Université de Paris
Faculté des Sciences d'Orsay

GEOMETRIE CONFORME

par

R. OSSERMAN

Cours professé à la Faculté des Sciences à Orsay (1965-1966)
Rédigé par : Mesdames Sylviane Bergeron et
Pierrette Sentenac

Secrétariat de Mathématiques d'Orsay

1967

Université de Paris
Faculté des Sciences d'Orsay

GEOMETRIE CONFORME

par

R. OSSERMAN

Cours professé à la Faculté des Sciences à Orsay (1965-1966)
Rédigé par : Mesdames Sylviane Bergeron et
Pierrette Sentenac

Secrétariat de Mathématiques d'Orsay
1967

Première partie

Deuxième partie

<u>Première partie</u>

<u>Chapitre</u> 1

§ 1. – Rappels d'algèbre linéaire

§ 2. – Transformations différentiables et transformations conformes

§ 3. – Transformations différentiables du plan.

§ 1.– 1. <u>Conventions</u>

– $\mathcal{M}(m , n)$ désigne l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes

– Un élément de $\mathcal{M}(m , n)$ sera souvent désigné par l'expression : une matrice (m , n)

– m^i_j désigne le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M

– On adoptera la convention d'Einstein : $\sum_i a^i_j\, b^k_i = a^i_j\, b^k_i$

– Soit A une matrice, de coefficient a^i_j, on désignera par $\tilde{a}^i_j$ le coefficient de ${}^tA$.

2. <u>Théorème</u>.– <u>Toute matrice</u> $M \in \mathcal{M}(m , n)$, <u>réelle</u>, <u>peut-être mise sous la forme</u> :

$$M = O_1\, D\, O_2 \qquad (2.1)$$

<u>où</u> O_1 <u>désigne une matrice orthogonale</u> (m , m), O_2 <u>désigne une matrice orthogonale</u> (n , n) <u>et</u> D <u>une matrice diagonale</u> (m , n) <u>c'est à dire dont les éléments</u> d^i_j <u>sont nuls si</u> $i \neq j$.

<u>Preuve</u>.–

Rappel : Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable. Posons $G = {}^tMM$ alors G est une matrice (n , n), symétrique, et positive semi-définie.

En effet, soit $x \in E^n$, X la matrice associée $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

Soit T la transformation linéaire : $E^n \longrightarrow E^m$ associée à M.

Posons $y = T(x)$, Y étant la matrice $\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ on a

$$^tXGX = g_j^k \, x^k \, x^j \; .$$

Dire que G définit une forme quadratique semi-définie positive, c'est dire que

$$g_j^k \, x_1^k \, x_1^j \geqslant 0.$$

Quel que soit $x \in E^n$ on a :

$$^tX \; G \; X = {}^tX \; {}^tMM \; X = {}^t(MX) \; MX = {}^tYY = \sum_i (y^i)^2 \geqslant 0.$$

Il existe une matrice orthogonale $(n \, , \, n)$ O_3 telle que $^tO_3 \; G \; O_3$ soit diagonale.

Posons alors $A = M \; O_3$. Alors $A \in \mathcal{M}(m \, , \, n)$ et $B = {}^tAA$ on a

$$B = {}^t(M \; O_3) \; M \; O_3 = {}^tO_3 \; G \; O_3$$

donc B est une matrice diagonale.

Mais on a

$$b_j^i = \tilde{a}_k^i \; a_j^k = \sum_k \; a_i^k \; a_j^k \quad \text{où} \quad \tilde{a}_k^i = a_i^k$$

donc

$$\sum_k a_i^k \; a_j^k = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

ce qui signifie que les vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux. Si $\left\{ \vec{e}_i \right\}_{i=1,\ldots,n}$ désigne la base canonique de E^n, les vecteurs colonnes de A sont les matrices $(n \, , \, 1)$ dont les coefficients sont donnés par les composantes dans la base canonique des vecteurs $A(\vec{e}_j)$.

On peut toujours permuter par σ les vecteurs $\vec{e}_j$ de telle sorte que pour $i = 1, \ldots, \nu$ on ait $A(\overrightarrow{e_{\sigma(i)}}) \neq 0$ et pour $i = \nu+1, \ldots, n$ on ait $A(\overrightarrow{e_{\sigma(i)}}) = 0$ les vecteurs

$$\vec{f}_i = \frac{A(\vec{e}_i)}{|A(\vec{e}_i)|}$$

pour $i = 1, \ldots, \nu$ sont alors des vecteurs orthonormés.

Complétons ce système de vecteurs de façon à avoir une base $\left\{\overrightarrow{f_i}\right\}_{i=1, \ldots, n}$ orthonormée de E^n.

Dans cette nouvelle base A se lit comme une matrice diagonale D. Les matrices des changements de base effectués étant toutes orthogonales, on a

$$A = {}^t0_4\, D\, 0_4 = M\, 0_3 \Rightarrow M = {}^t0_4\, D\, (0_4\, {}^t0_3) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Remarque</u>.- Si M est une matrice carrée régulière la démonstration se simplifie.

2.1. <u>Corollaire</u>.- La matrice D peut s'écrire : $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ et alors

$$\text{dét } G = \prod_{i=1}^{n} d_i^2 .$$

<u>Preuve</u>.- On a

$$\det G = \det({}^tMM) = \det\left[{}^t(0_1\, D\, 0_2)(0_1\, D\, 0_2)\right] = \det\left[{}^t0_2\, D^2\, 0_2\right] = \det D^2 \det {}^t0_2 \det 0_2 =$$

$$= \det D^2 = \prod_{i=1}^{n} d_i^2 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

2.2. <u>Corollaire</u>.- Soit $T : E^n \longrightarrow E^m$ une application linéaire de matrice M. Alors tout volume n dimensionnel est multiplié par $\sqrt{\det G}$ sous la transformation T.

<u>Preuve</u>.- T est la composition des trois transformations T_1, T_2, T_3 associées respectivement à 0_1, D et 0_2 dans la formule (2.1.) Les transformations T_1 et T_3 étant orthogonales conservent la distance donc le volume.

Quant à la transformation T_2 c'est une suite d'affinités donc chacune multiplie la longueur dans une direction donnée par $|d_i|$ et conserve la longueur des directions orthogonales. Si bien que l'effet total multiplie le volume par

$$\prod_{1}^{n} |d_i| = \sqrt{\det G} .$$

<u>Remarque</u>.- Les quantités d_i^2 sont les valeurs propres de la matrice $G = {}^tMM$.

3. Théorème.– Soit $T : E^n \longrightarrow E^m$, linéaire, à matrice M.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une constante λ telle que, par T toute distance est multipliée par λ.

(b) $\langle TX_1 , TX_2\rangle = \lambda^2 \langle X_1 , X_2\rangle$; $\langle X , Y\rangle$ désignant le produit scalaire de X et de Y

(c) Les vecteurs colonnes de M sont deux à deux orthogonaux, et ont la même longueur λ.

(d) $G = {}^tMM = \lambda^2 I$.

(e) Dans la représentation du théorème précédent on a $d^i_j = \pm \lambda\delta^i_j$.

Si $\lambda \neq 0$ on a de plus

(f) Tout angle est conservé par T.

(g) L'image inverse de la sphère $|Y| = 1$ est la sphère $|X| = \frac{1}{\lambda}$.

Preuve.– (a) $\Longleftrightarrow$ (b). $|X|^2 = \langle X , X\rangle$ et $d(X , Y) = |X - Y|$.

Supposons (a). $\exists\lambda$ telle que $d(TX , TY) = \lambda d(X , Y)$. Donc, en particulier, $d(TX , T.0) = \lambda\, d(X , 0)$ ce qui s'écrit encore $|TX| = \lambda |X|$.

Donc $$|TX - TY|^2 = |T(X - Y)|^2 = \lambda^2 |X - Y|^2$$

ou encore $$\langle TX - TY , TX - TY\rangle = \lambda^2 \langle X-Y , X-Y\rangle .$$

Développons, $$\langle TX,TX\rangle + \langle TY,TY\rangle - 2\langle TX,TY\rangle = \lambda^2(\langle X,X\rangle + \langle Y,Y\rangle - 2\langle X,Y\rangle)$$

simplifions, on obtient $\langle TX , TY\rangle = \lambda^2 \langle X , Y\rangle$ donc (a) $\Longrightarrow$ (b).

Supposons (b) $$\langle TX , TY\rangle = \lambda^2 \langle X , Y\rangle$$
$$\Longrightarrow |TX| = \lambda |X|$$
$$\Longrightarrow |T(X - Y)| = \lambda |X - Y| \quad \text{soit (a).}$$

(c) $\Longleftrightarrow$ (d).

Posons $M = (m^i_j)$

$G = (g^i_j)$

alors $$g^i_j = \tilde{m}^i_k \, m^k_j = \sum_k m^k_i \, m^k_j$$

on a M satisfait (c) $\Longleftrightarrow \sum_k m^k_i \, m^k_j = \lambda^2 \delta^j_i \Longleftrightarrow$ (d).

<u>Prouvons que</u> (e) $\Longrightarrow$ (d).

D'après le théorème 2 on a $M = O_1 \, D \, O_2$, qu'on va plutôt écrire $M = A \, D \, B$, on a $G = {}^tMM = {}^tB \, D^2 \, B$ or $D^2 = \lambda^2\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ d'après (e) donc $G = \lambda^2 \, {}^tBB = \lambda^2 I$.

<u>Prouvons que</u> (d) $\Longrightarrow$ (a).

On a $G = {}^tMM = \lambda^2 I$ et $|MX|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX \, G \, X = \lambda^2 \, {}^tXX = \lambda^2 |X|^2$ ce qui est (a).

<u>Prouvons que</u> (a) $\Longrightarrow$ (d).

On a $|TX - TY| = \lambda \, |X - Y|$

$\Longrightarrow |TX| = \lambda |X| \Longrightarrow |TX|^2 = \lambda^2 |X|^2$

donc ${}^t(MX)MX = \lambda^2 \, {}^tXX$ donc

${}^tX \, G \, X = {}^tX \, \lambda^2 \, I \, X \Rightarrow G = \lambda^2 \, I$.

<u>Prouvons que</u> (a) $\Longrightarrow$ (e).

$$d(TX \, , \, TY) = \lambda d(X \, , \, Y), \quad M = O_1 \, D \, O_2 \, .$$

Si Δ est la transformation associée à D, O_1 et O_2 conservant les distances on a

$$d(\Delta X \, , \, \Delta Y) = \lambda \, d(X \, , \, Y)$$

Δ joue le rôle de T, Δ satisfait à (a) donc à (d) et on a ${}^t\Delta\Delta = \lambda^2 I$ ce qui n'est autre que (e).

On a démontré (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e).

<u>Supposons maintenant</u> $\lambda \neq 0$

Définissons l'angle de deux vecteurs par $\cos(X,Y) = \dfrac{\langle X,Y \rangle}{|X| \, |Y|}$.

<u>Montrons que</u> (b) $\Longrightarrow$ (f)

Il faut montrer que $\cos(TX \, , \, TY) = \cos(X \, , \, Y)$.

ou que $\dfrac{\langle TX\ ,\ TY\rangle}{|TX|\ |TY|} = \dfrac{\langle X\ ,\ Y\rangle}{|X|\ |Y|}$ or, d'après (b) $\dfrac{\langle TX\ ,\ TY\rangle}{|TX|\ |TY|} = \dfrac{\lambda^2 \langle X\ ,\ Y\rangle}{\lambda^2\ |X|\ |Y|} = \dfrac{\langle X\ ,\ Y\rangle}{|X|\ |Y|}$.

Montrons que (f) $\Longrightarrow$ (b)

Supposons que (b) ne soit pas vrai, c'est à dire que (e) ne soit pas vrai ; alors il existe i et j, $i \neq j$, tels que $d_i \neq d_j$.

On a alors

$$D(e_i + e_j) = d_i e_i + d_j e_j$$

$$D(e_i - e_j) = d_i e_i - d_j e_j$$

et $D(e_i + e_j)$ non orthogonal à $D(e_i - e_j)$ par conséquent. Or $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux.

Donc non (b) $\Longrightarrow$ non (f).

Montrons que (g) $\Longleftrightarrow$ (d).

Posons $Y = MX$ on a $|Y| = 1 \Longleftrightarrow |MX| = 1 \Longleftrightarrow {}^t(MX)MX = 1 \Longleftrightarrow {}^tX\,G\,X = 1$.
L'image inverse de $|Y| = 1$ est donc ${}^tX\,G\,X = 1$ donc $G = \lambda^2\,I$, c'est à dire que l'image inverse de $|Y| = 1$ est la sphère $|X| = \dfrac{1}{\lambda}$.

3.1. Corollaire.- Si $m = n$, (a) est équivalent à (h) : $M = \lambda\, O_3$ où O_3 est orthogonale.

Preuve : (h) $\Longrightarrow$ (d), en effet,

$${}^tMM = \lambda^2\ {}^tO_3\ O_3 = \lambda^2\ I.$$

(d) $\Longrightarrow$ (h), car la transformation $\dfrac{T}{\lambda}$ conserve toute distance donc est orthogonale et on a $\dfrac{M}{\lambda} = O_3$. c.q.f.d.

§ 2.- Transformations differentiables et transformations conformes.

1. Définitions

Soit Δ un domaine $\subset E^n$, $F : \Delta \longrightarrow E^m$

Soit $x \in E^n$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$

Posons $y = F(x)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$

F <u>est de classe</u> r, <u>sur</u> Δ <u>ce qu'on note</u> $F \in C^r(\Delta)$

Si $\forall k = 1, 2, \ldots, n$; $y^k(x^1, \ldots, x^n) \in C^r(\Delta)$.

1.1.- F <u>est dite différentiable sur</u> Δ <u>si</u> $F \in C^r(\Delta)$ <u>avec</u> $r \geqslant 1$.

1.2.- <u>Une courbe</u> Γ <u>dans</u> E^m <u>est une application différentiable d'un intervalle</u> $I \subset \mathbb{R}$ <u>dans</u> E^m.

Γ est définie par $y(t)$ pour $t \in I$.

1.3.- <u>Le vecteur tangent à la courbe</u> $y(t)$ <u>au point</u> $y_o = y(t_o)$ <u>est le vecteur</u>

$$y'(t_o).1 = \left\{\frac{dy^1}{dt}(t_o).1 \,,\, \frac{dy^2}{dt}(t_o).1, \ldots, \frac{dy^m}{dt}(t_o).1\right\}.$$

[On convient de noter $y'(t)$ le vecteur $y'(t).1$ de E^m, quand aucune confusion n'est possible.]

Soit alors F une application différentiable de l'ouvert Δ de E^n dans E^m.

Soit $x(t)$ pour $t \in I$ une courbe dans Δ.

Soit $t_o \in I$, $x_o = x(t_o)$ et $y_o = F(x_o)$.

Par la transformation F, la courbe $x(t)$ a une image dans $F(\Delta) \subset E^m$. Et $y(t) = F[x(t)]$ est une application différentiable de I dans E^m donc une courbe de E^m et $y(t_o) = y_o$. Le vecteur tangent en y_o est alors, par définition

$$y'(t_o) = \left\{\frac{dy^1}{dt}(t_o), \ldots, \frac{dy^m}{dt}(t_o)\right\}.$$

Or

$$y'(t_o) = F'(x_o) \circ x'(t_o)$$

et

$$\frac{dy^i}{dt}(t_o) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_o)\,\frac{dx^j}{dt}\,(t_o).$$

Sous cette forme on voit que le vecteur tangent en y_o dépend du vecteur tangent en x_o mais pas de la courbe $x(t)$. La transformation $x'(t_o) \longrightarrow y'(t_o)$ est une transformation induite par F. Elle envoie les vecteurs tangents en x_o sur les vecteurs tangents en y_o.

C'est une transformation linéaire de E^n dans E^m, soit $M_{x_o} = (m_{x_o}{}^i{}_j)$ sa matrice, avec $m_{x_o}{}^i{}_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_o)$.

1.4.- La matrice M est appelée <u>matrice jacobienne</u> de F et la transformation linéaire induite, <u>différentielle de</u> F <u>en</u> x_o, et notée $d\,F_{x_o}$.

On a donc

$$d\,F_{x_o} \in \mathscr{L}(E^n ; E^m) \quad \text{et} \quad d\,F_{x_o}.(x'(t_o).1) = y'(t_o).1.$$

<u>Remarque</u>.

On peut introduire la différentielle de F en x_o d'une autre manière.

Soit F une application d'un ouvert Δ de E^n dans E^m.

Soit $x_o \in \Delta$.

Supposons qu'il existe $L_{x_o} \in \mathscr{L}(E^n ; E^m)$ telle que :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F(x) - F(x_o) - L_{x_o}(x)}{|x - x_o|} = 0 .$$

On démontre qu'alors L_{x_o} est unique et on dit que F est différentiable en x_o.

Si $F \in C^1$, $d\,F_{x_o} = L_{x_o}$.

'1.5.- Soit Δ un ouvert de E^n, $F : \Delta \longrightarrow E^m$, $F \in C^1(\Delta)$ supposons que $m \geqslant n$. F <u>est appelée immersion de</u> Δ <u>dans</u> E^m <u>si</u> $d\,F_x$ <u>est injective en tout point</u> x <u>de</u> Δ. Autrement dit, si M_x est de rang maximum, en tout point x de Δ.

<u>Notation</u>.-

Si on note $G_x = {}^tM_x M_x = (g_x{}^i{}_j)$. On a $g_x{}^i{}_j = \tilde{m}_x{}^i{}_k\, m_x{}^k{}_j =$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_x{}^k{}_i\, m_x{}^k{}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x)\, \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x)$$

ce qui peut encore s'écrire, si on désigne par $\dfrac{\partial y}{\partial x^i}(x)$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur-colonne de M_x

$$g_{x\,j}^{\,i} = \frac{\partial y}{\partial x^i}(x) . \frac{\partial y}{\partial x^j}(x) .$$

2. Longueur de la courbe $y(t)$ dans $F(\Delta)$.

On note M et G les matrices M_x et G_x associées à F.

Soit $x(t)$ pour $t \in [\alpha, \beta]$ une courbe dans Δ. Et $F \in C^1(\Delta)$; $F\,\Delta \longrightarrow E^m$. Δ ouvert de E^n. On a, en notant L la longueur de la courbe

$$L = \int_\alpha^\beta |y'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta |M.x'(t)|\,dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{{}^t x'(t).{}^t M.M.x'(t)}\;dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{{}^t x'(t).G.x'(t)}\;dt$$

ou, en développant

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_\ell^k \,\frac{dx^k}{dt}(t)\;.\;\frac{dx^\ell}{dt}(t)}\;\;dt.$$

3. Volume n-dimensionnel de $F(\Delta)$.

Soit F appartenant à $C^1(\Delta)$. En notant par $V(F(\Delta))$ ce volume on a

$$V(F(\Delta)) = \int_\Delta \sqrt{\det G}\;dx^1 \ldots dx^n$$

d'après le corollaire § 1. 2.2.

(Cette intégrale a un sens car G dépend continuement de x.)

4. Transformation conforme

4.1.- Une transformation conforme est une transformation différentiable qui conserve les angles. Alors il est clair que : F conforme $\Longleftrightarrow$ dF_x est une similitude.

4.2. Théorème.- Soit $F \in C^1(\Delta)$ $F : \Delta \longrightarrow E^m$ Δ étant un ouvert.

Alors : F conforme $\Longleftrightarrow G_x = \lambda^2(x).I$.

Preuve.- C'est le théorème 3 § 1.

<u>Interprétation géométrique.</u>

$$F \text{ conforme} \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x^i}(x) \perp \frac{\partial y}{\partial x^j}(x) \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\text{et} \quad \left|\frac{\partial y}{\partial x^i}\right| = \lambda \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

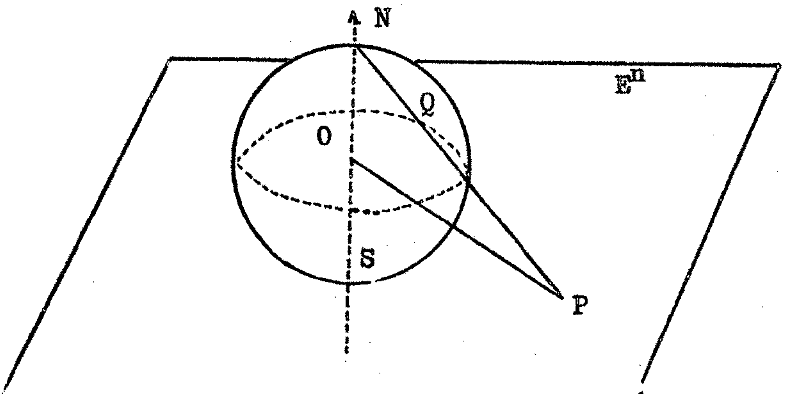
4.3.- <u>Exemple de transformation conforme</u> : <u>la projection stéréographique</u>.

Notons par S_n la sphère unité dans E^{n+1}.

On sait ce qu'est la projection stéréographique. Notons

$F_N : E^n \longrightarrow S_n - \{\text{pôle nord}\}$ la dite projection.

Explicitons F_N



On a $\overline{OQ} = \overline{ON} + \overline{NQ}$

avec $\overline{NQ} = \mu \overline{NP}$

donc $\overline{OQ} = \overline{ON} + \mu \overline{NP}$

$N = (0, 0, \ldots, 1)$

$P = (x^1, \ldots, x^n, 0)$

$Q = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1})$

donc $y = (0, 0, \ldots, 0, 1) + \mu(x^1, \ldots, x^n, -1)$. C'est à dire

$y = (\mu x^1, \mu x^2, \ldots, \mu x^n, 1-\mu)$. Or $y \in S_n \Rightarrow |y| = 1$ donc $\mu\left[\mu(|x|^2+1) - 2\right] = 0$

or $\mu \neq 0$ car $Q \neq N$. Donc $\mu = \dfrac{2}{|x|^2+1}$ si bien que la formule

$$y = \left(\frac{2x^1}{|x|^2+1}, \frac{2x^2}{|x|^2+1}, \ldots, \frac{2x^n}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right)$$

définit $F_N(x)$.

Si on calcule g_{ij}, on trouve $g_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$ où $\mu = \dfrac{2}{1+|x|^2}$, $g_{ij} = \dfrac{4}{[1+|x|^2]^2}\delta_{ij}$

Ce qui prouve que $F_N(x)$ est une transformation conforme.

Calcul de la transformation inverse

de $y^{n+1} = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$ on tire $|x|^2 + 1 = \dfrac{2}{1-y^{n+1}}$

d'où
$$x = \left(\frac{y^2}{1-y^{n+1}}, \frac{y^2}{1-y^{n+1}}, \ldots, \frac{y^n}{1-y^{n+1}}\right).$$

F est donc une bijection et même un homéomorphisme de E^n sur $S_n - \{0, 0, \ldots, 1\}$.

Calcul de la projection stéréographique de pôle Sud : F_S

Si on note par S la symétrie par rapport à E^n on a : $F_S = S \circ F_N$ d'où

$$y = \left(\frac{2x^1}{|x|^2 + 1}, \ldots, \frac{2x^n}{|x|^2 + 1}, \frac{1 - |x|^2}{|x|^2 + 1}\right).$$

F_S est un homéomorphisme de E^n sur $S_n - \{0, 0, \ldots, 0, -1\}$.

Inversion dans la sphère $|x| = 1$

Posons $J = F_S^{-1} \circ F_N$.

F_S^{-1} est définie sur $S_n - \{0, 0, \ldots, -1\} \Longrightarrow J$ est définie sur $E^n - \{0, 0, \ldots, 0\}$.

Le domaine des valeurs de F_N est $S_n - \{0, 0, \ldots, 1\} \Longrightarrow$ celui de J est $E^n - \{0, \ldots, 0\}$. Posons $\Delta = E^n - \{0, 0, \ldots, 0\}$. Alors J applique Δ sur Δ.
On calcule aisément J et J^{-1}.

$$J(x^1, \ldots, x^n) = \left(\frac{x^1}{|x|^2}, \ldots, \frac{x^n}{|x|^2}\right).$$

$$J^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \left(\frac{y^1}{|y|^2}, \ldots, \frac{y^n}{|y|^2}\right) \text{ donc } J^{-1} = J.$$

Cette transformation J est appelée inversion dans la sphère unité.

D'après le théorème de Liouville chaque transformation conforme d'un domaine $\Delta \subset E^n$ dans E^n (avec $n > 2$) est la composition de translations, similitudes, et inversions.

§ 3.– Transformations différentiables du plan

A.– Transformations linéaires du plan

Notations

A toute transformation linéaire T du plan on associe la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si on pose $T(x, y) = (u, v)$ on a $u = ax + by$ et $v = cx + dy$.

Si on pose $G = {}^tMM = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ on a :

$$e = a^2 + c^2$$

$$f = ab + cd$$

$$g = b^2 + d^2 .$$

1.– Théorème

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) $\exists \lambda$ telle que $\lambda d(X, Y) = d(T(X), T(Y))$.

(b) $\langle TX, TY \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle$.

(c) $\binom{a}{b} \perp \binom{b}{d}$: ou $ab + cd = 0$, et $\left|\binom{a}{c}\right| = \left|\binom{b}{d}\right| = \lambda$, ou $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = \lambda^2$

(d) $G = \lambda^2 I$ ou $e = g = \lambda^2$ et $f = 0$.

(e) Dans la représentation $M = O_1 D O_2$ on a $d^i_j = \pm \lambda \delta^i_j$.

Si $\lambda \neq 0$ on a de plus

(f) Tout angle est conservé par T, c'est à dire T est une similitude.

(g) L'image inverse du cercle $|Y| = 1$ est le cercle $|X| = \frac{1}{\lambda}$.

(h) $M = \lambda O_3$ avec O_3 orthogonal

(i) $(a = d, b = -c)$ ou $(a = -d, b = c)$.

Preuve.– Les huit premières conditions ne sont que la transcription du théorème 3§1 dans ce cas particulier et (h) $\Longleftrightarrow$ (i) car les transformations orthogonales du plan sont de deux formes :

ou $\det O_3 > 0 \Longrightarrow O_3 = \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ -\sin U & \cos U \end{pmatrix}$ et T est une rotation

ou $\det O_3 < 0 \Longrightarrow O_3 = \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ \sin U & -\cos U \end{pmatrix}$ et T est une symétrie

donc (h) $\Longrightarrow$ (i).

Inversement, si $a = d$ et $b = -c$ on a :

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ -\sin U & \cos U \end{pmatrix}$$

calcul analogue si $a = -d$ et $b = c$. Donc (i) $\Longrightarrow$ (h).

Remarques.

1.1.– On sait que G est semblable à une matrice diagonale (G étant semi-définie positive, ses valeurs propres sont $\geqslant 0$ donc $G = {}^tO \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} .O$ (supposons $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0$)), avec O orthogonale.

On sait que $\lambda_1^2 = \underset{|X|=1}{\operatorname{Max}} {}^tX\,G\,X$ et que $\lambda_2^2 = \underset{|X|=1}{\operatorname{Min}} {}^tX\,G\,X$.

D'autre part, il est clair que

$$\operatorname{tr} G = e + g = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$\det G = eg - f^2 = \lambda_1^2\,\lambda_2^2 = (ad - bc)^2 = (\det M)^2.$$

1.2.– Signification géométrique

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et $\varphi(t) = {}^tX(t)\,G\,X(t)$.

Alors $\varphi(t) = e \cos^2 t + 2 f \cos f \sin t + g \sin^2 t$.

$$\varphi'(t) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} 2t = \frac{2f}{e-g} ;$$

pour $t \in [0, \pi[$ on constate qu'il y a deux valeurs t_o et t_1 telles que $\operatorname{tg} 2t = \frac{2f}{e-g}$, ces deux valeurs sont d'ailleurs liées par la relation $2t_o + \pi = 2t_1$

et on a $\overrightarrow{X(t_o)} \cdot \overrightarrow{X(t_1)} = 0$. Ces deux directions perpendiculaires correspondent aux valeurs de t pour lesquelles $\varphi(t)$ atteint ses extremums.

L'équation $\varphi(t) = {}^tX(t)\, G\, X(t) = 1$ représente une ellipse. En choisissant comme nouveaux axes les directions $\overrightarrow{X(t_o)}$ et $\overrightarrow{X(t_1)}$ l'équation de l'ellipse sera de la forme $\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = 1$. Donc $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ représentent la longueur des demi-axes.

L'ellipse ${}^tX\, G\, X = 1$ est l'image inverse de $|Y| = 1$, elle ne dépend que de G.

<u>Notations complexes</u>

On a $T(x , y) = (u , v)$

posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$

on a alors $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

si on calcule w en fonction de z et de $\bar{z}$ on trouve que w est de la forme :

$$w = \alpha z + \beta \bar{z} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a + d + i(c-b)}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a - d + i(c+b)}{2}$$

1.3.– $\beta = 0 \Longleftrightarrow a = d$ et $c = -b \Longleftrightarrow T$ est une similitude avec $\det M > 0$

$\Longleftrightarrow w = \alpha z$ avec $\alpha = a + ic = a - ib$.

1.4.– $\alpha = 0 \Longleftrightarrow a = -d$ et $b = c \Longleftrightarrow T$, T est le produit d'une similitude par une symétrie. $\det M < 0 \Longleftrightarrow w = \beta \bar{z}$.

<u>Formules.</u>

$$(1.1) \qquad |\alpha|^2 = \frac{1}{4}\left[a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ad - bc)\right] = \frac{1}{4}\left[e + g + 2\sqrt{eg - f^2}\right] = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2$$

$$(1.2) \qquad |\beta|^2 = \frac{1}{4}\left[a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ad - bc)\right] = \frac{1}{4}\left[e + g - 2\sqrt{eg - f^2}\right] = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

$$(1.3) \qquad \det M = ad - bc = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

on remarque que $\det M > 0 \Longleftrightarrow |\alpha|^2 > |\beta|^2 \Longrightarrow \alpha \neq 0$. <u>On supposera désormais que</u> $\det M > 0$.

2.- Théorème.- Soient $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ et $w_1 = \alpha_1 z + \beta_1 \bar{z}$ deux transformations linéaires à déterminant positif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(a) il existe γ tel que $w_1 = \gamma w$

(b) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Preuve.- Supposons la propriété (a) vérifiée, alors

$(\alpha \gamma)z + (\beta\gamma)\bar{z} = \alpha_1\bar{z} + \beta_1 z$ pour tout z et $\bar{z}$ $\Longrightarrow \alpha\gamma = \alpha_1$ et $\beta\gamma = \beta_1$.

Inversement, si $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\alpha}$ comme

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{(z + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{z})}{(z + \frac{\beta}{\alpha} \bar{z})}$$

on a $\frac{w_1}{w} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \Longrightarrow w_1 = \gamma w$. c.q.f.d.

Posons $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$ alors le théorème précédent se lit : si w et w_1 sont deux transformations linéaires à déterminant positif, c'est à dire telles que $|\mu|$ et $|\mu_1|$ soient inférieurs à 1, alors $\mu = \mu_1 \Longleftrightarrow w_1 = \gamma w$.

Notations

Posons $Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ alors $Q \geqslant 1$ et l'on a :

$$|\mu| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1} = \frac{Q - 1}{Q + 1} \tag{2.1}$$

On a encore :

$$\mu = \frac{e - g + 2if}{e+g+2\sqrt{eg-f^2}} = |\mu|\, e^{i\varphi} \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2f}{e-g}, \quad \varphi = 2t. \tag{2.2}$$

La connaissance de μ équivaut donc à la connaissance du rapport des deux axes de l'ellipse définie dans 1.2 et de l'angle des axes de l'ellipse avec les axes de coordonnées.

3.- Théorème fondamental.- Soit $ex^2 + 2fxy + gy^2$ une forme quadratique définie positive. Posons $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, alors toutes les transformations linéaires $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ à déterminant positif telle que $|w|^2 = \rho(ex^2 + 2fxy + gy^2)$ sont obtenues en choisissant arbitrairement $\alpha \neq 0$ et $\beta = \mu\alpha$ avec

$$\mu = \frac{e - g + 2if}{e + g + 2\sqrt{eg-f^2}} \quad .$$

<u>Preuve</u>.- Soient α et β ainsi choisis. Calculons $|w|^2$. On trouve :

$$|w|^2 = \frac{4|\alpha|^2}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}} \, (ex^2 + 2\,fxy + gy^2).$$

Inversement, soient w_1 et w_2 deux transformations linéaires à déterminant positif de la forme $|w_i|^2 = \rho_i(ex^2 + 2\,fxy + gy^2)$. Alors, pour tout z, on aura

$$\left|\frac{w_1}{w_2}\right| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \text{constante}.$$

La transformation $w_2 \longrightarrow w_1$ multiplie les distances par une constante, il s'ensuit que $w_1 = \gamma\, w_2$ donc $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et $\beta_i = \mu\,\alpha_i$, $i = 1, 2$ c.q.f.d.

