mod $\mathfrak{D}$.

d) Chaque X_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) est un sous demi-groupe de S , saturé mod. $\mathfrak{D}$, s'il n'est pas vide.

$$X_i = \{x \in S ; xz_1 = \dots = xz_i = z_i ; xz_{i+1} = \dots = xz_n = z_{i+1}\}.$$

Il est clair que X_i est un sous demi-groupe de S .

Soient a et b deux éléments de S , avec $a \in X_i$ et $a \equiv b \ (\mathfrak{D})$. Puisque a n'est pas zéro à gauche, b ne l'est pas, car Z est une $\mathfrak{D}$ - classe. De même X_0 et X_n étant saturés mod. $\mathfrak{D}$, b ne peut appartenir qu'à X_j (avec $j \neq 0$). Raisonnons par l'absurde et supposons $j \neq i$ et $z_j < z_i$ par exemple. Dans ce cas, $bZ = \{z_{j+1}\} \cup \{z_j\}$. Puisque $a \equiv b \ (\mathfrak{D})$, d'après la condition 2) $a \equiv b \ (\mathcal{R})$ ou $a \equiv b \ (\mathcal{L})$. Si $a \equiv b \ (\mathcal{R})$, $a = ba$ et $b = ab$; d'où $bZ = abZ = a(\{z_{j+1}\} \cup \{z_j\})$ or $z_j < z_{j+1} \leq z_i$ donc $bZ = z_i$, ce qui est faux. Si $a \equiv b \ (\mathcal{L})$, $b = ba$, $a = ab$, d'où $bZ = b[\{z_{i+1}\} \cup \{z_i\}] = z_{j+1}$ ce qui n'est pas. L'hypothèse $j < i$ est absurde, de même $i < j$. Donc $j = i$ et X_i est saturé mod. $\mathfrak{D}$.

e) $X_0.X_n = z_1$ et $X_n.X_0 = z_n$.

Si $a \in X_0$ et $b \in X_n$, $a \neq z_1$ et $aZ = z_1$ et $b \neq z_n$ et $bZ = z_n$. D'où $abZ = z_1$ et $baZ = z_n$. Donc, d'après le lemme 2, $ab = z_1$ et $ba = z_n$, ou ab appartient à X_0 et ba à X_n . Mais on a vu en a) que X_0 et X_n sont saturés mod. $\mathfrak{D}$; comme $ab \equiv ba \ (\mathfrak{D})$, la seule possibilité est $ab = z_1$ et $ba = z_n$.

f) Pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $X_0.X_i = z_1$; $X_i.X_0 = z_i$.

Soit $a \in X_0$ et soit $x_i \in X_i$; $ax_iZ = z_1$ et $x_iaZ = x_iz_1 = z_i$.

MERLIER

De plus $ax_i \equiv x_i a \pmod{\mathcal{D}}$, donc on a deux possibilités ou $ax_i = z_1$ et $x_i a = z_i$, ou, si $i = 1$, ax_i et $x_i a$ appartiennent à X_0 .

Il suffit maintenant de montrer que $X_0 X_1 = z_1$ et $X_1 X_0 = z_1$ avec $X_1 = \{x \in S; x z_1 = z_1, x(Z - z_1) = z_2\}$. Soient D_a et D_{x_1} les deux $\mathcal{D}$ -classes minimum de X_0 et X_1 respectivement. Montrons que $D_{ax_1} = D_{x_1 a} = Z$. Si ax_1 et $x_1 a$ ne sont pas zéros à gauche, ils appartiennent à X_0 et par suite $a \equiv ax_1 \pmod{\mathcal{D}}$, $a \equiv x_1 a \pmod{\mathcal{D}}$, car $D_{ax_1} \leq D_a$ dans S^* .

Si la $\mathcal{D}$ -classe de a est une $\mathcal{R}$ -classe, on a $ax_1 a = x_1 a$, $x_1 ax_1 = ax_1$, $x_1 a^2 = x_1 a = a$ et le demi-groupe $\{ax_1, x_1, z_1, z_2\}$ est isomorphe à S_3 . Si la $\mathcal{D}$ -classe de a est une $\mathcal{L}$ -classe, $ax_1 = a$, $x_1 ax_1 = x_1 a$ et le demi-groupe $\{x_1 a, x_1, z_1, z_2\}$ est isomorphe à S_3 . Nous avons donc une contradiction dans tous les cas et par suite $ax_1 = z_1$ et $x_1 a = z_1$.

Soient alors a' et x' deux éléments quelconques de X_0 et X_1 respectivement. Si $a'x'$ était différent de z_1 , $a'x'$ appartiendrait à X_0 et $D_a \leq D_{a'x'}$. D'où $D_a \leq D_{x'}$ et $D_{x'} \leq D_{x'}$. Puisque S^* est un arbre, D_a et $D_{x'}$ sont comparables; ceci est absurde puisque $D_{x'} = Z \neq D_a$, $\neq D_{x'}$. Donc $a'x' = x'a' = z_1$.

De la même façon $X_n X_1 = z_n$ et $X_1 X_n = z_{n+1}$

6) Si $j > i$, $X_i X_j = z_{i+1}$ et $X_j X_i = z_j$, $i \in 1, \dots, n-2$
 $j \in 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \text{Si } j > i, \quad X_i X_j Z &= X_i (z_{j+1} \cup z_j) = z_{i+1} \\ X_j X_i Z &= X_j (z_{i+1} \cup z_i) = z_j \end{aligned}$$

Comme $z_{i+1} \neq z_1$ et $z_j \neq z_n$, nécessairement $X_i X_j = z_{i+1}$ et $X_j X_i = z_j$.

MERLIER

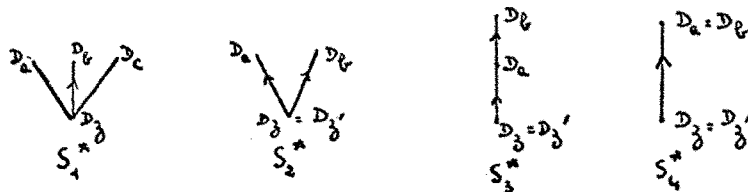
Si nous dressons la table de Cayley de S , elle est du même type que celle du Théorème 14. Si nous ordonnons partiellement S par $X_0 < z_1 < X_1 < z_2 \dots < z_i < X_i < z_{i+1} \dots < z_n < X_n$, relation d'ordre prolongeant celle définie sur Z , nous voyons que S sera une σ -bande, si et seulement si, pour tout i , X_i est une σ -bande ; l'ordre de S prolongera celui défini sur les X_i de la manière précédente et l'isotonie sera vérifiée. $[Y < z \Leftrightarrow \forall y \in Y, y < z]$.

Dans tous les cas, nous avons vu que S était une σ -bande, si et seulement si des sous demi-groupes de S , saturés mod. $\mathcal{D}$ étaient des σ -bandes. Or ces sous demi-groupes sont de cardinal strictement inférieur à celui de S et vérifient également les conditions 1, 2, 3, 4. Une itération des démonstrations permet de dire que S est une σ -bande, si tout sous demi-groupe d'ordre 2 est une σ -bande, ce qui est vrai. Les conditions sont donc suffisantes pour qu'une bande finie S soit une σ -bande.

Remarque : Les quatre conditions du Théorème 1-2 sont indépendantes.

1) Les quatre demi-groupes S_1, S_2, S_3, S_4 vérifient les conditions 1, 2 et 4.

Les inf-demi-treillis S_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$) sont en effet les suivants :



Ce sont donc des arbres inf-demi-treillis.

Il est immédiat que toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe et comme les zéros à gauche de S_i sont en nombre inférieur ou égal à 2, les conditions 4- α et 4- β sont trivialement satisfaites.

MERLIER

2) Considérons le demi-groupe suivant : Σ

Σ	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	b	b	d	d
c	a	a	c	c
d	b	b	d	d

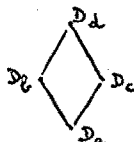
Ce demi-groupe est réduit à une seule $\mathcal{D}$ -classe, qui n'est ni une $\mathcal{L}$, ni une $\mathcal{R}$ -classe ; les conditions 1 et 3 du Théorème 1-2 sont donc vérifiées. Comme ce demi-groupe n'admet aucun zéro d'un côté la condition 4 est trivialement satisfaite.

Les conditions 1, 3, 4 n'entraînent pas la condition 2 .

3) Soit Σ_1 la bande suivante : Σ_1

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

a est un zéro et $\mathcal{D}$ est l'égalité ; le demi-treillis S^* est le suivant



ce n'est donc pas un arbre inf-demi-treillis. Les conditions 2,3 et 4 sont cependant satisfaites.

4) Les conditions 1, 2, 3 n'entraînent pas la condition 4 : considérons le demi-groupe S_5 suivant :

Les zéros à gauche de S_5 sont $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ et $|x Z| = 3$, donc Z n'est pas enchaîné.

Les $\mathcal{D}$ -classes de S_5 sont $D_x = \{x\}$ et $D_{z_i} = \{z_1, z_2, z_3\}$ qui sont des $\mathcal{L}$ -classes et par suite, les conditions 1, 2 et 3 du Théorème 1-2 sont satisfaites.

S_5	x	z_1	z_2	z_3
x	x	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
z_2	z_2	z_2	z_2	z_2
z_3	z_3	z_3	z_3	z_3

MERLIER

Nous désignerons dans la suite par S_0 la bande suivante :

S_0	a	b	c	z_1	z_2	z_3
a	a	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
b	z_2	b	z_2	z_2	z_2	z_2
c	z_3	z_3	c	z_3	z_3	z_3
z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2
z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 1-2' : Une bande finie S est une σ -bande, si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes

1 et 2) du Théorème 1-2,

3') S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , ou à leurs duaux.

4-β) du Théorème 1-2.

Condition Nécessaire : Si S est une σ -bande, d'après le Théorème 1-2, S satisfait à 1, 2, 4-β et ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Considérons S_0 : les trois zéros à gauche z_1 , z_2 , z_3 jouent le même rôle ; si S_0 pouvait être totalement ordonnée, on aurait par exemple $z_1 < z_2 < z_3$. Comme $ac = z_1$ et $bc = z_2$, nous aurions $a < b$ et de même $b < c$. D'où $a < b < c$ et par isotonie $ba = z_2 < b < bc = z_2$, ce qui est absurde. S_0 ne peut donc être sous demi-groupe d'une σ -bande.

Condition Suffisante : Montrons que la condition 4-α) du Théorème 1-2 est satisfaite. S'il existe z élément de Z, tel que $A = \{x \in D-Z ; xZ = z\}$ où D est un sous demi-groupe de S réunion de $\mathcal{D}$ -classes et Z l'ensemble des zéros à gauche de D, A est saturé mod. $\mathcal{D}$ et est un sous demi-groupe de D ; en effet cette démonstration est celle du a) du Cas II de la Condition suffisante du Théorème 1-2 et, elle est encore valable ici, puisqu'elle utili-

MERLIER

sait uniquement le fait que S ne contenait aucune sous bande isomorphe à S_2 ou S_4 et que toute $\mathcal{D}$ -classe était une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe. Donc si x_1 et x_2 sont deux éléments de $D-Z$, et z_1, z_2 deux zéros à gauche, distincts, de D , tels que $x_1 Z = z_1$, $x_2 Z = z_2$, alors $x_1 x_2 = z_1$ et $x_2 x_1 = z_2$, car $x_1 x_2 Z = z_1$, $x_2 x_1 Z = z_2$ et $x_1 x_2 \equiv x_2 x_1$ ($\mathcal{D}$). Par conséquent, $\{z \in Z ; \exists x \in D-Z, xZ = z\}$ est de cardinal inférieur ou égal à deux ; en effet s'il existait trois zéros à gauche z_1, z_2, z_3 et trois éléments de $D-Z, x_1, x_2, x_3$, tels que $x_1 Z = z_1, x_2 Z = z_2, x_3 Z = z_3$, nous aurions $x_i x_j = z_i$ pour $i \neq j, i$ et j valant 1, 2 ou 3, et $\{x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3\}$ serait isomorphe à S_0 .

Soient alors trois éléments x_1, x_2, x_3 de $D-Z$ tels que $x_1 Z = z_1, x_2 Z = z_2, z_1$ et z_2 sont deux zéros à gauche de D distincts et $x_3 z_1 = x_3 z_2$. Si le cardinal de $x_3 Z$ est un, $x_3 Z = z_1$ ou z_2 , d'après ce qui précède et la condition 4- α) est satisfaite. Si le cardinal de $x_3 Z$ est deux, on ne peut avoir $x_3 Z = \{z_1\} \cup \{z_2\}$, car alors $x_3 z_1 = z_1$ et $x_3 z_2 = z_2$. Donc $x_3 Z = \{z_3\} \cup \{z\}$ où z_3 est un élément de Z , distinct de z_1 et z_2 et z un élément de Z quelconque. D'après les hypothèses nous savons que $x_1 x_3 Z = z_1, x_2 x_3 Z = z_2, x_3 x_1 Z = x_3 z_1 = x_3 z_2 = x_3 x_2 Z, x_3 z_3 = z_3$ et nous avons démontré que $x_1 x_2 = z_1$ et $x_2 x_1 = z_2$. Si $x_3 x_1$ n'était pas un zéro à gauche, comme $x_1 x_3 Z = z_1 = x_1 Z$, nécessairement $x_3 x_1 \equiv x_1$ ($\mathcal{D}$) et $x_1 x_3 \equiv x_1$ ($\mathcal{D}$) et $x_1 x_3, x_3 x_1$ ne pourraient être égaux à x_3 ; si la $\mathcal{D}$ -classe de x_1 est une $\mathcal{L}$ -classe, $\{x_3 x_1, x_3, z_1, z_3\}$ est alors isomorphe à S_3 , dans le cas où la $\mathcal{D}$ -classe de x_1 est une $\mathcal{R}$ -classe, $\{x_1 x_3, x_3, z_1, z_3\}$ est isomorphe à S_3 .

Donc, ces conclusions ne pouvant être réalisées, $x_3 x_1$ est zéro à gauche et de même $x_3 x_2$ est zéro à gauche. Comme $x_3 x_1 Z = x_3 x_2 Z$, nous avons $x_3 x_1 = x_3 x_2 = x_3 z_1 = x_3 z_2$ et

MERLIER

$x_1 x_3 = z_1$, $x_2 x_3 = z_2$. Si $x_3 x_1 = z_1$, alors $\{x_1, x_3, z_1, z_2\}$ est isomorphe à S_2 , ce qui est impossible; de même $x_3 x_2$ ne peut être égal à z_2 ; donc $x_3 z_1 = x_3 z_2 = z_3 = x_1 x_3 = x_2 x_3$ et dans ce cas $\{x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3\}$ est isomorphe à S_0 , ce qui est absurde. Ainsi $x_3 Z$ est de cardinal un et la condition 4- α) est vérifiée.

Les conditions du théorème 1-2 sont satisfaites, par suite S est une $\mathcal{O}$ -bande.

Remarque 2 : Si D est un sous demi-groupe d'une bande finie S , réunion de $\mathcal{D}$ -classes de S , si Z est l'ensemble des zéros d'un côté de D , pour que $|x Z|$ ou $|Z x|$ soit inférieur ou égal à deux, il suffit que S ne contienne aucun sous demi-groupe isomorphe à S_5 ou à son dual (voir la table de Cayley de S_5 dans 4°) de la remarque 1.

En effet, si $|x Z|$ était supérieur ou égal à trois, il existerait trois éléments de Z , z_1, z_2, z_3 distincts tels que $x Z = \{z_1, z_2, z_3\}$; par conséquent $x z_1 = z_1$, $x z_2 = z_2$ et $x z_3 = z_3$ car si $x z = z_1$ alors $x z_1 = x^2 z = x z = z_1$, et dans ce cas, les quatre éléments x, z_1, z_2, z_3 formeraient une bande isomorphe à S_5 .

Corollaire 1-1 : Une bande finie S dont les $\mathcal{D}$ -classes ont un ou deux éléments est une $\mathcal{O}$ -bande si et seulement si S^* est un arbre inf-demi-treillis et si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_1, S_2, S_3, S_4 ou à leurs duals.

MERLIER

Ces conditions sont nécessaires d'après le Théorème 1-2. D'autre part, si une $\mathcal{D}$ -classe admet exactement deux éléments a et b , $a = a b a$, $b = b a b$ et de plus $a \equiv ab$ ($\mathcal{D}$), $b \equiv ba$ ($\mathcal{D}$), donc $ab = a$ ou b . Si $ab = a$, $b = ba$ et la $\mathcal{D}$ -classe de a est une $\mathcal{L}$ -classe. Donc, toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe, si son cardinal est inférieur ou égal à 2.

Enfin, si D est un sous demi-groupe de S , saturé modulo $\mathcal{D}$ dont Z est l'ensemble des zéros à gauche, Z est la $\mathcal{D}$ -classe minimum de D donc admet au plus deux éléments. Les conditions de 4) du Théorème 1-2 sont donc vérifiées et les deux conditions sont suffisantes.

Corollaire 1-2 : 35 des 47 bandes à quatre éléments sont des σ -bandes.

Pour la classification des bandes à quatre éléments et plus généralement des demi-groupes à quatre éléments, nous renvoyons à [10]. Les douze bandes qui ne peuvent être totalement ordonnées sont les suivantes : $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \bar{S}$ et $\bar{S}_1$ (pour les définitions de $S_5, \bar{S}$ et $\bar{S}_1$, voir remarque 1). et les bandes duales de S_2, S_3, S_4, S_5 et $\bar{S}$.

Corollaire 1-3 : Une bande finie S commutative est une σ -bande, si et seulement si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_1 et $\bar{S}_1$.

(On retrouve ainsi le résultat de N. Kimura [5]).

