Sur le codage du flot géodésique dans un arbre.

Anne Broise-Alamichel Frédéric Paulin

29 janvier 2004

Résumé

Given a tree T and a group Γ of automorphisms of T, we study the markovian properties of the geodesic flow on the quotient by Γ of the space of geodesics of T. For instance, when T is the Bruhat-Tits tree of a semi-simple connected algebraic group $\underline{G}$ of rank one over a non archimedian local field $\widehat{K}$, and Γ is a (possibly non uniform) lattice in $\underline{G}(\widehat{K})$, we prove that the type preserving geodesic flow is Bernoulli.[1]

1 Introduction

Soit $\widehat{K}$ un corps local, $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple, défini sur ce corps, $\underline{S}$ un tore $\widehat{K}$-déployé maximal, et Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$. Les propriétés dynamiques et ergodiques de l'action de $S = \underline{S}(\widehat{K})$ par translations à droite sur l'espace quotient $\Gamma\backslash G$ font actuellement l'objet de nombreuses études (voir par exemple [Mar1, Zim, Mar2, Tom, LW]). Nous nous intéresserons dans cet article au cas où $\underline{S}$ est de $\widehat{K}$-rang 1 et $\widehat{K}$ est non archimédien, surtout dans la situation peu étudiée où Γ est non uniforme (l'existence d'un tel Γ implique que $\widehat{K}$ est un corps de séries formelles de Laurent sur un corps fini). Pour $\widehat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$, $\underline{G} = \mathrm{PGL}_2$, $\underline{S}$ le sous-groupe diagonal et $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[X])$, la situation a été complètement décrite dans [BP], en termes arithmétiques.

Si M est le sous-groupe compact maximal de S, il revient presqu'au même (voir par exemple [Moz, LP]) d'étudier l'action par translations à droite du groupe S/M sur l'espace $\Gamma\backslash G/M$. Celle-ci s'interprète en termes d'actions de groupes sur des arbres, de la manière suivante. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits [BT] de $(\underline{G}, \widehat{K})$ (biparti, de sommets bleus ou verts), $\mathcal{G}T$ l'espace des géodésiques de T (i.e. des isométries $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ d'origine $\ell(0)$ un sommet de $\mathbb{T}$), et $(n, \ell) \mapsto \{t \mapsto \ell(t+n)\}$ le flot géodésique sur $\mathcal{G}T$. Alors G agit transitivement (par translation au but) sur le sous-espace $\mathcal{G}_0T$ de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques d'origine un sommet vert. L'action à droite de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ correspond à l'action du temps 2 du flot géodésique.

1. **AMS codes:** 20 G 25, 20 E 08, 37 A 25. **Keywords:** group actions on trees, Bruhat-Tits trees, geodesic flow, coding, Bernoulli shifts.

Lorsque Γ est uniforme, il est connu (voir par exemple [CP]) que l'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est Bernoulli pour la mesure naturelle sur $\Gamma\backslash G/M$ venant de la mesure de Haar sur G (voir par exemple [HK] pour les définitions et rappels de théorie ergodique). Nous généralisons ce résultat au cas non uniforme.

Théorème 1.1 *Pour tout réseau Γ de $G = \underline{G}(\widehat{K})$, l'action par translations à droite de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est Bernoulli.*

Nous montrons en fait un résultat (voir le théorème 4.2) valable pour de nombreux sous-groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres localement finis au sens de [Rob, Pau].

Plus généralement, étant donné un arbre T et un sous-groupe d'automorphismes Γ de T, nous nous intéresserons au codage du flot géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. Nous donnons dans la partie 5 des codages intrinsèques, au sens où ils n'utilisent que la structure de graphe de groupes quotient (au sens de [Ser]) de T par Γ. Les propriétés canoniques de cette construction devraient être utiles (voir par exemple [LP]). Ces codages markoviens (sur des alphabets éventuellement infinis) sont obtenus pour le cas d'actions k-acylindriques au sens de Sela [Sel] de n'importe quel groupe Γ sur n'importe quel arbre simplicial T (en particulier sans supposer T localement fini, et sans supposer finis les stabilisateurs de sommets dans Γ), voir le théorème 5.5.

Les réseaux non uniformes décrit dans le début de cette introduction n'agissent pas de manière acylindrique sur leur arbre de Bruhat-Tits, mais nous montrons dans la partie 5.2 comment modifier ces actions pour les rendre acylindriques. En particulier, l'action modifiée de l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[X])$ sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\mathrm{PGL}_2, \mathbb{F}_q((X^{-1})))$ est 5-acylindrique, et donne lieu à un codage par la méthode générale, qui est très proche du codage particulier obtenu dans [BP].

La partie 5 de cet article a été écrite avant la partie 4.1 de [Pau], où le second auteur étudie d'autres propriétés dynamiques du flot géodésique sur un arbre, et en particulier certains arguments de la partie 4.1 de [Pau] ont été inspirés de ceux de la partie 5, et pas inversement. Mais le flot géodésique n'est a priori pas markovien, quand on autorise de la torsion dans les réseaux. C'est précisément pour obtenir un caractère markovien (et donc un codage par une dynamique symbolique) que nous avons introduit un "flot géodésique d'ordre k" sur un arbre dans la partie 5.

Remerciements : Nous remercions J.-P. Thouvenot pour son aide précieuse, en particulier concernant les références, ainsi que S. Mozes et F. Ledrappier.

2 Notations et rappels

Nous renvoyons à [Ser, Coo, Pau, Rob] pour des preuves et compléments concernant cette partie. Pour toute action d'un groupe Γ sur un ensemble, nous notons Γ_x le stabilisateur d'un point x. Par boule d'un espace métrique, nous entendons boule fermée.

2.1 Graphes de groupes, flot géodésique sur un arbre

Si X est un graphe, on note VX l'ensemble de ses sommets et EX l'ensemble de ses arêtes. Pour toute arête e, on désigne par $o(e)$ son sommet origine, $t(e)$ son sommet terminal et $\overline{e}$ son arête opposée. Les longueurs d'arêtes (des réalisations géométriques) sont supposées égales à 1.

On appelle *graphe de groupes*, et on note (X, G_*), la donnée des objets suivants :

- un graphe X (supposé connexe dans la suite);
- pour tout sommet v de X, un groupe G_v;
- pour toute arête e de X, un groupe G_e, tel que $G_e = G_{\overline{e}}$;
- pour toute arête e de X, un morphisme injectif $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$.

Par exemple, si Γ est un groupe d'automorphismes (sans inversion) d'un arbre T, alors le graphe $X = \Gamma\backslash T$ est muni d'une structure de graphe de groupes, appelée *graphe de groupes quotient* et notée $\Gamma\backslash\backslash T$. On procède ainsi pour la construire. On fixe un relevé $\widetilde{v}$ dans T de chaque sommet v de X, un relevé $\widetilde{e}$ dans T de chaque arête e de X, on impose que $\overline{\widetilde{e}} = \widetilde{\overline{e}}$ et on fixe un élément g_e de Γ tel que $g_e\widetilde{t(e)} = t(\widetilde{e})$. On définit alors G_e et G_v comme les fixateurs dans Γ de $\widetilde{e}$ et $\widetilde{v}$. Alors $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$ est définie comme la restriction à G_e de la conjugaison par g_e^{-1}. Le graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$ ne dépend pas (à isomorphisme de graphes de groupes près), du choix des $\widetilde{e}$, $\widetilde{v}$ et g_e (voir [Ser] pour tout complément). Si T est localement fini et Γ est discret, alors les groupes G_e et G_v sont finis. Si de plus $\Gamma\backslash T$ est fini, alors $\Gamma\backslash\backslash T$ est un graphe (connexe) fini de groupes finis.

Soit T un arbre simplicial, muni de sa topologie faible. L'*espace des géodésiques* de T est l'espace $\mathcal{G}T$ des applications simpliciales injectives de $\mathbb{R}$ dans T (avec $\mathbb{R}$ muni de sa structure simpliciale usuelle d'ensemble de sommets $\mathbb{Z}$), muni de la topologie compacte-ouverte. Comme T est un arbre, la condition d'injectivité est équivalente à la condition d'injectivité locale. Notons $\mathrm{Aut}(T)$ son groupe d'automorphismes sans inversion. Il est localement compact pour la topologie compacte-ouverte si T est localement fini.

Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{G}T$ par translations à la source $(n, f) \mapsto \{x \mapsto f(x + n)\}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(T)$ agit par homéomorphismes sur $\mathcal{G}T$ par composition au but $(\gamma, f) \mapsto \{x \mapsto \gamma f(x)\}$. Ces deux actions commutent. Appelons *transformation géodésique sur* $\mathcal{G}T$ l'application $\widetilde{\varphi} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ définie par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(t + 1)\}$. Appelons *renversement du temps sur* $\mathcal{G}T$ l'application $\widetilde{\tau} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ définie par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(-t)\}$.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$. On munit les quotients $\Gamma\backslash T$ et $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ de la topologie quotient. On note $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ et $\pi' : \mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ les projections canoniques. L'application $\widetilde{\varphi}$ induit une application continue $\varphi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$, aussi appelée la *transformation géodésique* sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. L'application $\widetilde{\tau}$ induit une application $\tau : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$, que nous appelerons *renversement du temps sur* $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$.

2.2 Groupe géométriquement fini, mesure de Bowen-Margulis

Soit T un arbre localement fini. Notons $T \cup \partial T$ la compactification par l'espace des bouts de T, et $\partial_2 T$ le produit $\partial T \times \partial T$ privé de sa diagonale. Rappelons que toute arête e de T définit une partition en deux parties $\partial_- e, \partial_+ e$ de ∂T, de sorte que toute droite géodésique d'origine dans $\partial_- e$ et d'extrémité dans $\partial_+ e$ parcourt e suivant l'orientation de e. Nous dirons que T est *uniforme* s'il existe un sous-groupe discret dans $\mathrm{Aut}(T)$ tel que le graphe $\Gamma\backslash T$ est fini. Par exemple, un arbre régulier ou bi-régulier est uniforme.

Notons x_0 un point base de T. L'*entropie volumique* de T, qui ne dépend pas de x_0, est

$$\delta_T = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Card}(B(x_0, n) \cap VT) \ .$$

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(T)$. En particulier, l'action de Γ sur $\mathcal{G}T$ est proprement discontinue (mais pas forcément libre en général), et donc $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est localement compact.

Le groupe Γ est dit *non élémentaire* s'il ne préserve ni point ni paire de points de $T \cup \partial T$. Il existe alors un unique plus petit sous-arbre Γ-invariant non vide, noté $T_{\Gamma,\min}$.

On appelle *rayon cuspidal de groupes* un graphe de groupes finis (R, G_*) avec R un rayon, de suite des arêtes consécutives $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orientées vers le bout de R, tel que pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, le morphisme $G_{e_n} \to G_{o(e_n)}$ est surjectif. Le groupe Γ est dit *géométriquement fini* s'il est non élémentaire et si le graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T_{\Gamma,\min}$ est réunion d'un graphe fini de groupes finis et, recollés en leurs extrémités, d'un nombre fini de rayons cuspidaux de groupes. Voir [Pau] pour l'équivalence avec la définition dynamique usuelle (comme dans [Rob]), et des développements.

Nous renvoyons par exemple à [BH] pour la définition des horoboules (fermées par défaut) dans un espace métrique géodésique CAT(0). Comme montré dans [Pau], la préimage des rayons cuspidaux maximaux dans $T_{\Gamma,\min}$ forme alors une famille disjointe Γ-invariante maximale d'horoboules ouvertes. Les points à l'infinis de ces horoboules, qui sont donc les extrémités des rayons géodésiques relevant les rayons cuspidaux, seront appelés les *points paraboliques bornés* de Γ (voir [Rob, Pau] pour l'explication dynamique).

Par exemple, soit $\widehat{K}$ un corps local non archimédien, $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1. Soit Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$. Alors, par un théorème de A. Lubotzky [Lub], l'action de Γ sur T est géométriquement finie et $T = T_{\Gamma,\min}$.

L'*exposant critique* $\delta = \delta_\Gamma$ de Γ, qui ne dépend pas de x_0, est l'élément de $[0, +\infty]$ tel que la *série de Poincaré* de Γ

$$P(s) = P_{\Gamma,x_0}(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x_0,\gamma x_0)}$$

converge pour $s > \delta$ et diverge pour $s < \delta$. Le groupe Γ est *de type divergent* si sa série de Poincaré $P(s)$ diverge pour $s = \delta$.

Si Γ est de type divergent d'exposant critique fini non nul, alors il existe (voir [Coo]) une famille $(\mu_x)_{x\in VT}$ de mesures finies sur ∂T, appelée *mesure de Patterson-Sullivan*, unique à scalaire multiplicatif près, de supports $\partial T_{\Gamma,\min}$, telle que

- $\forall\, \gamma \in \Gamma\ ,\ \ \gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x}$,
- $\forall\, x, y \in VT,\ \forall\, \xi \in \partial T\ ,\ \ \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta\beta_\xi(x,y)}$,

où $\beta_\xi(x,y) = d(x,u) - d(u,y)$ pour tout u suffisamment proche de ξ.