3.1.- <u>Corollaire</u>.- Soit alors une forme quadratique définie positive $ex^2 + 2\,fxy + gy^2$. Choisissons α tel que $|\alpha|^2 = \dfrac{e + g + 2\sqrt{eg-f^2}}{4}$ et posons $\beta = \mu\alpha$ avec

$$\mu = \frac{e - g + 2\,if}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}}$$

alors, la transformation linéaire à det > 0 $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ sera telle que :

$$|w|^2 = ex^2 + 2\,fxy + gy^2.$$

Dans ce cas particulier les expressions définies dans 1 et 2 donnent

$$\lambda_1^2 = \operatorname*{Max}_{x^2+y^2\neq 0} \frac{ex^2 + 2\,fxy + gy^2}{x^2 + y^2}$$

et

$$\lambda_2^2 = \operatorname*{Min}_{x^2+y^2\neq 0} \frac{ex^2 + 2\,fxy + gy^2}{x^2 + y^2}$$

ou encore

$$\lambda_1 = \max_{z \neq 0} \left|\frac{w}{z}\right| \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \min_{z \neq 0} \left|\frac{w}{z}\right|$$

$$|\alpha| = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \qquad |\beta| = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

$$Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha| - |\beta|} = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} \geqslant 1.$$

Si on pose

$$P = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} \quad \text{alors} \quad P = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} = \frac{1}{2}(Q + \frac{1}{Q}) \geqslant 1$$

et

$$|\mu|^2 = \frac{P - 1}{P + 1}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2) = Q \ \det M. \quad \text{et} \quad \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2) = \frac{1}{Q} \ \det M.$$

Interprétation géométrique de la quantité Q.

Soit la transformation linéaire $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ à $\det > 0$.

Soit $A(z)$ l'aire d'un domaine dans le plan des z et $A(w)$ l'aire de son image par w.

Il est clair que $\frac{A(w)}{A(z)} = \text{dét } M$, on a donc

$$Q = \lambda_1^2 / \frac{A(w)}{A(z)} = \max_{z \neq 0} |\frac{w}{z}|^2 / \frac{A(w)}{A(z)}$$

et

$$\frac{1}{Q} = \min_{z \neq 0} |\frac{w}{z}|^2 / \frac{A(w)}{A(z)}.$$

3.2.– Remarque.

$\forall$ e, f, g on a $\sqrt{eg - f^2} \leqslant \sqrt{eg} \leqslant \frac{e + g}{2}$.

Donc $\sqrt{eg - f^2} \leqslant \frac{e + g}{2}$ et l'égalité a lieu si et seulement si :

$$e = g \text{ et } f = 0 \Longleftrightarrow P = 1 \Longleftrightarrow Q = 1 \Longleftrightarrow \mu = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

3.4.– Calcul de l'inverse de la transformation $w = \alpha z + \beta \bar{z}$.

On a $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ donc $\bar{w} = \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta} z$ d'où l'on tire

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}} w - \frac{\beta}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}} \bar{w}$$

z est donc de la forme $z = \alpha^* w + \beta^* \bar{w}$. Calculons μ^* :

$$\mu^* = \frac{\beta^*}{\alpha^*} = - \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{donc} \quad |\mu^*| = |\mu|.$$

B.– Transformations différentiables du plan

Introduction.– On considère les applications F d'un domaine Δ du plan dans le plan, de classe C^1

$$F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F \in C^1(\Delta).$$

Posons $F(x , y) = (u , v)$. A la différentielle $dF \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2)$, on associe sa matrice $M = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$; on note $\det M = \dfrac{\partial(u , v)}{\partial(x , y)}$.

1.– Etude de dF au voisinage d'un point (x_0 , y_0)

On suppose $dF(x_0 , y_0) \neq 0$.

1er cas.– $\dfrac{\partial(u , v)}{\partial(x , y)}(x_0 , y_0) = 0$, c'est à dire que dF est singulière au point (x_0 , y_0), alors l'image par $dF(x_0 , y_0)$ des vecteurs tangents en (x_0 , y_0) est de dimension 1. Tous les vecteurs tangents en (x_0 , y_0) sont donc envoyés sur une même tangente en $F(x_0 , y_0)$.

2me cas.– $\dfrac{\partial(u , v)}{\partial(x , y)}(x_0 , y_0) \neq 0$, donc $dF(x_0 , y_0)$ est bijective, de plus, il existe un voisinage de (x_0 , y_0) dans lequel F est un difféomorphisme. On s'intéressera désormais à ce 2me cas.

Remarque.– Pour que F conserve les angles, il faut et il suffit que :

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \text{conditions de Cauchy-Riemann,}$$

ou que $u_x = -v_y$ et $u_y = v_x$. (A.1.(f), (i)).

Etude sous forme complexe de la transformation

On a $F \in C^1(\Delta)$. $F(x , y) = (u , v)$. Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. Soit $z(t)$ une courbe dans Δ, et $w(t)$ la transformée. Nous avons vu qu'un vecteur tangent en $(x_o , y_o) = M_o$ s'écrit $z'(t_o) = x'(t_o) + iy'(t_o)$ et que $w'(t_o) = u'(t_o) + iv'(t_o)$ on a $dF(M_o) : z'(t_o) \longrightarrow w'(t_o)$. On a vu que $w'(t_o)$ pouvait s'écrire sous la forme : $w'(t_o) = \alpha_o z'(t_o) + \beta_o \overline{z'(t_o)}$ où α_o et β_o dépendent des coefficients de la matrice

$$\begin{pmatrix} u'_x , & u'_y \\ v'_x , & v'_y \end{pmatrix}$$ au point M_o.

Considérons l'expression $\dfrac{w(z) - w(z_o)}{z - z_o}$ et faisons tendre z vers z_o. Si $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{w(z) - w(z_o)}{z - z_o}$ existe, posons

$$\lim_{z \to z_o} \frac{w(z) - w(z_o)}{z - z_o} = w'(z_o).$$

Soit une courbe $z(t)$ dans Δ, telle que $z(t_o) = z_o$. Supposons que $\lim\limits_{t \to t_o} \dfrac{w(t) - w(t_o)}{z(t) - z(t_o)}$ existe, elle est alors égale à :

$$\lim_{t \to t_o} \frac{w(t) - w(t_o)}{t - t_o} \Big/ \frac{z(t) - z(t_o)}{t - t_o} = \frac{w'(t_o)}{z'(t_o)} = \alpha_o + \beta_o \frac{\overline{z'(t_o)}}{z'(t_o)} .$$

Il est clair que $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{w - w_o}{z - z_o}$ existe entraine $\beta_o = 0$, et qu'on a alors $w'(z_o) = \alpha_o$.

Inversement, puisque la différentielle dF satisfait toujours à :

$$\lim_{z \to z_o} \left| \frac{w(z) - w(z_o) - dF(z)}{z - z_o} \right| = 0$$

et puisque $dF(z) = \alpha(z - z_o) + \beta(\overline{z - z_o})$, on voit que

$$\beta = 0 \Longrightarrow \lim_{z \to 0} \left| \frac{w(z) - w(z_o)}{z - z_o} - \alpha \right| = 0 \Longrightarrow w'(z_o) \text{ existe.}$$

Notations.- On appelle dérivée formelle par rapport à z et on note w_z la quantité $w_z = \alpha = \frac{1}{2}(w_x - iw_y)$. De même on note $w_{\bar z} = \beta = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$. Il en résulte les formules suivantes

(B 1) $$\frac{dw}{dt} = w_z \frac{dz}{dt} + w_{\bar z} \frac{d\bar z}{dt}.$$

$w'(z)$ existe $\Longleftrightarrow w_{\bar z} = 0$ et alors $w_z = w'(z)$.

La fonction $w(z)$ est <u>analytique</u> (complexe) si $w'(z)$ existe partout dans le domaine de définition de $w(z)$. Donc $w(z)$ est analytique si et seulement si $w_{\bar z} \equiv 0$.

<u>Définition</u>.– Un opérateur D sur une classe de fonctions est appelé dérivation si il est linéaire et vérifie $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$.

<u>Conséquences</u>.– Une dérivation D vérifie

$$D(1) = 0 \ ; \ D(\alpha) = 0 \ , \ D(\frac{f}{g}) = \frac{g\,Df - f\,Dg}{g^2} \ .$$

<u>Remarque</u>.– Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ sont des dérivations.

2.– <u>Propriétés des expressions</u> w_z <u>et</u> $w_{\bar z}$.

On a les relations

(2.1) $$|w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2 = \text{dét } M$$

(2.2) $$|w_z|^2 + |w_{\bar z}|^2 = \frac{u'^2_x + u'^2_y + v'^2_x + v'^2_y}{2}$$

(2.3) $$\overline{w_{\bar z}} = (\bar w)_z \ .$$

Soit $\zeta \longrightarrow z(\zeta)$ alors on a :

$$w_\zeta = w_z z_\zeta + w_{\bar z} \bar z_\zeta \ , \ w_{\bar \zeta} = w_z z_{\bar \zeta} + w_{\bar z} \bar z_{\bar \zeta}$$

(2.4) $$(w_z)_{\bar z} = (w_{\bar z})_z = \frac{1}{4}(w''_{xx} + w''_{yy}) = \frac{1}{4} \ \Delta w.$$

2.1.– <u>Lemme</u>.– w harmonique $\Longleftrightarrow w_z$ analytique.

<u>Preuve</u>.– $\Delta w = 0 \equiv (w_z)_{\bar z} = 0$.

2.2.– <u>Lemme</u>.–

(2.5) $$z(\zeta) \text{ analytique} \Longrightarrow \Delta_\zeta w = \Delta_z w |z'(\zeta)|^2$$

on note par $\Delta_\zeta w = 4\, w_{\zeta \bar\zeta}$.

<u>Preuve</u>.- $Z(\zeta)$ analytique $\Longleftrightarrow Z_{\bar\xi} = 0$ or $\bar Z_\zeta = \overline{Z_{\bar\xi}}$ donc $Z(\zeta)$ analytique $\Longleftrightarrow \bar Z_\zeta = 0$ on a :

$$W_\zeta = W_Z Z_\zeta + W_{\bar Z} \bar Z_\zeta = W_Z Z_\zeta \quad \text{et} \quad W_{\zeta\bar\xi} = W_Z Z_{\zeta\bar\xi} + (W_{ZZ} Z_{\bar\xi} + W_{Z\bar Z} \bar Z_{\bar\xi}) Z_\zeta .$$

Mais $Z_{\zeta\bar\xi} = 0$ car $Z_{\zeta\bar\xi} = (Z_{\bar\xi})_\zeta = 0$ et $Z_{\bar\xi} = 0$ donc

$$W_{\zeta\bar\xi} = W_{Z\bar Z} \bar Z_{\bar\xi} Z_\zeta \quad \text{mais} \quad \bar Z_{\bar\xi} = \overline{(Z_\zeta)} \quad \text{donc}$$

$W_{\zeta\bar\xi} = W_{Z\bar Z} |Z_\zeta|^2$ ce qui s'écrit encore $\frac{1}{4}\Delta_\zeta W = \frac{1}{4}\Delta_Z W |Z_\zeta|^2$ ce qui est (2.5).

Si on suppose $\det M > 0$ on a $|W_Z|^2 > |W_{\bar Z}|^2 \geqslant 0 \Longrightarrow W_Z \neq 0$.

On peut alors poser $\mu = \frac{w_{\bar Z}}{w_Z} = \frac{\beta}{\alpha} \mu$, de même que les grandeurs P, Q, λ_1, λ_2 définies précédemment est une fonction de Z.

2.3.- <u>Lemme</u>.- Soient $W(Z)$ et $W^*(Z) \in C^1(\Delta)$ à jacobien > 0. Alors dans un voisinage de chaque point $Z_0 \in \Delta$ on aura $w^*(w)$ analytique si et seulement si $\mu^* \equiv \mu$.

<u>Preuve</u>.- $\mu^* \equiv \mu \Longleftrightarrow w^{*\prime}(t) = \gamma w'(t)$

$$\frac{dw^*}{dt} = w^*_w \frac{dw}{dt} + w^*_{\bar w} \frac{d\bar w}{dt} = \gamma \frac{dw}{dt} \Longleftrightarrow w^*_{\bar w} = 0 \quad \text{et} \quad w^*_w = \gamma .$$

Et $w^*_{\bar w} = 0 \Longleftrightarrow w^*(w)$ analytique.

<u>Problème</u>.- Soit $\mu(z) \in C^0(\Delta)$, telle que $|\mu(z)| < 1$.

Existe-t-il une fonction $w(z) \in C^1$ au voisinage de chaque point Z_0 de Δ satisfaisant à $w_{\bar z} = \mu w_z$ (équation de Beltrami)?

<u>Définition</u>.- Soit $\alpha > 0$ on dit que $\mu(z)$ satisfait à une condition de Hölder d'exposant α dans un domaine $\Delta \Longleftrightarrow \exists K > 0$ tel que :

$$\forall z_1, z_2 \in \Delta \quad |\mu(z_1) - \mu(z_2)| \leqslant K|z_1 - z_2|^\alpha .$$

3.- <u>Théorème</u>.- Si $\mu(z)$ satisfait à la condition de Hölder d'exposant α au voisinage de $z = 0$, si $|\mu(z)| < 1$, l'équation $w_{\bar z} = \mu w_z$ (3.1) a une solution

$w(z)$ au voisinage de 0 telle que

- $w_z(0) \neq 0$
- les dérivées de $w(z)$ satisfont la condition de Hölder d'exposant α.

Référence : Courant-Hilbert M.M.P. II, pp. 350-352 (1962), ed. anglaise.

Remarque.- Si $w(z)$ est solution de (3.1), si $f(z)$ est une fonction analytique, et si $f[w(z)]$ est définie, c'est une solution de (3.1).

3.1.- Corollaire.- Soient $e, f, g \in C^1(\Delta)$, tel que $M = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ soit partout définie positive.

Alors, au voisinage de tout point $z_0 \in \Delta$, $\exists\, w(z) \in C^1(\Delta)$ tel que :

$$\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 = \rho\left[e\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2f\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt} + g\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \quad \text{où} \quad \rho = \rho(z) .$$

Preuve.-

Soit $$\mu(z) = \frac{e(z) - g(z) + 2if(z)}{e(z) + g(z) + 2\sqrt{e(z)g(z) - f(z)^2}}$$

alors $\mu \in C^1(\Delta)$ (car $e + g + 2\sqrt{eg - f^2} \geqslant 4\sqrt{eg - f^2} > 0 \Longrightarrow \mu$ satisfait la condition de Hölder, avec $\alpha = 1$ au voisinage de tout point $z_0 \in \Delta$), et $|\mu(z)| < 1$ car $\det M > 0$ on applique alors le théorème 3. $\exists\, w(z)$ au voisinage de $z_0 \in \Delta$ telle que $w_{\bar z} = \mu w_z$. Donc

$$w'(t) = z'(t) + \beta\,\bar z'(t)$$

et le résultat suit du théorème fondamental (§ 1.3).

C.- Transformations quasi-conformes.

1.- Définitions.

1.1.- Soient des fonctions $w(z) \in C^1(\Delta)$ vérifiant :

- $z \longrightarrow w(z)$ est biunivoque
- $\dfrac{\partial(u , v)}{\partial(x , y)} > 0$ ($w(z)$ s'écrivant $w(z) = u(x , y) + iv(x , y)$) on dit

que ces fonctions sont quasi-conformes si en outre elles vérifient : $\exists k < 1$ telle que

$$|\mu| = \left|\frac{w_{\bar z}}{w_z}\right| \leqslant k \quad \text{dans} \quad \Delta .$$

Il est équivalent de dire que ces fonctions vérifient P ou Q uniformément bornés sur Δ.

1.2.- Si Q, qui est égal à $\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$, est majoré par K, (ce qui signifie que $|\mu|$ "n'approche pas" 1) on dit que $w(z)$ est K-quasi-conforme.

2.- <u>Propriétés des transformations quasi-conformes</u>.

2.1.- Une transformation 1-quasi-conforme est conforme.

<u>Preuve</u>.- On a $Q \leqslant 1$, or on sait que $Q \geqslant 1$ donc $Q = 1$ mais $|\mu| = \frac{Q-1}{Q+1}$ donc $|\mu| = 0 \Longleftrightarrow |w_{\bar z}| = 0$.

2.2.- Si une transformation $w(z)$ est K-quasi-conforme l'inverse $z(w)$ est aussi K-quasi-conforme.

<u>Preuve</u>.- Soit μ relatif à $w(z)$ et μ^* relatif à $z(w)$ on sait que $|\mu| = |\mu^*|$ (§ 3A 3.4).

2.3.- Si $w(z)$ est K_1-quasi-conforme et $z(\zeta)$ K_2-quasi-conforme la fonction $w(\zeta)$, partout où elle est définie, est K-quasi-conforme avec $K \leqslant K_1 \; K_2$.

<u>Preuve</u>.- Soient Q_1 et Q_2 relatifs respectivement à $w(z)$ et $z(\zeta)$ et Q relatif à $w(\zeta)$, on a

$$\max_{\zeta'(t)\neq 0} \left|\frac{w'(t)}{\zeta'(t)}\right|^2 \leqslant \max_{z'(t)\neq 0} \left|\frac{w'(t)}{z'(t)}\right|^2 \times \max_{\zeta'(t)\neq 0} \left|\frac{z'(t)}{\zeta'(t)}\right|^2$$

donc $Q \leqslant Q_1 \; Q_2 \leqslant K_1 \; K_2$.

2.4.- Si $w(z)$ est K-quasi-conforme, on a :

$$\left|\frac{w'(t)}{z'(t)}\right|^2 \leqslant K \frac{\partial(u\; ,\; v)}{\partial(x\; ,\; y)} .$$

<u>Preuve</u> :

$$Q \leqslant K, \quad \text{or} \quad Q = \max_{z'(t)\neq 0} \left|\frac{w'(t)}{z'(t)}\right|^2 \Big/ \frac{\partial(u\; ,\; v)}{\partial(x\; ,\; y)}$$

3.- Théorème de Teichmüller.- Il n'existe pas de transformations quasi-conformes du plan dans le cercle unité.

Preuve.- Supposons que $w(z)$ soit une transformation K-quasi-conforme du plan z sur le disque $|w| < 1$. Soit r, ϑ et ρ, φ des coordonnées polaires dans les plans z et w. Soit Γ_r l'image du cercle $|z| = r$, et soit $L(r)$ sa longueur. On peut supposer que $w(0) = 0$. Alors Γ_r ne passe pas par l'origine, et l'on a

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{d\vartheta}\right| d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta.$$

L'image du domaine $|z| < 1$ étant un ouvert contenant l'origine $w = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|z| \geqslant 1 \Longrightarrow |w(z)| \geqslant \eta$. Du fait que le cercle $|z| = r$ sépare l'origine de l'infini, il s'ensuit que la courbe Γ_r sépare l'origine $w = 0$ de la frontière $|w| = 1$. Donc chaque rayon $\arg w = \varphi_0$ rencontre Γ_r. Alors, pour $r \geqslant 1$ on a

$$L(r) \geqslant \int_0^{2\pi} \rho \left|\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right| d\vartheta \geqslant \eta \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right| d\vartheta \geqslant 2\pi\eta$$

de l'autre côté, nous avons

$$(L(r))^2 = \left(\int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{d\vartheta}\right| d\vartheta\right)^2 = \left(\int_0^{2\pi} \frac{\left|\frac{dw}{d\vartheta}\right|}{\left|\frac{dz}{d\vartheta}\right|}\, r\, d\vartheta\right)^2 \leqslant r^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\left|\frac{dw}{d\vartheta}\right|}{\left|\frac{dz}{d\vartheta}\right|}\right)^2 d\vartheta$$

$$\leqslant 2\pi r^2 K \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u\ ,\ v)}{\partial(x\ ,\ y)}\, d\vartheta$$

en employant la propriété (C 2.4).

Donc

$$\frac{2\pi\eta^2}{r} \leqslant K \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u\ ,\ v)}{\partial(x\ ,\ y)}\, r\, d\vartheta$$

pour tout $r \geqslant 1$

$$\int_1^{r_o} \frac{2\pi\eta^2}{r}\, dr \leqslant K \int_1^{r_o} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u\ ,\ v)}{\partial(x\ ,\ y)}\, r\, dr\, d\vartheta = K\, A(r_o)$$

où $A(r_o)$ = l'aire de l'image de l'anneau $1 \leqslant |z| \leqslant r_o$. Mais $A(r_o) \leqslant \pi$, donc

$$2\eta^2 \log r_o \leqslant K$$

ce qui contredit l'hypothèse que $w(z)$ était définie dans tout le plan z.

Chapitre II

§ 1.- Généralités sur la théorie des surfaces

1.- Définitions relatives aux surfaces

1.1. Une surface est un espace topologique séparé tel que chaque point possède un voisinage homéomorphe à un domaine du plan

1.2. Une carte d'une surface S est un homéomorphisme φ_α d'un domaine R_α du plan sur un domaine O_α de S.

1.3. Un atlas de S est un ensemble de cartes φ_α telles que $S \subset O_\alpha$.

1.4. Une carte normalisée à p_o est telle que $\varphi(0) = p_o$

R_α contient le domaine $|z| \leqslant R$ où $R > 1$

1.5. Un atlas C^m est un atlas tel que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \in C^m$ là où $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ est défini

$m \in N$ $m = \infty$ $m = \omega$ analytique réel

$m = A$ analytique complexe.

1.6. Une surface de Riemann est une surface munie d'un atlas C^A

1.7. Une surface est orientable si elle possède un atlas tel que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ conserve toujours l'orientation du plan. Dans ce cas l'atlas est dit orienté. "Choisir une orientation" signifie choisir un atlas orienté.

1.8. Exemple de surface de Riemann.

S sphère unité dans R^3

Les projections stéréographiques de pôles nord et sud forment 2 cartes

$w = \frac{1}{\bar{z}}$. Posons $\zeta = \bar{w}$

$\zeta = \frac{1}{z} \in C^A$.

1.9. Lemme.- Toute surface de Riemann est orientable. En effet, toute application analytique complexe $f(z) = u + iv$ est à jacobien $J = u_x^2 + u_y^2 > 0$, donc conserve l'orientation du plan.

2.- Variétés riemanniennes

2.1.- Définitions.- Une variété riemannienne à deux dimensions est une surface C^m, $m \geqslant 1$, munie d'un ensemble de matrices M_α

- symétriques
- définies positives
- dont les éléments sont des fonctions C^m dans R_α
- satisfaisant $M_\alpha = {}^tJ M_\beta J$ dans $R_\alpha \cap R_\beta$ où J est matrice jacobienne de $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$

2.2.- Lemme.- Toute variété riemannienne à 2 dimensions, orientable, possède une structure naturelle de surface de Riemann.

Démonstration.- Soit $\{\varphi_\alpha\}$ un atlas orienté. Soit φ_α une carte en p_o de S, homéomorphisme de R_α sur O_α

$$z_o = \varphi_\alpha^{-1}(p_o).$$

Si x_α et y_α sont coordonnées dans R_α

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$$

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} e_\alpha & f_\alpha \\ f_\alpha & g_\alpha \end{pmatrix}.$$

Il existe un difféomorphisme F_α d'un voisinage de z_o sur un domaine $\hat{R}_\alpha$ du plan complexe tel que pour toute courbe $z(t)$ de classe C^1 dans $F_\alpha^{-1}[\hat{R}_\alpha]$ on ait

$$|w'_\alpha(t)|^2 = \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\left[e_\alpha x'^2_\alpha + 2f_\alpha x'_\alpha y'_\alpha + gy'^2_\alpha\right]$$

$w_\alpha = F_\alpha(z)$

$w_{\alpha_{\bar{z}_\alpha}} = \mu(z_\alpha) w_{\alpha_{z_\alpha}}$ avec $|\mu(z_\alpha)| < 1$

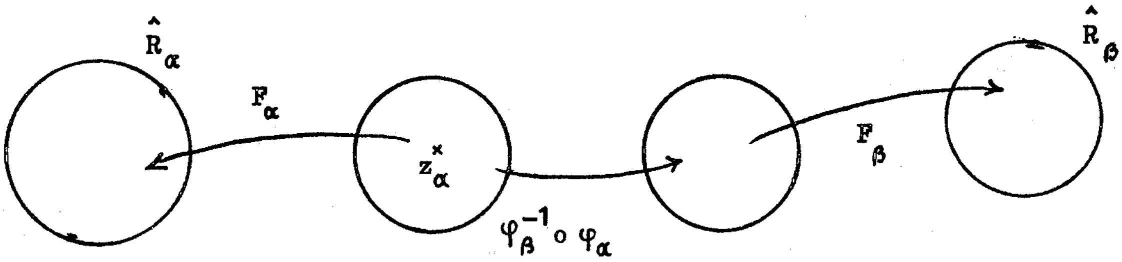
F_α est à jacobien > 0 (I. B. 3.1).

Posons $\hat{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ F^{-1}$ $\hat{O}_\alpha = \hat{F}_\alpha(\hat{R}_\alpha)$. Montrons que les $\hat{\varphi}_\alpha$ constituent un atlas C^A pour S.

Soit $\hat{\varphi}_\beta$ une autre carte $\hat{\varphi}_\beta = \varphi_\beta \circ F_\beta^{-1}$ homéomorphisme de $\hat{R}_\beta$ sur $\hat{O}_\beta$.

Le changement de carte est $\hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha = F_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ F_\alpha^{-1}$. Posons $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$.

$g_{\alpha\beta}$ est un homéomorphisme de U_α sur U_β de matrice jacobienne J à déterminant > 0



$$U_\alpha = [F_\alpha^{-1}\,\hat{R}_\alpha] \cap g_{\alpha\beta}[F_\beta^{-1}\,(\hat{R}_\beta)].$$

Soit $z_\alpha(t)$ une courbe de classe C^1 dans U_α.

$z_\beta(t)$ l'image de $z_\alpha(t)$ par $g_{\alpha\beta}$

$$|w'_\beta(t)|^2 = \rho_\beta(x_\beta, y_\beta)[e_\beta x'^2_\beta + 2f_\beta x'_\beta y'_\beta + g y'^2_\beta]$$
$$= \rho_\beta [x'_\beta\ y'_\beta]\, M_\beta \begin{bmatrix} x'_\beta \\ y'_\beta \end{bmatrix}$$

Mais $M_\alpha = J^t M_\beta J$, $\begin{bmatrix} x'_\beta \\ y'_\beta \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{bmatrix}$;

$$|w'_\beta(t)|^2 = \rho_\beta [x'_\alpha\ y'_\alpha]\, M \begin{bmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} |w'_\alpha(t)|^2.$$

$\dfrac{|w'_\beta(t)|^2}{|w'_\alpha(t)|^2} = \dfrac{\rho_\beta}{\rho_\alpha}$. Il en résulte que $w_\alpha = F_\alpha(z_\alpha)$

$w_\beta = F_\beta \circ g_{\alpha\beta}(z_\alpha)$

sont différentiables à jacobien > 0 et définissent sur le point z_0 une fonction $w_\beta(w_\alpha)$ qui est analytique:

$$w_\beta(w_\alpha) = F_\beta \circ g_{\alpha\beta} \circ F_\alpha^{-1}$$
$$= \hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha.$$

<u>N.B.</u>- a) Si les angles sont invariants par $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ on a une structure conforme.

Se donner un atlas C^A équivaut à se donner une structure conforme orientée.

b) On peut définir la notion d'angle sur une surface de Riemann sur une variété riemannienne. Le fait que $|w'_\alpha(t)|^2 \quad \frac{1}{\rho_\alpha}$ soit invariant par changement de carte va permettre de définir une distance sur la variété.

3.- Courbes, chemins sur une surface.

3.1.- Une courbe sur une surface S est une application continue d'un intervalle de R dans S.

3.2.- Une courbe différentiable sur une surface C^m, $m \geqslant 1$ est une courbe $p(t)$ telle que

$$\varphi_\alpha^{-1}[p(t)] \in C^1 \quad \text{(là où elle est définie).}$$

N.B.- C'est indépendant de la carte.

3.3.- Longueur $L|p(t)$ d'une courbe différentiable $p(t)$, $t \in [a , b]$.

$$L[p(t)] = \int_a^b h(t)dt$$

où $\forall t_o \in [a , b]$ on choisit une carte φ_α en t_o telle que $p(t) \in O_\alpha$

$$h(t) = [e_\alpha x'_\alpha(t) + 2f_\alpha x'_\alpha y'_\alpha + g_\alpha {y'_\alpha}^2]^{\frac{1}{2}}$$

$h(t)$ est bien indépendant de la carte choisie ; dans une variété riemannienne on dit que les M_α définissent une métrique riemannienne.

3.4.- Un chemin sur une surface S est une application continue de $[0 , 1[$ dans S.

3.5.- Un chemin sur S tend vers la frontière si pour toute partie compacte $K \subset$

$\exists t_o \in [0 , 1[\quad : \quad t > t_o \implies p(t) \notin K.$

N.B.- Une surface compacte n'a pas de frontière.

3.6.- Une courbe $p(t)$ sur une surface C^m est dite différentiable par morceaux si il existe une décomposition de $[a , b] = \bigcup_1^p [a_n \ b_n]$ où
$a_1 = a$
$a_n = b_{n-1}$
$b_p = b$.

Telle que $p(t)|_{[a_n \ b_n]}$ soit une courbe différentiable $p_n(t)$.

3.7.- <u>La longueur d'une</u> courbe différentiable par morceaux $= \sum L[p_n(t)]$ (sur une variété riemannienne).

4.- <u>Définition d'une distance sur une variété riemannienne connexe</u>.

Soient p_1 et p_2 deux points d'une variété riemannienne. Posons

$d(p_1 \; p_2) = \inf\limits_{p(t) \in \mathscr{L}} L\,[p(t)]$. $\mathscr{L}$ ensemble des courbes différentiables par morceaux joignant p_1 à p_2.

4.1.- <u>Lemme</u>.- $d(p_1 \; p_2)$ définit sur S une structure d'espace métrique.

Démontrons que $d(p_1 \; p_2)$ définit une distance

- $d(p_1 \; p_2) = 0 \iff p_1 = p_2$
- $d(p_1 \; p_2) = d(p_2 \; p_1)$
- $d(p_1 \; p_3) \leqslant d(p_1 \; p_2) + d(p_2 \; p_3)$.

Soient L_{ij} les longueurs des courbes joignant p_i à p_j

$$\inf L_{13} \leqslant \inf L_{12} + \inf L_{23}$$

- $d(p_1 \; p_2) > 0$ pour $p_1 \neq p_2$.

En effet, $h(t)^2 = ex'^2 + 2f\,x'y' + gy'^2$

$$= \lambda_1^2 X_1'^2 + \lambda_2 Y_2'^2$$

$$\geqslant \lambda_2 (X'^2 + Y'^2)^2$$

où λ_2 = la plus petite valeur propre de M.

$$\geqslant \lambda_2^2 (z_t')^2$$

$h(t) \geqslant \lambda_2 |z_t'|$ donc $\inf L\,[p(t)] > 0$.

Chaque variété riemannienne de dimension 2 est donc munie d'une métrique naturelle donc d'une topologie naturelle $\mathcal{T}_m$ induite par cette métrique.

4.2.- Lemme.- La topologie $\mathcal{T}_m$ est identique à la topologie originale $\mathcal{T}_o$.

Preuve.- Nous avons vu que

$$h(t) = \left[\lambda_1^2 x'^2 + \lambda_2^2 y'^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Supposons que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$

$$\lambda_2\left[x'^2 + y'^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant h(t) \leqslant \lambda_1\left[x'^2 + y'^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_2|z'_t| \leqslant h(t) \leqslant \lambda_1|z'_t|$$

donc

$$\int_a^b \lambda_2|z'_t|dt \leqslant \int_a^b h(t)dt \leqslant \int_a^b \lambda_1|z'_t|dt$$

$$\inf \int_a^b \lambda_2|z'_t|dt \leqslant \inf \int_a^b h(t)dt \leqslant \inf \int_a^b \lambda_1|z'_t|dt .$$

Soit $p_o \in S$, $p \in S$. $\varphi_\alpha(z)$ une carte à p_o normalisée : $\varphi_\alpha : R_\alpha \longrightarrow O_\alpha$

$p \longrightarrow p_o$ pour $\mathcal{T}_o \Longleftrightarrow z \longrightarrow 0$ puisque φ_α est un homéomorphisme.