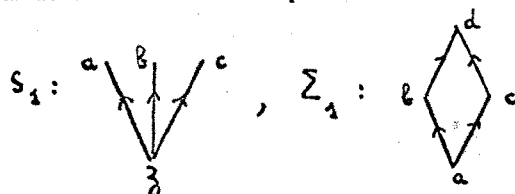
Il est clair que ces conditions sont nécessaires puisque S_1 et $\bar{S}_1$ ne peuvent être totalement ordonnées.

Réciproquement, dans le cas où S est commutatif, l'équivalence de Green $\mathcal{D}$ est l'Egalité, donc d'après le Corollaire 1-1 il suffit de montrer que $S^* = S$ est un arbre inf-demi-treillis et que S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_1 . (Les trois bandes S_2, S_3, S_4 ne sont en effet pas commutatives).

MERLIER

Or, dans le cas où S est commutatif, $S^* = S$ est un arbre inf-demi-treillis, si et seulement si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à Σ_1 ; en effet si S contient Σ_1 , Σ_1^a n'est pas un arbre inf-demi-treillis, donc S^* ne peut l'être. Inversement, si S^* n'est pas un arbre, il existe quatre $\mathcal{D}$ -classes $D_a = \{a\}$, $D_b = \{b\}$, $D_c = \{c\}$ et $D_d = \{d\}$, telles que $D_a < D_b < D_d$ et $D_a < D_c < D_d$ avec $D_{bc} = D_a$ et dans ce cas, $\{a, b, c, d\}$ est isomorphe à Σ_1 .

Remarque 3 : Si l'on considère S comme inf-demi-treillis, le corollaire 1-3 est équivalent à dire que S ne contient aucun sous inf-demi-treillis isomorphe à



§ 3 - Construction des σ -bandes finies.

Toutes les bandes à deux ou trois éléments sont des σ -bandes et d'après le corollaire 1-2, nous connaissons toutes les σ -bandes à quatre éléments. Nous pouvons à partir de ces σ -bandes, construire toutes les σ -bandes finies.

Supposons que nous connaissions toutes les σ -bandes de cardinal strictement inférieur à l'entier p et que nous voulions construire une σ -bande S de cardinal p .

Plusieurs cas sont possibles s'excluant mutuellement.

- 1) Nous voulons que S soit une σ -bande avec zéro z et que $S - \{z\}$ soit un sous demi-groupe de S .

Dans ce cas pour avoir une telle σ -bande, il suffit de considérer $S' \cup \{z\}$ où z est un symbole n'appartenant pas à S' et où S' est une σ -bande de cardinal $p-1$. On définit évidemment le produit ab dans S par ab , produit dans S' si a et b appartiennent à S' et $az = za = z$ pour tout a de S . S est alors une σ -bande.

MERLIER

2) Nous voulons que S soit une bande avec zéro z , telle que $S \setminus \{z\}$ ne soit pas sous demi-groupe de S .

Pour avoir une telle σ -bande, il suffit de prendre $S = A \cup B \cup \{z\}$, où $A \cap B = \emptyset$, z n'appartient pas à $A \cup B$, et où A et B sont deux σ -bandes, telles que $|A| + |B| = p-1$.

En effet définissons dans S le produit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\forall a \in A, \forall b \in B) &, \quad ab = ba = z \\ (\forall x \in S) &, \quad xz = zx = z \end{aligned}$$

$(\forall a \in A), (\forall a' \in A), aa' =$ produit de a et de a' dans A ; de même pour les éléments de B . Il est immédiat de voir que S est alors un demi-groupe, qui peut être totalement ordonné en définissant une relation d'ordre $\leq$ qui prolonge des ordres ordonnant totalement A et B et tels que, de plus, $a < z < b$ pour tout a de A , tout b de B .

3) Si nous voulons que S soit sans zéro, S doit avoir dans ce cas, n zéros à gauche ou à droite, qui constitueront sa $\mathcal{D}$ -classe minimum.

Supposons que nous imposions à S d'avoir n zéros à gauche $n \leq p$. (Le raisonnement est évidemment le même dans le cas de zéros à droite). Nous désignerons par $S(p, n), n \leq p$, une telle bande. (n est > 1 , car sinon S admet un zéro bilatère).

$S = S(p, p)$ si et seulement si S est un zéro demi-groupe à gauche : dans ce cas, toute relation d'ordre total fait de $S(p, p)$ une bande totalement ordonnée. Si $S = S(p, n)$ où $1 < n < p$, considérons $z_1, z_2, \dots, z_n$, n symboles distincts et $X_0, X_1, \dots, X_{n+1}$ σ -bandes de cardinal inférieur à $p-n$, telles que les $X_j (j = 0, \dots, n)$ sont des ensembles deux à deux disjoints, $\{z_i ; i = 1, \dots, n\}$ n'est pas inclus dans $\bigcup_{j=0}^n X_j$, $\sum_{j=0}^n |X_j|$ égale $p-n$, avec toutefois la possibilité d'avoir $|X_j| = 0$ (c'est-à-dire $X_j = \emptyset$) pour certains indices j .

MERLIER

Soit $S = \bigcup_{j=0}^n X_j \cup \{z_1, \dots, z_n\}$. Nous allons définir sur S une relation binaire qui en fera une σ -bande.

- Si x et y appartiennent à X_j : xy (dans S) = xy dans la bande X_j .

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $x \in S$: $z_i x = z_i$.

- Si $\emptyset$ est l'ensemble vide, $\emptyset \cdot a = a \emptyset = \emptyset$ pour tout a de S si $A \cdot B = \{a\}$, cela signifie que pour tout x de A , tout y de B , $xy = a$; avec cette convention nous définissons les produits suivants :

$$.) \quad X_0 \cdot (S - X_0) = z_1$$

$$.) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad \begin{aligned} X_i [X_0 \cup \dots \cup X_{i-1} \cup \{z_1, \dots, z_i\}] &= z_i \\ X_i [X_{i+1} \cup \dots \cup X_n \cup \{z_{i+1}, \dots, z_n\}] &= z_{i+1} \end{aligned}$$

$$.) \quad X_n (S - X_n) = z_n$$

Nous nous sommes alors donnés tous les produits $x \cdot y$, $x \in S$, $y \in S$.

Il est facile de vérifier l'associativité de cette multiplication.

S est donc une bande; c'est une σ -bande, car un ordre total, isotone prolongeant l'ordre des X_i est donné par exemple par :

$$X_0 < z_1 < X_1 \dots < z_i < X_i < z_{i+1} \dots < z_n < X_n.$$

La table de Cayley est celle du Théorème 1-1. Aussi pouvons nous dire de plus que toutes les σ -bandes finies sont construites de cette façon. Le Théorème 1-1 et le résultat précédent nous le prouvent dans le cas où il y a des zéros d'un côté. La vérification est immédiate dans le cas des bandes avec zéro bilatère.

B Demi-groupes totalement ordonnés σ -simples ; σ -bandes finies σ -simples.

E. Ya. Gabovič, dans [4], posait le problème suivant :
"Décrire les demi-groupes abéliens totalement ordonnés, σ -simples, et les demi-groupes finis totalement ordonnés σ -simples".

REFERENCES

1. Clifford, A.H. , Bands of semigroups. Proc. Amer. Math. Soc.
5 - (1954), 499-504.
2. Dubreil-Jacotin, M.L. , Sur les σ -bandes - Semigroup Forum, to
appear.
3. Dubreil-Jacotin, M.L. , Quelques propriétés des σ -demi-groupes,
Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. , Classe Sc. fis. , mat. e nat. ,
41 (1966). 279-289.
4. Gabović, E.Ya. , Cahiers de Sverdlovsk (Problèmes non résolus de
théorie des demi-groupes). Sverdlovsk, 1969. Problème n° 9, page 5.
(in russian).
5. Kimura, N. , Total orderings on a semilattice. Proc. Japan Acad.
34 (1958), 124-125.
6. Mc Lean, D. , Idempotent semigroups. Amer. Math. Monthly. 61
(1954), 110-113.
7. Matsushima, Y. , Idempotent semigroup on lattices. Japan J. Math.
38 (1969), 1-17.
8. Merlier, T. , Sur les demi-groupes totalement ordonnés σ -simples
Sém. Dubreil-Pisot. 24 - (1970-71) - n° 4. 11 pages.
9. Saitô, T. , Ordered idempotent semigroups. J. Math. Soc. Japan
14 (1962), 150-169.
10. Tetsuya, K.T. , Hashimoto T. All semigroups of order at most 5.
J. Gakugei, Takushima University, 6 (1955) 19-39.

Thérèse Merlier

Université de Paris VI

15, Boulevard de la République

92 - FONTENAY-aux-ROSES

FRANCE

Nous remercions Monsieur le Professeur T. SAITÔ pour les remarques
qu'il nous a faites lors de la lecture de notre manuscrit.

Received June 29, 1971

§ 4. Compléments

Nous pouvons montrer que les conditions 1, 2 et 4 du Théorème 1.2 de ce chapitre peuvent aussi s'exprimer sous forme de non existence de certains sous demi-groupes.

LEMME 5.2. : Si S est une bande, toute $\mathcal{D}$ -classe de S est une $\mathcal{L}$ -classe ou une $\mathcal{R}$ -classe si et seulement si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à Σ .

(Σ est le demi-groupe considéré dans la Remarque 2 de la page 68).

Supposons que S possède une $\mathcal{D}$ -classe qui n'est ni une $\mathcal{L}$, ni une $\mathcal{R}$ -classe. Cela signifie, qu'il existe des éléments a, x, d tels que $a = x(\mathcal{R})$, $x = d(\mathcal{L})$ avec $a \neq x$, $x \neq d$, $a \neq d$. D'où $xa = x$, $xa = a$, $xd = x$, $dx = d$. D'après les propriétés de régularité de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$, on a $da = dx(\mathcal{R})$, soit $da \equiv d(\mathcal{R})$; de même $a \equiv da(\mathcal{L})$. D'autre part $a = ada$ et $d = dad$; par suite ad est distinct de da , car $da = ad$ implique alors $a = d$. De plus, da est différent de a car $da = a$ implique $a \equiv d(\mathcal{R})$ d'où $x \equiv d(\mathcal{R})$ et $x = d$. De même da est distinct de d , ad est distinct de a et d . Les éléments a, d, ad, da forment un sous demi-groupe à quatre éléments dont la table est identique à celle de Σ , en posant $b = da$, $c = ad$.

Réciproquement, si S contient Σ comme sous demi-groupe, on a dans S $a \equiv d(\mathcal{D})$, puisque $ada = a$ et $dad = d$, et $a \neq d(\mathcal{L})$, $a \neq d(\mathcal{R})$ puisque ad est distinct de a et d .

LEMME 5.3. : Si S est une bande, dont toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ -classe ou $\mathcal{R}$ -classe, S^* est un arbre inf-demi-treillis, si et seulement si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à Σ_1, S_6 ou à son dual.

La table de Σ_1 a été donnée dans la remarque 3 de la page 68 celle de S_6 est la suivante :

Rappelons celle de Σ_1

S_6	u	b	c	d	e
u	u	b	c	d	e
b	b	b	d	d	d
d	c	e	c	e	e
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

Σ_1	u	b	c	d
u	u	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

Dans Σ_1 comme dans S_6 ou son dual on a $D_u \succ D_b \succ D_{bc} = D_d$ et $D_u \succ D_c \succ D_{bc}$; donc D_b et D_c bien que majorés par D_u ne sont pas comparables, et S^* , si Σ_1 ou S_6 ou son dual sont sous demi-groupes de S , ne peut être un arbre inf demi-treillis. Réciproquement, si S^* n'est pas un arbre, il existe des éléments u, y, z tels que $D_u \succ D_y \succ D_{yz}$ et $D_u \succ D_z \succ D_{yz}$. Posons $b = uy$, $c = uz$; on a $D_b = D_y$, $D_z = D_c$, $D_{cb} = D_{bc} = D_{yz}$. D'autre part la $\mathcal{D}$ -classe de bc est par exemple une $\mathcal{L}$ -classe grâce à l'hypothèse faite. D'où $bc b = bc$, $c b c = c b$. Comme D_{bc} est distinct de D_b et D_c , bc et cb sont tous les deux distincts de b et c . De plus les éléments u, b, c, bc, cb forment un demi-groupe d'unité u . Si $bc = cb$, ce demi-groupe est isomorphe à Σ_1 . Si bc est distinct de cb , il est isomorphe à S_6 en posant $bc = d$ et $cb = e$.

LEMME 5.4. : Si S est une bande dont toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe, S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_5 ou à son dual, si et seulement si, pour tout sous demi-groupe D de S , réunion de $\mathcal{D}$ -classes de S , dont Z_D est l'ensemble des zéros à gauche [à droite] on a :
 $\forall x \in D \quad |xZ_D| \quad [|Z_D x|] = 1 \text{ ou } 2.$

(La table de S_5 a été donnée dans la remarque 4 page 68).

Si S contient un sous demi-groupe isomorphe à S_5 , les éléments z_1, z_2, z_3 sont équivalents modulo $\mathcal{L}$; donc D_{z_1} égale L_{z_1} d'après l'hypothèse. Considérons alors $D_x \cup L_{z_1}$ comme $xz_1 = z_1$, $D_x \succ L_{z_1}$ et L_{z_1} est l'ensemble des zéros à gauche du demi-groupe $D = D_x \cup L_{z_1}$ (lemme 1.1. du §1. de notre article). Dans ce cas, on a dans D , $|xL_{z_1}| \geq 3$.

La réciproque est immédiate.

LEMME 5.5. : Soit S une bande dont toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe. S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_4 , S_7 ou leurs duaux, si et seulement si pour tout sous demi-groupe D de S, réunion de $\mathcal{D}$ -classes, dont Z est l'ensemble des zéros à gauche [à droite] on a : pour tout sous ensemble H de Z, pour tout a de D-Z $aH = z$ [$Ha = z$], $a(Z-H) = z'$ [$(Z-H)a = z'$] $\implies \forall b, b \equiv a(\mathcal{D}), bH = z$ [$Hb = z$] et $b(Z-H) = z'$ [$(Z-H)b = z'$].

La table de S_4 a été donnée page 59. Celle de S_7 est la suivante

S_7	a	b	z	z''	z'
a	a	b	z	z	z'
b	a	b	z	z'	z'
z	z	z	z	z	z
z''	z''	z''	z''	z''	z''
z'	z'	z'	z'	z'	z'

Rappelons celle de S_4

S_4	a	b	z	z'
a	a	a	z	z
b	b	b	z'	z'
z	z	z	z	z
z'	z'	z'	z'	z'

Si S admet S_4 , S_7 ou l'un de leurs duaux comme sous demi-groupes, il est facile de voir que la condition énoncée n'est pas satisfaite dans le demi-groupe $D = D_a \cup L_z$, dont l'ensemble des zéros à gauche est L_z . Réciproquement, si S n'admet ni S_4 , ni S_7 ni leurs duaux comme sous demi-groupes: Avec les notations du Lemme, si H égale Z ou $\emptyset$, ce résultat est vrai d'après la démonstration du Théorème 1.2. (Cond. Suf. cas II a page 62). Si H est différent de Z et de $\emptyset$: si $a \equiv b(\mathcal{L})$ on a $a = ab$ et $b = ba$ et $z \neq z'$. D'où $bH = baH = bz$, $b(Z-H) = ba(Z-H) = bz'$. Si l'on avait $bz = bz'$, on aurait $bZ = bz$ et dans ce cas $aZ = abz$ ce qui est absurde. Si $a \equiv b(\mathcal{R})$, on a : $a = ba$, $b = ab$. Donc $aH = baH = bz = z$ et $a(Z-H) = bz' = z'$ et par suite $bZ = abZ = \{z, z'\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple qu'il existe un élément z'' tel que $az'' = z$ et $bz'' = z'$. Alors le demi-groupe $\{a, b, z, z', z''\}$ est isomorphe à S_7 , ce qui est impossible. Donc $bH = z$ et $b(Z-H) = z'$.

LEMME 5.6. : Soit S une bande dont toute $\mathcal{D}$ -classe est une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ -classe et ne contenant aucun sous demi-groupe isomorphe à S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_7 ou à leurs duaux. Alors pour tout sous demi-groupe D de S, réunion de $\mathcal{D}$ -classes dont Z

est l'ensemble des zéros à gauche à droite, Z est enchaîné si et seulement si S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_8 , S_9 ou à leurs duaux.

Les tables de S_8 et S_9 sont les suivantes :

(Les tables de Cayley de S_2 , S_3 , S_4 ont été données page 59, celle de S_5 page 68, celle de S_7 dans le lemme précédent).

S_8	x	y	z_1	z_3	z_4	z
x	x	z_1	z_1	z_3	z_1	z_3
y	z_1	y	z_1	z_1	z_4	z_4
z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3
z_4	z_4	z_4	z_4	z_4	z_4	z_4
z	z	z	z	z	z	z

S_9	x	y	z_1	z_2	z_3	z_4	z
x	x	z_1	z_1	z_1	z_3	z_1	z_3
y	x_2	y	z_2	z_2	z_2	z_4	z_4
z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2
z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3	z_3
z_4	z_4	z_4	z_4	z_4	z_4	z_4	z_4
z	z	z	z	z	z	z	z

La définition Z est "enchaîné" a été donnée page 58; cette définition comporte 2 points. D'après le Lemme 5.4., le premier est réalisé puisque S ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_5 ou à son dual.

