PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

86 - 03

DES ETUDES DE CERTAINS PROCESSUS DE NAISSANCE

WEN Zhi-ying

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) : 60J80 - 60F05 - 60F15

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

86 - 03

DES ETUDES DE CERTAINS PROCESSUS DE NAISSANCE

WEN Zhi-ying

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

DES ETUDES DE CERTAINS PROCESSUS DE NAISSANCE

PAR

WEN ZHI-YING

INTRODUCTION

Les travaux de B. Mandelbrot [17,18,19] sont à l'origine de l'étude des processus que nous considérons. En effet la construction de beaucoup d'ensembles fractals, définis et étudiés par B. Mandelbrot pour modéliser divers phénomènes physiques, procèdent par adjonction de détails de plus en plus fins à une figure initiale : à chaque étape de la construction on a une figure composée d'objets géométriques simples (segments, triangles, cubes,...) ; pour passer d'une figure à la suivante, chaque objet simple est remplacé par une collection d'objets semblables et plus petits.

Pour étudier simultanément ces ensembles, et en particulier pour en déterminer la dimension de Hansdorff, J. Peyrière [21-24] a introduit ce qu'il a appelé les systèmes de Mandelbrot (M-systèmes) qui définissent des processus de naissance dont les processus de Galton-Watson sont un cas particulier.

Rappelons qu'un processus de Galton-Watson à p-types est une chaîne de Markov homogène $\{Z_n ; n\in \mathbb{Z}^+\}$, à valeur dans $\mathbb{Z}^{+p}$, qui satisfait la propriété suivante : si l'on pose $Z_n = (Z_n^1,\dots,Z_n^p)$, $Z_n^i\in \mathbb{Z}^+$, $n\in \mathbb{Z}^+$ et $F_{ij}(x) = P(Z_1^j\leqslant x|Z_o = e_i)$, où $e_i = (\delta_{i,1},\dots,\delta_{i,p})$, $1\leqslant i\leqslant p$; alors

$$P(Z_{n+1}^n\leqslant x|Z_o,\dots,Z_n) = F_{1,j}^{Z_n^1}\star F_{2,j}^{Z_n^2}\star\dots\star F_{p,j}^{Z_n^p}$$

où le second membre désigne la convolution des Z_n^i fonctions $F_{i,j}$ pour $i = 1,2,\dots,p$. On peut imaginer qu'à l'instant $n+1$, chaque individu de la $n^{\text{ième}}$ génération est remplacé aléatoirement et indépendamment par un vecteur de $\mathbb{Z}^{+p}$. Ces processus ont été étudiés systématiquement par de nombreux auteurs dont S. Asmuseen [1,2] , K.B. Athreya [3] , T.H. Harris [6] , C.C. Heyde [7,8,9] , H. Kesten et B.P. Stigum [11,12].

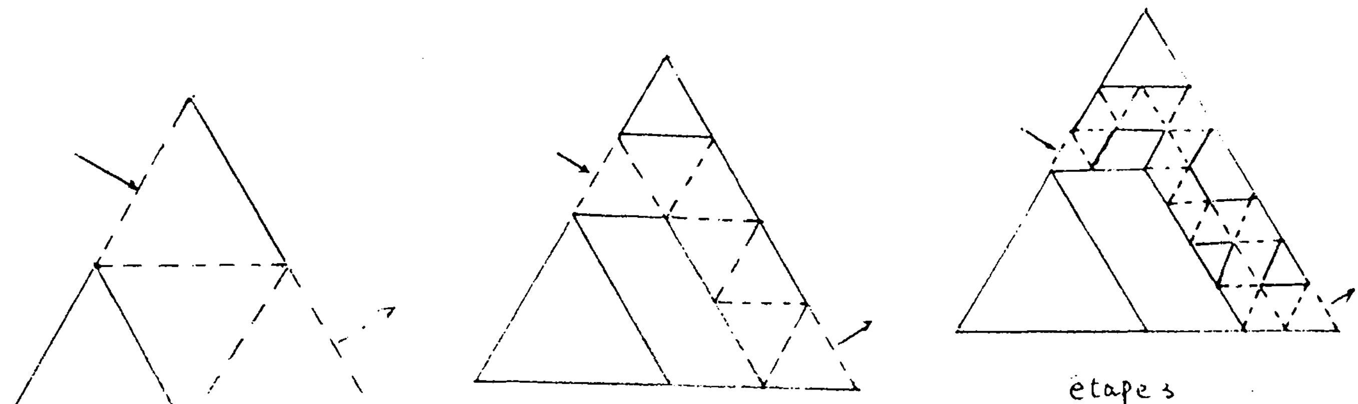
Les processus associés aux M-systèmes généralisent les processus de Galton-Watson sur deux points. D'abord, à chaque instant n , la population est organisée en graphe coloré (les couleurs correspondent aux différents types d'individus composant la population). A l'instant $n+1$, chaque sommet est remplacé aléatoirement par un graphe coloré ; les graphes obtenus sont accrochés ensembles, ce qui fournit la population à l'instant $n+1$. La seconde différence est qu'une certaine dépendance des substitutions de sommets voisins est autorisée. Dans le cas où il y a indépendance, si l'on oublie la structure de graphe, on obtient simplement un processus de Galton-Watson à plusieurs types.

La définition formelle des M-systèmes généraux est assez compliquée et n'a pas sa place dans une introduction. En revanche les exemples suivants, dont le premier est à l'origine de la considération de ces processus, donnent une idée correcte des processus considérés.

On part d'un triangle équilatéral T_o dont l'un des côtés est noir, les autres blancs. On peint en noir au hasard et indépendamment une moitié de chaque côté blanc de T_o (les deux moitiés d'un même segment sont équiprobables). On partage T_o en quatre triangle égaux, homothétique de T_o dans le rapport $\frac{1}{2}$, génériquement notés T_1. Si un triangle T_1 a deux côtés noirs, on peint également en noir son troisième côté, et l'on fait cette opération tant qu'elle est possible. En suite on supprime les triangle T_1 dont la frontière est totalement noire. Le triangle T_o a donc donné naissance à 1 ou 3 triangles T_1. On remplace T_o par le ou les trois triangles T_1 et l'on répète l'opération précédente indéfiniment. A part cela, tous les choix sont indépendants et faits selon la même loi.

On obtient ainsi une suite de triangles ayant deux côtés blancs : après la $n^{ième}$ étape, on a une suite de N_n triangles semblables à T_o dans le rapport 2^{-n}, telle que deux triangles consécutifs partagent un côté blanc.

A la $n^{ième}$ étape on obtient donc N_n triangles qui pavent une allée. On peut coder la situation par un mot décrivant la succession des virages à gauche et à droite que l'on est amené à faire en suivant cette allée (voir la figure 1). Il s'agit là d'un processus de naissance : on passe du $n^{ième}$ mot au suivant en remplaçant aléatoirement chacune de ses lettres par un mot de une ou trois lettres. Il est à remarquer que deux lettres consécutives ne sont pas substituées indépendamment.



étape 1 — d g g

étape 2 — Codage : g d d g d g g

étape 3 — Codage : ggddgdddggdggddgdggdg

Figure 1

Le deuxième exemple que nous donnons englobe le précédent. Il s'agit du cas où la population est arrangée linéairement (alors que, dans le cas général, la population est structurée en graphe).

Considérons un ensemble fini A que nous appellons alphabet et notons $A^\star$ l'ensemble des mots non vides. On se donne un système $(\Omega_W, p_W)_{W \in A^\star}$ d'espace probabilisés dénombrables, projectif dans le sens suivant : si W' est un sous-mot de W, on se donne aussi une application $r_{W',W}$ de Ω_W dans $\Omega_{W'}$, telle que l'image de p_W par $r_{W',W}$ soit $p_{W'}$. On suppose aussi que l'on a $r_{W'',W} \circ r_{W',W} = r_{W'',W}$ chaque fois que W'' est un sous-mot de W', lui-même sous-mot de W. Pour chaque lettre a, on se donne une application σ_a de Ω_a dans $A^\star$. Si $W = a_1 a_2 \ldots a_\nu$ est un mot, on définit g_W de Ω_W dans $A^\star$ ainsi : $g_W(\omega)$ est la concaténation des mots $\{g_{a_j} \circ r_{a_j,W}(\omega)\}_{1 \leqslant j \leqslant \nu}$. On définit alors une probabilité de transition Q : $Q(W,W') = p_W g_W^{-1}(W'))$. La chaîne de Markov stationnaire ayant Q pour probabilité de transition sera notée $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$. On suppose de plus, qu'il existe un entier ℓ, tel que, quel que soit le mot W, concaténation des mots $\{W_j\}_{1 \leqslant j \leqslant 2n-1}$ tel que la longueur de chacun des W_{2j} soit supérieure ou égale à ℓ, les variables $\{r_{W_{2j-1},W}\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ soient indépendantes.

Le premier exemple correspond à un alphabet de deux lettres, et à $\ell = 1$. Les résultats de J. Peyrière sont relatifs au cas où les variables aléatoires $|\sigma_a|$ = longueur de σ_a ont des moments d'ordre 2 finis. L'objet de cette étude est de relaxer cette hypothèse. Nous établissons une condition nécessaire et suffisance de croissance exponentielle de la population, un théorème de limite centrale et une loi du logarithme itéré les résultats sont analogues à ceux que l'on obtient pour des processus de Galton-Watson, mais les méthodes employées sont différentes.

En effet, la dépendance possible entre les descendances de voisins prohibe l'emploi dès l'emploi des fonctions génératrices, qui est un outil essentiel dans le cas classique.

Cette étude fait suite aux travaux de Mandelbrot [17,18], Peyrière [21-24] et Wen [28], en précise les résultats et résoud certains problèmes laissés en suspens.

Dans le chapitre 1, on définit les chaînes de Markov $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ que l'on considère. Comme nous l'avons dit, Z_n est un graphe coloré (l'ensemble, fini, des couleurs, c'est-à-dire des types, est noté A). La composition de la population est décrite par le vecteur $L(Z_n)$ de R^A dont la $a^{\text{ième}}$ composante est le nombre de sommets de Z_n dont la couleur est a. Il y a une matrice M à coefficients positifs ou nuls telle que l'on ait $E(L(Z_{n+1}) | Z_n) = ML(Z_n)$.

Dans le chapitre 2, on établit les premières propriétés de ces processus et l'on précise les hypothèses. On se place dans le cas où la matrice M est irréductible. On suppose que sa valeur propre de Perron-Frobenius ρ est strictement supérieure à 1 et l'on note ξ et $\xi^\star$ les vecteurs propres pour ρ de M et ${}^tM$ tels que la somme des composantes de ξ valent 1 ainsi que le produit scalaire $\langle \xi^\star, \xi \rangle$. On fait aussi l'hypothèse que l'interaction est de portée finie.

On fera, suivant les cas, l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

(L^p) Si l'on désigne par N_a le nombre d'individus auxquels a donne naissance, on a, $E(N_a^p) < \infty$.

$(L \log L)$: $E(N_a \log N_a) < \infty$ pour tout a.

Dans le chapitre 3, on étudie des conditions de non dégénérescence du processus. Les résultats principaux sont les suivants.

THEOREME. Si la matrice M est primitive, pour chaque $a \in A$, il existe une v.a.r. W telle que $\rho^{-n}L(Z_n)$ converge vers $W\xi$ P_a-presque sûrement. De plus, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $a \in A$, $E_a W = \xi_a^\star$;

ii) Pour tout $a \in A$, $P_a(W=0) = 0$;

iii) L'hypothèse $(L \log L)$ est satisfaite.

THEOREME. Sous l'hypothèse $(L \log L)$, on a :

i) Pour tout $a \in A$, $\rho^{-n}\langle \xi^\star, L(z_n)\rangle$ converge P_a-presque sûrement vers une v.a.r. W.

ii) Pour tout $a \in A$, $E_a W = \xi_a^\star$ et $P_a(W=0) = 0$,

iii) $\rho^{-n}\langle \xi^\star, L(z_n)\rangle$ converge vers W dans $L^1(P_a)$.

THEOREME. Si l'on désigne par $v_n(z)$ le nombre de fois que z figure comme sous-mot de z_n. Alors, si M est primitive et sous l'hypothèse $(L \log L)$, quel que soit $a \in A$, le quotient $v_n(z)/|z_n|$ tend P_a-presque sûrement vers une constante.

Dans le même chapitre, on montre que, dans le cas de la matrice M est simplement supposé irréductible, il existe une sous-suite de $\{z_n\}_{n \geq 0}$, pour laquelle la conclusion du premier théorème est valide.

Dans le chapitre 4, on établit une condition nécessaire et suffisante de finitude du moment d'ordre p $(1 < p \leq \infty)$ de W.

THEOREME. Pour tout $a \in A$, pour que $E_a(W^p)$ soit fini $(1 < p < \infty)$, il faut et il suffit que l'hypothèse (L^p) soit satisfaite.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des vitesses de convergence. On obtient des résultats analogues à ceux pour les processus de Galton-Watson à plusieurs types.

Dans le chapitre 6, on se restreint au cas où les z_n sont des mots construits sur l'alphabet. On démontre d'abord un théorème de limite centrale pour les suites doubles de variables aléatoires ℓ-dépendantes qui généralise un théorème de Diananda. Ensuite, on donne une nouvelle démonstration d'un théorème de limite centrale pour ces processus. En utilisant un théorème de Shergin, une loi de logarithme itéré est obtenue dans le chapitre 7.

THEOREME. Si M est irréductible et sous l'hypothèse (L^2), quel que soit $a \in A$, la loi de $|z_n|^{-1/2}(\langle\xi^\star, L(z_n) - \rho^n W\rangle)$ converge étroitement vers une loi de Gauss centrée.

THEOREME. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit $a \in A$, on a presque sûrement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\langle\xi^\star, L(z_n)\rangle - \rho^n W}{(2\sigma^2 |z_n| \log n)^{1/2}} = 1 \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\langle\xi^\star, L(2n)\rangle - \rho^n W}{(2\sigma^2 |z_n| \log n)^{1/2}} = -1,$$

où σ est une constante positive.

Dans le chapitre 8, on utilise un théorème de la section 5, pour montrer que les arbres généalogiques ont presque sûrement une propriété d'homogénéité qui est utile pour évaluer la dimension de Hausdorff de réalisations géométriques de ces processus.

1. LES SYSTEMES DE MANDELBROT

1.1. Graphes étiquetés

Nous appellerons graphe étiqueté un triplet $Z = (V,w,E)$ où V est un ensemble fini, w une application de V dans $\mathbb{N}^\star$ et E une partie de l'ensemble $\{(a,m,b,n) \in V \times \mathbb{N} \times V \times \mathbb{N} \ ; \ 1 \leqslant m \leqslant w(a) \ \text{et} \ 1 \leqslant n \leqslant w(b)\}$ de telle sorte que l'on ait

(i) $(a,m,b,n) \in E \Rightarrow a \neq b$

(ii) pour chaque couple (a,m) dans $V \times \mathbb{N}$ l'ensemble $\{(b,n) \in V \times \mathbb{N} \ ; \ (a,m,b,n) \in E \ \text{ou} \ (b,n,a,m) \in E\}$ a un élément au plus V, parfois noté V_Z, est l'ensemble des sommets de Z, E l'ensemble de ses arêtes.

Il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

$\tilde{V} = \{(a,m) \in V \times \mathbb{N} \ ; \ 1 \leqslant m \leqslant W(a)\}$

$W(Z) = \{\alpha \in \tilde{V} \ ; \ (\forall \beta \in \tilde{V})((\alpha,\beta) \notin E \ \text{ et } \ (\beta,\alpha) \notin E)\}$,

$w(Z) = \text{card}\, W(Z)$

$\chi(a) = \text{card}\{(m,b,n) \in \mathbb{N} \times V \times \mathbb{N} \ ; \ (a,m,b,n) \in E \ \text{ ou } \ (b,n,a,m) \in E\}$.

La figure 1 illuste ces définitions et notations.

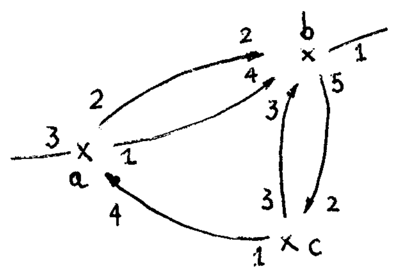


Figure 1. (Graphes étiquetés)

$$V = \{a,b,c\}$$

$$w(a) = 4 \ , \ w(b) = 5 \ , \ w(c) = 3$$

$$E = \{(a,1,b.4), \ (a,2,b,2), \ (c,1,a.4),(c,3,b,3)\}$$

$$W(Z) = \{(a,3),(b,1)\}$$

$$\chi(a) = 3 \ , \ \chi(b) = 4 \ , \ \chi(c) = 3.$$

Soit Z un graphe étiqueté et V' une partie de V. On désigne par $\tilde{V}'$ l'ensemble $\{(a,m)\in V'\times\mathbb{N}\ ;\ 1\leq m\leq w(a)\}$. Soit w' la restriction de w à V' et E' l'ensemble $E\cap(\tilde{V}'\times\tilde{V}')$. Le graphe étiqueté (V',w',E') est par définition le sous-graphe étiqueté de Z dont l'ensemble des sommets est V'.

Un graphe non orienté $Z^\star$ est associé au graphe étiqueté $Z=(V,w,E)$: l'ensemble des sommets de $Z^\star$ est V, celui de ses arêtes est

$$E^\star = \{(a,b)\in V\times V\ ;\ (\exists(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})((a,m,b,n)\in E \text{ ou } (b,n,a,m)\in E)\}.$$

Les composantes connexes d'un graphe étiqueté Z sont les sous graphes étiquetés correspondant aux composantes connexes de $Z^\star$.

La distance le long de Z, $d_Z(a,b)$, de deux sommets a et b de Z est la distance géodésique de a à b considérés comme sommets du graphe $Z^\star$.

La boule de centre a, de rayon k, dans Z est le sous-graphe étiqueté de Z dont les sommets sont les sommets de Z situés à une distance de a inférieure à k ; elle est notée $B_Z(a,k)$.

1.2. Accrochage de graphes étiquetés

Soit Z' un graphe étiqueté, $\{Z_j\}_{j\in V_{Z'}}$ une famille finie de graphes étiquetés indexée par $V_{Z'}$ et φ une injection d'une partie D_φ de $\tilde{V}_{Z'}$ dans la réunion disjointe de la famille $\{W(Z_j)\}_{j\in V_{Z'}}$ telle que $\varphi(j,m)$ soit dans $W(Z_j)$ si (j,m) est dans D_φ.