Or
$$d(p_1\ p_o) \leqslant \inf \int_a^b \lambda_1|z'_t|dt$$

$$\leqslant \left(\sup_{\text{dans}} \lambda_1\ O_\alpha\right) \inf \int_a^b |z'_t|dt$$

$$\leqslant (\sup \lambda_1)\ |z| .$$

Si on se restreint à un voisinage O_α de p_o, relativement compact ; λ_1 est continue sur $\overline{O}_\alpha$

$$\sup_{\text{dans } O_\alpha} \lambda_1 < +\infty$$

$$d(p_1\ p_o) \leqslant (\sup \lambda_1)|z| \Longrightarrow \text{si } z \longrightarrow 0 \text{ alors } d(p_1 p_o) \longrightarrow 0.$$

Réciproquement, montrons que si $d(p_1\ p_o) \longrightarrow 0$ alors $|z| \longrightarrow 0$ $d(p_1\ p_o) \longrightarrow 0$

on peut donc prendre $p \in O_\alpha$ sinon :

si $p \notin O_\alpha$

il n'existe pas de $z \in R_\alpha$ tel que $\varphi_\alpha(z) = p$ donc $d(p_1\ p_o) \geqslant \left(\inf_{O_\alpha} \lambda_2\right)|z_1|$

où z_1 est le point de la frontière de R_α le plus proche de 0.

λ_2 est continue sur $\bar{O}_\alpha$ qui est compact. $\lambda_2 > 0$ car la matrice M_α est définie positive. Donc $\inf \lambda_2 > 0$. Donc $d(p_1\ p_0) \not\to 0$ donc $p \in O_\alpha$

et $d(p_1\ p_0) \geqslant (\inf\limits_{\text{sur } O_\alpha} \lambda_2)|z|$

$$d(p_1\ p_0) \longrightarrow 0 \Longrightarrow |z| \longrightarrow 0.$$

5.- Complétion

Soit S, $S \in C^m$, $m \geqslant 1$.

5.1.- Un chemin est différentiable par morceaux si $\forall b \in [0,1[$ $p_b(t) = p|_{[0,b]}$ est une courbe différentiable par morceaux.

5.2.- La longueur d'un chemin différentiable par morceaux est :

$$L[p(t)] = \lim_{b \to 1} L[p_b(t)] < +\infty.$$

5.3.- La distance d'un point p_0 à la frontière de S égale $\inf L[p(t)]$ pour tous les chemins différentiables par morceaux qui tendent vers la frontière et tels que $p(0) = p_0$.

5.4.- Soit une variété riemannienne S. Si la distance à la frontière est finie pour un point p_0, elle l'est pour tout point de S.

Démonstration.- Elle résulte de l'inégalité triangulaire

$$L[p_p(t)] \leqslant L[p_{p_0}(t)] + L[p_{p,p_0}(t)]$$

d'où l'inégalité à démontrer en passant aux bornes inférieures.

5.5.- Définition.- Une variété riemannienne est complète si la distance à la frontière est infinie.

5.6.- Lemme.- Si on enlève un ensemble E fermé d'une variété riemannienne connexe, ce qui reste n'est pas complet.

Démonstration.- $p_0 \in S - E$
$p_1 \in E$

S étant connexe, il existe une courbe $p(t)$ joignant p_0 à p_1 ; elle rencontre

la frontière en au moins un point ; soit q le premier point à partir de p_o.
$d(p_o , q)$ est finie et la partie de la courbe de p_o à q représente un chemin sur S E qui tend vers la frontière.

5.7.- <u>Théorème de Hopf-Rinow</u>.- Une variété riemannienne est complète $\Longleftrightarrow$ l'espace métrique est complet (au sens usuel)

$\Longleftrightarrow$ toute géodésique peut être prolongée indéfiniment dans n'importe quelle direction, ou forme une courbe fermée

$\Longleftrightarrow$ tout ensemble borné est relativement compact.

§ 2.- <u>Etalement</u>. <u>Revêtement</u>.

1.- <u>Définitions</u>

1.1.- Deux courbes $p(t)$ et $q(t)$ définies sur $[0,1]$ sont <u>homotopes</u> si il existe une application continue F de $[0 , 1]^2$ dans S telle que :

$$\begin{array}{lll} F(t , 0) = p(t) & F(0 , u) = p_o & \\ & & \forall u. \\ F(t , 1) = g(t) & F(1 , u) = p_1 & \end{array}$$

N.B.- $\Longrightarrow$ $p(0) = q(0)$
$p(1) = q(1)$.

1.2.- Une surface de Riemann S <u>est simplement connexe</u> si pour tout couple de courbes ayant mêmes extrémités ces deux courbes sont homotopes.

1.3.- <u>Définition d'un étalement</u>. Soient S et $\hat{S}$, deux surfaces

f continue : $\hat{S} \longrightarrow S$.

Si $\forall \hat{p} \in \hat{S}$ il existe $\hat{V}$ voisinage de $\hat{p}$ sur $\hat{S}$ tel que $f|_{\hat{V}}$ soit un homéomorphisme sur un ouvert V de S. On dit que $\hat{S}$ est étalée sur S.

1.4.- <u>Définition d'un relèvement</u>.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \hat{S} \text{ est étalée sur } S \text{ à projection } f \\ \text{Si } p(t) : t \in [a,b] \text{ est une courbe dans } S \\ \text{Si } \hat{p}_o \in f^{-1}\ [p(a)] \end{array} \right.$$

on dit qu'il y a relèvement de $p(t)$ dans $\hat{S}$ à partir de $\hat{p}_0$ (ou que $\hat{S}$ peut être continuée à partir de $\hat{p}_0$) si il existe une courbe $\hat{p}(t)$, $t \in [a,b]$, dans $\hat{S}$ telle que

$$f[\hat{p}(t)] \equiv p(t)$$

$$\hat{p}(a) = \hat{p}_0 .$$

2.– Lemme.– Si $\hat{S}$ est étalée sur S et si il existe un relèvement d'une courbe $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$, le relèvement est unique.

Démonstration.– Soit $\hat{p}(t)$ et $\tilde{p}(t)$ deux relèvements de $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$.

Soit $$E = \{t \; ; \; t \in [a,b] \quad \hat{p}(t) = \tilde{p}(t)\}$$

E est fermé car $\hat{p}$ et $\tilde{p}$ sont continues

E est ouvert

Soit $t_1 \in E$ $\quad \hat{p}(t_1) = \tilde{p}(t_1) = \hat{p}_1$

$\hat{p}_1 \in \hat{S} \Longrightarrow$ il existe un voisinage $\hat{V}$ de $\hat{p}_1$ tel que $f_{|\hat{V}}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}$ sur V

$$\exists \delta > 0 \qquad (t - t_0) < \delta \Longrightarrow \begin{array}{l} \hat{p}(t) \in \hat{V} \\ \tilde{p}(t) \in \hat{V} \end{array}$$

$$f[\tilde{p}(t)] = f[\hat{p}(t)] \Longrightarrow \tilde{p}(t) = \hat{p}(t) \quad \text{pour} \quad (t - t_0) < \delta$$

donc E est ouvert.

– $E \neq \emptyset$ car $a \in E$.

E est une partie connexe non vide de $[a , b]$ donc $E = [a , b]$.

Définition $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S si : $\hat{S}$ est étalée sur S et si chaque point de S possède un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \hat{V}_\alpha$ où $\hat{V}_\alpha$ sont des ouverts disjoints tel que $f/\hat{V}_\alpha$ soit un homéomorphisme sur V.

3.– Lemme.

Si $\{\hat{S} , f\}$ est un revêtement de S, alors pour toute courbe $p(t)$ $t \in [a , b]$ de S et tout point $\hat{p}_0$ de $\hat{S}$ tel que $\hat{p}_0 = f^{-1}[p(a)]$ il existe un relèvement de $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$.

Démonstration.

Soit $E = \{t_0 \; : \; t_0 \in [a , b]$ il existe un relèvement jusqu'à t_0 de $p(t)\}$

1º) $E \neq \emptyset$ car $a \in E$

2º) E est un intervalle.

Soit t_1 la borne supérieure de E. Montrons que $\underline{t_1 = b}$.

Soit V_1 un voisinage de $p(t_1)$ tel que $f^{-1}(V_1) = \bigcup\limits_{\alpha} \hat{V}_\alpha$.

p est continue en t_1, donc il existe δ $(t - t_1) < \delta \Longrightarrow f(t) \in V_1$. Soit $t_2 < t_1$

$$|t_2 - t_1| < \delta \qquad \text{alors} \qquad f(t_2) \in V_1 \quad \text{et} \quad t_2 \in E$$

$p(t)$ est relevée à partir de $\hat{p}_0$ jusqu'à $\hat{p}(t_2)$ soit $V_\alpha^{-1} \subset f^{-1}(V_1)$ et $\hat{p}(t_2) \in V_\alpha^1$.

Soit g la réciproque de $f_{|V_\alpha^2}$, alors $g \circ p(t)$ coïncide avec $\hat{p}(t)$ pour $t < t_1$ et prolonge $\hat{p}(t)$ pour $t \geqslant t_1$ et $|t-t_1| < \delta$ si $t_1 \neq b$ ceci contredit le fait que t_1 est la borne supérieure de E

donc $t_1 = b$ et $E = [a , b]$.

§ 3 .- Théorème de monodromie. 1re forme.

Soit $\hat{S}$ une surface étalée sur S par la projection f et $\hat{S}$ peut être continuée le long de toute courbe $p(t)$ de S à partir de chaque point $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p_0)$.

Si $p(t)$ et $q(t)$ sont deux courbes homotopes dans S, $\hat{p}(t)$ et $\hat{q}(t)$ les relèvement de $p(t)$ et $q(t)$ à partir de $\hat{p}_0 \in \hat{S}$ $(p(0) = q(0) = f(\hat{p}_0))$ alors :

1) $\hat{p}(1) = \hat{q}(1)$

2) $\hat{p}(t)$ et $\hat{q}(t)$ sont homotopes sur $\hat{S}$.

Démonstration.- $p(t)$ et $q(t)$ sont homotopes : soit $F(t , u)$ une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans S telle que

$$F(t , 0) = p(t) \qquad\qquad F(0 , u) = p(0) = q(0)$$

$$F(t , 1) = q(t) \qquad\qquad F(s , u) = p(1) = q(1).$$

Pour u fixé, $F(t , u)$ est une courbe joignant $p(0)$ et $p(1)$. On peut effectuer le relèvement de $F(t , u)$ à partir de $\hat{p}_0$; soit $\hat{F}(t , u)$ avec $\hat{F}(0 , u) = \hat{p}_0$.

1) Montrons que $\hat{F}(t\ ,\ u)$ est une fonction continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\hat{S}$.

Pour u_o fixé on définit E :

$$E = \left\{ t_o \mid t_o \in [0,1] \ ;\ \underset{0 \leqslant t \leqslant t_o}{\hat{F}(t,u)} \text{ est continue en } (t\ ,\ u_o) \right\}$$

a) E est un intervalle $E \neq \{0\}$.

En effet, soit $\hat{V}_o$ un voisinage de $\hat{p}_o$ tel que $f|\hat{V}_o$ est un homéomorphisme de $\hat{V}_o$ sur $f(\hat{V}_o) = V_o$.

$F(t\ ,\ u)$ est continue au point $(0\ ,\ u_o)$:

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \begin{array}{l} |t| < \delta \\ |u-u_o| < \delta \end{array} \Longrightarrow F(t\ ,\ u) \in V_o .$$

soit $\hat{G}(t\ ,\ u) = g \circ F(t\ ,\ u)$ avec $g = (f|\hat{V}_o)^{-1}$. $\hat{G}$ est continue en tout point $(t\ ,\ u_o)$ pour $|t| < \delta$. $f(\hat{G}(t,u)) = F(t\ ,\ u)$ donc $\hat{G}(t\ ,\ u)$ est le relèvement unique de $F(t\ ,\ u)$ à partir de $\hat{p}_o$.

$E \supset \left\{ t \mid 0 \leqslant t < \delta \right\}$.

b) Soit t_1 la borne supérieure de E.

$\hat{S}$ est étalée sur S : il existe un voisinage $\hat{V}_1$ de $\hat{F}(t_1\ ,\ u_o)$ tel que la restriction de f à $\hat{V}_1$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_1$ sur $f(\hat{V}_1) = V_1$.

$\hat{F}(t\ ,\ u_o)$ est continue au point $(t_1\ ,\ u_o)$

$F(t\ ,\ u)$ est continue au point $(t_1\ ,\ u_o)$

il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que : $\begin{array}{l} |t - t_1| < \delta_1 \\ |u - u_o| < \delta_1 \end{array}$

entraine $\hat{F}(t\ ,\ u_o) \in \hat{V}_1$

$F(t\ ,\ u) \in V_1$.

Soit $t_2 < t_1$ avec $|t_2 - t_1| < \delta_1$, donc $t_2 \in E$, et $\hat{F}(t_2\ ,\ u_o) \in \hat{V}_1$. Il en résulte que l'application $u \longrightarrow \hat{F}(t_2,u)$ est continue au point $(t_2\ ,\ u_o)$:

$$\exists \eta \text{ tel que } |u - u_o| < \eta \Longrightarrow \hat{F}(t_2\ ,\ u) \in \hat{V}_1 .$$

Soit $\hat{G}(t\ ,\ u) = g \circ F(t,u)$ $(g = (f|\hat{V}_1)^{-1})$

Pour $|t - t_1| < \delta_1$, $|u - u_0| < \inf(\delta_1 , \eta)$, $\hat{G}(t , u)$ est une application continue de (t , u) en tout point (t , u_0) $f(\hat{G}(t,u)) = F(t , u)$, c'est donc le relèvement unique de $F(t , u)$ dans $\hat{V}_1$ à partir de $\hat{F}(t_2 , u)$.

Conséquence. 1) $t_1 \in E$

2) si $t_1 \neq 1$ alors il existe $t_1 < t_3 < 1$ et $t_3 - t_1 < \delta_1$ donc $t_3 \in E$, ce qui contredit l'hypothèse $t_1 = \sup E$.

En conclusion $t_1 = 1$, $t_1 \in E$, c'est à dire $\underline{E = [0,1]}$.

2) Montrons que $\hat{F}(1,u) = \hat{F}(1,0)$.

L'application $u \longrightarrow \hat{F}(1,u)$ est localement constante. Soit $\hat{V}_0$ un voisinage de $\hat{F}(1 , u_0)$ tel que $f|\hat{V}_0$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_0$ sur $f(\hat{V}_0)$.

L'application $u \longrightarrow \hat{F}(1 , u)$ est continue en u_0 :

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que } |u - u_0| < \alpha \Longrightarrow \hat{F}(1 , u) \in \hat{V}_0.$$

Or $f(\hat{F}(1,u)) = f(\hat{F}\ 1,u_0) = p(1)$, f étant bijective. On a $\hat{F}(t,u) = \hat{F}(1,u_0)$.
Toute application localement constante sur un ensemble connexe $[0,1]$ est constante.

1.1.- <u>Corollaire</u>.- Soit $\hat{S}$ une surface connexe étalée sur S par la projection f et pouvant être continuée le long de toute courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p(0))$.
Si S est simplement connexe f est un homéomorphisme de $\hat{S}$ sur S.

<u>Démonstration</u>.- f est un homéomorphisme local. Montrons que f est bijective.
Soit $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ deux points de $\hat{S}$ tels que $f(\hat{p}_1) = f(\hat{p}_2) = p_0$. $\hat{S}$ est connexe.
Il existe une courbe $\hat{p}(t)$ joignant $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$. Soit $p(t) = f(\hat{p}(t))$, $q(t) = p_0$.
S est simplement connexe, donc $p(t)$ et $q(t)$ sont homotopes. Leurs relèvements à partir de $\hat{p}_1$ sont homotopes, donc $\hat{p}_1 = \widehat{p(1)} = \hat{q}(1) = \hat{p}_2$. L'application f est injective. Elle est surjective par hypothèse donc f est bijective.

<u>Remarques</u>.

1.1.1.- Si S_1 et S_2 sont homéomorphes et si S_1 est simplement connexe alors S_2 est simplement connexe.

1.1.2. Un domaine D du plan convexe est simplement connexe : si $p(t)$ et $q(t)$ sont deux courbes de D telles que $p(0) = q(0)$; $p(1) = q(1)$ elles sont homotopes. En effet, $F(t,u) = (1-u)p(t) + u\,q(t)$ est une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ sur D avec

$$\begin{aligned} F(0,u) &= p(0) \\ F(1,u) &= p(1) \\ F(t,0) &= p(t) \\ F(t,1) &= q(t). \end{aligned}$$

1.2.- Corollaire.- Tout point d'une surface possède un voisinage simplement connexe.

Tout ouvert R_α du plan homéomorphe à un ouvert O_α de S contient un disque convexe donc simplement connexe et l'image par l'homéomorphisme est simplement connexe.

2.- Lemme.- Si $\hat{S}$ est étalée sur S par la projection f et si $\hat{S}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S alors pour tout voisinage V simplement connexe dans S, la restriction de f à chaque composante connexe de l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un homéomorphisme sur V.

Démonstration. Soit V un voisinage simplement connexe de S et $\hat{V}$ une composante connexe de $f^{-1}(V)$. $\hat{V}$ est étalée sur V et $\hat{V}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de V : le relèvement de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_o \in \hat{V}$ est contenu dans la composante connexe $\hat{V}$.

Les conditions du corollaire 1.1 sont donc satisfaites. f est un homéomorphisme de $\hat{V}$ sur V.

2.1.- Corollaire.- Les conditions suivantes sont équivalentes

(p) $\{\hat{S}\ ,\ f\}$ est un revêtement de S

(p') $\hat{S}$ étalée sur S par la projection f peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_o \in f^{-1}(p(0))$.

§ 4.- Germes d'applications locales. Deuxième forme du théorème de Monodromie.

1.- Définition.- Soient S_1 et S_o deux surfaces de classe C^m, f une application d'un ouvert V de S_1 dans S_o.

f <u>est de classe</u> C^p $(p \leqslant m)$ si pour chaque carte φ_α de S_1

$$\varphi_\beta \text{ de } S_o, \quad \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \quad \text{est de classe } C^p.$$

Etant données deux surfaces S_1 et S_o de classe C^m, on considère la classe $\mathcal{C}$ des applications d'un ouvert V_k dans S_o ayant la propriété suivante : si f_1 et f_2 coincident sur une suite de points tendant vers p_o dans V_k elles coincident dans un voisinage de p_o. (Par exemple les fonctions C^A appartiennent à cette classe).

Dans la classe $\mathcal{C}$, on définit une relation d'équivalence : soit $p \in S_1$; on dit que $f_1 \sim f_2$ s'il existe un voisinage V_3 de p où $f_1 \equiv f_2$ $\left(\begin{array}{l} f_1 : V_1 \longrightarrow S_o \\ f_2 : V_2 \longrightarrow S_o \end{array}\right)$.

2.- <u>Définition</u>.- La classe d'équivalence d'une fonction f est un <u>germe d'applications locales de</u> S_1 dans S_o. On le note $\gamma_p(f)$.

3.- <u>Etude de l'ensemble</u> Γ <u>des germes d'applications locales</u>.

3.1.- <u>Voisinage d'un point de</u> Γ

Soit $\gamma_p(f) \in \Gamma$. On définit $\mathcal{V}(\gamma_p(f)) = \left\{\gamma_q(f), \ q \in V, \ V \text{ est un voisinage de } p \text{ où } f \text{ est définie}\right\}$. $\left\{\mathcal{V}(\gamma_p(f))\right\}$ forme une base de voisinages pour une topologie sur Γ. On vérifie immédiatement que les axiomes des bases de voisinages sont vérifiées pour les ensembles ainsi définis.

3.2.- <u>Lemme</u>.- Γ est un espace topologique séparé.

<u>Démonstration</u>.- Soient $\gamma_p(f)$ et $\gamma_q(g)$ deux points distincts de Γ.

1) $p \neq q$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages disjoints de p et q, alors $\mathcal{V}^1 \gamma_p(f) \cap \mathcal{V}^2 \gamma_q(g) = \emptyset$.

2) $p = q$. $f(p) \neq g(q)$. Soient V_1^o et V_2^o deux voisinages disjoints de $f(p)$ et $g(q)$ dans S_o. Alors il existe V voisinage de p tel que $\begin{array}{l} f(V) \subset V_1^o \\ g(V) \subset V_2^o \end{array}$

donc $\forall p_1 \in V$, $f(p_1) \neq g(p_1) \Longrightarrow \mathcal{V}^1\gamma_p(f) = \left\{\gamma_{p_1}(f) \ ; \ p_1 \in V\right\}$ et

$\vartheta^2(\gamma_q(g)) = \left\{\gamma_{p_1}(g)\ p_1 \in V\right\}$ disjoints.

2') $f(p) = g(q)$ mais $\gamma_\gamma(f) \neq \gamma_q(g)$, alors il existe un voisinage V de $p = q$, tel que pour tout p_1 de V distinct de p, $f(p_1) \neq g(p_1)$. En effet ; sinon il existerait une suite $\{p_n\}$ convergeant vers p telle que $f(p_n) = g(p_n)$, c'est à dire $f \equiv g$ dans un voisinage de p donc $f \sim g$ et $\gamma_p(f) = \gamma_q(g)$ ce qui contredit l'hypothèse.

Donc : $\forall p_1 \in V$ $\qquad f(p_1) \neq g(p_1) \qquad \gamma_{p_1}(f) \neq \gamma_{p_1}(g)$.

3.3.- <u>Définition</u>.- Γ munie de cette topologie est le <u>faisceau des germes d'applications locales de</u> S_1 <u>dans</u> S_o.

3.4.- <u>Lemme</u>.- L'application $F : \Gamma \longrightarrow S_1$ définie par $\gamma_p \longrightarrow p$ fait de Γ une surface étalée sur S_1.

F est un homéomorphisme local de Γ sur S_1.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de S_1, Θ un ouvert de Γ_1, alors $F^{-1}(\mathcal{U})$ et $F(\Theta)$ sont respectivement des ouverts de Γ et de S_1 : ceci résulte de la topologie de Γ définie à partir de celle de S_1.

F est localement bijective :

F est surjective : évident

F est localement injective. Soit $\gamma_p(f)$ un point de Γ et $\mathcal{V}(\gamma_p(f))$ un voisinage de $\gamma_p(f)$ défini à partir d'un voisinage V de p. F est un homéomorphisme de $\mathcal{V}$ sur V.

3.5.- <u>Remarque</u>.- Si on considère les germes de fonctions analytiques. Γ a une structure naturelle de surface de Riemann.

<u>Exemples</u> : 1 Si S_1 et S_o sont le plan complexe, les germes γ_p de fonctions analytiques peuvent être identifiés aux développements de Taylor, c'est à dire aux séries entières convergentes.

2 Si S_o est la sphère de Riemann, Γ est le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur S_1.

3.6.- <u>Définition</u>.- Soit γ_p un point de Γ, la composante connexe de γ_p dans Γ s'appelle le <u>prolongement complet</u> de γ_p.

γ_p peut être prolongé le long d'une courbe $p(t)$ s'il existe un relèvement de $p(t)$ dans Γ à partir de γ_p.

(Γ est étalée sur S_1 ; si donc le relèvement existe, il est unique).

4.- <u>Théorème de Monodromie</u> (<u>deuxième forme</u>).

Soient S_1 et S_o deux surfaces de classe C^m, γ_p un germe d'applications locales de S_1 dans S_o. Si γ_p peut être prolongé le long de chaque courbe $p(t)$ dans S_1 et si S_1 est <u>simplement connexe</u>, il existe une transformation g de S_1 dans S_o définie sur S_1 telle que chaque germe γ_q obtenu en prolongeant γ_p soit de la forme $\gamma_q(g)$.

<u>Démonstration</u>.- Soit $\hat{S}$ la composante connexe de γ_p dans Γ.

$\hat{S}$ est étalée sur S_1 par la projection F

$\hat{S}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S_1 à partir de γ_p d'après le lemme (2 § 3) F est un homéomorphisme de $\hat{S}$ sur S_1.

Pour $q \in S_1$ il existe $\gamma_q = F^{-1}(q)$ unique dans $\hat{S}$. On prend $g(q)$ égale à la valeur en q du germe γ_q.

Chapitre III

§ 1.- Fonctions harmoniques et sous-harmoniques sur une surface de Riemann

A.- Fonctions harmoniques sur une surface de Riemann S

1.- Définition.- Une fonction à valeur réelle $p \longrightarrow h(p)$ est harmonique au voisinage du point p_o si pour toute carte φ_α de S en p_o, la fonction $h \circ \varphi_\alpha(z)$ est harmonique au voisinage de $z_o = \varphi_\alpha^{-1}(p_o)$.

Justification : si φ_β est une autre carte en p_o de S, $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ est analytique et $h \circ \varphi_\beta = h \circ \varphi_\alpha \circ g_{\alpha\beta}$

$$\left.\begin{array}{l} g_{\alpha\beta} \text{ est analytique} \\ h \circ \varphi_\alpha \text{ est harmonique} \end{array}\right\} \Longrightarrow h \circ \varphi_\beta \text{ est harmonique au voisinage de } z = \varphi_\beta^{-1}(p_o).$$

Une fonction harmonique sur D est une fonction harmonique dans le voisinage de chaque point de D.

2.- Propriété des fonctions harmoniques

Principe du maximum : si $h(p)$ est harmonique non constante sur un domaine D elle n'a ni maximum, ni minimum sur D.

Corollaire.- Si $h(p)$ est continue sur un compact K, harmonique à l'intérieur de K , elle atteint son maximum sur la frontière.

3.- Problème de Dirichlet.- Etant donné un domaine $\mathcal{D}$, de frontière $\partial\mathcal{D} \neq \emptyset$ sur une surface de Riemann S et une fonction f continue, définie sur $\partial\mathcal{D}$, existe-t-il une fonction harmonique dans D, continue à la frontière et égale à f sur ∂D ?

Rappel.- Ce problème est résolu simplement si D est le disque de rayon R.

Soit $f(Z)$ une fonction continue sur $|Z| = R$; il existe une fonction $h(Z)$ harmonique dans $|Z| < R$, continue sur le disque $|Z| \leqslant R$ et égale à $f(Z)$ sur la frontière.

$$|Z| < R \qquad h(Z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, Z)\, f(\zeta)\, d\theta$$

où $\zeta = Re^{i\theta}$ $\qquad K(\zeta , Z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |Z|^2}{|\zeta - Z|^2}$ (noyau de Poisson).

La résolution du problème de Dirichlet nous conduit à faire une étude préalable des fonctions sous-harmoniques.

B.– Fonctions sous-harmoniques

1.– Définition.– Une fonction réelle $p \longrightarrow u(p)$ définie sur une surface de Riemann S est sous harmonique dans S si elle vérifie les propriétés (p) et (p').

(p) Pour tout compact K contenu dans S et toute fonction $h(p)$ continue sur K, harmonique dans $\overset{\circ}{K}$ (intérieur de K) l'inégalité $u(q) \leqslant h(q)$ pour $q \in \partial K$ entraine $u(p) \leqslant h(p)$ pour $p \in K$.

(p') f est semi continue supérieurement. On ne considère que les fonctions sous harmoniques continues dans S.

2.– Propriétés

Lemme 1.– Si $u_1, \dots, u_n$, sont n fonctions sous harmoniques, continues dans S la fonction $u = \underset{i=1,\dots n}{\mathrm{Max}}(u_i)$ est sous-harmonique continue.

Démonstration :

1) $u = \underset{i=1,\dots n}{\mathrm{Max}}(u_i)$ est continue dans S

2) soit $K \subset S$ et $h(p)$ harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K telle que $u(q) \leqslant h(q)$ pour $q \in \partial K$, alors $\forall i$, $u_i(q) \leqslant h(q)$ pour $q \in \partial K$

donc $\forall i$, $u_i(p) \leqslant h(p)$ pour $p \in K \Longrightarrow u(p) \leqslant h(p)$ pour $p \in K$.

Lemme 2.– Soit u_n une suite non croissante de fonctions sous harmoniques continues dans S, convergeant vers une fonction continue u. Alors u est sous harmonique.

Démonstration. Soit K un compact, $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K, ∂K la frontière de K et $h(p)$ harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K telle que

$$u(q) \leqslant h(q) \quad \text{pour} \quad q \in \partial K.$$

Montrons que pour p appartenant à K : $u(p) \leqslant h(p)$.

1) $u_n(p)$ converge uniformément vers $u(p)$: Soit $p_o \in S$

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n(p_o) = u(p_o) = \inf\limits_n u_n(p_o)$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o$ tel que

$$u(p_o) \leqslant u_{n_o}(p_o) \leqslant u(p_o) + \frac{\varepsilon}{3} .$$

Les fonctions $u_{n_o}(p)$ et $u(p)$ sont continue en p_o.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_o$ (voisinage de p_o) tel que :

$$\forall p \in V_o \Longrightarrow |u(p) - u(p_o)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow |u_{n_o}(p) - u_{n_o}(p_o)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'ensuit que pour p dans V_o on a :

$$|u(p) - u_{n_o}(p)| \leqslant |u(p) - u(p_o)| + |u(p_o) - u_{n_o}(p_o)| + |u_{n_o}(p_o) - u_{n_o}(p)|$$

d'où $u_{n_o}(p) \leqslant \varepsilon + u(p)$,

et pour $n \geqslant n_o$

, $p \in V_o$ $\qquad u_n(p) \leqslant u_{n_o}(p) \leqslant u(p) + \varepsilon$.

K est un compact : soit $\{V_o\}_{p_o \in K}$ un recouvrement de K, on peut en extraire un recouvrement fini : soit $V_o, V_1, \dots V_i, V_r$ les voisinages de $p_o, p_1, \dots p_i, p_r$.

Pour chaque point p, il existe un entier n_i tel que pour $n \geqslant n_i$, $p \in V_i$,

$u_n(p) \leqslant u_{n_i}(p) \leqslant u(p) + \varepsilon$.

Soit $N_o = \mathrm{Max}(\qquad n_i \qquad)$:

<u>$\forall p \in S$</u> : $\exists i$ tel que $p \in V_i$ et pour $n \geqslant N_o$

$$u_n(p) \leqslant u(p) + \varepsilon .$$

2) La suite converge uniformément, donc pour $n \geqslant N_0$ et pour $q \in \partial K$

$$u_n(q) \leqslant u(q) + \varepsilon \leqslant h(q) + \varepsilon .$$

La fonction u_n est sous harmonique on a :

pour $\begin{matrix} p \in K \\ n \geqslant N_0 \end{matrix}$ $\quad u_n(p) \leqslant h(p) + \varepsilon$.

Soit en passant à la limite $u(p) \leqslant h(p) + \varepsilon$, pour $p \in K$, et pour $\varepsilon > 0$.

L'inégalité étant vraie pour tout ε positif, on a : pour $p \in K$ $u(p) \leqslant h(p)$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 3.- Soit $u(p)$, continue, sous harmonique dans S. Soit $p_0 \in S$ et φ_α une carte normalisée en p_0, alors la fonction $U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ définie sur le disque $|z| \leqslant r$ satisfait

$$(1) \qquad U(0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta$$

Démonstration. $U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ est continue sur le disque $|z| \leqslant r$, il en résulte que la fonction $H(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta , z)U(\zeta)d\theta$ $(\zeta = re^{i\theta}$ $K(\zeta , z)$ noyau de Poisson) est harmonique à l'intérieur du disque, continue sur le disque fermé et égale à $U(z)$ sur la frontière.

D'après la propriété de la valeur moyenne d'une fonction harmonique on a :

$$H(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta)d\theta \qquad \zeta = re^{i\theta}$$

or $U(z) = H(z)$ pour $|z| = r \Longrightarrow U(z) \leqslant H(z)$ pour $|z| \leqslant r$, en particulier

$$U(0) \leqslant H(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta .$$

Lemme 4.- Soit $w(p)$ une fonction continue, satisfaisant à l'inégalité (1) du lemme 3, pour toute carte normalisée en tout point d'un domaine O. Soit $h(p)$ une fonction harmonique dans D telle que $w(p) \leqslant h(p)$ dans D. S'il existe un point p_0 de D où $w(p_0) = h(p_0)$ alors pour tout point p de D on a $w(p) = h(p)$.

Remarque.— Les fonctions sous harmoniques continues dans D satisfaisant à l'inégalité (1) vérifient la propriété du lemme 4.

Démonstration.— Soit $E = \{p/p \in E \; : \; w(p) = h(p)\}$.

1) $E \neq \emptyset \quad p_o \in E$

2) E est fermé car $w - h$ est continue et $E = (w - h)^{-1}\{0\}$.

3) E est ouvert : Soit $p_o \in E$ et $w(p_o) = h(p_o)$. Soit φ_α une carte normalisée en p_o, on considère les fonctions

$$W(z) = w \circ \varphi_\alpha(z)$$

$$H(z) = h \circ \varphi_\alpha(z).$$

On a $W(0) - H(0) = 0$.

Par hypothèse
$$\left.\begin{aligned} W(0) &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\rho e^{i\theta})d\theta \\ H(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\rho e^{i\theta})d\theta \end{aligned}\right\} \text{pour } \rho \leqslant r$$

$$0 = W(0) - H(0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(W(\rho e^{i\theta}) - H(\rho e^{i\theta}))d\theta$$

or W et H sont continues et $W(re^{i\theta}) \leqslant H(re^{i\theta})$ par hypothèse, donc $W(\rho e^{i\theta}) = H(\rho e^{i\theta})$ pour $\rho \leqslant r \implies W(z) = H(z)$ pour $|z| \leqslant r \implies w(p) = h(p)$ pour $p \in \varphi_\alpha\{z \; ; \; |z| \leqslant r\}$.

