

Représentations de de Rham et représentations semi-stables

par

Jean-Marc Fontaine⁽¹⁾

Résumé – *On se propose de donner une nouvelle démonstration du fait que tout (φ, N) -module filtré faiblement admissible est admissible et de celui que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable. Très semblables l'une à l'autre, ces preuves reposent sur un cas particulier du lemme fondamental de la théorie des espaces de Banach-Colmez. La preuve du premier de ces deux théorèmes est très proche de la preuve originale. Celle du deuxième est très différente : elle n'utilise pas la théorie des équations différentielles p -adiques. Lorsque le corps résiduel est fini, elle n'utilise pas non plus la théorie des (φ, Γ) -modules.*

Abstract – *We give a new proof of the fact that any weakly admissible filtered (φ, N) -module is admissible and of the fact that any de Rham representation is potentially semi-stable. These two proofs are very similar and rely on a special case of the fundamental lemma of the theory of Banach-Colmez spaces. The proof of the first theorem is close to the original proof. The proof of the second is quite different : it doesn't use the theory of p -adic differential equations. If the residue field is finite, it doesn't use the theory of (φ, Γ) -modules either.*

Classification AMS (2000) : 11F80, 11S23, 14F30, 14F40.

Mots clés : Théorie de Hodge p -adique, représentations galoisiennes p -adiques, représentations semi-stables, modules filtrés.

Key words : p -adic Hodge Theory, p -adic Galois Representations, semi-stable representations, filtered modules.

e-mail : fontaine@math.u-psud.fr

⁽¹⁾ Institut Universitaire de France et UMR 8628 du CNRS, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex

Table

§1 – Introduction
§2 – Le cas où le polygone de Hodge est trivial
§3 – Extensions
§4 – $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentations et (φ^r, N) -modules filtrés
§5 – Une application du lemme fondamental de la théorie des espaces de Banach-Colmez
§6 – Récurrence sur le polygone de Hodge
§7 – Bibliographie

1. Introduction

On renvoie par exemple à [Fo94a] et [Fo94b] pour les constructions et résultats sur les représentations galoisiennes p -adiques utilisés dans ce qui suit.

1.1 – Dans tout cet article, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. C'est une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions K_0 de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k . On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on pose $G = G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$.

Ce groupe agit sur $\overline{K}$, sur le complété C de $\overline{K}$ pour la topologie p -adique et sur le corps B_{dR} des périodes p -adiques. Ce dernier contient $\overline{K}$. L'anneau B_{st} et son sous-anneau B_{cris} sont, de façon naturelle, des sous- K_0 -algèbres de B_{dR} stables par G . On a $(B_{dR})^G = K$, $(B_{st})^G = (B_{cris})^G = K_0$ et l'application naturelle $K \otimes_{K_0} B_{st} \rightarrow B_{dR}$ est injective.

Une *représentation p -adique* (de G) est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G .

Soit V une représentation p -adique. On pose

$$D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ et } D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$$

Les applications

$$\begin{aligned} \alpha_{dR}^V &: B_{dR} \otimes_K D_{dR}(V) \rightarrow B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \alpha_{st}^V &: B_{st} \otimes_{K_0} D_{st}(V) \rightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \alpha^V &: K \otimes_{K_0} D_{st}(V) \rightarrow D_{dR}(V) \end{aligned}$$

déduites, par extension des scalaires, des inclusions évidentes sont injectives. Par définition, V est de de Rham (resp. semi-stable) si α_{dR}^V (resp. α_{st}^V) est un isomorphisme, ce qui se produit si et seulement si $\dim_K D_{dR}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $\dim_{K_0} D_{st}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$). La représentation V est semi-stable si et seulement si V est de de Rham et α^V est un isomorphisme.

S'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que V est de Rham en tant que représentation p -adique de $G_L = \text{Gal}(\overline{K}/L)$, alors elle est de de Rham. Par définition V est *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que V est semi-stable en tant que représentation p -adique de $G_L = \text{Gal}(\overline{K}/L)$.