Etablissons le deuxième point, moyennant l'hypothèse de non existence de S_8 , S_9 et leurs duaux. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux éléments x et y vérifiant les conditions suivantes : x et y appartiennent à $D-Z$, où D est un sous demi-groupe de S , réunion de $\mathcal{D}$ -classes de S , dont Z est l'ensemble des zéros à gauche; H_x , $Z-H_x = H'_x$, H_y , $H'_y = Z-H_y$, sont des sous ensembles de Z deux à deux non comparables et $xH_x = z_1$, $xH'_x = z_3$, $z_1 \neq z_3$, $yH_y = z_2$, $yH'_y = z_4$, $z_2 \neq z_4$. Ces hypothèses impliquent que nécessairement z_1 appartient à H_x , z_2 à H_y , z_3 à H'_x et z_4 à H'_y .

Si z_1 appartient à H_y et z_3 à H'_y : $yH_y = z_2 = yz_1$, $yH'_y = z_4 = yz_3$. Dans ce cas on a $xyZ = x(\{z_2, z_4\}) \subseteq \{z_1, z_3\}$ et $yxZ = y(\{z_1, z_3\}) = \{z_2, z_4\}$. Comme $xy \equiv yx(\mathcal{D})$ et comme yx n'est pas un zéro, en appliquant le lemme 5.5., on a $\{z_1, z_3\} = \{z_2, z_4\}$.

(On peut appliquer ce Lemme puisque S ne contient ni S_4 , ni S_7 , ni leurs duaux).

Comme z_1 appartient à H_y , on a $z_1 = z_2$ et $z_4 = z_3$; d'où $yxH_x = z_1$, $yxH'_x = z_4$, $xyH_y = z_1$, $xyH'_y = z_4$. En appliquant à nouveau le lemme 5.5. on a $H_x = H_y$, ce qui est absurde.

On arrive à la même contradiction, si l'on suppose z_3 élément de H_y , z_1 de H'_y . Par suite on a nécessairement z_1 et z_3 appartiennent à H_y (ou à H'_y) et de même z_2 et z_4 appartiennent à H_x (ou à H'_x).

Supposons que z_1 et z_3 appartiennent à H_y et z_2 et z_4 à H_x (Les trois autres cas se traitent de façon analogue). Dans ce cas $xyZ = x(\{z_2, z_4\}) = z_1$ et $yxZ = z_2$. Deux cas sont alors possibles :

1°) $xy = z_1$ et $yx = z_2$ i.e. xy et yx sont deux zéros à gauche de D .

a) Si $z_1 = z_2$, on en déduit que H_x contient $z_1 = z_2$ et z_4 , H'_x contient z_3 , H_y z_3 et z_1 . Comme on a supposé que H'_x n'est pas contenu dans H_y il existe nécessairement un élément z de Z , tel que z appartient à H'_x , et pas à H_y , donc z est différent de z_3 et de z_4 . Si l'on construit la table du demi-groupe $\{x, y, z_1, z_3, z_4, z\}$, elle est celle du demi-groupe S_8 . Donc ce cas est à rejeter.

b) Si $z_1 \neq z_2$, un raisonnement analogue au cas a) nous permet de construire un demi-groupe semblable à S_9 .

2°) Si $xy = z_1$, $yx = z_2$ puisque les zéros à gauche forment ici une $\mathcal{L}$ -classe. Supposons donc $xy \neq z_1$ et $yx \neq z_2$. Comme $xy \equiv yx(\mathcal{D})$ et comme X ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à S_4 , S_7 , ou leurs duaux, on peut appliquer le Lemme 5.5. et on obtient $z_1 = z_2$. On a donc $xyZ = yxZ = z$. Mais alors si xy est équivalent à $yx \text{ mod. } \mathcal{L}[\mathcal{R}]$, on trouve que le demi-groupe $\{xy, x, z_1, z_3\} \left[\{yx, x, z_1, z_3\} \right]$ est isomorphe à S_3 , ce qui est impossible. Donc le deuxième point de la définition Z est enchaîné est démontré.

Montrons le troisième. Soit donc x et y deux éléments de $D-Z$ tels que $xH_x = z_x$, $xH'_x = z'_x$, $yH_y = z_y$, $yH'_y = z'_y$, $H_x \subsetneq H_y \subseteq Z$ et $H' = Z - H$. D'après la démonstration précédente, on a z_x et z'_x appartiennent à H_y , et de même z_y et z'_y appartiennent à H'_x . Montrons que $z'_x = z'_y$ si et seulement si $H_y = H_x \cup \{z'_x\}$.

Si $H_y = H_x \cup \{z'_x\}$, comme H_x est strictement inclus dans H_y et comme z_y

n'appartient pas à H_x , on a bien $z'_x = z_y$. Réciproquement, si $z'_x = z_y$:
 $xyZ = z_y = yxZ$. Deux cas sont alors possibles :

- a) $xy = yx = z_y$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément t de Z tel que t est distinct de z_y et appartient à H_y et à H'_x ; si nous considérons le demi-groupe $\{x, y, z_y, t\}$, il est isomorphe à S_2 , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $H_y = H'_x \cup \{z'_x\}$ dans ce cas.
- b) xy, yx et z_y sont deux à deux distincts. Ce cas est lui aussi irréalisable, car comme on l'a déjà vu il implique que S contient un sous demi-groupe isomorphe à S_3 , à savoir $\{xy, x, z_y, z_x\}$ ou $\{yx, x, z_y, z_x\}$.

Par conséquent, le demi-groupe D est tel que Z est enchaîné.

Réciproquement, si S contient un sous demi-groupe isomorphe à S_8 , ou à S_9 , [ou à leurs duaux] nous considérons le demi-groupe $D = D_x \cup D_y \cup D_z$. C'est un demi-groupe puisque xy et yx appartiennent dans tous les cas à D_z et, de plus D_z en est l'ensemble Z des zéros à gauche (ou à droite). Dans D , Z n'est pas enchaîné : en effet, on a par exemple dans S_9 , $xz_2 = xz_4 = z_1$ et $xz_3 = xz = z_3$, $yz_2 = yz_3 = z_2$ et $yz_4 = yz = z_4$. Donc H_x contient z_2 et z_4 , H'_x contient z_3 et z , H_y z_2 et z_3 , H'_y z_4 et z . Ainsi H_x, H'_x, H_y, H'_y sont deux à deux incomparables.

Ainsi, finalement, nous pouvons énoncer.

THEOREME 5.7. : Une bande finie est une σ -bande, si et seulement si, elle ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à $\Sigma_1, \Sigma, S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9$ ou à leurs duaux.

THEOREME 5.8. : Une bande quelconque est une σ -bande, si et seulement si, elle ne contient aucun sous demi-groupe isomorphe à $\Sigma_1, \Sigma, S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9$, ou à leur duaux.

(Les demi-groupes cités sont donnés par leur table au cours du chapitre).

CHAPITRE 6.

DEMI-GROUPES COMPLETEMENT O-SIMPLES, DEMI-GROUPES DE MATRICES DE REES TOTALEMENT ORDONNES.

Dans un premier paragraphe, nous étudions les demi-groupes O-simples totalement ordonnés et nous montrons essentiellement que cette étude se ramène à celle des demi-groupes simples totalement ordonnés (Théorème 6.5.). Nous appliquons ensuite ce résultat aux demi-groupes complètement O-simples et caractérisons les demi-groupes complètement O-simples totalement ordonnables (Théorème 6.9.). Dans [28], T. Saito avait caractérisé les σ -demi-groupes complètement simples (donc sans zéro) ; nous généralisons donc ses résultats, mais par des méthodes différentes. De plus, nous utilisons ensuite le fait que les demi-groupes complètement O-simples sont des demi-groupes de matrices de Rees particuliers ; et ainsi dans le troisième paragraphe de ce chapitre, nous caractérisons les demi-groupes complètement O-simples totalement ordonnables au moyen de cette représentation en demi-groupes de matrices. Cela nous permet alors (Théorème 6.16) de caractériser tous les demi-groupes de matrices de Rees qui peuvent être totalement ordonnés.

§1. Demi-groupes O-simples totalement ordonnés.

Rappelons les définitions et propriétés suivantes :

DEFINITION 6.1. Un demi-groupe S avec zéro est O-simple, si S^2 est différent de zéro et si S n'admet aucun idéal bilatère propre (i.e. distinct de 0 et de S).

DEFINITION 6.1'. Un demi-groupe S sans zéro est simple, si S n'admet aucun idéal bilatère.

LEMME 6.2. (Lemme 2.28 de [7]). Un demi-groupe S est 0-simple si et seulement si $\forall a \in S, a \neq 0, SaS = S$.

LEMME 6.2'. Un demi-groupe S est simple, si et seulement si : $\forall a \in S, SaS = S$.

Les principales propriétés des demi-groupes 0-simples à gauche ou à droite ont déjà été données dans le Chapitre 2, Lemmes 2.3, 2.4. Nous avons aussi utilisé le fait que S est 0-simple à gauche si et seulement si : $\forall a \in S, a \neq 0, Sa = S$.

LEMME 6.3. Dans un demi-groupe S 0-simple totalement ordonné, 0 est le plus grand ou le plus petit élément.

On a $S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$, avec $S_1 = \{x \in S, x \not\leq 0\}$, $S_2 = \{x \in S ; 0 \leq x\}$; et il en résulte immédiatement par isotonie que S_i^2 est contenu dans $S_i \cup \{0\}$, pour $i = 1, 2$, et que $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0$. Par suite, si a est un élément de S , différent de 0, on a par exemple, si a appartient à S_2 , $a S_1 = S_1 a = 0$ et alors, comme S est supposé 0-simple,

$$S = SaS = S_2 a S_2 \cup \{0\} \subseteq S_2 \cup \{0\}.$$

Donc $S = S_2 \cup \{0\}$, S_1 est vide, et 0 est le plus grand élément.

COROLLAIRE 6.4. Dans un demi-groupe 0-simple totalement ordonné, si le produit de deux éléments est nul, le carré de l'un d'eux est nul.

Soient a et b tels que $ab = 0$. D'après le Lemme 6.3., a et b sont d'un même côté de 0 et par suite on a par exemple $a \leq b \leq 0$. D'où $a^2 \leq ab \leq b^2 \leq 0$ et $b^2 = 0$.

Si S est un demi-groupe 0-simple à gauche, on démontre facilement (Théorème 2.27 de [7]) que $S - \{0\} = S^*$ est aussi un demi-groupe simple à gauche. Par contre, un demi-groupe peut être 0-simple, sans que S^* soit

un demi-groupe. Dans le cas totalement ordonné, nous allons voir qu'il n'en est plus de même.

THEOREME 6.5. Si un demi-groupe S , 0-simple, peut être totalement ordonné, $S - \{0\}$ est un demi-groupe simple.

Il suffit de montrer que S n'admet pas de diviseur de 0. Supposons que S est totalement ordonné par $\leq$. Considérons dans S , l'ensemble $I = \{x \in S ; x^2 = 0\}$. I ne peut être égal à S , car alors S serait un zéro-demi-groupe ($S^2 = 0$), puisque tout produit xy est compris entre x^2 et y^2 dans un demi-groupe totalement ordonné. Mais I est un idéal : si a et b sont deux éléments quelconques de S , on a, ab et ba étant comparables, $a^2 b^2 \leq (ab)^2 \leq (ba)^2 \leq b^2 a^2$ ou $b^2 a^2 \leq (ba)^2 \leq (ab)^2 \leq a^2 b^2$; donc si $a^2 = 0$, $a^2 b^2 = b^2 a^2 = 0$ et $(ab)^2 = (ba)^2 = 0$ dans tous les cas et ainsi, I est un idéal de S , distinct de S . Donc $I = 0$ puisque S est 0-simple. Par suite aucun produit ab , où a et b sont différents de 0, ne peut être nul d'après le Corollaire 6.4. Il en résulte que $S - \{0\}$ est un demi-groupe évidemment simple.

§2. Demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés.

DEFINITION 6.6. Un demi-groupe 0-simple [simple] est dit "complètement 0-simple" [complètement simple], s'il admet au moins un idéal à gauche 0-minimal [minimal] et au moins un idéal à droite 0-minimal [minimal].

PROPOSITION 6.7. Un demi-groupe S complètement 0-simple vérifie les conditions suivantes :

- a) $\forall a \in S, \exists x \in S$ tel que $a = axa$ (i.e. S est régulier).
- b) l'ensemble des idempotents non nuls de S n'est pas vide, et si $e = e^2$, $f = f^2$, $ef = fe \neq 0$, alors $e = f$.

- c) deux éléments quelconques non nuls sont équivalents mod. $\mathcal{D}_S$.
 d) si $a \in S$ et $a^2 \neq 0$, a appartient à un groupe, sous demi-groupe de S .
 (On trouvera les démonstrations de ces résultats dans [7], th. 2.51 et 2.52.)

LEMME 6.8. Dans un demi-groupe S complètement 0-simple totalement ordonné, l'ensemble des idempotents non nuls est un zéro-demi-groupe à gauche ou à droite.

Désignons par E^* l'ensemble des idempotents non nuls de S . D'après la Proposition 6.7. et le Théorème 6.5., E^* est un demi-groupe. De plus, pour tout e et tout f de E^* , on a $ef \equiv fe (\mathcal{D}_{E^*})$ et comme toute $\mathcal{D}_{E^*}$ classe est une $\mathcal{L}$ -classe ou une $\mathcal{R}$ -classe de E^* (car E^* est une bande totalement ordonnée, c.f. Cha. 5), on a pour tout couple (e, f) de $E^* \times E^*$, $efe = ef$ ou fe . Mais si $efe = ef$, les deux idempotents non nuls ef et e commutent, et par suite $e = ef$ en appliquant b) la Proposition 6.7. Il s'en suit que $f = fe$ et que $e \equiv f (\mathcal{L}_{E^*})$. Ainsi deux idempotents non nuls sont équivalents mod. $\mathcal{D}_{E^*}$; comme cette $\mathcal{D}_{E^*}$ classe est en fait une $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$ classe, on a le résultat.

THEOREME 6.9. Un demi-groupe S complètement 0-simple peut être totalement ordonné, si et seulement si $S - \{0\}$ est un demi-groupe isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe d'un côté par un groupe pouvant être totalement ordonné.

Si S est un demi-groupe complètement 0-simple totalement ordonné, alors d'après le Théorème 6.5. $S - \{0\}$ est un demi-groupe simple dont l'ensemble des idempotents E^* est d'après le Lemme 6.8. un zéro-demi-groupe à gauche par exemple. D'autre part, si a est un élément de $S - \{0\}$, a^2 est différent de 0, donc appartient à un sous groupe de S , d'élément unité e , d'après la condition d) de la Proposition 6.7. De même si b est un autre élément de $S - \{0\}$, b appartient à un sous groupe d'unité f et il existe des éléments a' et b' tels que $a'a = e$, $b'b = f$; d'où

$a = ae = aef = ae b'b$. Donc $S - \{0\}$ est simple à gauche. Le Lemme 2.4. nous permet d'affirmer que $S - \{0\}$ est isomorphe au produit direct d'un groupe F , sous demi-groupe de S , donc qui peut être totalement ordonné et du zéro-demi-groupe à gauche E .

Réciproquement, si $S - \{0\}$ est isomorphe à $G \times F$ où G est un groupe totalement ordonné et F un zéro demi-groupe d'un côté, F est un demi-groupe qui peut être totalement ordonné par n'importe quelle relation d'ordre total. Aussi l'ordre lexicographique permet d'ordonner $S - \{0\}$, donc S .

Ainsi, il y a identité entre les demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés et les demi-groupes 0-simples d'un côté ayant des idempotents non nuls totalement ordonnés.

§3. Matrices de Rees sur un groupe avec zéro.

Soit G un groupe multiplicatif avec zéro, noté G° , et X, Y , deux ensembles quelconques. On peut définir des matrices $(a_{i,j})$ de $X \times Y$ sur G° où $a_{i,j} \in G^\circ$, $(i,j) \in X \times Y$, grâce aux conventions suivantes :

$$\sum_{i \in X} a_{i,j} = 0 \text{ si } a_{i,j} = 0 \text{ pour tout } i \text{ de } X,$$

$$\sum_{i \in X} a_{i,j} = a_{i^*,j} \text{ si } a_{i,j} = 0 \text{ pour tout } i \text{ de } X \text{ sauf } i = i^*.$$

S'il existe i_1 et i_2 de X tels que $a_{i_1,j}$, $a_{i_2,j}$ sont non nuls, $\sum_{i \in X} a_{i,j}$ n'est pas défini.

On peut alors définir le produit de deux matrices $A = (a_{i,j})$, matrice de $X \times Y$ sur G° par $B = (b_{j,k})$ matrice de $Y \times Z$ sur G° par :

$$C = AB = (c_{i,k}) \text{ où } c_{i,k} = \sum_{j \in Y} a_{i,j} b_{j,k}, \text{ si } c_{i,k} \text{ existe,}$$

c'est-à-dire si $c_{i,k}$ est une somme de termes tous nuls, sauf un au plus.

En particulier, si l'une des matrices a au plus un élément non nul, le produit est défini.

DEFINITION 6.10. Une matrice de Rees est une matrice ayant au plus un élément distinct de 0.

NOTATIONS : La matrice de Rees de $I \times \Lambda$ sur le groupe avec zéro G° , ayant pour élément non nul l'élément a , situé à l'intersection de la i ème ligne et de la λ ème colonne est notée $(a)_{i\lambda}$. La matrice nulle peut se noter $(0)_{i\lambda}$ où i et λ sont arbitraires.

On définit dans l'ensemble des matrices de Rees une opération notée $\circ$, par l'intermédiaire d'une matrice P de $\Lambda \times I$ sur G° , $P = (p_{\lambda i})$

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (a)_{i\lambda} P (b)_{j\mu},$$

où dans le membre de droite la multiplication des matrices est la multiplication au sens ordinaire. On vérifie facilement que :

$$(1) \quad (a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j} b)_{i\mu},$$

et que l'ensemble des matrices de Rees muni du produit $\circ$ est un demi-groupe. P est appelée "matrice sandwich". Ainsi, si G°, Λ, I sont donnés, à toute matrice sandwich P correspond un demi-groupe de matrices de Rees, noté $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P)$. Deux matrices P et P' peuvent déterminer des demi-groupes $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P)$ et $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P')$ isomorphes. On a d'ailleurs.