Pour toute géodésique ℓ, notons ℓ_-, ℓ_+ les points de ∂T origine et extrémité de ℓ. L'application $\mathcal{G}T \to \partial_2\Gamma \times \mathbb{Z}$, qui à ℓ associe (ℓ_-, ℓ_+, t) avec t la distance algébrique sur ℓ entre $\ell(0)$ et le point de ℓ le plus proche de x_0, est un homéomorphisme. Ce paramétrage dépend du point base x_0. Si Γ est de type divergent d'exposant critique fini non nul, on définit une mesure $\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}$ sur $\mathcal{G}T$, appelée *mesure de Bowen-Margulis*, par

$$d\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}(\ell_-, \ell_+, t) = \frac{d\mu_{x_0}(\ell_-)d\mu_{x_0}(\ell_+)dt}{d_{x_0}(\ell_-, \ell_+)^{2\delta}}\ ,$$

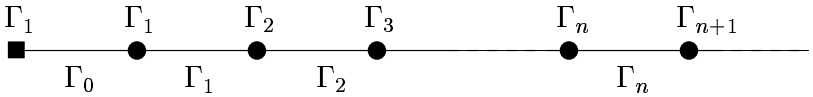
où d_{x_0} est la distance sur ∂T définie par $d_{x_0}(\ell_-, \ell_+) = e^{-u}$ avec u la longueur de l'intersection des rayons géodésiques issus de x_0 convergeant vers (ℓ_-, ℓ_+). La mesure $\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}$ ne dépend pas de x_0. Elle est invariante par la transformation géodésique sur $\mathcal{G}T$ et par Γ. Elle induit donc une mesure m_{BM} sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, appelée *mesure de Bowen-Margulis sur* $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. Le support de m_{BM} est $\Gamma\backslash\mathcal{G}T_{\Gamma,\min}$. Lorsque Γ est cocompact, cette mesure est la mesure d'entropie maximale pour φ (voir [CP, Kai, Bou]). Lorsque T est un arbre de Bruhat-Tits comme dans l'introduction, alors la restriction de $\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}$ à $\mathcal{G}_0T$ (défini dans l'introduction) s'identifie (à un scalaire multiplicatif près) avec l'image dans G/M de la mesure de Haar de G.

3 Finitude de la mesure de Bowen-Margulis

Proposition 3.1 *Soit T un arbre localement fini et Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$. Si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme, alors*

- *δ_Γ est fini, non nul;*
- *$\delta_\Gamma = \delta_{T_{\min}}$;*
- *Γ est de type divergent;*
- *pour tout point parabolique borné ξ de ∂T et tout point y_0 dans VT, il existe une constante $c \geq 1$ telle que $\frac{1}{c}\, e^{n\delta_T} \leq \mathrm{Card}\ (B(y_0, 2n) \cap \Gamma_\xi\, y_0) \leq c\, e^{n\delta_T}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$;*
- *pour tout point parabolique borné ξ de ∂T, on a $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_\Gamma/2$;*
- *la mesure de Bowen-Margulis sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est finie.*

Remarques. (1) L'hypothèse que $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme ne peut être omise. En effet, pour tout n dans $\mathbb{N}$, posons $q_n = 2^{2^n}$ et $\Gamma_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{q_n}$. Notons que Γ_n s'injecte naturellement dans Γ_{n+1}. Considérons le graphe de groupes suivant (de type Nagao au sens de [BL]), qui est géométriquement fini (et de volume fini) :



Soit T le revêtement universel de ce graphe de groupes (qui est un arbre non uniforme, car de valences non uniformément bornées) et Γ son groupe fondamental, pour des choix indifférents de points bases (voir [Ser]). Si x_0 est un sommet de T, préimage de l'origine de ce rayon de groupes, alors la boule de rayon $2n$ et de centre x_0 contient au moins $q_n/q_{n-1} - 1 = q_{n-1} - 1$ points, donc

$$\delta_\Gamma \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log(q_{n-1} - 1) = +\infty \ ,$$

et l'exposant critique de Γ est infini.

(2) Soit T un arbre localement fini et Γ' un sous-groupe discret de Aut T. Alors $\delta_{\Gamma'} \leq \delta_T$, car

$$P_{\Gamma',x_0}(s) = (\text{Card } \Gamma'_{x_0}) \sum_{y\in\Gamma x_0} e^{-sd(x_0,y)} \leq (\text{Card } \Gamma'_{x_0}) \sum_{y\in VT} e^{-sd(x_0,y)} \ ,$$

qui converge si $s > \delta_T$. Si Γ' est non élémentaire, alors $\delta_{\Gamma'}$ est non nul, car alors Γ' contient au moins un groupe libre de rang 2 de Schottky (voir par exemple [Lub]). Si les valences de T sont uniformément bornées, disons par $q+1$, alors $\delta_{\Gamma'}$ est fini, car $\delta_T \leq \log q$.

Preuve de la proposition 3.1. Quitte à remplacer T par $T_{\Gamma,\min}$, nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$.

Si T est un arbre uniforme ayant au moins trois bouts, il est bien connu (voir par exemple [Coo, Bou, Rob]) que δ_T est fini et non nul, qu'il existe une constante $c_1 \geq 1$ telle que pour tout x dans VT et n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, pour toute composante connexe C de $T - \{x\}$,

$$\frac{1}{c_1}\, e^{n\delta_T} \leq \text{Card } \ (B(x,n) \cap VT \cap C) \leq c_1\, e^{n\delta_T} \ , \quad (*)$$

et donc que la série $\sum_{y\in VT} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge en $s = \delta_T$. En particulier, la première assertion de la proposition 3.1 découle de la seconde remarque ci-dessus.

Soit ξ un point parabolique borné de ∂T. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des sommets consécutifs d'un rayon géodésique d'extrémité ξ, se projetant sur un rayon cuspidal dans $\Gamma\backslash T$. Alors l'intersection avec $\Gamma_\xi\, x_0$ de la sphère $S(x_0, 2n)$ est la réunion des $C \cap S(x_n, n)$, où C est une composante connexe de $T - \{x_n\}$ qui ne contient ni x_{n-1} ni x_{n+1}. Comme T est de valences uniformément bornées, la quatrième assertion de

la proposition 3.1 découle de $(*)$. Cette quatrième assertion implique en particulier que $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_T/2$.

Si T_0 est le graphe obtenu en enlevant à l'arbre T la réunion de la famille disjointe Γ-invariante maximale d'horoboules ouvertes, alors VT_0 ne contient qu'un nombre fini d'orbites sous Γ. Par conséquent, la série de Poincaré de Γ diverge si et seulement si la série $\sum_{y\in VT_0} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge.

Montrons qu'il existe une constante $c_2 \geq 1$ telle que, pour toute horosphère H dans T, passant par un sommet de T, bord d'une horoboule HB ne contenant pas x_0, et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\text{Card } (B(x_0,n)\cap H) \leq \text{Card } (B(x_0,n)\cap HB\cap VT) \leq c_2 \text{ Card } (B(x_0,n)\cap H)\ . \quad (**)$$

En effet, soit ξ_0 le point à l'infini de HB. On peut supposer que l'intérieur de HB rencontre $B(x_0,n)$. Notons p la distance de x_0 à HB, et y le point du rayon géodésique entre x_0 et ξ_0, à distance $\frac{n+p}{2}$ de x_0. Alors $B(x_0,n)\cap HB = B(y,\frac{n-p}{2})$, et si B est la réunion des composantes connexes de $B(y,\frac{n-p}{2}) - \{y\}$ rencontrant H, alors $B(x_0,n)\cap H = B\cap S(y,\frac{n-p}{2})$. Or par $(*)$, il existe une constante $c_3 \geq 1$, ne dépendant pas de y, n, p telle que

$$\text{Card } \left(B\cap S(y,\frac{n-p}{2})\right) \geq \frac{1}{c_3} \text{ Card } \left(B(y,\frac{n-p}{2})\cap VT\right)\ .$$

L'affirmation $(**)$ s'en déduit.

Il découle de $(**)$ que la série $\sum_{y\in VT_0} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge si et seulement si la série $\sum_{y\in VT} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge. Ceci montre que $\delta_\Gamma = \delta_T$ et que Γ est de type divergent.

Pour montrer que la mesure de Bowen-Margulis est finie, d'après le théorème B de [DOP], comme remarqué dans [Rob, théo. 1.11], il suffit de montrer que Γ est de type divergent, ce que nous venons de faire, et que pour tout point parabolique borné ξ dans ∂T, l'exposant critique δ_{Γ_ξ} est strictement inférieur à δ_Γ. Or $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_T/2 = \delta_\Gamma/2 < \delta_\Gamma$, ce qui montre le résultat. □

Dans la suite de cet article, si les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées, nous supposerons, quitte à normaliser, que m_{BM} est une mesure de probabilité.

4 Codage du flot géodésique sur un graphe de groupes géométriquement fini

Soit T un arbre localement fini et Γ un sous-groupe discret non élémentaire de $\text{Aut}(T)$.

Même lorsque Γ est cocompact, la transformation géodésique φ sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ n'est pas forcément mélangeante. Remarquons par exemple que si $T^{(1)}$ est la première subdivision barycentrique de T, alors Γ est encore un sous-groupe de $\text{Aut}(T^{(1)})$, mais la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T^{(1)}$ n'est pas mélangeante. De plus, la propriété de mélange de φ n'est pas invariante par passage à un sous-groupe d'indice

fini. Par exemple, la transformation géodésique pour le bouquet de deux cercles est mélangeante, mais pas celle pour son revêtement connexe à deux feuillets où aucun des deux cercles n'est relevable.

Il existe un critère assez pratique pour vérifier que la transformation géodésique est mélangeante.

Notons L_Γ le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les distances de translation des éléments de Γ dans T. Par exemple, si T est l'arbre de Bruhat-Tits d'un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple $\underline{G}$ de rang 1 sur un corps local non archimédien $\widehat{K}$, et si Γ est un réseau de $\underline{G}(\widehat{K})$, alors le groupe L_Γ vaut $2\mathbb{Z}$.

Supposons que T n'a pas de sous-arbre invariant non vide et propre, et n'a pas de sommet de valence 2 (ce sont des hypothèses bénignes, car on peut toujours passer au sous-arbre invariant minimal $T_{\Gamma,\min}$, et lui enlever les sommets de valence 2). Alors L_Γ vaut $\mathbb{Z}$ ou $2\mathbb{Z}$. Une des manières de voir ceci est d'introduire le sous-groupe Λ_Γ de $\mathbb{Z}$ engendré par les distances entre sommets de valence au moins 3 de T, qui est donc égal à $\mathbb{Z}$ sous notre hypothèse, et de remarquer avec [GL, page 564] que

$$2\Lambda_\Gamma \subset L_\Gamma \subset \Lambda_\Gamma \ .$$

Remarquons quand même que la suppression des sommets de valence 2 peut avoir un certain effet dans le cas algébrique. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$ comme dans l'introduction, et soit Γ un réseau de $\underline{G}(\widehat{K})$. Supposons qu'il existe une (alors unique) $\underline{G}(\widehat{K})$-orbite de sommets de valence 2 (ce qui est le cas par exemple pour $\underline{G} = \mathrm{PGL}_2$). Alors après suppression de ces sommets, le groupe L_Γ devient $\mathbb{Z}$, et l'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ s'identifie maintenant exactement avec l'action de la transformation géodésique.

Supposons que $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$. Fixons x_0 un point base de T, et notons $\mathcal{G}_0T$ le sous-espace de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques dont l'origine est à distance paire de x_0. Il est facile de voir que $\mathcal{G}_0T$ est invariant par Γ et par φ^2. Pour l'invariance par Γ, on remarque que si A_γ est l'axe de translation ou l'ensemble des points fixes d'un élément γ dans Γ de distance de translation $\ell(\gamma)$, alors $d(x, \gamma x) = 2d(x, A_\gamma) + \ell(\gamma)$ (voir par exemple [Ser]), donc $\ell(\gamma)$ est impair si $d(x, \gamma x)$ l'est. Pour l'invariance par φ^2, on remarque que pour x, y, z trois points d'un arbre, si $d(x, y)$ et $d(y, z)$ sont pairs, alors $d(x, z)$ l'est. Si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, nous munirons $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$ de la restriction de la mesure de Bowen-Margulis, normalisée pour être de probabilité.

Le résultat suivant découle alors de [Rob, Theo. 3.1] (en fait d'une version discrète de ce théorème). Lorsque Γ est un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$ agissant sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$, avec $\widehat{K}$ un corps local non archimédien et $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1, le second énoncé découle aussi du théorème de Howe-Moore [Zim], par les rappels de l'introduction.

