UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N°26.

J.-P. VIGUÉ.

Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques.

OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES ESPACES ANALYTIQUES.

Dans [8], Malgrange a posé la question suivante : est-ce que l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels au voisinage d'un point x d'un espace analytique X est de type fini ? Kantor [7] a donné une réponse dans le cas des espaces analytiques normaux, quotients de $\mathbb{C}^n$ par un groupe fini d'automorphismes. Notre étude apporte une réponse dans le cas des courbes irréductibles et des espaces analytiques dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$.

Dans une première partie, nous donnerons une définition récurrente des opérateurs différentiels sur un espace analytique et nous montrerons quelques propriétés générales des opérateurs différentiels. En particulier, nous vérifierons que cette définition est bien équivalente à celle donnée par Grothendieck [5] et Bloom [1]. Si (X,x) est un germe d'espace analytique d'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, nous noterons $\mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})$ le $\mathcal{O}_{X,x}$-module des opérateurs différentiels sur (X,x) d'ordre $\leqslant d$.

Dans la deuxième partie, nous étudierons l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels en un point x d'une courbe (i.e. un espace analytique de dimension 1) irréduc--tible X. Nous montrerons que l'algèbre graduée

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})/\mathrm{Diff}^{d-1}(\mathcal{O}_{X,x})$$

associée à l'algèbre filtrée

$$\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}) = \varinjlim \mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})$$

est une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre de type fini. Ceci entraîne que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ est engendrée par $\mathcal{O}_{X,x}$ et un nombre fini d'éléments. De plus, $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ est noethérien à gauche et à droite. La démonstration que nous allons exposer utilise le fait que le normalisé de (X,x) est isomorphe à $(\mathbb{C},0)$.

Dans la troisième partie, nous étudierons les opérateurs différentiels sur un germe (X,x) dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n,0)$. Les résultats trouvés dans le cas $n = 1$ ne se généralisent pas. Nous montrerons que sous certaines hypothèses (par exemple, x est un point singulier isolé et $n \geqslant 2$), $Gr(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre de type fini. Nous montrerons que néanmoins, dans certains cas, $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$ est engendrée par $\mathcal{O}_{X,x}$ et un nombre fini d'éléments.

M. ~~Le Professeur~~ Henri Cartan m'a initié à la géométrie analytique, m'a donné le goût de la recherche mathématique et a bien voulu guider mon travail. Il m'a proposé le sujet de cette thèse, et j'ai toujours trouvé auprès de lui conseils et encouragements. Je lui présente mes plus sincères remerciements et l'expression de ma reconnaissance.

I. DEFINITIONS.

1. Définition des opérateurs différentiels sur une $\mathbb{C}$-algèbre.

Définition.- Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre, M et N deux A-modules. Soit $D : M \longrightarrow N$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. On dit que D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 0$ si D est identiquement nul ; par récurrence sur l'entier $d \geqslant 0$, on dit que D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$, si pour tout $a \in A$, l'appli--cation $f \longmapsto D(a.f) - a.D(f)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d - 1$.

On note $\mathrm{Diff}_A^d(M,N)$ le A-module des opérateurs différentiels de M dans N d'ordre $\leqslant d$. On notera plus simplement $\mathrm{Diff}^d(A)$ le A-module des opérateurs différentiels de A dans A d'ordre $\leqslant d$, et si $D \in \mathrm{Diff}^d(A)$, on parlera d'opérateur différentiel sur A, ou même seulement d'opérateur différentiel.

Les opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant 0$ sont donc les applications A-linéaires $A \longrightarrow A$ ($\mathrm{Diff}^0(A) = A$). On pose :

$$\mathrm{Diff}^\infty(A) = \varinjlim \mathrm{Diff}^d(A).$$

Proposition 1.- Le produit $D_1.D_2$ de deux opérateurs différentiels, D_1 d'ordre $\leqslant d_1$, D_2 d'ordre $\leqslant d_2$ est un opé--rateur différentiel d'ordre $\leqslant d_1 + d_2$.

Démonstration.- Elle se fait par récurrence sur $d = d_1+d_2$. La propriété est vraie pour $d=0$. Supposons-la démontrée à l'ordre d. Montrons-la à l'ordre $(d + 1)$.

Soit D_1 d'ordre $\leqslant d_1$, D_2 d'ordre $\leqslant d_2$, avec $d_1+d_2 = d+1$.

Il faut montrer que pour tout $a \in A$,

$$a.D_1.D_2 - D_1.D_2.a$$

est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$. D'après la défi--nition des opérateurs différentiels :

$$D_2.a = a.D_2 + D', \qquad \mathrm{ordre}(D') \leqslant d_2-1$$

$$D_1.a = a.D_1 + D'', \qquad \text{ordre}(D'') \leq d_1-1.$$

Donc $a.D_1.D_2 - D_1.D_2.a = - D_1.D' - D''.D_2$, qui est par l'hypothèse de récurrence d'ordre $\leq d_1+d_2-1 = d$.

Pour la composition des opérateurs différentiels, $\text{Diff}^{\infty}(A)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre filtrée ; nous la considérerons aussi comme un A-module à gauche. Soit

$$\text{Gr}(\text{Diff}^{\infty}(A)) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \text{Diff}^{d}(A)/\text{Diff}^{d-1}(A)$$

la $\mathbb{C}$-algèbre graduée associée.

<u>Proposition 2.</u>- $\text{Gr}(\text{Diff}^{\infty}(A))$ est un anneau commutatif. En particulier, c'est une A-algèbre.

<u>Démonstration.</u>- Il suffit de montrer que le crochet $[D_1,D_2] = D_1.D_2 - D_2.D_1$ de deux opérateurs d'ordre d_1, d_2 respectivement est d'ordre $\leq d_1+d_2-1$. Cette assertion se démontre par récurrence sur $d = d_1+d_2$. Elle est triviale pour $d = 0$. Supposons la démont-rée à l'ordre d. Montrons la à l'ordre $(d+1)$. Soient D_1,D_2 d'ordre d_1, d_2 respec-tivement ($d_1+d_2 = d+1$). Il nous faut montrer que pour tout $a \in A$, $[[D_1,D_2],a]$ est d'ordre $\leq d_1+d_2-2$. Utilisons l'identité de Jacobi :

$$[[D_1,D_2],a] + [[D_2,a],D_1] + [[a,D_1],D_2] = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $[[D_2,a],D_1]$ et $[[a,D_1],D_2]$ sont d'ordre $\leq d_1+d_2-2$, ce qui démontre la proposition.

<u>2. Opérateurs différentiels sur un germe d'espace ana-lytique.</u>

Si (X,x) est un germe d'espace analytique au point x d'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, les opérateurs différentiels sur (X,x) sont, par définition, les opérateurs sur la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$.

<u>Proposition 3.</u>- Soit (X,x) un germe d'espace analytique d'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $D : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ un opérateur différentiel sur (X,x). Alors D est continu pour la topologie

de $\mathcal{O}_{X,x}$ définie par les puissances de l'idéal maximal.

Cette proposition découle immédiatement de la $\mathbb{C}$-linéarité de D et du lemme suivant :

Lemme 1.- Soient $f_1,\dots,f_n$ n éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x})$. Soit $D\in \mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})$. Alors, si $n\geqslant d$,

$$D(f_1\times\dots\times f_n)\in (\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x}))^{n-d}.$$

Démonstration.- Elle se fait par récurrence sur d.

Le lemme est vrai pour $d = 0$, n quelconque. Supposons-le démontré à l'ordre $(d-1)$. Montrons-le à l'ordre d, par récurrence sur $n\geqslant d$. L'assertion est triviale pour $n=d$. Supposons-la démontrée à l'ordre $(n-1)\geqslant d$. Montrons-la à l'ordre n. On a

$$D(f_1\times\dots\times f_n) - f_1.D(f_2\times\dots\times f_n) = D_{(f_1)}(f_2\times\dots\times f_n),$$

où $D_{(f_1)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d-1$.

$$D_{(f_1)}(f_2\times\dots\times f_n)\in \mathfrak{m}^{n-1-(d-1)}$$
$$f_1.D(f_2\times\dots\times f_n)\in \mathfrak{m}^{(n-1)-d+1}.$$

Donc $D(f_1\times\dots\times f_n)\in (\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x}))^{n-d}$.