THÉORÈME A [Be02], [An02], [Me02], [Ke02]. — *Toute représentation p -adique de G_K qui est de de Rham est potentiellement semi-stable.*

Rappelons (cf. aussi [Co04]) que Berger [Be02] a utilisé la théorie des (φ, Γ) -modules [Fo90] et le théorème de Cherbonnier-Colmez [CC98] pour ramener cet énoncé à une conjecture de Crew [Cr98] qui dit que tout module à connexion sur l'anneau de Robba admettant une structure de Frobenius est quasi-unipotent. Cette conjecture a été prouvée indépendamment par André [An02], Mebkhout [Me02] puis Kedlaya [Ke04]. La preuve d'André comme celle de Mebkhout repose sur les travaux de Christol-Mebkhout sur les équations différentielles p -adiques et la structure de Frobenius n'intervient que pour montrer que le module à connexion est d'un type particulier. La preuve de Kedlaya au contraire repose sur une classification dans le style Dieudonné-Manin des modules sur l'anneau de Robba munis d'une connexion. Ceci lui permet de ramener la preuve de la conjecture de Crew au cas de pente 0 qui avait déjà été établi par Tsuzuki [Ts98].

1.2 – Dans cet article, une *filtration* sur un K -espace vectoriel Δ est une filtration décroissante indexée par $\mathbb{Z}$,

$$\dots \supset \text{Fil}^i \Delta \supset \text{Fil}^{i+1} \Delta \supset \dots$$

par des sous- K -espaces vectoriels, exhaustive ($\cup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i \Delta = \Delta$) et séparée ($\cap_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i \Delta = 0$).

Un *K -espace vectoriel filtré* est un K -espace vectoriel Δ muni d'une filtration. Si Δ est de dimension finie, on pose $t_H(\Delta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_K \text{gr}^i \Delta$ où $\text{gr}^i \Delta = \text{Fil}^i \Delta / \text{Fil}^{i+1} \Delta$.

Notons t un générateur du module de Tate $\mathbb{Z}_p(1)$ du groupe multiplicatif. Le corps B_{dR} est le corps des fractions de l'anneau B_{dR}^+ . Ce dernier a une structure d'anneau de valuation discrète complet de corps résiduel C et dont l'idéal maximal est engendré par t . Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\text{Fil}^i B_{dR}$ l'idéal (fractionnaire si $i < 0$) qui est la i -ième puissance de l'idéal maximal de B_{dR}^+ . Avec les notations habituelles pour les torsions à la Tate, on a donc $\text{Fil}^i B_{dR} = B_{dR}^+ t^i = B_{dR}^+(i)$ et $\text{gr}^i B_{dR} = \text{Fil}^i B_{dR} / \text{Fil}^{i+1} B_{dR} = C(i)$.

Pour toute représentation p -adique V de G , on fait de $D_{dR}(V)$ un K -espace vectoriel filtré en posant

$$\text{Fil}^i D_{dR}(V) = (B_{dR}^+(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}$$

1.3 – Soit σ le Frobenius absolu agissant sur k (par $x \mapsto x^p$), $W(k)$ et K_0 . Un (φ, N) -module (sur K_0) est un K_0 -espace vectoriel D muni d'une application σ -semi-linéaire injective $\varphi : D \rightarrow D$ et d'une application K_0 -linéaire $N : D \rightarrow D$ vérifiant $N\varphi = p\varphi N$. Si D est de dimension finie sur K_0 , on dispose d'une décomposition canonique de D

$$D = \oplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_{(\alpha)}$$

où $D_{(\alpha)}$, sous- K_0 -espace vectoriel de D stable par φ est la partie de pente α . Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \cdot \dim_{K_0} D_{(\alpha)} \in \mathbb{Z}$ et on pose $t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \dim_{K_0} D_{(\alpha)}$.

L'anneau B_{st} est muni d'un endomorphisme φ dont la restriction à K_0 est σ et qui commute à l'action de G . Il est aussi muni d'une K_0 -dérivation $N : B_{st} \rightarrow B_{st}$ qui commute à l'action de G et vérifie $N\varphi = p\varphi N$ (et l'anneau B_{cris} est le noyau de N). Pour toute représentation p -adique V de G , on étend l'action de φ et N à $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ en posant $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$ et $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$. Alors $D_{st}(V)$ est stable par φ et N et devient ainsi un (φ, N) -module sur K_0 .