Proposition 4.1 *(1) Si Γ est géométriquement fini, si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme et si $L_\Gamma = \mathbb{Z}$, alors la transformation géodésique φ est mélangeante sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$.*

(2) Si Γ est géométriquement fini, si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme, sans sommet de valence 2, et si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, alors le carré φ^2 de la transformation géodésique est mélangeant sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$. □

Soit T un arbre localement fini et Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$. Nous dirons que Γ *possède la propriété de Selberg* s'il admet un sous-groupe d'indice fini, dont tout élément de torsion est conjugué à un élément du groupe d'un sommet intérieur d'un sous-rayon cuspidal de $\Gamma\backslash\backslash T$. Par exemple, c'est vrai si $\Gamma\backslash\backslash T$ n'a pas de sous-rayon cuspidal (voir [Ser]). Par le lemme de Selberg [Alp], c'est aussi vrai pour Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$ agissant sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$, avec $\widehat{K}$ un corps local non archimédien et $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1. Cette propriété est aussi vérifiée si tout stabilisateur de point parabolique borné dans Γ est résiduellement fini, car on peut alors utiliser le résultat susnommé de [Ser] pour enlever la torsion sur le graphe privé de ses rayons cuspidaux, et recoller des rayons cuspidaux correspondant à des sous-groupes d'indice fini des stabilisateurs de points paraboliques bornés. Rappelons qu'un groupe est *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduite à l'élément neutre.

Théorème 4.2 *Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$ ayant la propriété de Selberg, avec $T_{\Gamma,\min}$ uniforme, sans sommet de valence 2.*

Si la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est mélangeante pour la mesure de Bowen-Margulis, alors elle est Bernoulli pour cette mesure.

Si la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ n'est pas mélangeante pour la mesure de Bowen-Margulis, alors son carré est Bernoulli en restriction à $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$.

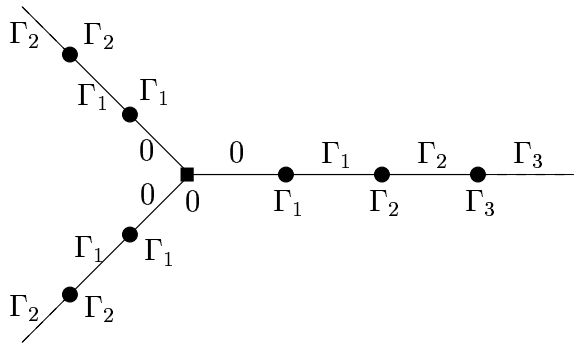
Preuve. Nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$.

Notons $X = \Gamma\backslash T$ le graphe quotient, et X_0 le sous-graphe complémentaire des rayons cuspidaux maximaux ouverts. Pour tout β dans EX_0, fixons un relevé $\widetilde{\beta}$ de β dans ET, de sorte que $\overline{\widetilde{\beta}} = \widetilde{\overline{\beta}}$. Numérotons de 1 à r les rayons cuspidaux maximaux. Notons $(a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite consécutive des arêtes, orientées vers le bout, du i-ème rayon cuspidal maximal. On fixe un relevé dans T de ce rayon, dont on note $(\widetilde{a_{i,n}})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite consécutive des arêtes, orientées vers un point à l'infini noté ξ_i de T. Notons $\Gamma_{i,n}$ le stabilisateur du sommet $o(\widetilde{a_{i,n}})$, de sorte que $\Gamma_{i,n}$ est contenu dans $\Gamma_{i,n+1}$, et que $\Gamma_{\xi_i} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{i,n}$.

Rappelons qu'un facteur d'une transformation mélangeante (resp. Bernoulli) l'est encore (voir par exemple [Orn]). Comme Γ possède la propriété de Selberg, il existe un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ dont tout groupe d'un sommet n'appartenant pas à un rayon cuspidal est trivial. Supposons le résultat démontré pour Γ'. Si la transformation géodésique de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}T$ est mélangeante, alors elle est Bernoulli, et son facteur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est aussi mélangeant et Bernoulli. Sinon, le carré de la transformation géodésique de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$ est Bernoulli. Si $\mathcal{G}_0T$ est invariant par Γ, alors le facteur $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$ de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$est aussi Bernoulli pour le carré de la transformation géodésique, et la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ n'est pas mélangeante. Si $\mathcal{G}_0T$ n'est pas invariant par Γ, alors $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est un facteur de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$, donc le carré de transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est Bernoulli, et donc la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est Bernoulli (donc mélangeante).

Dans la suite, nous supposons donc que le groupe G_x est trivial pour tout sommet x dans X_0.

Par exemple, le graphe de groupes suivant est isomorphe au graphe de groupes quotient de l'arbre de Bruhat-Tits de SL_2 sur le corps $\mathbb{F}_q((X^{-1}))$ par le réseau (de congruence) $\Gamma = \ker(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2[X]) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2))$, avec $\Gamma_i = \{P \in \mathbb{F}_2[X] \ : \ P(0) = 0, \deg P = i\}$.



En ce qui concerne le problème du codage du flot géodésique, la nouveauté par rapport au cas cocompact est de coder les excursions dans les rayons cuspidaux. La remarque fondamentale (voir [Ser]) est que la projection dans $\Gamma\backslash T$ d'une géodésique de T est un chemin d'arêtes, dont les seuls aller-retours possibles sont dans les rayons cuspidaux maximaux ouverts, et qui, s'il fait demi-tour en montant vers un bout, est alors obligé de redescendre pour sortir complètement du rayon cuspidal maximal.

Considérons l'alphabet suivant, qui est dénombrable infini, sauf si Γ est cocompact (auquel cas il est fini),

$$\mathcal{A} = EX \ \cup \bigcup_{1\le i\le r\,,\ n\in\mathbb{N}} \big((\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n} \times \{+\}\big) \ \cup \ \big(\Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}) \times \{-\}\big) \ .$$

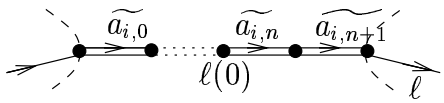
Nous munissons $\mathcal{A}$ de la topologie discrète. Notons que le passage à l'inverse induit une bijection de $(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$ sur $\Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$ et réciproquement. L'alphabet $\mathcal{A}$ est muni d'une involution $\beta \mapsto \overline{\beta}$, avec $\overline{\beta}$ l'arête opposée de β si $\beta \in EX$, et $\overline{(g,+)} = (g^{-1},-)$ si $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$.

Nous allons définir une partition $\mathcal{P}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, indexée par $\mathcal{A}$, de la manière suivante. Pour une géodésique ℓ dans T, notons $(\ell_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses arêtes consécutives, de sorte que $t(\ell_{i-1}) = o(\ell_i) = \ell(i)$. Notons qu'avec $\widetilde{\tau}$ l'application de renversement du temps, on a $\widetilde{\tau}(\ell)_i = \overline{\ell_{-i-1}}$. Pour tout β dans $\mathcal{A}$, définissons une partie non vide E_β de $\mathcal{G}T$ par :

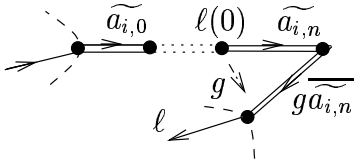
si $\beta \in EX_0$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{\beta}\ \}$,



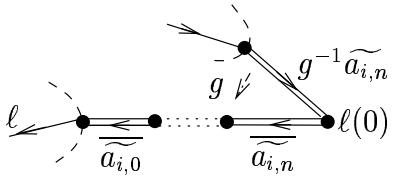
si $\beta = a_{i,n}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{a_{i,n}}$, $\ell_1 = \widetilde{a_{i,n+1}},\ \ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}\ \}$,



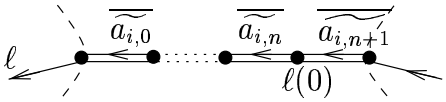
si $\beta = (g,+)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{a_{i,n}},\ \ell_1 = g\widetilde{\overline{a_{i,n}}},\ \ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}\ \}$,



si $\beta = (g,-)$ avec $g \in \Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \overline{\widetilde{a_{i,n}}},\ \ell_{-1} = g^{-1}\widetilde{a_{i,n}},\ \ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}\ \}$,



si $\beta = \overline{\widetilde{a_{i,n}}}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \overline{\widetilde{a_{i,n}}},\ \ell_{-1} = \widetilde{a_{i,n+1}},\ \ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}\ \}$.



Les parties du second type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ avancent dans un rayon cuspidal, et vont continuer d'avancer. Celles du troisième type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ avancent dans un rayon cuspidal, et vont faire demi-tour. Celles du quatrième type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ viennent de faire demi-tour. Enfin celles du dernier type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ redescendent dans un rayon cuspidal, et qui descendaient aussi à l'instant d'avant.

Lemme 4.3 *Les parties E_β de $\mathcal{G}T$, pour β dans $\mathcal{A}$, sont compactes, ouvertes et deux à deux disjointes. Leur réunion E est un domaine fondamental strict pour l'action de Γ (i.e. $\Gamma E = \mathcal{G}T$ et si $\gamma E \cap E$ est non vide pour un γ dans Γ, alors $\gamma = 1$).*

Preuve. Comme $\Gamma_{i,n}$ fixe l'arête $\widetilde{a_{i,n}}$ (et son arête opposée), les parties E_β sont bien définies. Par définition de la topologie compacte-ouverte, et comme l'arbre T est localement fini, elles sont bien compactes et ouvertes. Comme $g\overline{\widetilde{a_{i,n}}} \neq \widetilde{a_{i,n+1}}$ pour tout g dans $\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$, ces parties sont deux à deux disjointes. Toute géodésique dans T est équivalente modulo Γ à une géodésique ℓ telle que ℓ_0 vaut ou bien $\widetilde{\beta}$ pour un β dans EX_0, ou bien $\widetilde{a_{i,n}}$ ou bien $\overline{\widetilde{a_{i,n}}}$ pour un n dans $\mathbb{N}$ et i dans $\{1,\dots,k\}$. Dans les seconde et troisième alternatives, on a respectivement $\pi(\ell_{-n}) = a_{i,0}$ et $\pi(\ell_n) = \overline{a_{i,0}}$. Donc, quitte à faire agir un élément de $\Gamma_{i,n}$, on peut supposer respectivement que $\ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}$ et $\ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}$. L'ensemble des arêtes d'origine $t(\widetilde{a_{i,n}})$ est exactement

$$\{g\overline{\widetilde{a_{i,n}}} \ : \ g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}\} \cup \{\overline{\widetilde{a_{i,n}}}, \widetilde{a_{i,n+1}}\}\ .$$

Comme une géodésique n'a pas d'aller-retour, on obtient que $\Gamma E = \mathcal{G}T$. Enfin, comme les stabilisateurs des $\widetilde{a_{i,0}}$ pour i dans $\{1,\dots,r\}$ et des $\widetilde{\beta}$ pour β dans EX_0 sont triviaux, la réunion E est un domaine fondamental strict. □

En notant encore E_β l'image de E_β dans $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, on obtient donc une partition $\mathcal{P} = \{E_\beta\}_{\beta\in\mathcal{A}}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, par parties compactes, ouvertes et non vides.

Considérons la matrice de transition $(A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ définie par $A_{\alpha,\beta} = 1$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(1) $\alpha, \beta \in EX,\ t(\alpha) = o(\beta),\ \beta \neq \overline{\alpha}$

ou

(2) $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n},$

$$\alpha \in EX, \beta = (g, +),\ t(\alpha) = o(a_{i,n}),\ \alpha \neq \overline{a_{i,n}}$$

ou

(3) $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n},\quad \alpha = (g, +),\ \beta = (g^{-1}, -)$

ou

(4) $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in \Gamma_{i,n} \backslash (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}),$

$$\alpha = (g, -),\ \beta \in EX,\ o(\beta) = t(\overline{a_{i,n}}),\ \beta \neq a_{i,n}$$

et $A_{\alpha,\beta} = 0$ sinon. Remarquons que dans le cas (2), on a $\alpha = a_{i,n-1}$ si $n \geq 1$, et dans le cas (4), on a $\beta = \overline{a_{i,n-1}}$ si $n \geq 1$.

Considérons l'espace topologique produit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, où pour tout x dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ on note x_i la i-ème composante de x. Notons $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ le décalage défini par $\sigma((x_j)_{j\in\mathbb{Z}})_i = x_{i+1}$. Notons $\kappa : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'involution définie par $\kappa((x_j)_{j\in\mathbb{Z}})_i = \overline{x_{-i}}$. La matrice de transition $(A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ définit un sous-décalage (invariant par σ et par κ)

$$X_A = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}\ :\ \forall\, i \in \mathbb{Z},\ A_{x_i,x_{i+1}} = 1\}\ .$$

Proposition 4.4 *L'application itinéraire $\Theta : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to X_A$, définie par $\ell \mapsto (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec $\varphi^i(\ell) \in E_{x_i}$ pour tout i dans $\mathbb{Z}$, est un homéomorphisme, rendant les diagrammes suivants commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & X_A \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\sigma \\ \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & X_A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & X_A \\ \tau\downarrow & & \downarrow\kappa\circ\sigma \\ \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & X_A \end{array}\ .$$

Preuve. On vérifie que pour tous les α, β dans $\mathcal{A}$ et ℓ dans $\mathcal{G}T$ tels que $\widetilde{\varphi}^{-1}(\ell)$ appartienne à ΓE_α, on a $A_{\alpha\beta} = 1$ si et seulement s'il existe une géodésique ℓ' dans T telle que ℓ' et ℓ coïncident sur $]-\infty, 0]$ et $\ell' \in \Gamma E_\beta$. Ceci montre que l'application Θ est bien à valeurs dans X_A, et qu'elle est surjective. L'injectivité découle du fait qu'une géodésique est déterminée par la suite des arêtes qu'elle traverse, et du fait que le stabilisateur d'une arête de X_0 est trivial. Les parties de la partition $\mathcal{P}$ sont définies par des conditions ne portant que sur l'arête ℓ_0 d'une géodésique ℓ, et éventuellement sur un nombre fini d'arêtes supplémentaires. Par définition des topologies sur $\mathcal{G}T$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on en déduit que Θ est un homéomorphisme.