Exercice.- Opérateurs différentiels sur $(\mathbb{C}^n,0)$.

Cela revient à chercher les opérateurs différentiels sur l'algèbre $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$.

Le $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$-module $\mathrm{Diff}^d(\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\})$ est engendré par les $\frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i}$, où i est un n-uple d'entiers $(i_1,\dots,i_n)$ tels que $|i| = i_1 + \dots + i_n\leqslant d$ et $\frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i}$ est défini par :

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i}(t^p) = p_1.(p_1-1)\dots(p_1-i_1+1)\dots p_n.(p_n-1)\dots(p_n-i_n+1)t^{p-i}.$$

Soient $\xi_1,\dots,\xi_n$ les images de $\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_n}$ dans $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}))$. On vérifie que $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}))$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}[\xi_1,\dots,\xi_n]$. C'est donc une $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$-algèbre de type fini.

Remarquons que sur $(\mathbb{C}^n,0)$, notre définition des opérateurs différentiels coïncide avec la définition habituelle. Voir par exemple Malgrange [8].

Proposition 4.- Soit $(X,0)$ un germe de sous-ensemble analytique de $(\mathbb{C}^n,0)$ défini par un idéal I de $\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$. Soit $\Delta : \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\} \to \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$ un opérateur différen--tiel sur $(\mathbb{C}^n,0)$ d'ordre $\leqslant d$. Si $\Delta(I) \subset I$, Δ induit un opérateur différentiel D d'ordre $\leqslant d$ sur $\mathcal{O}_{X,0}$.

Démonstration.- Elle se fait par récurrence sur $d=$ordre(Δ).

Proposition 5.- Soit $(X,0)$ un germe plongé dans $(\mathbb{C}^n,0)$, et soit $D : \mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,0}$ un opérateur différentiel sur $(X,0)$ d'ordre $\leqslant d$. Alors, il existe un opérateur différentiel Δ sur $(C^n,0)$ d'ordre $\leqslant d$, qui induit D sur $\mathcal{O}_{X,0}$.

Démonstration.- Soit

$i : \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\} \to \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}/I = \mathcal{O}_{X,0}$.

Si D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$ sur $\mathcal{O}_{X,0}$, $D.i$ est un élément de $\mathrm{Diff}^d_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}, \mathcal{O}_{X,0})$. Soit $a_p = D.i(t^p)$ pour les p tels que $|p| \leqslant d$; a_p est un élément de $\mathcal{O}_{X,0}$. Soit $b_p \in \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$ tel que $i(b_p) = a_p$.

Etant donné une famille (b_p), $|p| \leqslant d$, d'éléments de $\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$, il existe un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$ et un seul $\Delta : \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_r\} \to \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$ tel que $\Delta(t^p) = b_p$.

Alors $i.\Delta : \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\} \to \mathcal{O}_{X,0}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$. Pour tout p, tel que $|p| \leqslant d$, on a $(i.\Delta)(t^p) = (D.i)(t^p)$. On montre facilement que cela entraîne $i.\Delta = D.i$; Δ vérifie bien les propriétés de la proposition 5.

Les propositions 4 et 5 montrent, compte tenu de la remarque précédente, que la définition que nous avons donnée des opérateurs différentiels coïncide sur les espaces ana--lytiques avec celle de Bloom [1] et de Malgrange [8].

Nous allons maintenant étudier pour certains germes d'espaces analytiques (X,x) des propriétés algébriques de $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ et de $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$. Entre ces propriétés, il existe un certain nombre de relations que nous allons expliciter.

Proposition 6.- Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ est une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre de type fini.

(ii) $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ est un anneau noethérien.

Pour la démonstration, voir par exemple [2] N. Bourbaki, Corollaire 4, page 45.

Proposition 7.- Supposons que $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ soit une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre de type fini. Alors :

(i) La $\mathbb{C}$-algèbre $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$ est engendrée par $\mathcal{O}_{X,x}$ et un nombre fini d'éléments.

(ii) $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$ est un anneau noethérien à gauche et à droite.

Démonstration.

(i) Si $\Delta_i \in Diff^{d_i}(\mathcal{O}_{X,x})/Diff^{d_i-1}(\mathcal{O}_{X,x})$, $(i = 1,\dots,q)$, sont des générateurs de la $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$, on les relève en des éléments $D_i \in Diff^{d_i}(\mathcal{O}_{X,x})$ et l'on montre par récurrence sur d, que tout élément $D \in Diff^{d}(\mathcal{O}_{X,x})$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de produits de D_i. La propriété est vraie à l'ordre 0. Supposons-la démontrée à l'ordre $(d-1)$. Alors tout élément $D \in Diff^{d}(\mathcal{O}_{X,x})$ s'écrit, à un élément de $Diff^{d-1}(\mathcal{O}_{X,x})$ près, comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de produits de D_i, et la propriété en découle immédiatement.

(ii) D'après la proposition 6, $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$ est noethérien. Montrons que $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$ est noethérien à gauche (resp. à droite). Soit I un idéal à gauche (resp.

à droite) de $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x})$ et soit

$$I_n = I \cap \mathrm{Diff}^n(\mathcal{O}_{X,x}).$$

On pose : $\mathrm{Gr}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n/I_{n-1} \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$.
$\mathrm{Gr}(I)$ est un idéal de $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,x}))$, il est donc de type fini. On relève une famille génératrice finie de $\mathrm{Gr}(I)$ en des éléments de I et on montre (comme dans (i)) qu'ils engendrent I; donc I est un idéal de type fini.

La réciproque de la Proposition 7 est fausse. Nous en verrons des exemples dans la troisième partie.

II. OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR UN GERME DE COURBE IRREDUCTIBLE.

1. Forme des opérateurs différentiels.

Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique irréductible de dimension 1. Le normalisé de $(X,0)$ est isomorphe à $(\mathbb{C},0)$; soit $p : (\mathbb{C},0) \longrightarrow (X,0)$ l'application de normalisation. $\mathcal{O}_{X,0}$ se plonge dans $\mathbb{C}\{t\}$. Soit A son image; $\{\mathbb{C}\{t\}$ est la clôture intégrale de $A\}$. Il existe un plus petit entier N_o tel que pour tout $n \geq N_o$, t^n appartienne à A ; ceci exprime que t^{N_o} est "dénominateur universel" (cf.[3]).

Soit $\mathbb{C}[t]$ l'anneau des polynômes en t ; $A \cap \mathbb{C}[t]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel admettant une base de la forme

$$p_o = 1, p_1, p_2, \ldots, p_s, t^{N_o}, t^{N_o+1}, \ldots$$

où $p_1, \ldots, p_s$ sont des polynômes en t, de degrés strictement inférieurs à N_o avec

$$0 < v(p_1) < \ldots < v(p_s) < N_o - 1.$$

($v(p_j)$ désigne la valuation de p_j à l'origine). Posons

$$v(p_j) = n_j \quad (n_o = 0).$$

La suite strictement croissante $I = (n_o, n_1, \ldots, n_s, N_o, N_o+1, \ldots)$ est déterminée de façon unique et est stable par addition. Les éléments de I sont en effet les valeurs possibles de la valuation à l'origine d'une fonction $f \not\equiv 0$ appartenant à A.

Théorème 1.- Soit $D : A \longrightarrow A$ un opérateur différentiel d'ordre au plus d. Soit, pour tout $n \geq N_o$,

$$(1) \qquad D(t^n) = \sum_{k \geq -n} P_k(n)\, t^{n+k} \quad \text{(série convergente)}$$

Alors P_k est un polynôme en n de degré au plus d, et il existe un entier $k_o \in \mathbb{Z}$ tel que P_k soit identiquement nul pour tout $k < k_o$. La formule

$$(1') \qquad \Delta(t^n) = \sum_{k \geqslant k_o} P_k(n)\, t^{n+k}$$

a un sens pour tout $n \geqslant 0$ et définit une application

$$(2) \qquad \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow t^{k_o}.\mathbb{C}\{t\},$$

continue pour la topologie définie par les puissances de l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{t\}$. Cette application laisse stable A et induit précisément l'opérateur D considéré. Réciproquement, toute suite de polynômes P_k de degrés au plus d, telle qu'il existe $k_o \in \mathbb{Z}$ tel que P_k soit identiquement nul pour tout $k < k_o$, et telle que la formule (1') définisse une application du type (2) laissant stable A, définit un opérateur différentiel $D : A \longrightarrow A$ d'ordre au plus d.