E' est ouvert et fermé dans D donc $E = D$.

3.— <u>Théorème fondamental</u>. Les propriétés (p)et (p') sont équivalentes :

(p) $u(p)$ est continue sous-harmonique dans S

(p') $u(p)$ est continue et pour toute carte φ_α normalisée en $p_o \in S$ la fonction $U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ satisfait à l'inégalité (1)

$$U(0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta})d\theta.$$

<u>Démonstration</u>.

I. (p) $\implies$ (p') : lemme 3

II. (p') $\implies$ (p) : $u(p)$ est continue. Soit K un compact de S, $h(p)$ harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K et telle que $u(q) \leqslant h(q)$ pour $q \in \partial K$.

u et h sont continues : soit $m = \max\limits_{p \in K} (u - h)(p)$.

Soit $E = \left\{ p \in \overset{\circ}{K},\ u(p) - h(p) = m \right\}$.

Deux cas : 1) $E = \emptyset$, donc m est atteint sur la frontière $\Longrightarrow m \leqslant 0 \Longrightarrow u(p) - h(p) \leqslant m$ $\leqslant 0 \Longrightarrow u(p) \leqslant h(p)$ $p \in K$.

2) $E \neq \emptyset$, il existe $p_o \in \overset{\circ}{K}$ tel que $u(p_o) - h(p_o) = m$, or $h(p) + m$ est harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, $u(p) \leqslant h(p) + m$ et $u(p) = h(p) + m$ dans la composante connexe K_1 de K contenant p_o (lemme 4).

$u(p) = h(p) + m$ sur $\partial K_1 \subset \partial K$ donc $m \leqslant 0$

donc $u(p) \leqslant h(p)$ pour $p \in K$.

$\Longrightarrow u(p)$ est sous-harmonique.

3.1.- Corollaire.- La propriété (p') caractérisant les fonctions sous-harmoniques met en évidence le caractère local de la sous-harmonicité d'une fonction.

3.2.- Corollaire.- Si $u_1, \dots u_n$ sont sous harmoniques, continues dans S,
Si $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont des scalaires positifs
alors

$$u = \sum_1 \lambda_i u_i \quad \text{est sous harmonique continue.}$$

Démonstration.- 1) u est continue

2) Montrons que u vérifie (p').

Soit φ_α une carte normalisée en $p_o \in S$.

$$U(0) = u \circ \varphi_\alpha(0) = \sum^n \lambda_i\, u_i \circ \varphi_\alpha(0)$$

$$U(0) \leqslant \sum_1^n \frac{\lambda i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}_i(re^{i\theta})d\theta$$

$$U(0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta})d\theta$$

Lemme 5.- Principe du maximum.

Soit $u(p)$ une fonction continue, sous harmonique dans un domaine D relativement compact ($\bar{D}$ compact). Si $\overline{\lim\limits_{p \to q}}\ u(p) \leqslant M$ pour tout point $q \in \partial D$ alors $u(p) \leqslant M$ pour $p \in D$.

<u>Démonstration</u>.- Soit $m = \sup\limits_{p \in D} u(p)$. Il existe une suite $\{p_k\}_{k \in N}$ telle que $\lim\limits_{k \to \infty} u(p_k) = m$. Or $\{p_k\} \subset \bar{D}$ compact, on peut extraire une sous suite convergente $\{p_{k_n}\}$.

1) $\{p_{k_n}\}$ <u>converge vers</u> $p_o \in D$.

u est continue $\Longrightarrow \lim u(p_{k_n}) = u(p_o) = m$. La fonction $h(p) = m$ est harmonique dans D et satisfait à $u(p) \leqslant m$ d'après le lemme 4, $u(p) = m$ dans D, il en résulte $m = \overline{\lim\limits_{p \to q}}\ u(p) \leqslant M$.

2) $\{p_{k_n}\}$ <u>converge vers</u> $q_o \in \partial D$

$m = \lim\limits_{n \to \infty} u(p_{k_n}) \leqslant \overline{\lim\limits_{p \to q_o}}\ u(p_o) \leqslant M$.

<u>Lemme</u> 6.- <u>Critère de sous-harmonicité</u>.

Soit $u(p)$ une fonction de classe C^2 dans S, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $u(p)$ est sous-harmonique

b) pour toute carte φ_α normalisée en p_o : $\mathcal{U} = u \circ \varphi_\alpha$ satisfait à $\Delta\,\mathcal{U} \geqslant 0$.

<u>Démonstration</u>.- a $\Longrightarrow$ b : si $\mathcal{U} = u \circ \varphi_\alpha$, u de classe $C^2 \Longrightarrow \mathcal{U}$ de classe C^2.

$z = x + iy$

$$\mathcal{U}(z) = \mathcal{U}(0) + x\,\mathcal{U}_x(0) + y\,\mathcal{U}_y(0) + \left[\frac{1}{2}\, x^2\,\mathcal{U}_{x^2}(0) + 2xy\,\mathcal{U}_{xy}(0) + y^2\,\mathcal{U}_{y^2}(0)\right] + \mathcal{R}(x\,,\,y)$$

avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\mathcal{R}(x\,,\,y)}{(x^2+y^2)} = 0$.

$z = re^{i\theta}$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta})d\theta = 2\pi\,\mathcal{U}(0) + \frac{1}{2}\left[\pi r^2\,\mathcal{U}_{x^2}(0) + \pi r^2\,\mathcal{U}_{y^2}(0)\right] + R_1$$

$$(2) \quad \Delta\,\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_{x^2}(0) + \mathcal{U}_{y^2}(0) = 4 \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathcal{U}(re^{i\theta}) - \mathcal{U}(0))d\theta\right]$$

car $\frac{1}{r^2} R \longrightarrow 0$, $\frac{R_1}{r^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R(re^{i\theta})}{r^2} d\theta \longrightarrow 0$.

D'après le lemme 3 : $\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta}) \geqslant \mathcal{U}(0)$ donc $\Delta \mathcal{U}(0) \geqslant 0$.

b $\Longrightarrow$ a.

– Si $\Delta \mathcal{U} > 0$ alors la formule (2) montre que $\mathcal{U}(0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta}) d\theta$; ce qui d'après le théorème fondamental est caractéristique des fonctions sous harmoniques.

– Si $\Delta \mathcal{U} \geqslant 0$, on considère $V(z) = \mathcal{U}(z) + \varepsilon |z|^2$.

$\Delta V = \Delta \mathcal{U} + 4\varepsilon$ donc $\Delta V > 0$ donc V est sous harmonique. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\mathcal{U}$ est sous harmonique d'après le lemme 2.

4.– <u>Fonction harmonique associée à une fonction sous harmonique</u>

Soit $u(p)$ continue, dans S, $p_0 \in S$ et φ_α une carte normalisée en p_0.

Soit $G = \varphi_\alpha \{ z \ ; \ |z| < R \}$ G est un ouvert de O_α.

4.1.– <u>Définition</u>.– On définit la fonction $v(p) = P_G\, u(p)$ de la façon suivante

si $p \notin G$ $\quad v(p) = u(p)$

si $p \in G$ $\quad v(p) = V[\varphi_\alpha^{-1}(p)]$ où $V(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, z) U(\zeta) d\theta$

avec $\zeta = Re^{i\theta}$ $K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$, $U(\zeta) = u(\varphi_\alpha(\zeta))$.

4.2.– <u>Propriété de</u> $P_G u$

1) $P_G(u)$ est continue. En effet, $v(p)$ est continue dans G et $\complement(\overset{\circ}{G})$.

Sur la frontière on a ($q \in$ frontière de G) : $\lim\limits_{\substack{p \to q \\ p \in G}} u(p) = \lim\limits_{\substack{p \to q \\ p \in G}} v(p) = u(q)$.

2) $P_G(u) \geqslant u$

$p \notin G$ $\quad P_G u(p) = u(p)$

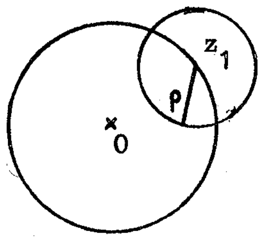
$p \in G$ $\quad P_G(u) = v(p) \geqslant u(p)$ $[v(p)$ fonction harmonique associée à $u(p)]$.

<u>Lemme</u> 7.– Si u est sous harmonique dans S, $P_G u$ est harmonique dans G, sous harmonique dans S.

Démonstration.– $P_G u$ est harmonique dans G (évident d'après sa construction)

$P_G u$ est sous harmonique dans $C\overset{o}{G}$ car égale à $u(p)$.

Plaçons nous en un point p_1 de la frontière de G. $p_1 \in \partial G$ soit $\varphi_\alpha^{-1}(p_1) = z_1$ et $\mathcal{V}(z) = P_G u \circ \varphi_\alpha(z)$.



$$z \in G \quad \mathcal{V}(z) = V(z)$$

$$z \notin G \quad \mathcal{V}(z) = \mathcal{U}(z).$$

$$\mathcal{V}(z_1) = \mathcal{U}(z_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(z_1 + \rho e^{i\varphi})d\varphi .$$

Or $\mathcal{U}(z) \leqslant \mathcal{V}(z)$ (propriété 2), donc

$$\mathcal{V}(z_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{V}(z_1 + \rho e^{i\varphi})d\varphi.$$

$\mathcal{V}$ satisfait à (p'). $P_G u$ est sous harmonique dans S.

5.– Famille de Perron de fonctions

5.1.– Définition.– Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions sous harmoniques dans un domaine D est une famille de Perron si elle satisfait aux propriétés suivantes :

a) si $u_1, u_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathrm{Max}(u_1, u_2) \in \mathcal{F}$

b) $\forall\ u \in \mathcal{F}$, $v = P_G u \in \mathcal{F}$.

5.2.– Théorème fondamental.– Si $\mathcal{F}$ est une famille de Perron et si $h(p) = \sup\limits_{v \in \mathcal{F}} v(p)$ alors

ou bien $h(p) \equiv +\infty$

ou bien $h(p)$ est harmonique dans ~~D~~

Démonstration.– Soit $p_o \in D$, $h(p_o) = \sup\limits_{v \in \mathcal{F}} v(p_o)$. Il existe une suite $\{v_n\}$: $v_n(p_o) \longrightarrow h(p_o)$. Soit φ_α une carte normalisée en p_o et $G = \varphi_\alpha\{|z| < R\}$.

On définit par récurrence :

$$u_1 = P_G(v_1)\ , \ \ldots,\ u_{n+1} = P_G(\mathrm{Max}\{u_n, v_{n+1}\}).$$

- $\{u_n\} \in \mathcal{F}$ et forment une suite non décroissante de fonctions harmoniques dans G.
- $v_n(p_o) \leqslant u_n(p_o) \leqslant h(p_o) \Longrightarrow$ cette suite converge vers $h(p_o)$.

Soit $\mathcal{U}_n(z) = u_n \circ \varphi_\alpha(z)$.

Soit $\rho < R$. Posons
$$K_o = \min_{\begin{cases} |\zeta| = R \\ |z| \leqslant \rho \end{cases}} K(\zeta , z) \qquad K_1 = \operatorname{Max}_{\begin{cases} |\zeta| = R \\ |z| \leqslant \rho \end{cases}} K(\zeta , z)$$
$$K_o > 0 \qquad K_1 < \infty .$$

$\forall\, m,n, \in N$ on a

$m > n$
$$0 \leqslant \mathcal{U}_m(z) - \mathcal{U}_n(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta , z)(\mathcal{U}_m(\zeta) - \mathcal{U}_n(\zeta))d\theta$$
$$K_o \int_0^{2\pi} (\mathcal{U}_m(\zeta) - \mathcal{U}_n(\zeta))d\theta \leqslant \mathcal{U}_m(z) - \mathcal{U}_n(z) \leqslant K_1 \int_0^{2\pi} (\mathcal{U}_m(\zeta) - \mathcal{U}_n(\zeta))d\theta$$
$$2\pi K_o(\mathcal{U}_m(0) - \mathcal{U}_n(0)) \leqslant \mathcal{U}_m(z) - \mathcal{U}_n(z) \leqslant 2\pi K_1(\mathcal{U}_m(0) - \mathcal{U}_n(0)),$$
donc pour $p \in G$ et $|\varphi_\alpha^{-1}(p)| = \rho \quad \rho < R$, on a :
$$2\pi K_o(u_m(p_o) - u_n(p_o)) \leqslant u_m(p) - u_n(p) \leqslant 2\pi K_1 \ (u_m(p_o) - u_n(p_o)).$$

1) Si $h(p_o) \equiv +\infty$. Quand $m \longrightarrow +\infty$, $u_m(p_o) \longrightarrow +\infty$, donc $\lim u_n(p) = +\infty \Longrightarrow h(p) = +\infty$ pour $p \in \varphi_\alpha\{|z| = \rho\}$.

Donc, $h(p_o) = \infty \Longrightarrow h(p) = \infty$ dans l'ouvert $\varphi_\alpha\{|z| < R\}$.

2) Si $h(p_o) < +\infty$, alors $u_m(p)$ converge uniformément dans l'ouvert $\varphi_\alpha\{|z| < \rho\}$, $\rho < R$. La limite uniforme de fonctions harmoniques est harmonique.

Soit $H(z) = \lim\limits_{m \to \infty} \mathcal{U}_m(z)$ $\quad H(z)$ est harmonique dans $|z| < R$ et $H(0) = h(p_o)$.

Soit $p_1 = \varphi_\alpha(z_1) \quad p_1 \in G$ et $|z_1| < \frac{R}{2}$.

Soit $\tilde{G} = \varphi_\alpha\{|z - z_1|\} < R_1$, $R_1 = \frac{R}{2}$.

Soit $\{\tilde{v}_n\}$ une suite $\tilde{v}_n(p_1)$ tendant vers $h(p_1)$. On définit

$$\tilde{u}_1 = P_{\tilde{G}}(\tilde{v}_1), \ldots, \tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{G}}(\mathrm{Max}\{\tilde{u}_n, \tilde{v}_{n+1}, u_{n+1}\}).$$

On a :

$\tilde{u}_n(p) \leqslant \tilde{u}_{n+1}(p)$

$\tilde{v}_n(p_1) \leqslant \tilde{u}_n(p_1) \leqslant h(p_1) \Longrightarrow \tilde{u}_n(p_1)$ tend vers $h(p_1)$.

Soit $\tilde{\mathcal{U}}_n(z) = \tilde{u}_n \circ \varphi_\alpha(z)$.

1) Supposons $h(p_1) = \infty$ alors $\tilde{\mathcal{U}}_m(z) \longrightarrow +\infty$ dans $|z - z_1| < R_1$ en particulier $\tilde{\mathcal{U}}_m(0) \longrightarrow \infty$ or $\tilde{\mathcal{U}}_n(0) \leqslant h(p_o) < +\infty$ d'où la contradiction.

2) $h(p_1) < +\infty$ alors $\tilde{\mathcal{U}}_m(z)$ tend uniformément vers $\tilde{H}(z)$ dans le disque $|z - z_1| < R_1$ et $\tilde{H}(z)$ est harmonique. En p_o: $\tilde{H}(0) \leqslant H(0) = h(p_o)$. Mais $\tilde{u}_n \geqslant u_n$ pour tout $n \Longrightarrow \tilde{H}(z) \geqslant H(z)$. D'après le lemme 4 $\tilde{H}(z) = H(z)$.

Donc $h(p_1) = \tilde{H}(z_1) = H(z_1)$. Alors $h(p) = H(\varphi_\alpha^{-1}(p))$ dans un voisinage de p_o. Il s'ensuit que $\{p : h(p) < \infty$ est ouvert, et que $h(p)$ est harmonique dans cet ensemble. Puisque $\{p : h(p) \equiv \infty\}$ est aussi ouvert, un de ces ensembles est vide.

§ 2.- Résolution du problème de Dirichlet

2.1.- Principe de Perron

Soit D = domaine d'une surface de Riemann

Sa frontière $\partial D \neq \emptyset$.

$f(q)$ une fonction réelle définie sur ∂D.

Soit $\mathcal{F} = \{v$; sous harmonique dans D telles que $\forall q \in \partial D \ \lim\limits_{p \to q} v(p) \leqslant f(q)\}$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille de Perron c'est à dire

si v_1 et $v_2 \in \mathcal{F}$ $\sup(v_1\ v_2) \in \mathcal{F}$.

si $v \in \mathcal{F}$ $P_G(v) \in \mathcal{F}$ $\forall\ G \subset D$

Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $h(p) = \sup\limits_{v \in \mathcal{F}} v(p)$ est une fonction harmonique ou infinie dans D.

$h(p)$ est la fonction de Perron correspondant aux valeurs aux bords $f(q)$.

Remarque 1.- Notons que $\overline{\lim\limits_{p \to q}}\ v(p) \leqslant f(q)$ et que $h(p) = \sup v(p)$.

Mais que nous n'avons pas : $\overline{\lim\limits_{p \to q}}\; h(p) \leqslant f(q)$.

Exemple : Soit $D = \left\{ Z \; ; \; o < |Z| < 1 \right\}$

$$\partial D = \left\{ |Z| = 1 \qquad Z = 0 \right\}$$

$$f(z) = |Z|.$$

$\mathcal{F} = \{ v$: sous harmonique telle que

$$\overline{\lim_{p \to q}}\; v(p) \leqslant 1 \quad \text{sur} \quad |Z| = 1$$
$$\overline{\lim_{p \to 0}}\; v(p) \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad |Z| = 0 \, . \}$$

Posons $v_{\varepsilon}(Z) = \quad + \varepsilon \log |Z| \qquad \varepsilon \geqslant 0$

$v_{\varepsilon}(Z) \in \mathcal{F} \;\forall \varepsilon \Longrightarrow$

$\forall Z \quad h(Z) \geqslant \varepsilon \log|Z| + 1$ donc $h(Z) \geqslant 1$

donc $\overline{\lim\limits_{Z \to 0}}\; h(Z) \geqslant 1 > f(0)\, v(Z) \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow v(Z) \leqslant 1$ donc $h(Z) \leqslant 1$ d'où $h(Z) \equiv 1$

$p \to q$

Remarque 2.-

$\mathcal{F} = \{ v$: sous harmonique dans D, telle que $\overline{\lim\limits_{p \to q}}\; v(p) \leqslant f(q)$ et

$$|v(p)| < M \}$$

$\mathcal{F}$ est encore une famille de Perron

$|h(p)| \leqslant M$ donc $h(p)$ ne peut être infinie

et $h(p)$ est harmonique dans D.

2.2.- Point régulier de la frontière d'un domaine

2.2.1.- Définition

a) Soit D un domaine de S. $q \in \partial D$ sa frontière. Une fonction $\beta(p)$ sous harmonique dans D, est une barrière à q si il existe un voisinage de q tel que

$$\beta(p) = -1 \qquad p \notin V$$
$$\beta(p) \leqslant 0 \qquad p \in D$$
$$\lim_{p \to q} \beta(p) = 0$$

b) $q \in \partial D$ est régulier $\Longleftrightarrow \forall V$ voisinage de q, il existe une fonction barrière $\beta(p)$.

2.2.1.- Condition suffisante pour qu'un point soit régulier.

Définition.- Une courbe $p(t)$ de S, $t \in [a\ ,\ b]$ est analytique $\Longleftrightarrow$ pour tout t_o, φ_α étant une carte à $p(t_o)$, la fonction

$Z(t) = \varphi_\alpha^{-1}[p(t)]$ a une représentation

$Z(t) = \sum a_n(t - t_o)$ pour $|t - t_o| < \varepsilon$ avec $a_1 \neq 0$.

Condition.- Soit $q_o \in \partial D$, pour que q_o soit régulier, il suffit qu'il existe une courbe analytique $p(t) \subset$ complémentaire de D, $t \in [a, b]$ où $p(a) = q_o$.

Démonstration.-

$$z(t) = \sum_0^\infty a_n(t - a)^n \quad \text{posons} \quad \zeta = t + i$$

$$z(\zeta) = \sum_0^\infty a_n(\zeta - a)^n \qquad |\zeta - a| < \varepsilon\ .$$

$z(\zeta)$ est une fonction holomorphe donc injective pour $|\zeta - a| < \delta$, car $a_1 \neq 0$ et on peut définir la fonction inverse

$$\zeta = \zeta(z)\ :\ \tilde{V} \longrightarrow |\zeta - a| < \delta\ .$$

Posons $\omega = |\zeta - a|^{\frac{1}{2}}$, choisissons la détermination de $\arg(\zeta - a) \in [0\ ,\ 2\pi[$

$\arg \omega \in [0\ ,\pi[$ $\qquad \omega\ :\ \{|\zeta - a| < \delta \quad \zeta - a \neq \text{réel} > 0\} \longrightarrow$ $\{|\omega| < \delta^{\frac{1}{2}}\ \ \mathrm{Im} > 0\}$. est définie dans $\tilde{V} \cap \varphi_\alpha^{-1}(D)$. Il existe une transformation holomorphe :

$$\omega \longrightarrow W = \frac{c\omega + d}{e\omega + f} \quad \text{telle que}$$

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ \mathrm{Im} W(e^{i\theta}\,\delta^{\frac{1}{2}}) = -1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ \mathrm{Im}\, W < 0 \end{cases}$$

Posons
$$\beta(Z) = \begin{cases} -1 & Z \notin \tilde{V} \\ \mathrm{Im}\, W(Z) \quad \text{pour} & Z \in \tilde{V} \cap D \end{cases}$$

$\beta(Z)$ est une fonction barrière pour $p(a)$.

2.3.- Théorème.

Soit $\begin{cases} D \text{ un domaine de } S \\ q_o \text{ point régulier de } \partial D \\ f(q) \text{ une fonction réelle définie sur } \partial D \ |f(q)| < M. \end{cases}$

Soit $h(p)$ la fonction de Perron associée à la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ v \ ; \text{ sous harmonique } |v(p)| < M \ \forall q \in \partial D \ \overline{\lim_{p \to q}} \ v(p) \leqslant f(q) \right.$$

alors $\underline{\lim}_{q \to q_o} f(q) \leqslant \underline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \leqslant \overline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \leqslant \overline{\lim}_{q \to q_o} f(q).$

Démonstration.

a) Soit $A = \underline{\lim}_{q \to q_o} f(q) \qquad -M \leqslant A.$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de q_o tel que

$q \in V \cap \partial D \implies A - \varepsilon < f(q)$

q_o régulier $\implies$ il existe une barrière $\beta(p)$ telle que $\beta(p) \equiv -1$ hors de V.

Soit $v(p) = (A + M)\beta(p) + A - \varepsilon$

$A + M \geqslant 0 \implies v(p)$ sous harmonique.

Si $p \notin V \qquad v(p) = -M - \varepsilon < \inf_{q \in \partial D} f(q)$

Si $p \in V \qquad v(p) \leqslant A - \varepsilon \leqslant \inf_{q \in \partial D \cap V} f(q)$

donc $\overline{\lim}_{p \to q \in \partial D} \ v(p) \leqslant f(q)$

et $\underline{v \in \mathcal{F}}$

donc $h(p) \geqslant v(p)$

et $\underline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \geqslant \lim_{p \to q_o} v(p) = A - \varepsilon$

ε étant arbitraire : $\underline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \geqslant A$

b) Soit $\overline{\lim}_{q \to q_o} f(q) = B \leqslant M$.

Soit V' un voisinage de q_o tel que

$$\begin{cases} q \in V' \cap \partial D \implies f(q) < B + \varepsilon \\ \bar{V} \quad \text{compact.} \end{cases}$$

Soit $\beta(p)$ barrière à q_o telle que $\beta(p) = -1$ $p \notin V$, soit $v(p) \in \mathcal{F}$.

Posons $u(p) = v(p) + (M - B)\beta(p) - B$ Considérons le domaine $\Delta = V \cap D$

$\bar{\Delta}$ est compact.

$-$ si $p \in V$ $\beta(p) < 0$ donc $u(p) \leqslant v(p) - B$

donc $\overline{\lim}_{p \to q} u(p) \leqslant \varepsilon$ $p \in \Delta$, $q \in \bar{V} \cap \partial D$.

$-$ si $p \in \partial\Delta \cap D$ $u(p) = v(p) - M < 0$.

<u>Si nous appliquons le principe du maximum à</u> Δ

$$u(p) \leqslant \varepsilon \quad \text{dans } \bar{\Delta}$$

donc $v(p) \leqslant B + (B - M)\beta(p) + \varepsilon$ $\forall v \in \mathcal{F}$ $\forall p \in \Delta$

$h(p) \leqslant B + (B - M)\beta(p) + \varepsilon$ $\forall p \in \Delta$

$\overline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \leqslant B + \varepsilon$ $\forall \varepsilon$

donc

$$\overline{\lim}_{p \to q_o} h(p) \leqslant B.$$

<u>Remarque</u>.– La propriété d'être régulier pour un point frontière est une propriété locale.

Soient D, $\tilde{D}$ tel $q_o \in \partial D \cap \partial\tilde{D}$.

Si il existe v voisinage de q_o $D \cap v = \tilde{D} \cap v$. q_o régulier pour $D \iff q_o$ régulier pour $\tilde{D}$.

2.4.– <u>Corollaire</u>.–

D domaine sur S.

Le problème de Dirichlet peut être résolu pour toute fonction f continue, bornée

$\iff$ <u>tout point de</u> ∂D <u>est régulier</u>.

Démonstration.

a) Tout $q \in \partial D$ est régulier. f est bornée. Nous pouvons appliquer le théorème 2.3.

$$f \text{ continue en } q_o \Longleftrightarrow \underline{\lim}_{q \to q_o} f(q) = \overline{\lim}_{q \to q_o} f(q).$$

Les inégalités du théorème 2.3 deviennent des égalités ; la fonction de Perron $h(p)$ est solution.

b) Réciproquement si le problème est soluble. Soit $q_o \in \partial D$. Soit $f(q)$ continue et bornée sur ∂D telle que

$$f(q_o) = 0$$
$$f(q) < 0 \text{ pour } q \neq q_o.$$

Soit $h(p)$ la solution du problème avec ces valeurs aux bords. Soit v un voisinage de q_o. Construisons une barrière :

Soit $-\eta = \sup\limits_{p \in D \cap \partial v} h(p)$

$$\beta(p) = \begin{cases} -1 & p \notin v \\ \sup\left[\dfrac{h(p)}{\eta}, -1\right] & \text{si } p \in v \end{cases}$$

$\beta(p)$ est une barrière à q_o, donc q_o est régulier.

Chapitre IV

Définition. Une surface de Riemann est

- hyperbolique $\Longleftrightarrow$ il existe une fonction $v(p)$ sous harmonique négative, non constante sur S
- parabolique $\Longleftrightarrow$ il n'existe pas de telle fonction
- elliptique $\Longleftrightarrow$ S est compacte.

N.B.- On dit parfois "ouverte" pour non compacte
"fermée" pour compacte.

§ 1.- Surfaces hyperboliques connexes

A.- Définitions.

A.1.- Mesure harmohique d'un domaine. Définition.- Soit D un domaine de S tel que $S - D$ soit compact. Soit $u(p)$ harmonique de D telle que

(a) $\lim\limits_{p \to \partial D} u(p) = 1$

(b) $0 < u(p) < 1$ pour tout $p \in D$

(c) si $\tilde{u}(p)$ satisfait (a) et (b) alors $u(p) \leq \tilde{u}(p)$.

C'est à dire $u(p)$ est le plus petite des fonctions vérifiant (a) et (b).

$u(p)$ s'appelle la mesure harmonique de D

N.B. (c) entraine que si $u(p)$ existe, $u(p)$ est unique.

A.2.- fonction de Green. Définition.

Soit p_o sur une surface de Riemann sur S. Soit $g(p, p_o)$ une fonction de p harmonique si $p \neq p_o$ telle que

(a) $g(p\ p_o) > 0$

(b) $g(p\ p_o) + \log z$ est harmonique au voisinage de p_o où $p = \varphi_\alpha(z)$
$p_o = \varphi_\alpha(z_o)$

(c) si $\tilde{g}(p\ p_o)$ est une autre fonction vérifiant (a) et (b) $\tilde{g}(p\ p_o) \geqslant g(p\ p_o)$

c'est à dire $g(p\ p_o)$ est la plus petite des fonctions vérifiant (a) et (b).

<u>Alors</u> $g(p_1\ p_o)$ <u>est la fonction de Green avec pole en</u> p_o.

N.B. (b) est une propriété indépendante du choix de φ_α

(c) $\Longrightarrow$ si $g(p_1\ p_o)$ existe, elle est unique.

A.3.- <u>Principe du maximum</u>

Soit D un domaine d'une surface S dont la frontière ∂D est non vide.

Nous dirons que le principe du maximum est valable pour D si

$$\forall v(p) \left| \begin{array}{l} \text{sous harmonique dans } D \\ v(p) < M \text{ dans } D \end{array} \right.$$

$$\overline{\lim_{p \to \partial D}}\ v(p) \leqslant m \Longrightarrow v(p) \leqslant m \text{ dans } D.$$

N.B.- Nous avons démontré que le principe du maximum est valable pour tous les domaines D relativement compacts.

B.- <u>Caractérisation des surfaces hyperboliques connexes et simplement connexes.</u>

Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) S est hyperbolique connexe

(b) il existe un domaine D de S à frontière $\partial D \neq \emptyset$ tel que le principe du maximum soit non valable.

(c) $\forall p_o \in S$, $g(p\ p_o)$ existe

(d) il existe un point $p_o \in S$ pour lequel $g(p\ p_o)$ existe

(e) pour tout domaine D tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} S - D \text{ est compact} \\ \partial D = \text{réunion de courbes analytiques} \end{array} \right.$$

la mesure harmonique de D existe

(f) il existe un domaine D ayant la propriété énoncée dans (e).

Démonstration.

B.1. (a) $\Longrightarrow$ (b)

S est hyperbolique, c'est à dire $\exists\, v(p)$ non constante

$\left.\begin{array}{l} v \text{ sous harmonique} \\ v < 0 \end{array}\right.$ sur S.

Soit $p_o \in S$, $D = S - \{p_o\}$.

Si le principe du maximum est valable pour D

$$\overline{\lim_{p \to \partial D}}\ v(p) = v(p_o) \Longrightarrow v(p) \leqslant v(p_o) \text{ dans } D.$$

La fonction constante $= v(p_o)$ est harmonique sur S ; elle majore $v(p)$ qui l'attend en p_o. Donc $v(p) \equiv v(p_o)$ ce qui est impossible puisque $v(p)$ est non constante. Donc le principe du maximum est non valable pour D.

B.2. (b) $\Longrightarrow$ (a).

Soit D un domaine pour lequel le principe du maximum est non valable.

Soit $v(p)$ sous harmonique dans D telle que

$$\begin{cases} v(p) < M \\ \overline{\lim\limits_{p \to \partial D}}\ v(p) \leqslant m \\ \text{il existe } p_o \in D \text{ tel que } v(p_o) > m. \end{cases}$$

$$\text{Soit } \tilde{v}(p) = \begin{cases} m - M & \text{dans } S - D \\ \operatorname{Sup}\{v(p), m\} - M & \text{dans } D \end{cases}$$

$\tilde{v}(p)$ est sous harmonique négative sur S

$\tilde{v}(p_o) > m - M$ donc $\tilde{v}$ est non constante sur S. S est hyperbolique.

B.3. (f) $\Longrightarrow$ (a).

Soit $u(p)$ mesure harmonique de D. Posons $v(p) = \left|\begin{array}{ll} -u(p) & p \in D \\ -1 & p \in S - D \end{array}\right.$

$v(p)$ est non constante, négative, sous harmonique. Donc S est hyperbolique.

B.4. (a) $\Longrightarrow$ (e)

Soit $\mathcal{F} = \left\{ v \; ; \; v \text{ sous harmonique dans } D, \; v(p) \leqslant 1 \atop \overline{\lim}_{p \to \partial D} v(p) \leqslant 0 \right\}$

$\mathcal{F}$ est une famille de Perron $\neq \emptyset$ car $v \equiv 0 \in \mathcal{F}$.

$h(p) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(p)$

- $h(p)$ est harmonique dans D (car non infinie)

- $0 \leqslant h(p) \leqslant 1$ car $v \equiv 0 \in \mathcal{F}$ et $v(p) \leqslant 1 \quad \forall v \in \mathcal{F}$

- Démontrons que $h(p) \not\equiv 0$.

Nous allons démontrer que $\mathcal{F}$ contient une fonction strictement positive en au moins un point.

Soit $\tilde{v}(p)$ une fonction négative sous harmonique non constante sur S.