Le premier diagramme est commutatif par définition de Θ. Pour montrer la commutativité du second diagramme, on vérifie que pour tout β dans $\mathcal{A}$ et ℓ dans $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, on a (par une étude cas par cas pour la seconde équivalence)

$$\Theta \circ \tau(\ell)_0 = \beta \iff \tau(\ell) \in E_\beta \iff \varphi(\ell) \in E_{\overline{\beta}} \iff \kappa \circ \sigma \circ \Theta(\ell)_0 = \beta\ .$$

En utilisant que $\varphi\circ\tau = \tau\circ\varphi^{-1}$ et $\sigma\circ\kappa = \kappa\circ\sigma^{-1}$, on conclut alors par la commutativité du premier diagramme. □

À l'aide de la mesure de Bowen-Margulis m_{BM}, construisons une mesure de probabilité ν sur l'ensemble discret dénombrable $\mathcal{A}$. Posons, pour tout β dans $\mathcal{A}$,

$$\nu_\beta = \nu(\{\beta\}) = m_{\text{BM}}(E_\beta) \ .$$

Comme m_{BM} est une mesure de probabilité sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, et que $\mathcal{P}$ est une partition de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, la mesure ν est bien de masse totale 1. Comme les E_β sont des ouverts non vides, et que m_{BM} est une mesure de support total, les ν_β sont strictement positifs.

Considérons la matrice $\Pi = (\pi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$, définie par

$$\pi_{\alpha,\beta} = m_{\text{BM}}[\varphi(\ell) \in E_\beta \mid \ell \in E_\alpha] = \frac{m_{\text{BM}}(\varphi^{-1}(E_\beta)\cap E_\alpha)}{\nu_\alpha} = \frac{m_{\text{BM}}(\varphi(E_\alpha)\cap E_\beta)}{\nu_\alpha} \ .$$

Nous renvoyons par exemple à [Kit] pour les définitions sur les décalages de Markov.

La matrice Π est une matrice stochastique sur $\mathcal{A}$, de mesure stationnaire ν. En effet, comme $\mathcal{P}$ est une partition de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, et comme m_{BM} est invariante par φ, on a immédiatement que $\sum_\beta \pi_{\alpha,\beta} = 1$ pour tout α et $\sum_\alpha \nu_\alpha\pi_{\alpha,\beta} = \nu_\beta$ pour tout β.

Par définition, la *mesure de Markov* μ_Π associée à (Π,ν) est l'unique mesure borélienne de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, invariante par σ, telle que, pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tous $\alpha_0,\ldots,\alpha_k$ dans $\mathcal{A}$, on a

$$\mu_\Pi[x_0 = \alpha_0,\ldots,x_k = \alpha_k] = \nu_{\alpha_0}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\pi_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}\right) \ .$$

Proposition 4.5 *La mesure de Markov μ_Π est de support X_A, et $\Theta_* m_{BM} = \mu_\Pi$.*

Preuve. On remarque que $\pi_{\alpha,\beta}$ est nul si et seulement si $A_{\alpha,\beta}$ est nul, ce qui montre, avec le fait que les ν_β sont strictement positifs, que le support de μ_Π est X_A.

Puisque m_{BM} est invariante par φ, comme Θ est un homéomorphisme qui conjugue φ et σ, la mesure $\Theta_* m_{\text{BM}}$ est une mesure borélienne de probabilité, invariante par σ. Comme $m_{\text{BM}}(E_{\alpha_0}) = \nu_{\alpha_0} = \mu_\Pi[x_0 = \alpha_0]$, pour établir que $\Theta_* m_{\text{BM}}$ et μ_Π sont égales, il suffit de vérifier que $\Theta_* m_{\text{BM}}$ vérifie la propriété de Markov, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tous $\alpha_{-k},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0,\beta$ dans $\mathcal{A}$, on a

$$\Theta_* m_{\text{BM}}[x_1 = \beta | x_0 = \alpha_0, x_{-1} = \alpha_{-1},\ldots,x_{-k} = \alpha_{-k}] = \pi_{\alpha_0,\beta} \ .$$

On peut supposer que $A_{\alpha_i,\alpha_{i-1}} \neq 0$ pour tout i dans $\{1,\ldots,k\}$ et que $A_{\alpha_0,\beta} \neq 0$, sinon le résultat est immédiat. Notons $F_k = \varphi^k(E_{\alpha_k})\cap\ldots\cap E_{\alpha_0}$ et $F'_k = F_k\cap\varphi^{-1}(E_\beta)$, qui sont donc des compacts ouverts non vides. Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est égal à $m_{\text{BM}}(F'_k)/m_{\text{BM}}(F_k)$. Comme $\pi_{\alpha_0,\beta} = m_{\text{BM}}(F'_0)/m_{\text{BM}}(F_0)$, il suffit donc de montrer que $m_{\text{BM}}(F'_k)/m_{\text{BM}}(F_k)$ ne dépend pas de k.

Soit $\widetilde{\alpha_0}$ l'arête de T définie comme le relevé précédemment choisi de α_0 si α_0 est dans EX, par $\widetilde{\alpha_0} = \widetilde{a_{i,n}}$ si $\alpha_0 = (g,+)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, et par $\widetilde{\alpha_0} = \overline{\widetilde{a_{i,n}}}$

si $\alpha_0 = (g, -)$ avec $g \in \Gamma_{i,n} \backslash (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$. Nous utiliserons le paramétrage de $\mathcal{G}T$ par $\partial_2\Gamma \times \mathbb{Z}$ défini par le point base $u = o(\widetilde{\alpha_0})$.

Montrons que F_k (resp. F'_k) est l'image injective par l'application $\pi' : \mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ d'une partie $\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$) de $\mathcal{G}T$ de la forme $V_k \times U \times \{0\}$ (resp. $V_k \times U' \times \{0\}$), avec U, U', V_k des parties de ∂T, telles que U, U' ne dépendent pas de k et sont disjointes de V_k, et telles que toute géodésique entre un point de V_k et un point de U (resp. U') passe par u. Alors pour tout (ξ_-, ξ_+) dans $V_k \times U$ (resp. $V_k \times U'$), on aura $d_u(\xi_-, \xi_+) = 1$. Donc, par définition de la mesure de Bowen-Margulis (voir la partie 2.2),

$$\frac{m_{\mathrm{BM}}(F'_k)}{m_{\mathrm{BM}}(F_k)} = \frac{\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}(\widetilde{F}'_k)}{\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}(\widetilde{F}_k)} = \frac{\mu_u(U')}{\mu_u(U)} ,$$

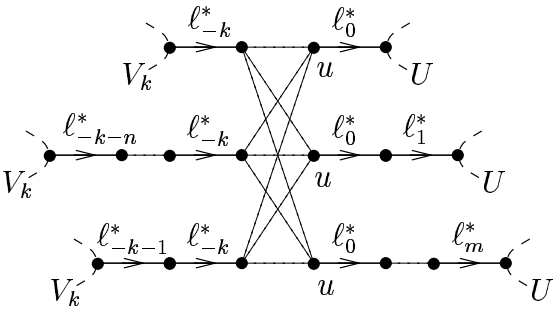
qui ne dépendra pas de k, ce qui montrera le résultat.

Comme les F'_k sont des compacts non vides décroissants en k, il existe au moins une géodésique ℓ^* (que l'on fixe) dans T dont l'image par π' est un élément de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F'_k$, telle que $\ell^*_0 = \widetilde{\alpha_0}$ (ce qui est possible, car F'_k est contenu dans E_{α_0}). Par définition des E_β, tout élément de F_k (resp. F'_k) se relève en au moins une géodésique ℓ de T telle que $\ell_{-k} = \ell^*_{-k}, \dots, \ell_0 = \ell^*_0$ (resp. $\ell_{-k} = \ell^*_{-k}, \dots, \ell_0 = \ell^*_0, \ell_1 = \ell^*_1$), et en particulier ℓ passe à l'instant $t = 0$ par le point u. Nous allons maintenant définir V_k et U (resp. U') en discutant suivant les valeurs de α_k et α_0 (resp. β), voir dessin ci-dessous.

$\alpha_k \in EX_0$ $\qquad$ $\alpha_0 \in EX_0$

$\alpha_k = \begin{cases} a_{i,n} \\ (g,+) \end{cases}$ $\qquad$ $\alpha_0 = \begin{cases} a_{j,m} \\ (h,+) \end{cases}$

$\alpha_k = \begin{cases} (g,-) \\ \overline{a_{i,n}} \end{cases}$ $\qquad$ $\alpha_0 = \begin{cases} (h,-) \\ a_{j,m} \end{cases}$



Si α_k est dans EX_0, posons $V_k = \partial_-\ell^*_{-k}$. Si α_k vaut $a_{i,n}$ ou $(g,+)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors posons $V_k = \partial_-\ell^*_{-k-n}$. Si α_k vaut $(g,-)$ ou $\overline{a_{i,n}}$ avec $g \in \Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$, alors posons $V_k = \partial_-\ell^*_{-k-1}$.

Si α_0 est dans EX_0, posons $U = \partial_+\ell^*_0$. Si α_0 vaut $a_{j,m}$ ou $(h,+)$ avec $h \in (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})/\Gamma_{j,m}$, alors posons $U = \partial_+\ell^*_1$. Si α_0 vaut $(h,-)$ ou $\overline{a_{j,m}}$ avec $h \in \Gamma_{j,m}\backslash(\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})$, alors posons $U = \partial_+\ell^*_m$.

Si $\beta \in EX_0$, posons $U' = \partial_+\ell^*_1$. Si β vaut $a_{j,m}$ ou $(h,+)$ avec $h \in (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})/\Gamma_{j,m}$, alors posons $U' = \partial_+\ell^*_2$. Si β vaut $(h,-)$ ou $\overline{a_{j,m}}$ avec $h \in \Gamma_{j,m}\backslash(\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})$, alors posons $U' = \partial_+\ell^*_{m+1}$.

Il est évident par construction que U et U' ne dépendent pas de k et sont disjoints de V_k, et que toute géodésique entre un point de V_k et un point de U ou U' passe par u. On vérifie que si $\widetilde{F}_k = V_k \times U \times \{0\}$ (resp. $\widetilde{F}'_k = V_k \times U' \times \{0\}$), alors par construction des E_γ, tout élément de F_k (resp. F'_k) admet un unique relevé dans

$\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$). Donc la restriction de π' à $\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$) est injective, d'image F_k (resp. F'_k). Le résultat en découle. □

Ainsi par les propositions 4.4 et 4.5 ci-dessus, les systèmes dynamiques mesurés $(\Gamma\backslash\mathcal{G}T, m_{\text{BM}}, \varphi)$ et (X_A, μ_Π, σ) sont conjugués par Θ.

Proposition 4.6 *L'entropie de la partition $\mathcal{P}$ est finie.*

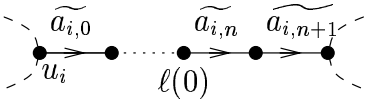
Preuve. Notons pour simplifier $\Gamma_i = \Gamma_{\xi_i}$, $\delta = \delta_\Gamma$, $\delta_i = \delta_{\Gamma_i}$ et $u_i = o(\widetilde{a_{i,0}})$.

Rappelons que l'entropie $h_\mathcal{P}$ de la partition $\mathcal{P}$ pour la mesure m_{BM} est

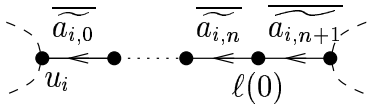
$$h_\mathcal{P} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \nu_\alpha(-\log \nu_\alpha) \ .$$

Calculons ν_α pour α dans $\mathcal{A} - EX_0$ (car EX_0 est fini). Par définition, la partie E_α de $\mathcal{G}T$ est, dans le paramétrage de $\mathcal{G}T$ défini par le point base u_i, de la forme $V \times U \times \{t_\alpha\}$ pour un t_α dans $\mathbb{Z}$ et U, V deux parties disjointes de ∂T, telles que toutes les géodésiques entre V et U passent par u_i. Donc

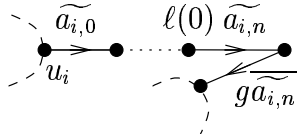
si $\alpha = a_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_-\widetilde{a_{i,0}})\mu_{u_i}(\partial_+\widetilde{a_{i,n+1}})$,



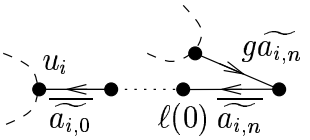
si $\alpha = \overline{a_{i,n}}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_-\overline{\widetilde{a_{i,n+1}}})\mu_{u_i}(\partial_+\overline{\widetilde{a_{i,0}}})$,



si $\alpha = (g, +)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_-\widetilde{a_{i,0}})\mu_{u_i}(\partial_+\overline{g\widetilde{a_{i,n}}})$,



si $\alpha = (g^{-1}, -)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_- g\widetilde{a_{i,n}})\mu_{u_i}(\partial_+\overline{\widetilde{a_{i,0}}})$.