Le graphe étiqueté Z'' dont la définition suit sera appelé résultat de l'accrochage des graphes étiquetés $\{Z_j\}_{j\in V_{Z'}}$ suivant le couple (Z',φ) : $V_{Z''}$ est la réunion disjointe de la famille $\{V_j\}$, $w_{Z''}$ est la fonction qui prolonge chaque w_j, et

$$E_{Z''} = (\bigcup_{a\in V'} E_a)\cup\{(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))\ ;\ (\alpha,\beta)\in E'\cap(D_\varphi\times D_\varphi)\}$$

1.3. Ions

Soit A un ensemble fini dont nous appellerons les éléments couleurs et w une application de A dans $\mathbb{N}^\star$.

Considérons les couples (Z,λ) où Z est un graphe étiqueté et λ une application de V_Z dans A telle que l'on ait $w_Z = w \circ \lambda$ (une telle application sera appellée coloration de Z). Deux tels couples (Z,λ) et (Z',λ') sont équivalents s'il existe une bijection u de V_Z sur $V_{Z'}$ telle que l'on ait $\lambda' \circ u = \lambda$, $w_{Z'} \circ u = w_Z$ et telle que (a,m,b,n) appartienne à E_Z si et seulement si $(u(a),m,u(b),n)$ appartient à $E_{Z'}$. On appellera A-ions les classes d'équivalences.

Si la construction d'accrochage est effectuée sur des ions le résultat est naturellement muni d'une coloration (celle qui étend chacune des colorations des Z_j). On parlera donc d'accrochage d'ions selon un graphe étiqueté.

Si $\alpha = (a,m,b,n)$ est dans E, nous poserons $\lambda(\alpha) = (\lambda(a),m,\lambda(b),n)$.

1.4. M-systèmes probabilisés

A et w ont la même signification qu'en 1.3. Soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'ions tel que si un ion est dans $\mathcal{G}$, ses sous-ions connexes y sont aussi. On suppose que, pour chaque Z dans $\mathcal{G}$, on s'est donné un espace probabilisé dénombrable $(\Omega_Z,\mathfrak{p}_Z)$ et, pour chaque sous-ion connexe Z' de Z , une application de Ω_Z dans $\Omega_{Z'}$ telle que $\mathfrak{p}_{Z'}$ soit la mesure image de $\mathfrak{p}_Z$ par $r_{Z',Z}$. On suppose de plus que l'on a $r_{Z'',Z} = r_{Z'',Z} \circ r_{Z',Z}$.

Si Z est un ion et a un de ses sommets on écrira $r_{a,Z}$ au lieu de $r_{Z',Z}$ pour désigner l'application associée au sous-ion Z' de Z dont le seul sommet est a.

On se donne, pour chaque a dans A, une application g_a de Ω_a dans l'ensemble des A-ions, et pour chaque ω dans Ω_a, une injection $\psi_a(\omega)$ d'une partie de $W(g_a(\omega))$ dans l'ensemble $\{1,2,\dots,w(a)\}$.

Une application g_Z de Ω_Z dans l'ensemble des A-ions est définie de la façon suivante : si ω est dans Ω_Z on définit une application φ d'une partie de $\tilde{V}$ dans la réunion disjointe des ensembles $W(g_{\lambda(a)}(r_{a,Z}(\omega)))$, $a \in V$: $\varphi(a,m)$ appartient à $W(g_{\lambda(a)}(r_{a,Z}(\omega)))$ et si m est dans l'image de ψ_a, $\varphi(a,m) = \psi_a^{-1}(m)$; on note alors $g_Z(\omega)$ le résultat de l'accrochage suivant (Z,φ) des ions $\{g_{\lambda(a)}(r_{a,Z}(\omega))\}_{a\in V_Z}$. On suppose de plus que g_Z prend ses valeurs dans $\mathcal{G}$.

On dit alors que l'on a défini un M-système. On définit alors une probabilité de transition Q sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$: $Q(Z,.)$ est l'image de $\mathcal{P}_Z$ par g_Z.

$\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ désigne la chaîne de Markov canonique et stationnaire associée à Q. Comme d'habitude P_{Z_o} désigne la probabilité sur les trajectoires partant de Z_o et E_{Z_o} l'espérance correspondante.

1.5. Générateurs d'arbres

Nous appellerons ion arborescent un ion Z tel que $(a,m,b,n)\in E_Z$ implique $n=1$. Alors chaque composante connexe de Z est un arbre muni d'une racine. Dans le cas où l'on a un M-système tel que $\mathcal{G}$ soit contenu dans l'ensemble des ions arborescents, on dit que l'on a un générateur d'arbres.

1.6. Générateurs de mots

Un cas encore plus particulier est celui d'un générateur d'arbres tel que, pour tout $a\in A$, on ait $w(a)=2$. Les notations se simplifient alors considérablement.

A est un ensemble fini dont les éléments seront appelés lettres. On se donne un ensemble $\mathcal{G}$ de mots construits avec l'alphabet A. On suppose que tout sous-mot d'un élément de $\mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{G}$. On se donne un système d'espaces probabilisés dénombrable $(\Omega_Z, p_Z)_{Z \in \mathcal{G}}$, projectif au sens où on l'a défini en 1.4. On se donne aussi, pour chaque $a \in A$, une application g_a de Ω_a dans $\mathcal{G}$.

Si $Z = a_1 a_2 \ldots a_\nu$ est un élément de $\mathcal{G}$ et si $\omega \in \Omega_Z$, $g_Z(\omega)$ est le mot obtenu en mettant bout à bout, dans l'ordre où ils se présentent, les mots $g_{a_1}(r_{a_1,Z}(\omega)), \ldots g_{a_\nu}(r_{a_\nu,Z}(\omega))$.

Des exemples de tels systèmes sont donnés dans [18] et [23].

2. HYPOTHESE ET NOTATIONS

On suppose désormais que A est un ensemble fini.

Si Z est un A-ion on désigne par $L(Z)$ l'élément de $\mathbb{R}^A$ dont la composante $L_a(Z)$ associée à a est le nombre de sommets de Z dont la couleur est a ; le nombre de sommets de Z sera noté $|Z|$.

On désigne par M la matrice indexée par $A\times A$, dont la colonne associée à a est $E_{p_a}(\mathrm{Log}_a)$.

En ce qui concerne les matrices à coefficients positifs nous adoptons la terminologie de [26].

On note $\lambda_M = \sup\limits_{a\in A} w_a$.

Suivant les cas, nous ferons sur M l'un ou l'autre des hypothèses suivantes.

(MI) La matrice M est irréductible (c'est-à-dire, pour chaque paire (i,j), il existe un nombre entier $k = k(i,j)$, tel que $M^{k(i,j)})_{i,j} > 0)$. On suppose aussi que sa valeur propre de Perron-Frobenius ρ est strictement supérieure à 1.

Dans ces conditions, les espaces propres de M et de sa transposée associés à ρ sont unidimensionnels. Soit ξ et $\xi^\star$ les vecteurs propres de M et ${}^tM$ associés à ρ tels que l'on ait $\langle \xi^\star,\xi\rangle = 1$ et $|\xi| = 1$ (où $\langle,\rangle$ désigne l'accouplement entre $\mathbb{R}^A$ et son dual et $|\ |$ désigne la somme des composantes d'un vecteur). Les composantes de ξ et $\xi^\star$ sur les bases canoniques sont strictement positives. En outre, $\rho^{-n}M^n$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

(MP) La matrice M est primitive (c'est-à-dire, pour un k convenable, aucun coefficient de M^k n'est nul) et ρ est strictement supérieur à 1. On a alors

$$\rho^{-n}M^n - \xi \otimes \xi^\star = O(\alpha^n),\ n \to \infty \qquad (2.1)$$

où α est un nombre positif tel que $0\leqslant\alpha<1$.

Nous faisons en outre éventuellement une ou plusieurs des hypothèses suivantes :

(D) Il existe un entier ℓ tel que, pour toute famille $Z^{(1)}, \dots, Z^{(\nu)}$ de sous-ions connexes de Z, dont les distances mutuelles le long de Z sont strictement supérieures à ℓ, les variables $r_{Z^{(1)},Z}, \dots, r_{Z^{(\nu)},Z}$ sont indépendantes. En particulier, si a_1 et a_2 sont deux sommets d'un ion Z, dont la distance le long de Z est strictement supérieure à ℓ, les variables $r_{a_1,Z}$ et $r_{a_2,Z}$ sont indépendantes.

(L^p) Pour tout $a \in A$, $E_{p_a}(|g_a|^p) < \infty$, $1 < p < \infty$

($L(\log L)^\alpha$) Pour tout $a \in A$, $E_{p_a}[\,|g_a|(\mathrm{Log}|g_a|^\alpha)] < \infty$, $\alpha > 0$.

Pour tout $Z \in \mathcal{Y}$, nous avons

$$E_{p_Z}(\mathrm{Log}_Z) = ML(Z) ,$$

donc, si $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ désigne la chaîne de Markov d'ions associée au M-système, nous avons

$$E_{Z_0}(L(Z_{n+1})|Z_n) = ML(Z_n) \qquad (2.2)$$

Il en résulte que l'on a

$$E_{Z_0}(|Z_n|) = O(\rho^n) , \quad n \to \infty \qquad (2,3)$$

où $|Z_n|$ désigne le nombre des sommets de l'ion Z_n.

On dit que la suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ de variables aléatoires est ℓ-dépendante si, quels que soient les entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tels que $n_{j+1} - n_j > \ell$, les variables $\{X_{n_j}\}_{1 \leq j \leq k}$ sont indépendantes.

Nous utiliserons les deux théorèmes suivants démontrés dans [23].

Théorème 2.1. — Sous les hypothèses (MI) et (D), pour chaque $Z_0 \in \mathcal{Y}$, $|Z_n|$ tend P_{Z_0}-presque sûrement vers l'infini.

Théorème 2.2. — Sous les hypothèses (MI) et (D) pour chaque $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n}\langle \xi^\star, L(Z_n)\rangle$ est une martingale positive et il tend P_{Z_o}-presque sûrement une variable aléatoire réelle W. De plus,

$$p_{Z_o}\left(\sup_n \frac{|Z_n|}{\rho^n} < \infty\right) = 1 \qquad (2.4)$$

Dans [23] il est montré que, sous l'hypothèse (L^2) d'existence des moments d'ordre 2, la population explose exponentiellement. Nous montrons ici que l'hypothèse (L Log L) est nécessaire et suffisante pour obtenir la croissance exponentielle de la population. Il s'agit de l'analogue du résultat de Kestin et Stigum [15] sur les processus de Galton-Watson. Ceci permet d'améliorer les résultats de [23] sur la fréquence d'apparition des motifs. On discute aussi du cas où la matrice est irréductible sans être primitive.

3. CONDITION DE NON DEGENERESCENCE

Sous l'hypothèse d'existence des moments d'ordre 2 des applications de génération, Peyrière [23] a démontré l'explosion exponentielle de la population. Nous démontrons ici que, comme pour les processus de Galton-Watson [5], il en est de même sous l'hypothèse (L log L). En effet, on a prouvé que le condition logarithmique est nécessaire et suffisante pour l'explosion exponentielle de la population (c'est l'analogue du théorème de Kestin et Stigum [15]). En utilisant ce théorème, on peut améliorer des résultats de [23], par exemples, la fréquence d'occurence d'un arbre coloré donné comme sous-arbre de la population à l'instant n (théorème 5.1 de [23]). De plus, on obtient quelques résultats quand la matrice M est irréductible et une généralisation du théorème 3.1 dans certains cas.

3.1. Résultat principal

Théorème 3.1 — Sous les hypothèses (MP) et (D), pour chaque $Z_o \in \mathcal{C}$, il existe une v.a.r. W telle que $\rho^{-n} L(Z_n)$ converge vers $W\xi$ P_{Z_o}-presque sûrement. De plus, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $a \in A$, $E_a W = \xi_a^\star$;

(ii) Pour tout $a \in A$, $P_a(W = 0) = 0$;

(iii) L'hypothèse (L log L) est satisfaite.

Remarque 3.1. — Si la limite du théorème 3.1. existe, on peut vérifier facilement qu'elle coïncide avec la limite du théorème 2.2.

L'idée principale de la démonstration du théorème 3.1. est la suivante : en tronquant successivement les applications de génération du processus, on construit un processus auxiliaire $\{\tilde{Z}_n\}_{n\geq 0}$ qui coïncidera essentiellement avec le processus de départ $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, et puis, par les estimations des moments d'ordre 2 et en utilisant les théorèmes de convergence de martingales, on achève la démonstration.

3.2. Troncation des applications de génération

Considérons un élément a de l'ensemble A des couleurs. Etant donné un ion $g_a(\omega)$ et un entier n, on définit un nouvel ion $\tilde{g}_{n,a}(\omega)$ de la façon suivante

$$\widetilde{g_{n.a}}(\omega) = \begin{cases} g_a(\omega) & , \text{ si } |g_a(\omega)| \leqslant \rho^n \\ \varepsilon & , \text{ sinon} \end{cases}$$

où ε désigne le graphe étiqueté dont l'ensemble de sommet V_ε est vide.

Soient Z un ion et $g_Z(\omega)$ le résultat de l'accrochage de la famille $\{g_{\lambda(a)}(r_{a,Z}(\omega))\}_{a\in V_Z}$ suivant (Z,φ). Considérons ensuite les sous-ions de $g_Z(\omega)$ engendrés par des sommets de Z ; étant donné un tel sous-ion, si son nombre de sommets est inférieur ou égal à ρ^n, on le garde dans $g_Z(\omega)$, sinon, on l'efface. On obtient ainsi un nouveau graphe étiqueté coloré que l'on note $\widetilde{g_{n,Z}}$.

On désigne par M(n) la matrice dont la colonne correspondant à $a\in A$ est $E_{p_a}(L\circ\widetilde{g_{n,a}})$ et on pose $\widetilde{Z_{n+1}} = \widetilde{g_{n,Z_n}}$.

On vérifie sans peine qu'on a

$$E_{p_Z}(L\circ\widetilde{g_{n,Z}}) = M(n)\,L(Z)$$

d'où

$$E_{Z_o}(L\circ\widetilde{Z_{n+1}}|Z_n) = M(n)\,L(Z_n) \tag{3.1}$$

3.3. Démonstration du théorème 3.1.

Lemme 3.1. —

(i) Sous l'hypothèse (L^1), pour tout $a\in A$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n E_{p_a} 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} < \infty$, (3.2)

(ii) Sous l'hypothèse (L^1), pour tout $a\in A$, $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} E_{p_a}(|g_a|^2 1_{\{|g_a|\leqslant\rho^n\}}) < \infty$ (3.3)

(iii) Sous l'hypothèse (L log L) pour tout $a \in A$, $\sum_{n=1}^{\infty} E_{\mathcal{P}_a} |g_a| 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} < \infty$ (3.4)

Démonstration. — (i) Pour $|g_a(\omega)|$ fixé, il existe un entier positif $k(\omega)$, tel que $\rho^k \leqslant |g_a(\omega)| < \rho^{k+1}$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} = \sum_{n=1}^{k} \rho^n = \frac{\rho^{k+1}-1}{\rho-1} \leqslant \frac{\rho|g_a(\omega)|}{\rho-1} = 0(|g_a(\omega)|) ,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n E_{\mathcal{P}_a} 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} = E_{\mathcal{P}_a} (\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n 1_{\{|g_a(\omega)|>\rho^n\}}) = 0(E_{\mathcal{P}_a} |g_a|) < \infty$$

(ii) comme dans (i),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} 1_{\{|g_a| \leqslant \rho^n\}} = \sum_{k+1}^{\infty} \rho^{-n} = 0(\frac{1}{\rho^{n+1}}) = 0 \frac{1}{|g_a(\omega)|} .$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} E_{\mathcal{P}_a} (|g_a|^2 1_{\{|g_a| \leqslant \rho^n\}}) = E_{\mathcal{P}_a} |g_a|^2 (\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} 1_{\{|g_a| \leqslant \rho^n\}}) = 0(E_{P_a} |g_a|)$$

(iii) Comme en (i), si l'on fixe ω, on peut trouver un entier positif $k(\omega)$, tel que $k(\omega) \leqslant \log|g_a(\omega)|/_{\log \rho} < k(\omega)+1$; alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} = k(\omega) = 0(\log|g_a(\omega)|) ,$$

d'où

$$\sum_{n=o}^{\infty} E_{\mathcal{P}_a} |g_a| 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} = E_{\mathcal{P}_a} |g_a| \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{|g_a|>\rho^n\}} = 0(E_{\mathcal{P}_a} (|g_a| \log|g_a|)).$$

Lemme 3.2. — Sous les hypothèse (MP), (D) et (L log L), on a, pour chaque $Z_o \in \mathcal{Y}$,

(i) $\sum_{n=o}^{\infty} P_{Z_o} (L(\widetilde{Z_{n+1}}) \neq L(Z_{n+1})) < \infty$;

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}(L(\widetilde{Z_{n+1}}) - ML(Z_n))$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Démonstration. — (i) Soit $Z\in\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$ un ion, alors

$$L(g_Z) = \sum_{x\in V_Z} L(g_x \circ r_{x,Z}) \ , \ L(\widetilde{g_{n,Z}}) = \sum_{x\in V_Z} L(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z})$$

Posons

$$\Delta_{n,Z} = \bigcup_{x\in V_Z} \{\omega \ ; \ |g_x \circ r_{x,Z}| > \rho^n\}$$

alors évidemment

$$\{L(g_Z) \neq L(\widetilde{g_{n,Z}})\} \subset \Delta_{n,Z} \ .$$

On en déduit

$$p_Z(L(g_Z) \neq L(\widetilde{g_{n,Z}})) \leqslant p_Z(\Delta_{n,Z}) \leqslant \sum_{x\in V_Z} p_Z \{|g_x \circ r_{x,Z}| > \rho^n\}$$

$$= \sum_{x\in V_Z} p_x \{|g_x| > \rho^n\} \leqslant |Z| \sum_{a\in A} p_a\{|g_a|>\rho^n\} \ . \tag{3.5}$$

compte tenu de (2.3), (3.2) et (3.5),

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_{Z_o}(L(\widetilde{Z_{n+1}}) \neq L(Z_{n+1})) = \sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o}(P_{Z_o}(1_{\{L(\widetilde{Z_{n+1}})\neq L(Z_{n+1})\}}|Z_n))$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} 0(E_{Z_o}|Z_n| \sum_{a\in A} p_a\{|g_a|>\rho^n\}) = 0\left\{\sum_{a\in A}\left(\sum_{n=o}^{\infty} \rho^n \ E_{p_a} \ 1_{\{|g_a|>\rho^n\}}\right)\right\} < \infty$$

ce qui démontre l'assertion (i) du lemme 3.2.