Un (φ, N) -module filtré (sur K) est un couple formé d'un (φ, N) -module D sur K_0 et d'une filtration sur le K -espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$.

On dit qu'un (φ, N) -module filtré D est *faiblement admissible* si $\dim_{K_0} D$ est finie et si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) on a $t_H(D_K) = t_N(D)$,
- ii) pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D stable par φ et N on a $t_H(D'_K) \leq t_N(D')$ (on a muni le sous- K -espace vectoriel $D'_K = K \otimes_{K_0} D'$ de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ de la filtration induite).

Les (φ, N) -modules filtrés forment, de façon évidente, une catégorie additive $\mathbb{Q}_p$ -linéaire. La sous-catégorie pleine $MF_K^{fa}(\varphi, N)$ des modules filtrés faiblement admissibles est abélienne. Si D est un objet de cette catégorie, les *sous-objets* de D dans $MF_K^{fa}(\varphi, N)$ sont les sous- K_0 -espaces vectoriels stables par φ et N tels que $t_H(D'_K) = t_N(D')$.

Si V est une représentation p -adique semi-stable de G , le K -espace vectoriel $K \otimes_{K_0} D_{st}(V)$ s'identifie à $D_{dR}(V)$ et est donc muni d'une filtration. Ceci permet de considérer $D_{st}(V)$ comme un (φ, N) -module filtré sur K .

On dit qu'un (φ, N) -module filtré D est *admissible* s'il existe une représentation p -adique V semi-stable telle que D est isomorphe à $D_{st}(V)$.

Les représentations p -adiques de G forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$ -linéaire $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$. C'est, de manière tout autant évidente, une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Q}_p$. La sous-catégorie pleine $\text{Rep}_{st}(G)$ des représentations qui sont semi-stables est une sous-catégorie tannakienne (i.e. elle contient l'objet-unité, est stable par somme directe, sous-objet, quotient, produit tensoriel, dual). Pour toute représentation semi-stable V , le (φ, N) -module filtré $D_{st}(V)$ est *faiblement admissible* (i.e. tout (φ, N) -module filtré admissible est faiblement admissible) et D_{st} peut-être considéré comme un foncteur pleinement fidèle de $\text{Rep}_{st}(G)$ dans $MF_K^{fa}(\varphi, N)$. Ce foncteur induit une équivalence entre ces deux catégories. Autrement dit

THÉORÈME B [CF00]. — *Tout (φ, N) -module filtré sur K qui est faiblement admissible est admissible.*

1.4 – On se propose de prouver simultanément les théorèmes A et B. Autrement dit :

- on se donne une représentation V de de Rham et on veut montrer qu'elle est potentiellement semi-stable,
- ou on se donne un (φ, N) -module filtré faiblement admissible D et on veut montrer qu'il est admissible.

On introduit le *polygone de Hodge* P_H de V (resp. de D) : c'est le polygone convexe du plan associé au K -espace vectoriel filtré $D_{dR}(V)$ (resp. D_K). On dit que ce polygone est trivial s'il est porté par l'axe des x .

On commence (§2) par prouver le résultat lorsque P_H est trivial. Pour V cela résulte d'un vieux théorème de Sen [Se73] qui dit que l'action du groupe d'inertie sur une représentation de Hodge-Tate purement de poids 0 est finie. C'est le seul endroit où apparaît le fait qu'une représentation de de Rham peut être potentiellement semi-stable sans être déjà semi-stable. Pour D , ce n'est autre que l'équivalence de catégories entre représentations p -adiques non ramifiées de G_K et φ -isocristaux de pente 0.