De plus, si D défini par

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_o} P_k(n)\, t^{n+k}$$

est un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant d$, P_k est identiquement nul pour tout $k < -d$.

<u>Démonstration.</u>- Nous diviserons la démonstration en deux parties. Dans la première, nous montrerons simultanément la partie directe du théorème et le fait que $P_k \equiv 0$ pour tout $k < -d$. Dans la deuxième partie, nous démontrerons la réci--proque.

La démonstration de la première partie se fait par récur--rence sur d.

Pour $d = 0$, D est la multiplication par une série conver--gente, $\sum_{k \geqslant 0} a_k\, t^k$; donc $D(t^n) = \sum_{k \geqslant 0} a_k\, t^{n+k}$. a_k est bien un polynôme de degré 0, ce qui prouve (1'), et l'application se prolonge en une application $\Delta : \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{t\}$ qui induit D sur A.

Supposons le résultat démontré à l'ordre (d-1). Montrons

-le à l'ordre d. Soit D un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$, et soit p tel que $t^p \in A$. L'application

$$f \longmapsto D(t^p.f) - t^p.D(f)$$

est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d-1$, que nous noterons $D'_{(t^p)}$.

Par (ℓ') hypothèse de récurrence, on a, pour tout $n \geqslant N_0$,

$$D'_{(t^p)}(t^n) = \sum_{k \geqslant -(d-1)} Q_k^{(p)}(n)\ t^{n+k},$$

où $Q_k^{(p)}$ est un polynôme en n de degré $\leqslant (d-1)$. On a la relation

$$P_k(n+p) - P_k(n) = Q_{p+k}^{(p)}(n).$$

En écrivant cette relation pour $p = N_0$ et pour $p = N_0+1$ et en faisant la soustraction, on trouve que l'on a, pour $n \geqslant N_0$:

$$P_k(n+N_0+1) - P_k(n+N_0) = Q_{N_0+1+k}^{(N_0+1)}(n) - Q_{N_0+k}^{(N_0)}(n).$$

On en déduit qu'il existe un unique polynôme Q_k de degré $\leqslant d$ dont les valeurs pour les entiers $n \geqslant 2N_0$ coïncident avec celles de P_k. Comme $Q_k^{(p)}$ est identiquement nul pour tout $k < -(d-1)$, on en déduit que Q_k est un polynôme constant pour tout $k < -d-N_0$. Comme pour tout $n \geqslant 2N_0$,

$$D(t^n) = \sum_k Q_k(n)\ t^{n+k},$$

on en déduit que $Q_k(2N_0) = 0$ pour tout $k < -2N_0$. En comparant ce résultat au précédent, on montre que Q_k est identiquement nul pour tout $k < \inf(-d-N_0, -2N_0) \leqslant -d-2N_0$.

Soit D' l'application de $\mathbb{C}\{t\} \longrightarrow t^{-p-d-2N_0}.\mathbb{C}\{t\}$ définie par $f \longmapsto t^{-p}.\left[D(t^p f) - D'_{(t^p)}(f)\right]$, où p est un entier arbi-traire $\geqslant 2N_0$. Pour tout $f \in \mathbb{C}\{t\}$, $t^p f \in A$. D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence $D'_{(t^p)}$ se prolonge en une application de $\mathbb{C}\{t\} \longrightarrow t^{-(d-1)}.\mathbb{C}\{t\}$. D' prolonge D et est telle que

$$D'(t^n) = \sum_{k \geqslant -p-d-2N_0} R_k(n)\, t^{n+k},$$

où pour tout k, R_k est un polynôme en n de degré $\leqslant d$. Il est clair que $R_k \equiv Q_k$, ce qui montre déjà que $R_k \equiv 0$ pour tout $k < -d-2N_0$. Soit k_0 le plus petit entier tel que $R_k \not\equiv 0$; R_{k_0} doit s'annuler sur l'ensemble $\{n \in I \mid n+k_0 \notin I\}$.

Montrons que cet ensemble a toujours au moins $(-k_0)$ éléments : Si $(-k_0)$ est $\leqslant 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $(-k_0)$ est > 0, considérons sur $\mathbb{Z}$ les classes de congruence modulo $(-k_0)$. Dans chaque classe de congruence, il existe au moins un élément de l'ensemble $\{n \in I \mid n+k_0 \notin I\}$: c'est le plus petit élément de l'intersection de la classe de congruence avec I.

Donc $(-k_0) \leqslant d$. On en déduit que $R_k \equiv 0$ pour tout $k < -d$, et ceci termine la démonstration de la première partie du théorème 1.

La réciproque se démontre par récurrence sur $d = \sup\limits_k(\deg(P_k))$.

La propriété est vraie pour d = 0 :

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_0} a_k\, t^{n+k}, \quad D(1) = \sum_{k \geqslant k_0} a_k\, t^k \in A \;;$$

$f \mapsto D(f) = D(1).f$ est un opérateur différentiel sur A .

Supposons-la démontrée à l'ordre (d-1). Montrons-la à l'ordre d. Soit $D : \mathbb{C}\{t\} \to t^{k_0}.\mathbb{C}\{t\}$ définie par

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_0} P_k(n)\, t^{n+k} \quad (\deg(P_k) \leqslant d)$$

et on suppose que D laisse stable A. On doit prouver que, pour tout $f \in A$, l'application D' définie par $g \mapsto D(fg)-fD(g)$, qui laisse stable A, est un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant$ d-1.

Soit $f \in A$, $f = \sum\limits_{p \in \mathbb{N}} a_p\, t^p$.

Soit $D'(t^n) = D(f.t^n) - f.D(t^n)$.

$$D'(t^n) = \sum_p a_p \Big(\sum_{k \geqslant k_0} P_k(n+p)\ t^{n+p+k} \Big)$$
$$- \Big(\sum_p a_p\ t^p \Big) \Big(\sum_{k \geqslant k_0} P_k(n)\ t^{n+k} \Big)$$

$$D'(t^n) = \sum_{h \geqslant k_0} t^{n+h} \Big(\sum_{p+k=h} a_p (P_k(n+p) - P_k(n)) \Big).$$

Pour tout h, $\sum_{p+k=h} a_p (P_k(n+p) - P_k(n))$ est un polynôme en n de degré $\leqslant d-1$. Par l'hypothèse de récurrence, D' est un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant d-1$. Donc, D est un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant d$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.

Théorème 2.- Soit $D : A \longrightarrow A$, comme ci-dessus, d'ordre $\leqslant d$. Posons

$$D'(t^n) = \sum_{-d \leqslant k < 2N_0} P_k(n)\ t^{n+k},$$
$$D''(t^n) = \sum_{k \geqslant 2N_0} P_k(n)\ t^{n+k}.$$

Alors D' et D" sont des opérateurs différentiels sur A, et D" est combinaison linéaire à coefficients dans A des opérateurs D_i définis par $D_i(t^n) = n^i\ t^{n+N_0}$ $(i = 0,1,\ldots,d)$. Donc les opérateurs finis, (i.e ceux pour lesquels les P_k sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de k) engen--drent, pour tout d, $\mathrm{Diff}^d(A)$ comme A-module à gauche.

Corollaire 1.- Pour chaque entier $d \geqslant 0$, $\mathrm{Diff}^d(A)$ est un A-module de type fini.