(ii) Considérons les deux séries suivantes

$$\sum_{n=o}^{\infty} (L(\widetilde{Z_{n+1}}) - M(n) \ L(Z_n))/\rho^{n+1} \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} (M(n) \ L(Z_n) - ML(Z_n))/_{\rho^{n+1}} \tag{3.7}$$

Evidemment, la convergence des séries précédentes entraînera la seconde assertion du lemme 3.2. D'autre part, par (3.1), la suite $\{L(\widetilde{Z_{n+1}}) - M(n) \ L(Z_n)\}_{n\geqslant 0}$ est centrée. Donc, la convergence de la série $\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o} (\rho^{-(n+1)}(L_a(\widetilde{Z_{n+1}}) - L_a(M(n) \ L(Z_n))))^2$, pour tout $a\in A$, donnera celle de la série (3.6) d'après la proposition IV-6-1 de [20].

Si Z est un ion appartenant à $\mathcal{G}$, alors on a

$$E_{p_Z}(L_a(\widetilde{g_{n,Z}}))^2 = E_{p_Z}(\sum_{x\in V_Z} L_a(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z}))^2 .$$

Posons

$$\Lambda_{Z.d} = \{(x,y),(x,y)\in V_Z\times V_Z \ , \ d(x,y)\leqslant \ell\} \quad ,$$

$$\Lambda_{Z.i} = \{(x,y),(x,y)\in V_Z\times V_Z \ , \ d(x,y)> \ell\} \quad ,$$

$$A_{n,x,a} = E_{p_x} L_a(\widetilde{g_{n,x}}) \ , \ B_{n,x,a} = E_{p_x}(L_a(\widetilde{g_{n,x}}))^2 \quad ,$$

$$\sum_{\Lambda_{Z,d}} = \sum_{(x,y)\in\Lambda_{Z,d}} \quad , \qquad \sum_{\Lambda_{Z,i}} = \sum_{(x,y)\in\Lambda_{Z,i}}$$

On a alors

$$E_{p_Z}(L_a(\widetilde{g_{n,Z}}))^2 = E_{p_Z}\Big(\sum_{\Lambda_{Z,d}} + \sum_{\Lambda_{Z,i}}\Big) L_a(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z}).L_a(\widetilde{g_{n,y}} \circ r_{y,Z})$$

Si $(x,y)\in\Lambda_{Z,d}$

$$2E_{p_Z} L_a(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z}).L_a(\widetilde{g_{n,y}} \circ r_{y,Z})\leqslant B_{n,x,a} + B_{n,y,a}$$

Dans ce qui suit $B_Z(a,\ell)$ et λ_M ont la même signification qu'au paragraphe 2.

Remarquons que

$$\text{card } V_{B_Z(a,\ell)}\leqslant 1 + \lambda_M+\ldots+\lambda_M^{\ell} = \frac{\lambda_M^{\ell+1}-1}{\lambda_M-1} \quad ,$$

Le nombre de droite est une constante qui ne dépend que du M-système donc, on en déduit card $\Lambda_{Z,d} = O(|Z|)$, et on obtient

$$E_{p_Z}\Big(\sum_{\Lambda_{Z,d}}\Big) = O(|Z| \sum_{b\in A} B_{n,b,a}).$$

Pour $(x,y)\in\Lambda_{Z,i}$, $r_{x,Z}$ et $r_{y,Z}$ sont indépendantes d'après l'hypothèse (D), donc

$$E_{p_Z} L_a(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z}).L_a(\widetilde{g_{x,y}} \circ r_{y,Z}) = A_{n,x,a}.A_{n,y,a} \quad .$$

D'autre part

$$(E_{p_Z} L_a(\widetilde{g_{n,Z}}))^2 = (\sum_{x\in V_Z} E_{p_Z} L_a(\widetilde{g_{n,x}} \circ r_{x,Z}))^2$$

$$= \sum_{\Lambda_{Z,d}} A_{n,x,a} A_{n,y,a} + \sum_{\Lambda_{Z,i}} A_{n,x,a} A_{n,y,a}$$

il en résulte que

$$E_{p_Z}(\widetilde{g_{n,Z}})^2 - (E_{p_Z}(\widetilde{g_{n,Z}}))^2 = O(|Z| \sum_{b\in A} B_{n,b,a}) \qquad (3.8)$$

Par un calcul simple, on obtient

$$E_{Z_o}(L_a(\widetilde{Z_{n+1}})-L_a(M(n)L(Z_n)))^2 = E_{Z_o}(E_{Z_o}(L_a(\widetilde{Z_{n+1}}))^2|Z_n)-E_{Z_o}(E_{Z_o}L_a(\widetilde{Z_{n+1}})|Z_n)^2)$$

En utilisant (2.3), (3.3) et (3.8), on obtient

$$\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o} \rho^{-2(n+1)}(L_a(\widetilde{Z_{n+1}})-L_a(M(n)L(Z_n)))^2$$

$$= O(\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-2(n+1)} E_{Z_o}(|Z_n| \sum_{b\in A} B_{n,b,a})$$

$$= O(\sum_{a\in A} \sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-n} E_{p_a} |g_a|^2 1_{\{|g_a|\leqslant \rho^n\}}) < \infty .$$

Ceci démontre la convergence de la série (3.6). Montrons maintenant que la série (3.7) converge. En utilisant le théorème 2.2 l'hypothèse (L(log L)) et le lemme 3.1 (iii), on a en effet P_{Z_o}-presque sûrement

$$\sum_{n=o}^{\infty} \|\rho^{-(n+1)}(M(n)L(Z_n)-ML(Z_n))\| = \sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}|Z_n|\|M(n)-M\|$$

$$= O(\sum_{n=o}^{\infty} \|M(n)-M\|) = O(\sum_{a\in A}(\sum_{n=o}^{\infty} E_{p_a}|g_a|1_{\{|g_a|>\rho^n\}}))$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{p_a} |g_a|\log|g_a|) < \infty ,$$

où $\| \ \|$ désigne une norme sur les matrices.

Par le lemme 3.2.(i), on a $L(\widetilde{Z_{n+1}}) = L(Z_{n+1})$ à partir d'un certain rang, et par le lemme 3.2.(ii), la série $\sum_{n=o}^{\infty} (L(Z_{n+1})-ML(Z_n))/\rho^{n+1}$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Maintenant, nous allons démontrer le théorème 3.1. Nous partageons la démonstration en quatre étapes et nous faisons les hypothèses (MP) et (D) pendant la démonstration.

1ère étape. — L'hypothèse (L log L) entraîne qu'il existe une v.a.r. W, telle que pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n}L(Z_n)$ tend vers $W\xi$ P_{Z_o}-presque sûrement.

Remarquons que pour $n_1 > n_o$.

$$L(Z_{n_1+1})/\rho^{n_1+1} - (M^{n_1-n_o+1}/\rho^{n_1-n_o+1})(L(Z_{n_o})/\rho^{n_o})$$

$$= \sum_{n=n_o}^{n_1} (M^{n_1-n}/\rho^{n_1-n})((L(Z_{n+1}) - ML(Z_n))/\rho^{n+1})$$

$$= \sum_{n=n_o}^{n_1} \xi\xi^\star((L(Z_{n+1}) - ML(Z_n))/\rho^{n+1}) + A$$

avec

$$\|A\| \leqslant \sup_{n \geqslant n_o} |L(Z_{n+1}) - ML(Z_n)|/\rho^{n+1} \left(\sum_{n=n_o}^{n_1} |\alpha|^{n_1-n} \right), |\alpha|<1, \quad (3.9)$$

la dernière égalité est due à (2.1), à cause du lemme 3.2 et de $\sum_{n=n_o}^{n_1} |\alpha|^{n_1-n} = O(1)$, le deuxième terme du second membre de (3.1) tend vers zéro quand n_o tend vers l'infini. Par conséquent

$$\lim_{n_o \to \infty, n_1 \geqslant n_o} \sup |L(Z_{n_1+1})/\rho^{n_1+1} - (M^{n_1-n_o+1}/\rho^{n_1-n_o+1})(L(Z_{n_o})/\rho^{n_o})| = 0$$

P_{Z_o}-presque sûrement.

compte tenu de (2.1) encore, on trouve que P_{Z_o}-presque sûrement

$$\lim_{n_o \to \infty, n_1 - n_o \to \infty} L(Z_{n_1+1})/\rho^{n_1+1} - \xi \otimes \xi^\star(L(Z_{n_o})/\rho^{n_o}) = 0 \qquad (3.10)$$

D'après (3.10), $\rho^{-n} L(Z_n)$ converge une limite qu'on note w, donc, nous avons $w = \xi \otimes \xi^\star w$ par (3.10). Remarquons que le rang de la matrice $\xi \otimes \xi^\star$ est 1, donc, il existe une v.a.r. W tel que $w = W\xi$ P_{Z_o}-presque sûrement.

2ème étape. — Si l'hypothèse (L log L) n'est pas satisfaite, alors $\rho^{-n} L(Z_n)$ tend vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement.

Remarquons d'abord les faits suivants : $\rho^{-n} \langle \xi^{\star}, L(Z_n)\rangle$ tend vers une limite finie P_{Z_o}-presque sûrement, donc, si $\rho^{-n}\langle \xi^{\star}, L(Z_n)\rangle$ tend vers zéro en probabilité, il tend vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement aussi. Alors, puisque le vecteur $\xi^{\star}$ a toutes ses composantes strictement positives, $\rho^{-n} L(Z_n)$ tend vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement aussi ; donc, il suffit de démontrer que $\rho^{-n}\langle \xi^{\star}, L(Z_n)\rangle$ tend vers zéro en probabilité $\mathcal{P}_{Z_o}$.

Pour cela, opérant comme au paragraphe 3.2, on construit un autre processus auxiliaire $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ à partir du processus $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ de la façon suivante.

Soit $B>0$, que l'on déterminera plus tard, comme en 3.2, on définit l'application génératrice tronquée ainsi :

$$\widetilde{g_{n,a}}(\omega) = \begin{cases} g_a(\omega) & \text{si} \quad |g_a(\omega)| \leq B\rho^n \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \qquad a \in A ,$$

Soit $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov, non stationnaire, telle que $Y_o = Z_o$, définie comme $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ à ceci près que pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$ on utilise les applications $\{\widetilde{g}_{n,a}\}_{a\in A}$ au lieu des applications $\{g_a\}_{a\in A}$.

On vérifie que l'on a

$$E_{Z_o}(L \circ Y_{n+1} | Y_n) = M(n)L(Y_n) \tag{3.11}$$

Evidemment

$$\{\omega \ ; \ L(Z_{n+1}) \neq L(Y_{n+1}) \ \text{pour un} \ n\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \{\omega \ ; \ L(Z_n)=L(Y_n), L(Z_{n+1}) \neq L(Y_{n+1})\}.$$

Par des calculs similaires à ceux des lemmes 3.1 (i) et 3.2 (i), on obtient

$$P_{Z_o}\{L(Z_{n+1}) \neq L(Y_{n+1}) \ \text{pour un} \ n\} = O\Big(\sum_{a\in A} E_{\mathcal{P}_a} |g_a| 1_{\{|g_a|>B\}}\Big).$$

Puisque $E_{\mathcal{P}_a}|g_a| < \infty$, le second membres tend vers zéro quand B tend vers l'infini.

Donc, si $\rho^{-n}L(Y_n)$ tend vers zéro en probabilité, il en est de même de $\rho^{-n}L(Z_n)$ aussi pour un B assez grand. En effet, quels que soient ε, $\delta>0$, il existe N, tel que $P_{Z_0}(\rho^{-n}|Y_n|>\delta)<\varepsilon/_2$, $n>N$, alors

$$P_{Z_0}(|Z_n|/_{\rho^n}>\delta)\leq P_{Z_0}\{(|Z_n|=|Y_n|,\ \frac{|Y_n|}{\rho^n}>\delta)\cup(|Z_n|\neq|Y_n|,\ \frac{|Y_n|}{\rho^n}>\delta)\}$$

$$\leq P_{Z_0}\{\frac{|Y_n|}{\rho^n}>\delta\}+P_{Z_0}\{|Z_n|\neq|Y_n|\}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

pour $n>N$ et B convenable. Donc, pour démontrer l'étape 2, il suffit de démontrer que $\rho^{-n}L(Y_n)$ tend vers zéro en probabilité. On va démontrer que $E_{Z_0}\ \rho^{-n}L(Y_n)$ tend vers zéro.

Soit $\varepsilon(x)=M-M(n)$, évidemment, $0\leq\varepsilon(n)\leq M$, $\varepsilon(n)\to 0$, $n\to\infty$.
A cause de la primitivité de M, on peut supposer $M^k>0$, où $k>0$. Pour tout entier n, on a

$$\prod_{m=n}^{m=n+2k}(M-\varepsilon(m))\leq M^k(M-\varepsilon(n+k))M^k=M^{2k+1}-M^k\varepsilon(n+k)M^k\ .$$

(On dit qu'une matrice (a_{ij}) est supérieure à la matrice (b_{ij}), si pour tout i,j, $a_{ij}\geq b_{ij}$).

Posons $M^k=(a_{ij})$, $\varepsilon(n+k)=(b_{ij})$, $M^{2k+1}=(c_{ij})$,

$$\lambda=\inf_{1\leq i,j\leq n}a^2_{i,j}\ ,\qquad c=\lambda(\sup_{1\leq i,j\leq n}c_{ij})^{-1}$$

on obtient

$$M^k\varepsilon(n+k)M^k=(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{ip}\,b_{bq}\,a_{qj})\geq(\lambda\|\varepsilon(n+k)\|)$$

$$=\|\varepsilon(n+k)\|(\frac{\lambda}{c_{ij}}\,.c_{ij})\geq c\|\varepsilon(n+k)\|(c_{ij})=c\|\varepsilon(n+k)\|M^{2k+1}\ ,$$

d'où

$$\prod_{m=n}^{m=n+2k}(M-\varepsilon(m))\leq(1-c\|\varepsilon(n+k)\|)M^{2k+1}\leq\exp(-c\|\varepsilon(n+k)\|M^{2k+1}. \qquad (3.12)$$

Si l'hypothèse (L log L) n'est pas satisfaite, alors, il existe $a\in A$, tel que $E_{P_a}(|g_a|\log|g_a|)=\infty$. Parce que

$\|\varepsilon(n)\| \geq E_{\mathfrak{p}_a} |g_a| 1_{\{|g_a|>B\rho^n\}}$, il en résulte que, comme dans le lemme 3.1.,

$$\sum_{n=o}^{\infty} \|\varepsilon(n)\| \geq \sum_{n=o}^{\infty} E_{\mathfrak{p}_a}(|g_a| 1_{\{|g_a|>B\rho^n\}}) \geq cE_{\mathfrak{p}_a}(|g_a| \log |g_a| 1_{\{|g_a|>B\}}) = \infty,$$

où c est une constante a solue.

Puisque les $\|\varepsilon(n)\|$ sont positifs, il existe un entier N, $0 \leq N \leq 2k$, tel que

$$\sum_{s=o}^{\infty} \|\varepsilon(N+k+s(2k+1)\| = \infty \quad . \tag{3.13}$$

D'après (3.11), (3.12), pour tout n assez grand, on a

$$E_{Z_o} \frac{L(Y_n)}{\rho^n} = \frac{1}{\rho^n} M(n-1)\ldots M(0)L(Z_o) \leq \frac{1}{\rho^n} M(n-1)\ldots M(N+1)M(N).M^N L(Z_o)$$

$$\leq (\frac{M^n}{\rho^n})L(Z_o)\exp\{-c \sum_{s=o}^{[(n-N-2k-1)/2k+1]} \|\varepsilon(N+k+s(2k+1)\|\}$$

donc, par (2.1) et (3.13), $E_{Z_o} \rho^{-n} L(Y_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ce qui achève l'étape 2.

3ème étape. — L'hypothèse (L log L) implique $E_{p_a} W = \xi_a^\star$ pour tout $a \in A$.

Pour achever la 3ème étape, on introduit un incrément de martingale qui approche la martingale $\{W_n = \rho^{-n}\langle \xi^\star, L(Z_n)\rangle\}_{n\geq 0}$. Pour cela, on pose

$$\widetilde{W_n} = \rho^{-n} \langle \xi^\star, L(\widetilde{Z_n})\rangle \ , \ R_n = W_n - E_{Z_o}(\widetilde{W_{n+1}}|Z_n) \ .$$

Compte tenu de (2.2) et (3.1), on a

$$R_n = E_{Z_o}(W_{n+1}|Z_n) - E_{Z_o}(\widetilde{W_{n+1}}|Z_n) = \rho^{-(n+1)}\langle \xi^\star, (M-M(n))L(Z_n)\rangle ,$$

Il est facile de vérifier que la suite $\{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\}_{n\geq 0}$ est un incrément de martingale (ou bien une suite centrée).

De la même façon que pour la démonstration du lemme 3.2, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3. — Pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, sous l'hypothèse (L^1)

$$\sum_{n=o}^{\infty} \mathbb{P}_{Z_o}(W_{n+1} \neq \widetilde{W_{n+1}}) < \infty \tag{3.14}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o}(\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n)^2 < \infty \tag{3.15}$$

et sous l'hypothèse (L log L)

$$\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o} R_n < \infty \tag{3.16}$$

Le lemme suivant se déduit immédiatement de (3.14) et (3.15)

Lemme 3.4. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L^1), W_n et $\tilde{W}_n$ coïncident P_{Z_o}-presque sûrement à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\}$ et donc aussi la série $\sum_{n=o}^{\infty} \{W_{n+1} - W_n + R_n\}$ convergent P_{Z_o}-presque sûrement ; la série $\sum_{n=o}^{\infty} \{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\}$ converge dans $L^2(P_{Z_o})$ donc converge dans $L^1(P_{Z_o})$.

Maintenant, remarquons que, les R_n étant positifs, (3.16) implique que, pour tout $a \in A$, $\sum_{n=1}^{N} R_n$ converge dans $L^1(P_a)$, et que, en vertu du lemme 3.4 la série $\sum_{n=1}^{N} \{\widetilde{W_{n+1}} - W_n\}$ converge dans $L^1(P_a)$. Il s'en suit que

$$E_a\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \{\widetilde{W_{n+1}} - W_n\}\right) \to 0 \quad , \quad N \to \infty \tag{3.17}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} E_a W &= E_a\left(\sum_{n=o}^{\infty} \{W_{n+1} - W_n\}\right) + E_a W \\ &= \xi_a^\star + E_a\left(\sum_{n=o}^{N} (W_{n+1} - W_n)\right) + E_a\left(\sum_{N+1}^{\infty} (W_{n+1} - W_n)\right) \\ &\geq \xi_a^\star + E_a\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} (\widetilde{W_{n+1}} - W_n)\right) \end{aligned}$$

donc, $E_a W \geq \xi_a^\star$ par (3.17), mais, d'après le lemme de Fatou, $E_a W \leq \xi_a^\star$, on obtient ainsi $E_a W = \xi_a^\star$.