On rappelle ensuite (§3) que la littérature permet de se ramener au cas d'une représentation irréductible. On remarquera que, pour le théorème A, c'est le seul endroit où l'on a encore besoin de la théorie des (φ, Γ) -modules et que l'on peut s'en passer lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Soient $(0, 0)$ et (h, t_H) les extrémités du polygone de Hodge P_H . Il est commode de pouvoir supposer que l'entier t_H est nul. Pour pouvoir le faire, on est conduit à généraliser légèrement la notion de représentation p -adique (resp. de (φ, N) -module filtré) et à introduire la notion de $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation (resp. de (φ^r, N) -modules filtré). Une torsion par une puissance symétrique de la $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation (ou du (φ^r, N) -module filtré) associé(e) à un groupe formel de Lubin-Tate convenablement choisi permet alors de supposer que l'entier $t_H(V)$ (ou $t_H(D)$) est bien nul. Tout ceci est détaillé au §4.

Dans le §5, on décrit une conséquence du lemme fondamental de la théorie des espaces de Banach-Colmez [Co02] qui joue un rôle crucial au §6.

Au §6 enfin, on prouve les théorèmes A et B pour une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation V (resp. un (φ^r, N) -module filtré) irréductible D_0 de dimension h vérifiant $t_H = 0$. On construit une autre représentation de de Rham V_2 (resp. un autre (φ^r, N) -module filtré faiblement admissible D'_0) dont le polygone de Newton est strictement au-dessus de P_H . Par induction, il en résulte que V_2 est potentiellement semi-stable (resp. que D'_0 est admissible). En regardant comment V_2 se déduit de V (resp. D'_0 se déduit de D_0), on en déduit que c'est encore vrai pour V (resp. D_0).

1.5 – L'histoire de cet article est la suivante : Je me suis rendu compte il y a longtemps qu'il devait exister une théorie des presque- C_p -représentations et que cette théorie impliquait le théorème B. Pour pouvoir établir cette théorie, il suffisait de pouvoir disposer d'un certain *lemme fondamental*. Pierre Colmez a d'abord établi une version faible de ce lemme. Cela suffisait pour avoir le théorème B et cela a donné lieu à [CF00]. Colmez a ensuite obtenu la version forte de ce lemme et s'en est servi pour développer sa théorie des *Espaces de Banach de dimension finie* [Co02] (qui peut aussi se décrire comme la *théorie des espaces de Banach-Colmez* ([Fo02], [FP04])). Pour ma part, je m'en suis servi pour développer cette théorie des presque C_p -représentations [Fo03].

J'ai rappelé plus haut l'histoire de la première preuve du théorème A. J'avais aussi donné (non publié) une preuve de ce théorème pour les représentations de dimension 2 reposant sur la théorie des C_p -représentations. En reprenant l'une des idées, Colmez (*manuscrit*, 2003) a obtenu une démonstration du théorème A qui repose sur ses espaces de Banach de dimension finie et sur des calculs de cohomologie galoisienne. Il n'utilise plus la théorie des équations différentielles p -adiques. Il n'utilise plus les (φ, Γ) -modules que pour résoudre un problème d'extensions (et on peut s'en douter sans passer lorsque $K/\mathbb{Q}_p$ est finie en utilisant le théorème de Hyodo). En regardant sa démonstration, je me suis rendu compte que je pouvais faire marcher la mienne en dimension quelconque et c'est ce que j'explique ici. La preuve donnée ici n'est pas conceptuellement très différente de celle de Colmez. En faisant un peu plus de dévissages que lui et en utilisant l'astuce des $\mathbb{Q}_p$ -représentations, j'ai pu éviter ses calculs de cohomologie galoisienne.

Enfin, j'explique aussi ici comment on peut modifier légèrement la preuve originale du théorème B [CF00] pour la rendre formellement très proche de celle du théorème A. Je n'ai pas répété les parties de la preuve qui restent identiques ([CF00], prop. 4.5, 5.3, 5.8 et lemme 6.4). Toutefois cette preuve utilise, au moins partiellement, la stabilité de la faible admissibilité par produit tensoriel due à Faltings et Totaro (cf. la remarque du §6.3).

2. Le cas où le polygone de Hodge est trivial

Soit Δ un K -espace vectoriel filtré de dimension finie d . Le polygone de Hodge $P_H(\Delta)$ est le polygone convexe du plan d'origine le point de coordonnées $(0, 0)$ dont les pentes sont entières, la longueur du segment de pente i étant égale à la dimension du K -espace vectoriel $gr^i \Delta$. Il se termine donc au point de coordonnées $(d, t_H(\Delta))$. On dit que $P_H(\Delta)$ est *trivial* si sa seule pente est 0, autrement dit si ce polygone est un segment porté par l'axe des x .