PROPOSITION 6.11. Tout demi-groupe $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P)$ est isomorphe à $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P')$ où P' est une matrice normalisée, c'est-à-dire dont les éléments d'une ligne donnée et d'une colonne donnée sont égaux ou à zéro, ou à l'élément neutre e de G .

(Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le Lemme 3.6. de [7]).

D'autre part de la formule (1), il résulte qu'un demi-groupe S de matrices de Rees $\mathcal{M}^\circ(G; I, \Lambda; P)$ a un zéro formellement adjoint, (c'est-à-dire n'a pas de diviseurs de zéro) si et seulement si, la matrice P n'a aucun élément nul.

DEFINITION 6.12. Une matrice P sur un groupe avec zéro G° est régulière, si chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément non nul.

Dans ce cas et seulement dans ce cas, le demi-groupe de matrices de Rees $\mathcal{M}^\circ(G ; I, \Lambda ; P)$ est régulier : $\forall A, \exists X$ tel que $A = AXA$.
Nous avons alors le théorème de représentation des demi-groupes complètement 0-simples :

Théorème de Rees : Un demi-groupe S est complètement 0-simple, si et seulement si, il est isomorphe à un demi-groupe régulier de matrices de Rees, $\mathcal{M}^\circ(G ; I, \Lambda ; P)$. De plus dans l'isomorphisme précédent, G est isomorphe à un sous groupe de S .

En utilisant cette représentation d'un demi-groupe complètement 0-simple, nous allons donner un Théorème permettant de caractériser ceux qui peuvent être totalement ordonnés.

THEOREME 6.13. Un demi-groupe complètement 0-simple $S = \mathcal{M}^\circ(G ; I, \Lambda ; P)$ peut être totalement ordonné, si et seulement si le groupe G peut être totalement ordonné et si le cardinal de Λ ou I est égal à 1.

Condition Nécessaire : si S est totalement ordonné, d'après le Théorème 6.9., S est 0-simple à gauche par exemple, avec zéro formellement adjoint. Donc la matrice P n'a aucun élément nul ; de plus si $(a)_{j\mu}$ et $(b)_{i\lambda}$ sont deux matrices de S , il existe une matrice $(x)_{k\nu}$ telle que $(x)_{k\nu} \circ (b)_{i\lambda} = (a)_{j\mu}$, soit $(xp_{\nu i} b)_{k\lambda} = (a)_{j\mu}$. Donc nécessairement $\lambda = \mu$ et le cardinal de Λ est 1. Comme G est un sous groupe de S , il peut évidemment être totalement ordonné.

Condition Suffisante : si le cardinal de I est égal à 1, la matrice P est unicolonne, régulière, donc elle n'a aucun élément nul. On peut de plus supposer que P est normalisée (Prop. 6.11), c'est-à-dire ici que tous ses éléments sont égaux à l'élément neutre de G . Le produit de matrices dans S devient alors :

$$(a)_{1\lambda} \circ (b)_{1\mu} = (ab)_{1\mu}.$$

En écrivant les éléments de $S - \{0\}$ sous la forme (a, λ) , on a
 $(a, \lambda) \circ (b, \mu) = (ab, \mu)$ c'est-à-dire que $S - \{0\}$ est isomorphe au
 produit direct $G \times \Lambda$, où Λ est structuré en zéro-demi-groupe à droite.
 Donc $S - \{0\}$, et par suite S , peut être totalement ordonné par l'ordre
 lexicographique déterminé par le groupe G totalement ordonné et par un ordre
 total quelconque sur Λ .

On trouvera dans [9], chapitre 3, des conditions nécessaires et suffisantes
 pour qu'un groupe puisse être totalement ordonné.

Rappelons par exemple qu'un groupe abélien est un σ -groupe, si et seulement
 si, il est sans torsion.

Examinons maintenant le cas plus général des matrices de Rees.

LEMME 6.14. Soit $S = \mathcal{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$ est un demi-groupe de matrices de Rees
 totalement ordonné. Alors

- ou chaque colonne de P contient au moins un élément non nul.
- ou chaque ligne de P contient au moins un élément non nul.
- ou P est la matrice nulle (et S est un zéro-demi-groupe).

Supposons que la matrice P admet une ligne, λ_0 , une colonne j_0 formées
 exclusivement d'éléments nuls. Puisque S est totalement ordonné, nous
 savons que $A^2 = B^2 = 0$ implique $AB = BA = 0$ (AB et BA sont compris
 entre A^2 et B^2). Mais si $(a)_{i\lambda}$ est une matrice de Rees non nulle,
 $(a)_{i\lambda}^2 = 0$, si et seulement si $p_{\lambda i} = 0$; de même si $(a)_{i\lambda}$ et $(b)_{j\mu}$ sont
 deux éléments non nuls, $(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j}b)_{i\mu} = 0$ si et seulement si
 $p_{\lambda j} = 0$. Ainsi, dans un demi-groupe de matrices de Rees, l'implication
 $(A \neq 0, B \neq 0) \quad A^2 = B^2 = 0 \implies AB = BA = 0$, se traduit sur les éléments
 de P par

$$(2) \quad p_{\lambda i} = 0, p_{\mu j} = 0 \implies p_{\lambda j} = 0, p_{\mu i} = 0.$$

Aussi, si nous avons $p_{\lambda_0 i} = 0$ pour tout i de I , $p_{\mu j_0} = 0$ pour tout μ
 de Λ ; nous avons $p_{\mu i} = 0$ pour tout μ et tout i d'après (2). Et P
 est la matrice nulle.

LEMME 6.15. Soit S un demi-groupe de matrices de Rees, $\mathcal{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$, totalement ordonné, tel que P n'est ni régulière, ni idempotent nulle. Alors le groupe G peut être totalement ordonné, et de plus ou toutes les lignes (ou toutes les colonnes) de P sont nulles sauf une, dont aucun élément n'est nul, ou la matrice P est uniligne (ou unicolonne).

DEMONSTRATION : Puisque la matrice P est supposée non régulière, il existe une ligne λ_0 , par exemple, dont tous les éléments sont nuls. Soit $\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda ; \lambda^{\text{ième}} \text{ ligne de } P \text{ est nulle}\}$ et soit $M = \Lambda - \Lambda'$ (*). Puisque P n'est pas identiquement nulle, M n'est pas vide. Considérons la matrice Q de $M \times I$ sur G° , déduite de P , en supprimant les lignes nulles de cette dernière. Puisque la matrice P avait une ligne nulle, d'après le Lemme 6.14, toute colonne de P admet au moins un élément non nul ; par suite Q est une matrice dont toute colonne a au moins un élément non nul, et de même toute ligne par construction. Q est donc régulière et le demi-groupe $T = \mathcal{M}^0(G ; I, M ; Q)$ est un demi-groupe complètement 0-simple. Mais T est isomorphe à un sous demi-groupe de S .

Considérons, en effet, dans S le sous-ensemble

$$X = \{(a)_{i\lambda} ; i \in I, \lambda \in M\}$$

X est un idéal à gauche de S , car si $(x)_{j\mu} \in S$, $(a)_{i\lambda} \in X$
 $(x)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (x\mu_i a)_{j\lambda}$, donc comme $\lambda \in M$, cette matrice appartient à X . Il est alors clair que X est isomorphe à T . Par suite, T est un demi-groupe complètement 0-simple, qui peut être totalement ordonné. Donc, G est un groupe qui peut être totalement ordonné et le cardinal de I ou M est 1, d'après le Théorème 6.13. Cela signifie que la matrice P est unicolonne, ou a toutes ses lignes nulles, sauf une exactement. Mais alors d'après le Lemme 6.14, si une ligne est nulle, chaque colonne contient au moins un élément non nul, donc la seule ligne, non toute nulle, n'a aucun élément nul.

(*) M : lettre μ majuscule.

THEOREME 6.16. Soit $S = \mathcal{M}^o(G ; I, \Lambda ; P)$ un demi-groupe de matrices de Rees.

S peut être totalement ordonné, si et seulement si,

- ou P est identiquement nulle.
- ou G peut être totalement ordonné et $|I|$ ou $|\Lambda| = 1$.
- ou G peut être totalement ordonné et P a toutes ses lignes, ou toutes ses colonnes nulles sauf une dont aucun élément n'est nul.

Condition Nécessaire : soit $S = \mathcal{M}^o(G ; I, \Lambda ; P)$ un demi-groupe de matrices totalement ordonné. La matrice sandwich P peut être nulle, auquel cas S est un zéro-demi-groupe ; P peut être régulière auquel cas, d'après le Théorème 6.13, G peut être totalement ordonné et $|J|$ où $|\Lambda| = 1$. Si l'on n'est pas dans l'un de ces cas, il suffit d'appliquer le Lemme 6.15.

Condition Suffisante : soit $S = \mathcal{M}^o(G ; I, \Lambda ; P)$ un demi-groupe de matrices de Rees. Nous distinguerons plusieurs cas :

- a) Si P est identiquement nulle : S , zéro-demi-groupe, est ordonné par n'importe quelle relation d'ordre total.
- b) Si G peut être totalement ordonné, et si P est unicolonne ($|I| = 1$)
 - α) Si P est régulière, S peut être totalement ordonné, d'après le Théorème 6.13.

β) Si P n'est pas régulière, certains des éléments qui forment la colonne de P sont nuls ; on peut de plus supposer P normalisée, ainsi $\forall \lambda \in \Lambda, P_{\lambda 1} = 0$ ou e , élément unité de G .

Soit $M = \{ \lambda \in \Lambda ; p_{\lambda 1} \neq 0 \}$. Les éléments de S , $(a)_{1\lambda}$, $a \in G, \lambda \in \Lambda$, peuvent être écrits sous la forme (a, λ) et alors le produit dans S est donné par :

$$\begin{aligned} (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab, \mu) \quad \text{si} \quad \lambda \in M, a \in G, b \in G \\ &= 0 \quad \text{si} \quad \lambda \notin M, \text{ ou si } a = 0 \text{ ou } b = 0. \end{aligned}$$

G peut être totalement ordonné par $\leq$, Λ peut être muni d'une relation d'ordre total, notée aussi $\leq$. S admet la partition $\{0, T, T'\}$ où $T = \{(a, \lambda) \in S ; \lambda \in M, a \in G\}$, $T' = \{(a, \lambda) \in S ; \lambda \notin M, a \in G\}$. $T \cup \{0\}$,

$T' \cup \{0\}$ sont des idéaux à gauche de S et de plus $T'S = \{0\}$.

Définissons une relation d'ordre sur S :

$$0 < (a, \lambda) < (b, \mu), \text{ pour tout } (a, \lambda) \text{ de } T', \text{ tout } (b, \mu) \text{ de } T.$$

De plus, nous imposons à cette relation de prolonger les deux relations binaires définies respectivement sur T et T' par :

$$(\text{sur } T) : (a, \lambda) \leq (b, \mu) \iff a < b \text{ dans } G \text{ ou } a = b \text{ et } \lambda \leq \mu \text{ dans } \Lambda.$$

$$(\text{sur } T') : (a, \lambda) \leq (b, \mu) \iff \lambda < \mu \text{ dans } \Lambda \text{ ou } \lambda = \mu \text{ et } a \leq b \text{ dans } G.$$

Les relations binaires sur T et T' sont des relations d'ordre lexicographique ; comme G et Λ sont munis de relation d'ordre total, S est muni d'une relation d'ordre total.

Vérifions l'isotonie.

Si $(a, \lambda) < (b, \mu)$ avec $\lambda \notin M$ et $\mu \in M$, a et $b \in G$.

L'isotonie à droite est trivialement vérifiée, car $(a, \lambda)(c, \nu) = 0$ pour tout (c, ν) de S . L'isotonie à gauche l'est également, car les produits $(c, \nu)(a, \lambda)$ et $(c, \nu)(b, \mu)$ sont nuls, si (c, ν) appartient à T' et appartiennent respectivement à T' et T si (c, ν) appartient à T .

Si $(a, \lambda) \leq (b, \mu)$ avec $(a, \lambda), (b, \mu) \in T'$ et $\lambda < \mu$ ou $\lambda = \mu$ et $a \leq b$.

Si $(c, \nu) \in T'$: comme T' est un zéro-demi-groupe,

$$(a, \lambda)(c, \nu) = (c, \nu)(a, \lambda) = (b, \mu)(c, \nu) = (c, \nu)(b, \mu) = 0.$$

Si $(c, \nu) \in T$ $(a, \lambda)(c, \nu) = (b, \mu)(c, \nu) = 0$ et

$(c, \nu)(a, \lambda) = (ca, \lambda) \leq (cb, \mu) = (c, \nu)(b, \mu)$, car soit $\lambda < \mu$ dans Λ , soit $ca \leq cb$ dans G et $\lambda = \mu$.

Si $(a, \lambda) \leq (b, \mu)$ avec $(a, \lambda), (b, \mu) \in T$ et $a < b$ dans G ou $a = b$ et $\lambda \leq \mu$.

Si $(c, \nu) \in T'$: l'isotonie à gauche est trivialement vérifiée puisque $T'S = 0$

$$: (a, \lambda)(c, \nu) = (ac, \nu), \text{ et } (b, \mu)(c, \nu) = (bc, \nu), \text{ dont ces}$$

deux éléments appartiennent à T' ; comme $a \leq b$ dans G , $ac \leq bc$ et ainsi,

$(ac, \nu) \leq (bc, \nu)$ dans S .

Si $(c, \nu) \in T$: $(ac, \nu) \leq (bc, \nu)$ car ou $ac < bc$ ou $ac = bc$.

$$(ca, \lambda) \leq (cb, \mu) \text{ car ou } ca < cb \text{ ou } ca = cb \text{ et } \lambda \leq \mu.$$

Ainsi dans le cas β), S peut être totalement ordonné.

c) Supposons que G peut être totalement ordonné, et que la matrice P a toutes ses lignes nulles, sauf une dont aucun élément n'est nul.

Notons $\lambda = 1$, la ligne dont aucun élément n'est nul et supposons de plus que P est normalisée, de sorte que

$$p_{1i} = e \quad \forall i \in I, \quad p_{\lambda i} = 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall \lambda \neq 1 \in \Lambda.$$

Dans ce cas, le produit dans S se définit par :

$$\begin{aligned} (a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} &= (ab)_{i\mu} \quad \text{si } \lambda = 1, a \text{ et } b \in G \\ &= 0 \quad \text{si } \lambda \neq 1, \text{ ou si } a \text{ ou } b = 0. \end{aligned}$$

Soit $T = \{(a)_{i1} ; a \in G, i \in I\}$ et soit $T' = \{(a)_{i\lambda} ; a \in G, \lambda \neq 1 \in \Lambda, i \in I\}$

On a alors $S = T \cup T' \cup \{0\}$. De plus, $\{0\} \cup T'$ est un zéro demi-groupe de S ,

$T'S = \{0\}$, $ST' \subseteq T' \cup \{0\}$, T est un sous demi-groupe de S et

$$ST \subseteq T \cup \{0\}.$$

Comme nous pouvons supposer G totalement ordonné par $\leq$, I totalement ordonné par $\leq$ et de même Λ totalement ordonné par $\leq$, on peut définir sur S , T et T' les relations binaires suivantes :

$$\text{sur } T : (a)_{i1} \leq (b)_{j1} \iff a < b \text{ dans } G \text{ ou } a = b \text{ et } i \leq j \text{ dans } I.$$

$$\begin{aligned} \text{sur } T' : (a)_{i\lambda} \leq (b)_{j\mu} &\iff \lambda < \mu \text{ ou } \lambda = \mu \text{ et } a < b \text{ dans } G \text{ ou} \\ &\lambda = \mu, a = b \text{ et } i \leq j \text{ dans } I. \end{aligned}$$

sur S : la relation prolonge celles définies sur T et T' et de plus :

$$0 < (a)_{i\lambda} < (b)_{j1} \text{ pour tout } (a)_{i\lambda} \text{ et } T', \text{ et tout } (b)_{j1} \text{ de } T.$$

Cette relation binaire $\leq$ est une relation d'ordre total sur S , car les relations sur T et T' sont des relations d'ordre lexicographique déduites de relations d'ordre total. On vérifie alors comme dans le cas b) que l'isotonie est satisfaite ; ainsi S est un demi-groupe de matrices de Rees totalement ordonné.

CHAPITRE 7

SOUS DEMI-GROUPES CONVEXES

IDEAUX CONVEXES DANS LES DEMI-GROUPES ORDONNES

Ce chapitre est indépendant des précédents, bien que nous y étudions encore les demi-groupes ordonnés. Les sous ensembles particuliers de tout ensemble E ordonné, par une relation d'ordre $\leq$, sont les parties convexes C , c'est-à-dire les sous ensembles vérifiant :

$$a \in C, b \in C, a \leq x \leq b \longrightarrow x \in C.$$

Lorsque E est de plus un demi-groupe, il est naturel de relier les notions de sous demi-groupe d'idéal et de partie convexe, en étudiant les sous demi-groupes convexes, et les idéaux, d'un côté ou bilatères, convexes. En particulier, il est intéressant de voir quelles incidences algébriques ont sur le demi-groupe des conditions imposées au treillis des sous demi-groupes convexes, ou imposées au treillis des idéaux convexes.

Jusqu'à ce que nous traitons ce sujet, seul Khion avait démontré dans [18] que si le treillis des sous demi-groupes convexes d'un demi-groupe S réticulé était réduit à un seul élément, il en était de même de S .