4ème étape. — $E_a W > 0$ pour tout $a \in A$ entraîne que $P_a(W = 0) = 0$ pour tout $a \in A$.

Comme dans [23], si $Z_o \in \mathcal{Y}$ on peut écrire

$$W = \sum_{x \in V_{Z_o}} W_x$$

où la distribution de W_x par rapport à P_{Z_0} est identique à celle de W par rapport à $P_{\lambda(x)}$. De plus, W_{x_1} et W_{x_2} sont indépendants si $d_{Z_0}(x_1,x_2) > \ell$.

De même, conditionnellement à Z_n, on a $\rho^n W = \sum_{x \in V_{Z_n}} W_x$, où la distribution de W_x est identique à celle de W par rapport à $P_{\lambda(x)}$.

On a vu précédemment que $\mathrm{card}(V_{B_{Z_n}(x,\ell)}) \leqslant \frac{\lambda^m - 1}{\lambda_m - 1} = \alpha_M$, donc il existe au moins $k_n = [\frac{|Z_n|}{\alpha_M}]$ boules $B_{Z_n}(x,\ell)$ dont les distances mutuelles des centres sont supérieures à ℓ. On note les centres de ces boules $x_1, x_2, \ldots, x_{k_n}$.

Posons $\Lambda_a = P_a(W=0)$, $\Lambda = \sup_{a \in A} \Lambda_a$. A cause de l'hypothèse, $\Lambda < 1$. On désigne par $1_{\{W=0, Z_0=a\}}$ la fonction indicatrice de $\{W=0\}$ partant de a, on remarque que $\{W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots W\}$ est une martingale. On déduit de ce qui précède les faits suivants.

$$1_{\{W=0,Z_0=a\}} = P_a(W=0 \mid \mathcal{F}_\infty) = \lim_{n\to\infty} P_a(W=0 \mid Z_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_a(\rho^n \sum_{x \in V_{Z_n}} W_x = 0 \mid Z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} P_a(W_{x_1} = 0, \ldots, W_{x_{k_n}} = 0 \mid Z_n)$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \Lambda^{k_n}.$$

Par le théorème 2.1, $|Z_n|$ tend vers l'infini P_{Z_0}-presque sûrement donc, $k_n(\omega)$ tend vers l'infini presque sûrement. Ce qui termine la démonstration du théorème 3.1.

La démonstration du théorème 3.1 donne en fait un peu plus, notamment les résultats suivants.

Théorème 3.1'. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L log L), (i) pour tout $Z_0 \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n} \langle \xi^\star, L(Z_n) \rangle$ converge P_{Z_0}-presque sûrement vers une v.a.r. W ; (ii) $E_a W = \xi^\star_a$ et $P_a(W=0) = 0$ pour tout $a \in A$;
(iii) $\rho^{-n} \langle \xi^\star, L(Z_n) \rangle$ converge vers W dans $L^1(P_{Z_0})$.

Corollaire 3.1. — Sous les hypothèses (MP), (D) et (L log L) pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n}\, L(Z_n)$ converge vers $W\xi$ dans $L^1(P_{Z_o})$.

Corollaire 3.2. — Sous les hypothèses (MP), (D) et (L log L) pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n}|Z_n|$ tend vers W et $L(Z_n)/|Z_n|$ tend vers ξ P_{Z_o}-presque sûrement.

Si l'on remplace la condition (L^2) par (L log L) dans la démonstration de la proposition de §.4.5 de [23] , et si on utilise le théorème 3.1, on obtient le résultat suivant qui précise l'assertion (ii) du théorème 3.1.

Théorème 3.2. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L log L), il existe un nombre α strictement positif tel que, pour tout $a \in A$, on ait $E_a(W^{-\alpha}) < \infty$.

3.4. Une remarque sur la matrice M,

On peut, comme dans [23], affaiblir les hypothèses sur la matrice M. On suppose qu'il existe une partition de A, $A = A_1 \cup A_2$, telle que A_1 soit non vide et telle que la forme correspondance de la matrice M soit $\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix}$, la matrice S (indéxée par $A_1 \times A_1$) étant primitive (ou irréductible) et sa valeur propre de Perron-Frobenius ρ étant strictement supérieure à 1 et au module de toute valeur propre de la matrice U. Dans ces conditions les espaces propres de M et de sa transposée associés à ρ sont unidimensionnels, les composantes de ξ et $\xi^\star$ sont positives, non nulles si elles correspondent à des éléments de A_1.

Sous cette hypothèse, les résultats précédents restent vrais.

3.5. Structure asymptotique des arbres générés.

On considère un M-système au sens du paragraphe 1.5. En utilisant le théorème 3.1 dans la démonstration du théorème de §.5.3 [23], on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.3. — On suppose que, pour tout Z dans $\mathcal{C}$ et pour tout ω dans Ω_Z, on a $w(g_Z(\omega)) = w(Z)$. On fait en outre les hypothèses (MP), (L log L) et (D). Alors, quel que soit $Z \in \mathcal{C}$, $\nu_n(Z)$ désignant le nombre de fois que Z figure comme sous-ion de Z_n, le quotient $\nu_n(Z)/|Z_n|$ tend P_{Z_0}-presque sûrement vers une constante pour tout $Z_0 \in \mathcal{C}$

Pour les paragraphes suivants, on considère un système au sens de 1.7., c'est-à-dire un M-système générateurs de mots.

3.6. Une amélioration du théorème 3.1.

On considère un M-système au sens du paragraphe 1.6.

On a vu que si la matrice M est irréductible mais non primitive, on n'obtient que la convergence de W_n. Mais, en utilisant la propriété de "périodicité" de la matrice irréductible, on peut trouver un sous-processus de $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ pour lequel le théorème 3.1. reste valable.

On suppose dans ce qui suit A étant l'ensemble de couleurs que M est irréductible. D'après les théorèmes 1.3 et 1.4 de [26] sur les matrices irréductibles, on a les faits suivants.

Il existe un entier positif $d \geq 1$ de façon qu'on puisse partager l'ensemble A en d parties disjointes, $A_1, A_2, \ldots, A_d$, telles que

1°), $m_{a,b} = 0$ si $a,b \notin A_i \times A_{i+1}$, $1 \leq i \leq d$,
(on convient que $A_{d+1} = A_1$).

2°), si $a \in A_i$, $(M^n)_{a,b} = 0$, sauf $b \in A_j$ avec $j-i \equiv n \pmod d$

et pour k suffisamment grand

$$(M^{kd+j-i})_{a,b} > 0 \quad \text{pour tout} \quad b \in A_j.$$

Dans ces conditions, M peut s'écrire d'une façon suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(2,3) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M(d-1,d) \\ M(d,1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.18)$$

où $M(i,i+1)$ désigne la matrice indexée par $A_i \times A_j$ dont la colonne associée à A_i est $E_{p_a}(L_j.g_a)$. ($L_j(Z)$ désigne le vecteur indexé par R^{A_j} dont la composante associée à $a \in A_j$ est le nombre de sommets de Z, dont la couleur est a).

Un calcul simple montre que

$$M^{nd} = \begin{pmatrix} N^n(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N^n(2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & N^n(d) \end{pmatrix}$$

où $(N(i))_{a,b} = (M^d)_{a,b} = E_a(L_b(Z_d))$, $a,b \in A_i$.

Il résulte de (3.18) que $(N^k(i))_{a,b} > 0$, pour tout $a, b \in A_i$ si k suffisamment grand. Donc, les matrices $N(i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$ sont primitives.

Si $a \in A_i$, alors le processus $\{L_i(Z_{dn})\}_{n \geqslant 0}$ a $N(i)$ pour matrice de moments et ρ^d pour valeur propre de Perron-Frobenius. Eivdemment, $M^d\xi = \rho^d\xi$, $\xi^\star M^d = \rho^d\xi^\star$, donc, ξ et $\xi^\star$ sont les vecteurs propres à droite et à gauche de M^d associés à ρ^d.

On définit pour $1 \leqslant i \leqslant d$

$$\xi(i) = \{\xi_a,\ a \in A_i\}\ , \qquad \bar{\xi}(i) = (0,\dots,0,\xi(i),0,\dots 0)$$

$$\xi^\star(i) = \{\xi_a,\ a \in A_i\}\ , \qquad \bar{\xi}^\star(i) = (0,\dots,0,\xi^\star(i),0,\dots 0).$$

On vérifie sans peine que

$$\rho\bar{\xi}(i-1) = M\bar{\xi}(i) \ , \ \rho\bar{\xi}^\star(i+1) = \bar{\xi}^\star(i)M \ .$$

On choisit ξ et $\xi^\star$ tels que $|\xi(1)| = 1$ et $\xi^\star(1)\xi(1) = 1$, alors pour $1 \leqslant i \leqslant d$, on a

$$\bar{\xi}^\star(i)\bar{\xi}(i) = \bar{\xi}^\star(1)\bar{\xi}(1) \quad , \quad \xi^\star(a)\xi(a) = 1.$$

On obtient

$$N(i)\xi(i) = \rho^d\xi(i) \ , \ \xi^\star(i)N(i) = \rho^d\xi^\star(i) \ .$$

Comme dans la démonstration de Kestin et Stigum [15] relative aux processus de Galton-Watson à plusieurs types et en utilisant l'estimations des moments d'ordre 2 comme précédemment, on obtient le théorème suivant

Théorème 3.4. — Sous les hypothèses (MI), (D) (L log L), il existe une v.a.r. W tel que pour tous $a \in A_i$, on ait P_a - presque sûrement

$$\lim_{n \to \infty} L_j(Z_{nd+j-i})/\rho^{nd+j-i} = W\xi(j)$$

si pour tout $x \in A_k$, $y \in A_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant d$

$$E_{p_x}[L_y(g_x)\mathrm{Log}(L_y(g_x))] < \infty \qquad (3.19)$$

alors

$$E_aW = \xi_a^\star(i)$$

où $\xi_a^\star(i)$ est égal à $\xi_a^\star$ si $a \in A_i$ et égal à zéro si $a \notin A_i$.
Si (3.19) n'est pas satisfait pour une paire de (x,y), alors $W = 0$ presque sûrement.

3.8. Changement d'alphabet et ses conséquences

Désignons par B_k l'ensemble des mots de longueur k qui peuvent apparaître avec une probabilité non nulle dans la descendance d'une lettre A. Si w est un mot, $L^{(k)}(w)$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{B_k}$ dont la composante correspondant à w' est le nombre de fois que w' figure dans w. On note M_k la matrice indexée par $B_k \times B_k$ dont le terme correspondant à (w',w) est l'espérance par rapport à p_W du nombre de mots égaux à W' qui figurent dans $g_w(.)$ et dont la première lettre est engendrée par la première lettre de w.

Notons B'_k l'ensemble des mots de k lettres qui apparaissent avec une probabilité non nulle à la fin de l'un des mots engendrés par une quelconque lettre de A. On pose $A^{(k)} = B_k \cup (\bigcup_{1 \leqslant j<k} B'_j)$ et $A^{(1)} = A$.

A chaque mot $X = x_1\, x_2\, \ldots\, x_\nu$ construit sur l'alphabet A, on associe un mot $\rho_k(X)$ construit sur l'alphabet et $A^{(k)}$ par le procédé suivant : si $|X| < k$, alors $\rho_k(X) = X$, et si $|X| \geqslant k$, alors

$$\rho_k(X) = (x_1x_2\ldots x_k)(x_2x_3\ldots x_{k+1})\ldots(x_{\nu-k+1}x_{\nu-k+2}\ldots x_\nu)(x_{\nu-k+2}x_{\nu-k+3}\ldots x_\nu)$$

($\rho_k(X)$ est constitué de ν-k+1 élément de B_k suivis d'un de B'_{k-1}). On note $\mathcal{L}_k$ l'ensemble des sous-mots des mots $\{\rho_k(X)\}_{X\in\mathcal{G}}$. A chaque $\rho_k(X)$ on associe l'espace probabilisé (Ω_X,p_X) et au mot $W = (x_1x_2\ldots x_k)(x_2x_3\ldots x_{k+1})\ldots(x_\nu x_{\nu+1}\ldots x_{\nu+k-1})$ appartenant à $\mathcal{L}_k$ on associe l'espace probabilisé (Ω_w,p_w) où $w = x_1x_2\ldots x_\nu x_{\nu+1}\ldots x_{\nu+k-1}$. Les applications $r_{W',W}$ sont des applications $r_{w',w}$ pour des w' et w convenablement choisis dans $\mathcal{G}$. Définissons maintenant les applications de génération $g_\alpha^{(k)}$ pour α dans $A^{(k)}$. Si α appartient à B_k, $g_\alpha^{(k)}(.)$ est le mot obtenu en ne gardant dans $\rho_k(g_\alpha(.))$ que les éléments de B_k dont la première lettre est engendrée par la première lettre de α . Si α appartient à $\bigcup_{1\leqslant j<k} B'_j$, alors on pose $g_\alpha^{(k)} = \rho_k \circ g_\alpha$.

Ainsi, nous avons défini un M-système opérant sur $A^{(k)}$ et J. Peyrière [16] a démontré les faits suivants :

(1) $\{\rho_k(Z_n)\}_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov stationnaire dont la probabilité de transition est celle que définit ce nouvel M-système.

(2) Si l'hypothèse (D) est satisfaite pour le M-système du départ, elle l'est aussi pour le nouveau en remplaçant ℓ par ℓ+k-1.

(3) Notons $\tilde{M}_k$ la matrice associée à ce M-système. A la partition $A^{(k)} = B_k \cup (\bigcup_{1 \leq j < k} B'_j)$ correspond une décomposition de $\tilde{M}_k$ en blocs

$$\tilde{M}_k = \begin{pmatrix} M_k & M'_k \\ o & M''_k \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout k, M_k a ρ pour valeur propre simple qui est strictement supérieure aux modules des valeurs propres de M''_k.

(4) La matrice M_k est primitive.

Le théorème 3.1. appliqué à ce nouvel M-système donne les résultats suivants.

Théorème 3.5. — Sous les hypothèses (MP), (D) et (L log L), pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n} L^{(k)}(Z_n)$ converge $W\xi_k$ P_{Z_o}-presque sûrement, où ξ_k désigne le vecteur propre associé à ρ de M_k, tel que $|\xi_k| = 1$ et $\langle \xi_k^{\star}, \xi_k \rangle = 1$. De plus, la condition de non-dégénérescence de W est la même que celle du théorème 3.1.

Théorème 3.6. — Sous les hypothèses (MP), (D) et (L log L), pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$ et pour tout mot w, la fréquence d'apparition de w comme sous-mot de Z_n tend vers une constante P_{Z_o}-presque sûrement.

4. CONDITIONS D'EXISTENCE DES MOMENTS

Pour les processus de Galton-Watson à un seul type, S. Asmuseen [1] a démontré que le moment d'ordre p $(1<p\leqslant 2)$ de la distribution de la limite du processus existe si et seulement si les moments d'ordre p des applications de génération existent. Wen [28] a obtenu le même résultat pour le M-système générateurs de mots à un seul type. Dans le cas des M-systèmes généraux, Peyrière a démontré que si p est un entier supérieur ou égal à 2, alors, la finitude des moments d'ordre p des applications de génération implique celle du moment d'ordre p de W. Dans cette section on établit une condition nécessaire et suffisante de finitude du moment d'ordre p $(1<p<\infty)$ de W.

Lemme 4.1. — Soient φ une fonction concave, croissante et nulle en 0 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, $\{\gamma_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ une suite des variables aléatoires positives et k un entier positif. Alors, si $S=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$, on a

$$ES^k\varphi(S)\leqslant ES^k\varphi(ES)+\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant n} E\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}}\varphi(\gamma_j)\Big)$$

si le complémentaire de l'ensemble $\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}$ est contenu dans l'ensemble $\{j\ ;\ 1\leqslant j\leqslant n$ et γ_j est indépendant de $(\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\ldots,\gamma_{i_k})\}$.

Démonstration.

$$E(S^k\varphi(S))=\sum_{1\leqslant i_1,\ldots i_k\leqslant n}E(\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}\varphi(S))$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant n}E\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}.\varphi\Big(\sum_{j\in\Lambda^c_{n,i_1\ldots i_k}}\gamma_j+\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1\ldots i_k}}\gamma_j\Big)$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant n}E\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}\Big(\varphi\Big(\sum_{j\in\Lambda^c_{n,i_1,\ldots,i_k}}\gamma_j\Big)+\varphi\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}}\gamma_j\Big)\Big)$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant i_1,\ldots i_k\leqslant n}E\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}\varphi\Big(\sum_{j\in\Lambda^c_{n,i_1,\ldots i_k}}\gamma_j\Big)$$

$$+\sum_{1\leq i_1,\ldots i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1\ldots i_k}}\varphi(Y_j)\Big)$$

$$=\sum_{1\leq i_1,\ldots i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}.E\varphi\Big(\sum_{j\in\Lambda^c_{n,i_1,\ldots,i_k}} Y_j\Big)$$

$$+\sum_{1\leq i_1,\ldots i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}}\varphi(Y_j)\Big)\leq \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}.E\varphi(S)$$

$$+\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n},i_1,\ldots,i_k}\varphi(Y_j)\Big)=ES^k.E\varphi(S)$$

$$+\sum_{1\leq i_1,\ldots i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}}\varphi(Y_j)\Big)\leq ES^k.\varphi(ES)$$

$$+\sum_{1\leq i_1,\ldots i_k\leq n} EY_{i_1}Y_{i_2}\ldots Y_{i_k}\Big(\sum_{j\in\Lambda_{n,i_1,\ldots,i_k}}\varphi(Y_j)\Big).$$

les trois premières inégalités résultent de la concavité de φ et la dernière de l'inégalité de Jensen. Remarquons que si $j\in\Lambda^c_{n,i_1,\ldots,i_k}$, Y_j et Y_{i_s} sont indépendants pour tout $1\leq s\leq k$, nous avons donc la 3ième égalité.