Pour toute représentation V de de Rham, on pose $P_H(V) = P_H(D_{dR}(V))$.

PROPOSITION 2A. — *Toute représentation p -adique V de G_K qui est de de Rham et telle que $P_H(V)$ est trivial est potentiellement semi-stable.*

Preuve : Dire que $P_H(V)$ est trivial signifie que $gr^i D_{dR}(V) = 0$ si $i \neq 0$, c'est-à-dire que 0 est le seul poids de Hodge-Tate. D'après un résultat de Sen ([Se73], cor.1, p.167), cela signifie que le groupe d'inertie agit sur V à travers un quotient fini. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut donc supposer que V est non ramifiée. Mais ceci implique qu'elle est cristalline (cf., par exemple, [Fo94b], prop.5.1.5), donc a fortiori potentiellement semi-stable. $\square$

Pour tout (φ, N) -module filtré D faiblement admissible, on pose $t_H(D) = t_H(D_K)$.

PROPOSITION 2B. — *Tout (φ, N) -module filtré faiblement admissible D tel que $P_H(D)$ est trivial est admissible.*

Preuve : Dire que $P_H(D)$ est trivial signifie que la filtration sur D_K est triviale, i.e. que $\text{Fil}^0 D_K = D_K$ et $\text{Fil}^1 D_K = 0$. Pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D stable par φ et N , on a donc $t_H(D') = 0$.

Soit D^0 le noyau de $N : D \rightarrow D$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, soit $D_{(\alpha)}^0$ la partie de pente α de D^0 . Si $D_{(\alpha)}^0$ est non nul, on doit avoir $t_N(D_{(\alpha)}^0) \geq t_H(D_{(\alpha)}^0) = 0$ i.e. $\alpha \geq 0$. Comme N est nilpotent et $N(D_{(\alpha)}) \subset D_{(\alpha-1)}$, on a a fortiori $D_{(\alpha)} = 0$ si $\alpha < 0$. La condition $t_N(D) = t_H(D) = 0$ implique alors que D est purement de pente 0. Comme $N(D) = N(D_{(0)}) \subset D_{(-1)} = 0$, on a aussi $N = 0$.

Rappelons ([Fo94b], §5) que B_{cris} contient le corps des fractions P_0 de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel de $\bar{K}$, sur lequel φ est le Frobenius absolu σ . Faisons agir φ sur $P_0 \otimes_{K_0} D$ via $\lambda \otimes \delta \rightarrow \sigma(\lambda) \otimes \varphi(\delta)$ et posons $V = (P_0 \otimes D)_{\varphi=1}$. La classification bien connue des représentations p -adiques non ramifiées de G par les φ -isocristaux de pente 0 sur K_0 , nous montre que V est une représentation non ramifiée de G de dimension égale à celle de D sur K_0 . Alors $D_{st}(V)$ s'identifie à D qui est donc bien admissible. $\square$

3. Extensions

PROPOSITION 3A. — *Soit*

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de représentations p -adiques de G . Si V est de de Rham et si V' et V'' sont semi-stables (resp. potentiellement semi-stables), alors V l'est aussi.

Supposons d'abord V' et V'' semi-stables. Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, c'est un résultat de Hyodo obtenu en vérifiant, via la théorie du corps de classes que les deux Ext^1 qui interviennent ont la même dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ ([Hy89], cf. aussi [Ne2], prop.1.24). Ceci a été étendu par Berger ([Be02], th.6.2) au cas général en utilisant la classification des représentations p -adiques de G via la théorie des (φ, Γ) -modules [Fo90]. C'est le seul endroit où l'on utilise cette théorie dans le présent article.

Si maintenant V' et V'' sont seulement potentiellement semi-stables, il suffit de remplacer K par une extension finie pour se ramener à la situation précédente. $\square$

PROPOSITION 3B. — *Soit*

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de (φ, N) -modules filtrés faiblement admissibles. Si D' et D'' sont admissibles, il en est de même de D .