2. Caractérisation et construction d'opérateurs diffé--rentiels sur A.

Le théorème 1 nous donne la forme des opérateurs diffé--rentiels sur A. Nous devons maintenant étudier le problème suivant : Reconnaître si D défini par

$$(3) \qquad D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_o} P_k(n)\, t^{n+k} \quad (P_k : \text{polynômes})$$

laisse stable A. En fait, il suffit que

$$t^n \longmapsto \sum_{k_o \leqslant k < N_o} P_k(n)\, t^{n+k}$$

laisse stable A, de sorte que dans (3), on peut se borner à considérer le cas où la sommation est finie.

Donnons-nous arbitrairement un entier $k_1 \geqslant k_o$. Posons :

$$D_o(t^n) = \sum_{k_o \leqslant k < k_1} P_k(n)\, t^{n+k}$$

$$D_1(t^n) = \sum_{k \geqslant k_1} P_k(n)\, t^{n+k}$$

On a : $D = D_o + D_1$. Pour que D laisse stable A, il est évidemment nécessaire que D_o satisfasse aux conditions :

$(i)_{k_1}$ Pour tout p_r $(0 \leqslant r \leqslant s)$, $D_o(p_r)$ est combinaison linéaire des p_j (modulo $t^{\inf(N_o, n_r+k_1)}$) ;

$(ii)_{k_1}$ Pour tout $n \geqslant N_o$, $D_o(t^n)$ est combinaison linéaire des p_j (modulo $t^{\inf(N_o, n+k_1)}$).

Ces conditions sont trivialement vérifiées si $k_1 = k_o$ (car, dans ce cas $D_o = 0$). Si $k_1 \geqslant N_o$, elles expriment que D laisse stable A. Elles sont aussi suffisantes dans le sens suivant :

<u>Théorème 3.</u>- Etant donné D_o, satisfaisant à $(i)_{k_1}$ et $(ii)_{k_1}$, il est possible de déterminer D_1 de façon que $D_o + D_1$ laisse stable A. D'une façon précise, pour que

$$t^n \longmapsto D_o(t^n) + P_{k_1}(n)\, t^{n+k_1}$$

satisfasse à $(i)_{k_1+1}$ et $(ii)_{k_1+1}$, il faut et il suffit que le polynôme P_{k_1} prenne une valeur donnée (dépendant de D_o) pour chaque n appartenant à l'ensemble $I(k_1) = \{n \in I \mid n+k_1 \notin I\}$. De plus, si $k_1 = k_o$ $(D_o = 0)$, la condition est que P_{k_1} s'annule pour les $n \in I(k_1)$.

Démonstration.- Par hypothèse, on a :

$$D_o(p_r) = \sum_{j=0}^{s} a_j\, p_j \quad (\text{modulo } t^{\inf(N_o,\ n_r+k_1)})$$

Donc $$D_o(p_r) = \sum_{j=0}^{p} a_j\, p_j + a\, t^{n_r+k_1} \quad (\text{modulo } t^{\inf(N_o, n_r+k_1+1)})$$

Soit D' défini par : $D'(t^n) = D_o(t^n) + P_{k_1}(n)\, t^{n+k_1}$. On veut que

$$D'(p_r) = \sum_{j=0}^{s} a_j\, p_j + a\, t^{n_r+k_1} + P_{k_1}(n_r)\, t^{n_r+k_1} \quad (\text{modulo}$$

$t^{\inf(N_o,n_r+k_1+1)}$) soit combinaison linéaire des p_j (modulo $t^{\inf(N_o,n_r+k_1+1)}$). Si $n_r+k_1 \in I$, ceci aura lieu, quelle que soit la valeur de $P_{k_1}(n_r)$. Si $n_r+k_1 \notin I$, ceci détermine la valeur de $P_{k_1}(n_r)$ ($P_{k_1}(n_r) = -a$).

Un raisonnement analogue fait sur les t^n montre finalement que, pour que

$$t^n \longmapsto D_o(t^n) + P_{k_1}(n)\, t^{n+k_1}$$

satisfasse à $(i)_{k_1+1}$ et $(ii)_{k_1+1}$, il faut et il suffit que P_{k_1} prenne une valeur donnée pour chaque n appartenant à $I(k_1)$.

$I(k_1)$ est un ensemble fini. Soit $\nu(k_1)$ son cardinal. Ainsi, si d est un entier $\geqslant \nu(k_o)$, on peut prendre pour P_{k_o} un polynôme unitaire de degré d. Cela fait, on peut choisir successivement :

- Pour P_{k_o+1}, un polynôme de degré $\leqslant \nu(k_o+1)-1$
- ....
- Pour P_k, un polynôme de degré $\leqslant \nu(k)-1$

(et c., jusqu'à P_{N_o-1}).

On obtient ainsi un opérateur D d'ordre égal à $\sup(d, \nu(k_o+1)-1, \dots, \nu(N_o-1)-1)$.

Corollaire 2.- Tout opérateur différentiel $D \in \mathrm{Diff}^{\infty}(A)$, tel que

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_o} P_k(n)\, t^{n+k}, \text{ avec } P_{k_o} \not\equiv 0,$$

est d'ordre $\geqslant \nu(k_o)$.

En effet, P_{k_o} doit s'annuler pour $\nu(k_o)$ valeurs distinctes de n.

<u>Proposition 8.</u> (*)

(1) $k \geqslant N_o \Longrightarrow \nu(k) = 0$

(2) $0 \leqslant k < N_o \Longrightarrow \nu(k) \leqslant s+1 < N_o$

(3) $-N_o < k < 0 \Longrightarrow -k \leqslant \nu(k) \leqslant \inf(N_o, -k+s+1)$

(4) $k \leqslant -N_o \Longrightarrow \nu(k) = -k.$

<u>Démonstration.-</u>

(1) $k \geqslant N_o$, alors $n+k \geqslant N_o$ donc $n+k \in I$ et $\nu(k) = 0$.

(2) $0 \leqslant k < N_o$: comme $k \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant N_o$, $n+k \in I$.

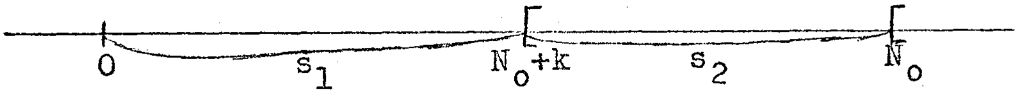
Donc $\nu(k) \leqslant \operatorname{card}\{n \in I \mid n < N_o\}$

$\nu(k) \leqslant s+1 < N_o$.

(3) $-N_o < k < 0$: On a déjà montré que $\nu(k) \geqslant -k$.

Soit $s_1 = \operatorname{card}\{n \in I \mid 0 \leqslant n < N_o+k\}$

$s_2 = \operatorname{card}\{n \in I \mid N_o+k \leqslant n < N_o\}$.



$$\nu(k) = \operatorname{card}\{n \in I \mid N_o \leqslant n < N_o - k,\ n+k \notin I\}$$
$$+\operatorname{card}\{n \in I \mid n < N_o,\ n+k \notin I\}$$

$\nu(k) \leqslant (-k-s_2) + (s_1+s_2)$

a) $\nu(k) \leqslant -k + s_1 + s_2 = -k + s + 1.$

b) On a $s_1 \leqslant N_o+k$

$\nu(k) \leqslant (-k-s_2) + (N_o+k) + s_2$

$\nu(k) \leqslant N_o$.

(*) T. Bloom [12] nous signale le résultat suivant valable pour tous les $k \leqslant 0$:

$-k \in I \Longrightarrow \nu(k) = -k,$

$-k \notin I \Longrightarrow \nu(k) > -k.$

(4) $k \leqslant -N_o$:

$\nu(k) = \text{card}\{n \geqslant N_o | n+k \notin I\} + \text{card}\{n \in I | n < N_o\}$

$\nu(k) = (-k-(s+1)) + (s+1) = -k.$

Corollaire 3.- d étant un entier donné $\geqslant N_o$, et k_o un entier $\geqslant -d$, il existe un opérateur différentiel $D \in \text{Diff}^d(A)$ tel que

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant k_o} P_k(n)\ t^{n+k}$$

avec $P_{k_o} \not\equiv 0$, $\deg(P_{k_o}) = d$, $\deg(P_k) < d$ pour tout $k > k_o$.