Lemme 4.2. — Si k est un entier ≥ 2 et $Z\in\mathcal{Y}$, on pose

$$\Lambda_{Z,k}=\{(j_1,j_2,\ldots j_k)\ ;\ 1\leq j_i\leq |Z|\ ,\ \forall j_s,j_t\ ,\ d_Z(x_{j_s},x_{j_t})>\ell\}$$

et $\Lambda^c_{Z,k}$ son complémentaire. Alors, pour tout k, il existe c_k tel que, pour tout $Z\in\mathcal{Y}$, on ait

$$\operatorname{card}\Lambda^c_{Z,k}\leq c_k|Z|^{k-1} \qquad (4.1)$$

Démonstration. — On vérifie sans peine que (4.1) est vrai pour $k = 2$. Supposons que

$$\operatorname{card}\Lambda^c_{Z,k-1}\leq c_{k-1}|Z|^{k-1}\ ,\ k>2 \qquad (4.2)$$

On fixe $j_1=1$ et considère l'ensemble

$\{(1,j_2,\dots,j_k\ ;\ (1,j_2,\dots,j_k)\in\Lambda^c_{Z,k},\ 1\leqslant j_2,\dots j_k\leqslant|Z|\}$. On le partage en deux classes de la façon suivante : la première classe est constituée des k-uples dont au moins un point x_{j_i}, $2\leqslant i\leqslant k$, satisfait $d_Z(x_1,x_{j_i})\leqslant\ell$, et la seconde des autres. Remarquons qu'il y a au plus α_M point x_{j_2}, $1\leqslant j_2\leqslant|Z|$, qui satisfont $d_Z(x_1,x_{j_2})\leqslant\ell$, où α_M a le même sens qu'en section 2, donc, il y a au plus $\alpha_M|Z|^{k-2}$ k-uples de la première classe satisfaisant $d_Z(x_1,x_{j_2})\leqslant\ell$. Par conséquent, le cardinal de la première classe ne dépasse pas $(k-1)\alpha_M|Z|^{k-2}$.

Pour la deuxième partie, par la construction, dans chaque k-uple, il y a au moins deux sommets x_{j_m},x_{j_n}, $2\leqslant m,\ n\leqslant k$, qui satisfont $d_Z(x_{j_m},x_{j_n})\leqslant\ell$.

Donc, par l'hypothèse d'induction (4.2), le cardinal de la deuxième classe est de l'ordre de $|Z|^{k-2}$. Faisant parcourir à j_1 les entiers de 1 à $|Z|$, on obtient (4.1).

Théorème 4.1. — Sous les hypothèses (MI) et (D), pour tout $Z_0\in\mathcal{Y}$, pour tout $p\in\,]1,+\infty[$, $E_{Z_0}(W^p)$ est fini si et seulement si l'hypothèse (L^p) est satisfaite.

Démonstration. — Posons

$$\beta_p=\sup_{a\in A}(E_{p_a}|g_a|^p)\ ,\quad k=\begin{cases}p-1 & ,\ \text{si } p \text{ est un entier}\ ;\\ [p] & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

$$\alpha=p-k\quad(\text{donc } 0<\alpha\leqslant1),\quad \varphi(x)=x^\alpha\quad(\text{donc } \varphi \text{ est concave}).$$

Soit Z un ion appartenant à $\mathcal{Y}$, alors

$$S_{g_Z}=\langle\xi^\star,L\circ g_Z\rangle=\langle\xi^\star,\sum_{x\in V_Z}L(g_x\circ r_{x,Z})\rangle=\sum_{x\in V_Z}\langle\xi^\star,L(g_x\circ r_{x,Z})\rangle$$

Numérotons les sommets de Z, $V_Z=\{x_1,x_2,\dots,x_{|Z|}\}$, soit $Y_j=\langle\xi^\star,L(g_{x_j}\circ r_{x_j,Z})\rangle$, alors $S_{g_Z}=\sum_{j=1}^{|Z|}Y_j$.

D'après le lemme 4.1, on obtient

$$E_{p_Z} S^p_{g_Z} = E_{p_Z} S^k_{g_Z} . S^\alpha_{g_Z} = E_{p_Z} S^k_{g_Z} \varphi(S_{g_Z})$$

$$\leqslant (E_{p_Z} S^k_{g_Z}).\varphi(E_{p_Z} S_{g_Z}) + \sum_{1 \leqslant j_1 \dots j_k \leqslant |Z|} E_{p_Z} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} \Big(\sum_{j \in \Lambda_{Z, j_1, \dots j_k}} \varphi(Y_j)\Big) \quad (4.3)$$

Nous allons maintenant estimer $E_{p_Z} S^k_{g_Z}$.

Considérons les ensembles $\Lambda_{Z,k}$ définis au lemme 4.2.

Alors, si $(j_1, \dots j_k) \in \Lambda_{Z,k}$, tous les Y_{j_i} sont indépendants deux à deux.

$$E_{p_Z} S^k_{g_Z} = E_{p_W} \sum_{1 \leqslant j_1, \dots j_k \leqslant |Z|} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} = E_{p_Z} \Big(\sum_{\Lambda_{Z,k}} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} + \sum_{\Lambda^c_{Z,k}} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} \Big)$$

Remarquons que tous les $E_{p_Z} Y_{j_i}$ sont positifs, on en déduit

$$E_{p_Z} \Big(\sum_{\Lambda_{Z,k}} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} \Big) = \sum_{\Lambda_{Z,k}} E_{p_Z} Y_{j_1} \dots E_{p_Z} Y_{j_k} \leqslant \sum_{1 \leqslant j_1, \dots j_k \leqslant |Z|} \prod_{i=1}^{k} E_{p_Z} Y_{j_i}$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{|Z|} (E_{p_Z} Y_j) \Big)^k = (E_{p_Z} S_{g_Z})^k \quad (4.4)$$

compte tenu de (2.2)

$$E_{p_Z}(S_{g_Z}) = E_{p_Z} \langle \xi^\star, L(g_Z) \rangle = \langle \xi^\star, E_{p_Z} L(g_Z) \rangle$$

$$= \langle \xi^\star, M.L(Z) \rangle = \langle \xi^\star M, L(Z) \rangle \quad (4.5)$$

$$= \rho \langle \xi^\star, L(Z) \rangle = \rho S_Z$$

donc, on obtient par (4.4), (4.5)

$$E_{p_Z} \Big(\sum_{\Lambda_{Z,k}} Y_{j_1} Y_{j_2} \dots Y_{j_k} \Big) \leqslant \rho^k S^k_Z \quad (4.6)$$

Estimons maintenant $E_{p_Z} \Big(\sum_{\Lambda^c_{Z,k}} Y_{j_1} Y_{j_2} \dots Y_{j_k} \Big)$.

Notons

$$E_{p_Z} Y^k_{j_i} = E_{p_Z} \langle \xi^\star, L(g_{x_{j_i}} \circ r_{x_{j_i}}, Z) \rangle^k = O(E_{p_{x_{j_i}}} |g_{x_{j_i}}|^k) = O(\beta_k)$$

donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$E_{\mathcal{P}_Z} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} \leqslant \prod_{i=1}^{k} (E_{\mathcal{P}_Z} Y_{j_i}^k)^{\frac{1}{k}} = O(\beta_k) \tag{4.7}$$

on en déduit que par le lemme 4.2 et (4.7)

$$E_{\mathcal{P}_Z} \sum_{\Lambda^c_{Z,k}} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} = O(\beta_k |Z|^{k-1}) \tag{4.8}$$

compte tenu de (4.4), (4.8), on obtient

$$E_{\mathcal{P}_Z} S^k_{g_Z} = \rho^k S^k_Z + O(|Z|^{k-1}\beta_k) \tag{4.9}$$

En particulier

$$E_{p_Z} S_{g_Z} = \rho S_Z \,, \quad \varphi(E_{p_Z} S_{g_Z}) = \rho^{\alpha} S^{\alpha}_Z \tag{4.10}$$

Maintenant, on estime le deuxième terme du second membre de (4.3). Etant donné $x \in V_Z$ fixé, il y a au plus α_M sommets de Z dont la distance à x est inférieure à ℓ, il en résulte que le cardinal de l'ensemble $\Lambda_{Z,j_1 \dots j_k}$ est inférieur $k\alpha_M$. Par conséquent, en remplaçant $\varphi(x)$ par x^{α} et appliquant l'inégalité, on obtient

$$\sum_{1 \leqslant j_1,\dots j_k \leqslant |Z|} E_{p_Z} Y_{j_1} \dots Y_{j_k} \Big(\sum_{j \in \Lambda_{Z,j_1,\dots j_k}} \varphi(Y_j)\Big) \leqslant k |\xi^{\star}|^k \alpha_M \beta_p |Z|^p = O(|Z|^k \beta_p) \tag{4.11}$$

Posons $S_{n+1} = W_{n+1} = \rho^{-(n+1)} \langle \xi^{\star}, L(Z_{n+1}) \rangle$. De (4.3), (4.9), (4.10), (4.11) et du fait que $\rho^{-n}|Z_n| = O(W_n)$, il résulte finalement que

$$E_{Z_o}(W^p_{n+1}|Z_n) = E_{Z_o}(W^k_{n+1}\varphi(W_{n+1})|\,Z_n) = W^p_n + O(\frac{W^{p-1}_n}{\rho^n}\,\beta_p) + O(\frac{W^k_n}{\rho^{n\alpha}}\,\beta_p)$$

d'où

$$E_{Z_o}(W^p_{n+1} - W^p_n) = O(\frac{E_{Z_o} W^k_n}{\rho^{n\alpha}}\,\beta_p) \tag{4.12}$$

Si $k=1$, alors $E_{Z_o} W_n = E_{Z_o} W_o$, parce que $\{W_n\}_{n \geqslant 0}$ est une martingale. Il résulte de (4.12) que

$$\begin{aligned} E_{Z_o} W^p &\leqslant \varliminf_{n \to \infty} E_{Z_o} W^p_n = \lim_{n \to \infty} \{E_{Z_o} W^p_o + \sum_{i=o}^{n-1} E_{Z_o}(W^p_{i+1} - W^p_i)\} \\ &= O\ \beta_p(\sum_{i=o}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n\alpha}}) < \infty \end{aligned} \tag{4.12'}$$

où $1 < p \leqslant 2$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

En utilisant (4.12), les théorèmes de convergence de martingales et en effectuant un calcul similaire à celui qui mène à (4.12'), nous obtenons par récurrence les implications suivantes :

$$\beta_p < \infty \Rightarrow E_{Z_o} W^k < \infty \Rightarrow \sup_n E_{Z_o} W_n^k < \infty \Rightarrow E_{Z_o} W^p < \infty.$$

On a ainsi démontré que pour $1 < p < \infty$, $\beta_p < \infty \Rightarrow E_{Z_o} W^p < \infty$.

D'autre part, soit $Z_o = a$. A cause de la convexité de x^p. $(1 < p < \infty)$ et de l'inégalité de Jensen, et du fait que $\{W_o, W_1, \dots, W\}$ est une martingale, on a

$$E_{p_a} |g_a|^p = E_a |Z_1|^p = O(E_a W_1^p) = O(E_a (E_a (W|Z_1)^p))$$
$$= O(E_a (E_a (W^p|Z_1)) = O(E_a W^p)$$

où la constante ne dépend que du M-système et de p ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

Le théorème 4.1 et le théorème de convergence des martingales donnent le résultat suivant.

Corollaire 4.1. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L^p), pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, W_n converge vers W dans $L^p(P_{Z_o})$.

Si l'on remplace l'hypothèse (MI) par (MP) dans le corollaire 4.1 d'une part, par le théorème 3.1, $\rho^{-n} L(Z_n)$ converge vers ξW P_{Z_o}-presque sûrement ; d'autre part, remarquons que pour tout $a \in A$

$$\left(\frac{L_a(Z_n)}{\rho^n}\right)^p = O\left(\frac{|Z_n|^p}{\rho^n}\right) = O(W_n^p) .$$

D'après le corollaire 4.1

$$\sup_n E_{Z_o} \left(\frac{L_a(Z_n)}{\rho^n}\right)^p = O(\sup_n E_{Z_o} W_n^p) < \infty$$

d'où le résultat suivant.

Corollaire 4.2. — Sous les hypothèses (MP), (D) et (L^p), pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $\rho^{-n} L(Z_n)$ converge vers ξW dans $L^p(P_{Z_o})$.

La même méthode conduit au résultat suivant, plus précis.

Théorème 4.2. — Sous les hypothèses (MI), (D) et $(L(\log L)^{\alpha+1})$, pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$, $E_{Z_o} W(\log^+ W)^\alpha < \infty$.

La démonstration est presque la même que celle du théorème 4.1. On ne fait que quelques remarques.

1. Bien que la fonction $(\log^+ x)^\alpha$ ne soit pas concave, on peut choisir des nombres positifs x_o, c_1 et c_2 tels que, $x_o > 1$; $\frac{d^2}{dx^2} (\log x)^\alpha < 0$ quand $x \geqslant x_o$; $c_1 = \frac{d}{dx} (\log x)^\alpha |_{x=x_o}$; $c_2 = c_1 x_o - (\log x_o)^\alpha$. Alors, la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 x & 0 \leqslant x \leqslant x_o \\ [\log^+ x]^\alpha + c_2 , & x_o \leqslant x < \infty \end{cases}$$

est croissante et concave et $\varphi(0) = 0$.

2. Remarquons que φ est croissante, pour toutes les v.a. positives γ_i, γ_j

$$E(\gamma_i - \gamma_j)[\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_j)] \geqslant 0$$

d'où

$$E\gamma_i \varphi(\gamma_i) + E\gamma_j \varphi(\gamma_j) \geqslant E\gamma_i \varphi(\gamma_j) + E\gamma_j \varphi(\gamma_i) .$$

3. Pour chaque x fixé, on peut trouver un entier positif k, tel que

$$\frac{x}{\rho^{k+1}} \leqslant x_o < \frac{x}{\rho^k} \tag{4.13}$$

donc

$$\sum_{n=o}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{\rho^{n+1}}\right) = \sum_{n=o}^{k-1} \varphi\left(\frac{x}{\rho^{n+1}}\right) + \sum_{n=k}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{\rho^{n+1}}\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{k-1} \left(\left[\log^+ \left(\frac{x}{\rho^{n+1}}\right)\right]^\alpha + c_2\right) + c_1 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x}{\rho^{n+1}}$$

mais, d'après (4.13), on a

$$k = O(\log^+ x) \quad , \qquad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x}{\rho^{n+1}} = O(1) \quad ,$$

où les constantes ne dépendent que x_o, c_1, c_2 . D'où

$$\sum_{n=o}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{\rho^{n+1}}\right) = O([\log^+ x]^{\alpha+1}) \ .$$

Compte tenu des remarques précédentes, le théorème 4.2 se démontre comme le théorème 4.1.

5. VITESSE DE CONVERGENCE

Nous avons vu, dans la section 3, sous l'hypothèse (MI) (resp. (MP)), que $W_n = \rho^{-n}\langle\xi^\star, L(Z_n)\rangle$ (resp. $\rho^{-n} L(Z_n)$) converge vers une limite W (resp. $W\xi$) presque sûrement non nulle. Nous étudions ici les vitesses de convergence du processus dont les variances des applications de génération sont infinies, précisant ainsi le théorème 3.1.

Théorème 5.1. — Sous les hypothèses (MI), (D) et $(L(\log L)^{\alpha+1})$ pour tout $Z_0 \in \mathcal{Y}$, $\alpha \geqslant 0$,

(i) la suite $\{n^\alpha(W-W_n)\}_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro P_{Z_0}-presque sûrement ;

(ii) la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-1}\{W-W_n\}$ converge P_{Z_0}-presque sûrement.

On pose $\beta_\alpha = \sup\limits_{a\in A} E_{p_a}[|g_a|(\mathrm{Log}|g_a|)^\alpha]$.

Si l'on répète le procédé du paragraphe 3.2 en remplaçant ρ^n par ρ^n/n^α, on peut définir une application de génération $\widetilde{g_{n.a}}$ par troncation de g_a et donc, comme dans §.3.2, on définit l'application de génération $\widetilde{g_{n,Z}}$ pour $Z \in \mathcal{Y}$. Par la suite, de la même façon, on construit un processus auxiliaire $\{\widetilde{Z}_n\}_{n\geqslant 0}$ à partir du processus $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$. On a comme dans §.3.2

$$|\widetilde{g_{n.a}}| = |g_a|.1_{\{|g_a|\leqslant \rho^n/n^\alpha\}},$$

$$E_{Z_0}(L(\widetilde{Z_{n+1}})|Z_n) = M(n)L(Z_n)$$

où $M(n)$ désigne la matrice dont la colonne correspondant à a est $E_{p_a}(L \circ \widetilde{g_{n,a}})$.

De même qu'au paragraphe 3.4, on introduit une suite centrée $\{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\}_{n\geqslant 0}$, où

$$\widetilde{W_{n+1}} = \rho^{-n}\langle\xi^\star, L(\widetilde{Z_{n+1}})\rangle,$$

$$R_n = \rho^{-(n+1)}\langle\xi^\star, (M-M(n))L(Z_n)\rangle \quad . \tag{5.1}$$

Posons

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x) = \sup_n \{n | \frac{\rho^n}{n^\alpha} < x \ , \ x \geq 0\}$$

On vérifie sans peine que

$$\rho^{\mathfrak{p}(x)} = O(x(\log x)^\alpha), \ \mathfrak{p}(x) = O(\log x), \ n \log\rho \sim \log \frac{\rho^n}{n^\alpha} . \qquad (5.2)$$

En utilisant les hypothèses (MI), (D) et (5.1), (5.2), et par un calcul similaire à celui du lemme 3.2, nous obtenons

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_{Z_o}(W_{n+1} \neq \widetilde{W_{n+1}}) = O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} (\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n . 1_{\{\rho^n/n^\alpha \leq |g_a|\}}))$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} \rho^{\mathfrak{p}(|g_a|)}) = O(\sum_{a\in A} E_{p_a} |g_a|(\log|g_a|)^\alpha) = O(\beta_\alpha) < \infty \ , \qquad (5.3)$$

$$\mathrm{Var}(\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n) = E_{Z_o}(\mathrm{Var}(\widetilde{W_{n+1}}|Z_n)$$

$$= O(\sum_{a\in A} \rho^{-n} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|^2 . 1_{\{|g_a| \leq \rho^n/n^\alpha\}}) \ ,$$

d'où

$$\sum_{n=o}^{\infty} \mathrm{Var}\ n^\alpha . \{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\} = O(\sum_{a\in A} (\sum_{n=o}^{\infty} \frac{n^{2\alpha}}{\rho^n} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|^2 . 1_{\{|g_a| \leq \rho^n/n^\alpha\}}))$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{p_a} (\sum_{n=o}^{\infty} \frac{n^{2\alpha}}{\rho^n} . 1_{\{|g_a| \leq \rho^n/n^\alpha\}}) |g_a|^2)$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|^2 (\sum_{n=\mathfrak{p}(|g_a(\omega)|)+1}^{\infty} \frac{n^{2\alpha}}{\rho^n})$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|^2 (\int_{\mathfrak{p}(|g_a(\omega)|)+1}^{\infty} t^2 \rho^{-t} dt))$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|^2 \frac{(\mathfrak{p}(|g_a|)+1)^\alpha}{|g_a|})$$

$$= O(\sum_{a\in A} E_{\mathfrak{p}_a} |g_a|(\log|g_a|)^\alpha) = O(\beta_\alpha) < \infty \qquad (5.4)$$

Par (5.4) et puisque la suite $\{\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n\}_{n\geq 0}$ est centrée, la série $\sum_{n=o}^{\infty} n^\alpha(\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n)$ converge P_{Z_o}-presque sûrement, et, par (5.3), il en est de même de la série $\sum_{n=o}^{\infty} n^{\alpha}\{W_{n+1} - W_n + R_n\}$.