Dans une première partie de ce chapitre, nous examinons les demi-groupes ordonnés dont l'ensemble des sous demi-groupes convexes forme une chaîne de $\mathcal{P}(S)$, ou plus généralement un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$. Les demi-groupes ordonnés ayant ces Propriétés sont très bien décrits par les Théorèmes 7.4., 7.5. et 7.8. Les nil demi-groupes jouent ici une très grande importance.

Dans la seconde partie, nous tentons de résoudre un problème posé par E. Gabovic : caractériser les demi-groupes (abéliens) totalement ordonnés sans idéaux convexes propres, cas fini, cas général. Nous montrons en particulier, Théorème 7.12., que tout demi-groupe ordonné abélien sans idéal convexe, ayant un plus petit élément ou un plus grand élément est trivial. Nous examinons ensuite le cas des demi-groupes périodiques.

Les résultats donnés ici ont été présentés au Séminaire Dubreil-Pisot dans $[M_5]$ et $[M_6]$. Nous y apportons cependant quelques modifications.

§1. Sous demi-groupes convexes des demi-groupes réticulés et totalement ordonnés.

Plaçons nous dans le cadre d'un demi-groupe réticulé (pour la définition duquel nous renvoyons au Chapitre 3).

Dans un demi-groupe S réticulé, un sous demi-groupe H est dit "s.t.c.", s'il est sous treillis convexe de S . Les sous demi-groupes s.t.c. forment une famille de Moore, si nous admettons la partie $\emptyset$ comme sous demi-groupe s.t.c. Nous désignerons par S_x le sous demi-groupe s.t.c. engendré par x dans S . Si S est totalement ordonné, S_x est le sous demi-groupe convexe engendré par x .

Dans un demi-groupe ordonné, un élément a est f-positif (f-négatif) si $a \leq a^2$ [$a^2 \leq a$]. Nous désignerons par P l'ensemble des éléments f-positifs, et N l'ensemble des éléments f-négatifs. $P \cap N$ est l'ensemble des idempotents de S ; notons qu'en général $P \cup N$ est distincts de S . Dans le cas où S est totalement ordonné, on a bien sûr $S = P \cup N$.

Remarquons encore que, dans un demi-groupe réticulé S , tout sous demi-groupe s.t.c. est réunion de sous demi-groupes S_x .

LEMME 7.1. : Dans un demi-groupe réticulé S ,

$$S_x = \{y \in S; \exists \text{ entiers } p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_l; x^{p_1} \wedge \dots \wedge x^{p_r} \leq y \leq x^{q_1} \vee \dots \vee x^{q_l}\}.$$

La démonstration est classique.

Remarquons que dans le cas où $S = P \cup N$, $S_x = \{y \in S; \exists \text{ entiers } p \text{ et } q; x^p \leq y \leq x^q\}$ et on peut même choisir p ou q égal à 1.

LEMME 7.2. : Dans un demi-groupe réticulé S , tel que $S = P \cup N$, $S_x = S_y$ implique $x = y$.

Il est clair que $S_x = S_y$, si et seulement si $x \in S_y$ et $y \in S_x$; soit puisque $S = P \cup N$, $y^{p_1} \leq x \leq y^{q_1}$ et $x^{p_2} \leq y \leq x^{q_2}$ pour certains entiers p_i, q_i en appliquant le lemme précédent. Plusieurs cas sont à distinguer :

(α) x et $y \in P$. Dans ce cas l'inégalité ci-dessus devient

$$y \leq y^{p_1} \leq x \text{ et } x \leq x^{p_2} \leq y. \text{ D'où } x = y.$$

(β) $x \in P$ et $y \in N$. On a alors :

$$x \leq y^{q_1} \leq y, \text{ donc } x \leq y, \text{ et par suite } x^{q_2} \leq y^{q_2} \leq y \leq x^{q_2}.$$

$$\text{D'où } y = x^{q_2} = y^{q_2}.$$

Si $q_2 = 1$, $y = x$. Si $q_2 \neq 1$, y est un idempotent, et $y = y^{p_1} \leq x \leq y^{q_1} = y$.

$$\text{D'où } x = y.$$

Les autres cas se traitent de façon semblable.

Suivant la terminologie de T. Saito, nous utiliserons les définitions suivantes :

Un demi-groupe S ordonné est dit "non négativement ordonné" si $\forall a \in S, \forall b \in S$, $ab \not\leq a, ba \not\leq a$. Il est dit "positivement ordonné" si $\forall a \in S, \forall b \in S, a \leq ab, a \leq ba$. "Non positivement ordonné" se définit de façon duale, de même que "négativement ordonné".

Un demi-groupe S ordonné est "archimédien" si :

$$\begin{aligned} a \text{ et } b \in P, a < b &\implies \exists n \in \mathbb{N}, a^n \not\leq b; \\ a \text{ et } b \in N, a < b &\implies \exists p \in \mathbb{N}, a \not\leq b^p. \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.3. : Dans un demi-groupe S réticulé, tel que $S = P \cup N$, S_x est un sous demi-groupe archimédien, non négativement ordonné ou non positivement ordonné.

Soit $x \leq x^2$ par exemple. Montrons que pour tout y de S_x , $y \leq y^2$; si $y \in S_x$, on a $x \leq y \leq x^p$. D'où $y \leq x^p \leq y^p$; comme y est comparable à y^2 , y est inférieur ou égal à y^2 . Il est clair que S_x est archimédien.

Soient y et $y' \in S_x$. Si nous avions $yy' < y'$, nous en déduirions, par isotonie, $y^k y' \not\leq y'$ pour tout entier k . Or $x \leq y' \leq x^p \leq y'^p$ et $x \leq y \leq x^p$ (On peut choisir le même entier p puisque $S = P \cup N$). D'où

$$y' \leq y'^2 \leq x^p y' \leq y'^p y' \leq y'.$$

Ceci est impossible, donc $yy' \not\leq y'$, et S_x est non négativement ordonné.

Dans un demi-groupe réticulé totalement ordonné, la famille des sous

semi-groupes s.t.c. convexes ne se réduit à S , que si S est lui-même réduit à un seul élément (i.e. est trivial). La preuve est donnée dans [18]. D'autre part, les sous demi-groupes convexes forment un sous-inf-demi-treillis de $\mathcal{P}(S)$, dont le plus petit élément existe, mais peut être vide : il est en effet immédiat que l'intersection de deux s.t.c. est ou vide ou un s.t.c.

THEOREME 7.4. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné. Les sous demi-groupes convexes de S forment une chaîne si, et seulement si, S est archimédien et positivement ordonné (ou négativement ordonné).

Supposons S archimédien et positivement ordonné. Soient H et H' deux sous demi-groupes convexes tels que $H \not\subset H'$; il existe alors $h \in H$ et $h \notin H'$. Puisque S est totalement ordonné et archimédien, nous avons, si h' est un élément quelconque de H' , $h \leq h' \leq h^n$ ou $h' < h \leq h'^n$. Seul le premier cas est réalisable, puisque $h \notin H'$. Par suite, $h' \in S_h$ et H' est inclus dans H .

Réciproquement, supposons que les sous demi-groupes convexes forment une chaîne. S n'est pas un demi-groupe idempotent, car dans un tel demi-groupe la condition précédente ne peut être vérifiée puisque $S_x = \{x\}$ (sauf si le demi-groupe est trivial, auquel cas le Théorème est immédiat). Donc il existe au moins un élément x tel que $x \neq x^2$ par exemple. Dans ce cas, en appliquant la Proposition 7.3., tout élément y de S est f-positif, puisque $S_x \subset S_y$ ou $S_y \subset S_x$. Soient alors a et $b \in S$: S_a est contenu dans S_b par exemple, d'où a et $b \in S_b$. Comme ce dernier est, d'après la Proposition 7.3., positivement ordonné (car ici S est totalement ordonné) et archimédien, il en est de même de S .

Exemple 1 : Considérons $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels non nuls, ordonné de façon naturelle. Il est clair que $\mathbb{N}^*$ est positivement ordonné, archimédien. Ses sous demi-groupes convexes forment bien une chaîne dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$: ce sont en effet les sous ensembles $\tilde{n} = \{x \in \mathbb{N}^* ; x \geq n\}$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$.

Si S est un demi-groupe totalement ordonné, ses sous demi-groupes convexes forment un treillis $T(S)$, si nous admettons $\emptyset$ comme sous demi-groupe convexe impropre. $T(S)$ est évidemment un sous inf-demi-treillis de $\mathcal{P}(S)$, mais en général la réunion de sous demi-groupes convexes n'appartient pas à $T(S)$. Le plus petit élément de $T(S)$ est $\emptyset$, mais S peut admettre un sous demi-groupe convexe propre minimum (l'intersection de tous les sous demi-groupes convexes propres de S).

C'est par exemple le cas, si le demi-groupe S admet lui-même un sous demi-groupe minimum. C'est le cas des nil-demi-groupes, dont le zéro est évidemment plus petit sous demi-groupe. Nous allons démontrer qu'en fait les seuls demi-groupes totalement ordonnés ayant un plus petit sous demi-groupe convexe sont les nil-demi-groupes totalement ordonnés.

THEOREME 7.5. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné. S est un nil-demi-groupe, si et seulement si, S admet un sous demi-groupe convexe propre minimum et si $T(S)$ est un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$.

Soit S un nil-demi-groupe totalement ordonné de zéro z . Puisque pour tout x de S , il existe un entier n tel que $x^n = z$, z est le plus petit sous-demi-groupe convexe de S . Il suffit de montrer que la réunion de deux sous demi-groupes convexes l'est encore. Si S_x et S_y sont deux sous demi-groupes convexes quelconques engendrés par x et par y , il est facile de voir que $S_x \cup S_y$ est encore un sous demi-groupe ; $S_x \cup S_y$ est convexe puisque $S_x \cap S_y$ est non vide. Tout demi-groupe convexe étant réunion de sous demi-groupes de type S_x , le résultat voulu s'en déduit.

Réciproquement, supposons que les sous demi-groupes convexes de S forment un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$ avec pour plus petit élément $H \neq \emptyset$. H est nécessairement de la forme S_z , et comme nous avons toujours $S_z^2 \subseteq S_z$, par minimalité, nous avons $S_z = S_z^2$ et d'après le Lemme 7.2., $z = z^2$. Cet idempotent z est alors le seul. Soit $a \in S$; nous savons que $z \in S_a$ pour tout a de S . Si $a \leq a^2$, $a \leq z \leq a^n$. D'où $a^n \leq z^n = z \leq a^n$ et $a^n = z$; comme S est totalement ordonné, $za = az = a^{n+1} = a^{2n} = z$. Il en est de même si $a^2 \leq a$;

S est donc bien un nil-demi-groupe.

Remarque : Le Théorème précédent donne une autre caractérisation des nil-demi-groupes totalement ordonnés. Rappelons que E. Ja. Gabovic avait énoncé dans [1] :

Un demi-groupe totalement ordonné est un nil-demi-groupe si et seulement si, il satisfait l'une des conditions suivantes :

- a) S est archimédien et périodique,
- b) S est réunion d'une suite de demi-groupes nilpotents convexes.

LEMME 7.6. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné, sans idempotent. Si $T(S)$ est un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$, $T(S)$ est une chaîne.

Pour que ce treillis $T(S)$ soit une chaîne, il suffit de démontrer, en vertu du Théorème 7.4. que S est archimédien et positivement ordonné (ou négativement). Supposons qu'il existe $a \in N-P$ (i.e. $a^2 \neq a$) et $b \in P$ (i.e. $b \leq b^2$: si $a < b$, $S_a^2 \cup S_b$ n'est pas convexe car $a^2 < a < b$ et $a \notin S_a^2 \cup S_b$. Le cas $b < a$ n'est pas à considérer, car alors ab est un idempotent. Donc $S = P$ par exemple. Soient a et b deux éléments de S avec $a < b$, $a < a^2$, $b < b^2$: si $a^n < b$ pour tout entier n, $S_a \cup S_b^2$ n'est pas convexe. Donc il existe un entier p tel que $a < b \leq a^p$. Par suite S est archimédien et étant f-positivement ordonné, il est positivement ordonné ($a \leq ab$ pour tout a et b de S).

LEMME 7.7. : Si $T(S)$ est un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$, S admet au plus deux idempotents. En effet, si e, f, g étaient trois idempotents de S, on aurait par exemple, $e < f < g$, puisque S est supposé totalement ordonné. Mais alors $S_e \cup S_g = \{e, g\}$ ne serait pas convexe.

THEOREME 7.8. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné, et soit E l'ensemble de ses idempotents.

$T(S)$ est un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$ et S n'admet pas de sous demi-groupe convexe propre minimum, si et seulement si,

- 1°) E est $\emptyset$ et $T(S)$ est une chaîne.
- ou 2°) $E = \{z\}$, z est zéro de S , la section commençante [finissante] de z est un nil-demi-groupe, la section strictement finissante [commençante] de z est un demi-groupe non vide dont le treillis des sous demi-groupes convexes est une chaîne.
- ou 3°) $E = \{e, f\}$ où f couvre e et où les sections commençante de e et finissante de f sont des nil-demi-groupes.

Rappelons que la section finissante de x est $\bar{x} = \{t ; t \geq x\}$ et la section strictement finissante est $\tilde{x} = \{t ; t \not\geq x\}$. Les sections commençantes, strictement commençantes se définissent de façon duale.

Condition nécessaire. D'après le Lemme 7.7., $E = \emptyset$ ou $E = \{x\}$ ou $E = \{e, f\}$.

- Si $E = \emptyset$, on a bien 1°) d'après le Lemme 7.6.

- . Si $E = \{z\}$. Soient $\bar{z}$ et $\tilde{z}$ respectivement les sections commençante et finissante de z . Si $x < z$, alors $x < x^2$, sinon $S_x \cup S_z$ n'est pas convexe ; de même si $z < x$, $x^2 < x$. Si $x < z < y$, et si $x^p < z < y^q$ pour tout entier p et tout entier q , $S_x \cup S_y$ ne contient pas z , donc n'est pas convexe. Donc si $\bar{z}$ et $\tilde{z}$ ne sont pas vides, $\bar{z}$ par exemple est tel qu'il contient un élément x vérifiant $x^p = z$.

Dans ce cas, $\bar{z}$ est un nil-demi-groupe ; en effet si x' est un autre élément de $\bar{z}$: si $x \leq x' \leq z$, alors $x^p = x'^p = z$ et si $x' < x$, comme $S_{x'} \cup S_z$ est convexe, il contient x et par suite $x' < x \leq x'^q \leq z$, donc $z = x^p = x'^{pq}$. Mais $\bar{z}$ et $\tilde{z}$ ne peuvent être simultanément deux nil-demi-groupes car alors $\{z\}$ serait minimum parmi les sous-demi-groupes convexes propres donc si $\bar{z}$ est un nil-demi-groupe, $\tilde{z} = \{x ; x \not\geq z\}$ ne peut être vide et est sous demi-groupe. Enfin, si $z < x^2 < x$, zx est un idempotent, donc $zx = z$ et z est zéro du demi-groupe S ; de plus d'après le Lemme 7.6., $T(\bar{z})$ est une chaîne, donc la condition 2°) est satisfaite.

- Si $E = \{e, f\}$ avec $e < f$. S'il existait x tel que $e < x < f$, la convexité de $S_e \cup S_x$ impliquerait $e \leq x^2 < x$ et la convexité de $S_f \cup S_x$, $x < x^2 \leq f$;

donc f couvre e dans S .

Enfin si $x < e$, $x < x^2$, car sinon $S_{x^2} \cup S_e$ n'est pas convexe ; et de plus, il existe p tel que $x < x^p = e$ car sinon $S_x \cup S_f$ n'est pas convexe. Ainsi, la section commençante de e est un nil-demi-groupe. Même raisonnement pour f .

Condition suffisante. Il est facile de vérifier que dans chacun des trois cas, $S_x \cup S_y$ est un sous-demi-groupe convexe pour tout x et tout y ; donc $T(S)$ est un sous treillis de $\mathcal{P}(S)$.

De plus, si S admet un sous demi-groupe convexe minimum propre, on sait (cf. la dém. du Th. 7.5.) que ce dernier est un idempotent. Donc si $E = \emptyset$, on a le résultat. Dans le second cas, $S_z \cap S_x = \emptyset$ pour tout x de la section strictement finissante [commençante] de z ; dans le dernier cas $S_e \cap S_f = \emptyset$ donc S ne peut admettre de sous demi-groupe convexe minimum propre.

Exemple 2 : Considérons les rationnels de l'intervalle $[0,1]$; soit S est ensemble. Définissons dans S la loi $+$:

$$\begin{aligned} a+b &= a+b \text{ (somme dans } \mathbb{Q}), \text{ si } a+b \in [0,1[\\ &= 1 \quad \text{si } a+b \geq 1. \end{aligned}$$

Il est alors clair que $(S,+)$ est un demi-groupe abélien, de zéro égal à 1 ; de plus, $S - \{0\}$ est un sous demi-groupe, nil-demi-groupe, puisque pour tout rationnel $\frac{p}{q} \neq 0$, il existe un entier à savoir q , tel que $q \cdot \frac{p}{q} = 1$ dans S .

Ce demi-groupe est totalement ordonné par la restriction à $[0,1]$ de l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$. S est donc un demi-groupe totalement ordonné, satisfaisant aux conditions 3) du Théorème 7.8. Le treillis des sous-demi-groupes convexes de S est donc sous treillis de $\mathcal{S}(S)$.

§2. Demi-groupes totalement ordonnés sans idéaux convexes.

Un demi-groupe (totalement) ordonné est c-simple [c-simple à gauche, c-simple à droite] s'il n'admet pas d'idéal bilatère [à gauche, à droite]

convexe propre, c'est-à-dire distinct de lui-même. E.J. Gabovic, dans [29], posait le problème suivant : "Décrire les demi-groupes totalement ordonnés c-simples, et les demi-groupes (abéliens) finis totalement ordonnés c-simples". Nous apportons ici une solution à ce problème dans quelques cas particuliers.