Par le théorème de la densité fluctuante de Sullivan (voir [HP, Theo. 4.1]), si ξ_i est un point parabolique borné, si Γ est de type divergent, et s'il existe une constante $c_0 \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{c_0}\, e^{\,\delta_i n} \leq \text{Card}\{\gamma \in \Gamma_i \ : \ d(u_i, \gamma u_i) \leq n\} \leq c_0\, e^{\,\delta_i n} \ ,$$

alors il existe une constante $c_1 \geq 1$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{c_1} e^{2(\delta_i - \delta)n} \leq \mu_{u_i}(\partial_+\widetilde{a_{i,n}}) \leq c_1 e^{2(\delta_i-\delta)n} \ .$$

(Pour les variétés riemaniennes (complètes), cette propriété a été démontrée par Sullivan dans le cas de volume fini et de courbure négative constante, et par Stratmann et Velani dans le cas géométriquement fini et de courbure négative constante. Dans

[HP], elle est énoncée dans le cas de la courbure négative variable, mais la preuve est faite d'une part par des arguments de comparaison avec les arbres, qui sont valables dans notre cas, et d'autre part par des arguments de limites, mais une limite (pour la topologie de Hausdorff-Gromov pointée) d'arbres de valences uniformément bornées est encore un arbre localement fini.) Notons que les hypothèses de ce résultat sont vérifiées, par la proposition 3.1. Comme de plus $\delta_i = \delta/2$ par la proposition 3.1, on a

$$\frac{1}{c_1} e^{-\delta n} \leq \mu_{u_i}(\partial_+ \widetilde{a_{i,n}}) \leq c_1 e^{-\delta n} \ . \tag{1}$$

Remarquons, pour $g \in \Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$, que $o(g\widetilde{a_{i,0}})$ appartient à l'orbite de u_i, et que $d(u_i, o(g\widetilde{a_{i,0}})) = 2n$. Par le lemme de l'ombre de Sullivan (voir par exemple [Rob, Lem. 1.3] dans un contexte encore plus général que le nôtre), il existe donc une constante $c_2 \geq 1$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $g \in \Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$,

$$\frac{1}{c_2} e^{-2n\delta} \leq \mu_{u_i}(\partial_- g\widetilde{a_{i,0}}) \leq c_2 e^{-2n\delta} \ . \tag{2}$$

Remarquons que $\partial_+ g\overline{\widetilde{a_{i,0}}} \subset \partial_+ g\overline{\widetilde{a_{i,n}}} \subset \partial_+ \widetilde{a_{i,n}}$, et que $\partial_- \overline{e} = \partial_+ e$ pour toute arête e. Posons $c_3 = \mu_{u_i}(\partial_- \widetilde{a_{i,0}})$. Comme les valences de T sont uniformément bornées, il existe un N dans $\mathbb{N}$ qui majore le cardinal de $(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$ pour tout i et n. Donc

$$\sum_{1 \leq i \leq r,\ n \in \mathbb{N}} \left(\nu_{a_{i,n}}(-\log \nu_{a_{i,n}}) + \nu_{\overline{a_{i,n}}}(-\log \nu_{\overline{a_{i,n}}}) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2rc_1c_3 e^{-\delta(n+1)} (\delta(n+1) + \log \frac{c_1}{c_3}) \ ,$$

et

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq r,\ n \in \mathbb{N} \\ g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}}} \left(\nu_{(g,+)}(-\log \nu_{(g,+)}) + \nu_{(g^{-1},-)}(-\log \nu_{(g^{-1},-)}) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2Nrc_1c_3 e^{-\delta n} (2\delta n + \log \frac{c_2}{c_3}) \ .$$

Comme $\delta > 0$ (voir la proposition 3.1), ces deux sommes convergent, ce qui montre le résultat. □

Terminons maintenant la preuve du théorème 4.2. Par les propositions 4.4 et 4.5, les systèmes dynamiques mesurés $(\Gamma\backslash\mathcal{G}T, m_{\mathrm{BM}}, \varphi)$ et (X_A, μ_Π, σ) sont conjugués par Θ.

Supposons tout d'abord que $L_\Gamma = \mathbb{Z}$. Alors $(\Gamma\backslash\mathcal{G}T, m_{\mathrm{BM}}, \varphi)$ est mélangeant par la proposition 4.1, donc (X_A, μ_Π, σ) aussi. L'homéomorphisme Θ envoie par construction la partition $\mathcal{P}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ sur la partition génératrice $\{\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \ : \ x_0 = \alpha\}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X_A. Donc par la proposition 4.6, le système (X_A, μ_Π, σ) est un décalage de Markov mélangeant sur un alphabet dénombrable, de partition génératrice d'entropie finie. Il est bien connu qu'un tel décalage est conjugué à un décalage de Bernoulli, voir par exemple [FO] lorsque l'alphabet est fini, et [Tho, sect. 8] pour l'extension à un alphabet dénombrable de partition génératrice d'entropie finie.

Supposons maintenant que $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$. Alors $(\Gamma\backslash\mathcal{G}T, m_{\mathrm{BM}}, \varphi)$ n'est pas mélangeant, mais $(\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T, m_{\mathrm{BM}}, \varphi^2)$ l'est, par la proposition 4.1, où $\mathcal{G}_0T$ est le sous-espace de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques dont l'origine est à distance paire d'un point base de T. En

remplaçant les arêtes par les suites de deux arêtes consécutives d'extrémités deux sommets de T à distance paire du point base de T, on construit de manière analogue à ce qui précède un codage de $(\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T, m_{\mathrm{BM}}, \varphi^2)$ par un décalage de Markov sur un alphabet dénombrable, de partition génératrice d'entropie finie. Le théorème 4.2 en découle. □

Le théorème 1.1 de l'introduction est un corollaire du théorème 4.2, par la discussion précédant la proposition 4.1.

5 Le flot géodésique sur un graphe de groupes

Dans cette partie, nous nous intéressons au codage du flot géodésique sur un arbre quotienté par un sous-groupe d'automorphismes, sans supposer le sous-groupe discret ni même l'arbre localement fini. Nous montrons de manière intrinsèque (purement en termes d'actions de groupes sur les arbres), sous certaines hypothèses sur la torsion, que le flot géodésique sur le quotient d'un arbre localement fini par un groupe cocompact d'automorphismes est un sous-décalage de type fini. Nous expliquons les propriétés de l'homéomorphisme Θ de [BP], qui donne un codage de l'application de premier retour pour un flot géodésique "décoré" sur le rayon modulaire, quotient par $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q[X])$ de l'arbre de Bruhat-Tits de $(\mathrm{PGL}_2, \mathbb{F}_q((X^{-1})))$.

5.1 Flot géodésique d'ordre 1 sur un graphe de groupes

Soit (X, G_*) un graphe de groupes. Posons :

$$\Omega = \coprod_{e,e' \in EX \,:\, o(e)=t(e')} \rho_{e'}(G_{e'})\backslash G_{o(e)}/\rho_{\overline{e}}(G_e) \ .$$

On munit $\Omega \times EX$ de la topologie discrète et $\Sigma = (\Omega \times EX)^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit. D'ailleurs, si (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, alors $\Omega \times EX$ est fini. On note σ le décalage à gauche sur Σ.

Notons Σ_0 l'ensemble des éléments $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de Σ tels que, pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} (1) \ \ o(e_i) = t(e_{i-1}) \\ (2) \ \ g_i \in \rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}})\backslash G_{o(e_i)}/\rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i}) \\ (3) \ \ \text{si } e_i = \overline{e_{i-1}}, \ \text{alors } g_i \notin \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i}) \ . \end{cases}$$

Cette dernière condition dit simplement que si $e_i = \overline{e_{i-1}}$, alors g_i n'est pas la double classe triviale.

On appelle *flot géodésique d'ordre* 1 *sur* (X, G_*) le sous-décalage (Σ_0, σ). Il est immédiat que σ préserve Σ_0, et que les conditions définissant Σ_0 sont "locales". Ainsi, lorsque (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, le sous-décalage (Σ_0, σ) est de type fini .

Proposition 5.1 *Soit T un arbre, et Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$. Si (Σ_0, σ) est le flot géodésique d'ordre 1 du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$, alors il existe une application continue surjective $\theta : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma_0$ qui rend le diagramme suivant commutatif*

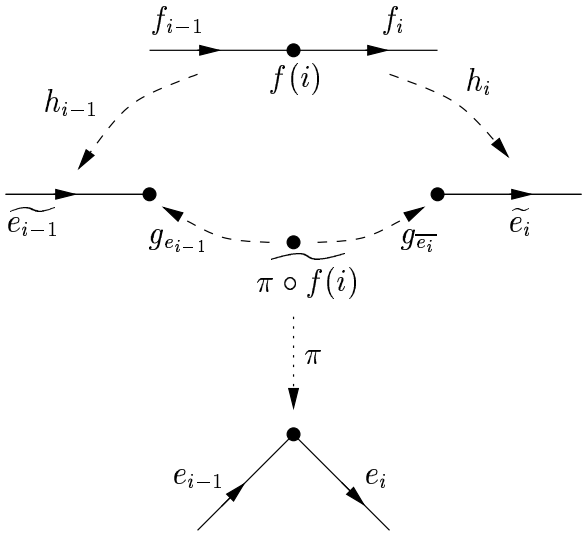
$$\begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \Gamma\backslash\mathcal{G}T \\ \theta\downarrow & & \downarrow\theta \\ \Sigma_0 & \stackrel{\sigma}{\longrightarrow} & \Sigma_0 \end{array} .$$

Preuve. Soit $(X, G_*) = \Gamma\backslash\backslash T$ et $\pi : T \to X = \Gamma\backslash T$ la projection canonique. Dans un premier temps, on construit une application $\widetilde{\theta} : \mathcal{G}T \to \Sigma_0$. Soit f une application simpliciale de $\mathbb{R}$ dans T. Pour i dans $\mathbb{Z}$, notons f_i l'arête $f([i, i+1])$ d'origine $f(i)$ et posons $e_i = \pi(f_i)$. On a alors $t(e_{i-1}) = \pi \circ f(i) = o(e_i)$.

On reprend les notations de la définition du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$ dans la partie 2.1, où l'on avait fixé des relevés $\widetilde{e}$ et $\widetilde{v}$ dans T d'une arête e et d'un sommet v de X. Comme $\pi(f_i) = \pi(\widetilde{e_i}) = e_i$, il existe h_i dans Γ tel que $h_i f_i = \widetilde{e_i}$. L'élément h_i est bien défini modulo multiplication à gauche par un élément du fixateur de l'arête $\widetilde{e_i}$, qui est un élément de G_{e_i}. Posons

$$g_i = g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}} . \qquad (*)$$

L'élément g_i fixe $\widetilde{\pi \circ f(i)}$, il appartient donc à $G_{o(e_i)} = G_{t(e_{i-1})}$ (voir la figure suivante). L'élément g_i est défini modulo multiplication à gauche par un élément de $g_{e_{i-1}}^{-1} G_{e_{i-1}} g_{e_{i-1}} = \rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}})$, ainsi que modulo multiplication à droite par un élément de $g_{\overline{e_i}}^{-1} G_{e_i} g_{\overline{e_i}} = \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$. Nous noterons encore g_i la double classe de g_i dans le double quotient $\rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}})\backslash G_{o(e_i)}/\rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$.



Remarquons que si $e_i = \overline{e_{i-1}}$, alors

$$\overline{f_{i-1}} = h_{i-1}^{-1}\overline{\widetilde{e_{i-1}}} = h_{i-1}^{-1}\widetilde{\overline{e_{i-1}}} = h_{i-1}^{-1}\widetilde{e_i} .$$

Donc f est localement injective si et seulement si pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a $f_i \neq \overline{f_{i-1}}$, donc si et seulement si

- ou bien $e_i \neq \overline{e_{i-1}}$;
- ou bien $e_i = \overline{e_{i-1}}$ et $g_i g_{\overline{e_i}}^{-1} \widetilde{e_i} \neq g_{\overline{e_i}}^{-1} \widetilde{e_i}$.

Cette dernière condition est équivalente à g_i n'appartient pas à $\rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$.

Posons alors $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Par construction, l'application $\widetilde{\theta}$ est à valeurs dans Σ_0, et est invariante par Γ, elle induit donc une application $\theta : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma_0$. Par construction, on a $\theta \circ \varphi = \sigma \circ \theta$.