Soit $-\eta = \max_{p \in \partial D} \tilde{v}(p)$

$S - D$ étant compact, le principe du maximum appliqué à $S - D \Longrightarrow$

$$\tilde{v}(p) \leqslant -\eta \quad \text{pour } p \in S - D$$

donc il existe $p_1 \in D$ tel que $\tilde{v}(p_1) > -\eta$ car $\tilde{v}(p)$ ne peut avoir un maximum local sans être constante. Pour la même raison $\eta > 0$.

Soit $v(p) = \dfrac{\tilde{v}(p)}{\eta} + 1$

$$\begin{cases} v(p) \text{ est sous harmonique} \\ v(p) < 1 \\ \overline{\lim}_{p \to D} v(p) \leqslant 0 \end{cases}$$

donc $v(p) \in \mathcal{F}$

or $v(p_1) > 0 \Longrightarrow h(p_1) > 0$ donc $h(p) \not\equiv 0$.

- Démontrons que $\lim_{p \to \partial D} h(D) = 0$.

$\partial D = \cup$ arcs analytiques, donc tous les points de ∂D sont réguliers. Le problème de Dirichlet correspondant aux valeurs au bord $\equiv 0$ est résolu par $h(p)$, la fonction de Perron de la famille $\mathfrak{F} \Longrightarrow \lim_{p \to \partial D} h(p) = 0$.

Soit $u(p) = 1 - h(p)$

$u(p)$ est la mesure harmonique de D car :

- $u(p)$ est harmonique
- $0 \leqslant u(p) \leqslant 1$
- $\lim_{p \to \partial D} u(p) = 1$
- si $\tilde{u}$ vérifie ces conditions $1-\tilde{u} \in \mathfrak{F}$ donc $1-\tilde{u} \leqslant h$ donc $\tilde{u} \geqslant u$.

B.5. (d) $\Longrightarrow$ (a)

Hypothèse : il existe $p_o \in S$ tel que $g(p,p_o)$ existe. g est harmonique > 0 pour $p \neq p_o$. Soit $v(p) = \max[-g , -M]$ où $M = g(p_1)$ $p_1 \neq p_o$.

- $v(p)$ est sous harmonique $\forall p \neq p_o$
- pour $p \longrightarrow p_o$ $g \longrightarrow +\infty$ donc au voisinage de p_o $v = -M$
- g non constante $\Longrightarrow -g$ n'a pas de maximum local, donc v est non constante.

B.6. (e) $\Longrightarrow$ (c). Soit $p_o \in S$ $\varphi(z)$ une carte normalisée à p_o.

Soit $\mathfrak{F} = \{v(p)$: v sous harmonique dans $S - \{p_o\}$, telles que

a) $v \geqslant 0$

b) $v \equiv 0$ hors d'un compact $K \subset S$

c) $v[\varphi(z)] + \log|z|$ est sous harmonique dans $|z| < R$.

$\mathfrak{F}$ est une famille de Perron.

Soit $\tilde{v}(p) = \begin{cases} -\log|z| + \log R & \text{pour } |z| \leqslant R \\ 0 & |z| > R \end{cases}$

$\tilde{v}(p) \in \mathfrak{F}$ donc $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Soit $h(p)$ la fonction de Perron correspondante. Montrons que c'est la fonction de Green avec pole p_o.

1. $h(p)$ <u>est harmonique dans</u> $S - p_o$.

Démontrons que $h(p) \not\equiv \infty$. Posons $D = S - \varphi\{|z| \leqslant R_1 < R\}$

$$\partial D = \varphi\{|z| = R_1\},$$

d'après (e) il existe $u(p)$ mesure harmonique de D.

$$\left| \begin{array}{l} u(p) \equiv 1 \quad \text{sur} \quad \partial D \\ 0 < u(p) < 1. \end{array} \right.$$

+ Soit $v(p) \in \mathfrak{F}$ $\quad m_1 = \max\limits_{p \in \partial D} v(p)$

$$m_2 = \max_{|z| = R} v(p)$$

. $v(p) - m_1 u(p) \leqslant 0$ sur $\partial(K \cap D)$

$v(p) - m_1 u(p) \leqslant 0$ hors de K.

$v(p)$ sous harmonique $\Longrightarrow v(p) \leqslant m_1 u(p)$ dans D.

. $m_2 = \max\limits_{|z| = R} v(p) \leqslant m_1 \max\limits_{|z| = R} u(p) = m_1 \eta$

où $\eta = \sup\limits_{|z| = R} u(p) < 1$

donc $m_2 \leqslant m_1 \eta$

+ $v(p) + \log|z|$ est sous harmonique dans $|z| \leqslant R$ donc

$$m_1 + \log R_1 \leqslant m_2 + \log R$$

$$m_1 \leqslant m_1 \eta + \log \frac{R}{R_1}$$

$$m_1 \leqslant \frac{1}{1 - \eta} \operatorname{Log} \frac{R}{R_1} .$$

Cette borne est indépendante de v donc $h(p) \leqslant$ cette borne sur $|z| = R_1$ donc $h(p) \not\equiv \infty$.

2.

p) <u>est harmonique</u> et non constante $\qquad h(p) \geqslant 0 \Longrightarrow h(p) > 0$.

3. Soit $\tilde{g}(p,p_o)$ une fonction harmonique dans $S - \{p_o\}$ telle que $\tilde{g}(p,p_o) + \log|z|$ soit harmonique en p_o.

$\forall v \in \mathfrak{F}$ $\quad v(p) - \tilde{g}(p,p_o)$ est sous harmonique sur S ; négative hors de K.

Donc
$$v(p) < \tilde{g}(p,p_o)$$
$$h(p) \leqslant \tilde{g}(p,p_o)$$

La fonction de Green cherchée est donc $h(p)$.

C.– Théorème d'uniformisation

Enoncé du théorème.– Soit S une surface de Riemann simplement connexe. S est hyperbolique si et seulement s'il existe une transformation conforme de la surface sur le disque unité.

C-1. Lemme.– S'il existe une transformation conforme $W = f(p)$ d'une surface de Riemann S sur le disque unité, alors S est hyperbolique.

Démonstration. Il suffit de mettre en évidence la fonction de Green en un point p_o de S. Soit $p_o = f^{-1}(0)$, posons $g(p,p_o) = -\log|f(p)|$.

① $g(p,p_o)$ est harmonique pour $p \neq p_o$ et $g(p,p_o) > 0$

② $\varphi(W) = f^{-1}(W)$ est une carte en $p_o = f^{-1}(0)$.

$-\log|f\,\varphi(W)| + \log|W| \equiv 0$ c'est donc une fonction harmonique au voisinage de 0.

③ Soit $\tilde{g}(p,p_o)$ une fonction satisfaisant à ① et ②

$-\log|f(p)| - \tilde{g}(p,p_o)$ est harmonique dans le disque $|W| < 1$

$\lim\limits_{|W| \to 1} \; -\log|f(p)| - \tilde{g}(p,p_o)) \leqslant 0$, d'après le principe du maximum on a :

$-\log|f(p)| \leqslant \tilde{g}(p,p_o)$ d'où $g(p,p_o) \leqslant \tilde{g}(p,p_o)$.

C-2. Théorème.– Si S est hyperbolique et simplement connexe, il existe une transformation conforme de S sur le disque unité $|W| < 1$.

Démonstration.

① Existence d'une application analytique de S dans le disque.

Soit p_o un point de S et $g(p,p_o)$ la fonction de Green en p_o.

Soit $p = \varphi(Z)$ une carte normalisée en p_o.

La fonction $u(Z) = g(p,p_o) + \log|Z|$ est harmonique pour $|Z| < R$: soit $u(Z)$ une fonction conjuguée de $u(Z)$. On définit $f(Z) = Ze^{u(Z)-iv(Z)}$

$f(Z)$ est analytique pour $|Z| < R$

$f(0) = 0$

$\log|f(Z)| = \log|Z| - u(Z) = -g(p,p_o)$.

Dans un voisinage V_o de p_o $f(Z)$ définit une fonction $f(p)$, analytique, s'annulant au point p_o, et satisfaisant à $\log|f(p)| = -g(p,p_o)$ donc à $|f(p)| < 1$.

Soit p_1 distinct de p_o ; dans un voisinage V_1 de p_1, soit $h(p)$ conjuguée de $g(p,p_o)$ et $\tilde{f}(p) = e^{-g(p,p_o)-ih(p)}$.

$\tilde{f}(p)$ est analytique dans V_1

$\log|\tilde{f}(p)| = -g(p,p_o)$.

Pour chaque point p_1 de S, il existe un voisinage V_1 de p_1 dans lequel on sait définir une fonction analytique $\tilde{f}$ satisfaisant à $\log|\tilde{f}(p)| = -g(p,p_o)$.

<u>Remarque</u>. Si $p \in V_o \cap V_1$, on a défini $f(p)$ et $\tilde{f}(p)$ telles que $\log|f(p)| = \log|\tilde{f}(p)| = -g(p,p_o)$, il en résulte que pour $p \in V_o \cap V_1$ $\tilde{f}(p) = e^{i\alpha} f(p)$. Par conséquent :

Au voisinage de chaque point de S on a une fonction analytique, définie à un facteur multiplicatif près de la forme $e^{i\alpha}$, satisfaisant à $\log|f(p)| = -g(p,p_o)$.

Considérons l'espace Γ des germes des fonctions analytiques f sur S. Montrons que Γ peut être continué le long de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_o = \gamma_{p_o}(f)$.

Soit $p(t)$ une courbe de S telle que $p(0) = p_o$. La courbe $p(t)$ peut être recouverte par un nombre fini de voisinages $V_o, V_1, \ldots V_n$ dans chacun desquels on peut définir $f, f_1, \ldots f_n$.

$V_o \cap V_1 \neq \emptyset$ on choisit f_1 telle qu'elle coincide avec f sur $V_o \cap V_1$. On construit de proche en proche $f_2, \dots f_n$.

On a ainsi défini une fonction $f(p)$ continue sur la courbe.

Soit $\hat{p}(t) = \gamma_{p(t)}(f)$ alors $\hat{p}(t)$ est le relèvement de $p(t)$ à partir de p_o.

D'après le théorème de monodromie, il existe une fonction analytique $F_{p_o}(p)$, définie sur S telle que $\mathrm{Log}|F_{p_o}(p)| = -g(p,p_o)$.

$|F_{p_o}(p)| < 1$ donc $F_{p_o}(p)$ est une application analytique de S dans le disque unité. On a de plus $F_{p_o}(p_o) = 0$ et F_{p_o} ne s'annule qu'en p_o.

2 $F_{p_o}(p)$ <u>est bijective</u>.

C-2-1. <u>Lemme</u>.- Si $G_{p_o}(p)$ est analytique dans S, à valeur dans le disque unité et si $G_{p_o}(p_o) = 0$ on a : $\forall p \in S \quad |G_{p_o}(p)| \leqslant F_{p_o}(p)$.

Démonstration. Soit $\varphi(Z)$ une carte normalisée en p_o

$G_{p_o}(p_o) = 0 \Longrightarrow G_{p_o}(\varphi(Z)) = Z^k \tilde{f}(Z)$ où $\tilde{f}(Z)$ est analytique au voisinage de 0 et $\tilde{f}(0) \neq 0$

$$\log|G_{p_o}(\varphi Z)| = k \log|Z| + \log|\tilde{f}(Z)| .$$

Soit $\tilde{g}_{p_o}(p) = -\dfrac{\log|G_{p_o}(p)|}{k}$

on a (1) $\tilde{g}_{p_o}(\varphi(Z)) + \log|Z| = -\dfrac{\log|\tilde{f}(Z)|}{k}$

donc $\tilde{g}_{p_o}$ est harmonique au voisinage de 0

(2) $0 < \tilde{g}_{p_o}(p)$ car $|G_{p_o}(p)| < 1$.

On a donc : $g(p,p_o) \leqslant \tilde{g}_{p_o}(p)$

(définition de la fonction de Green en un point)

Soit $-\log|F_{p_o}(p)| \leqslant -\log|G_{p_o}(p)| \Longrightarrow |G_{p_o}(p)| \leqslant |F_{p_o}(p)|$.

C-2-2.- Conséquences du lemme.

a) $F_{p_o}(p)$ est injective

Pour $p_1 \neq p_o$ soit $G_{p_1}(p) = \dfrac{F_{p_o}(p) - F_{p_o}(p_1)}{1 + \overline{F_{p_o}(p_1)}\, F_{p_o}(p)}$

(On considère la transformation conforme du disque unité $W \longrightarrow \dfrac{W - W_1}{1 + W\overline{W}_1}$). Alors $G_{p_1}(p)$ est analytique sur S, $|G_{p_1}(p)| < 1$ et $G_{p_1}(p_1) = 0$ donc $|G_{p_1}(p)| \leqslant |F_{p_1}(p)|$ ($F_{p_1}(p)$ est définie par $\mathrm{Log}|F_{p_1}(p)| = -g(p,p_1)$). Mais $G_{p_1}(p_o) = -F_{p_o}(p_1)$ donc $|F_{p_o}(p_1)| = |G_{p_1}(p_o)| \leqslant |F_{p_1}(p_o)|$ d'où $\forall p_o$, $\forall p_1 \in S$ $|F_{p_o}(p_1)| \leqslant |F_{p_1}(p_o)|$ soit $|F_{p_1}(p_o)| = |F_{p_o}(p_1)|$.

$\left|\dfrac{G_{p_1}(p)}{F_{p_1}(p)}\right| \leqslant 1$ avec égalité en p_o.

D'après le principe du maximum : $G_{p_1}(p) = e^{i\alpha} F_{p_1}(p)$. Supposons qu'il existe p_1 et p_2 tels que $F_{p_o}(p_1) = F_{p_o}(p_2)$ alors $G_{p_1}(p_2) = 0$ donc $F_{p_1}(p_2) = 0$ c'est à dire $p_1 = p_2$.

b) $F_{p_o}(p)$ est surjective

Soit W_o un point frontière de l'image de S par $F_{p_o}(p)$.

$F_{p_o}(p) - W_o \neq 0$ pour p de S. Il existe en chaque point de S un germe de la fonction $\mathrm{Log}(F_{p_o}(p) - W_o)$. Par un raisonnement analogue à celui effectué dans la première partie de la démonstration on peut appliquer le théorème de monodromie et affirmer l'existence d'une fonction $H(p)$ définie sur S telle que $\zeta = H(p) = \mathrm{Log}(F_{p_o}(p) - W_o)$

$\mathrm{Re}\,\zeta = \mathrm{Log}|F_{p_o}(p) - W_o| \Longrightarrow \mathrm{Re}\,\zeta < 2$. L'application $p \longrightarrow H(p)$ a donc pour image un domaine situé dans $\mathrm{Re}\,\zeta < \mathrm{Log}\,2$.

Soit la transformation homographique $\zeta \longrightarrow Z = \dfrac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$ transformant le demi plan

$Re\,\zeta < \log 2$ en le cercle unité $|Z| < 1$ et telle que $Z(\zeta_o) = 0$ $(\zeta_o = H(p_o))$.

La fonction $Z(p) = (Z\circ H)(p)$ est analytique sur S

$$Z(p_o) = 0 \quad \text{et} \quad |Z(p)| < 1$$

d'après le lemme C-2-1, $|Z(p)| \leqslant |F_{p_o}(p)|$.

Soit $\{p_n\}$ une suite de points de S tels que $\lim\limits_{n\to\infty} F_{p_o}(p_n) = W_o$

$\lim\limits_{n\to\infty} Re\, H(p_n) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} |Z(p_n)| \Longrightarrow 1$

donc $|F_{p_o}(p_n)| \longrightarrow 1$ et $W_o = \lim\limits_{n\to\infty} |F_{p_o}(p_n)| = 1$.

Il en résulte que chaque point $|W_1| < 1$ est dans l'image de S (dans le cas contraire il y aurait un point frontière W_o tel que $|\overline{W_o}| \leqslant |W_1| < 1$).

C-3.- <u>Lemme</u>.- Soit D un domaine simplement connexe de la sphère de Riemann. Alors D est hyperbolique si et seulement si $S - D$ contient au moins deux points.

<u>Démonstration</u>. ① $S - D = \{p_1\}$ alors D n'est pas hyperbolique. Par l'absurde, supposons D hyperbolique, il existe une fonction F analytique qui transforme D sur le disque unité. F est bornée au voisinage de p_1, donc F est prolongeable en p_2 et F est analytique sur S. Alors $|F|$ définie sur un compact atteint son maximum donc $F =$ constante. D'où la contradiction.

② $S - D$ contient au moins deux points.

Par homographie on suppose que $(0, (\infty)) \in S - D$. D'après le théorème de monodromie, il existe sur D une fonction $f(z)$ analytique telle que $[f(z)]^2 = z$

si $z_1 \neq z_2$ $\quad (f(z_1))^2 \neq (f(z_2))^2 \Longrightarrow f(z_1) \neq \pm f(z_2)$

f transforme bijectivement D sur un domaine Δ. $W_1 \in \Delta$ entraine $-W_1 \notin \Delta$: en effet si l'on a $w_1 = f(z_1)$ $\quad -w_1 = f(z_2)$ alors $f(z_1)^2 = f(z_2)^2 \Longrightarrow z_1 = z_2$ d'où la contradiction.

Soit $w_o \in \Delta$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $|w - w_o| < \varepsilon \Longrightarrow w \in \Delta$

alors si $|w + w_0| < \varepsilon \Longrightarrow |-w - w_0| < \varepsilon \Longrightarrow -w \in \Delta$ et $w \notin \Delta$ alors pour $z \in D$

$\left|\frac{1}{f(z) + w_0}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$ et $\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{f(z) + w_0}\right\} - \frac{1}{\varepsilon}$ est harmonique, négative, non constante donc D est hyperbolique.

C-3-1. Corollaire (théorème de Riemann).- Il existe une transformation conforme de tout domaine propre D au plan simplement connexe sur le disque unité.

§ 2.- Surfaces paraboliques connexes et simplement connexes.

S'il existe une transformation conforme $g(p)$ d'une surface S sur le plan, si $q = g^{-1}(0)$, alors la fonction $f_q(p) = \frac{1}{g(p)}$ a les deux propriétés :

- pole simple en q
- bornée dans le complément de tout voisinage de q.

Nous voulons démontrer que sur une surface parabolique simplement connexe S il existe toujours une telle fonction $f_q(p)$ et qu'elle transforme S bijectivement en un domaine de la sphère.

2-1.- Définition

Soit $q \in S$. S surface de Riemann

$f_q(p)$ fonction méromorphe sur S est une fonction distinguée au point q si

- $f_q(p)$ a un pole simple en q
- $f_q(p)$ est bornée dans le complément de tout voisinage de q.

2-2.- Lemme

Soit S surface parabolique ou elliptique connexe si $\forall q \in S$ il existe une fonction distinguée $f_q(p)$ alors $f_q(p)$ est injective.

Démonstration

Soit $q_0 \in S$. $f_{q_0}(p)$ est injective dans un voisinage V de q_0 du fait du pole simple ; en effet : $\frac{1}{f}$ s'annule une fois pour $p = q_0$ est analytique au voisinage de q_0 ; donc injective et son inverse aussi.

Soit M tel que $f_q(p) \leqslant M$ pour $p \in S - V$

soit $V_1 \subset V$ tel que $|f_q(p)| > M$ pour $p \in V_1$

soit $q_1 \in V_1$ posons $F(p) = \dfrac{1}{f_{q_o}(p) - f_{q_o}(q_1)}$

f injective dans $V \Longrightarrow$ le dénominateur ne s'annule que pour $p = q_1$ dans V et q_1 est un pole simple pour $F(p)$, donc dans V $F(p)$ est bornée hors de tout voisinage de q.

$F(p)$ est bornée dans $\complement V$ car

$$|f_{q_o}(p)| \leqslant M \quad \text{dans} \quad \complement V$$

$$|f_{q_o}(q_1)| > M$$

$\Longrightarrow F(p)$ est méromorphe sur S, a un pole simple en q_1, est bornée hors de tout voisinage de q_1.

Soit $p = \varphi(z)$ une carte normalisée à q_1

$\exists$ une fonction distinguée en $q_1 = f_{q_1}(p)$

$$f_{q_1}[\varphi(z)] = \frac{A}{z} + \ldots., \qquad A \neq 0$$

$$F[\varphi(z)] = \frac{B}{z} + \ldots\ldots. \qquad B \neq 0$$

$Bf_{q_1} - AF$ est analytique dans S, bornée sur S donc constante.

$f_{q_1} = T f_{q_o}$ où T est une fonction homographique. Ceci pour tout $q_1 \in V$.

Soit $q_1 \in S$, il existe une courbe $p(t)$ liant q_o à q_2 (S connexe). La courbe étant compacte, on passera de f_{q_o} à f_{q_2} par le produit d'un nombre fini d'homographie c'est à dire une homographie.

Soit q_1 arbitraire, il existe une homographie T telle que $f_{q_o}(p) = T f_{q_1}(p)$.

Si nous avons $f_{q_o}(q_1) = f_{q_o}(q_2)$

$$\text{alors} \quad Tf_{q_1}(q_1) = Tf_{q_1}(q_2) \Longleftrightarrow$$

$$f_{q_1}(q_1) = f_{q_1}(q_2). \qquad \text{donc} \quad q_1 = q_2,$$

car $f_{q_1}(p)$ infinie $\Longleftrightarrow p = q$ donc $f_{q_0}(p)$ est injective.

2-3. Lemme.

Soit D un domaine de S à frontière $\partial D \neq \emptyset$

Soit $f(p)$ analytique bornée dans $D = |f(q)| < M$ telle que $\overline{\lim\limits_{p \to \partial D}} |f(q)| \leqslant m$.

Alors $|f(p)| \leqslant m$ dans D.

Démonstration

Soit $v(p) = \max \left\{ \log|f(p)|, \log m \right\}$

$v(p)$ est sous-harmonique dans D

$v(p) \leqslant \log M$ dans D

(la surface étant parabolique, le principe du maximum est valable pour tout domaine

$\Longrightarrow$) $\lim\limits_{p \to \partial D} v(p) \leqslant \log m \Longrightarrow v(p) \leqslant \log m$ dans D

d'où $|f(p)| \leqslant m$ dans D

2-4. Lemme.

S'il existe une fonction distinguée pour $q_o \in S$, il existe une fonction distinguée en tout point de S.

Démonstration

Soit $E = \left\{ q : q \in S, \exists f_q(p) \right\}$

$E \neq \emptyset$ car $q_o \in E$

a) E est ouvert - voir lemme 1 - On sait construire $f_{q_1}(p)$ q_1 voisin de p

$$f_{q_1}(p) = \frac{1}{f_{q_o}(p) - f_{q_o}(q_1)}$$

b) E est fermé

Soit q_n suite de E

$q_n \longrightarrow q_o$ sur S.

$p = \varphi(z)$ une carte normalisée à q_o pour n assez grand $z_n = \varphi^{-1}(q_n)$

Soit $F_n(z) = f_{q_n}\left[\varphi(z)\right]$ $\quad |z| \leqslant R$

pour n suffisamment grand $|z_n| \leqslant r_o < R$

et $F_n(z)$ est analytique dans $r_o \leqslant |z| \leqslant R$ et non constante.

Soit A_n et B_n deux constantes telles que

$$G_n(z) = A_n F_n(z) + B_n$$

$$\max_{r_o \leqslant |z| \leqslant R} |G_n(z)| = 2$$

$$\min_{z_o \leqslant |z| \leqslant R} |G_n(z)| = 1.$$

On a une suite de fonctions analytiques uniformément bornées dans l'anneau A : la suite $G_n(z)$ est donc equicontinue.

On peut en extraire une suite qui converge uniformément vers une fonction $G_o(z)$.

Soit $f_{q_n}(p)$ la suite correspondante

$$g_n(p) = A_n f_{q_n}(p) + B_n .$$

Alors $\left|G_n(z) - G_m(z)\right| \leqslant \varepsilon$ pour $|z| = r_o$

$\Longrightarrow |g_n(p) - g_m(p)| \leqslant \varepsilon$ dans $D = S \doteq \varphi\left[|z| \leqslant r_o\right]$ d'après le lemme 2.3.

Donc $g_n(p)$ converge uniformément sur D et la limite $g(p)$ est une fonction analytique.

Considérons maintenant le domaine $|z| < R$

$\forall n$ $\quad G_n(z)$ a un pole simple $= z_n = \varphi^{-1}(q_n)$

soit $H_n(z) = (z - z_n)G_n(z)$

$H_n(z)$ est analytique dans $|z| \leqslant R$

$H_n(z) \longrightarrow H_o(z)$ uniformément dans $r_o \leqslant z \leqslant R$, c'est à dire que

$m, n > N \quad \Longrightarrow |H_n(z) - H\ (z)| < \varepsilon$ sur $r_o \leqslant |z| \leqslant R$

$H_n(z) - H\ (z)$ est analytique dans $|z| \leqslant R$

donc $\quad |H_n(z) - H\ (z)| < \varepsilon$ dans $|z| \leqslant R$

donc $\quad H_n(z) \longrightarrow H_o(z)$ uniformément dans $|z| \leqslant R$,

donc $\quad H_o(z)$ analytique dans $|z| \leqslant R$.

$$G_n(z) = \frac{H_n(z)}{z - z_n} \longrightarrow \frac{H_o(z)}{z} \quad \text{dans} \quad 0 < |z| \leqslant R$$

donc $G_o(z) = \frac{H_o(z)}{z}$ a un pole en 0 simple au plus.

Si G_o n'avait pas de pole en 0, on aurait $g(p)$ analytique et bornée sur tout S donc constante. Or nous avons imposé par la normalisation $\left.\begin{matrix} \max|G_o(z)| = 2 \\ \min|G_o(z)| = 1. \end{matrix}\right\}$ sur $r_o \leqslant |z| \leqslant R$.

Conclusion. $f(p)$ est fonction distinguée à q_o limite de $q_n \in E$, E est donc fermé

S connexe $\Longrightarrow S \equiv E$

2-5. Lemme.

Hypothèses. Soit S connexe, simplement connexe. Soit $q_o \in S$, $p = \varphi(x)$ est une carte normalisée à q_o. S'il existe $h(p)$ harmonique sur $S - \{q_o\}$ telle que

a) $h(p)$ soit bornée dans le complément de tout voisinage de q_o

b) il existe une constante $c \neq 0$ telle que $h[\varphi(z)] - \mathrm{Re}\left\{\frac{c}{z}\right\}$ est harmonique dans $|z| \leqslant R$.

Conclusion. Il existe une fonction distinguée $f_{q_o}(p)$.

Démonstration.

Tout $p \in S$ a un voisinage dans lequel il existe une fonction méromorphe définie à une constante additive près telle que $h(p) = \mathrm{Re}\{f(p)\}$

S simplement connexe $\Longrightarrow$ $\exists$ une seule fonction $f(p)$ définie sur S (monodromie)

$f(p)$ a un pole simple en $p = q_o$

$f[\varphi(z)] - \frac{c}{z}$ est une fonction analytique dans $|z| \leqslant R$.

Soit V un voisinage de q_o dans lequel $f(p)$ est injective on a :

$|\mathrm{Re}\{f(p)\}| \leqslant M$ pour $p \in S - V$

$\exists q_1 \in V$ tel que $|\mathrm{Re}\{f(q_1)\}| > M$

soit $f_{q_1}(p) = \frac{1}{f(q) - f(q_1)}$ est bornée dans le complément de tout voisinage de q_1 admet un pole simple en q_1, c'est une fonction distinguée à q_1.

D'après le lemme 2-4 il existe une fonction distinguée à q_o.

2.6. Lemme. Soit $q_o \in S$ surface de Riemann, K un entier positif,

$\varphi(z)$ une carte normalisée à q_o.

Alors il existe une fonction harmonique dans $S - \{q_o\}$ telle que

a) $h(p)$ est bornée dans le complément de tout voisinage de q_o

b) il existe $c \neq 0$

$h\,[\varphi(z)] - \mathrm{Re}\left\{\frac{c}{z^K}\right\}$ est harmonique dans $|z| \leqslant R$.

N.B. On ne fait pas l'hypothèse de simple connexité sur S.

Démonstration.

$\forall$entier $n > 1$, soit D_n

$$D_n = S - \varphi\left[|z| \leqslant \frac{1}{n}\right]$$

A, B, C trois constantes données : $A^2 + B^2 \neq 0$, il existe une fonction harmonique bornée $u_n(p)$ dans D_n telle que sur ∂D_n, on ait

$$u_n\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\,e^{i\theta}\right)\right] = A\cos k\theta + B\sin k\theta + C$$

Donc $u_n\left[\varphi(e^{i\theta})\right]$ est non constante

car sinon dans le complément de l'image de $|z| \leqslant 1$ le principe du maximum et du minimum entrainerait que u_n soit constant à l'extérieur.

On prend A, B, C tels que

$$\max U_n(e^{i\theta}) = 1$$

$$\min U_n(e^{i\theta}) = -1$$

où $U_n(z) = u_n\,[\varphi(z)]$ pour $\frac{1}{n} \leqslant z \leqslant R$.

$U_n(z)$ est une fonction harmonique dans l'anneau.

On cherche à borner uniformément les $U_n(z)$ dans chaque anneau $r_o \leqslant |z| \leqslant R$.

$U_n(z)$ se développe

$$U_n(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_m r^m \cos m\theta + b_m r^m \sin m\theta) + a \log r$$

développement qui converge sur tout cercle

$$|z| = r \qquad\qquad \frac{1}{n} < r \leqslant R .$$

Nous allons majorer les coefficients du développement

$$\int_o^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi (a_o + a \log v)$$

$$\int_o^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) \cos p\theta \, d\theta = \pi (a_p r^p + a_{-p} r^{-p})$$

$$\int_o^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) \sin p\theta \, d\theta = \pi \left[b_p r^p + b_{-p} r^{-p}\right]$$

$$\text{si} \quad r = 1 \qquad a_o = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} U_n(e^{i\theta})\, d\theta$$

$$|U_n(e^{i\theta})| \leqslant 1 \implies |a_o| \leqslant 1$$

$$\text{si} \quad r = R \qquad a_o + a \log R = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} U_n(Re^{i\theta}) d\theta$$

$$|U_n(Re^{i\theta})| \leqslant 1 \implies |a \log R + a_o| \leqslant 1$$

$$\text{d'où } |a| \leqslant \frac{2}{\log R}$$

$$\text{si} \quad r = 1 \qquad a_p + a_{-p} = c_p \qquad |c_p| \leqslant 2$$

$$\text{si} \quad r = R \qquad a_p R^p + a_{-p} R^{-p} = d_p \qquad |d_p| \leqslant 2$$

$$a_p = \frac{d_p - R^{-p} c_p}{R^p - R^{-p}}$$

$$= R^{-p} \frac{\left[d_p - R^{-p} c_p\right]}{1 - R^{-2p}}$$

$$|a_p| \leqslant \frac{M}{R^p} \qquad \text{où} \qquad M = \frac{4R}{R-1}$$

de la même façon , on trouve

$$a_{-p} = \frac{c_p - d_p R^{-p}}{1 - R^{-2p}}$$

$$|a_{-p}| \leqslant M.$$

Nous utiliserons ces inégalités pour $p = k$.