A) Quelques Propriétés des demi-groupes ordonnés c-simples.

Lorsqu'il s'agira d'idéaux d'un côté, nous étudierons les idéaux à gauche ; le cas des idéaux à droite se traiterait de façon analogue.

DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Dans un ensemble ordonné X , une partie A est :

- héréditaire, si $(x \in X, a \in A, x \leq a) \implies (x \in A)$;
- héréditaire duale, si $(x \in X, a \in A, a \leq x) \implies (x \in A)$.

Si A est un sous-ensemble de X , nous noterons $\overleftarrow{A}$ la partie héréditaire engendrée par A , c'est-à-dire que $\overleftarrow{A} = \{x \in X ; \exists a \in A, x \leq a\}$

et $\overrightarrow{A}$ désignera la partie héréditaire duale engendrée par A ,
 $\overrightarrow{A} = \{x \in X ; \exists a \in A, a \leq x\}$.

PROPOSITION 7.9. : Dans un demi-groupe ordonné, tout idéal bilatère [à gauche] convexe est l'intersection d'un idéal bilatère [à gauche], partie héréditaire, et d'un idéal bilatère [à gauche], partie héréditaire duale.

Soit I un idéal bilatère convexe ; $\overleftarrow{I}$ est par définition une partie héréditaire. Soit $y \in I$; on a donc $y \leq i$ pour un certain i de I . D'où $xy \leq xi$, et $yx \leq ix$, pour tout x . Comme xi et ix appartiennent à I , qui est idéal, xy et yx appartiennent à I , qui est donc idéal bilatère. De façon duale, $\overrightarrow{I}$ est un idéal bilatère, partie héréditaire duale. Mais comme I est convexe, $\overleftarrow{I} \cap \overrightarrow{I}$ est égal à I .

THEOREME 7.10. : Soit S un demi-groupe ordonné. Il y a équivalence entre :

- (a) S est c-simple à gauche (c-simple) ;
- (b) S n'admet ni idéal à gauche (bilatère) héréditaire propre, ni

idéal à gauche (bilatère) héréditaire dual propre ;

$$(c) \forall a \in S, \overleftarrow{Sa} = \overrightarrow{Sa} = S \left[\overleftarrow{Sa}S = \overrightarrow{Sa}S = S \right].$$

(a) $\implies$ (b) : Toute partie héréditaire ou héréditaire duale est en particulier convexe ; donc cette implication est immédiatement vérifiée.

(b) $\Longleftarrow$ (a) : Il suffit d'appliquer la Proposition 7.9.

(b) $\implies$ (c) : Sa étant un idéal à gauche, $\overleftarrow{Sa}$ et $\overrightarrow{Sa}$ sont des idéaux à gauche aussi, d'où le résultat.

(c) $\implies$ (b) : Soit I un idéal à gauche héréditaire, et soit $a \in I$; alors $\overleftarrow{Sa} \subseteq I$ et, $\overleftarrow{Sa}$ étant égal à S , $I = S$, et I est un idéal impropre.

LEMME 7.11. : Soit S un demi-groupe ordonné, de plus petit élément z . Si S n'admet aucun idéal à gauche, héréditaire dual propre, z est zéro à gauche de S .

Puisque S n'admet aucun idéal à gauche, héréditaire dual propre, $\overrightarrow{Sa} = S$ pour tout a de S ; en particulier $z \in \overrightarrow{Sa}$, donc $z \leq xa \leq z$, puisque z est le plus petit élément de S . D'où $xa = z$. Mais $z \leq x$, d'où $z \leq za \leq xa = z$ et $z = za$. z est donc zéro à gauche.

THEOREME 7.12. : Soit S un demi-groupe ordonné abélien, avec un plus petit élément z ou un plus grand élément u ; S est c-simple, si et seulement si S est réduit à un seul élément.

D'après le lemme précédent, si z est le plus petit élément de S , nous avons $za = az = z$, et z est un zéro de S , donc un idéal convexe et par suite, $S = \{z\}$. Si u est le plus grand élément de S , un raisonnement dual permet de conclure.

COROLLAIRE 7.13. : Un demi-groupe abélien fini, totalement ordonné, est c-simple, si et seulement si, il est réduit à un élément.

LEMME 7.14. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné c-simple. S admet un

plus petit élément, si et seulement si, l'ensemble de ses zéros à gauche (ou à droite) admet un plus petit élément z . Dans ce cas, z est le plus petit élément de S .

Si S admet un plus petit élément z , comme $\overrightarrow{SaS} = S$ pour tout a , on en déduit que $zaz = z$. Mais S est supposé totalement ordonné, donc nous avons par exemple $z \leq za \leq az$ d'où, en vertu de l'isotonie, $z^2 \leq z^2 a \leq zaz$ et alors $za = z$. Par suite, pour tout a de S , za ou $az = z$. Si S n'est pas réduit à un élément, z n'est pas un zéro ; donc il existe $x \in S$ tel que $zx = z$ et $xz \neq z$. Dans ce cas, soit $y \leq x : z \leq zy \leq zx = z$ et $zy = z$. Soit $y > x$, alors $z < xz \leq yz$, puisque xz est distinct de z . yz est donc distinct de z et on a également $zy = z$. Ainsi pour tout y de S , $zy = z$, et z est zéro à gauche de S .

Réciproquement, supposons que l'ensemble des zéros à gauche de S n'est pas vide, et soit z son plus petit élément. Supposons qu'il existe $x \in S$, $x < z$. S étant c -simple, il existerait $\alpha, \beta \in S$ tels que $\alpha z \beta \leq x \leq z$. Or $z \beta = z$, et ainsi $\alpha z \leq x < z$. Mais αz est aussi un zéro à gauche, donc $\alpha z < z$ est impossible, et z est le plus petit élément de S .

THEOREME 7.15. : Soit S un demi-groupe totalement ordonné, de plus petit élément z et de plus grand élément u ($z \neq u$). S est c -simple, si et seulement si, z et u sont deux zéros à gauche (ou à droite).

Condition nécessaire : D'après le lemme précédent, et celui qui s'en déduit par dualité, z et u sont deux zéros à gauche (ou à droite).

Condition suffisante : Il suffit de montrer que, pour tout a de S ,

$\overleftarrow{SaS} = \overrightarrow{SaS} = S$; or $ua = u$, $za = z$, donc $uau = u$, $zaz = z$, pour tout a de S .

Ainsi, pour tout x de S , $x \in \overrightarrow{SaS}$, puisque $zaz = z \leq x$, et de même, $x \in \overleftarrow{SaS}$, puisque $x \leq uau$. S est donc c -simple.

COROLLAIRE : Soit S un demi-groupe simple. S peut être totalement ordonné avec un plus petit et un plus grand élément, si et seulement si, S est un zéro-demi-groupe à gauche ou à droite.

Si S est un zéro-demi-groupe d'un côté, toute relation d'ordre total définie sur S l'ordonne totalement. En particulier, D peut être totalement ordonné avec un plus petit ou un plus grand élément.

Réciproquement, si S est un demi-groupe simple, il est c -simple a fortiori.

Supposons qu'il soit ordonné avec un plus petit et un plus grand élément :

d'après le Théorème 7.15., ces deux éléments sont donc deux zéros à gauche ou à droite. Mais l'ensemble des zéros à gauche est un idéal bilatère ; comme S est simple, S est un zéro-demi-groupe à gauche.

B. Demi-groupes périodiques totalement ordonnés c -simples.

Rappelons que dans un demi-groupe, on peut définir une relation d'équivalence, appelée équivalence en fuseaux, et notée $\mathcal{F}$, qui est la relation suivante :

$$a \equiv b (\mathcal{F}) \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, a^n = b^p.$$

Les classes mod. $\mathcal{F}$ sont les fuseaux ; le fuseau de x se note F_x .

Un demi-groupe est dit "périodique", si pour tout élément x , il existe un entier n tel que x^n est un idempotent.

Dans le cas où S est un demi-groupe périodique totalement ordonné, $\mathcal{F}$ peut encore se définir par : $a \equiv b (\mathcal{F}) \iff \exists n \in \mathbb{N} ; \exists e = e^2 \in S, a^n = b^n = e$.

On vérifie alors (cf. [8] par exemple) que les fuseaux sont des sous demi-groupes convexes.

THEOREME 7.16. : Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné, et soit E le demi-groupe des idempotents de S . S est c -simple si et seulement si, E est c -simple et vérifie " e plus petit élément de E " implique " e plus petit élément de S ", et " f plus grand élément de E " implique " f plus grand élément de S ".

1°) Supposons S c -simple. Soit I un idéal convexe de E ; et soit x

un élément de E . Si $e < x < f$ où e et f appartiennent à I ; par convexité de I , x appartient à I . Si $x \leq e$ pour tout e de I : comme S est c -simple, d'après le Théorème 7.10, $\overrightarrow{SeS} = S$, et il existe des éléments t et t' tels que $tet' \leq x < e$. D'où pour tout entier p , $t^p et'^p \leq tet' \leq x < e$; en particulier, il existe un entier n tel que $t^n = g$, $g \in E$, $t'^n = h$, $h \in E$ et l'on a $geh \leq x < e$. Comme $geh \in I$, car $e \in I$ idéal de E , $x \in I$. On en déduit que $I = E$ et que E est c -simple. (Le raisonnement est en effet le même, si $f \leq x$ pour tout f de E). Si e est le plus petit élément de E , soit $x \in S$, $x \leq e$; comme précédemment on trouve un idempotent geh tel que $geh \leq x \leq e$; d'où $x = e$.

2°) Réciproquement ; montrons que S est c -simple. D'après le Théorème 7.10., il faut montrer que $\forall a, \forall b \in S, \exists x, x', y, y'$, tels que $xay \leq b \leq x'ay'$.

Si a et b réciproquement au même fuseau F_e .

Si e n'est ni maximum, ni minimum dans E , il existe f, g dans E tels que $f < e < g$. E étant c -simple, on peut trouver g_1, g_2, g'_1, g'_2 éléments de E satisfaisant aux inégalités suivantes : $g_1 g g_2 \leq f < e < g \leq g'_1 f g'_2$. Il vient alors, en utilisant la convexité des fuseaux, $g_1 a g_2 \leq g_1 g g_2 < b < g'_1 f g'_2 \leq g'_1 a g'_2$, puisque a , comme e , est inférieur à g et supérieur à f .

Si e est minimum dans E , e est aussi par hypothèse le plus petit élément de S . De plus il existe un autre idempotent f car sinon, S est trivial. On a donc $e < a < f$, et comme $e = a^n$ pour un certain n , $e < f \leq f_1 e f_2$ puisque E est c -simple ; nous avons :

$$a^n = e < b < f \leq f_1 a^n f_2.$$

Même résultat si e est le plus grand élément de E .

Si a appartient à F_e et b à F_f , avec $e \neq f$. Supposons $e < f$ par exemple.

Si e n'est pas minimum et f non maximum, il existe h et h' , idempotents de S , tels que $h < e < f < h'$. Donc E étant un demi-groupe c -simple, il existe g_1, g_2, g'_1, g'_2 éléments de E vérifiant $g_1 h' g_2 \leq h < e < h' \leq g'_1 h g'_2$. D'où par convexité des fuseaux, $g_1 a g_2 < b < g'_1 a g'_2$.

Si e est le plus petit élément de E donc de S , et si f n'est pas le plus grand, on a $e < a < b < g$, avec $g \in E$ et $g \neq f$. D'où :

$e = eae < b < g \leq g_1 e g_2 = g_1 e a e g_2 = y a y'$, avec g_1 et g_2 éléments de E .

Si e est minimum et f maximum dans E , alors $e < a < b < f$. Dans ce cas,

il existe des éléments g_1, g_2, g'_1, g'_2 de E tels que $g_1 f g_2 = e$,

$g'_1 e g'_2 = f$. D'où $eae < b < g'_1 a^n g'_2$ et $g_1 b^p g_2 = e < a < f b f = f$.

Les autres cas se traitent de façon semblable.

COROLLAIRE : Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné. Si S n'admet ni plus petit ni plus grand élément, S est c-simple si et seulement si E , ensemble de ses idempotents est c-simple.

COROLLAIRE : Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné, dans lequel les idempotents commutent. Si le demi-groupe des idempotents admet ou un plus petit ou un plus grand élément, S est c-simple si et seulement si S est trivial.

Ce corollaire résulte du Théorème 7.16. et du Théorème 7.12.

Le Théorème 7.16. fait intervenir des demi-groupes idempotents, bandes ; nous allons donc nous intéresser aux bandes ordonnées c-simples, et plus particulièrement aux bandes finies.

Soit S une bande finie totalement ordonnée c-simple. Si cette bande n'est pas triviale, elle admet d'après le Théorème 7.15. deux zéros d'un côté qui sont ses plus petit et plus grand éléments. Ainsi, si comme dans le Chapitre 5, $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ désigne l'ensemble des n zéros à gauche de S , $n \geq 2$, z_1 est le plus petit élément de Z et de S , et z_n le plus grand. Par suite de l'étude des σ -bandes, nous déduisons que pour tout x de $S-Z$, xZ égale 2 : nous avons en effet vu que $|xZ|$ égale 1 implique $x \leq z_i$ ou $z_i \leq x$ pour tout z_i , zéro à gauche. D'où

THEOREME 7.17. : Soit S une bande finie totalement ordonnée, non triviale. S est c-simple si et seulement si, l'ensemble Z de ses zéros d'un côté est de cardinal supérieur ou égal à 2, et si de plus, pour tout x de $S-Z$ (si $S-Z \neq \emptyset$)

$|xZ|$ égale à 2.

C. Construction de demi-groupes totalement ordonnés c-simples.

Nous savons que tout demi-groupe S peut être plongé dans un demi-groupe S' simple (on peut consulter le Théorème 8.45 de [7] à ce sujet). Nous avons un théorème analogue dans le cas c-simple.

THEOREME 7.18. : Tout demi-groupe S totalement ordonné [partiellement ordonné] peut être plongé dans un demi-groupe S' totalement ordonné [partiellement ordonné] c-simple, l'ordre défini sur S' prolongeant celui donné sur S .

Considérons, en effet, l'ensemble $S' = S \cup \{z\} \cup \{u\}$, où z et u sont deux symboles n'appartenant pas à S . Définissons, dans S' , les relations suivantes :

$$\forall x \in S, z < x < u ;$$

$$zS' = z ; Sz = z ; xy \text{ dans } S' \text{ égale } xy \text{ dans } S ;$$

$$uS' = u ; Su = u.$$

z et u sont donc zéros à gauche de S' . Si nous montrons que S' est un demi-groupe, il sera c-simple, en vertu du Théorème 7.15. Pour vérifier que S' est un demi-groupe, il suffit de voir que $(xy)t = x(yt)$ lorsque $x \in S$ et y ou $t \notin S$. L'isotonie se vérifie facilement.

PROPOSITION 7.19. : Si S est un demi-groupe totalement ordonné, simplifiable, c-simple et si S' est un demi-groupe totalement ordonné, le produit direct $D = S' \times S$ est un demi-groupe totalement ordonné c-simple.

Ordonnons D par l'ordre lexicographique

$$(a,b) \leq (c,d) \iff b < d \text{ ou } b = d \text{ et } a \leq c.$$

D est c-simple pour cette relation d'ordre total. Puisque S est simplifiable, S n'admet, ni plus petit, ni plus grand élément ; de tels éléments sont en effet zéros à gauche ou à droite puisque S est c-simple.

Soient (a,b) et (c,d) deux éléments de D . Il existe donc un élément x

de S tel que $b < x$, $d < x$. Comme S est c -simple, $b < x \leq zdt$, z et $t \in S$ et

$$(a, b) \leq (z', z) (c, d) (t', t),$$

avec z' et t' éléments quelconques de S' . De même, il existe donc un élément y de S tel que $y < b$, $y < d$, et par suite il existe u et v tels que $udv \leq y$ et

$$(u', u) (c, d) (v', v) < (a, b).$$

D est donc c -simple.

REMARQUE : Si S' n'est pas simple, D ne peut l'être. Donc, si S est un demi-groupe totalement ordonné simple, simplifiable (donc c -simple), si S' est un demi-groupe totalement ordonné non simple, $D = S' \times S$ est totalement ordonné, c -simple, sans être simple.

Exemple 3. : Soit S le groupe multiplicatif des rationnels strictement positifs ; S est totalement ordonné par $(a \leq b) \iff a/b \leq 1$, et S est évidemment simple, et simplifiable. Soit S' le demi-groupe additif des entiers positifs. S' est totalement ordonné par $(a \leq b) \iff (b-a \geq 0)$. Le produit $S' \times S$ est un demi-groupe, totalement ordonné par l'ordre lexicographique, c -simple (comme S), et qui ne peut être simple, puisque S' ne l'est pas.

CHAPITRE 8

SUR LES IDEMPOTENTS D'UN ANNEAU.

Soit R un anneau ; son demi-groupe multiplicatif a , en tant que demi-groupe, des propriétés particulières. Toutefois, il est bien connu que l'on ne peut caractériser les demi-groupes qui peuvent être considérés comme demi-groupes multiplicatifs d'un anneau ; cela a été démontré par S. Kogalovskij dans [19]. Si l'on impose des conditions particulières au demi-groupe, ces conditions ont une incidence sur l'anneau. Plusieurs articles ont déjà été consacrés à ce sujet, cf. par exemple [23], [16].