On obtient ainsi le lemme suivant :

Lemme 5.1. — Sous les hypothèses (MI), (D) et $(L(\log L)^{\alpha})$ tout $Z_o \in \mathscr{C}$, la série $\sum_{n=o}^{\infty} n^{\alpha}\{W_{n+1} - W_n + R_n\}$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Pour démontrer les résultats de cette section, on utilisera une variante d'un lemme de Kronecker.

Lemme 5.2. — Soient $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres telles que $\{\beta_n\}_{n\geqslant 0}$ soit positive croissante et tende vers l'infini, alors la convergence de la série $\sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ implique $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n = o(\frac{1}{\beta^N})$, $N \to \infty$.

Démonstration du théorème 5.1. — On note $F_a(x)$ la fonction de distribution de $|g_a(\omega)|$.

(i) Posons $\alpha_n = W_{n+1} - W_n + R_n$, $\beta_n = n^{\alpha}$; alors par les lemme 5.1. et lemme 5.2., on a

$$o(N^{-\alpha}) = \sum_{n=N}^{\infty} \{W_{n+1} - W_n + R_n\} = W-W_N + \sum_{n=N}^{\infty} R_n \ , \ N \to \infty \quad ,$$

compte tenu de (5.1), $W-W_N = o(N^{-\alpha})$ équivaut à

$$\sum_{n=N}^{\infty} R_n = \sum_{n=N}^{\infty} \rho^{-(n+1)} \langle \xi^{\star},(M-M(n))L(Z_n)\rangle = o(N^{-\alpha}) \ , \qquad (5.5)$$

Remarquons que $0 < \inf_n W_n \leqslant \sup_n W_n < \infty$ P_{Z_o}-presque sûrement par le théorème 3.1' ; (5.5) est donc équivalent à

$$o(N^{-\alpha}) = \sum_{a\in A} \left(\sum_{n=N}^{\infty} \int_{\rho^n/n^{\alpha}}^{\infty} x\, dF_a(x)\right) , \qquad (5.6)$$

mais

$$\sum_{n=N}^{\infty} \int_{\rho^n/n^\alpha}^{\infty} x \, dF_a(x) = \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} \left(\sum_{n=N}^{\infty} 1_{\{x > \rho^n/n^\alpha\}}\right) x \, dF_a(x)$$

$$= \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x(\mathfrak{p}(x) - N) \, dF_a(x) \ ,$$

donc, il suffit de démontrer

$$o(N^{-\alpha}) = \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x(\mathfrak{p}(x)-N) \, dF_a(x) \ . \qquad (5.7)$$

En effet, compte de (5.2), pour tout $a \in A$.

$$N^\alpha \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} N \, x \, dF_a(x) = \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} N^{\alpha+1} \, x \, dF_a(x) = O\left(\int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x\left(\log \frac{\rho^N}{N^\alpha}\right)^{\alpha+1} dF_a(x)\right.$$

$$= O\left(\int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x(\log x)^{\alpha+1} \, dF_a(x)\right) \to 0 \quad , \quad N \to \infty$$

$$N^\alpha \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x \, \mathfrak{p}(x) \, dF_a(x) = O\left(\left(\log \frac{\rho^N}{N^\alpha}\right)^\alpha \int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x \log x \, dF_a(x)\right)$$

$$= O\left(\int_{N^{-\alpha}\rho^N}^{\infty} x(\log x)^{\alpha+1} \, dF_a(x)\right) \to 0 \quad , \quad \mathbb{N} \to \infty$$

On a ainsi (5.7) donc (5.5). Ceci achève la conclusion (i).

(ii) Posons $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}$, alors $\beta_n \sim n^\alpha$; par un calcul similaire à celui qui conduit à (5.4) on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}(\beta_n(\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n)) = O(\beta_\alpha) < \infty \quad , \qquad (5.8)$$

Donc, la série $\sum_{n=p}^{\infty} \beta_n\{W_{n+1} - W_n + R_n\}$ converge P_{Z_0}-presque sûrement par (5.3) et (5.4). Posons

$$\alpha_n = W_{n+1} - W_n + R_n \quad , \ S_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \ , \quad S^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \ ,$$

par transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \beta_n(W_{n+1} - W_n + R_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{N} (\beta_n - \beta_{n-1})(S_N - S_{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (\beta_n - \beta_{n-1})(S^{n-1} - S^N) = \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k - \beta_N \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k$$

en utilisant le lemme 5.2, $\beta_N \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n$ converge vers zéro quand N tend vers l'infini, donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha-1}(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k))$ converge P_{Z_o}-presque sûrement. Mais

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} (W_{k+1} - W_k + R_k))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} (W_{k+1} - W_k) + \sum_{k=n}^{\infty} R_k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} ((W-W_k) + \sum_{k=n}^{\infty} R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (W-W_n) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} R_k) .$$

Donc, pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} R_k)$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

D'autre part, compte tenu de (5.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} (\sum_{k=n}^{\infty} R_k) = O(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{\infty} (\sum_{a\in A} \int_{k^{-\alpha}\rho^k}^{\infty} x \, dF_a(x)))(\sup_n \frac{|Z_n|}{\rho^n})$$

$$= O(\sum_{a\in A} (\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_{n^{-\alpha}\rho^n}^{\infty} x \, dF_a(x))) = O(\sum_{a\in A} (\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \int_{n^{-\alpha}\rho^n}^{\infty} x \, dF_a(x)))$$

$$= O(\sum_{a\in A} (\int_o^{\infty} x(\mathfrak{p}(x))^{\alpha+1} \, dF_a(x))) = O(\sum_{a\in A} \int_o^{\infty} x(\log x)^{1+\alpha} \, dF_a(x)) < \infty$$

ce qui démontre la conclusion (ii).

Théorème 5.2. — Sous les hypothèses (MP), (D) et $(L(\log L)^{\alpha+1})$ pour tout $Z_o \in \mathcal{Y}$,

(i) si $\alpha \geqslant 0$, $n^{\alpha}(\xi W - \rho^{-n} L(Z_n))$ converge vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement ;

(ii) si $\alpha \geqslant 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi W - \rho^{-n} L(Z_n))$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Démonstration. — Opérant de même que pour les théorèmes 3.1 et 5.1, on obtient

$$(1)\quad \sum_{n=o}^{\infty} P_{Z_o}(L(Z_{n+1}) \neq L(\widetilde{Z_{n+1}})) = O\Big(\sum_{a\in A}\Big(\sum_{n=o}^{\infty} \rho^n \int_{\rho^n/n^\alpha}^{\infty} dF_a(x)\Big)\Big)$$

$$= O\Big(\sum_{a\in A}\Big(\int_o^{\infty} x(\log x)^{\alpha}\, dF_a(x)\Big)\Big) = O(\beta_\alpha) < \infty \quad ,$$

$$(2)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \Big\|\frac{(n+1)^\alpha}{\rho^{n+1}}(M(n)L(Z_n) - ML(Z_n))\Big\| = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{\rho^{n+1}} \|(M-M(n))L(Z_n)\|$$

$$= O\Big(\sum_{n=o}^{\infty} (n+1)^{\alpha}\|M-M(n)\|\Big) = O\Big(\sum_{a\in A}\sum_{n=o}^{\infty} (n+1)^\alpha \int_{\rho^n/n^\alpha}^{\infty} x\, dF_a(x)\Big)$$

$$= O\Big(\sum_{a\in A}\Big(\int_o^{\infty} x(\log x)^{1+\alpha}\, dF_a(x)\Big)\Big) = O(\beta_{\alpha+1}) < \infty \ ,\ P_{Z_o}\text{-presque sûrement.}$$

$$(3)\quad \sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o}\Big(\frac{(n+1)^\alpha}{\rho^{n+1}}\ (L_a(\widetilde{Z_{n+1}}) - L_a((M(n)L(Z_n))))^2$$

$$= O\Big(\sum_{a\in A}\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(n+1)^{2\alpha}}{\rho^{n+1}} \int_o^{\rho^n/n^\alpha} x^2\, dF_a(x)\Big) = O\Big(\sum_{a\in A}\int_o^{\infty} x(\log x)^{\alpha+1}\, dF_a(x)\Big) < \infty \ .$$

Par (3), la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}(n+1)^{\alpha}\ (L(\widetilde{Z_{n+1}})-M(n)L(Z_n))$ converge P_{Z_o}-presque sûrement, et par (2), il en est de même de la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}(n+1)^{\alpha}\ (M(n)L(Z_n)-ML(Z_n))$, donc, aussi de la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}(n+1)^{\alpha}\ (L(\widetilde{Z_{n+1}}) - ML(Z_n))$. Enfin, par (1), on obtient le lemme suivant :

Lemme 5.3. — Sous les hypothèses (MP), (D) et $(L(\log L)^{\alpha+1})$ pour tout $Z_o \in \mathcal{C}$, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-(n+1)}(n+1)^{\alpha}(L(Z_{n+1}) - ML(Z_n))$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Lemme 5.4. — Sous les hypothèses (MP), (D) et $(L(\log L)^{\alpha+1})$ pour tout $Z_o \in \mathcal{C}$, et pour tout vecteur $a^\star$ tel que $\langle a^\star,\xi\rangle = 0$, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-n}\, n^{\alpha}\langle a^{\star}, L(Z_n)\rangle$ converge P_{Z_o}-presque sûrement.

Démonstration. — Puisque M est primitive, en vertu de (2.1), on a

$$\frac{a^{\star}M^n}{\rho^n} = O(\lambda^n) \tag{5.9}$$

où $0<\lambda<1$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha}}{\rho^n}\langle a^{\star}, L(Z_n)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha}}{\rho^n}\langle a^{\star}, L(Z_n)-M^nL(Z_o)\rangle + \langle \sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha}}{\rho^n}\, a^{\star}M^n, L(Z_o)\rangle .$$

Remarquons que (5.9) résulte la convergence du deuxième terme du second membre ; par conséquent, il suffit de démontrer que la série $\sum_{n=1}^{N} \rho^{-n} n^{\alpha}\langle a^{\star}, L(Z_n)-M^nL(Z_o)\rangle$ converge P_{Z_o}-presque sûrement quand N tend vers l'infini. En effet

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha}}{\rho^n}\, a^{\star}(L(Z_n)-M^nL(Z_o)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^{\alpha}}{\rho^n}\left(\sum_{k=1}^{n} a^{\star}M^{n-k}(L(Z_k)-ML(Z_{k-1}))\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N} (-)^{\alpha}\frac{a^{\star}M^{n-k}}{\rho^{n-k}}\right)\left\{\frac{k^{\alpha}}{\rho^k}(L(Z_k)-ML(Z_{k-1}))\right.$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(A^{(k)} - \sum_{n=N-k+1}^{\infty} \left(\frac{n+k}{k}\right)^{\alpha}\frac{a^{\star}M^n}{\rho^n}\right).\ \frac{k^{\alpha}}{\rho^k}(L(Z_k) - ML(Z_{k-1}))$$

où $A^{(k)} = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{n+k}{k}\right)^{\alpha} . \frac{a^{\star}M^n}{\rho^n}$, évidemment : $\sup_{k\geq 1} |A^{(k)}| < \infty$.

D'autre part, remarquons qu'en reprenant la démonstration du lemme 5.3, et sous les mêmes hypothèses, on peut montrer que la série $\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-n} n^{\alpha}A^{(n)}(L(Z_n)-ML(Z_{n-1}))$ converge P_{Z_o}-P.S. Il suffit donc de démontrer que

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=N-k+1}^{\infty}\left(\frac{n+k}{k}\right)^{\alpha}\frac{\alpha^{\star}M^n}{\rho^n}\right)\left\{\frac{k^{\alpha}}{\rho^k}(L(Z_k) - ML(Z_{k-1}))\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\star}M^n}{\rho^n}\left(\sum_{k=N-n+1}^{N}\frac{k^{\alpha}}{\rho^k}(L(Z_k)-ML(Z_{k-1}))\left(\frac{n+k}{k}\right)^{\alpha}\right)$$

tend vers zéro quand N tend vers l'infini. En effet

$$\sum_{k=N-n+1}^{N} \left\| \frac{k^\alpha}{\rho^k} (L(Z_k)-ML(Z_{k-1}))\left(\frac{n+k}{k}\right)^\alpha \right\| \leqslant n(n+1)^\alpha \sup_{k\geqslant N-n+1} \left\| \frac{k^\alpha}{\rho^k} L(Z_k)-ML(Z_{k-1})\right\|$$

le sup tend vers zéro par le lemme 5.3, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} n^{\alpha+1} a^\star M^n$ converge par (5.9), donc, le lemme 5.4 en découle.

Démonstration du théorème 5.2. — (i) Par le lemme 5.4, pour tous $a^\star \in (\mathbb{R}^A)^\star$ tel que $\langle a^\star, \xi \rangle = 0$,

$$n^\alpha a^\star\left(\frac{L(Z_n)}{n} - W\xi\right) = \frac{n^\alpha a^\star L(Z_n)}{\rho^n} \to 0 \qquad P_{Z_o}\text{-P.S, } n \to \infty \quad .$$

De plus, il résulte des lemmes (5.2), (5.3) et de

$$\xi^\star\left(W\xi - \frac{L(Z_n)}{\rho^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi^\star L(Z_m)}{\rho^m} - \frac{\xi^\star L(Z_n)}{\rho^n}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{\xi^\star L(Z_{m+1})}{\rho^{m+1}} - \frac{\xi^\star L(Z_m)}{\rho^m}\right) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\rho^{m+1}} \xi^\star(L(Z_{m+1}) - ML(Z_m)), \qquad (5.10)$$

que, $n^\alpha \xi^\star(\rho^{-n} L(Z_n) - W\xi)$ tend vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement.
Ceci démontre la première assertion du théorème 5.2.

(ii) En vertu du lemme 5.3, l'hypothèse $(L(\log L)^{\alpha+1})$ entraîne, si $\alpha \geqslant 1$, la convergence de la série $\sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} m^\alpha (L(Z_m) - ML(Z_{m-1})$. En outre la convergence de la série

$$\sum_{n=o}^{\infty} \xi^\star\left(W\xi - \frac{L(Z_n)}{\rho^n}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\rho^{m+1}} \xi^\star(L(Z_{m+1}) - ML(Z_m))$$

découle des lemmes 5.2 et (5.10). D'autre part, pour tout vecteur $a^\star$ tel que $\langle a^\star, \xi \rangle = 0$, la série,

$$\sum_{n=o}^{\infty} a^\star\left(\frac{L(Z_n)}{\rho^n} - W\xi\right) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^\star L(Z_n)}{\rho^n}$$

converge P_{Z_o}-presque sûrement en vertu du lemme 5.3. On termine la démonstration comme précédemment.

Théorème 5.3. — Sous les hypothèse (MI), (D) et (L^p), pour tout $Z_o \in \mathcal{C}_f$, la suite $\rho^{n/q}(W-W_n)$ converge vers zéro P_{Z_o}-presque sûrement, où $1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$.

Démonstration. — En remplaçant ρ^n/n^α par $\rho^{n/b}$, on définit $\tilde{W}_n$, R_n comme précédemment. Posons $\lambda = \lambda(x) = \sup_n \{n \; ; \; \rho^{n/b} \leqslant x, \; x \geqslant 0\}$, alors, $\rho^{\lambda(x)} = 0(x^b)$. Opérant comme pour le théorème 5.1 et remarquons que $\rho^{q/2-1} < 1$. Nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\widetilde{W_{n+1}} \neq W_{n+1}) \leqslant \sum_{a \in A} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_{\rho^{n/b}}^{\infty} dF_a(x) = 0\Big(\sum_{a \in A} \int_0^{\infty} x^b \; F_a(x)\Big) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(\rho^{n/q}(\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n)) = 0\Big(\sum_{a \in A} \int_0^{\infty} x^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{x \leqslant \rho^{n/p}\}} . \rho^{2n/q - n}\Big) \, dF_a(x)\Big)$$

$$= 0\Big(\sum_{a \in A} \int_0^{\infty} x^2 \; (\rho^{2/q - 1})^{\lambda(x)+1} \; dF_a(x)\Big) = 0\Big(\sum_{a \in A} \int_0^{\infty} x^b \, dF_a(x)\Big) < \infty \; .$$

Donc, de même que pour la démonstration du lemme 5.1, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n/q} \, (\widetilde{W_{n+1}} - W_n + R_n)$ converge. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n/q} \, (W_{n+1} - W_n + R_n)$ converge donc P_{Z_0}-presque sûrement. Si l'on pose $\beta_n = \rho^{n/q}$, $\alpha_n = W_{n+1} - W_n + R_n$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ converge P_{Z_0}-presque sûrement. On en déduit par le lemme 5.2, que

$$W - W_N + \sum_{n=N}^{\infty} R_n = o(\rho^{-N/q}) \qquad (5.11)$$

Par une démonstration similaire à celle de 5.1 (i), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n/q} R_n = 0\Big(\sum_{a \in A} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n/q} \int_{\rho^{n/b}}^{\infty} x \; dF_a(x)\Big) \; .$$

$$= 0\Big(\sum_{a \in A} \int_0^{\infty} x^b \; dF_a(x)\Big) < \infty \qquad (5.12)$$

ainsi, le théorème 5.3 en découle des lemmes 5.4 et (5.11), (5.12).

Remarque. — Asmuseen [1] a indiqué, que, pour les processus de Galton-Watson à plusieurs types, on ne peut pas remplacer $\rho^{n/q}(W - W_n)$ par $\rho^{n/b}(W\xi - \rho^{-n} L(Z_n))$, c'est-à-dire, dans ce sens, on ne peut pas améliorer l héorème 5.3.

6. UN THEOREME DE LIMITE CENTRALE

Nous considérons uniquement des M-systèmes générateurs de mots dans les sections 6 et 7.

Asmuseen [3,4], Heyde [10, 11, 12], Jagers [13], Kesten et Stigum [14] ont obtenus des théorèmes de limite centrale et des lois du logarithme itéré pour les processus de Galton-Watson. Peyrière a démontré un théorème de limite centrale pour les systèmes générateurs de mots [23], et Wen [28], une loi de logarithme itéré dans le cas d'une seule lettre. Dans cette section on donne une autre démonstration du résultat de Peyrière, la méthode utilisée ici peut être appliquée aux M-systèmes générateurs d'arbres. Dans la section suivante, on généralisera le résultat de [28] au cas de plusieurs lettres.