En effet, d'après la proposition 8, dès que $d \geqslant N_o$, on a : $\nu(k) \leqslant d$ pour $k \geqslant -d$.

Le corollaire 3 implique qu'il existe des $D \in \text{Diff}^\infty(A)$ pour lesquels les P_k relatifs aux entiers $k < 0$ ne sont pas tous identiquement nuls. Par suite, la $\mathbb{C}$-algèbre $\text{Diff}^\infty(A)$ n'est pas engendrée par les D de la forme

$$D(t^n) = \sum_{k \geqslant 0} P_k(n)\ t^{n+k}\ ;$$

donc tout système de générateurs de $\text{Diff}^\infty(A)$ contient au moins un élément d'ordre $\geqslant \inf_{k<0} \nu(k)$ (d'après le corollaire 2).

Exemple.- Si A est la sous-algèbre analytique de $\mathbb{C}\{t\}$ engendrée par t^n et t^{n+1}, (le germe $(X,0)$ étant alors iso--morphe au germe de courbe $x^n = y^{n+1}$ à l'origine du plan $\mathbb{C}^2$, coordonnées x et y), on a :

$\nu(k) \geqslant n$ pour tout $k < 0$. Donc, l'algèbre $\text{Diff}^\infty(A)$ ne peut être engendrée par des éléments d'ordre $< n$.

Démonstration.- Dans ce cas

$I = \{0; n, n+1; 2n, 2n+1, 2n+2; \ldots; pn, pn+1, \ldots, pn+p; \ldots; (n-2)n, \ldots$
$\ldots, (n-2)n+n-2\} \cup \{p | p \geqslant n(n-1)\}$. $N_o = n(n-1)$.

Soit q un entier, $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Si $k<0$, dans l'ensemble des entiers $qn+k, \ldots, qn+q+k$, il en existe au moins un qui n'ap--partient pas à I. En effet, $qn+k, \ldots, qn+q+k$ forment une suite de (q+1) entiers consécutifs, tous strictement infé-rieurs à qn+q ; or dans $I \cap [0, qn+q-1]$, il n'existe pas de suite de (q+1) entiers consécutifs. Ceci entraîne $\nu(k) \geqslant n$.

Remarquons que $\nu(n) = n$ et $\nu(n+1) = n+1$.

On dit qu'un opérateur différentiel est homogène lorsque $P_k \equiv 0$ sauf pour une valeur unique de $k = k_o$; k_o ~~est~~ s'appelle la "force" de l'opérateur différentiel homogène. Il existe donc sur A deux opérateurs différentiels homogènes, l'un d'ordre n et de force (-n), l'autre d'ordre (n+1) et de force -(n+1).

En fait, lorsque n = 2, nous montrerons que $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par des éléments d'ordre $\leqslant 2$.

<u>Théorème 4.</u>- L'algèbre graduée $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est une A-algèbre de type fini.

<u>Démonstration.</u>- Lorsque $d \geqslant N_o$ et $k_o \geqslant -d$ sont donnés, l'opérateur D du corollaire 3 est unique $[\text{modulo } \mathrm{Diff}^{d-1}(A)]$, pourvu que l'on suppose que le polynôme P_{k_o} est unitaire. Notons $D^d_{k_o}$ l'image de D dans $\mathrm{Diff}^d(A)/\mathrm{Diff}^{d-1}(A)$. Il est immédiat que dans l'algèbre $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$, on a

$$D^d_{k_o} . D^{d'}_{k'_o} = D^{d+d'}_{k_o+k'_o} ,$$

et que les $D^d_{k_o}$ (pour d donné, k_o variable) engendrent $\mathrm{Diff}^d(A)/\mathrm{Diff}^{d-1}(A)$ comme A-module. On en déduit aussitôt que les éléments de $\mathrm{Gr}^{2N_o-1}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$ engendrent l'algèbre $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$, ce qui prouve le théorème.

<u>Corollaire 4.</u>-

(i) $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$ est noethérien;

(ii) La C-algèbre $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par A et un nombre fini d'éléments;

(iii) $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est noethérien à gauche et à droite.

<u>3. Exemples.</u>

A titre d'exemple, traitons le cas où A est engendré par des monômes (i.e, $A = \mathbb{C}\{t^{k_1},\dots,t^{k_n}\}$ où $(k_1,\dots,k_n)$ sont premiers entre eux). Dans ce cas, $Gr(Diff^{\infty}(A))$ est engendré par des opérateurs homogènes.

Sur A, il existe un opérateur d'ordre 1 et de force 0

$$D\binom{1}{0}(t^n) = n\ t^n.$$

Ainsi, en composant un opérateur homogène D d'ordre d_o et de force k_o avec $(D\binom{1}{0})^p$, on obtient tous les opérateurs homogènes de force k_o et d'ordre $d \geqslant d_o$.

On déduit de ceci, compte tenu du théorème 4, que $Gr(Diff^{\infty}(A))$ est engendrée par les classes des opérateurs suivants :

1) $D\binom{1}{0}(t^n) = n\ t^n$;

2) les opérateurs de force k et d'ordre $d = \nu(k)$ pour tous les k tels que $-(2N_o-1) \leqslant k < N_o$ et tels que $\nu(k) \neq 0$.

Il est clair que ces opérateurs engendrent $Gr^{2N_o-1}(Diff^{\infty}(A))$ et donc $Gr(Diff^{\infty}(A))$. Remarquons que $\nu(0) = 0$; $Gr(Diff^{\infty}(A))$ est donc engendrée par $(3N_o-1)$ opérateurs (au plus).

<u>Exemple 1.</u>- $A = \mathbb{C}\{t^2,t^3\}$ (correspondant à la courbe $x^2 - y^3 = 0$ dans $\mathbb{C}^2$).

$N_o = 2$, $I = \{0,2,3,4,\dots\}$.

k	-3	-2	-1	0	1
$\nu(k)$	3	2	2	0	1

$Gr(Diff^{\infty}(A))$ est engendrée par les classes des opérateurs suivants :

- 2 opérateurs d'ordre 1

$$D\binom{1}{0}(t^n) = n\ t^n$$
$$D\binom{1}{1}(t^n) = n\ t^{n+1}$$

- 2 opérateurs d'ordre 2

$$D\binom{2}{-1}(t^n) = n(n-2)\ t^{n-1}$$
$$D\binom{2}{-2}(t^n) = n(n-3)\ t^{n-2}$$

- 1 opérateur d'ordre 3

$$D\binom{3}{-3}(t^n) = n(n-2)(n-4)\, t^{n-3}.$$

Montrons que $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant 2$. Il suffit de montrer que $D\binom{3}{-3}$ s'obtient comme crochet d'opérateurs d'ordre 2.

$$\Delta = \left[D\binom{2}{-2}, D\binom{2}{-1}\right] = D\binom{2}{-2}.D\binom{2}{-1} - D\binom{2}{-1}.D\binom{2}{-2}$$

$$\Delta(t^n) = [n(n-2)(n-1)(n-4) - n(n-3)(n-2)(n-4)]\, t^{n-3}$$

$$\Delta(t^n) = 2n(n-2)(n-4)\, t^{n-3}$$

$$D\binom{3}{-3} = 1/2\ \left[D\binom{2}{-2}, D\binom{2}{-1}\right].$$

Exemple 2.- $A = \mathbb{C}\{t^3, t^5, t^7\}$.

$N_0 = 5$, $I = \{0,3,5,6,7,8,\ldots\}$.

k	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\nu(k)$	9	8	7	6	5	5	3	3	3	0	2	1	0	1

A priori, $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$ est engendrée par l'image de 13 opérateurs. En fait, lorsque $k = -6, -8, -9$, $D_k^{(\nu(k))}$ s'obtient par composition de $D\binom{3}{-3}$ et de $D\binom{5}{-5}$.