Montrons que $\widetilde{\theta}$ est surjective, ce qui entraîne que θ est surjective. Soit $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément de Σ_0. On choisit un représentant dans la double classe g_i, encore noté g_i. Posons $f_0 = \widetilde{e_0}$ et $h_0 = \mathrm{id}$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, il existe des arêtes f_k de T et des éléments h_k de G tels que

$$t(f_{k-1}) = o(f_k), \quad h_k \widetilde{e_k} = f_k \quad \text{et} \quad g_k = g_{e_{k-1}}^{-1} h_{k-1} h_k^{-1} g_{\overline{e_k}} .$$

Pour $n = 1$, il n'y a rien à vérifier. Supposons que l'hypothèse de récurrence est satisfaite au rang n. Posons :

$$h_n = (h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1})^{-1} .$$

Alors la relation $g_n = g_{e_{n-1}}^{-1} h_{n-1} h_n^{-1} g_{\overline{e_n}}$ est vérifiée, et h_n^{-1} envoie $o(\widetilde{e_n})$ sur $t(f_{n-1})$. En effet,

$$\begin{aligned} h_n^{-1} o(\widetilde{e_n}) &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1} o(\widetilde{e_n}) = h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n \widetilde{o(e_n)} \\ &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} \widetilde{o(e_n)} = h_{n-1}^{-1} t(\widetilde{e_{n-1}}) = t(f_{n-1}) . \end{aligned}$$

Maintenant, posons $f_n = h_n^{-1} \widetilde{e_n}$. L'origine de f_n est bien $t(f_{n-1})$. Pour $1 \leq k \leq n$, les arêtes f_k et les éléments h_k de G vérifient donc l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

On fait une construction similaire pour $n < 0$. Notons $f : \mathbb{R} \to T$ l'application simpliciale telle que pour tout i dans $\mathbb{Z}$, $f([i, i+1]) = f_i$. Alors f appartient à $\mathcal{G}T$ (par la condition (3) de la définition de Σ_0) et $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ce qui montre la surjectivité de $\widetilde{\theta}$.

Montrons maintenant que $\widetilde{\theta}$ est continue, ce qui entraîne que θ est continue. Si f et f' sont deux géodésiques de $\mathcal{G}T$, posons $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $\widetilde{\theta}(f') = (g'_i, e'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Supposons que f et f' coïncident sur $[-N, N]$, alors pour tout entier i de $[-N, N]$, on a $e_i = \pi(f_i) = \pi(f'_i) = e'_i$, et on peut supposer que h_i et h'_i coïncident. La formule $(*)$ montre alors que g_i et g'_i coïncident pour i entier dans $[-(N-1), N-1]$. Ceci montre que $\widetilde{\theta}$ est continue sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ par définition de la topologie-produit. □

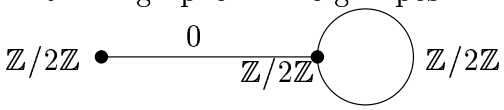
Malheureusement, l'application θ n'est pas toujours injective. Elle l'est si les stabilisateurs d'arêtes G_e, pour e dans EX, sont triviaux. Mais quand il existe un élément (non trivial) de Γ qui fixe un rayon géodésique de T, cela crée des problèmes de propagation d'éléments dans des stabilisateurs d'arêtes.

5.2 Actions acylindriques de groupes sur les arbres

Soit k un entier strictement positif. Comme le fait Z. Sela [Sel], nous dirons qu'une action simpliciale (sans inversion) d'un groupe Γ sur un arbre T est *k-acylindrique* si le fixateur d'un chemin (localement) injectif de k arêtes consécutives est trivial. Nous dirons qu'une action est *acylindrique* s'il existe k dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tel que l'action est k-acylindrique. Par exemple, une action est 1-acylindrique si elle est à stabilisateurs d'arête triviaux.

Remarque. En fait, dans la définition originale, Z. Sela demande aussi que l'action soit *minimale* (i.e. sans sous-arbre invariant non vide propre) et *réduite* (i.e. si le stabilisateur d'un sommet v admet exactement deux orbites d'arêtes d'origine v, alors chacune de ces deux orbites est de cardinal au moins 2.) Ici nous n'aurons pas besoin de ces deux hypothèses.

Remarque. Beaucoup d'actions de groupes sur des arbres sont acylindriques, voir [Sel], mais il existe des arbres T localement finis et des sous-groupes discrets cocompacts Γ de $\mathrm{Aut}(T)$, tels que l'action de Γ sur T n'est pas acylindrique. Par exemple, l'action du groupe fondamental du graphe fini de groupes finis suivant



sur son arbre de Bass-Serre n'est pas acylindrique.

Avant de donner dans la partie 5.3 un théorème de codage pour des actions acylindriques, nous donnons quelques exemples. Le résultat suivant est sans doute bien connu, nous n'en donnons une preuve que par souci de complétude.

Proposition 5.2 *Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$, tel que $\Gamma\backslash T$ est fini et les stabilisateurs d'arête sont finis. Alors l'action de Γ sur T n'est pas acylindrique si et seulement s'il existe des éléments h, g de Γ tels que*

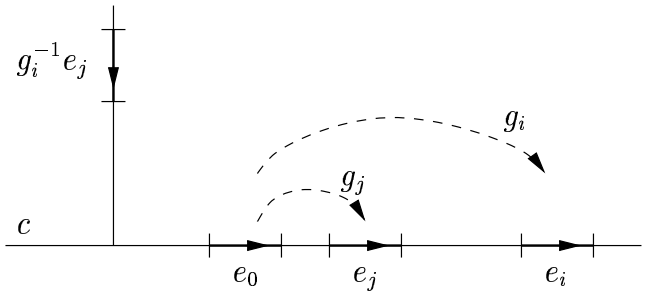
- *h est non trivial et admet un point fixe dans T,*
- *g n'admet pas de point fixe dans T,*
- *h et g commutent.*

Preuve. Supposons qu'il existe h et g comme dans l'énoncé. Comme g n'a pas de point fixe, alors il admet un axe de translation A_g. Cet ensemble A_g est (l'image d')une géodésique de T, et est invariant par g. Sur A_g, l'application g induit une translation de distance de translation $\ell = \inf_{x \in T} d(x, gx) > 0$. D'ailleurs, A_g est l'ensemble des points x de T tels que $d(x, gx) = \ell$ (voir par exemple [Ser]).

Comme h commute avec g, l'application h préserve A_g. L'ensemble des points fixes de h (qui est non vide) rencontre tout sous-arbre invariant par h et non vide de T (voir par exemple [Ser]). Donc A_g contient au moins un point fixe x de h, et pour tout n dans $\mathbb{Z}$, l'isométrie h fixe $g^n x$. Donc h fixe le chemin géodésique de longueur $n\ell$ compris entre x et $g^n x$. Donc l'action n'est pas acyclindrique.

Réciproquement, soit N dans $\mathbb{N}$ tel que $N-1$ est le maximum des cardinaux des stabilisateurs des arêtes de T (ces stabilisateurs sont en nombre fini modulo conjugaison). Soit N' le nombre d'arêtes (tenant compte des deux orientations possibles) de $\Gamma\backslash T$. Soit c un chemin d'arêtes géodésique dans T, fixé par un élément non trivial h' de Γ, dont la longueur est strictement supérieure à $k = N'(N+1)$. Alors il existe au moins $N+1$ arêtes de c, notées $(e_i)_{i\in\{0,\dots,N\}}$, orientées compatiblement le long de c et numérotées dans l'ordre où on les rencontre en parcourant c, dont les images par la projection canonique $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ coïncident (en tenant compte aussi de l'orientation). Il existe donc $g_1, \dots, g_N$ dans Γ tels que g_i envoie e_0 sur e_i en préservant l'orientation. Comme h' fixe c, il existe h_i dans le stabilisateur de e_0 tel que $h' = g_i h_i g_i^{-1}$. Par définition de N, il existe $i \neq j$ tel que $h_i = h_j$. On peut toujours supposer (quitte à permuter) que l'arête e_j est entre l'arête e_0 et l'arête e_i sur c. On pose alors $h = h_i = h_j$. L'élément h est bien non trivial (car h' l'est) et fixe un point de T.

Rappelons (voir par exemple [Ser]) que si une isométrie γ d'un arbre envoie une arête e sur une arête distincte e' (en tenant compte aussi des orientations) et s'il existe un chemin d'arêtes orienté contenant e et e' avec orientations compatibles, alors γ n'a pas de point fixe, et admet un axe de translation contenant e et e'.



Posons $g = g_j^{-1} g_i$. Comme l'arête e_j est contenue dans le sous-chemin d'arêtes orienté de c entre e_0 et e_i, et comme g_i envoie e_0 sur e_i (avec les orientations), on en déduit que les arêtes $g_i^{-1}e_j$ et e_0 sont contenues avec orientations compatibles dans un chemin d'arêtes orienté. Donc g, qui envoie $g_i^{-1}e_j$ sur e_0 (avec orientations), n'a pas de point fixe. De plus, on a $h' = g_i h_i g_i^{-1} = g_j h_j g_j^{-1}$, donc les éléments h et g commutent. □

Remarque. Un automorphisme sans point fixe d'un arbre est d'ordre infini. Rappelons qu'un groupe est *localement fini* si tout sous-groupe de type fini est fini. Si $\Gamma\backslash T$ et les stabilisateurs d'arête sont finis, alors, par la proposition 5.2 précédente, l'action de Γ sur T est acylindrique si l'un des deux cas suivants est vérifié :

- le centralisateur de tout élément d'ordre infini est cyclique,
- le centralisateur de tout élément non trivial ayant un point fixe est localement fini.

Proposition 5.3 *Soit T un arbre localement fini, et Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$. Alors, il existe un arbre T' et une action de Γ sur T' qui vérifient :*

- *$\Gamma\backslash T'$ est fini,*
- *les stabilisateurs d'arête de T' sont finis,*
- *les stabilisateurs de sommet de T' sont localement finis,*
- *il existe une application simpliciale équivariante de T dans T'.*

De plus, la transformation géodésique de Γ pour T, en restriction à un G_δ-dense de mesure de Bowen-Margulis totale de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T_{\Gamma,\min}$, s'obtient par suspension topologique de la transformation géodésique de Γ pour T'.

En outre, si Γ possède la propriété de Selberg, alors il existe $k \geq 1$ et un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ dont l'action sur T' est k-acylindrique.

Remarque. Lorsque Γ est un réseau uniforme, ceci est évident. En effet, $T' = T$ convient et, par des arguments de [Ser], le groupe Γ contient un sous-groupe libre d'indice fini, agissant librement sur T, donc de manière 1-acylindrique.

Preuve. Comme T se rétracte de manière Γ-équivariante sur $T_{\Gamma,\min}$, nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$. Par définition, le graphe de groupes quotient $(X, G_*) = \Gamma\backslash\backslash T$ est réunion d'un graphe fini de groupes finis et d'un nombre fini de rayons cuspidaux (maximaux), notés $(R_1, G_*), \ldots, (R_r, G_*)$. Pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, notons R_i' le rayon R_i privé de son sommet origine et de son arête ouverte initiale. Notons $\pi : T \to X$ la projection canonique. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur T engendrée par $x \sim y$ si et seulement s'il existe i dans $\{1, \ldots, r\}$ et une composante connexe de $\pi^{-1}(R_i')$ contenant x et y. Notons T' le graphe quotient de T par $\sim$. Comme les composantes connexes de $\pi^{-1}(R_i')$ sont des sous-arbres deux à deux disjoints de T, le graphe T' est un arbre. Puisque la relation d'équivalence $\sim$ est invariante par Γ, si l'on munit T' de l'action quotient de Γ, alors la projection canonique $f : T \to T'$ est Γ-équivariante.

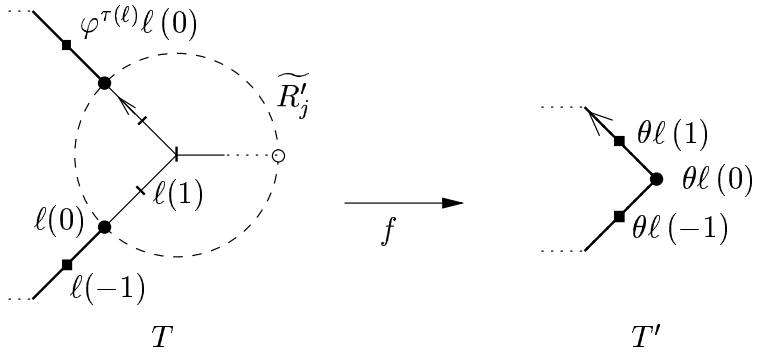
Pour tout sommet v de T, si v n'appartient pas à $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^r R_i')$, alors le stabilisateur dans Γ du sommet $f(v)$ de T' est fini (égal au stabilisateur de v dans T). Si, par contre, v appartient à une composante connexe de $\pi^{-1}(R_i')$, alors le stabilisateur de $f(v)$ est conjugué au groupe localement fini qui est la limite inductive des groupes des sommets de R_i.

Notons $\mathcal{G}^\sharp T$ le G_δ-dense de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques dont les deux bouts ne sont pas des points paraboliques bornés pour Γ. Posons $X_1 = \overline{X - \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^r R_i'\right)}$. Notons $\mathcal{G}_1 T$ le sous-espace Γ-invariant de $\mathcal{G}^\sharp T$ formé des géodésiques ℓ telles que d'une part $\ell(0)$ appartienne à X_1, et d'autre part si $\ell(0)$ est dans $\pi^{-1}(\{v_{i,1} \ : \ i \in \{1, \ldots, r\}\})$, alors $\ell(-1)$ ne soit pas dans l'intérieur de $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^r R_i')$.