On considère une suite double de variables aléatoires :

$$\begin{array}{l} X_{1,1}\ ,\ X_{1,2}\ ,\ldots,\ X_{1,k_1}\ , \\ X_{2,1}\ ,\ X_{2,2}\ ,\ldots,\ X_{2,k_2}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n,1}\ ,\ X_{n,2}\ ,\ldots,\ X_{n,k_n}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où k_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On suppose que les v.a. d'une même ligne sont ℓ-dépendantes. (Mais on ne fait aucune hypothèse d'une ligne à l'autre).

On dira simplement que les v.a. de cette suite double sont ℓ-dépendantes.

On note

$$S_n = S_{n,k_n} = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \;,\quad \sigma^2(X_{n,j}) = \sigma^2_{n,j} \;,\; \sigma^2(S_n) = s_n^2 \quad .$$

Lemme 6.1. — Soit $\{X_{n,k_n}\}_{n\geqslant 0}$ une suite double de v.a. ℓ-dépendantes, d'espérance nulle, ayant un moment du $3^{\text{ième}}$ ordre fini. On pose

$$\Delta_n = \sup_{-\infty<y<\infty} |P\{S_n < ys_n\} - \Phi(y)|$$

où $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\, dx$. Alors, on a

$$\Delta_n \leqslant c \;.\; \sum_{j=1}^{k_n} E|X_{n,j}|^3/s_n^3 \quad ,$$

où c est une constante positive qui ne dépend que ℓ .

C'est le théorème 1 de Shergin [27].

Lemme 6.2. — Soit $\{X_{n,k_n}\}_{n\geqslant 0}$ une suite double de v.a. ℓ-dépendantes. Supposons que, (i) pour chaque n et j , il existe une constante $M_{n,j}$ telle que $s_n^{-1}|X_{n,j}| \leqslant M_{n,j}$, P.S., et telle que $\max_{1\leqslant j\leqslant k_n} M_{n,j} \to 0$; $n \to \infty$;

(ii) $\sum_{j=1}^{k_n} EX^2_{n,j}/s_n^2 = 0(1)$, $n \to \infty$. Alors, $(S_n - E(S_n))/_{s_n})$ tend vers Φ en distribution.

La démonstration découle immédiatement de l'inégalité suivante et du lemme 6.1.

$$\sum_{j=1}^{k_n} E|X_{n,j} - E(X_{n,j})|^3/s_n^3 \leqslant 2 \max_{1\leqslant j\leqslant k_n} M_{n,j} \left(\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{n,j})/s_n^2\right)$$

$$= 0\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n} M_{n,j}\right) \to 0 \;,\; n \to \infty \quad .$$

Lemme 6.3. — Soit $u(m,n)$ une fonction sur $\mathbb{N}^2$ telle que

$$\forall m \;,\; \lim_{n\to\infty} u(m,n) = 0.$$

Alors il existe une suite $\{m_n\}_{n\geq 1}$ croissante, tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{n\to\infty} u(m_n,n) = 0.$$

Démonstration. — Pour chaque m, il existe un n_m tel que $n\geq n_m \Rightarrow u(m,n)\leq 1/m$. On peut choisir $\{n_m, m\geq 1\}$ par induction tel que n_m croisse strictement avec m. Maintenant, on définit $(n_o = 1)$,

$$m_n = m \quad \text{pour} \quad n_m \leq n < n_{m+1} .$$

Alors

$$u(m_n,n)\leq \frac{1}{m} \quad \text{pour} \quad n_m\leq n < n_{m+1}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 6.1. — Soit $\{X_{n,k_n}\}_{n\geq 0}$ une suite double de v.a. ℓ-dépendantes, d'espérances nulles et de variances finies. Si pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,j}|>\varepsilon s_n\}} X_{n,j}^2 \; P(d\omega) \to 0 \; , \; n\to\infty \tag{6.1}$$

et

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} E\, X_{n,j}^2 = O(1) \; , \; n \to \infty \quad . \tag{6.2}$$

Alors, S_n/s_n converge en distribution vers Φ.

Démonstration. — On suppose d'abord $\ell = 1$.

Pour chaque $m\geq 1$, d'après (6.1), on a

$$\lim_{n\to\infty} m^2/s_n^2 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,j}|>s_n/m\}} X_{n,j}^2 \; P(d\omega) \to 0 \; ,$$

donc, en utilisant le lemme 6.3, il existe une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ décroissante, tendant vers 0, telle que

$$\frac{1}{s_n^2\varepsilon_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,j}|>\varepsilon_n s_n\}} X_{n,j}^2 \; P(d\omega) \to 0, \; n\to\infty \tag{6.1'}$$

Posons $X'_{n,j} = X_{n,j} . 1_{\{|X_{n,j}| \leqslant \varepsilon_n s_n\}}$, $1 \leqslant j \leqslant k_n$,

$$S'_n = \sum_{j=1}^{k_n} X'_{n,j} \quad , \quad s'^2_n = \sigma^2(S'_n) .$$

Puisque $E\, X_{n,j} = 0$, on a

$$E\, X'_{n,j} = \int_{\{|X_{n,j}| \leqslant \varepsilon_n s_n\}} X_{n,j}\, P(d\omega) = - \int_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n\}} X_{n,j}\, P(d\omega)$$

Utilisant les inégalités de Schwarz et de Chebychev, on obtient

$$|E\, X'_{n,j}| \leqslant \int_{\{|X_{n,j}| \geqslant \varepsilon_n s_n\}} |X_{n,j}|\, P(d\omega)$$

$$\leqslant (P(|X_{n,j}| \geqslant \varepsilon_n s_n))^{1/2} \left(\int_{\{|X_{n,j}| \geqslant \varepsilon_n s_n\}} X^2_{n,j}\, P(d\omega) \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_n s_n} \int_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n} X^2_{n,j}\, P(d\omega) \qquad (6.3)$$

donc, d'après (6.1').

$$\frac{|ES'_n|}{s_n} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n s_n^2} \left(\sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n} X^2_{n,j}\, P(d\omega) \right) \to 0 \quad , \qquad (6.4)$$

A cause de la propriété de ℓ-dépendance de la suite $\{X_{n,k_n}\}_{n \geqslant 0}$, on a

$$s'^2_n = \sum_{0 \leqslant |i-j| \leqslant \ell, 1 \leqslant i,j \leqslant k_n} E\, X'_{n,i}\, X'_{n,j} - \sum_{0 \leqslant |i-j| \leqslant \ell, 1 \leqslant i,j \leqslant k_n} E\, X'_{n,i} . E\, X'_{n,j}$$

Soit $A_{n,j} = \{\omega \; ; \; |X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n\}$, alors,

$E\, X'_{n,i}\, X'_{n,j} = E\, X_{n,i}\, X_{n,j} - \int_{A_{n,i} \cup A_{n,j}} X_{n,i}\, X_{n,j}\, P(d\omega)$. On pose

$$S_1 = \sum_{0 \leqslant |i-j| \leqslant \ell, 1 \leqslant i,j \leqslant k_n} E\, 1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X_{n,i}\, X_{n,j} \; ,$$

$$S_2 = \sum_{0 \leqslant |i-j| \leqslant \ell, 1 \leqslant i,j \leqslant k_n} E\, X'_{n,i}\, E\, X'_{n,j} \; .$$

On vérifie sans peine que

$$s'^2_n = s^2_n - S_1 - S_2 \; . \qquad (6.5)$$

En remarquant que $2\,E\,X'_{n,i}\,E\,X'_{n,j} \leq (E\,X'_{n,i})^2 + (E\,X'_{n,j})^2$, et

$(E\,X'_{n,j})^2 = (E\,1_{\{|X_{n,j}| \leq \varepsilon_n s_n\}}\,X_{n,j})^2 = (E\,1_{A_{n,j}}\,X_{n,j})^2 \leq E\,1_{A_{n,j}}\,X^2_{n,j})$

il s'en suit que

$$|S_2| \leq 2 \sum_{j=1}^{k_n} E\,1_{A_{n,j}}\,X^2_{n,j} \quad . \tag{6.6}$$

Evaluons maintenant S_1. D'une part,

$$2\,E\,1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X_{n,i} X_{n,j} \leq E\,1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X^2_{n,i} + E\,1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X^2_{n,j} \ .$$

d'autre part.

$$E\,1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X^2_{n,j} = \int_{A_{n,j}} X^2_{x,j}\,P(d\omega) + \int_{A_{n,i} \setminus A_{n,j}} X^2_{n,j}\,P(d\omega)$$

$$\leq E\,1_{A_{n,j}}\,X^2_{n,j} + \varepsilon_n^2\,s_n^2\,P\{A_{n,i}\}$$

donc

$$2\,E\,1_{\{A_{n,i} \cup A_{n,j}\}} X_{n,i} . X_{n,j} \leq E\,1_{A_{n,i}}\,X^2_{n,i} + E\,1_{A_{n,j}}\,X^2_{n,j} + \varepsilon^2 s_n^2 (P(A_{n,i}) + P(A_{n,j})) \ ;$$

il en résulte que

$$|S_1| \leq 4 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|X_{n,j}| \geq \varepsilon_n s_n} X^2_{n,j}\,P(d\omega) \tag{6.7}$$

Compte tenu de (6.1'), (6.6), (6.7), on obtient

$$\frac{s'_n}{s_n} \to 1 \ , \ n \to \infty \tag{6.8}$$

Montrons que S'_n/s'_n converge en distribution.

Puisque $\dfrac{S'_n}{s'_n} = \dfrac{S'_n - ES'_n}{s'_n} + \dfrac{ES'_n}{s'_n}$, et comme $\dfrac{ES'_n}{s'_n}$ tend vers 0, il nous suffit de démontrer que $(S'_n - ES'_n)/s'_n$ converge en loi.

En effet, $|X'_{n,i}|/s'_n \leq s_n \varepsilon_n / s'_n < 2\varepsilon_n$ par (6.8), et ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, d'après la formule (6.2) et le lemme 6.2 $(S'_n - ES'_n)/s'_n$ converge vers Φ en distribution.

Finalement, remarquons que

$$P(S_n \neq S'_n) \leqslant P\Big(\bigcup_{j=1}^{k_n} \{X_{n,j} \neq X'_{n,j}\}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_n^2 s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon_n s_n\}} X_{n,j}^2 \, P(d\omega) \to 0, \; n \to \infty \quad .$$

donc, $S_n - S'_n$ converge vers zéro en probabilité. Parce que

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{S'_n}{s'_n} \cdot \frac{s'_n}{s_n} + \frac{S_n - S'_n}{s_n}$$

on en déduit le théorème 6.1 dans le cas où $\ell = 1$.

Considérons maintenant le cas $\ell > 1$. On pose

$$k'_n = [\frac{k_n}{\ell}] + 1 \;, \; Y_{n,j} = \sum_{i=1}^{\ell} X_{n,\ell(j-1)+i} \;, \; j=1,2,\ldots,k'_n-1 \;.$$

$$Y_{n,k'_n} = \sum_{i=(k'_n-1)\ell+1}^{k_n} X_{n,i}$$

Alors, la suite double de v.a. $\{Y_{n,k'_n}\}_{n\geqslant 0}$ est 1-dépendante, par des calculs semblables aux précédents et en utilisant (6.1) et (6.2), il est facile de vérifier que

$$\sum_{j=1}^{k'_n} \frac{1}{\varepsilon_n^2 s_n^2} \int_{\{|Y_{n,j}| \geqslant \varepsilon_n s_n\}} Y_{n,j}^2 \, P(d\omega) \to 0, \; n \to \infty$$

$$\sum_{j=1}^{k'_n} EY_{n,j}^2 / s_n^2 = O(1), \; n \to \infty \quad .$$

Donc, on peut utiliser le résultat pour $\ell = 1$, et le théorème 6.1 est démontré.

Remarque : Diananda [7] a démontré ce théorème pour une suite de v.a. ℓ-dépendantes avec des variances bornées. Notre résultat est valable pour une suite double de v.a. ℓ-dépendantes, avec variances finies mais non nécessairement bornées.

Théorème 6.2. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L^2), quel que soit $Z_o \in \mathcal{G}$, la loi de $|Z_n|^{-1/2}(\langle\xi^\star, L(Z_n) - \rho^n W)\rangle)$ converge étroitement vers une loi de Gauss centrée.

Démonstration. — Si l'on suppose $Z_n = a_1 a_2 \dots a_{|Z_n|}$ fixé, on peut écrire comme en [23], $\rho^n W = \sum_{j=1}^{|Z_n|} W_{a_j}$, où la distribution de W_a (conditionnellement à Z_n) est identique à celle de W par rapport à P_a. De plus, la suite $\{W_{a_j}\}_{1 \leqslant j \leqslant |Z_n|}$ possède la propriété de ℓ-dépendance.

On a donc

$$S_n = \langle\xi^\star, L(Z_n)\rangle - \rho^n W = \sum_{j=1}^{|Z_n|} (\xi_{a_j} - W_{a_j}) = \sum_{j=1}^{|Z_n|} Y_{a_j} .$$

Dans [23], il est démontré que

$$E_{Z_o}[(\langle\xi^\star, L(Z_n)\rangle - \rho^n W)^2 | Z_n]/_{|Z_n|} \to \sigma^2 , \ P_{Z_o}\text{-P.S.}, \tag{6.9}$$

où σ est une constante positive.

Conditionnellement à Z_n, pour presque tout ω_o, on a une suite double de v.a. ℓ-dépendantes $\{Y_{n,Z_n(\omega_o)}\}_{n \geqslant 0}$, qui satisfait évidentement les conditions du théorème 6.1. D'autre part, on peut vérifier facilement

$$P\Big(\sum_{j=1}^{|Z_n|} Y_{a_j}/\sigma|Z_n|^{1/2} \leqslant y | Z_n\Big)(\omega_o) = P_{Z_o}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{|Z_n(\omega_o)|} Y_{a_j}/\sigma|Z_n(\omega_o)|^{1/2}\Big) \leqslant y\Big) , \ \text{P.S.}$$

d'après (6.9) et théorème (6.1), le second membre tend vers $\Phi(y)$.

Prenons l'espérance, on obtient le résultat que nous voulons.

Remarque : Comme dans [28], on peut donner, en utilisant le théorème 6.1 une autre démonstration du théorème 6.2.

7. UNE LOI DE LOGARITHME ITERE

Lemme 7.1. — Soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de σ-algèbres et soit $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de v.a.r. telle que

$$\sum_{n=o}^{\infty} \Delta_n = \sum_{n=o}^{\infty} \sup_{-\infty<y<\infty} |P(T_n \leqslant y|\mathcal{F}_n) - \Phi(y)| < \infty \tag{7.1}$$

Alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ T_n/(2\log n)^{1/2} \leqslant 1 \ , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ T_n/(2\log n)^{1/2} \geqslant -1 \ , \quad \text{P.S.} \tag{7.2}$$

où $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

De plus, si les X_n sont $\mathcal{F}_{n+k}$-mesurables pour certain $k\geqslant 1$, alors on peut remplacer les inégalités par des égalités dans (7.2).

Démonstration. — Puisque

$$\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(Y)) = \int_Y^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \simeq \frac{1}{Y} e^{-Y^2/2} \ , \ Y \to \infty \quad ,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\Phi(2\eta\log n)^{1/2}) \simeq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\eta}}{\log n} \begin{cases} <\infty & \text{si } \eta>1 \\ =\infty & \text{si } \eta<1 \end{cases} \tag{7.3}$$

où c est une constante positive qui ne dépend pas de n. D'autre part, par la définition de Δ_n, on a

$$-\Delta_n \leqslant P(T_n \leqslant Y|\mathcal{F}_n) - \Phi(Y) \leqslant \Delta_n \tag{7.4}$$

pour tout n et pour tout $Y \in R$.

Posons $A_n = \{\omega \ ; \ T_n > (2\eta\log n)^{1/2}\}$. En utilisant (7.1), (7.3), (7.4), il résulte que presque sûrement

$$\sum_{n=o}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_n) \leqslant \sum_{n=o}^{\infty} \{1-\Phi(2\eta\log n)^{1/2} + \Delta_n\} < \infty \ , \text{ si } \ \eta > 1 \ , \tag{7.5}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_n) \geqslant \sum_{n=o}^{\infty} \{1-\Phi(2\eta\log n)^{1/2} - \Delta_n\} = \infty \ , \text{ si } \ \eta > 1, \tag{7.6}$$

en utilisant le lemme de Borel-cantelli conditionnel

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_n) < \infty\} \underset{P.S}{\subseteq} \{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} < \infty\}$$

et par (7.5), pour presque tout ω, il existe un entier positif $n_0(\omega)$, tel que

$$T_n/(2(1+\varepsilon)\log n)^{1/2} \leqslant 1 \ , \ n > n_0(\omega) \ , \quad \varepsilon > 0$$

d'où $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \ T_n/(2\log n)^{1/2} \leqslant 1$.

Si les X_n sont $\mathcal{F}_{n+k}$-mesurables pour un certain $k \geqslant 1$, il résulte d'une généralisation du lemme de Borel-Cantelli conditionnel [20, p.144] que

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_n) = \infty\} \underset{P.S}{=\!=} \{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty\}$$

Donc, par (7.6), pour presque tout ω, on a $T_n/(2(1-\varepsilon)\log n)^{1/2} \geqslant 1$ pour une infinité de n, ce qui démontre la deuxième partie du lemme. L'assertion relative à $\underline{\lim}$ se démontre de la même façon.

Théorème 7.1. — Sous les hypothèses (MI), (D) et (L^2), quel que soit $Z_0 \in \mathcal{C}$, on a presque sûrement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\langle \xi^\star, L(Z_n)\rangle - \rho^n W}{(2\sigma^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = 1 \ , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\langle \xi^\star, L(Z_n)\rangle - \rho^n W}{(2\sigma^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = -1 \ ,$$

où σ^2 a le même sens qu'en §.6.

Démonstration. — Comme en §.6, si l'on suppose $Z_n = a_1 a_2 \ldots a_{|Z_n|}$ fixé, on a

$$\rho^n W - \langle \xi^\star, L(Z_n)\rangle = \sum_{j=1}^{|Z_n|} (W_{a_j} - \xi^\star_{a_j}) \ .$$

On pose

$$Y_{a_j} = W_{a_j} - \xi^{\star}_{a_j} \ , \ Y'_{a_j} = Y_{a_j} . 1_{\{|Y_{a_j}| \leqslant \rho^{n/2}\}} \ , \ \tilde{Y}_{a_j} = Y'_{a_j} - E\, Y'_{a_j} \ ,$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{|Z_n|} Y_{a_j} \ , \ \tilde{S}_n = \sum_{j=1}^{|Z_n|} \widetilde{Y_{a_j}} \ , \ \tilde{\Theta}^2_n = \mathrm{Var}(\tilde{S}_n | Z_n) \ , \ T_n = \frac{\tilde{S}_n}{\tilde{\Theta}_n} \ .$$

En opérant comme dans le paragraphe 7.4 de [23], on obtient que presque sûrement on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\Theta}^2_n}{|Z_n|} = \sigma^2 \tag{7.7}$$

La démonstration comporte 3 étapes.