Pour les autres valeurs de n :

$r \longrightarrow \frac{1}{n}$,

pour $p \neq k$ $\quad \frac{a_p}{n^p} + a_{-p} n^p = 0$

$$a_{-p} = \frac{-a_p}{n^{2p}} \qquad \text{or} \qquad |a_p| \leqslant \frac{M}{R^p}$$

$$|a_{-p}| \leqslant \frac{M}{n^{2p} R^p}$$

de même $\quad |b_p| \leqslant \frac{M}{R^p}$

$$|b_{-p}| \leqslant \frac{M}{n^{2p} R^p}$$

d'où

$$|U_n(re^{i\theta})| \leqslant \sum_1^{\infty} 2M\left(\frac{r}{R}\right)^m + \sum_1^{\infty} \frac{2M}{r^p n^{2p} R^p} + \frac{2M}{r^k} + 1 + 2\,\frac{|\log r|}{\log R}.$$

Soit $0 < r_o < 1$ pour $n > \frac{1}{r_o}$ les fonctions sont toutes définies dans l'anneau $r_o \leqslant r \leqslant 1$

$$|U_n(re^{i\theta})| \leqslant 4M\left[\sum_o^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m\right] + \frac{2|\log r_o|}{\log R} + 1 + \frac{2M}{r_o^k}$$

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \leqslant \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^m = \frac{R}{R-1}$$

On a une famille de fonctions harmoniques uniformément bornées dans l'anneau $r_o \leqslant |z| \leqslant 1$: donc on peut en extraire une suite partielle qui converge uniformément dans l'anneau ; le principe du maximum entraine que ces U_n correspondants convergent uniformément dans $|z| \geqslant r_o$ et la limite est une fonction $U(z)$ harmonique dans $D_{r_o} = S - \varphi\left[|z| \leqslant r_o\right]$ les coefficients du développement de $U(z)$ sont les limites des coefficients de $U_n(z)$ si $p \neq k$ quand $n \longrightarrow \infty$

$$a_{-p} \longrightarrow 0$$

$$b_{-p} \longrightarrow 0$$

$$U(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\tilde{a}_m r^m \cos m\theta + \tilde{b}_m r^m \sin m\theta\right] + \tilde{a} \log r + \frac{\tilde{a}_{-k}}{r^k} \cos k\theta + \frac{\tilde{b}_{-k}}{r^k} \sin k\theta$$

si $\tilde{U}(z)$ est construit avec $B = 0$ $\qquad \tilde{b}_{-k} = 0$

$$\tilde{U}(z) = \tilde{a} \log r + \frac{\tilde{a}_{-k}}{r^k} \cos k\theta + \tilde{V}(z) \quad \text{où} \quad \tilde{V}(z) \text{ est harmonique .}$$

Si $\hat{U}(z)$ est construit avec $A = 0$

$$\hat{U}(z) = \hat{a} \log r - \frac{b_{-k}}{r^k} \sin k\theta + \hat{V}(z) \quad \text{où} \quad \hat{V}(z) \text{ est harmonique.}$$

Démontrons que $\tilde{a}_{-k} \neq 0$. Sinon on considère les deux cas :

- si $\tilde{a} = 0$ $\quad \tilde{U}(z)$ harmonique bornée sur S donc constante $\begin{matrix} \max = +1 \\ \min = -1 \end{matrix}$ est

- si $\tilde{a} \neq 0$ soit $\tilde{a} > 0$ alors $r \leqslant \varepsilon \implies \tilde{U}(re^{i\theta}) \geqslant 2$ or $\min U_n(e^{i\theta}) = -1$

donc $\min \tilde{U}(e^{i\theta}) = -1$

le principe du maximum $\implies |U(Re^{i\theta})| \leqslant \eta < 1$

donc $\tilde{U}$ aurait un minimum dans $\varepsilon < r < R$ donc $\tilde{U}$ serait constante

donc $\tilde{a}_{-k} \neq 0$

de même pour $\tilde{b}_{-k} \neq 0$

si $\hat{a} = \tilde{a} = 0$ le raisonnement est très

si non $h_p = \hat{a}\, \tilde{u}(p) - \tilde{a}\, \hat{u}(p)$

$$\frac{\cos k\theta}{r^k} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z^k}\right] \qquad\qquad \frac{\sin k\theta}{r^k} = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{r^k}\right]$$

on a déterminé $h(p)$ en vérifiant (a) et (b).

2.7.– Théorème.

Soit S une surface simplement connexe, parabolique, alors il existe une transformation conforme de S sur le plan.

Démonstration. Il existe une fonction distinguée qui est méromorphe sur S et injective. Donc l'image de S est un domaine de S simplement connexe sur la sphère.

S étant parabolique, le complément de ce domaine contient au plus un point.

La sphère étant compacte, l'image de S est différente de lasphère tout entière et son complément contient exactement un point.

2.8.- Théorème.- Soit S une surface de Riemann simplement connexe, elliptique. Il existe une transformation conforme de S sur la sphère.

Démonstration. Il existe une fonction distinguée f qui envoie S sur un domaine de la sphère

f continue, S compact $\Longrightarrow f(S)$ compact donc fermé

f méromorphe $\Longrightarrow f(S)$ ouvert donc $f(S)$ = sphère.

2.9.- Classification des surfaces connexes et simplement connexes.

C'est le théorème d'uniformisation.

toute surface hyperbolique est conforme au disque unité

———— parabolique ———— au plan

———— elliptique ———— à la sphère.

2.10.- Corollaire.- Toute surface de Riemann connexe et simplement connexe, est homéomorphe à un domaine de la sphère.

N.B. On peut remplacer l'hypothèse simplement connexe dans ce corollaire par : toute courbe de Jordan divise S en 2 parties. Exemple : chaque domaine sur la sphère. Contre-exemple : le tore.

A.
§ 3.- Théorie des revêtements

A.1.- Position du problème. Soient S_1, S_2 deux surfaces de Riemann, g une application continue de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$, $\{\hat{S}_1, f_1\}$, $\{\hat{S}_2, f_2\}$ des revêtements de S_1, S_2, existe-t-il une application $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$ telle que l'on ait :

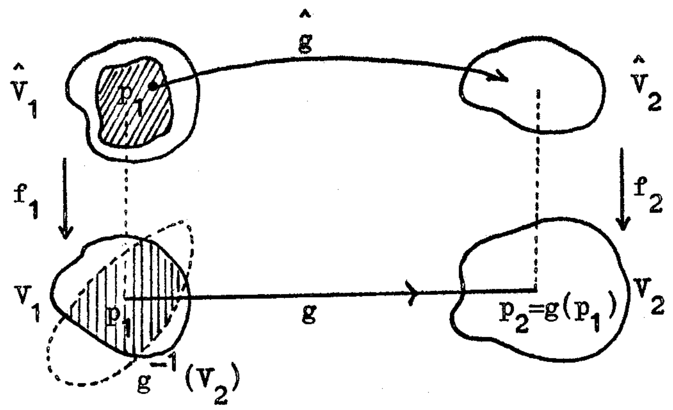
(1) $$g \circ f_1 = f_2 \circ \hat{g} .$$

Localement $\hat{g}$ est bien définie :

- Soit $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}_1$ et $\hat{V}_1$ un voisinage de $\hat{p}_1$ tel que $f_1|_{\hat{V}_1}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_1$ sur $f_1(\hat{V}_1) = V_1$.

- Soit $p_2 = g(p_1)$, V_2 un voisinage de p_2 et $\hat{V}_2 \subset f^{-1}(V_2)$ tel que $f_2|_{\hat{V}_2}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_2$ sur V_2.

Alors $\hat{g} = f_2^{-1} \circ g \circ f_1$ est définie sur un voisinage de $\hat{p}_1$ à savoir $\hat{V}'_1 = \hat{V}_1 \cap f_1^{-1}(V_1 \cap g^{-1} V_2)$



A.1.1. Définition

Soit $\hat{V}_1$ un ouvert de $\hat{S}_1$, une application $\hat{g} : \hat{V}_1 \longrightarrow \hat{S}_2$ est un relèvement local de g si la relation (1) est vérifiée.

A.1.2. Proposition

Chaque point $\hat{p}_1$ de $\hat{S}_1$ possède un voisinage $\hat{V}_1$ dans lequel on peut définir un relèvement local de g.

A.1.3. Etude des relèvements locaux de g

Soient $\hat{V}_1$ et $\hat{V}'_1$ deux voisinages de $\hat{p}_1$, $\hat{g}_1$ et $\hat{g}'_1$ les relèvements locaux correspondants. S'il existe une suite de points $\{\hat{p}_n\}$ convergeant vers $\hat{p}_1$ tels que $\hat{g}_1(\hat{p}_n) = \hat{g}'_1(\hat{p}_n)$ alors $\hat{g}_1$ et $\hat{g}'_1$ coincident sur un voisinage $\hat{V}''_1$ de $\hat{p}_1$: ceci résulte de la construction de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}'_1$ et de leur continuité en $\hat{p}_1$. Il en résulte donc une relation d'équivalence dans l'ensemble des relèvements locaux de g au voisinage des points de $\hat{S}_1$ $\quad \hat{g}_1 \sim \hat{g}'_1 \Longleftrightarrow \exists \hat{V}''_1$ voisinage de $\hat{p}_1$ où les fonctions coincident.

A.1.4. Définition. Une classe d'équivalence est un germe de relèvement de g.

A.1.5. On a vu (chap. II, § 4) que l'ensemble des germes de relèvement peut être muni d'une structure d'espace topologique séparé ~~fa~~isant de cet ensemble une surface S étalée sur $\hat{S}_1$ par le projection $f : S \longrightarrow \hat{S}_1$ qui envoie un germe en $\hat{p}_1$ sur $\hat{p}_1$.

A.2. <u>Théorème</u>. Si $\{\hat{S}_k , f_k\}_{k=1,2}$ est un revêtement de S_k, g une application continue de S_1 dans S_2 et si $\hat{S}_1$ est simplement connexe, il existe une application $\hat{g} : \hat{S}_1 \longrightarrow \hat{S}_2$ satisfaisant à (1) $(g \circ f_1 = f_2 \circ \hat{g})$.

<u>Démonstration</u>. Si $\gamma(\hat{p}_1)$ est un germe de S, il peut être prolongé le long de chaque courbe $\hat{p}(t)$ de $\hat{S}_1$ (démonstration déjà vue). On peut donc appliquer le théorème de monodromie à $\hat{S}_1$ simplement connexe.

A.2.1. <u>Corollaire</u>. Si $\{\hat{S}_k, f_k\}_{k=1,2}$ sont deux revêtements de la même surface S et si $\hat{S}_1$ est simplement connexe, il existe une application $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$ telle que $\{\hat{S}_1 , \hat{g}\}$ soit un revêtement de $\hat{S}_2$ et $f_2 \circ \hat{g} = f_1$.

<u>Démonstration</u>. Prenons $S_1 = S_2 = S$

$g =$ l'identité dans S.

D'après le théorème (A.2) il existe une application $\hat{g} : \hat{S}_1 \longrightarrow \hat{S}_2$ vérifiant $g \circ f_1 = f_1 = f_2 \circ \hat{g}$. Il en résulte que $\{\hat{S}_1 , \hat{g}\}$ est un revêtement de $\hat{S}_2$.

A.3. <u>Définition</u>. Deux revêtements $\hat{S}_k$, $f_{k\ k=1,2}$ d'une surface S sont <u>isomorphes</u> s'il existe un homéomorphisme $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ sur $\hat{S}_2$ tels que $f_2 \circ \hat{g} = f_1$.

A.3.1. <u>Lemme</u>. Si $\{\hat{S}_k , f_k\}_{k=1,2}$ sont deux revêtements de S et si $\hat{S}_1$ et $\hat{S}_2$ sont simplement connexes et connexes alors $\{\hat{S}_1 , f_1\}$ et $\{\hat{S}_2 , f_2\}$ sont isomorphes.

<u>Démonstration</u>. $\hat{S}_1$ est simplement connexe, d'après le corollaire (A.2.1), il existe $\hat{g} : \hat{S}_1 \longrightarrow \hat{S}_2$ telle que $\{\hat{S}_1 , \hat{g}\}$. soit un revêtement de $\hat{S}_2$ or $\hat{S}_2$ est simplement connexe d'après le corollaire (1.1 § 3 chap. II) $\hat{g}$ est un homéomorphisme de $\hat{S}_1$ sur $\hat{S}_2$.
Il en résulte que chaque surface possède au plus un revêtement simplement connexe à un isomorphisme près.

A.3.2. <u>Définition</u>. Si $\{\hat{S} , f\}$ est un revêtement de S où S est simplement connexe, on l'appelle le <u>revêtement</u> <u>universel</u>.

B.- Revêtement universel

B.1.- Théorème. Toute surface S connexe possède un revêtement universel.

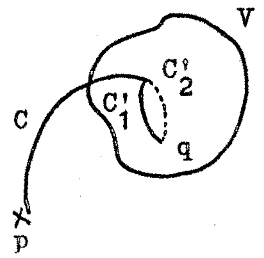
Démonstration. Soit p_o un point de S, p un point de S, C_1 et C_2 deux courbes de S joignant p_o à p. On définit dans l'ensemble des couples $(p,C)_{p \in S}$, C courbe joignant p_o à p, une relation d'équivalence

$(p,C_1) \simeq (p,C_2)$ si et seulement si C_1 et C_2 sont homotopes $(C_1 \approx C_2)$.

Soit $\hat{S} = \left\{\hat{p} = [(p,C)]\right\}$ $\hat{p}$ est la classe d'équivalence d'un couple (p,C).

a) Construction d'une topologie sur $\hat{S}$

- Soit V un voisinage simplement connexe de p (il en existe) par définition



$$\hat{V} = \left\{\hat{q}\right\} = \left\{[(q,C_1)] \quad q \in V, \quad C_1 = C + C_1'\right\}$$

C_1' est une courbe joignant p à q dans V. On définit bien ainsi un élément de $\hat{S}$: en effet si $C_2 = C + C_2'$ où C_2' est une courbe joignant p à q dans V alors $C_2' \approx C_1'$ donc $C + C_2' \approx C + C_1'$.

Un ouvert de $\hat{S}$ est réunion quelconque de tels voisinages $\hat{V}$.

b) Soit $f : \hat{S} \longrightarrow S$ telle que $f(\hat{p}) = p$. Alors chaque point de S possède un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \hat{V}_\alpha$ où f est un homéomorphisme de $\hat{V}_\alpha$ sur V.

Démonstration. Soit V un voisinage simplement connexe de p. $f^{-1}(p) = \bigcup_\alpha [(p,C_\alpha)]$ où C_α est une courbe joignant p_o à p. Pour α fixé, posons

$\hat{V}_\alpha = \left\{\hat{q}_\alpha = [q,\hat{C}_\alpha^1] \,/ C_\alpha^1 = C_\alpha + C_1' \right.$ où C_1' est une courbe joignant p à q dans $\left.V\right\}$.

i) $f^{-1}(V) \supset \bigcup_\alpha \hat{V}_\alpha$ évident

ii) $f^{-1}(V) \subset \bigcup_\alpha \hat{V}_\alpha$: soit $\hat{q} \in f^{-1}(V)$ alors $\hat{q} = [(q,C)]$ où q appartient à V et C est une courbe joignant p_o à q.

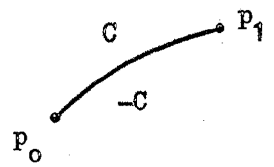
Soit C_1' une courbe dans V joignant p à q et soit $C_\alpha = C - C_1'$. Dans ces conditions $C_\alpha + C_1' \approx C - C_1' + C_1' \approx C$ (voir note) donc $[(q,C)] = [(q,C + C_1')]$ et $\hat{q} \in \hat{V}_\alpha$.

iii) Si $\alpha \neq \beta$ alors $\hat{V}_\alpha \cap \hat{V}_\beta = \emptyset$.

Supposons qu'il existe $\hat{q} \in \hat{V}_\alpha \cap \hat{V}_\beta$ alors $\hat{q} = [(q, C^1_\alpha)] = [(q, C^1_\beta)]$ donc $C^1_\alpha \approx C^1_\beta$ c'est à dire $C_\alpha + C'_1 \approx C_\beta + C'_2$ avec $C'_1 \approx C'_2$ (p et q sont dans V simplement connexe). Il en résulte que $C_\alpha \approx C_\beta$ (voir note).

NOTE.- Ces propriétés sur les courbes homotopes résultent du fait que pour toute courbe C d'origine p_0, d'extrémité p_1, la courbe fermée $C - C$ est homotope à la courbe $\{p_0\}$ réduite au point p_0.

Démonstration.



$$C : t \in [0,1] \longrightarrow f(t) \in C$$

$$-C : t \in [0,1] \longrightarrow f(1-t) \in -C$$

$$C - C : g(t) \in [0,1] \begin{cases} g(t) = f(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(t) = f(2-2t) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\text{pour } 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ posons } F(t,u) = \begin{cases} f(2tu) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2u-2tu) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

or $F(t,u)$ est une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans S.

$F(t, 0) = \{p_0\}$

$F(t,1)$ courbe $(C - C)$

$F(0, u) = f(0) = p_0$

$F(1, u) = f(0) = p_0$

$F(t,u)$ traduit la propriété d'homotopie.

c) $\hat{S}$ est connexe

Soit $\hat{p} = [(p,C)]$ où C est définie par l'application :

$t \in [0,1] \longrightarrow p(t)$ $\qquad p(0) = p_0 \qquad p(1) = p.$

Pour $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ soit $C_\tau = \{p(t) \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$.

$\hat{p}(\tau) = [(p(\tau), C_\tau)]$ $\quad \hat{p}(\tau)$ définit une courbe sur $\hat{S}$ joignant $\hat{p}_0 = [(p_0, C_0 \equiv p(0))]$ à $\hat{p}$. On a d'autre part $f\hat{p}(\tau) = p(\tau)$ donc $\hat{p}(\tau)$ est le relèvement de $p(\tau)$ à partir de p_0.

On peut continuer $\hat{S}$ le long de toute courbe $p(\tau)$ à partir de $\hat{p}_0$.

d) $\hat{S}$ est un espace topologique séparé.

Soit $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ deux points de $\hat{S}$ $\hat{p}_1 = [(p_1 , C_1)]$

$\hat{p}_2 = [(p_2 , C_2)]$

si $p_1 \neq p_2$: il existe des voisinages disjoints de p_1 et p_2, donc de $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$

si $p_1 = p_2 = p$ $\hat{p}_1 \neq \hat{p}_2$ entraine que C_1 n'est pas homotope à C_2.

Soit V un voisinage simplement connexe de p, $\hat{V}_1$ et $\hat{V}_2$ les voisinages de $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$.

Montrons que $\hat{V}_1 \cap \hat{V}_2 = \emptyset$.

Par l'absurde : soit $\hat{q} \in \hat{V}_1 \cap \hat{V}_2$: $\hat{q} = [(q_1, C_1 + C_1')] = [(q_2, C_2 + C_2')]$

donc : $q_1 = q_2$, $C_1 + C_1' \approx C_2 + C_2'$ or $C_1' \approx C_2'$ donc $C_1 \approx C_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C.– <u>Groupe fondamental d'une surface</u> S

C.1.– <u>Définition</u>. Un automorphisme d'un revêtement $\{\hat{S},f\}$ d'une surface S est un isomorphisme g de $\hat{S}$ sur $\hat{S}$ tel que $f \circ g = f$. (Les automorphismes de $\hat{S}$ forment un groupe).

C.2.– <u>Lemme</u>. Si g est un automorphisme d'un revêtement $\{\hat{S},f\}$ où $\hat{S}$ est connexe. et si $\hat{p}_o$ est un point de $\hat{S}$ alors g est déterminé par son action sur $\hat{p}_o$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}$ et $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}_o$ à $\hat{p}_1$. Soit C la projection de $\hat{C}$ sur S et $\hat{C}'$ le relèvement de C à partir de $g(\hat{p}_o)$ alors l'extrémité de $\hat{C}'$ est $g(\hat{p}_1)$.

C.2.1.– <u>Corollaire</u>. Si un automorphisme possède un point fixe, c'est l'identité.

C.3.– <u>Lemme</u>. Le groupe d'automorphisme $\mathcal{G}$ du revêtement universel d'une surface S connexe est en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des courbes d'origine et d'extrémité p_o point de S.

<u>Démonstration</u>. Soient p_o un point de S, g un automorphisme du revêtement universel $\{\hat{S} , f\}$ de S.

Soit $\hat{p}_o \in f^{-1}(p_o)$.

$\hat{p}_o$ et $g(\hat{p}_o)$ déterminent g car $\hat{S}$ est connexe (lemme C.2). Soit $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}_o$ à $g(\hat{p}_o)$: sa projection C sur S est une courbe fermée d'origine et d'extrémité p_o. Soit $\hat{C}_1$ une autre courbe joignant $\hat{p}_o$ à $g(\hat{p}_o)$; $\hat{C}_1$ et $\hat{C}$ sont homotopes ($\hat{S}$ est simplement connexe) donc C_1 et C sont homotopes :

à un élément g de $\mathcal{G}$ on peut donc faire correspondre la classe d'homotopie d'une courbe C, projection d'une courbe $\hat{C}$ joignant $\hat{p}_o$ à $g(\hat{p}_o)$.

$$g \in \mathcal{G} \longmapsto [(C)] .$$

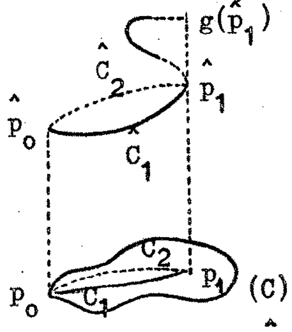
L'application est injective, en effet

si $\tilde{g} \neq g$ alors $\tilde{g}(\hat{p}_o) \neq g(\hat{p}_o)$ donc $\tilde{C}$ n'est pas homotope à C (sinon par monodromie $\hat{C}$ et $\hat{\tilde{C}}$ seraient homotopes sans avoir même extrémité).

L'application est surjective

Soient C une courbe fermée en p_o et $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}$.

Définissons $g(\hat{p}_1)$:



Soit $\hat{C}_1$ une courbe joignant $\hat{p}_o$ à $\hat{p}_1$, de projection C_1 sur S $g(\hat{p}_1)$ est l'extrémité du relèvement de la courbe $C + C_1$ à partir de $\hat{p}_o$.

Justification : $g(\hat{p}_1)$ ainsi défini est indépendant de $\hat{C}_1$. Soit $\hat{C}_2$ une autre courbe joignant $\hat{p}_o$ à $\hat{p}_1$.

$\hat{S}$ est simplement connexe donc $\hat{C}_2 \sim \hat{C}_1$ donc $C + C_1 \sim C + C_2$. Par monodromie il en est de même des relèvements à partir de $\hat{p}_o$.

En particulier le relèvement de C est une courbe $\hat{C}$ joignant $\hat{p}_o$ à $g(\hat{p}_o)$.

A toute courbe C on fait correspondre un automorphisme g.

C.3.1.– Corollaire. Les classes d'homotopie des courbes fermées en deux points d'une surface connexe sont en correspondance biunivoque.

En effet, si p_o et p_1 sont deux points de S on a :

$$[(c_o)] \longleftrightarrow g \in \mathcal{G} \longleftrightarrow [(c_1)].$$

C.3.2.– Corollaire. S est simplement connexe si et seulement si $\mathcal{G}$ se réduit à l'identité. S simplement connexe $\Longleftrightarrow$ il existe une classe d'homotopie $\Longleftrightarrow$ il existe un seul automorphisme qui est l'identité

C.4.– Définitions

C.4.1.– Le groupe $\mathcal{G}$ d'automorphismes du revêtement universel de S s'appelle le groupe fondamental de S.

C.4.2.– Soit $\mathcal{G}$ un groupe d'homéomorphismes d'un espace topologique X. Pour tout point p de X on définit E, l'orbite de p sous $\mathcal{G}$

$E = \{g(p)\}_{g \in \mathcal{G}}$.

C.4.3.– Le groupe $\mathcal{G}$ est discret si tout élément g de $\mathcal{G}$ distinct de l'identité n'a pas de point fixe et si chaque orbite est un ensemble discret dans X.

C.5.– Lemme. Si $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S, le groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de $\{\hat{S}, f\}$ est discret.

1. Tout élément g distinct de l'identité n'a pas de point fixe (sinon g est l'identité)

2. Soit $\hat{p} \in \hat{S}$ et E l'orbite de $\hat{p}$. $p = f(\hat{p})$ donc $E \subset f^{-1}(p)$ $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S, il existe un voisinage V de p tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$ et $f|_{\hat{V}}$ est un homéomorphisme de $\hat{V}_{\alpha}$ sur V donc $\hat{V}_{\alpha}$ ne contient aucun autre point de $f^{-1}(p)$, donc de E. E est discret.

Remarques.

C.5.1.– Si $\hat{S}$ est simplement connexe alors $E = f^{-1}(p)$. Si $\hat{p}_1 \in f^{-1}(p)$, il existe $g \in \mathcal{G}$ tel que $g(\hat{p}) = \hat{p}_1$: en effet, soit $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}$ à $\hat{p}_1$ et C la projection de $\hat{C}$, à la classe d'homotopie de C on fait correspondre $g \in \mathcal{G}$ tel que $g(\hat{p}) = \hat{p}_1$.

C.5.2.– Si S est une surface de Riemann, $\{\hat{S}, f\}$ un revêtement de S avec la structure conforme induite sur $\hat{S}$ alors les automorphismes de $\hat{S}$ sont des transformations conformes : en effet, localement f et f^{-1} sont inverses, l'une de l'autre, analytiques donc g est analytique donc conforme. ($f \circ g = f$)

C.6.– Lemme. Soit $\mathcal{G}$ un groupe discret de transformations conformes du plan complexe dans lui-même, alors $\mathcal{G}$ est l'un des trois groupes suivants :

1) $\mathcal{G} = \{id\}$

2) $\mathcal{G} = \{g \mid g(Z) = Z + nb \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \qquad b \in \mathbb{C}\}$

3) $\mathcal{G} = \{g \mid g(Z) = Z + nb + nc \qquad m,n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \qquad b \neq 0 \qquad c/b \text{ non réel}\}$

Démonstration. Ces trois groupes sont discrets (évident).

Soit $g(Z)$ une transformation conforme du plan dans lui-même sans point fixe, alors $g(Z)$ est une transformation analytique, bijective, donc $g(Z) = aZ + b$.

$$g(Z) = Z \Longrightarrow Z = aZ + b \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 0 \end{cases} \quad \text{(sinon } g(Z) \text{ aurait un point fixe)}$$

donc $g(Z) = Z + b$.

Soit E l'orbite de l'origine sous $\mathcal{G}$ $\qquad E = \{b\}_{g \in \mathcal{G}}$

E est discret, il n'y a donc qu'un nombre fini de points de E dans chaque domaine borné du plan : si $E = \{0\}$, $\mathcal{G} = \{id\}$; sinon il existe $w_1 \neq 0$, w_1 appartenant à E tel que $g(Z) = Z + b \in \mathcal{G} \Longrightarrow |b| \geqslant |w_1|$.

Supposons que $\mathcal{G}$ ne soit ni de la forme (1), ni de la forme (2), alors il existe $g \in \mathcal{G}$ (donc $b \in \mathbb{C}$) et $b \neq mw_1$ (m entier).

Soit $w_2 \in E$, tel que $|w_2| \leqslant |b|$ $\forall$ $b \neq mw_1$; $z + b \in \mathcal{G}$.

$w_2 \neq \lambda w_1$ avec λ réel : en effet, si $w_2 = \lambda w_1$ il y aurait un élément entre 0 et w_1 soit $(w_2 - m_o w_1)$ pour m_o convenable qui appartiendrait à E, d'où la contradiction.

$w_2 \neq \lambda w_1$ donc $\frac{w_2}{w_1}$ n'est pas réel et $mw_1 + nw_2 \in E$ pour m,n entiers.

Montrons que $E = \{mw_1 + nw_2\}_{m,n \in N}$. En effet, l'ensemble $\{mw_1 + nw_2\} = F$ forme un réseau de parallélogrammes. Soit $b \in E$ et b_o le sommet du parallélogramme le plus proche de b, alors si $b \neq b_o$ il existe $w_3 \in E$ tel que $|w_3| < |w_2|$ ce qui contredit la définition de w_2.

§ 4.– Classification générale

1. Théorème. Soit S une surface de Riemann connexe, $\{\hat{S}, f\}$ le revêtement universel de S.

1) Si $\hat{S}$ est elliptique alors S est la sphère

2) Si $\hat{S}$ est parabolique, alors S est ou bien a) le plan

b) le plan moins l'origine

c) le tore plat.

1.1.– Corollaire. Pour toute surface S, distinctes des quatre citées dans le théorème 1, le revêtement universel est hyperbolique ($\hat{S}$ est le disque unité).

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ le groupe fondamental de S.

① $\hat{S}$ elliptique. $\hat{S}$ est simplement connexe et elliptique. $\hat{S}$ est la sphère de Riemann. Les transformations conformes de $\hat{S}$ sont de la forme $Z \longrightarrow g(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}$

$g(Z) = Z$ donne 1 ou 2 points fixes sauf si $g(Z) \equiv Z$, donc $\mathcal{G} = \{id\}$.

Pour tout point p_o de S, $f^{-1}(p_o)$ ne contient qu'un point et S est l'image conforme de $\hat{S}$.

S est la sphère.

② $\hat{S}$ parabolique et simplement connexe est conforme au plan complexe.

D'après le lemme C.6 § 3, il y a trois possibilités pour le groupe fondamental $\mathcal{G}$ de S.

a) $\mathcal{G} = \{id\}$ alors S est le plan

b) $\mathcal{G} = \{Z \longrightarrow g(Z) = Z + nb\}$ alors S est conforme au domaine $0 < |w| < \infty$ (le plan moins l'origine). En effet, un point p de S s'identifie à l'orbite $E = f^{-1}(p)$ $Z = \{g(f^{-1}(p))\}_{g \in \mathcal{G}} = \{z + nb\}_{n \in N}$. La transformation $Z \longrightarrow w = e^{\frac{2i\pi}{b} z}$ du plan sur le plan moins un point réalise la projection de $\hat{S}$ sur S. S est conforme au plan poins un point.

c) $\mathcal{G} = \{Z \longrightarrow g(Z) = Z + mb + nc\}$

$\hat{S}$ est le plan complexe et tout point p de S s'identifiant à l'orbite $E = f^{-1}(p)$ on a $S \equiv \hat{S}|\mathcal{G}$ (du point de vue conforme) or l'ensemble quotient $\hat{S}|\mathcal{G}$ est le tore plat (ensemble des points d'un parallélogramme construit sur b et c dans lequel on identifie les côtés parallèles).

S est le tore plat.

1.1.1.- Remarque. Pour tout autre surface de Riemann S on a toujours la représentation $S = \hat{S}|\mathcal{G}$ où $\hat{S}$ est le disque unité $|Z| < 1$ et $\mathcal{G}$ un groupe discret de transformations de $\hat{S}$ de la forme

$$g(Z) = e^{i\alpha} \frac{Z - Z_o}{1 - \bar{Z}_o Z} \qquad |Z_o| < 1.$$

1.2.- <u>Corollaire</u> (théorème de Picard)

Une fonction méromorphe dans tout le plan et non constante prend toute valeur complexe avec au plus deux exceptions.

<u>Démonstration</u>. Soit $g(Z)$ une application analytique du plan dans la sphère. Supposons qu'il existe trois points exceptionnels (trois valeurs complexes qui ne sont pas prises par la fonction).

Soit $D = S - \{3 \text{ points}\}$ g est une transformation analytique du plan sur D.

Soit $\{\hat{S},f\}$ le revêtement universel de D.

D n'est équivalent (même topologiquement et à fortiori conformément) à aucune des 4 surfaces du théorème 1, donc $\hat{S}$ est hyperbolique, c'est à dire conforme au disque unité.

Soit $\tilde{g}$ un relèvement de g dans $\hat{S}$ (§3.A.2) $w = \tilde{g}(Z)$ est une application du plan sur le disque et $g(Z) = f \circ \tilde{g}(Z)$, $\tilde{g}$ analytique, et bornée dans le plan est constante, donc g est aussi constante.

Deuxième partie

Chapitre 1.-

1.- Définition du plan hyperbolique

(ou modèle de Poincaré de la géométrie non euclidienne) c'est le disque

$|Z| < 1$ muni de la métrique riemannienne définie par

1.1 $$g_{ij} = \left[\frac{2}{1 - |Z|^2}\right]^2 \delta_{ij}$$

1.2 soit $Z(t)$ une courbe differentiable $t \in [a, b]$. Sa longueur hyperbolique

est $\displaystyle\int_a^b \frac{2}{1 - |Z|^2} \left|\frac{dZ}{dt}\right| dt$

2.- Lemme

2.1 les transformations de la forme $w = e^{i\alpha} \dfrac{Z - Z_o}{1 - Z \bar{Z}_o}$ sont desisométries du plan hyperbolique.

démonstration

- (1) est une bijection sur $|w| < 1$

- montrons que $|w| < 1$

$$|w|^2 = \frac{(Z - Z_o)\ (\bar{Z} - \bar{Z}_o)}{(1 - Z\bar{Z}_o)\ (1 - \bar{Z} Z_o)} = \frac{|Z|^2 - Z\bar{Z}_o - \bar{Z} Z_o + |Z_o|^2}{1 - \bar{Z}_o Z - Z_o \bar{Z} + |Z_o|^2 |Z|^2}$$

$$1 - |w|^2 = \frac{1 - |Z|^2 - |Z_o|^2 + |Z_o|^2 |Z|^2}{1 - \bar{Z}_o Z - Z_o \bar{Z} + |Z_o|^2 |Z|^2}$$

2.2 $$1 - |w|^2 = \frac{(1 - |Z|^2)\ (1 - |Z_o|^2)}{|1 - Z\bar{Z}_o|^2} > 0$$

donc $|w| < 1$

- $w(Z)$ est une bijection :

$$Z = \frac{w + e^{i\alpha} Z_o}{e^{i\alpha} - w \bar{Z}_o} \qquad \forall w \quad |w| < 1$$

$$\text{car} \quad \left| \frac{e^{i\alpha}}{\bar{Z}_o} \right| > 1$$

$$Z = e^{-i\alpha} \frac{w + e^{i\alpha} Z_o}{1 - w\, e^{i\alpha} Z_o}$$ qui est de la forme 2.1

b) la longueur de toute courbe est conservée par l'application $Z \longrightarrow w$

$$\left|\frac{dw}{dt}\right| = \left|\frac{dw}{dZ}\right| \left|\frac{dZ}{dt}\right| = \left| \frac{1}{1 - Z\bar{Z}_o} + \frac{(Z - Z_o)\,\bar{Z}_o}{(1 - Z\bar{Z}_o)^2} \right| \times \left|\frac{dZ}{dt}\right|$$

2.3 $$= \left| \frac{1 - |Z_o|^2}{(1 - Z_o\ Z)^2} \right| \times \left|\frac{dZ}{dt}\right|$$

en rapprochant de 2.2 il vient

$$\int_a^b \frac{2}{1 - |w|^2} \left|\frac{dw}{dt}\right| dt = \int_a^b \frac{2}{1 - |Z|^2} \left|\frac{dZ}{dt}\right| dt$$

3.- Lemme de Schwarz-Pick

3.1 soit $w = f(Z)$ une application analytique de $|Z| < 1$ dans $|w| < 1$.