Pour ℓ dans $\mathcal{G}_1 T$, notons $\tau(\ell)$ l'entier non nul, valant 1 si $\ell(1) \in X_1$ et valant $1 + \min\{n \in \mathbb{N} - \{0\} \ : \ \ell(n) \in X_1\}$ sinon. Il s'agit du temps de premier retour dans

$\mathcal{G}_1 T$ de l'orbite de ℓ par la transformation géodésique φ. Notons $\psi : \mathcal{G}_1 T \to \mathcal{G}_1 T$ l'application de premier retour, définie par $\psi : \ell \mapsto \varphi^{\tau(\ell)}(\ell)$.

Soit ℓ une géodésique appartenant à $\mathcal{G}\sharp T$. Alors chaque composante connexe de $\ell(\mathbb{R}) \cap \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{r} R'_i)$ est un segment compact. La restriction à $\ell(\mathbb{R})$ de f écrase en un point chacune de ces composantes connexes. L'image par $f : T \to T'$ de $\ell(\mathbb{R})$ est donc l'image d'une géodésique $\theta(\ell)$ de T', d'origine $\theta(\ell)(0) = f(\ell(0))$, de sorte que $f : \ell(\mathbb{R}) \to \theta(\ell)(\mathbb{R})$ préserve l'orientation. Notons $\varphi' : \mathcal{G}T' \to \mathcal{G}T'$ la transformation géodésique pour T'.



Il est immédiat que l'application $\theta : \mathcal{G}_1 T \to \mathcal{G}T'$ est un homéomorphisme, rendant le diagramme suivant commutatif:

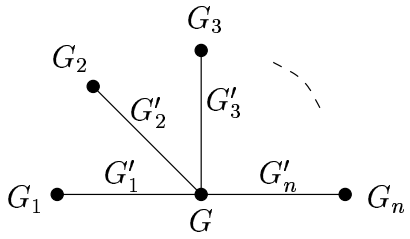
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 T & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G}T' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \mathcal{G}_1 T & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G}T' \end{array} .$$

De plus, ce diagramme commute avec l'action de Γ. Donc la restriction à $\Gamma\backslash\mathcal{G}^{\sharp}T$ de la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est topologiquement conjuguée à une suspension de la transformation géodésique pour $\Gamma\backslash\mathcal{G}T'$. La mesure de Patterson-Sullivan de tout point parabolique borné est nulle (voir [DOP] dans le cadre des variétés, et [Rob] plus généralement). Comme il n'y a qu'un ensemble dénombrable de points paraboliques bornés pour Γ, le sous-espace $\mathcal{G}^{\sharp}T$ est donc de mesure pleine.

Si Γ possède la propriété de Selberg, alors il existe un sous-groupe Γ' d'indice fini de Γ, tel que le graphe de groupes quotient $\Gamma'\backslash\backslash T$ soit réunion d'un graphe fini de groupes triviaux, et d'un nombre fini de rayons cuspidaux. Tout élément non trivial de Γ', fixant un point de T', fixe donc un unique point de T', dont le stabilisateur est localement fini. Par la seconde assertion de la remarque qui précéde la proposition 5.3, l'action de Γ' sur T' est donc acylindrique. □

Remarque 5.4 *Soit T un arbre localement fini, et Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$ tel que $\Gamma\backslash\backslash T$ est réunion de n rayons cuspidaux de groupes, recollés en leurs origines. S'il existe m dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tel que l'action de Γ sur les m-uplets de points deux à deux distincts de ∂T est libre, alors l'action de Γ sur T' (construit dans la preuve ci-dessus) est $(2m-1)$-acylindrique.*

Remarquons que le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash T'$ est alors une étoile de groupes de la forme



avec, lorsque Γ est discret, $G, G'_1, \ldots, G'_n$ des groupes finis, et $G_1, \ldots, G_n$ des groupes localement finis.

Preuve. La projection dans $\Gamma\backslash T'$ d'un chemin d'arêtes géodésique c dans T', de longueur $2m-1$, comporte $m-1$ allers-retours plus une arête, donc est la projection d'un chemin d'arêtes géodésique de T pénétrant dans $m-1+1$ horoboules distinctes de la famille Γ-invariante maximale d'horoboules d'intérieurs disjoints. Tout élément de Γ fixant c fixe donc dans ∂T les m points à l'infini de ces horoboules. □

Les hypothèses de cette remarque sont vérifiées, avec $n = 1$ et $m = 3$, lorsque l'on considère le groupe $\Gamma = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q[X])$ agissant sur l'arbre de Bruhat-Tits T de $(\mathrm{PGL}_2, \mathbb{F}_q((X^{-1})))$. En particulier, comme annoncé dans l'introduction, l'action de Γ sur T n'est pas acylindrique, mais celle de Γ sur l'arbre T' associé à T par la preuve de la proposition 5.3 est 5-acylindrique.

5.3 Flot géodésique d'ordre k sur un graphe de groupes

Soit (X, G_*) un graphe de groupes et $k > 0$ un entier. Un *k-chemin* de X est une suite $(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ d'arêtes de EX telles que $t(e_{i-1}) = o(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$. Pour tout k-chemin, le groupe produit $G_{e_0} \times G_{e_1} \times \ldots \times G_{e_k}$ agit sur l'ensemble $G_{o(e_1)} \times G_{o(e_2)} \times \ldots \times G_{o(e_k)}$ par

$$((\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k), (g_1, \ldots, g_k) \mapsto (\rho_{e_0}(\alpha_0)\, g_1\, \rho_{\overline{e_1}}(\alpha_1^{-1}),\ \ldots\ , \rho_{e_{k-1}}(\alpha_{k-1})\, g_k\, \rho_{\overline{e_k}}(\alpha_k^{-1}))\ .$$

Notons $G(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ l'ensemble quotient. Nous noterons $[g_1, \ldots, g_k]$ la classe d'un élément $(g_1, \ldots, g_k)$ de $G_{o(e_1)} \times G_{o(e_2)} \times \ldots \times G_{o(e_k)}$.

Considérons les trois applications

$$(g_1, ..., g_k) \mapsto (g_2, ..., g_k),\ \ (g_1, ..., g_k) \mapsto (g_1, ..., g_{k-1})\ \text{ et }\ (g_1, ..., g_k) \mapsto g_k$$

(les deux premières n'étant définies que si $k \geq 2$). Elles induisent des surjections $\mathrm{pr}_1 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_1, \ldots, e_k)$, $\mathrm{pr}_2 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_0, \ldots, e_{k-1})$ et $\mathrm{pr}_3 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_{k-1}, e_k)$.

Remarquons d'ailleurs que $G(e_{k-1}, e_k) = \rho_{e_{k-1}}(G_{e_{k-1}})\backslash G_{o(e_k)}/\rho_{\overline{e_k}}(G_{e_k})$.

Notons Ω' la réunion disjointe des ensembles $G(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ pour tous les k-chemins $(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ de X. Munissons l'ensemble $\Omega' \times EX$ de la topologie discrète et l'ensemble $\Sigma' = (\Omega' \times EX)^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit. Remarquons que si (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, alors $\Omega' \times EX$ est fini. Notons encore σ le décalage sur Σ'.

Notons Σ'_0 l'ensemble des éléments $((g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}), e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de Σ' tels que pour tout entier i,

$$\begin{cases} (1') & o(e_i) = t(e_{i-1}) \\ (2') & (g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}) \in G(e_{i-k+1}, \ldots, e_{i-1}, e_i) \\ (3') & \mathrm{pr}_1([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}]) = \mathrm{pr}_2([g_{i+1,1}, g_{i+1,2}, \ldots, g_{i+1,k}]) \\ (4') & \text{si } e_i = \overline{e_{i-1}}, \text{ alors } \mathrm{pr}_3(g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}) \notin \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i}) \, . \end{cases}$$

Définissons alors le *flot géodésique d'ordre k* sur (X, G_*) comme le sous-décalage (Σ'_0, σ). Lorsque $k = 1$, on retrouve la définition de la partie 5.1.

Il est immédiat que σ préserve Σ'_0, et que les conditions définissant Σ'_0 sont "locales" (au temps i, elles ne dépendent que du temps i et des k termes précédents). En particulier, (Σ'_0, σ) est un sous-décalage de type fini lorsque (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis.

Montrons maintenant le résultat suivant :

Théorème 5.5 *Soit T un arbre et Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$. Supposons que l'action de Γ sur T est k-acylindrique. Alors la transformation géodésique quotient est topologiquement conjugué à un sous-décalage.*

Plus précisément, si (Σ'_0, σ) est le flot géodésique d'ordre k du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$, alors il existe un homéomorphisme $\theta' : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma'_0$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma\backslash\mathcal{G}T \\ \theta' \downarrow & & \downarrow \theta' \\ \Sigma'_0 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma'_0 \end{array} \quad .$$

Lorsque T est localement fini, et Γ un sous-groupe discret cocompact, ce résultat est déja connu : voir [Moz] pour un cadre algébrique (rappelé en introduction), qui s'étend en rang supérieur; voir [CP] pour le cadre plus général des groupes hyperboliques, par des méthodes utilisant leur dynamique sur leur espace à l'infini.

Preuve. Considérons l'application $\widetilde{\theta'} : \mathcal{G}T \to \Sigma'_0$, définie par

$$\widetilde{\theta'}(f) = ([g_{i-k+1}, \ldots, g_{i-1}, g_i], e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \, ,$$

en reprenant dans la démonstration de la proposition 5.1 les objets f_i, e_i, h_i, g_i associés à f. En effet, la classe de $(g_{i-k+1}, \ldots, g_{i-1}, g_i)$ dans $G(e_{i-k}, \ldots, e_{i-1}, e_i)$ ne dépend pas du choix des h_i. On vérifie immédiatement que les conditions (1')-(4') ci-dessus sont satisfaites pour $\widetilde{\theta'}(f)$.

De la même manière que pour $\widetilde{\theta}$, l'application $\widetilde{\theta'} : \mathcal{G}T \to \Sigma'_0$ est continue et Γ-invariante. L'application

$$\rho : ([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (\mathrm{pr}_3([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}]), e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

est une application continue de Σ'_0 sur Σ_0. Il est immédiat que $\rho \circ \widetilde{\theta'} = \widetilde{\theta}$.

Montrons que $\widetilde{\theta'}$ est surjective. Soit $([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément de Σ'_0. Montrons que pour tout entier i, il existe un élément g_i de $G_{o(e_i)}$ tel que

$$[g_{i-k+1}, \ldots, g_{i-1}, g_i] = [g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}]$$

dans $G(e_{i-k+1}, \ldots, e_{i-1}, e_i)$. Posons $g_{-k+1} = g_{0,1}$, $\ldots$, $g_{-1} = g_{0,k-1}$ et $g_0 = g_{0,k}$. Construisons les g_n pour $n \geq 1$ par récurrence sur n (et de manière similaire les g_{-n} pour $n \geq k$).

Soit $n \geq 0$, et supposons construits $g_{-k+1}, \ldots, g_n$. En particulier, l'égalité

$$[g_{n-k+1}, \ldots, g_{n-1}, g_n] = [g_{n,1}, g_{n,2}, \ldots, g_{n,k}]$$

est vérifiée dans $G(e_{n-k+1}, \ldots, e_{n-1}, e_n)$. Par la condition $(3')$,

$$\mathrm{pr}_1[g_{n-k+1}, \ldots, g_{n-1}, g_n] = \mathrm{pr}_2[g_{n+1,1}, g_{n+1,2}, \ldots, g_{n+1,k}] \ .$$

Donc il existe h_1 dans $G_{e_{n-k+1}}$, $\ldots$, h_k dans G_{e_n} tels que

$$g_{n-k+2} = \rho_{e_{n-k+1}}(h_1) g_{n+1,1} \rho_{\overline{e}_{n-k+2}}(h_2)^{-1}, \ldots, g_n = \rho_{e_{n-1}}(h_{k-1}) g_{n+1,k-1} \rho_{\overline{e}_n}(h_k)^{-1} \ .$$

Posons maintenant $g_{n+1} = \rho_{\overline{e}_n}(h_k) g_{n+1,k}$. C'est un élément de $G_{e_{n+1}}$. De plus,

$$[g_{n-k+2}, \ldots, g_n, g_{n+1}] = [g_{n+1,1}, g_{n+1,2}, \ldots, g_{n+1,k}] \ ,$$

ce qui termine la récurrence.

Par la surjectivité de $\widetilde{\theta}$, il existe $f \in \mathcal{G}T$ tel que $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Alors, par construction de $\widetilde{\theta'}$, il est immédiat que $\widetilde{\theta'}(f) = ([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ce qui montre la surjectivité de $\widetilde{\theta'}$.

D'après ce qui précède, l'application $\widetilde{\theta'}$ induit une application continue surjective $\theta' : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma'_0$.

Montrons que θ' est injective. Soient f, f' dans $\mathcal{G}T$ tels que $\widetilde{\theta'}(f) = \widetilde{\theta'}(f')$. Montrons qu'il existe γ dans Γ tel que $f' = \gamma f$. Notons f'_i, e'_i, h'_i, g'_i les objets correspondants pour f' à ceux introduits dans la démonstration de la proposition 5.1 pour f. Comme $\widetilde{\theta'}(f) = \widetilde{\theta'}(f')$, on a $e'_i = e_i$. Quitte à remplacer f et f' par leurs images par des éléments de Γ, nous pouvons supposer que $f_0 = f'_0 = \widetilde{e_0}$, et dans la construction, nous pouvons alors prendre $h_0 = h'_0 = \mathrm{id}$.