1ère étape : On va démontrer, presque sûrement,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{(2\sigma^2 |Z_n| \log n)^{1/2}} \leqslant 1 \ , \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{(2\sigma^2 |Z_n| \log n)^{1/2}} \geqslant -1 \tag{7.8}$$

On a

$$E|\tilde{Y}_{a_j}|^3 \leqslant E|Y'_{a_j}|^3 + 3\, E|Y'_{a_j}|(E|Y'_{a_j}|)^2 + 3\, E|Y'_{a_j}|^2 . E|Y'_{a_j}| + (E|Y'_{a_j}|)^3$$

$$\leqslant 8\, E|Y'_{a_j}|^3 \leqslant 8 \sum_{a\in A} (E_{p_a} |Y'_{n,a}|^3) \tag{7.9}$$

où $Y'_{n,a} = (W_a - \xi^{\star}_a) . 1_{\{|W_a - \xi^{\star}_a| \leqslant \rho^{n/2}\}}$.

De même que dans le paragraphe 6, pour presque tout ω_o ,

$$P_{z_o}(T_n \leqslant Y | \mathcal{F}_n)(\omega_o) = P_{Z_o}\Big(\sum_{j=1}^{|Z_n(\omega_o)|} \tilde{Y}_{a_j} / \tilde{\Theta}_n(\omega_o) \leqslant Y \Big) \ , \quad \text{P.S.}$$

de la même façon qu'en §.6, par le lemme 6.1 et (7.9), on obtient presque sûrement

$$\Delta_n = \sup_{-\infty<Y<\infty} |P(T_n \leqslant Y | \mathcal{F}_n) - \Phi(Y)|$$

$$\leqslant c. \sum_{j=1}^{|Z_n|} E|\tilde{Y}_{a_j}|^3 / \tilde{\Theta}^3_n \leqslant 8\, c. \Big(\sum_{a\in A} E_{p_a} |Y'_{n,a}|^3 \Big) . |Z_n| / \tilde{\Theta}^3_n \ .$$

Compte tenu de (7.7) et $\inf_n \frac{|Z_n|}{\rho^n} > 0$ P_{Z_o}-presque sûrement, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n = 0(\sum_{a\in A} (\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n/2} E_{P_a} |Y'_{n,a}|^3)$$

$$= 0(\sum_{a\in A} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 (\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n/2} 1_{\{|x|\leq \rho^{n/2}\}}) dF_a(x)$$

$$= 0(\sum_{a\in A} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \, 0(x^{-1}) \, dF_a(x)) = 0(\sum_{a\in A} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF_a(x)) < \infty \ ,$$

où $F_a(x)$ désigne la fonction de distributions de $W_a - \xi_a^\star$.

Donc, pour démontrer (7.8), il suffit de démontrer

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ S_n / (2\sigma^2 |Z_n| \log n)^{1/2} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \ T_n / (2\log n)^{1/2} \qquad \text{P.S.}$$

D'après les définitions des Y'_{a_j}, $\tilde{Y}_{a_j}$, T_n, il suffit de démontrer que presque sûrement,

$$\sum_{j=1}^{|Z_n|} (Y_{a_j} - Y'_{a_j}) = o(\rho^{n/2} (\log n)^{1/2}) \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{|Z_n|} EY'_{a_j} = o(\rho^{n/2} (\log n)^{1/2}) \ ,$$

en utilisant le lemme de Kronecker, il suffit de démontrer que, presque sûrement,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho^{-n/2} (\log n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{|Z_n|} |Y_{a_j} - Y'_{a_j}| < \infty \qquad (7.10)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho^{-n/2} (\log n)^{-1/2} \sum_{j=1}^{|Z_n|} E|Y'_{a_j}| < \infty \qquad (7.10')$$

Remarquons que $E\, Y_{a_j} = 0$ (conditionnellement à Z_n)

$$E|Y'_{a_j}| = |E(Y'_{a_j} - Y_{a_j})| \leq E|Y'_{a_j} - Y_{a_j}|$$

$$= E|Y_{a_j}| 1_{\{|Y_{a_j}| > \rho^{n/2}\}}$$

et remarquons que $|Z_n| = o(\rho^n)$.

Pour démontrer (7.10'), il suffit que, P_{Z_o}-presque sûrement,

$$\sum_{a\in A} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \rho^{n/2}(\log n)^{-1/2} E_{\mathfrak{p}_a} Y_a . 1_{\{|Y_a|>\rho^{n/2}\}} \right) < \infty \qquad (7.11)$$

(Pour démontrer 7.10, on prend l'espérance). En effet, on a même

$$\sum_{n=o}^{\infty} \rho^{n/2} E_{\mathfrak{p}_a} |Y_a| . 1_{\{|Y_a|>\rho^{n/2}\}} = E_{\mathfrak{p}_a} |Y_a| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n/2} . 1_{\{|Y_a|>\rho^{n/2}\}} \right)$$

$$= O(E_{\mathfrak{p}_a} |Y_a|^2) < \infty \quad .$$

Ceci démontre (4.11)

2ème étape : Soit a_j la $j^{\text{ième}}$ lettre du mot $Z_n = a_1 a_2 \ldots a_{|Z_n|}$. On commence un processus à partir de a_j, et on note $Z_{a_j,k}$ la $k^{\text{ième}}$ génération du processus. Soit $W_{a_j,k} = \rho^{-k} \langle \xi^\star, L(Z_{a_j,k}) \rangle$.

De même que dans §.4.4 de [23] , nous avons les faits suivants.

1°) Conditionnellement à Z_n, la distribution de $W_{a,k}$ est identique à celle de W_k par rapport à P_a et les $W_{a_j,k}$ sont ℓ-dépendants. Quand k tend vers l'infini, $W_{a,k}$ tend vers W_a , comme précédemment. Donc sa distribution est identique à celle de W par rapport à P_a.

2°) $L(Z_{n+k}) = \sum_{j=1}^{|Z_n|} L(Z_{a_j,k})$

donc

$$\rho^n(W_{n+k}-W_n) = \rho^n(\rho^{-(n+k)} \langle \xi^\star, L(Z_{n+k}) \rangle - \rho^{-n} \langle \xi^\star, L(Z_n) \rangle)$$

$$= \rho^{-k} \langle \xi^\star, L(Z_{n+k}) \rangle - \langle \xi^\star, L(Z_n) \rangle$$

$$= \rho^{-k} \sum_{j=1}^{|Z_n|} \langle \xi^\star, L(Z_{a_j,k}) \rangle - \langle \xi^\star, L(Z_n) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{|Z_n|} W_{a_j,k} - \sum_{j=1}^{|Z_n|} \xi^\star_{a_j} = \sum_{j=1}^{|Z_n|} (W_{a_j,k} - \xi^\star_{a_j})$$

3°) $E_{Z_o}\left(\sum_{j=1}^{|Z_n|}(\xi^\star_{a_j}-W_{a_j,k})^2|Z_n\right)/_{|Z_n|}$ a une limite σ_k^2 lorsque n tend vers l'infini.

D'autre part, on peut vérifier sans peine que conditionnellement à Z_n,

$$E(W_{a_j,k}\,W_{a_\ell,k}) \to E(W_{a_j}\,W_{a_\ell}),\ k\to\infty$$

on a donc

$$\sigma_k \to \sigma \quad , \quad k\to\infty \tag{7.12}$$

Si l'on note $S_n' = \rho^n(W_{n+k}-W_n)$, alors, S_n' est $\mathcal{F}_{n+k}$-mesurable. Répétons le procédé de l'étape 1 et utilisons la deuxième partie du lemme 7.1. Nous obtenons

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{S_n'}{(2\sigma_k^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = 1\ ,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{S_n'}{(2\sigma_k^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = -1,\quad \text{P.S.}$$

3ème étape :

$$\frac{\rho^n W-\langle\xi^\star,L(Z_n)\rangle}{(2\sigma^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = \frac{\rho^{n+k}(W-W_{n+k})}{(2\sigma^2|Z_{n+k}|\log(n+k))^{1/2}}\left(\frac{|Z_{n+k}|\log(n+k)}{|Z_n|\log n}\right)^{1/2}\rho^{-k}$$

$$+\ \frac{\rho^n(W_{n+k}-W_n)}{(2\sigma_k^2|Z_n|\log n)^{1/2}}\cdot\frac{\sigma_k}{\sigma}\ .$$

Nous avons montré à l'étape 1 que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\rho^{n+k}(W-W_{n+k})}{(2\sigma^2|Z_{n+k}|\log(n+k))^{1/2}} \geqslant -1\ ,$$

et à l'étape 2 que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\rho^n(W_{n+k}-W_n)}{(2\sigma_k^2|Z_n|\log n)^{1/2}} = 1\quad ;$$

de plus, $\sigma_k\to\sigma$ par (7.12), on a donc finalement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\rho^n(W-W_n)}{(2\sigma^2 \log n)^{1/2}} \geqslant (-1)\rho^{-k/2} + \frac{\sigma_k}{\sigma}$$

le second membre tend vers 1 quand k tend vers l'infi.

De la même façon, on démontre que la limite inférieure est -1.

8. UNE PROPRIETE D'HOMOGENEITE DES ARBRES GENEALOGIQUES

Dans cette partie nous améliorons le résultat de [23] relatif à la propriété d'homogénéité des arbres généalogiques.

Nous considérons les M-systèmes généraux définis à la section 1. A chaque trajectoire de la chaîne $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, on associe un arbre T : l'ensemble des sommets de T est la réunion abstraite des V_{Z_n}, un élément de V_{Z_n} est lié aux sommets de $V_{Z_{n+1}}$ qu'il a engendrés. On note $\bar{T}$ la compactification naturelle de T [6] et l'on pose $\partial T = \bar{T}\setminus T$.

Si $x \in \partial T$, pour chaque $n \geq 0$, il existe un unique sommet $a_n \in V_{Z_n}$ tel que x soit approché par des descendants de a_n ; on note $I_n(x)$ ou I_{a_n} l'intersection de ∂T et de l'adhérence dans $\bar{T}$ des descendants de a_n.

Théorème 8.1. — Sous les hypothèses (MI), $(L(\text{Log } L)^2)$ et (D), pour chaque $Z_0 \in \mathcal{Y}$, P_{Z_0}-presque sûrement il existe une mesure de probabilité, μ, sur ∂T telle que, pour u-presque tout x, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{n} = -\log \rho.$$

Démonstration. — P_{Z_0}-presque sûrement, une collection $\{W_a\}_{a\in T}$ est définie : si $a \in V_{Z_n}$, W_a est la limite lorsque $m \to \infty$ de $\rho^{-m}\langle \xi^\star, L_{a,m}\rangle$ où $L_{a,m}$ est le vecteur qui décrit la décomposition de la descendance de a dans Z_{n+m}.
On a $\rho W_a = \sum_b W_b$ où la dernière somme est étendue aux sommets de Z_{n+1} engendrés par le sommet a de Z_n.

Il existe donc une unique mesure de probabilité μ sur ∂T telle que, pour tout $a \in T$, on ait $\mu(I_a) = \rho^{-n} W^{-1} W_a$, où n est le numéro de la génération à laquelle a appartient.

$$E_{Z_o}\left(\int [\rho^n \mu(I_n(x))]^{-1} | Z_n\right) = E_{Z_o}\left(\sum_{a \in V_{Z_n}} \rho^{-n} | Z_n\right) = |Z_n|/_{\rho^n} ,$$

d'où

$$E_{Z_o}\left(\int [\rho^n \mu(I_n(x))]^{-1} \, d\mu(x)\right) = E_{Z_o}(|Z_n|/_{\rho^n}) < \infty ,$$

donc

$$E_{Z_o}\left(\int [\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} (\rho^n \mu(I_n(x)))^{-1}] d\mu(x)\right) < \infty$$

Par conséquent, P_{Z_o}-presque sûrement, pour μ presque tout x, il existe A tel que pour tout n,

$$\frac{1}{n^2 \rho^n \mu(I_n(x))} \leqslant A ,$$

d'où, P_{Z_o}-presque sûrement, μ-presque tout x, nous avons

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{n} \geqslant -\log \rho .$$

Maintenant, soient $\varepsilon > 0$ et $1 < \alpha < 1+\varepsilon$.

$$E_{Z_o}\left(W \int 1_{\{W\mu(I_n(x) \geqslant \rho^{-n}\alpha^n\}} d\mu(x) | Z_n\right)$$

$$= E_{Z_o}\left(W \sum_{a \in V_{Z_n}} 1_{\{W\mu(I_a) \geqslant \rho^{-n}\alpha^n\}} . \mu(I_a) | Z_n\right)$$

$$= \rho^{-n} E_{Z_o}\left(W \sum_{a \in V_{Z_n}} W^{-1} W_a 1_{\{W_a \geqslant \alpha^n\}} | Z_n\right)$$

$$= \rho^{-n} E_{Z_o}\left(\sum_{a \in V_{Z_n}} W_a 1_{\{W_a \geqslant \alpha^n\}} | Z_n\right)$$

$$\leqslant \rho^{-n} |Z_n| \left(\sum_{a \in A} E_a W . 1_{\{W \geqslant \alpha^n\}}\right) ,$$

d'où

$$E_{Z_o}[W\mu\{W\mu(I_n(x)]\geqslant \rho^{-n}\alpha^n] = O(\sum_{a\in A} E_a\, W.1_{\{W\geqslant\alpha^n\}}) \ .$$

Donc, en utilisant l'hypothèse $(L(\log L)^2)$ et le théorème 5.2 , nous avons

$$\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o}\ [W.\mu\{W\mu(I_n(x))\geqslant \rho^{-n}\alpha^n]$$

$$= O[\sum_{a\in A} E_a\, W(\sum_{n=o}^{\infty} 1_{\{W\geqslant\alpha^n\}})] = O(\sum_{a\in A} E_a\, W\log^+ W) < \infty \ .$$

Alors, si $1<\alpha<1+\varepsilon$, $\sum_{n=o}^{\infty} E_{Z_o}[W\mu\{W\mu(I_n(x))\geqslant\rho^{-n}\alpha^n\}]$ est sommable.

Donc, P_{Z_o}-presque sûrement, on a

$$\sum_{n=o}^{\infty} W\mu\{W\mu(I_n(x))\geqslant \rho^{-n}\alpha^n\} < \infty \ ,$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli, P_{Z_o}-presque sûrement, pour μ presque tout x, on a

$$W\mu(I_n(x)\leqslant \rho^{-n}\alpha^n \ .$$

D'où

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\mu(I_n(x))}{n} \leqslant -\log\rho$$

P_{Z_o}-presque sûrement, μ-presque tout. Ceci achève la démonstration.

Ce théorème permet de calculer la dimension de Hausdorff-Besicovith d'ensembles résultat de constructions de B. Mandelbrot.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Asmuseen, Some convergence rates for supercritical branching processes, Prepint, 5 (1974), Ins. math. Sat. University of Copenhagen.

[2] S. Asmuseen, Some martingale methodes in the theory of supercritical branching processes, Advances in Probability and Related topics 5, 1-26 (1976).

[3] S. Asmuseen, Almost sure behavior of linear functionals of supercritical branching processes, Trans. American Math., volume n°1, pp. 233-248 (1977).

[4] S. Asmuseen and H. Hering, Branching Processes, Birkhäuser, 1983.

[5] L.B. Athreya und P.E. Ney, Branching processes, Springer New-York, 1972.

[6] P. Cartier, Fonctions harmoniques sur un arbre, Sympos. math., 9, Calcolo Prob., theor. Turbolenza 1971, pp.203-270 (1972).

[7] P.H. Dianarda, The central limit theorem for m-dependent variables, Proceedings of the Cambridge philophical Society, vol. 51 (1953), pp.92-95.

[8] J. L. Doob, Stochastic processes, J.L. Doob, J. Wiley, New-York, 1953.

[9] T.E. Harris, The theory of branching processes, Berlin : Springer 1963.

[10] C.C. Heyde and B.M. Brown, An invariance principle and some convergence rate results for branching processes, Z, Wahr, 20 (1971) 270-278.

[11] C.C. Heyde, Some central limit analogues for supercritical Galton-Watson processes, J. appl. Prob. 8, 52-59, 1971.

[12] C.C. Heyde, Some almost sure convergence theorems for branching processes, Z. Wahr. 20 (1971) 189-192.

[13] P. Jagers, Branching processes with biological applications, J. Wiley 1975.

[14] H. Kesten and B.P. Stigum, Additional limit theorems for indecomposable multidimensional Galton-Watson processes. Ann, Math., Stat. 37, 1463-1481 (1966).

[15] H. Kesten and B.P. Stigum, A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. Ann., Math, Stat. 37 1211-1233 (1966).

[16] A. Lindenmayer, Mathematical models for cellular interaction in developement, J. theoretical biology, 18 (1968), 280-315.

[17] B. Mandelbrot, Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucles : les cordonnets discrets et fractals, C.R. Acad. Sc., Paris, 286 (1978), 993-936.

[18] B. Mandelbrot, Fractal limits of random beadsets and geometric imbedding of birth processes.

[19] B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of matrice, W.H. Freeman and Compagny, 1982.

[20] J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson et Cie, 1970.

[21] J. Peyrière, Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction, I.B.M. Research report, RC-7417.

[22] J. Peyrière, Processus de naissance avec interactions des voisins, C.R. Acad. Sc., Paris, 289 (1979), 223-224 et 557.

[23] J. Peyrière, Processus de naissance avec interactions voisins, évolution de graphes, Ann. Inst. Fourier 31 (1981), 187-218.

[24] J. Peyrière, Substitutions aléatoires itérées, Séminaire de théorie des Nombres, Année 1980-1981 - exposé 17, Bordeaux.

[25] J. Peyrière, Frequency of patteans in certain graphs and in penrose tilings, Prépublication, Dép. de Math., Université de Paris-Sud, 85 T 31.

[26] E. Seneta, Non-negative matrices, J. Wiley (1973).

[27] V.V. Shergin, On the convergence rate in the central limit theorem for m-dependant random variables. Theory Prob., Appl. 24 782-796 (1974).

[28] Z.Y. Wen, Sur quelques théorèmes de convergence du processus de naissance avec interactions des voisins, à paraître.

No. d'impression 854
4ème trimestre 1986