C'est la proposition 5.8 de [CF00]. $\square$

4. $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentations et (φ^r, N) -modules filtrés

4.1 – Pour tout entier $r \geq 1$, on note $\mathbb{Q}_{p^r}$ l'unique extension non ramifiée de degré r de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$. C'est une extension cyclique de $\mathbb{Q}_p$ dont le groupe de Galois est engendré par la restriction du Frobenius absolu σ . Si M et N sont deux $\mathbb{Q}_{p^r}$ -espaces vectoriels, on a une décomposition canonique

$$M \otimes_{\mathbb{Q}_p} N = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}, m} N$$

où

$$M \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}, m} N = \{x \in M \otimes_{\mathbb{Q}_p} N \mid (1 \otimes \lambda)x = (\sigma^m(\lambda) \otimes 1)x \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{Q}_{p^r}\}$$

Le groupe G opère par restriction sur $\mathbb{Q}_{p^r}$ à travers un sous-groupe (éventuellement trivial) de $\text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^r}/\mathbb{Q}_p)$. Soit $h \in \mathbb{N}$. Une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation (de G) de dimension h est un $\mathbb{Q}_{p^r}$ -espace vectoriel de dimension h muni d'une action *semi-linéaire* de G . On dit que V est de de Rham (resp. potentiellement semi-stable, ...) si elle l'est en tant que représentation p -adique de dimension hr .

Soit V une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation de dimension h .

Chaque B_{dR} -espace vectoriel $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}, m} V$ est de dimension h et stable par G . Pour tout m , le K -espace vectoriel $D_{dR, m}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}, m} V)^G$ est de dimension $\leq h$ et $D_{dR}(V) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} D_{dR, m}(V)$. La représentation V est donc de de Rham si et seulement si chaque $D_{dR, m}(V)$ est de dimension h . Avec des notations évidentes, on a aussi

$$\text{Fil}^i D_{dR}(V) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \text{Fil}^i D_{dR, m}(V)$$

Les choses se passent un peu différemment avec B_{st} . On a encore

$$D_{st}(V) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} D_{st, m}(V) \text{ avec } D_{st, m}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}, m} V)^G$$

mais, pour tout m , on a $\varphi(D_{st, m}(V)) = D_{st, m+1}(V)$, ce qui fait que les $D_{st, m}(V)$ ont tous la même dimension sur K_0 et que V est semi-stable si et seulement si $D_{st, 0}(V)$ est de dimension h . On voit aussi que

- i) le K_0 -espace vectoriel $D_{st, 0}(V)$ est stable par φ^r et N (l'opérateur φ^r est σ^r -semi-linéaire et vérifie $N\varphi^r = p^r \varphi^r N$),
- ii) le (φ, N) -module $D_{st}(V)$ s'identifie à $\mathbb{Q}_p[\varphi] \otimes_{\mathbb{Q}_p[\varphi^r]} D_{st, 0}(V)$ (on a $D_{st, m}(V) = \varphi^r \otimes D_{st, 0}(V)$ et $N(\varphi^m \otimes d) = p^m \varphi^m \otimes Nd$, si $m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ et $d \in D_{st, 0}(V)$),
- iii) si V est semi-stable, on a $D_{dR, m}(V) = K \otimes_{K_0} D_{st, m}(V)$ pour tout m .

Ceci suggère les définitions suivantes :

– Un (φ^r, N) -module (sur K_0) est un K_0 -espace vectoriel D_0 muni d'une application σ^r -semi-linéaire injective $\varphi^r : D_0 \rightarrow D_0$ et d'une application K_0 -linéaire $N : D_0 \rightarrow D_0$ telle que $N\varphi^r = p^r \varphi^r N$.

A un tel D_0 est associé le (φ, N) -module $D = \mathbb{Q}_p[\varphi] \otimes_{\mathbb{Q}_p[\varphi^r]} D_0$, avec action de N définie comme ci-dessus. Si $\widehat{m} \in \mathbb{N}$ relève m , on pose $D_m = \{\varphi^{\widehat{m}} \otimes d \mid d \in D_0\}$ (c'est indépendant du choix du relèvement); on a donc $D = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} D_m$.