Nous allons examiner dans un premier temps les anneaux dont le demi-groupe multiplicatif est un σ -demi-groupe, ou dont, plus spécialement l'ensemble des idempotents est un σ -demi-groupe. Nous verrons que dans ce cas l'ensemble E^* des idempotents non nuls de l'anneau est un zéro-demi-groupe à gauche, ou à droite (Proposition 8.5.). Aussi dans un second paragraphe nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des idempotents non nuls d'un anneau soit un zéro-demi-groupe d'un côté [Théorème 8.12]. Nous donnerons également un exemple de tel demi-groupe.

Les résultats énoncés dans ce dernier paragraphe ont été publiés dans une note aux C.R.A.S. de Paris [M₇].

§1. σ -demi-groupes et anneaux.

PROPOSITION 8.1. Si R est un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est un σ -demi-groupe, alors R vérifie la condition : $\forall a \in R, \forall b \in R, 2ab = 0$.

En effet, si $(R, .)$ est un σ -demi-groupe, pour une certaine relation d'ordre total $\leq$, a et $-a$ sont comparables. Si $a \leq -a$, par isotonie on

$a^2 \leq -a^2$ et $-a^2 \leq a^2$ en multipliant par a , puis par $-a$. D'où $a^2 = -a^2$, soit $2a^2 = 0$, et ceci pour tout a de R . Soient alors deux éléments a et b : $2a^2 = 2b^2 = 0$. Si $a \leq b$, on a par isotonie,

$$2a^2 \leq 2ab \text{ et } a(2b) = 2ab \leq 2b^2.$$

D'où $2ab = 0$.

Désignons par E l'ensemble des idempotents d'un anneau et par E^* l'ensemble des idempotents non nuls de cet anneau.

LEMME 8.2. Si E est un σ -demi-groupe, et si e et f appartiennent à E , on a : $ef = 0 \implies e$ ou $f = 0$.

En effet, si $\leq$ ordonne totalement le demi-groupe E :

$$(0 \leq e \leq f) \implies (0 \leq e \leq ef).$$

D'où $e = 0$.

De même si $0 \leq f \leq e$, ou si e et f sont inférieurs à 0 , e ou $f = 0$. Si $e \leq 0 \leq f$, alors $ef = fe = 0$; donc $e+f$ est aussi un idempotent, d'où $e+f \leq 0$ ou $0 \leq e+f$; dans le premier cas, $e+f \leq 0 \leq f$, et $(e+f)f = 0 = f$. Il en est de même dans le cas contraire.

Donc, si l'ensemble des idempotents d'un anneau est un σ -demi-groupe, c'est un demi-groupe sans diviseurs de zéro, dont 0 est le plus grand élément ou le plus petit.

LEMME 8.3. Si l'anneau R est unitaire, et si E est un σ -demi-groupe, E est réduit à $\{1, 0\}$.

Soit $e \in E$, $e \neq 0$; $1-e \in E$. Mais $e(1-e) = 0$, donc $e = 1$ d'après le lemme 8.2.

LEMME 8.4. Si E est un σ -demi-groupe, et si e et f appartiennent à E , $e \neq 0$, $f \neq 0$, $e \neq f$, alors $e = ef$ et $f = fe$ (ou $e = fe$ et $f = ef$).

Lors de l'étude des σ -bandes, Chapitre 5, nous avons vu que $efe = ef$ ou fe . Utilisons ici ce résultat. Si $ef = fe$, alors $efe = fe = fef = ef$, et

$e - ef$ est un idempotent. Comme $(e-ef)f = 0$, on en déduit $e = ef$ d'après le lemme précédent. De même, $f = fe$ et $e = f$, ce qui n'est pas.

Donc $ef \neq fe$: si $ef = efe$, alors $fe = fef$ et

$$(e-ef)^2 = e + ef - ef - efe = e - ef. \text{ D'où } (e-ef)f = 0 \text{ et } e = ef,$$

de même, $f = fe$. Si $ef = fef$, on a $e = fe$ et $f = ef$.

PROPOSITION 8.5. Si l'ensemble E des idempotents d'un anneau R est un σ -demi-groupe, de cardinal supérieur ou égal à 3, alors E^* est un zéro-demi-groupe à gauche, ou à droite infini.

Puisque E est de cardinal supérieur ou égal à 3 par hypothèse, il existe deux idempotents distincts, non nuls. Alors, d'après le lemme 8.4., on a par exemple $e = ef$ et $f = fe$. Soit g un autre idempotent non nul

(α) si $e < g < f$: $e \leq eg \leq ef = e$, d'où $eg = e$, et alors $ge = g$, toujours d'après le lemme 8.4. De plus $f = fe \leq fg \leq f$, d'où $fg = f$, $gf = g$.

(β) si $g < e < f$: $gf \leq ef = e$. Donc $gf = g$, $fg = f$. Donc d'après (α), $eg = e$, $ge = g$.

(γ) si $e < f < g$: $ge \geq fe = f$. Comme $ge = e$ ou g , on a $ge = g$, donc $eg = e$. En appliquant (α), on trouve $fg = f$ et $gf = g$.

Ainsi de $e = ef$ et $f = fe$, nous en avons déduit $eg = e$, $ge = g$, $fg = f$, $gf = g$ pour tout g de E^* . Comme E est totalement ordonné, si l'on prend un idempotent k quelconque de E^* , on trouve que $kg = k$, $gk = g$, et E^* est un zéro-demi-groupe à gauche.

Ainsi dans un anneau R dont l'ensemble des idempotents est un σ -demi-groupe, nous venons de voir que, si pour deux idempotents e et f non nuls on a : $ef = e$; $fe = f$ alors l'ensemble des idempotents non nuls est un zéro-demi-groupe à gauche. Nous allons voir maintenant que dans le cas d'un anneau quelconque, de $ef = e$ pour tout idempotent f de E , e étant fixé résulte que E est aussi un zéro-demi-groupe à gauche.

§2. Idempotents d'un anneau.

Si A est un anneau, nous désignons par E l'ensemble de ses idempotents et E^* l'ensemble de ses idempotents non nuls.

LEMME 8.6. Si E^* est un zéro-demi-groupe à gauche, $I_e = \{x \in A ; e+x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A pour tout e de E^* .

Si $e \in E^*$ et si $e+x \in E^*$, on a $e(e+x) = e$, $(e+x)e = e+x$, donc $xe = x$, $ex = 0$, pour tout x de I_e . De plus pour tout y de A , $e+ey - eye$ est un idempotent non nul, donc $e(e+ey-eye) = e$ et $ey = eye$ pour tout y de A . Les trois égalités $xe = x$, $ex = 0$, $ey = eye$ pour tout y de A , tout x de I_e permettent de montrer alors que I_e est un idéal bilatère de A .

Soit e un idempotent de E , et notons $(\mathcal{C})$ la condition :

$(\mathcal{C})$ $I_e = \{x \in A ; e+x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A .

Cherchons les propriétés qui en découlent.

Remarquons tout de suite que e ne peut appartenir à I_e , si ce dernier est un idéal. En effet si e appartient à I_e , $-e$ lui appartient aussi, et alors $e + (-e) = 0$ appartiendrait à E^* .

LEMME 8.7. Si $(\mathcal{C})$ est satisfaite, ef et fe appartiennent à E^* pour tout f de E^* . Si $f \in E^*$, $f = e + (f-e)$, donc $f-e$ appartient à I_e , et comme ce dernier est un idéal $e(f-e) = ef - e$ appartient aussi à I_e , donc ef est un idempotent non nul ; de même fe .

LEMME 8.8. Si $(\mathcal{C})$ est vérifiée, et si x appartient à I_e , $x^2 = 0$.

Si $x \in I_e$, $e+x = (e+x)^2$, donc en développant on obtient $ex + xe + x^2 = x$. En multipliant par e à gauche, on a $exe + ex^2 = 0$. Mais $-x$ appartient aussi à I_e , donc $-exe + ex^2 = 0$. Par symétrie, on a aussi $exe + x^2e = -exe + x^2e = 0$, d'où $ex^2 + x^2e = 0$. Mais $x^2 \in I_e$, donc $(e+x^2)^2 = e + x^2$, et en tenant compte du fait que $ex^2 + x^2e = 0$, on a

$x^4 = x^2$, et x^2 est un idempotent. Si l'on suppose x^2 non nul, il s'en suit que $ex^2 \in E^*$ (Lemme 8.7.), et que $ex^2 - e \in I_e$. Mais comme I_e est un sous groupe et comme ex^2 appartient aussi à I_e , il en résulterait e élément de I_e , ce qui est absurde.

LEMME 8.9. Si (C) est satisfaite, et si f et g appartiennent à E^* , on a

$$e+f = ef + fe, \quad egf = ef, \quad fge = fe.$$

Soit $f = f^2 \neq 0$, alors $f-e \in I_e$, donc d'après le lemme précédent, $(f-e)^2 = 0$, c'est-à-dire $e + f = ef + fe$. Multiplions cette égalité successivement par g , puis par e à gauche ; nous obtenons $ege + egf = egef + egfe$. Mais $e + f = ef + fe$ implique $e = efe$, $f = fef$ pour tout f de E^* ; donc $ege = e$ et l'on a $e + egf = ef + egef$. Mais $f-e \in I_e$, donc $eg(f-e) \in I_e$, soit $egf - e \in I_e$ et egf est un idempotent non nul. Il en résulte que $e(egf)e = e$, et que $egf = ef$. De même $fge = fe$.

PROPOSITION 8.10. Si dans un anneau A , il existe un idempotent e non nul, tel que $\{x \in A ; e+x \text{ est un idempotent non nul}\}$ est un idéal, alors l'ensemble des idempotents de A est un demi-groupe intègre vérifiant
 $\forall f \in E, \forall h \in E, \forall g, g \neq 0, g \in E, fgh = fh$.

Soient f, g, h trois idempotents non nuls. De $e+f = ef + fe$, on en déduit $fef = f$, d'où $fgh = (fef)gh = f(efg)h = f(eg)h$ d'après le lemme 8.9. Ce dernier terme est encore égal à $f(egh) = f(eh) = (fe)h = (fhe)h = f(heh) = fh$. Donc $fgh = fh$; de cette formule résulte que E est un demi-groupe, car $fgf = f^2 = f$, donc $(fg)^2 = fg$. Comme $fge = fe$ et comme fe est non nul d'après le lemme 8.7., fg est non nul, et E est un demi-groupe intègre.

LEMME 8.11. Soit e un idempotent non nul d'un anneau A . Si pour tout f de E^* , $ef = e$, alors $I_e = \{x \in A ; e+x \in E^*\}$ est un idéal bilatère contenu dans Ae .

Soit $x \in I_e$; on a donc $e(e+x) = e = e+ex$ d'où $ex = 0$. Donc de $(e+x)^2 = e+x$, nous déduisons $x = xe+x^2$. De cette dernière égalité, on déduit $xex + x^3 = x^2$, d'où $x^3 = x^2$ et x^2 est un idempotent. Comme $ex^2 = 0$, l'hypothèse faite implique $x^2 = 0$. Donc $x = xe$ et I_e est inclus dans Ae .

Soient x et y deux éléments de I_e :

$(e+x-y)^2 = e+e(x-y) + (x-y)e + (x-y)^2 = e + (x-y) + (x-y)^2$, car on a $x = xe$, $y = ye$, $ex = ey = 0$. D'autre part $(x-y)^2 = -xy - yx$, puisque $x^2 = y^2 = 0$. Mais $xy = xey = 0 = yex = yx = 0$. Donc $e + x-y$ est un idempotent non nul car $e(e+x-y) = e$; et I_e est un sous groupe.

Soit $x \in I_e$ et soit z quelconque dans A ; $e + ez-eze$ est un idempotent non nul, donc

$$e(z+ez - eze) = e = e + ez - eze, \text{ et } ez = eze.$$

Alors $(e+xz)^2 = e + exz + xze + xzxz = e + xze + xzxz$
 $= e + xeze + xezxz$ (car $x = xe$, $ex = 0$) $= e + xez + xezexz = e + xz$
 et ainsi I_e est un idéal à droite et par symétrie un idéal bilatère.

THEOREME 8.12. Soit e un idempotent non nul d'un anneau A .

Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- (a) pour tout f , idempotent non nul, $ef = e$.
- (b) $I = \{x \in A ; e + x \text{ est un idempotent non nul}\}$ est un idéal bilatère de A , contenu dans Ae .
- (c) $I = \{x \in A ; e + x \text{ est un idempotent non nul}\}$ est un idéal bilatère de A , contenu dans l'annulateur à droite de Ae ($0 \cdot Ae$).
- (d) L'ensemble E^* des idempotents non nuls de A est un zéro-demi-groupe à gauche (i.e. $\forall f \in E^*, \forall g \in E^*, fg = f$).

Nous venons de voir dans le Lemme 8.11 que (a) implique (b).

(b) $\implies$ (c) : si $(e+x)^2 = e+x$, on a $ex + xe + x^2 = x$ et comme d'après (b) $xe = x$, $ex + x^2 = 0$. Mais nous pouvons appliquer le lemme 8.8. et alors $x^2 = 0$. Donc $ex = 0$ et on a bien le résultat voulu : I est inclus dans $0 \cdot Ae$.

(c) $\implies$ (d) : Soit f un idempotent non nul ; $(f-e)$ appartient à I , donc $e(f-e) = 0$ et $ef = e$. De plus nous pouvons appliquer le Lemme 8.9. et par suite $fe = f$. Donc d'après la Proposition 8.10., $fg = feg = fe = f$ si g est un idempotent non nul. Ainsi l'ensemble des idempotents non nuls est un zéro-demi-groupe à gauche. Comme (d) $\implies$ (a) trivialement, nous avons établi le théorème.

Rappelons que sur les idempotents E d'un demi-groupe ou d'un anneau on peut toujours définir une relation d'ordre (appelée ordre de Rees), $\leq$: $e \leq f \iff e = ef = fe$. Du théorème précédent, il résulte en particulier, qu'un élément $e = e^2$, non nul, plus petit élément de E^* pour cette relation d'ordre est nécessairement l'unique idempotent non nul.

Terminons en donnant un exemple d'anneau dans lequel les conditions du Théorème précédent sont satisfaites. Soit R un anneau unitaire intègre, d'élément unité 1 et soit $A = R \times R$ l'ensemble des couples (x,y) , $x \in R, y \in R$, sur lequel nous définissons les deux opérations :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \text{ et } (x,y)(x',y') = (xx',yx')$$

A devient alors un anneau dont les idempotents non nuls sont de la forme $(1,x)$, $x \in R$. Comme $(1,x)(1,x') = (1,x)$, les idempotents non nuls forment bien un zéro-demi-groupe à gauche.

REMARQUE : Les conditions du Théorème 8.12. ne peuvent être vérifiées dans un anneau unitaire, car si $e = e^2$, $e(1-e) = 0$ en désignant par 1 l'unité de l'anneau et comme $1-e$ est aussi un idempotent, la condition a) ne peut être remplie.

CHAPITRE 9

ANNEAUX DONT UNE PUISSANCE EST UNE SOMME DE CORPS

Dans le Chapitre 2, nous avons étudié les demi-groupes dont une puissance est un idéal 0-minimal (à gauche) et plus particulièrement le cas où cet idéal est un groupe (avec zéro). Nous avons alors vu que ces demi-groupes S s'exprimaient assez facilement en fonction du demi-groupe nilpotent S/S^n et de S^n , si S^n était idéal 0-minimal à gauche, ou un groupe. De plus, leur structure, du point de vue des idéaux était assez voisine de celle des demi-groupes nilpotents (Corollaire 2.22, Lemme 2.16).

Par analogie, nous allons examiner ici le cas des anneaux dont une puissance est un corps, non nécessairement commutatif, ou mieux est un composé direct de corps. Ces derniers anneaux sont appelés K -anneaux. Nous en donnons plusieurs propriétés et montrons par exemple que dans ces anneaux tout idéal premier est maximal. De plus nous les caractérisons dans le cas abélien : ils sont somme directe d'un anneau nilpotent et d'un anneau, module semi-simple.

Les résultats de ce chapitre ont été exposés au Séminaire P. Dubreil-M.P. Malliavin au cours de l'année 1974-1975.

§1 Anneaux K-potents

DEFINITION 9.1. : Un anneau A est dit K-potent, si l'une de ses puissances est un corps, c'est-à-dire $A^n = K$ où K est un corps, sous anneau de A .

PROPOSITION 9.2. : Un anneau A est un K-potent si et seulement si son demi-groupe multiplicatif est G^0 -potent.

(Pour la définition de G^0 -potent, nous renvoyons au Chapitre 2)

La condition est évidemment nécessaire. Supposons maintenant que A est un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est G^0 -potent ; $A^n = G^0$, groupe avec zéro. Montrons que G^0 est aussi un sous groupe additif de A . Soient x_1 et x_2 deux éléments non nuls (sinon il n'y a rien à démontrer) de G^0 , et considérons la différence $x_1 - x_2$. On a, puisque x_1 et x_2 appartiennent à $G^0 = A^n$, $x_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ et $x_2 = y x_1$, avec $y \in G^0$, d'où $x_1 - x_2 = (a_1 - y a_1) a_2 \dots a_n$, et $x_1 - x_2$ est élément de G^0 .

THEOREME 9.3. : Un anneau A est K-potent si et seulement si A est isomorphe au produit direct d'un corps et d'un anneau nilpotent.

Si $A^n = K$, où K est un corps, désignons par B l'annulateur à gauche de K , $B = \{b \in A ; bK = 0\}$. B est un idéal bilatère, et $B \cap K = 0$. D'autre part, B est encore égal à $\{b \in A ; be = 0\}$ si e désigne l'unité du corps K . Comme B^n est contenu dans $B \cap K$, B est un anneau nilpotent. Montrons que A est somme directe de B et de K : il suffit de remarquer que tout élément x s'écrit sous la forme $x = xe + (x - xe)$, avec xe dans K et $x - xe$ dans B . Donc A est isomorphe au produit direct $K \times B$. La réciproque est immédiate.