$\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$ est engendrée par les classes des opérateurs suivants :

- 3 opérateurs d'ordre 1

$$D\binom{1}{0}(t^n) = n\, t^n$$

$$D\binom{1}{2}(t^n) = n\, t^{n+2}$$

$$D\binom{1}{4}(t^n) = n\, t^{n+4}$$

- 1 opérateur d'ordre 2

$$D\binom{2}{1}(t^n) = n(n-3)\, t^{n+1}$$

- 3 opérateurs d'ordre 3

$$D\binom{3}{-1}(t^n) = n(n-3)(n-5)\, t^{n-1}$$

$$D\binom{3}{-2}(t^n) = n(n-3)(n-6)\, t^{n-2}$$

$$D\binom{3}{-3}(t^n) = n(n-5)(n-7)\, t^{n-3}$$

- 2 opérateurs d'ordre 5

$$D\binom{5}{-4}(t^n) = n(n-3)(n-5)(n-6)(n-8)\, t^{n-4}$$

$$D\binom{5}{-5}(t^n) = n(n-3)(n-6)(n-7)(n-9)\, t^{n-5}$$

- 1 opérateur d'ordre 7

$$D\binom{7}{-7}(t^n) = n(n-3)(n-5)(n-6)(n-8)(n-9)(n-11)\ t^{n-7}.$$

III. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE DONT LE NORMALISÉ EST $(\mathbb{C}^n,0)$.

1. Forme des opérateurs différentiels. Etude de $Gr(Diff^\infty(\mathcal{O}_{X,0}))$.

Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique irréductible dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$, et soit $p : (\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(X,0)$ la normalisation de $(X,0)$; $\mathcal{O}_{X,0}$ se plonge dans $\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$. Soit A son image

$$A = p^*(\mathcal{O}_{X,0})\subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} = \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}.$$

Remarquons que si $\Delta: \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}\longrightarrow \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$ qui envoie A dans A, alors Δ induit un opérateur D d'ordre $\leqslant d$ sur A. Considérons la propriété réciproque de l'anneau A :

(1) Pour tout opérateur différentiel $D : A\longrightarrow A$ d'ordre $\leqslant d$, il existe un opérateur différentiel $\Delta : \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\} \longrightarrow \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$ d'ordre $\leqslant d$ qui induit D sur A.

Soit $(S,0)$ le germe en 0 de l'ensemble des points singuliers de $(X,0)$.

Proposition 9.- Si $\mathrm{codim}_X\, S \geqslant 2$, alors la propriété (1) est vérifiée pour A.

Démonstration.- Soit D un germe d'opérateur différentiel sur $(X,0)$, $D : \mathcal{O}_{X,0}\longrightarrow\mathcal{O}_{X,0}$ d'ordre $\leqslant d$. Il existe un repré--sentant $\tilde{X}$ de $(X,0)$ sur lequel on peut définir un opérateur $\tilde{D}$ qui induit D en 0. Si $\tilde{S}$ désigne l'ensemble des points singuliers de $\tilde{X}$, on peut alors transporter $\tilde{D}|_{\tilde{X}-\tilde{S}}$ en un opérateur Δ sur $\tilde{U} - p^{-1}(\tilde{S})$ où $\tilde{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$; Δ s'écrit :

$$\Delta = \sum_{|i|\leqslant d} f_i \ \partial^{|i|}/\partial t^i .$$

Les f_i sont holomorphes sur $\tilde{U} - p^{-1}(\tilde{S})$. Comme $\mathrm{codim}_{\tilde{U}}\, p^{-1}(\tilde{S})\geqslant 2$, les f_i se prolongent en fonctions holomorphes sur $\tilde{U}$ tout entier. L'opérateur Δ se prolonge en un opérateur Δ' sur $\tilde{U}$, et l'on vérifie que le germe de Δ' en O induit D sur A.

Montrons sur un exemple que (1) peut être vérifiée pour A, même si $\operatorname{codim}_X S = 1$.

Exemple.- Soit la surface X contenue dans $\mathbb{C}^3$, d'équation $x^2y - z^2 = 0$, et considérons le germe induit par X en O. L'ensemble des points singuliers de X a pour équation $x = z = 0$, et induit donc en O un germe de codimension 1. Le normalisé de (X,O) est $\mathbb{C}^2$ (coordonnées u et v), et p s'écrit : $x = u$, $y = v^2$, $z = uv$. Alors $A = \mathbb{C}\{u,v,uv\}$, et l'on vérifie que les opérateurs différentiels sur A sont induits par des opérateurs sur $\mathbb{C}\{u,v\}$. En effet, si D, défini par

$$D(u^n v^p) = \sum_{(h,k)\in\mathbb{Z}^2} P_{h,k}(n,p)\, u^{n-h} v^{p-k} ,$$

est un opérateur différentiel sur A, il est clair que $P_{h,k}$ doit contenir en facteur le polynôme

$$n(n-1)\ldots(n-h+1)p(p-1)\ldots(p-k+1) ,$$

ce qui suffit à montrer que D est un opérateur différentiel sur $\mathbb{C}\{u,v\}$.

Proposition 10.- Si $p^{-1}(S)$ est contenu dans la sous-variété de $(\mathbb{C}^n,0)$ définie par $t_1 = 0$, alors il existe un entier N_0 tel que l'idéal maximal de A contienne $t_1^{N_0}.\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$.

Démonstration.- L'assertion exprime que $t_1^{N_0}$ est "dénominateur universel" ; c'est un cas particulier d'un théorème d'Oka (cf. [3]).

Si $f \in \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$, on peut écrire $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, où f_n est un polynôme homogène de degré n. Si $f \neq 0$, on définit la "valuation" de f comme le polynôme homogène non nul de plus bas degré du développement de f en somme de polynômes homogènes. Soit I l'ensemble des polynômes homogènes, "valuations" d'une fonction f non nulle appartenant à A. (I est stable par multiplication).

Lemme 2.- Si $A \neq \mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$, il existe au moins un polynôme homogène qui n'appartient pas à I.

Démonstration.- En effet, si tous les polynômes homogènes appartiennent à I, on en déduit que tous les polynômes homogènes appartiennent à $\hat{A}$, le complété de A pour la topo--logie $\mathfrak{m}(A)$-adique, et comme $\hat{A}\cap\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\} = A$, on en déduit que $A = \mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$.

Soit D un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant d$, induit par un opérateur d'ordre $\leqslant d$ sur $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$. On a :

$$D(t^p) = \sum_{k\in Z^n} P_k(p)\ t^{p-k}$$

(si $p = (p_1,\dots,p_n)$ est un n-uple d'entiers, on pose $t^p = t_1^{p_1}\times\dots\times t_n^{p_n}$), où pour tout $k\in\mathbb{Z}^n$, P_k est un polynôme en p de degré total $\leqslant d$. Si l'un des k_i est supérieur ou égal à 1, P_k contient en facteur

$$p_i(p_i-1)\dots(p_i-k_i+1).$$

On en déduit : si $P_k\not\equiv 0$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sup(k_i,0) \leqslant d, \text{ d'où } k_i\leqslant d \text{ pour tout } i.$$