Comme $\widetilde{\theta'}(f) = \widetilde{\theta'}(f')$, il existe pour tout i, une suite $(\alpha_{i,-k}, \alpha_{i,-k+1}, \ldots, \alpha_{i,0})$ dans $G_{e_{i-k}} \times \ldots \times G_{e_{i-1}} \times G_{e_i}$ telle que, pour tout $j = 1, \ldots, k$,

$$g'_{i-k+j} = \rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i,j-1-k})\ g_{i-k+j}\ \rho_{\overline{e_{i-k+j}}}({\alpha_{i,j-k}}^{-1}) \ . \quad (**)$$

La démonstration du lemme suivant est technique. Ceci s'explique par la possibilité de propagation de fixateurs d'arêtes dans des suites d'arêtes. C'est pour lui que nous avons besoin de l'hypothèse que l'action est k-acylindrique.

Lemme 5.6 *Pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a $\alpha_{i,-1} = \alpha_{i-1,0}$.*

Preuve. Le terme de gauche de l'égalité $(**)$ étant inchangé en remplaçant simultanément i par $i-1$ et j par $j+1$, il en est de même pour le terme de droite. Donc, pour tout $j = 1, \ldots, k-1$,

$$\rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i,j-1-k})g_{i-k+j}\rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha_{i,j-k}^{-1}) =$$

$$\rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i-1,j-k})g_{i-k+j}\rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha_{i-1,j+1-k}^{-1}).$$

Ceci équivaut à

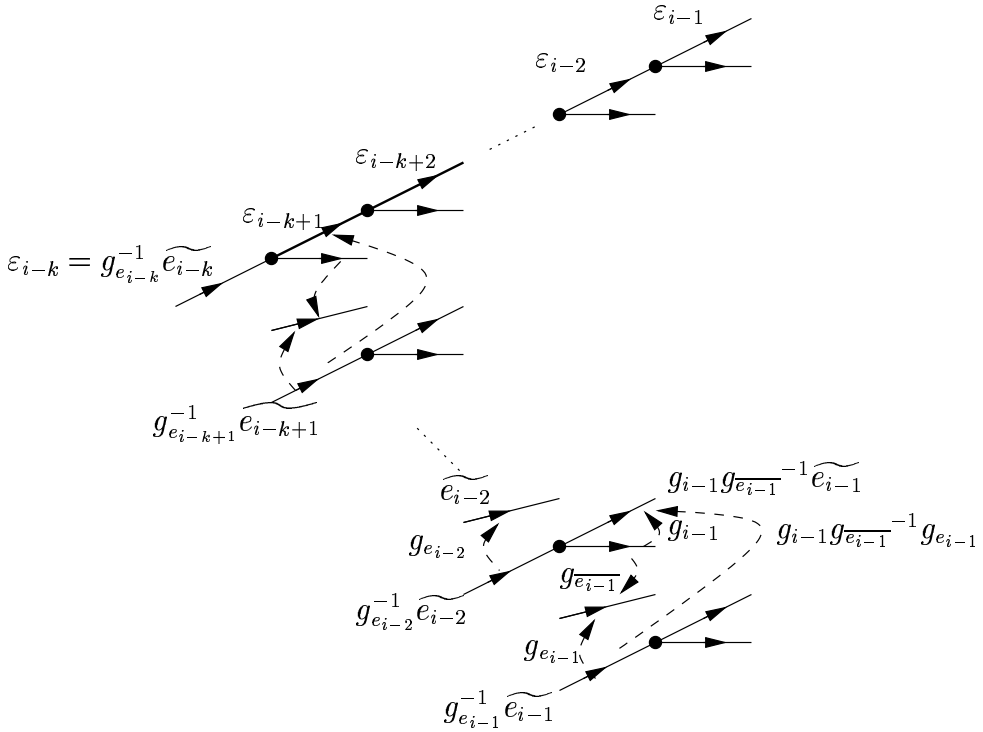
$$\rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i-1,j-k}^{-1}\alpha_{i,j-1-k}) = g_{i-k+j}\ \rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha_{i-1,j+1-k}^{-1}\alpha_{i,j-k})\ g_{i-k+j}^{-1}\ . \quad (***)$$

Comme $\alpha_{m,\ell}$ appartient à $G_{e_{m+\ell}}$, l'élément $\alpha_{i-1,j-k}^{-1}\alpha_{i,j-1-k}$ de Γ fixe l'arête $\widetilde{e_{i-k+j-1}}$.

Notons $\varepsilon_{i-k} = g_{e_{i-k}}^{-1}\widetilde{e_{i-k}}$, et pour $j = 1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i-k+j} &= (g_{i-k+1}g_{\overline{e_{i-k+1}}}^{-1}g_{e_{i-k+1}})(g_{i-k+2}g_{\overline{e_{i-k+2}}}^{-1}g_{e_{i-k+2}})\\ &\quad \ldots(g_{i-k+j-1}g_{\overline{e_{i-k+j-1}}}^{-1}g_{e_{i-k+j-1}})g_{i-k+j}g_{\overline{e_{i-k+j}}}^{-1}\widetilde{e_{i-k}}.\end{aligned}$$

Comme g_ℓ fixe $\widetilde{t(e_{\ell-1})} = \widetilde{o(e_\ell)}$, la suite $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1}, \ldots, \varepsilon_{i-1})$ est un $(k-1)$-chemin de T (voir la figure ci-dessous).



Remarquons que, pour $\ell = 0, \ldots, k-1$, l'élément $\rho_{e_{i-k+\ell}}(\alpha_{i-1,\ell+1-k}^{-1}\alpha_{i,\ell-k})$ fixe l'arête $\widetilde{g_{e_{i-k+\ell}}^{-1}e_{i-k+\ell}}$.

L'élément $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$, qui fixe $\widetilde{g_{e_{i-k}}^{-1}e_{i-k}} = \varepsilon_{i-k}$, est égal, d'après l'égalité $(***)$ pour $j = 1$, à un élément fixant

$$\widetilde{g_{i-k+1}g_{\overline{e_{i-k+1}}}^{-1}e_{i-k+1}} = (g_{i-k+1}g_{\overline{e_{i-k+1}}}^{-1}g_{e_{i-k+1}})\widetilde{g_{e_{i-k+1}}^{-1}e_{i-k+1}} = \varepsilon_{i-k+1}\ .$$

Donc $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$ fixe $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1})$. D'après la condition $(4')$, cette suite de deux arêtes consécutives n'est pas un aller-retour. Une récurrence immédiate montre que l'élément $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$ fixe le $(k-1)$-chemin $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1}, \ldots, \varepsilon_{i-1})$, qui est localement injectif. Il vaut donc l'identité, car l'action de Γ est k-acylindrique. Puisque les morphismes ρ_{e_n} sont injectifs, on a donc $\alpha_{i-1,1-k} = \alpha_{i,-k}$. Une récurrence immédiate utilisant les égalités $(***)$ pour $j = 1, \ldots, k-1$ montre alors que

$$\alpha_{i-1,\ell-k} = \alpha_{i,\ell-1-k}$$

pour $\ell = 1, \ldots, k$, ce qui montre le lemme pour $\ell = k$. □

Reprenons la démonstration de l'injectivité de θ'. Par l'égalité $(**)$ pour $j = k$, et par le lemme précédent, on a

$$g_i' = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i,-1})\ g_i\ \rho_{\overline{e_i}}(\alpha_{i,0}^{-1}) = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i-1,0})\ g_i\ \rho_{\overline{e_i}}(\alpha_{i,0}^{-1})\ .$$

La formule $(*)$ de la démonstration de la proposition 5.1 donne donc

$$g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1}' (h_i')^{-1} g_{\overline{e_i}} = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i-1,0})\ g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}}\ \rho_{\overline{e_i}}(\alpha_{i,0}^{-1}),$$

ce qui équivaut à

$$h_i'(h_{i-1}')^{-1} = \alpha_{i,0} h_i h_{i-1}^{-1} \alpha_{i-1,0}^{-1}\ .$$

Posons $f'' = \alpha_{0,0}^{-1} f'$. Alors, par naturalité, pour construire $\widetilde{\theta}(f'')$, on peut prendre $h_i'' = h_i' \alpha_{0,0}$. Donc, pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$h_i''(h_{i-1}'')^{-1} = \alpha_{i,0} h_i h_{i-1}^{-1} \alpha_{i-1,0}^{-1}.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $h_n'' = \alpha_{n,0} h_n$. Comme $h_0 = h_0' = \mathrm{id}$, on a $h_0'' = h_0' \alpha_{0,0} = \alpha_{0,0} h_0$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$, alors

$$h_n'' = \alpha_{n,0} h_n h_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1,0}^{-1} h_{n-1}'' = \alpha_{n,0} h_n\ .$$

Un raisonnement analogue pour $n \leq 0$ montre que pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a encore $h_i'' = \alpha_{i,0} h_i$. Donc, puisque $\alpha_{i,0}$ fixe l'arête $\widetilde{e_i}$, on a

$$f_i'' = (h_i'')^{-1} \widetilde{e_i} = h_i^{-1} \alpha_{i,0}^{-1} \widetilde{e_i} = h_i^{-1} \widetilde{e_i} = f_i\ .$$

Donc $f'' = f$, ce qui montre bien que f et f' sont dans la même orbite par Γ. Donc θ' est injective.

Cette démonstration montre aussi que si les i-èmes termes des suites $\widetilde{\theta'}(f)$ et $\widetilde{\theta'}(f')$ sont égaux pour i dans $[-N-2, N+2] \cap \mathbb{N}$, alors f et f' coïncident sur $[-N, +N]$. Donc $(\theta')^{-1}$ est continue. Ceci termine la démonstration du théorème 5.5. □

Références

[Alp] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, L'Ens. Math. **33** (1987) 269-373.

[BL] H. Bass, A. Lubotzky, *Tree lattices*, Prog. Math. **176**, Birkhäuser, 2001.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1) espace*, L'Ens. Math. **41** (1995) 63-102.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1998).

[BP] A. Broise, F. Paulin, *Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p*, Prépublication, Univ. Orsay 2002.

[Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.* Pacific J. Math. **159** (1993) 241–270.

[CP] M. Coornaert, A. Papadopoulos, *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lect. Notes Math. **1539**, Springer Verlag, 1993.

[DOP] F. Dal'Bo, J.-P. Otal, M. Peigné, *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000) 109–124.

[FO] N. Friedman, D. Ornstein, *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Adv. Math. **5** (1971) 365-394.

[GL] D. Gaboriau, G. Levitt, *The rank of actions on $\mathbb{R}$-trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.

[HK] B. Hasselblatt, A. Katok, eds., *Handbook of Dynamical Systems*, Elsevier, 2002.

[HP] S. Hersonsky, F. Paulin, *Counting orbit points in covering of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*, à paraître dans Erg. Theo. Dyn. Sys.

[Kai] V.A. Kaimanovich, *Bowen-Margulis and Patterson measures on negatively curved compact manifolds.* in " Dynamical systems and related topics" (Nagoya, 1990), 223–232, Adv. Ser. Dyn. Syst., **9**, World Sci. Pub., 1991.

[Kit] B. Kitchens, *Symbolic dynamics: one-sided, two sided and countable state Markov shifts*, Universitext, Springer Verlag, 1998.

[LP] F. Ledrappier, M. Pollicot, *Distribution results for lattices in $SL(2, \mathbb{Q}_p)$*, prépublication, 2003.

[LW] E. Lindenstrauss, B. Weiss, *On sets invariants under the action of the diagonal group*, à paraître dans Erg. Theo. Dyn. Sys.

[Lub] A. Lubotzky, *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, GAFA **1** (1991) 405-431.

[Mar1] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groupes*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

[Mar2] G. Margulis, *Problems and conjectures in rigidity theory*, in "Mathematics: frontiers and perspectives 2000", 161-174, Amer. Math. Soc. 2000.

[Moz] S. Mozes, *Actions of Cartan subgroups*, Israel J. Math. **90** (1995) 253-294.

[Orn] D. Ornstein, *Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts*, Adv. Math. **5** (1971) 349-364.

[Pau] F. Paulin, *Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres*, à paraître dans Manuscripta Mathematica.

[Rob] T. Roblin, *Ergodicité du feuilletage horocyclique, mélange du flot géodésique et équidistribution pour les groupes discrets en courbure négative*, à paraître dans Mémoires Soc. Math. France.

[Sel] Z. Sela, *Acylindrical accessibility for groups*, Inv. Math. **129** (1997) 528-565.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46** , Soc. Math. France (1983).

[Tom] G. Tomanov, *Actions of maximal tori on homogeneous spaces*, in "Rigidity in dynamics and geometry" (Cambridge, 2000), M. Burger, A. Iozzi eds, Springer Verlag (2002), 407-424.

[Tho] J.-P.. Thouvenot, *Entropy, isomorphism and equivalence in ergodic theory*, in Hand. Dyn. Sys. Vol. 1A, B. Hasselblatt, A. Katok eds., Elsevier, 2002, 205-238.

[Zim] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhauser, 1984.

Laboratoire de Mathématique UMR 8628 CNRS
Equipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail: Anne.Broise@math.u-psud.fr

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail: Frederic.Paulin@ens.fr