– Un (φ^r, N) -module filtré (sur K) est un couple formé d'un (φ, N) -module filtré D_0 et d'une structure de (φ, N) -module filtré sur le (φ, N) -module associé $D = \mathbb{Q}_p[\varphi] \otimes_{\mathbb{Q}_p[\varphi^r]} D_0$ telle que, si $D_{K,m} = K \otimes_{K_0} D_m$ et si $\text{Fil}^i D_{K,m} = \text{Fil}^i D_K \cap D_{K,m}$, on ait $\text{Fil}^i D_K = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \text{Fil}^i D_{K,m}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Par définition la *dimension* de ce (φ^r, N) -module filtré est la dimension de D_0 sur K_0 .

Les (φ^r, N) -modules filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive $MF_K(\varphi^r, N)$. On dit qu'un (φ^r, N) -module filtré est *faiblement admissible* (resp. *admissible*) si le (φ, N) -module filtré sous-jacent l'est.

Les assertions suivantes sont immédiates :

- tout (φ^r, N) -module filtré admissible est faiblement admissible,
- la sous-catégorie pleine $MF_K^{fa}(\varphi^r, N)$ (resp. $MF_K^a(\varphi^r, N)$) de $MF_K(\varphi^r, N)$ dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles (resp. admissibles) est abélienne,
- si V est une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation semi-stable, $D_{st,0}(V)$ est, de façon naturelle, un (φ^r, N) -module filtré admissible et $D_{st,0}$ induit une équivalence entre la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^r}, st}(G)$ des $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentations semi-stables et $MF_K^a(\varphi^r, N)$.

Le théorème A (resp. B) résulte alors de la proposition A (resp. B) qui suit (et qui n'est plus forte qu'en apparence) :

PROPOSITION A. — Soient r, h des entiers ≥ 1 et soit V une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation de de Rham de dimension h . Alors V est potentiellement semi-stable.

PROPOSITION B. — Soient r, h des entiers ≥ 1 et soit D_0 un (φ^r, N) -module filtré faiblement admissible de dimension h . Alors D_0 est admissible.

On pose

$$t_H(V) = t_H(D_{dR}(V)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i D_{dR}(V) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i D_{dR,m}(V)$$

De même on pose

$$t_H(D_0) = t_H(D_K) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i D_K = \sum_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i D_{K,m}$$

4.2 – Considérons les cas particuliers des propositions A et B ci-dessus :

PROPOSITION A'. — La proposition A est vraie lorsque $t_H(V) = 0$.

PROPOSITION B'. — *La proposition B est vraie lorsque $t_H(D_0) = 0$.*

Montrons maintenant que *la proposition A implique la proposition A*.

Soit s un entier ≥ 1 . On sait ([CF00], lemme 6.4) que le $\mathbb{Q}_{p^s}$ -espace vectoriel V_s des $v \in B_{cris}^+ \cap \text{Fil}^1 B_{dR}$ tels que $\varphi^s v = pv$ est de dimension 1. C'est donc une $\mathbb{Q}_{p^s}$ -représentation de G de dimension 1 (on peut montrer, nous n'en aurons pas besoin, que si $T_p(\Gamma_s)$ est le module de Tate du groupe formel de Lubin-Tate correspondant au choix de l'uniformisante p , alors V_s s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} T_p(\Gamma_s)$).

L'action de G sur V_s est donné par un 1-cocycle continu c_s à valeurs dans $\mathbb{Q}_{p^s}^*$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, posons

$$V_s^a = \text{Sim}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^a V_s \text{ si } a \geq 0 \text{ et } V_s^a = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(V_s^a, \mathbb{Q}_{p^s}) \text{ si } a < 0$$

C'est encore une $\mathbb{Q}_{p^s}$ -représentation de G de dimension 1 ; l'action de G sur V_s^a est donnée par le cocycle c_s^a .