La longueur hyperbolique de chaque courbe est réduite sauf dans le cas où $f(Z)$ est de la forme 2.1

démonstration

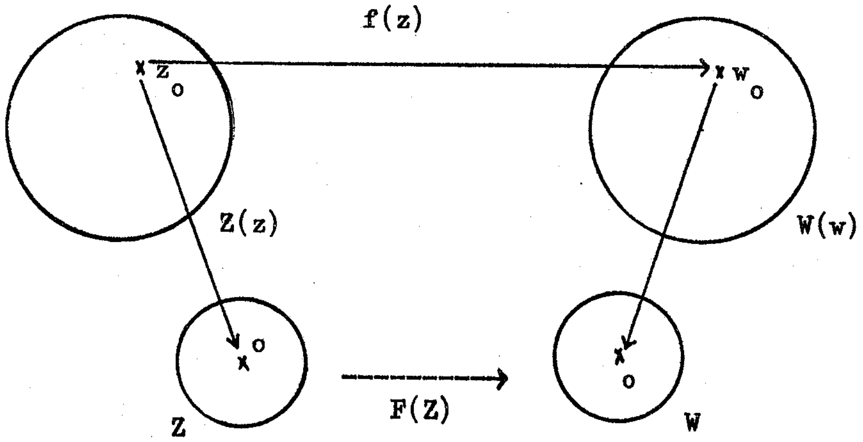
Il suffit de démontrer que si $f(z) \neq 2.1$

$\forall z_o \quad |z_o| < 1 \qquad w_o = f(z_o)$

$$3.2 \quad \frac{1}{1-|w_o|^2}\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_o} < \frac{1}{1-|z_o|^2}$$

soit $Z(z)$ et $W(w)$ des transformations de la forme 2.1 telle que

$$Z(z_o) = 0 \qquad W(w_o) = 0$$



$Z(z)$ et $W(w)$ étant bijectives

$W = F(Z) F = W o f o Z^{-1} \qquad F(0) = 0$

appliquons le lemme de Schwarz

- ou $F(Z) = e^{i\beta} Z$ donc f est de la forme 2.1

- ou $|F'(0)| < 1$

W et Z étant desisométries :

$$\frac{1}{1-|w_o|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right| = \left|\frac{dW}{dt}\right| \qquad (W_o = 0)$$

$$\frac{1}{1-|z_o|^2}\left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dZ}{dt}\right| \qquad (Z_o = 0)$$

$$\left|\frac{dW}{dZ}\right|_o = \left|F'(0)\right| = \left|\frac{dW}{dt} \Big/ \frac{dZ}{dt}\right| < 1$$

donc $\dfrac{1}{1-|w_o|^2}\left|\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_o} < \dfrac{1}{1-|z_o|^2}$

3.3 Corollaire

toute transformation conforme de $|Z| < 1$ sur $|w| < 1$ est de la forme 2.1 sinon la transformation et son inverse n'étant pas de la forme 2.1 rétrecissent la longueur hyperbolique.

4.- Lemme

les géodésiques du plan hyperbolique sont les cercles orthogonaux à $|Z| = 1$

démonstration

soient z_o et z_1 deux points du plan hyperbolique, cherchons une géodésique passant par z_o z_1

soit $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_o}{1 - z\bar{z}_o}$ telle que $z_o \longrightarrow w = 0$

$z_1 \longrightarrow w(z_1)$ réel > 0

$= c$

NB = $w(z)$ conserve les longueurs, donc on peut chercher à minimiser la longueur de la courbe $w(t)$ joignant 0 à c $\quad w(t) = w(a) = 0$

$w(b) = c$

$w = u + iv \qquad |w|^2 \geq |u|^2 \qquad u(t)$ est une courbe joignant 0 à c.

$$\frac{1}{1-|w|^2} \geq \frac{1}{1-|u|^2}$$

$$\left|\frac{dw}{dt}\right| \geq \left|\frac{du}{dt}\right|$$

$$\int_a^b \frac{2}{1-|w|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right| dt \geq \int_a^b \frac{2}{1-|u|^2}\left|\frac{du}{dt}\right| dt \geq \int_a^b \frac{2}{1-u^2}\frac{du}{dt}\, dt$$

$$\geq \int_0^c \frac{2}{1-u^2}\, du = \left|\log \frac{1-u}{1+u}\right|_0^c$$

égalité si $|w| = |u|$ donc $v = 0$

$$\left|\frac{du}{dt}\right| = \frac{du}{dt}$$

$w(t)$ est le segment de l'axe réel $[0, c]$ donc $z(t)$ est l'arc de cercle orthogonal à $|Z| = 1$ passant par z_1 et z_0

5.- Lemme

5.1 le plan hyperbolique est une surface complète.

démonstration

Soit $z(t)$ $0 \leq t < 1$ une courbe qui tend vers la frontière

Soit $z = re^{i\theta}$

$$\int_0^\tau \frac{2}{1-|Z|^2}\left|\frac{dz}{dt}\right| dt \geq \int_0^\tau \frac{2}{1-r^2}\, dr \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } \tau \longrightarrow 1 \text{ c'est-à-dire quand } r \longrightarrow 1$$

5.2 rappel : la courbure de Gauss K d'une métrique riemanniene de la forme

$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ est $K = \dfrac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$

6.- Lemme

la courbure de Gauss du plan hyperbolique $K = -1$

$\lambda = \dfrac{2}{1 - Z\bar{Z}}$ $\log \lambda = \log 2 - \log(1 - Z\bar{Z})$

$\Delta \log \lambda = 4(\log \lambda)_{Z\bar{Z}}$

$$(\log \lambda)_Z = \frac{\bar{Z}}{1 - Z\bar{Z}}$$

$$(\log \lambda)_{Z\,\bar{Z}} = \frac{1}{1 - Z\,\bar{Z}} + \frac{Z\,\bar{Z}}{(1 - Z\,\bar{Z})^2} = \frac{1}{(1 - Z\,\bar{Z})^2}$$

$$K = -4\,\frac{1}{(1 - Z\,\bar{Z})^2} \times \frac{(1 - Z\,\bar{Z})^2}{4} = -1$$

7.- Théorème

7.1 sur toute surface de Riemann S, il existe une métrique riemannienne telle que la structure conforme induite par la métrique coïncide avec la structure originale ; on peut choisir la métrique telle que la courbure de Gauss soit constante.

démonstration

Soit $\{\hat{S}, f\}$ le revêtement universel de S

1º $\hat{S}$ = sphère on prend sur S la métrique canonique classique, c'est-à-dire celle induite par son plongement dans R^3. Par projection stéréographique on trouve la forme de la métrique correspondante dans le plan ; nous avons vu (chap. I)

$$g_{ij} = \left(\frac{2}{1 + |z|^2}\right)^2 \delta_{ij} \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{2}{1 + |z|^2} = \frac{2}{1 + Z\,\bar{Z}}$$

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \qquad \Delta \log \lambda = \frac{4}{(1 + Z\,\bar{Z})^2} \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{K = 1}}$$

2º $\hat{S}$ = plan muni de la métrique euclidienne $K = 0$

Soit $\hat{V}$ un voisinage sur $\hat{S}$ $\quad f = \hat{V} \longrightarrow V$

Soient p et $q \in V$ $\quad \hat{p}$ et $\hat{q} \in \hat{V}$ tels que

$p = f(\hat{p}) \qquad q = f(\hat{q})$.

On pose $d(p.\, q) = d(\hat{p}.\, \hat{q})$ car $\hat{p}_1$ et $\hat{q}_1$ sont tels que $f(\hat{p}_1) = p$

$$f(\hat{q}_1) = q$$

$\hat{p}_1$ et $\hat{q}_1$ appartenant un même voisinage de $\hat{S}$, on passe de $\hat{p}$ à $\hat{p}_1$ / $\hat{q}$ à $\hat{q}_1$ par un automorphisme du plan, qui conserve la distance euclidienne.

donc $d(\hat{p}_1, \hat{q}_1) = d(\hat{p}, \hat{q})$.

3º $\hat{S}$ = disque unité muni de la métrique hyperbolique $K = -1$

On fait le même raisonnement avec les automorphismes de $\hat{S}$; $Z = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_o}{1 - z\bar{z}_o}$ qui conservent la distance hyperbolique.

8.- <u>Théorème de Picard</u> (démonstration de H. Huber)

<u>8.1</u> soit $f(z)$ méromorphe dans $0 < |z| < \delta$ supposons qu'il existe trois valeurs qui ne sont pas prises par $f(z)$; alors $f(z)$ peut être définie à l'origine telle que $f(z)$ soit méromorphe dans $|z| < \delta$

<u>démonstration</u>

f est une transformation analytique à valeurs dans la sphère ; montrons qu'on peut la prolonger à l'origine.

f est un homéomorphisme local du plan (Z) sur S, donc pour chaque point p_o de S, il existe z_o de $\hat{S}$ et un voisinage V de p_o tel que $f^{-1}(V)$ soit un voisinage $\hat{V}$ de z_o. En prenant $\hat{V}$ pour coodonnées locales dans V on définit la métrique riemannienne $g_{ij} = \delta_{ij}$. C'est indépendant du choix de $z_o \in f^{-1}(p_o)$, en effet, deux voisinages $\hat{V}$ et $\hat{V}_1$ dans $f^{-1}(V)$ sont transformés l'un dans l'autre par un automorphisme de $\hat{S}$ c'est-à-dire par une translation du plan qui conserve la métrique euclidienne. On a défini une métrique sur S, localement euclidienne donc $K = 0$.

Soit D = domaine : la sphère moins les trois points. $\hat{D}$ revêtement universel de D.

$$\hat{D} \longleftrightarrow |w| < 1$$

a) si $f(z) \longrightarrow p_0$ quand $z \longrightarrow 0$.

Soit φ_a une carte normalisée à p_0. $\varphi_a^{-1}[f(z)]$ a une singularité qu'on peut enlever à l'origine ; $f(z)$ est méromorphe en $\underline{0}$.

b) $f(z) \not\longrightarrow p_0$ quand $z \longrightarrow 0$.

Il existe V_i $i = 1, 2, 3$ voisinages des trois points de $S - D$ tels que les $\bar{V}_i$ soient disjoints, et tels que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z \quad 0 < |z| < \varepsilon \quad \text{tel que} \quad f(z) \in S - \cup V_i$$

en effet, si cela n'était pas :

$$\forall \{V_i\} \ \exists \varepsilon \ \text{tel que :} \ f\{0 < |z| < \varepsilon\} \longrightarrow \cup V_i$$

or $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ étant connexe $\exists_j$ tel que $f\{0 < |z| < \varepsilon\} \subset V_j$

donc $f(z) \longrightarrow p_j \in V_j$ quand $z \longrightarrow 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse, donc

$\exists z_n : z_n \longrightarrow 0$

$$f(z_n) \notin \cup V_i$$

or $S - \cup V_i$ est compact : donc $\exists$ une suite partielle z_p telle que $f(z_p)$ converge vers un point p_0 $\quad p_0 \notin \cup V_i$

Soit $p = \varphi_a[W]$ une carte normalisée à p_0.

$\varphi_\alpha = \{|z| < R\} \longrightarrow V$ voisinage de p_o.

Il faut démontrer que $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$f : \{0 < |z| < \varepsilon \longrightarrow V\}$

On peut alors enlever la singularité de $\varphi_\alpha^{-1}[f(z)]$

Le revêtement universel de $\Delta = 0 < |z| < \delta$ est le disque. On a sur Δ la métrique hyperbolique induite par la projection du revêtement universel $|w| < 1$ sur Δ. Soit $d(p_1 ; p_2)$ la distance de p_1 et p_2 pour cette métrique. Soit ρ tel que $\{p, d(p, p_o) < \rho\} \subset V$

$\exists N$ tel que $n > N \Longrightarrow d[f(z_n), p_o] < \frac{\rho}{2}$

Soit C_n le cercle $|z| = |z_n|$. Nous voulons calculer

ρ_n, son périmètre pour la métrique hyperbolique. La disque unité est conforme au demi plan supérieur :

$Z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$; $\eta > 0 \longrightarrow |Z| < 1$

où $\zeta = \xi + i\eta$.

$$\frac{2}{1 - |Z|^2} \frac{dZ}{d\zeta} = \frac{1}{\eta}$$

$z = e^{i\zeta}\delta$ définit le $\frac{1}{2}$ plan $\eta > 0$ comme revêtement universel du domaine

$$0 < |Z| < \delta .$$

$|z| = e^{-\eta}\delta$ d'où $\eta = -\log \frac{|z|}{\delta}$.

la longueur $\ell_n = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\eta}\left|\frac{d\zeta}{dt}\right| dt = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log \frac{|z_n|}{\delta}} d\xi$

$$= - \frac{2\pi}{\log \frac{|z_n|}{\delta}}$$

quand $z_n \longrightarrow 0$ $\ell_n \longrightarrow 0$

donc $\exists N_o$ tel que $n > N_o \Longrightarrow \ell_n \leqslant \frac{\rho}{2}$

Soit $w = \tilde{f}(Z)$ le relèvement de $f(z)$ aux revêtements universels.

D'après le lemme de Schwarz-Pick, toute longueur hyperbolique est diminuée.

Donc l'image de C_n a une longueur $\leqslant \frac{\rho}{2}$ pour $n \geqslant N_o$

et $d\left[f(z_n)\ \ f(z)\right] < \frac{\rho}{2}$ $\forall z \in$ cercle C_n.

Donc $\begin{matrix} n > N \\ n > N_o \end{matrix} \Longrightarrow d\left[f(z),\ p_o\right] < \rho$

En composant avec φ_α^{-1} nous obtenons une courbe contenue dans $|W| < R$.

Le principe du maximum entraîne que l'image de l'anneau $|z_{n+1}| \leqslant |z| \leqslant |z_n|$

par $\varphi_\alpha^{-1}\left[f(z)\right]$ est contenu dans $|W| < R$. pour tout $n > N, N_o$.

Donc $\varphi_\alpha^{-1}\ f(z)$ a une singularité qu'on peut enlever.

Chapitre 2.-

Théorie des surfaces dans un espace euclidien E^n

§ 1 Généralités

1.- Définition

1.1 Une surface S est une transformation différentiable $X(u) : D \longrightarrow E^n$ où $u = (u_1, u_2)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ et D est un domaine de E^2

1.2 S est régulière si l'application dX est injective. Soit $M = (m_{ij})$ la matrice d'élément $m_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial u_j}$ $i = 1, \dots, n$ $j = 1, 2$.

On a les équivalences suivantes :

1.3 S régulière $\Longleftrightarrow$ M de rang 2

1.4 S régulière $\Longleftrightarrow$ Les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$ sont indépendants.

1.5 S régulière $\Longleftrightarrow$ il existe deux indices i, j ; $i < j$ tels que
$\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1\ u_2)} \neq 0$

1.6 S régulière $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \neq 0$

1.7 S régulière $\Longleftrightarrow$ $\det G > 0$ où $G = M^t M$.

En effet $$\det G = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2 = \left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2$$

2.- Changement de coordonnées

Si $u(\tilde{u})$ est un difféomorphisme d'un domaine $\tilde{D}$ de E^2 sur D, la surface $\tilde{S}$ définie par $X[u(\tilde{u})]$ $\tilde{u}$ appartenant à $\tilde{D}$ est obtenue par changement de coordonnées.

On a : $\frac{\partial X_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k}$

Posons $U = (u_{ij})$ $\quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j}$, $\quad \tilde{M} = M.U$

<u>2.1</u> S régulière $\Longleftrightarrow$ $\tilde{S}$ régulière

En effet : $u(\tilde{u})$ est un difféomorphisme donc $\det U \neq 0$

$\tilde{G} = {}^t\tilde{M}.\ \tilde{M} = {}^tU\ {}^tM\ M\ U = {}^tU\ G\ U$

$\det \tilde{G} = \det G.\ (\det U)^2$

<u>2.2</u> $\det \tilde{G} = \det G. \left|\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)}\right|^2$

3.- <u>Aire d'une surface</u>

<u>3.1</u> on définit <u>l'aire de</u> S par l'expression $\iint_D \sqrt{\det G}\ du_1 \wedge du_2$

<u>3.2</u> l'aire d'une surface est invariante par changement de coordonnées de jacobien strictement positif.

aire de $\tilde{S} = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det \tilde{G}}\ d\tilde{u}_1\ d\tilde{u}_2 = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det G}\ \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)}\ d\tilde{u}_1\ d\tilde{u}_2$ si on suppose que $u \longrightarrow \tilde{u}$ est un difféomorphisme conservant l'orientation du plan,

on a : $\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)} > 0$ et $\iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det G}\ \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)}\ d\tilde{u}_1\ d\tilde{u}_2 = \iint_D \sqrt{\det G}\ du_1\ du_2$.

4.- <u>Courbe sur une surface</u>

<u>4.1</u> <u>une courbe</u> $X(t)$ $a \leqslant t \leqslant b$ est sur une surface S si pour chaque t_o, il existe u_o, de D tel que $X(t_o) = X(u_o)$.

Il peut exister plusieurs u tel que $X(t_o) = X(u_o)$, mais l'application $u \longrightarrow X(u)$ est localement injective donc localement l'application $t_o \longrightarrow u_o$ est injective.

A chaque courbe differentiable $X(t)$ correspond une courbe differentiable $u(t)$ dans D telle que $X(t) = X\,[u(t)]$.

<u>4.2 on définit la longueur de la courbe</u> : $L = \int_a^b |X'(t)|\,dt$

où $X'(t) = \begin{pmatrix} X'_1(t) \\ \vdots \\ X'_n(t) \end{pmatrix}$

soit $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ où $\xi_i = u'_i(t)$. $i = 1,2$

alors $X'(t) = M\xi \qquad |X'_t|^2 = {}^t\xi\, G\, \xi$. $G = (g_{ij})$

on a : $L = \int_a^b \sqrt{{}^t\xi\, G\xi}\; dt$

${}^t\xi\, G\xi = \sum_{i;j} g_{ij}\; u'_i\; u'_j$ d'où $L = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\; u'_i\; u'_j}\; dt$

<u>4.3 Changement de coordonnées</u>

On a : $\tilde{\xi}_i = \dfrac{d\tilde{u}_i}{dt} \qquad i = 1,2.$

$$\xi_i = \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j}\,\frac{d\tilde{u}_j}{dt} \qquad \xi = U.\tilde{\xi}$$

$${}^t\xi G\xi = {}^t(U\tilde{\xi})\; G\; U\tilde{\xi} = {}^t\tilde{\xi}\;{}^tU\; G\; U\tilde{\xi} = {}^t\tilde{\xi}\;\tilde{G}\tilde{\xi}$$

La longueur d'une courbe est invariante par changement de coordonnées à jacobien positif.

${}^t\xi\, G\xi$ <u>est la première forme fondamentale</u>

5.- Plan tangent en un point d'une surface

5.1 le plan tangent Π en un point de S est le plan engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u_1}$, $\frac{\partial X}{\partial u_2}$

5.2 le plan tangent contient le vecteur tangente à toute courbe $X(t)$ sur la surface

5.3 on définit $\Pi^{\perp}$ l'espace supplémentaire orthogonal au plan tangent Π à S. Il est de dimension $n-2$

On l'appelle espace normal à S. Un vecteur N de $\Pi^{\perp}$ est un vecteur normal à S.

5.4 Si $X(u)$ est de classe C^2 on introduit pour N de $\Pi^{\perp}$ les quantités

$$b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2$$

6.- Courbure des courbes tracées sur S

Soit $X(t)$ une courbe differentiable de S $a \leqslant t < b$.

$$s(t) = \int_a^t |X'(\tau)| \, d\tau .$$

$X'(t) \neq 0$ donc $s'(t) > 0$

$s(t)$ est une fonction monotone croissante $s(a) = 0$ $s(b) = L$. s est le paramètre de longueur : $s'(t) = |X'(t)|$

$X'(s) = X'(t) \frac{dt}{ds}$ $X'(s)$ et $X'(t)$ ont même sens

$|X'(s)| = 1$

On a : 6.1 $\sum_{i,j=1,2} g_{ij} \; u'_i(s) \; u'_j(s) = 1$

6.2 le vecteur de courbure de la courbe $X(t)$ est $\frac{d^2X}{ds^2}$

Soit p un point fixe du S : on considère toutes les courbes de S passant par p et leurs vecteurs de courbure au point p on a :

$$\frac{dX}{ds} = \sum_{i=1,2} \frac{\partial X}{\partial u_i} \; \frac{du_i}{ds}$$

$$\frac{d^2X}{ds^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 X}{\partial u_i, \partial u_j} \; \frac{du_i}{ds} \; \frac{du_j}{ds} + \sum_i \frac{\partial X}{\partial u_i} \; \frac{d^2u_i}{ds^2}$$

pour tout $N \in \Pi^{\perp}$

$$\frac{d^2X}{ds^2} . N = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i, \partial u_j} . N \right) \frac{du_i}{ds} \; \frac{du_j}{ds}$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij}(N) \; \frac{du_i}{ds} \; \frac{du_j}{ds}$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij}(N) \; \frac{du_i}{dt} \; \frac{du_j}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

$$\frac{d^2X}{ds^2} . N = \frac{\sum_{i,j} b_{ij}(N) \; \xi_i \; \xi_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \; \xi_i \; \xi_j}$$

$g_{(i,j)}$ ne dépend que du point p, b_{ij} ne dépend que du point p et de N, donc $\frac{d^2X}{ds^2} . N$ ne dépend que du point p, de N ~~et~~ du vecteur tangent en p.

$\sum_{i,j=1,2} b_{ij}(N) \; \xi_i \; \xi_j$ est la deuxième forme fondamentale

Soit $\xi = u'(t)$ un vecteur tangent donné, $X(t)$ la courbe correspondante.

Pour un vecteur N de $\Pi^{\perp}$ donné on définit :

$\underline{6.3}$ $k_1(N) = \underset{\xi}{\mathrm{Max}} \dfrac{d^2X}{ds^2}. N$

$\underline{6.4}$ $k_2(N) = \underset{\xi}{\mathrm{Min}} \dfrac{d^2X}{ds^2}. N$

$k_1(N)$ et $k_2(N)$ sont les racines de l'équation :

$\underline{6.5}$ $\det\left(b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}\right) = 0$

$$0 = (\det g_{ij})\lambda^2 - \left((g_{11}\, b_{22}(N) + g_{22}\, b_{11}(N) - 2\, g_{12}\, b_{12}(N)\right)\lambda + \det b_{ij}(N)$$

si l'on pose $H(N) = k_1(N) + k_2(N)$

$K(N) = k_1(N) \quad k_2(N)$

on a les formules suivantes

$\underline{6.6}$ $H(N) = \dfrac{g_{11}\, b_{22}(N) + g_{22}\, b_{11}(N) - 2\, g_{12}\, b_{12}(N)}{\det g_{ij}}$

$\underline{6.7}$ $K(N) = \dfrac{\det b_{ij}(N)}{\det g_{ij}}$

$b_{ij}(N)$ est linéaire par rapport à N, $H(N)$ est une fonction linéaire de N

donc il existe un vecteur H de $\Pi^{\perp}$ tel que $H(N) = H.N.$

<u>6.8</u> H <u>est le vecteur de courbure moyenne</u>

Si $(e_1, e_2, \dots e_{n-2})$ constitue une base de $\Pi^{\perp}$

$N = \sum_{i=1}^{n-2} \eta_i\, e_i \qquad H(N) = \sum_{i=1}^{n-2} \eta_i\, H(e_i) = N.\ (\sum_1 H(e_i).\ e_i)$

donc $H = \sum_{i=1}^{n-2} H(e_i)\ e_i$

<u>6.9</u> <u>on définit la courbure de Gauss</u> $K = \sum_{i=1}^{n-2} K(e_i)$

<u>Remarque</u> : <u>6.10</u> dans le cas où $n = 3$ on définit la <u>courbure moyenne</u> $\dfrac{H(e_1)}{2} = \dfrac{k_1(e_1)+k_2(e_1)}{2}$

où e_1 est choisi de telle sorte que $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, e_1$ aient la même orientation que E^3.

par exemple $e_1 = \dfrac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|}$

<u>6.11</u> on a : $K = \dfrac{\det b_{ij}(e_1)}{\det g_{ij}} = k_1(e_1) \quad k_2(e_1)$.

§ 2 Equations fondamentales de la théorie des surfaces

1.1 lemme

Si $X(u)$, de classe C^m est une surface régulière dans E^n, il existe au voisinage de chaque point u_o, un système de vecteurs $e_k(u)$ $k = 3, 4\dots n$, de classe C^{m-1} qui forment une base orthonormée de $\Pi^{\perp}(u)$.

Ce sera une conséquence des théorèmes démontrés ultérieurement.

1.2 notations

$\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, e_3, \dots e_n$ de classe C^{m-1} forment une base de E^n.

On pose :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^{n} a_{ij}^{k} e_k \tag{1-1}$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{2} c_{ij}^{k} \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^{n} d_{ij}^{k} e_k . \tag{1-2}$$

Ce sont les équations de Gauss - Weingarten

2.- Détermination des coefficients de la première équation (1-1)

On a de façon évidente :

2.1 $$a_{ij}^{k} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot e_k = b_{ij}(e_k)$$

2.2 $$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_m} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} g_{km}$$

si on utilise les symboles de Christofel $\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_k}$ il vient :

2.3 $$\Gamma_{ij,k} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^{m} g_{mk}$$

En posant $G = (g_{ij})$ et $G^{-1} = (g^{ij})$ on a les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij,k}\, g^{k\ell} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma^{m}_{ij}\, g_{mk}\, g^{k\ell}$$

avec $g_{mk}\, g^{k\ell} = \delta_{m,\ell}$

2.4 $$\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij,k}\, g^{k\ell} = \Gamma^{\ell}_{ij}$$

$$g_{ij} = \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(g_{ij}) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} + \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_j \partial u_k}$$

2.5 $$= \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

Par permutation circulaire on obtient les trois équations suivantes :

(1) $$\frac{\partial}{\partial u_k}(g_{ij}) = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial u_i}(g_{jk}) = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j} \qquad i;j,k, = 1,2$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial u_j}(g_{ki}) = \Gamma_{kj,i} + \Gamma_{ij,k}$$

or $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ d'où

2.6 $$= \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

La connaissance de la première forme fondamentale permet de déterminer

$\Gamma_{ij,k}$ puis $\Gamma^{k}_{ij} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij,m}\, g^{mk}$, et $\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^{k}_{ij} \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^{n} b_{ij}(e_k) e_k$.

3.- __Détermination des coefficients de la seconde équation__

3.1 $$\frac{\partial e_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{2} c^{k}_{ij}\, g_{km}$$

$\frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot e_i = 0$ Par dérivation on obtient :

$$\frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_m \partial u_j} \cdot e_i = 0 \quad \text{soit}$$

<u>3.2</u> $$\frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial u_j} = - b_{mj}(e_i)$$

d'où $$\sum_{k=1}^{2} c_{ij}^{k}\, g_{km} = - b_{mj}(e_i)$$

<u>3.3</u> $$c_{ij}^{\ell} = - \sum_{m=1}^{2} g^{\ell m}\, b_{mj}(e_i)$$

4.- <u>Relations entre</u> g_{ij} <u>et</u> b_{ij}

On a :

<u>4.1</u> $$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right) = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^{m} \frac{\partial^2 X}{\partial u_k \partial u_m} + \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial \Gamma_{ij}^{m}}{\partial u_k} \frac{\partial X}{\partial u_m} + \sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}(e_m)}{\partial u_k} e_m + b_{ij}(e_m) \frac{\partial e_m}{\partial u_k}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{r}}{\partial u_k} + \left(\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{km}^{r}\right) + \left(\sum_{m=3}^{n} b_{ij}(e_m)\, c_{mk}^{r}\right)\right] \frac{\partial X}{\partial u_r} + \sum_{r=3}^{n} A_r^{ijk}\, e_r$$

<u>4.2</u> posons $$R_{ikj}^{r} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{r}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{r}}{\partial u_k} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{r} - \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{km}^{r}\right)$$

or la permutation de j et k ne change pas $\frac{\partial^3 X}{\partial u_k \partial u_i \partial u_j}$ donc

$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right) - \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k}\right)$ a ses composantes nulles sur $\frac{\partial X}{\partial u_r}$ $r = 1,2$ d'où

<u>4.3</u> $$R_{ikj}^{r} = \sum_{m=3}^{n}\left[b_{ij}(e_m)\, c_{mk}^{r} - b_{ik}(e_m)\, c_{mj}^{r}\right]$$ et en tenant compte de <u>3.3</u>

4.4 $$R^{r}_{ikj} = \sum_{m=3}^{n} \left(\sum_{s=1}^{2} g^{rs} \left[b_{ik}(e_m)\; b_{sj}(e_m) - b_{ij}(e_m)\; b_{sk}(e_m) \right] \right)$$

posons $R_{ikj\ell} = \sum_{r=1}^{2} R^{r}_{ikj}\; g_{r\ell}$

on obtient l'expression du tenseur de courbure de Riemann

4.5 $$R_{ikj\ell} = \sum_{m=3}^{n} \left[b_{ik}(e_m)\; b_{\ell j}\; e_m - b_{ij}(e_m)\; b_{\ell k}(e_m) \right]$$

g_{ij} et b_{ij} ne sont pas indépendants mais sont liés par un système differentiel du deuxième ordre.

Exemple : calcul de R1212

$$R_{1212} = \sum_{m=3}^{n} \left(b_{12}(e_m)\; b_{21}(e_m) - b_{11}(e_m)\; b_{22}(e_m) \right)$$

$$= \sum_{m=3}^{n} \left(b^2_{12}(e_m) - b_{11}(e_m)\; b_{22}(e_m) \right) = - K \det (g_{ij}))$$

d'où

$$K = - \frac{R_{1212}}{\det (g_{ij})}$$

l'équation de Gauss

Chapitre 3.- Surfaces Minima

§ 1.- Généralités

1.-1 Position du problème

Soit $X(u)$ une fonction vectorielle définissant une surface de classe C^m lorsque u décrit un domaine D. Soit Δ un domaine dont la fermeture $\bar{\Delta}$ est contenue dans D. Supposons que l'aire de la surface $X(u)$, pour u appartenant à Δ, soit minimum parmi toutes les surfaces qui ont la même frontière que $X(u)$; comment peut-on caractériser $X(u)$?

Soit $N(u)$, de classe C^{m-1}, un vecteur normal en chaque point de S et soit $\varphi(u)$ une fonction numérique de classe C^m dans D.

Posons $\tilde{X}(u) = X(u) + \lambda \varphi(u) N(u)$ $\qquad \lambda =$ constante

$\tilde{X}(u)$ définit une surface et l'on a :

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i} N(u) + \lambda \varphi(u) \frac{\partial N(u)}{\partial u_i}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \left(\lambda \varphi(u) \frac{\partial N}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} + \lambda \varphi \frac{\partial X}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial N}{\partial u_i}\right) + \lambda^2 C_{ij}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - 2\lambda \varphi b_{ij}(N) + \lambda^2 C_{ij}$$

1.-2 $\det \tilde{g}_{ij} = \det g_{ij} - 2\lambda \varphi \left[g_{11}\, b_{22}(N) + g_{22}\, b_{11}(N) - 2\, g_{12}\, b_{12}(N)\right]$

$$+ a\lambda^2 + b\lambda^3 + c\lambda^4.$$

$$\det \tilde{g}_{ij} = \det g_{ij} - 2\lambda\varphi H(N) \det g_{ij} + a\lambda^2 + b\lambda^3 + c\lambda^4$$

donc si λ est assez petit : $\det g_{ij} > 0 \Longrightarrow \det \tilde{g}_{ij} > 0$

Soit $X(u)$ régulière $\Longrightarrow \tilde{X}(u)$ régulière

$$\sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = \sum_{k=o}^{\infty} B_k \lambda^k \quad \text{avec} \quad Bo = \sqrt{\det g_{ij}}$$

$$B_1 = -\varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}}$$

On a :

1.-3 $\text{aire } \tilde{A} = \iint_{\Delta} \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}}\, du_1 \wedge du_2$

$$\text{aire } \tilde{A} = \text{aire } A + \lambda \iint_{\Delta} - \varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}}\, du_1 \wedge du_2 + \ldots$$

$X(u)$ réalise un extremun pour l'aire si $\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=o} = 0.$

Soit

1.-4 $\iint_{\Delta} \varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}}\, du_1 \wedge du_2 = 0$ pour toute fonction $\varphi(u)$ s'annulant sur la frontière de Δ.

a) Dans $\mathbb{R}^3$ $\varphi = 1$ on obtient des surfaces parallèles.