(On remarque ainsi que la structure des anneaux K-potents est beaucoup plus précise que celle des demi-groupes G^0 -potents).

On peut comme dans le cas des demi-groupes, déterminer les idéaux d'un anneau K-potent. D'après la représentation $A = K \oplus B$, tous les idéaux sont de la forme $K \oplus J$, où J est un idéal de B , ou bien sont égaux à un idéal de B .

On a aussi les résultats suivants :

PROPOSITION 9.4. : Dans un anneau K-potent, si I est un idéal bilatère [à gauche, à droite], distinct de l'anneau, il existe un élément x n'appartenant pas à I , tel que $I + \sum \mathbb{Z}x$ soit encore un idéal bilatère [à gauche, à droite].

D'après la forme des idéaux d'un anneau K-potent que nous venons de donner ci-dessus il suffit de démontrer cette propriété dans le cas d'un anneau nilpotent.

Soit donc I un idéal bilatère, par exemple, d'un anneau A nilpotent, $I \neq A$.

Il faut démontrer qu'il existe $x \notin I$, tel que $I + \sum \mathbb{Z}x$ soit encore un idéal.

Comme $I + \sum \mathbb{Z}x$ est manifestement un sous-groupe additif pour tout x , il suffit de montrer que, pour tout a de A , les éléments ax et xa appartiennent à I , pour un certain x , $x \notin I$. Le raisonnement est le même par conséquent que dans le cas d'un demi-groupe, et nous renvoyons à la Proposition 1.3. du Chapitre 1 pour la démonstration.

COROLLAIRE. : Un anneau nilpotent noethérien à gauche (à droite) est de la forme $\sum \mathbb{Z}x_1 + \sum \mathbb{Z}x_2 + \dots + \sum \mathbb{Z}x_n$.

En effet, si A est un anneau nilpotent, noethérien à gauche, en appliquant la proposition précédente à l'idéal 0 , on trouve qu'il existe un élément x_1 tel que $\sum \mathbb{Z}x_1$ est un idéal. Et l'on peut construire une suite croissante d'idéaux $\sum \mathbb{Z}x_1$, $\sum \mathbb{Z}x_1 + \sum \mathbb{Z}x_2$, etc., et comme A est noethérien, $A = \sum \mathbb{Z}x_1 + \sum \mathbb{Z}x_2 + \dots + \sum \mathbb{Z}x_n$.

§2 Généralisation de la notion d'anneau K-potent

DEFINITION 9.5. : Un K-anneau est un anneau A pour lequel il existe un entier n tel que A^n est somme directe de corps, idéaux de A^n .

Si A^n est somme directe (ou composé direct) de corps, nous noterons

$A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$. De plus les K_i peuvent être considérés comme idéaux minimaux de

A, car nous avons $A^n = A^{2n}$; $A^n K_i = K_i$, d'où $AK_i = K_i$.

Si $A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$, tout élément de A^n est donc somme finie d'éléments $k_{i_1}, \dots, k_{i_n}$ avec $k_{i_j} \in K_{i_j}$, et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

PROPOSITION 9.6. : Si A est un K-anneau, tout idéal bilatère de A est ou nilpotent ou est un K-anneau.

Supposons donc que $A^n = \bigoplus_i K_i$, et soit L un idéal bilatère de A, tel que L^p est non nul pour tout entier p. Les idéaux minimaux K_i sont donc tels que $K_i \cap L^n$ est égale à K_i ou à 0. Soit y un élément particulier de L^n ; y appartient à A_n , et par conséquent il s'écrit $y = \sum_{i=1}^p k_i$, avec $k_i \in K_i$. Comme les K_i forment une somme directe, on a encore, si e_i désigne l'unité du corps K_i , $ye_i = k_i$, puisque $k_j e_i = 0$ si $j \neq i$. D'où $y = \sum_{i=1} ye_i$, et chaque ye_i appartient à $L^n \cap K_i$. Comme L^n est non nul, et comme tout élément de L^n est somme d'éléments de $L^n \cap K_i$, il existe au moins des indices $j, j \in J \subset I$, tels que $K_j \cap L^n = K_j$. Et l'on a

$$\bigoplus_{j \in J} (K_j \cap L^n) = \bigoplus_{j \in J} K_j = L^n.$$

PROPOSITION 9.7. : Toute image homomorphe d'un K-anneau est encore un K-anneau ou un anneau nilpotent.

Soit L un idéal bilatère d'un K-anneau A, soit $A' = A/L$, et soit φ l'homomorphisme canonique de A sur A' . Si K_i est un corps, idéal bilatère de A, $\varphi(K_i)$ est encore un idéal de A' et il est ou égal à 0, ou est un corps, idéal de A' .

Donc $A'^n = \varphi(A^n)$ est de façon immédiate ou égal à 0, ou somme directe des $\varphi(K_i) = K'_i$.

THEOREME 9.8. : Tout idéal L d'un K-anneau A est somme directe d'un idéal nilpotent et de l'une de ses puissances L^n (l'un de ces facteurs pouvant être nul)

Si L est un idéal nilpotent, le théorème est immédiat : sinon d'après

la Proposition précédente, comme l'anneau A est un K -anneau,

$$A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i \quad \text{et} \quad L^n = \bigoplus_{j \in J} K_j, \quad 0 < J \subseteq I.$$

Soit $B = \{x \in L; xL^n = 0\}$. Comme L est un idéal bilatère, B est un idéal bilatère, et de plus $B \cap L^n = 0$: en effet, soit $e_j, j \in J$, la famille des éléments unités des corps $K_j, j \in J$, tels que $L^n = \bigoplus_{j \in J} K_j$; on a nécessairement $xe_j = 0$ pour tout j , si x est élément de B . Mais si x appartient à L^n , $x = \sum_{i=1}^k xe_i$ (voir Proposition 9.6.) donc si $x \in B \cap L^n$, $x = 0$.

Montrons maintenant que $L = B \oplus L^n$; soit $x \in L$, alors

$$x^n \in L^n \quad \text{et} \quad x^n = \sum_{i=1}^k x^n e_i.$$

Soit $y = x - \sum_{i=1}^k xe_i$; montrons que y est un élément de B , c'est-à-dire que, pour tout $j, j \in J$, avec $L^n = \bigoplus_{j \in J} K_j$, $ye_j = 0$. Tout d'abord, $ye_i = 0$ pour $i \in \{1, \dots, k\} \subseteq J$. Si e_j est tel que $j \notin \{1, \dots, k\}$, c'est-à-dire que x^n n'a pas de composante sur K_j , alors $ye_j = xe_j$ et $x^n e_j = 0$. Mais K_j étant un idéal bilatère de l'anneau A , $xe_j = e_j x = e_j xe_j$, donc $(xe_j)^n = x^n e_j$, et $x^n e_j = 0$ implique, dans le corps K_j , $xe_j = 0 = (ye_j)$.

L'élément y appartient donc à B . De plus, B^n est nécessairement nul puisque B^n est inclus dans $L^n \cap B = 0$.

L'idéal B est nul, si et seulement si, $L = L^n$ est somme de corps.

COROLLAIRE 9.9. : Le radical de Jacobson d'un K -anneau A est nilpotent.

Soit $J(A)$ le radical de Jacobson. Il est ou nilpotent ou contient des idéaux qui sont des corps, donc dans ce dernier cas, il contient au moins un idempotent non nul, ce qui est impossible. Donc le radical est nilpotent.

COROLLAIRE 9.10. : Le radical $J(A)$ d'un K -anneau A est un sommant direct de A , et $A/J(A)$ est isomorphe à A^n .

D'après le Théorème 9.8., $A = A^n \oplus N$, où nécessairement N est le radical nilpotent, et où A^n est somme directe discrète de corps. Mais N est égal à $J(A)$ d'après le Corollaire précédent. D'où le résultat énoncé.

Ainsi un K-anneau A est égal à $J(A) \oplus A^n$.

PROPOSITION 9.11. : Dans un K-anneau, tout idéal premier est maximal.

Soit L un idéal premier ; d'après la Proposition 9.6., L est ou nilpotent ou est un K-anneau.

Supposons tout d'abord que L est nilpotent, $L^p = 0$. Alors si $A = A^n \oplus N$, où N est le radical nilpotent et où $A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$, K_i corps, nécessairement $L \subseteq N$. Si $|I| \geq 2$ et si K_1 et K_2 sont deux corps, idéaux minimaux de A , $K_1 K_2 = 0 \subseteq N$, d'où K_1 ou K_2 est contenu dans L , idéal premier, ce qui ne peut être. Donc $|I| = 1$ et $A = K_1 \oplus N$ avec $K_1 N = 0$, et comme K_1 n'est pas contenu dans L , nécessairement N l'est, et $N = L$ et L est tel que $A/L \cong K_1$, donc L est maximal.

Supposons que L est un K-anneau. Si $A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$, on a avec les résultats et les notations de la Proposition 9.6., $L^n = \bigoplus_{j \in J} K_j$, $J \subseteq I$, et $L = L^n \oplus B$, où B est un idéal nilpotent.

S'il existe deux corps K_1 et K_2 tels que K_1 et K_2 ne soient pas contenus dans L^n , ceci contredit le fait que $K_1 K_2 = 0 \subseteq L$ implique K_1 ou $K_2 \subseteq L$. Il existe alors au plus un corps K tel que $K \subseteq A^n$ et tel que $K \not\subseteq L^n$. Si $A^n = L^n$, $A = L$, puisque L est premier. Donc il existe exactement un seul corps K_1 tel que $K_1 \subseteq A^n$ et $K_1 \not\subseteq L^n$, et $A = (\bigoplus_{i \in I} K_i) \oplus N$ et $L = (\bigoplus_{i \in I, i \neq 1} K_i) \oplus B$; $N K_1 = 0$, donc N est contenu dans L et par suite $B = N$ et $A = L \oplus K_1$, et L est bien maximal.

Ainsi les propriétés énoncées dans les Corollaire 9.9. et Proposition 9.11. prouvent que les K-anneaux généralisent dans une certaine mesure les anneaux artiniens.

REMARQUE : Dans un K-anneau, tous les idempotents sont centraux.

Si A est un K-anneau, et si e est un idempotent, $e \in A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$ et $e = k_{i_1} + \dots + k_{i_p}$, avec $k_{i_j} \in K_{i_j}$. Nécessairement, $e = e_1 + \dots + e_p$, avec e_i élément unité de K_{i_i} . Mais $e_i x = e_i x e_i$ puisque K_{i_i} étant idéal bilatère,

$e_i x$ appartient à K_i . Donc $e_i x = x e_i$ pour tout x de l'anneau.

Dans le cas commutatif, nous pouvons donner une autre caractérisation des K-anneaux.

THEOREME 9.12. : Un anneau commutatif est un K-anneau, si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) le radical de Jacobson $J(A)$ est nilpotent ;
- (b) le radical $J(A)$ est facteur direct de l'anneau A ;
- (c) tout idéal de $A/J(A)$ est facteur direct.

Remarquons tout d'abord que la propriété (c) précédente peut encore s'énoncer $A/J(A)$ est un module semi-simple au sens de Bourbaki [4] ; mais comme l'anneau $A/J(A)$ n'est pas unitaire, il n'a pas les propriétés données dans [4] pour les anneaux semi-simples.

En particulier, il n'est pas de longueur finie.

Démonstration : Il est facile de vérifier que ces conditions sont nécessaires. Les conditions (a) et (b) résultent des Corollaires 9.10. et 9.11. Puisque $A/J(A)$ est isomorphe à une somme directe de corps, il est bien semi-simple en tant que module. Inversement, la condition (b) permet d'écrire $A = J(A) \oplus A'$, avec A' semi-simple. Dans A' , tout idéal est facteur direct, donc A' est somme de ses idéaux minimaux. Ces derniers sont des corps puisque $A/J(A)$ ne peut admettre d'idéal nilpotent et que l'anneau est commutatif.

Ainsi les K-anneaux commutatifs sont caractérisés comme somme directe d'un anneau nilpotent N et d'un anneau B , B module semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE

Note : Pour les articles insérés, les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie donnée à la fin de l'article.

- [1] ALIMOV N. : Sur les demi-groupes ordonnés. Isv. Akad. Nauk. SSSR Serija Mat. t.14, 1950, p.569-576.
- [2] BEHRENS E.A. : Partially ordered completely simple semigroups. Journal of Algebra 23, 1972, p.413-437.
- [3] BIRKHOFF G. : Lattice theory A.M.S. Prov. 1967, 3ème édition.
- [4] BOURBAKI N. : Algèbre. Ch. 8, Modules et anneaux semi-simples. Paris Hermann 1958.
- [5] CLIFFORD A.H. : Totally ordered commutative semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. 64 - 1958, p.305-316.
- [6] CLIFFORD A.H. : Naturally ordered commutative semigroups. Amer. J. Math. 76 - 1954, p.631-646.
- [7] CLIFFORD A.H. and G.B. PRESTON : The algebraic theory of semigroups, vol I et II A.M.S. Prov. 1961.
- [8] DUBREIL-JACOTIN M.L. : Quelques propriétés des σ -demi-groupes. Ac. Lincei. Rend. Sc.Fis.e. nat. Vol 46, Nove. 1966, p.279-289.
- [9] FUCHS L. : Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1966.
- [10] FUCHS L. : Uber die Ideale arithmetischer Ringe. Comm. Math. Helv. 23 - p.334-341.
- [11] GABOVIC E. Ja. : Demi groupes périodiques totalement ordonnés (en Russe). Uspehi Mat. Nauk. 23, 1968, p.225-226.
- [12] GABOVIC E. Ja and RUBANOVIC G. J. : The lattice of convex subgroupoids. Semigroup Forum Vol.5, n°1, 1972, p.54-64.
- [13] GABRIEL P. et R. RENTSCHLER : Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C.R. Acad. Sc. Paris 265, 1967, p.712-715.
- [14] GORDON R. et J.C. ROBSON : Krull dimension. Memoirs of Amer. Math. Soc. t133, 1973.

- [15] GREEN J.A. and D. REES : On semigroups in which $x^n = x$. Proc. Camb. Phil. 48, 1952, p.35-40.
- [16] ISBELL J.R. : On the multiplicative semigroup of a commutative ring, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) p.908-909.
- [17] JACOBSON N. : The theory of Rings, A.M.S. 1966, 3ème édition.
- [18] KHION Ja. V. : Sur les demi-groupes partiellement ordonnés, dans lesquels les sous demi-groupes convexes propres sont disjoints (en Russe). Izv. Akad. Nauk. SSSR, Serija Mat. 27, 1963, p.67-74.
- [19] KOGALOVSKIJ S.R. : Dok. Akad. Nauk. 136 (1961) p.1291-1295.
- [20] KREISEL G. et J.L. KRIVINE : Eléments de Logique mathématique. Théorie des modèles. Dunod Paris 1967.
- [21] LALLEMENT G. : Sur l'irréductibilité de certains monoïdes finis. C.R. Acad. Sc. Paris t.268 (Juin 1969) p.1313-1316.
- [22] LANG S. : Algebra (Addison-Wesley).
- [23] PEINADO R.E. : On semigroups admitting ring structure, Semigroup Forum, 1 (1970), p.189-208.
- [24] PERRIN D. : Codes Biprécédés et Groupes de Permutations, Thèse Univ. Paris VII (1975).
- [25] RHODES J. and K. KHROHN : Algebraic theory of machines, languages, and semigroups Ed. M. Arbib. New-York and London Acad. Press 1968.
- [26] SAITO T. : Ordered idempotent semigroups, J. Math. Soc. Japan (14) 1962. p.150-169.
- [27] SAITO T. : The orderability of idempotent semigroups. Semigroup Forum Vol.7 1974, p.264-285.
- [28] SAITO T. : Ordered completely regular semigroups. Pacif. J. Math. Vol.14, 1964, p.295-308.
- [29] SVERDLOVSK'S : Note book (unsolved problems of the theory of semigroups) en Russe. Sverdlovsk 1969. Uralsky 6 Gosudarstvennyj Universitet.

[30] TAMURA T. : The theory of construction of finite semigroups. Finite unipotent semigroups Osaka Math. J. 10 (1958), p.191-204.

[31] YAMADA M. and T. TAMURA : Note on finite commutative Nilsemigroups. Port. Math. 28 (1969) p.189-203.

---.---.---.---

[M₁] MERLIER Th. : Sur les idéaux des demi-groupes nilpotents. Semigroup Forum Vol.5, 1973, p.236-242.

[M₂] MERLIER Th. : Généralisation de la notion de demi-groupe nilpotent. Application aux anneaux. Sem. Dubreil (Algèbre) 28ème année, 1974-75, n°18, 9p.

[M₃] MERLIER Th. : Sur les demi-groupes réticulés et les σ -demi-groupes. Semigroup Forum Vol.2 (1971), p.64-70.

[M₄] MERLIER Th. : Czech. Math. Journal 24 (99) 1974, p.403-410. Nildemi-groupes totalement ordonnés.

[M₅] MERLIER Th. : Sous demi-groupes convexes dans les demi-groupes totalement ordonnés Sém. Dubreil-Pisot 23ème 1969-70. Demi-groupes. Nice n°7. Sém. Dubreil-Pisot 24ème 1970-71. n°2.

[M₆] MERLIER Th. : Sur les demi-groupes totalement σ -simples. Sém. Dubreil-Pisot 24ème 1970-71. n°4.

[M₇] MERLIER Th. : Quelques propriétés des idempotents d'un anneau. C.A. Acad. Sc. Paris t.279 (8 Juillet 1974).

[M₈] MERLIER Th. : Sur les σ -bandes finies et les demi-groupes totalement ordonnés σ -simples. Semigroup Forum Vol.4, 1972, p.124-149.