Proposition 11.- Soit (X,0) un germe d'espace analytique dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n,0)$, et tel que $A = \mathcal{O}_{X,0}$ vérifie (1) (ce qui implique $n\geqslant 2$ si (X,0) n'est pas normal). Suppo--sons que $p^{-1}(S)$ soit contenu dans $t_1 = 0$. Alors, si (X,0) n'est pas normal et si D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant d$ $(d>0)$, on a pour tout $k = (k_1,\dots,k_n)$ tel que $P_k\not\equiv 0$:

$$k_1+\dots+k_n\leqslant d-1 \quad \text{ou} \quad k_1\leqslant d-1.$$

Démonstration.- Si l'un des k_i est < 0, on a :

$$k_1+\ldots+k_n < \sup(k_1,0)+\ldots+\sup(k_n,0) \leqslant d.$$

Donc $\quad k_1+\ldots+k_n \leqslant d-1.$

Si tous les k_i sont positifs, il suffit de montrer que $P_{(d,0,\ldots,0)} \equiv 0$. Il suffit en fait de démontrer ce résultat pour un opérateur d'ordre $d \geqslant N_0$. (En effet, s'il existait un opérateur D d'ordre $d < N_0$ tel que $P_{(d,0,\ldots,0)} \not\equiv 0$, il suffirait de l'élever à une puissance suffisante pour obtenir un opérateur Δ ayant la même propriété et d'ordre $d \geqslant N_0$). Supposons qu'il existe un opérateur D d'ordre $d \geqslant N_0$ tel que $P_{(d,0,\ldots,0)} \not\equiv 0$. Alors,

$$P_{(d,0,\ldots,0)} = ap_1(p_1-1)\ldots(p_1-d+1).$$

Etant donné un polynôme homogène de degré q, $Q \in \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$, il existe alors un polynôme $R \in A$ tel que $D(R) = Q$ (modulo $\mathfrak{m}(\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\})^{q+1}$). [Pour montrer ce résultat, il suffit de vérifier que les $D(t_1^{p_1+d}\cdot t_2^{p_2}\ldots t_n^{p_n})$ (modulo $\mathfrak{m}(\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\})^{q+1}$), pour les $p = (p_1,\ldots,p_n)$ tels que $|p| = p_1+\ldots+p_n = q$, forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes homo--gènes de degré q. Cette vérification est un simple exercice d'algèbre linéaire !] L'opérateur D ne peut donc envoyer A dans A, compte tenu du lemme 2.

Théorème 5.- Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$, tel que $A = \mathcal{O}_{X,0}$ vérifie (1) et tel que $p^{-1}(S)$ soit contenu dans une vraie sous-variété lisse de $(\mathbb{C}^n,0)$. Alors, si $(X,0)$ n'est pas normal, la $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre graduée $Gr(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini.

Démonstration.- Au moyen d'un automorphisme de $(\mathbb{C}^n,0)$, on peut se ramener au cas où $p^{-1}(S)$ est contenu dans $t_1 = 0$.

La démonstration se fait alors par l'absurde. Si $D_i \in \mathrm{Diff}^{d_i}(A)/\mathrm{Diff}^{d_i-1}(A)$ $(i = 1,\ldots,q)$ sont des générateurs de $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$, on considère l'opérateur d'ordre d suivant, où $d = (2N_o+1).\sup(d_i)$:

$$D(t^p) = p_1(p_1-1)\ldots(p_1-d+1)\, t_1^{p_1-(d-N_o)}.t_2^{p_2}\ldots t_n^{p_n}.$$

L'opérateur D envoie A dans A. C'est donc bien un opérateur différentiel sur A. Remarquons que D est un opérateur diffé--rentiel homogène pour lequel $k_1 = d-N_o$, $k_1+\ldots+k_n = d-N_o$.

Soit Δ l'image de D dans $\mathrm{Diff}^d(A)/\mathrm{Diff}^{d-1}(A)$. Si dans $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(A))$, Δ s'écrivait comme combinaison linéaire à coefficients dans A de produits de D_i, dans chaque produit, il y aurait au moins $(2N_o+1)$ facteurs, et donc pour tout terme $P_k(p)\, t^{p-k}$ du produit, tel que $P_k \not\equiv 0$, on aurait $k_1 \leqslant d-(N_o+1)$ ou $k_1+\ldots+k_n \leqslant d-(N_o+1)$. Contradiction.

<u>Corollaire 5.</u>- Soit (X,O) un germe d'espace analytique dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n,0)$. Sous les hypothèses du théorème précédent, ~~anneau~~ $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas un anneau noethérien.

Ce corollaire se déduit de la proposition 6.

<u>Corollaire 6.</u>- Soit (X,O) un germe d'espace analytique dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$. Si l'ensemble (S,O) des points singuliers de (X,O) est non vide, de codimension $\geqslant 2$, et si l'image réciproque de (S,O) dans $(\mathbb{C}^n,0)$ est contenue dans une vraie sous-variété lisse de $(\mathbb{C}^n,0)$, alors $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini.

<u>Corollaire 7.</u>- Soit (X,O) un germe d'espace analytique irréductible dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$. Si O est un point singulier isolé de (X,O) et si dim $X \geqslant 2$, alors

$Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini.

Exemple 1.- Si on considère la surface X dans $\mathbb{C}^3$ d'équation $x^2y - z^2 = 0$, on sait que (1) est vérifié pour $A = \mathcal{O}_{X,0}$. Ici, $p^{-1}(S)$ a pour équation $u = 0$. Le théorème 5 s'applique dans ce cas : $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini.

Exemple 2.- Dans [9], Stutz définit les "normalisations en séries de Puiseux". Soit (X,0) un germe d'espace analy--tique dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n,0)$. On dit que (X,0) admet une "normalisation en séries de Puiseux" de rang k s'il existe un entier N_0 et un système de coordonnées locales dans $(\mathbb{C}^n,0)$ tel que $A = p^*(\mathcal{O}_{X,0})$ contienne

$$\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_k\} \cup t_{k+1}^{N_0}.\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\} \cup \ldots \cup t_n^{N_0}.\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}.$$

Si (X,0) admet une "normalisation en séries de Puiseux" de rang k, et si $k \leqslant n-2$, le corollaire 6 entraine que $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini (si $\mathcal{O}_{X,0} \neq \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$).

En revanche, pour $A = \mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_{n-1},t_n^{k_1},\ldots,t_n^{k_p}\}$ avec $(k_1,\ldots,k_p)$ premiers entre eux, $Gr(Diff^{\infty}(A))$ est une A-algèbre de type fini. Bien entendu, les opérateurs différentiels sur A ne sont pas induits par des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}\{t_1,\ldots,t_n\}$.

2. Etude de $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0})$.

Nous avons montré que dans certains cas, $Gr(Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini. Cependant, il peut arriver que $Diff^{\infty}(\mathcal{O}_{X,0})$ soit engendrée par $\mathcal{O}_{X,0}$ et un nombre fini d'éléments.

Théorème 6.- Soit (X,0) un germe d'espace analytique dont le normalisé est isomorphe à $(\mathbb{C}^n,0)$. Supposons que 0 soit un point singulier isolé de (X,0) et que $A = p^*(\mathcal{O}_{X,0})$

$\subset \mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$ soit engendrée par des monômes (i.e., $A = \mathbb{C}\{t^{k_1},\dots,t^{k_p}\}$ où $(k_1,\dots,k_p)$ sont des n-uples de nombres entiers). Alors la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par A et un nombre fini d'éléments.

Démonstration.- Le théorème étant vrai pour $n = 1$ (cf. II), on peut supposer $n \geqslant 2$.

Soit I l'ensemble des n-uples $p = (p_1,\dots,p_n)$ tels que $t^p = t_1^{p_1}\dots t_n^{p_n} \in A$. D'après un théorème d'Oka, si f est une fonction de $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$ nulle sur $p^{-1}(S)$, il existe un entier p tel que $f^p.\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\} \subset A$. On en déduit que pour tout indice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, il existe un entier N_i tel que A contienne $t_i^{N_i}.\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_n\}$.

L'ensemble $\mathbb{N}^n - I$ est fini. Pour tout sous-ensemble J de $\mathbb{N}^n - I$, l'idéal $\mathcal{J}(J)$ formé des polynômes de $\mathbb{C}[p_1,\dots,p_n]$ nuls sur J est de type fini. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels sous-ensembles J, on peut trouver un entier h qui majore les degrés des générateurs de chaque $\mathcal{J}(J)$ pour $J \subset \mathbb{N}^n - I$.