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=o} = \iint_{\Delta} H(N) \,.\, d\sigma$$

b) Si $\varphi \neq 1$ et $\varphi = 0$ sur la frontière, la condition 1.-4 est équivalente à $H(N) \equiv 0$. En effet si $H(N)$ est différent de zéro en un point u_o de D et pour un vecteur N_o de $\Pi^{\perp}(u_o)$, soit $e_3, .., e_n$ une base de $\Pi^{\perp}$

sont de classe C^{m-1}

On a : $N_o = \sum_{k=3}^{n} \eta_k \; e_k(u_o)$

et il existe $N(u) = \sum_{k=3}^{n} \eta_k(u) e_k(u)$ dans un voisinage V du point u_o tel que $H(N)$ soit différent de zéro. Soit $\varphi(u)$ de classe C^m telle que

$$\begin{cases} \varphi(u) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad u \in V \\ \varphi(u_o) > 0 \\ \varphi(u) = 0 \text{ pour } \quad u \notin V \end{cases}$$

alors $\tilde{A}'(0) \neq 0$.

2.- Définition

Une surface S est <u>minima</u> si $H \equiv 0$, c'est-à-dire que $H(N) = 0$ pour tout vecteur N de l'espace normal.

§ 2.- Etude des surfaces minima sous forme non paramétrique

Localement toute surface régulière $(X_1 \ldots X_n)$ peut se mettre sous une forme non paramétrique (c'est-à-dire que les n coordonnées sont fonctions de deux d'entre elles).

En effet : S régulière $\Longleftrightarrow \exists i, j$ tel que $\dfrac{\partial(X_i X_j)}{\partial(u_1 u_2)} \neq 0$

Il existe donc un difféomorphisme local $(u_1, u_2) \Longleftrightarrow (X_i, X_j)$ qui permet d'exprimer X_k en fonction de (X_i, X_j).

On suppose que $X_3, \ldots X_n$ sont fonction de X_1, X_2 on a :

$$\begin{cases} X_1 = u_1 \\ X_2 = u_2 \\ \vdots \\ X_k = f_k(u_1, u_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_2} = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \left(0,\ 0, \dots \frac{\partial f_k}{\partial u_i \partial u_j} \dots\right)$$

$$g_{11} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2 \qquad g_{12} = \sum_{k+3}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \qquad g_{22} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2$$

Si $(N_3, N_4, \dots N_n)$ sont $n-2$ nombres choisis arbitrairement, on peut déterminer N_1, et N_2 de telle sorte que le vecteur $N = (N_1, N_2, \dots N_n)$ soit dans $\Pi^{\perp}$. En effet, il suffit de prendre

$$1.-1 \quad N_1 = -\sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial f_k}{\partial u_1}$$

$$N_2 = -\sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial f_k}{\partial u_2}$$

On a : $N \perp \frac{\partial X}{\partial u_1}$ et $N \perp \frac{\partial X}{\partial u_2}$

de plus : $b_{ij}(N) = \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial^2 f_k^2}{\partial u_i \partial u_j} \quad N_k$

N peut être choisi de $n-2$ façons arbitraires : Si $(N_3^j, \dots N_n^j) = N^j$ $j = 1, 2, \dots n-2$ sont $N-2$ vecteurs linéairement indépendants, $N_1^j(u)$ et $N_2^j(u)$ étant déterminés par 1.-1 ; les N^j forment une base de $\Pi^{\perp}$ et $N^j(u)$ est de classe C^{m-1} si $X(u)$ est de classe C^m

On a :

$$1.\!-\!2 \quad H(N^j) = \frac{\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (1+|p|^2)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} - 2pq \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} + (1+|q|^2)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2}}{\det g_{ij}}$$

où $p = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)$

$q = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)$

S est minima $\Longleftrightarrow \forall N \in \Pi^{\perp}\ H(N) = 0$. Cette condition se traduit par un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux coefficients des N^j :

$$1.\!-\!3 \quad \text{pour } k = 3, \dots n \text{ on a : } 0 = (1 + |p|^2)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} - 2pq \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} + (1 + |q|^2)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2}$$

On peut remplacer ce système de N.2 équations scalaires par une équation vectorielle. En posant $f = (f_3, f_4, \dots f_n)$

On a :

$$1.\!-\!4 \quad 0 = \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}$$

remarque: dans le cas où $n = 3$ on a une équation scalaire.

§ 3.- Paramètres isothermes

1.-1 Définition

Soit S une surface $X(u)$, les paramètres u_1 u_2 sont isothermes si $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ où $\lambda = \lambda(u)$. Dans ce cas $G = \lambda^2 I$ et la transformation du domaine plan (u_1, u_2) dans S conserve les angles.

1.-2 Lemme

Si S est une surface $X(u)$ de classe C^r, il existe un voisinage de chaque point u_o possédant la propriété suivante :

Il existe une surface $\tilde{S}$ définie par $X(u(\tilde{u}))$, et obtenue par un changement de paramètre tels que $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ soient des coodonnées isothermes sur $\tilde{S}$.

Donc pour toute propriété locale des surfaces on peut se ramener à des coordonnées locales isothermes.

<u>Démonstration</u> : c'est l'application du corollaire (3.1. § 3 chapitre I première partie) du théorème relatif aux équations de Beltrami.

Soit $\tilde{\omega} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$ $\quad \left|\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right| = \rho^2 \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}$

si g_{ij} sont de classe C^1 alors $\sum g_{ij} \zeta_i \zeta_j = \frac{1}{\rho^2}(\tilde{\zeta}_1^2 + \tilde{\zeta}_2^2) = \sum \tilde{g}_{ij} \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_j$

avec $\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{\rho^2} \delta_{ij}$

En coordonnées isothermes on a les expressions suivantes :

1.-3 $\quad g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \Longrightarrow g^{ij} = \frac{1}{\lambda^2} \delta_{ij}$

1.-4 la courbure de Gauss $K = -\dfrac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$

1.-5 longueur euclidienne d'une courbe : $\int_a^b \lambda \left|\frac{d\zeta}{dt}\right| dt$

avec $\zeta = u_1 + iu_2$

expression de la courbure moyenne :

$$H(N) = \frac{\lambda^2\left(b_{11}(N)+b_{22}(N)\right)}{\lambda^4} = \frac{\text{tr. } b_{ij}(N)}{\lambda^2} \quad \left(b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N\right)$$

1.-6 d'où : $\Delta X = \dfrac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = \lambda^2 H$

Conséquences :

1.-7 $\Delta(X) \in \Pi^{\perp}$ si (u_1, u_2) sont isothermes

1.-8 les fonctions coordonnées X_k sont des fonctions harmoniques des coordonnées isothermes si et seulement si $X(u)$ est une surface minima.

1.-9 $X(u)$ surface minima $\Longleftrightarrow \Delta X = 0 \Longleftrightarrow$ les coordonnées X_k sont des fonctions de (u_1, u_2) à laplacien nul donc harmoniques.

2.-1 Pour $X(u)$ surface paramétrique, introduisons les fonctions complexes

$\varphi_k(\zeta) = \dfrac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \dfrac{\partial X_k}{\partial u_2}$ où $\zeta = u_1 + iu_2$

on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_1}\right)^2 - \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_2}\right)^2 - 2i \sum_{1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial u_1} \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$

$$= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}$$

Conséquences :

2.-2 (u_1, u_2) sont des paramètres isothermes si et seulement si

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(\zeta) = 0$ (1)

En effet :

Si (u_1, u_2) sont des paramètres isothermes ; alors $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = 0$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(\zeta) = 0$

et réciproquement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(\zeta) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} g_{11} = g_{22} \\ g_{12} = 0 \end{cases} \Longrightarrow g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$

calculons $\displaystyle\sum_{1}^{n} |\varphi_k(\zeta)|^2 = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_1}\right)^2 + \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_2}\right)^2$

2.-3 (u_1, u_2) sont isothermes alors $\sum_1^n |\varphi_k(\zeta)|^2 = 2\lambda^2$ ②

une surface est donc régulière si et seulement si $\sum_{k=1}^n |\varphi_k(\zeta)|^2 \neq 0$

2.-4 on a les équivalences suivantes :

S est un surface minima $\Longleftrightarrow$ les coordonnées sont des fonctions harmoniques des paramètres isothermes $\Longleftrightarrow$ $\varphi_k(\zeta)$ sont analytiques.

2.-5 Théorème (problème inverse)

Soient $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ n fonctions analytiques d'une variable complexe ζ satisfaisant aux propriétés (1) (2).

Il existe localement une surface minima $\tilde{X}(u)$ $(\zeta = u_1 + iu_2)$ telle que

$\tilde{\varphi}_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$

Démonstration $\varphi_k(\zeta)$ est analytique. Dans tout domaine simplement connexe, il existe une fonction $\Phi_k(\zeta)$ telle que

$\Phi'_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$

Soit $\tilde{X}_k(\zeta) = \mathcal{R}e\, \Phi_k(\zeta)$ on a :

$$\tilde{\varphi}_k(\zeta) = 2\frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial u_1} - i\frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial u_2} = \Phi'_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$$

D'après 2.-2 (u_1, u_2) sont des coordonnées isothermes de $\tilde{S}$

D'après 2.-3 $\tilde{S}$ est régulière

D'après 2.-4 $\tilde{S}$ est minima.

Remarque : $\tilde{X}_k = \mathcal{R}e \int \varphi_k(\zeta)\, d\zeta$ donc φ_k définissent une surface à une translation près.

Le problème des surfaces minima se ramène à la recherche de fonctions $\varphi_k(\zeta)$ analytiques, telles que $\sum_1^n \varphi_k^2(\zeta) = 0$ avec les $\varphi_k(\zeta)$ non tous nuls.

3.- Expression de la courbure de Gauss

On a : $K = -\dfrac{\Delta \log\lambda}{\lambda^2}$ or $2\lambda^2 = \sum|\varphi_k|^2 = h$

$\log h = 2\log\lambda + \log 2$

$$\Delta(\log h) = 4\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}(\log h) = 4\,\frac{h_{\zeta\bar\zeta}h - h_\zeta h_{\bar\zeta}}{h^2}$$

$$h_\zeta = \sum \varphi_k'(\zeta)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}$$

$$h_{\bar\zeta} = \sum \overline{\varphi_k'(\zeta)}\,\varphi_k(\zeta)$$

$$h_{\zeta\bar\zeta} = \sum \varphi_k'(\zeta)\,\overline{\varphi_k'(\zeta)} = \sum|\varphi_k'(\zeta)|^2$$

$$\frac{1}{4}\Delta\log h = \frac{2}{4}\Delta\log\lambda = \frac{\sum|\varphi_k|^2\ \sum|\varphi_k'|^2 - |(\sum\varphi_k'\bar\varphi_k)|^2}{\left(\sum|\varphi_k|^2\right)^2}$$

3.-1 $$\boxed{K = -\frac{\Delta\log\lambda}{\lambda^2} = -4\,\frac{\left(\sum|\varphi_k|^2\right)\left(\sum|\varphi_k'|^2\right) - |\sum\varphi_k'\bar\varphi_k|^2}{\left(\sum|\varphi_k|^2\right)^3}}$$

d'après l'identité $\left(\sum|z_k|^2\right)\left(\sum|w_k|^2\right) - |\sum \bar z_k w_k|^2 = |\bar z\wedge w|^2 =$

$$\sum_{i<j}|z_i w_j - z_j w_i|^2$$

On a :

3.-2 $$K = -4\,\frac{|\varphi(\zeta)\wedge\varphi'(\zeta)|^2}{|\varphi(\zeta)|^6}$$

3.-3 Corollaire

Sur une surface minima on a : $K \leqslant 0$

$K = 0$ aux points isolés ou bien $K \equiv 0$.

$H(N) = 0 \Longrightarrow b_{11}(N) = b_{22}(N)$

$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -(b_{11}^2 + b_{22}^2) \leqslant 0$

Donc $K = \dfrac{\sum \det b_{ij}}{\det g_{ij}}$ $K \leqslant 0$ (une démonstration alternative, sans recours à la formule 3.-2)

$K = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\zeta) \wedge \varphi'(\zeta) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_i\varphi_j' - \varphi_i'\varphi_j = 0 \quad i < j \quad 1,\dots, n$

or les fonctions sont analytiques ; les zéro sont isolés ou bien $K \equiv 0$

§ 4.- Application de Gauss (application sphérique ou normale)

Remarque dans E^3 : en chaque point il n'y a qu'un seul vecteur normal

$e_3 \in \Pi^1$

On choisit une base de E^3 ; $\dfrac{\partial X}{\partial u_1}, \dfrac{\partial X}{\partial u_2}, e_3$ ayant l'orientation de l'espace

par exemple : $e_3 = \dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial u_2}}{\left|\dfrac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial u_2}\right|}$. Dans E^3: $\{$les plans tangents$\} \simeq \{$normales $e_3\}$

à $u \longrightarrow X(u) \longrightarrow e_3(u)$

1.-1 Définition dans E^n

On appelle grassmannien $G(2,n)$ l'ensemble de plans orientés dans E^n.

1.-2 Structure de variété sur cet ensemble

Remarque dans E^3; le grassmannien est isomorphe à la sphère

Dans E^n soit V_2 un plan orienté.

Soit $v = (v_1, \dots v_n)$ et $w = (w_i)$ deux vecteurs engendrant V_2 tels que $|v| = |w| \neq 0$.

et tels que v et w soient orthogonaux : $v.w = 0$

A V_2 défini par (v, w) on fait correspondre le point $Z \in \mathbb{C}^n$

$Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ avec $Z_k = v_k + iw_k$.

Remarque : Cette application se fait en réalité sur l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{C})$.

En effet : Soit $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ un autre système définissant V_2 on a :

$\tilde{v} = av + bw, \quad \tilde{w} = cv + dw$

$|\tilde{v}| = |\tilde{w}| = (a^2 + b^2) \quad |v|^2 = (c^2 + d^2) \quad |w|^2$

$\tilde{v}.\tilde{w} = (ac + bd) \ |w|^2$

Donc $\quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Longleftrightarrow |\tilde{v}| = |\tilde{w}|$

$ac + bd = 0 \qquad \Longleftrightarrow \tilde{v}.\tilde{w} = 0$

$ad - bc > 0 \qquad \Longleftrightarrow (\tilde{v}.\tilde{w})$ conserve l'orientation.

On a : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\tilde{Z}_k = \tilde{v}_k + i\tilde{w}_k = (a + ic) \ v_k + (b + id)w_k$$

$$= \alpha Z_k \quad \text{avec} \quad \alpha = \lambda e^{i\theta}$$

d'où $\tilde{Z} = \alpha Z$,

Il en résulte qu'au plan V_2 on fait correspondre le point $(Z_1, \ldots Z_n)$ de l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{C})$.

Toutes les coordonnées Z_k ne sont pas nulles car

$$\sum |Z_k|^2 = \sum v_k^2 + \sum w_k^2 = |v|^2 + |w|^2 > 0$$

donc $Z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

on a : $\displaystyle\sum_1^n Z_k^2 = \sum v_k^2 - \sum w_k^2 + 2i \sum v_k w_k$

$$= |v|^2 - |w|^2 + 2i\, v.w = 0.$$

Posons 1.-3

$$Q_{n-2} = \left\{ Z \in P_{n-1}(\mathbb{C}) \quad \text{tels que} \quad \sum_1^n Z_k^2 = 0 \right\}$$

Q_{n-2} est un sous ensemble de $P_{n-1}(\mathbb{C})$ en correspondance biunivoque avec $\{V_2\}$

or Q_{n-2} est une variété analytique complexe à $n - 2$ dimensions complexes ou $2(n - 2)$ dimensions réelles.

Q_{n-2} est le grassmannien $G(_{2,n})$

2.- Cas particulier $n = 3$

Q_1 est une variété analytique à une dimension donc une surface de Riemann.

$$Q_1 = \left\{ Z \; ; \; Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0 \right\}$$

$$(Z_1 + iZ_2)\,(Z_1 - iZ_2) = -Z_3^2$$

Si $Z_1 - iZ_2 \neq 0$ on pose $w = \dfrac{Z_3}{Z_1 - iZ_2}$

$$(1) \begin{cases} Z_1 + iZ_2 = \dfrac{-Z_3^2}{Z_1 - iZ_2} = -Z_3 w \\ Z_1 + iZ_2 = \dfrac{Z_3}{w} \end{cases} \qquad \text{Si } w \neq 0$$

$$Z_1 = \frac{Z_3}{2}\left(\frac{1}{w} - w\right)$$

$$Z_2 = \frac{iZ_3}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right)$$

2.-1

On a : $\forall w$: $\left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{Z_1 - iZ_2}{2}(1 - w^2) \\[2ex] Z_2 = \dfrac{Z_1 - iZ_2}{2}(1 + w^2)i \\[2ex] Z_3 = (Z_1 - iZ_2)\, w \end{array}\right] \Longrightarrow Z = \left(\dfrac{1-w^2}{2}, i\dfrac{1+w^2}{2}, w\right)$ $\quad Z_1 - iZ_2 \neq 0$

On établit une bijection $Z \longleftrightarrow w$ si $Z_1 - iZ_2 \neq 0$

Il y a donc une correspondance bijective entre $\{w\} \longleftrightarrow Q_1 - \{Z/Z_1 - iZ_2 = 0\}$

$\{Z/Z_1 - iZ_2 = 0\} \subset \{Z_3 = 0\}$ cet ensemble se réduit à un point $Z_o = (i, 1, 0)$.

2.-2 Q_1 <u>est en correspondance biunivoque avec la sphère de Riemann</u>

2.-3 <u>Remarque</u> : Soit N un vecteur normal à V_2 $W = (N_1, N_2, N_3)$

N orthogonal à $V_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum N_k V_k = 0 \\ \sum N_k W_k = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \sum N_k Z_k = 0$

le système (1) $\begin{cases} Z_1 + iZ_2 + Z_3 w = 0 \\ wZ_1 - iwZ_2 - Z_3 = 0 \end{cases}$ nous donne :

$$(2 \operatorname{Re} w)\, Z_1 + 2 \operatorname{Im} w\, Z_2 + Z_3 (|w|^2 - 1) = 0$$

donc $N = \left(2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w, |w|^2 - 1\right)$

$$|N|^2 = 4|w|^2 + (|w|^2 - 1)^2 = (1 + |w|^2)^2$$

$$e_3 = \left(\frac{2 \operatorname{Re} w}{1+|w|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} w}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)$$

on a les correspondances bijectives suivantes

2.-4 $\{V_2\} \subset E^3 \longleftrightarrow G_{(2,3)} \longleftrightarrow Q_1 \longleftrightarrow$ sphère $w \longleftrightarrow \{e_3\}$

3.- <u>Définition de l'application de Gauss</u>

Soit S une surface $X(u)$ de E^n

$X(u) \in S \longrightarrow$ plan tangent en $X(u) \longrightarrow Z \in Q_{n-2}$

Soient (u_1, u_2) les paramètres isothermes $(\zeta = u_1 + iu_2)$

$$\varphi_k(\zeta) = 2\,\frac{\partial X_k}{\partial \zeta} = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i\,\frac{\partial X_k}{\partial u_2}$$

on a les équivalences suivantes :

3.-1 (u_1, u_2) isothermes $\Longleftrightarrow \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right| = \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|$ et $\frac{\partial X}{\partial u_1}\,\frac{\partial X}{\partial u_2} = 0$

3.-2 $X(u)$ régulière $\Longleftrightarrow \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right| \neq 0$

donc $v = \frac{\partial X}{\partial u_1}$ $\quad w = \frac{\partial X}{\partial u_2}$ $\quad Z_k = \overline{\varphi_k(\zeta)}$

3.-3 <u>Corollaire</u> (Chern)

Une surface est une surface minima si et seulement si l'application de Gauss est antiholomorphe.

($\bar{Z}_k$ est une fonction analytique de $\zeta = u_1 + iu_2$)

(en chaque point où $K \neq 0$ c'est une transformation conforme qui change l'orientation).

3.-4 Soit $X(u)$ une surface minima de E^3. Posons $f(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)$

$$g(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)}$$

$f(\zeta)$ est analytique

$g(\zeta)$ est méromorphe

(Si $f(\zeta) = 0$, alors $\varphi_3(\zeta) = 0$, puisque $\varphi_3(\zeta)^2 = (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2)$. Alors $\varphi_1 + i\varphi_2 \neq 0$, puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \neq (0, 0, 0)$, donc si $f(\zeta)$ a un zéro d'ordre m et $\varphi_3(\zeta)$ un zéro d'ordre ν on a $m = 2\nu$. Donc $g(\zeta)$ a un pole d'ordre ν)

3.-5 <u>Théorème</u>

Soit $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ deux fonctions respectivement analytique et méomorphe. f possède un zéro d'ordre 2ν là où g a un pole d'ordre ν.

Soit $\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2)$; $\varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2)$; $\varphi_3 = f_g$ alors $\{\varphi_k\}$ déterminent une surface minima avec $X_k = \int \varphi_k(\zeta)d\zeta$.

On a : $\sum \varphi_k(\zeta)^2 = 0$ et $\sum |\varphi_k|^2 \neq 0$

on obtient ainsi <u>la représentation de Weirstrass</u>.

S minima de $E^3 \longleftrightarrow \{(f, g)\ f$ analytique, g méromorphe $m = 2\nu\}$

Chapitre 4.- Géométrie différentielle globale

1.-1 Une <u>surface</u> S <u>dans</u> E^n est constituée par une surface S_o et une immersion de S_o dans E^n.

L'application $p \in S_o \longrightarrow x(p) \in E^n$ est une immersion si elle est différentiable et régulière.

1.-2 Les propriétés topologiques de S dans E^n sont celles de S_o :

S <u>simplement connexe</u> $\Longleftrightarrow$ S_o est simplement connexe

S <u>orientée</u> $\Longleftrightarrow$ S_o orientée.

L'immersion induit une métrique riemannienne sur S_o : à partir de la structure riemannienne sur S

Soit φ_α une carte en p_o de S_o : $\varphi_\alpha : R_\alpha \longrightarrow O_\alpha$ φ_α est un homéomorphisme d'un domaine plan R_α sur un ouvert O_α de S_o. On définit l'application de R_α dans E^n :

$$u \in R_\alpha \longrightarrow X(u) = X \circ \varphi_\alpha(u)$$

en chaque point de R_α on peut définir la matrice $M_\alpha = (g_{ij})$ $\quad g_{ij} = \dfrac{\partial X}{\partial u_i} \dfrac{\partial X}{\partial u_j}$

S est ainsi muni d'une structure de variété riemannienne à deux dimensions.

S <u>complète</u> dans cette métrique $\Longleftrightarrow$ S_o complète dans la métrique induite.

Si S_o est orientée la structure riemannienne induit une structure conforme, les paramètres sont alors les paramètres isothermes sur S et $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$.

Si S_o n'est pas orientée, il existe un revêtement $\hat{S}_o$ à deux feuillets qui est orienté ce qui permet de n'envisager que les surfaces orientées.

2.- Lemme

Soit S une surface de E^n, les propositions sont équivalentes :

S est dans un plan $\Longleftrightarrow$ L'image par l'application de Gauss se réduit à un point.

Démonstration

S est dans un plan $\Longleftrightarrow$ il existe deux vecteurs fixes v, w tels que $X'(t)$ soit une combinaison linéaire de v et w pour toute courbe $X(t)$ dans $S \Longleftrightarrow$ l'image de S par l'application de Gauss est constante.

3.- Théorème

Il n'existe pas de surface minima compacte dans E^n.

Démonstration

Si S est une immersion de S_o dans E^n et si S est minima alors les coordonnées X_k sont des fonctions harmoniques sur S_o. Si S_o est compacte, ces coordonnées atteignent leur maximum sur S_o et se réduisent à des constantes.

4.- Lemme

Soit S une surface minima simplement connexe et parabolique dans E^n.

S'il existe un hyperplan $\sum a_k z_k = 0$ dans $P_{n-1}(C)$ tel que

(1) $\dfrac{|\sum a_k z_k|^2}{\sum |z_k|^2} \geq \varepsilon > 0$ soit vérifiée pour tout point de l'image S par

l'application de Gauss alors S est dans un plan.

Démonstration

Il existe une transformation conforme de S sur le plan complexe (w) (S est parabolique). Les fonctions $\varphi_k = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$ sont des fonctions entières de w car analytiques dans le plan $w = u_1 + iu_2$

d'après (1) : $\forall w \quad \psi(w) = \sum \bar{\alpha}_k \varphi_k(w) \neq 0$

$$\sum |\varphi_k(w)|^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \left|\sum \bar{\alpha}_k \varphi_k\right|^2 = \frac{1}{\varepsilon} |\psi(w)|^2$$

donc $\frac{|\varphi_k(w)|^2}{|\psi(w)|^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ d'après le théorème de Liouville $\frac{\varphi_k(w)}{\psi(w)} = C_k$ d'où

$\varphi = (\varphi_k) = \psi(w)\ (C_k)$

L'image par l'application de Gauss est un point et d'après le lemme 2 S est dans un plan.

5.- Lemme

Soit $f(Z)$ analytique dans le disque $|Z| < 1$ et $f(Z) \neq 0$. Alors il existe un chemin C qui tend vers la frontière et tel que $\int_C |f(Z)| \left|\frac{dZ}{dt}\right| dt < \infty$

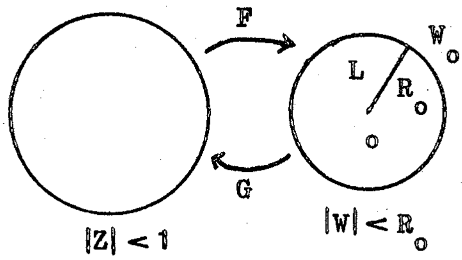
$\lambda = |f(Z)|$ définit une métrique riemannienne non complète.

Démonstration

Soit $F(Z) = \int_0^Z f(\zeta) d\zeta$ l'application $Z \longrightarrow w = F(Z)$ définit une application du disque dans le plan w.

En chaque point $F'(Z) = f(Z) \neq 0$ donc F est un difféomorphisme local. Il existe une fonction inverse $Z = G(w)$ définie dans un disque $|w| < R$ (au voisinage du point $w = 0 = F(0)$.

Soit $R_o = \left\{ \sup R \,/\, G \text{ définie dans } |w| < R \right\}$



D'après le théorème de Liouville $R_o < +\infty$ et il existe w_o, tel que $|w_o| = R_o$ et G n'est pas définie dans un voisinage de w_o

Soit (L) la courbe $w(t) = t\, e^{i\alpha}$ avec $w_o = R_o e^{i\alpha}$

Soit (C) la courbe $Z = G(w(t))$ $\quad 0 \leqslant t < R_o$.

On a : $\mathcal{L}(C) = \int_C |f(Z)| \, \left|\frac{dZ}{dt}\right| dt = \int_L \left|\frac{dw}{dt}\right| dt = R_o$.

Or C est un chemin qui tend vers la frontière : raisonnons par l'absurde : si C ne tend pas vers la frontière, il existe un nombre $\rho < 1$ et une suite $\{t_k\}$ tels que t_k tendent vers R_o et $|Gw(t_k)| \leqslant \rho$. Soit une sous suite partielle $G(wt_k)$ convergeant vers Z_1 avec $|Z_1| \leqslant \rho < 1$. Alors $F(Z_1) = w_o$ et $F'(Z_1) \neq 0$ donc $G(w)$ est définie au voisinage de w_o ce qui est contraire à la définition de w_o.

6.- <u>Lemme</u>

Soit S une surface minima simplement connexe, hyperbolique. Si la relation (1) du lemme 4 est vérifiée alors S n'est pas complète.

<u>Démonstration</u>

S_o, hyperbolique simplement connexe est conforme au disque unité $|w| < 1$.

La métrique riemannienne est définie par $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ et $\lambda^2 = \frac{1}{2} \sum |\varphi_k|^2$

Soit $\Psi(w) = \sum a_k \varphi_k(w)$.

$\Psi(w)$ est analytique et différente de zéro. D'après le lemme 5 il existe un chemin C tendant vers la frontière du disque $|w| < 1$ tel que $\int_C |\Psi(w)| \left|\frac{dw}{dt}\right| dt < +\infty$ mais la longueur de C sur S est $\int_C \lambda \left|\frac{dw}{dt}\right| dt$ et l'on a :

$$\int_C \lambda \left|\frac{dw}{dt}\right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C \sqrt{\sum |\varphi_k|^2} \left|\frac{dw}{dt}\right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \int_C \Psi(w) \left|\frac{dw}{dt}\right| dt$$

La longueur de C est finie.

6.-1 <u>Définition</u>

Soit Z^o un point de l'espace projectif $P_{n-1}(C)$. <u>La distance de</u> Z^o <u>à l'hyperplan</u> $\sum \alpha_k Z_k = 0$ est $\dfrac{\left|\sum \alpha_k Z_k^o\right|}{\sqrt{\sum |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum |Z_k^o|^2}}$

7.- <u>Théorème de Chern</u>

Soit S une surface minima complète de E^n. Si S n'est pas un plan alors l'image de S par l'application de Gauss s'approche arbitrairement de chaque hyperplan de $P_{n-1}(C)$.

<u>Démonstration</u>

Supposons qu'il existe un hyperplan $\sum \alpha_k Z_k = 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que la relation (1) soit vérifiée en tout point de l'image de S.

S étant donnée par l'immersion de S_o ; soit $\{\hat{S}_o\ f\}$ le revêtement universel de S_o. Alors $X(f(\hat{p}))$ définit une surface minima simplement connexe dans E^n et l'image de l'application de Gauss est identique à celle de S.

S_0 surface minima complète $\Longrightarrow$ $\hat{S}_0$ surface minima complète .

Quelles sont les possibilités pour $\hat{S}_0$?

a) $\hat{S}_0$ n'est pas compacte

b) $\hat{S}_0$ n'est pas hyperbolique car l'image de $\hat{S}_0$ par l'application de Gauss vérifie la relation (1) et d'après le lemme 6 $\hat{S}_0$ ne peut être complète.

c) $\hat{S}_0$ est donc parabolique mais alors d'après le lemme 4 $\hat{S}_0$ est dans un plan. $\hat{S}_0$ étant complète, c'est le plan tout entier.

7.-1 <u>Corollaire</u>

Soit S une surface minima complète dans E^3. Si S n'est pas le plan, les vecteurs normaux sont partout denses.

<u>Démonstration</u>

Supposons qu'il existe un vecteur v de E^3 et un nombre α positif tel que l'angle de tout vecteur normal avec v soit supérieur ou égal à α. On peut supposer que v est la direction $ox_3 = e_3$

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (Z_1 - iZ_2)\left(\frac{1 - |w|^2}{2}, i\,\frac{1 + |w|^2}{2}, w\right)$$

avec $Z_1 - iZ_2 \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{3} |Z_k|^2 = |Z_1 - iZ_2|^2 \left(\frac{1 + |w|^2}{2}\right)^2$$

Par projection stéréographique, le domaine $\left\{e_3, v\right\} > \alpha$ se transforme en un domaine borné du plan $|W| \leqslant R < \infty$

$$\frac{|Z_1 - iZ_2|^2}{\sum |Z_k|^2} = \frac{2}{(1 + |w|^2)^2} \geq \frac{2}{(1 + R^2)^2} \geq \varepsilon > 0$$

un hyperplan $(Z_1 - iz_2 = 0)$ n'est donc pas approché par l'image de S, donc S est un plan.

8.- <u>Ceci est une généralisation du théorème de Bernstein (1915)</u>.

Soit $f(x, y)$ une solution de l'équation (2) dans tout le plan

$$(2) \quad \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

alors $f(x, y) = ax + by + c$

<u>Démonstration</u>

Si f satisfait à l'équation (2), alors $S = \{x, y, z = f(x, y)\}$ est une surface minima. f étant définie pour tout couple (x, y), S est complète. Or les vecteurs normaux de S sont dans une hémisphère donc S est un plan.

Références :

Notes d'Ahlfors.- Conformal Mappings, 1951, OKLAHOMA.

Notes de Bers.- (N.Y.U.) Riemann Surfaces.

Chern.- Minimal surfaces in an euclidian space of N dimensions, p. 187-198 ; of differential and combinatorial topology. A Symposium in honor of Marston Morse, Princeton University Press. Princeton N.J. 1965.

J.C.C. Nitsche.- On new results in the theory of Minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. 71-1965, p. 195-270.