Comme A est engendrée par des monômes, pour tout d, $\mathrm{Diff}^d(A)$ est engendré comme A-module par des opérateurs différentiels homogènes de la forme

$$D(t^p) = P(p)\, t^{p-k}.$$

Le polynôme P doit s'annuler sur l'ensemble $I(k) = \{p \in I \mid p-k \notin I\}$; I(k) est la réunion d'un ensemble éventuellement infini formé des $p \in I$ tels que $p-k \notin \mathbb{N}^n$, et d'un ensemble fini formé des $p \in I$ tels que $p-k \in \mathbb{N}^n$, $p-k \notin I$. Pour la suite de la démon- -stration, il est important de distinguer ces deux parties de I(k) et d'écrire :

$$P(p) = A(p,k)\ Q(p-k)$$

où $A(p,k) = \prod_{i \in \{i \mid k_i > 0\}} \left[p_i(p_i-1)\dots(p_i-k_i+1)\right]$

s'annule sur $I(k) \cap \{p \in I \mid p-k \notin \mathbb{N}^n\}$, et Q est un polynôme nul sur l'ensemble

$$J(k) = \{q \in \mathbb{N}^n \mid q \notin I, q+k \in I\}.$$

Soient $Q_{J(k),1}, \dots, Q_{J(k),s}$ des générateurs de $\mho(J(k))$ de degrés $\leqslant h$.

$$Q(p-k) = \sum_i f_i(p-k)\; Q_{J(k),i}(p-k)$$
$$= \sum_{i,j} a_{i,j}\; p^j\; Q_{J(k),i}(p-k)$$

Donc $D = \sum_{i,j} a_{i,j}\; D_{k,J(k),i} \cdot t^j\, \partial^{|j|}/\partial t^j$

où $D_{k,J(k),i}\; (t^p) = A(p,k)\; Q_{J(k),i}(p-k)\; t^{p-k}$ est un opérateur différentiel sur A.

On en déduit que $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par A, les $\partial/\partial t_i$ $(i = 1,\dots,n)$, et les $D_{k,J(k),i}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat plus précis suivant :

<u>Proposition 11.</u>- Tout opérateur différentiel $D \in \mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est combinaison linéaire à coefficients dans A de produits d'opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant d_o = \sup(h+\sum_j N_j, 2N_i+1)$.

<u>Démonstration.</u>- Il suffit de démontrer que tout opérateur D d'ordre $d > d_o$ de la forme

$$D(t^p) = A(p,k)\; Q(p-k)\; t^{p-k}\;,$$

où $Q \in \mho(J(k))$ et $\deg(Q) \leqslant h$, s'écrit comme ~~produit~~ somme à coefficients dans A de produits d'opérateurs d'ordre $< d$.

Comme $\deg(Q) \leqslant h$, on en déduit que

$$\sum_j \sup(k_j, 0) > \sum_j N_j .$$

Il en résulte qu'il existe un indice i tel que $k_i > N_i$ (donc $k_i \geqslant N_i+1$).

Si $k_i \geqslant N_i$, et si $q \in \mathbb{N}^n$, $\quad q+k \in I \Longleftrightarrow q+k \in \mathbb{N}^n$. Donc

$$J(k) = \{q \in \mathbb{N}^n \mid q \notin I, q+k \in \mathbb{N}^n\}.$$

Soit maintenant un entier j $(0 < j \leqslant N_i+1)$. Soit

$k'_j = (k_1,\dots,k_i-j,\dots,k_n)$. L'opérateur D_j défini par

$$D_j(t^p) = A(p,k'_j)\ Q(p-k'_j)\ t^{p-k'_j}$$

est un opérateur différentiel sur A car $J(k'_j)\subset J(k)$, et l'on a : ordre$(D_j) < d$ = ordre(D).

$t_i^{N_i}\ \partial^{N_i+j}/\partial t_i^{N_i+j}$ $(j = 1,\dots,n)$ est un opérateur différentiel sur A d'ordre $\leqslant 2N_i+1$.

$$D_j\cdot(t_i^{N_i}\ \partial^{N_i+j}/\partial t_i^{N_i+j})(t^p) = A(p,k)\ Q(p-k)\ [(p_i-j)\dots$$
$$\dots(p_i-N_i-j+1)]\ t^{p-k}$$

$$D_j\cdot(t_i^{N_i}\ \partial^{N_i+j}/\partial t_i^{N_i+j})(t^p) = [(p_i-j)\dots(p_i-N_i-j+1)]\ D(t^p)$$

<u>Lemme 3.</u>- il existe des $a_j\in\mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N_i+1} a_j\ (p_i-j)\dots(p_i-N_i-j+1) = 1.$$

Ce lemme est une conséquence du théorème de Bezout.

On en déduit :

$$D = \sum_{j=1}^{N_i+1} a_j(D_j\cdot t_i^{N_i}\ \partial^{N_i+j}/\partial t_i^{N_i+j}),\ \text{ce qui}$$

démontre la proposition.

<u>Exemple.</u>- Soit A la $\mathbb{C}$-algèbre analytique $\mathbb{C}\{x,y^2,y^3,xy\}$ formée des séries convergentes en x,y sans terme en y. Soit (X,0) le germe d'espace analytique associé à A ; (X,0) est un germe d'espace analytique irréductible de dimension 2. 0 est un point singulier isolé de (X,0) et par suite, Gr(Diff$^\infty$(A)) n'est pas une A-algèbre de type fini. Le théorème 6 montre que Diff$^\infty$(A) est engendrée par A et un nombre fini d'éléments. Dans ce cas particulier, nous allons expliciter un système de générateurs pour les opérateurs différentiels sur A.

<u>Proposition 12.</u>- Pour tout n, Diff^n(A)/Diff^{n-1}(A) est engendré comme A-module par les classes des (3n+4) opérateurs suivants :

$$x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ y^2\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ y^3\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ xy\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,$$

$$x\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}\ ,\ y^2\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}\ ,\ y\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$x\frac{\partial^n}{\partial y^n}\ ,\ y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}\ ,\ y\frac{\partial^n}{\partial y^n}-\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\ .$$

En calculant des crochets de ces opérateurs, on montre :

<u>Proposition 13.</u>- La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{Diff}^{\infty}(A)$ est engendrée par $\mathrm{Diff}^2(A)$ et l'opérateur $x(\partial^3/\partial x^3)$.

<u>Démonstration.</u>- La démonstration se fait en prenant des crochets d'opérateurs d'ordre n avec des opérateurs d'ordre 2 pour obtenir des opérateurs d'ordre n+1. On obtient par exemple :

$$\left[x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]=(n-2)\ x\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\ ,$$

$$\left[y^2\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]=n\ y^2\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\ ,$$

$$\left[y^3\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]=n\ y^3\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\ ,$$

$$\left[xy\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ ,\ x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]=(n-2)\ xy\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\ ,$$

$$\left[y\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}}\ ,\ x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$$

$$=(n-k)\left(y\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}-\frac{\partial^n}{\partial x^{n+1-k}\partial y^{k-1}}\right)$$

et c.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. Bloom : Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, Séminaire Lelong, exposé 1. Lecture notes, Springer Verlag n°71, 1968.

[2] N. Bourbaki : Algèbre commutative, chapitre 3. Hermann, 1961.

[3] H. Cartan : Notion de dénominateur universel, Séminaire Cartan 1953-1954, exposé 9.

[4] H. Cartan : Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, Conférence à l'institut mathématique de Genève, 1967.

[5] A. Grothendieck : Calcul infinitésimal, Séminaire Cartan 1960-1961, exposé 14.

[6] M.-A. Jaffe : Differential operators on the curve $x^a - y^b = 0$, Dissertation, Brandeis university, 1972.

[7] J.-M. Kantor : Opérateurs différentiels sur les singularités-quotients. Comptes rendus, t. 273, série A, 1971, p. 897 - 899.

[8] B. Malgrange : Analytic spaces. Monographie de l'enseignement mathématique de Genève, n°17, 1968, p. 1 - 29.

[9] J. Stutz : The representation problem for differential operators on analytic sets. Math. annalen, 189, 1970, p. 121 - 133.

[10] J.-P. Vigué : Opérateurs différentiels sur les courbes irréductibles. Comptes rendus, t. 274, série A, 1972, p. 895 - 898.

[11] J.-P. Vigué : Opérateurs différentiels sur un germe d'espace analytique dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n,0)$. Comptes rendus, t. 274, série A, 1972, p. 1218 - 1221.

[12] Ce travail achevé, nous avons appris que T. Bloom vient de démontrer par des méthodes semblables aux nôtres les résultats de la deuxième partie de cet exposé, publiés dans [10] . T. Bloom : Differential operators on curves (à paraître aux Rice university studies).