Choisissons $v \in V_s$ non nul. Alors $t = v\varphi v\varphi^2 v \dots \varphi^{s-1}v$ est un élément non nul de $B_{cris}^+ \cap \text{Fil}^1 B_{dR}$ vérifiant $\varphi t = pt$. C'est donc un générateur de $\mathbb{Q}_p(1)$ ([Fo94a], th.5.3.7) et il est inversible dans B_{cris} . Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, v^a est un générateur du $\mathbb{Q}_{p^s}$ -espace vectoriel V_s^a et $v^{-a} \otimes v^a \in D_{st,0}(V_s^a)$ qui est non nul. Donc V_s est semi-stable (et même cristalline). Il en résulte que le (φ^s, N) -module filtré $D_{st,0}(V_s^a)$ est admissible. On a $D_{dR}(V_s^a) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} D_{dR,m}(V_s^a)$ où $D_{dR,m}(V_s^a)$ est le K -espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\varphi^m(v^{-a} \otimes v^a)$. On voit que

$$gr^i D_{dR}(V_s^a) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{-a, 0\}, \\ D_{dR,0}(V_s^a) & \text{si } i = -a, \\ \bigoplus_{m \neq 0} D_{dR,m}(V_s^a) & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Pour tout entier $s \geq 1$, tout $m \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ et toute $\mathbb{Q}_{p^s}$ -représentation W , posons $t_{H,m}(W) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K gr^i D_{dR,m}(W)$ de sorte que $t_H(W) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} t_{H,m}(W)$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ non nul, on a $t_{H,0}(V_s^a) = -a$ et $t_{H,m}(V_s^a) = 0$ pour $m \neq 0$.

Si W_1 et W_2 sont deux $\mathbb{Q}_{p^s}$ -représentations de de Rham de dimension respective h_1 et h_2 , alors $W_1 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} W_2$, quotient de $W_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_2$, est encore une $\mathbb{Q}_{p^s}$ -représentation de de Rham et sa dimension est $h_1 h_2$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, on a $D_{dR,m}(W_1 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} W_2) = D_{dR,m}(W_1) \otimes_K D_{dR,m}(W_2)$, de sorte que $t_{H,m}(W_1 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} W_2) = h_1 t_{H,m}(W_2) + h_2 t_{H,m}(W_1)$.

Si b est un entier ≥ 1 , $\mathbb{Q}_{p^{rb}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V$ est une $\mathbb{Q}_{p^{rb}}$ -représentation de de Rham de dimension h et, pour tout $m \in \mathbb{Z}/rb\mathbb{Z}$, si $\bar{m}$ désigne son image dans $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, on a $t_{H,m}(\mathbb{Q}_{p^{rb}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V) = t_{H,\bar{m}}(V)$.

Si b est un entier ≥ 1 et si $a \in \mathbb{Z}$ est non nul, on peut considérer la $\mathbb{Q}_{p^{rb}}$ -représentation $V' = V_{rb}^a \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V$. Comme V_{rb}^a et V sont de de Rham et comme V' est un quotient de $V_{rb}^a \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, elle est de de Rham. Comme $V' = V_{rb}^a \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} (\mathbb{Q}_{p^{rb}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V)$, on a

$$t_H(V') = (t_{H,0}(V) - ha) + \sum_{m \in \mathbb{Z}/rb\mathbb{Z}, m \neq 0} t_{H,\bar{m}}(V) = bt_H(V) - ah$$

Si $t_H(V) \neq 0$, choisissons a et b tels que $bt_H(V) = ah$. La proposition A' implique que la $\mathbb{Q}_{p^{rb}}$ -représentation V' est potentiellement semi-stable. Comme V_{rb}^{-a} l'est aussi, $V'' = V_{rb}^{-a} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} V'$ l'est également. Mais V'' s'identifie à $\mathbb{Q}_{p^{rb}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V$ et V s'identifie à une sous-représentation de V'' et est donc encore potentiellement semi-stable. $\square$

Montrons alors que *la proposition B' implique la proposition B*. La preuve est entièrement analogue. On cherche une $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation semi-stable V telle que le (φ^r, N) -module filtré $D_{st,0}(V)$ est isomorphe à D_0 .

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \geq 1$ et $W = V_{rb}^a \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V$. Cherchons à décrire le (φ^{rb}, N) -module filtré qui devrait correspondre à W . Soit v un élément non nul de V_{rb} . On a $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} W = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} V_{rb}^a) \otimes_{B_{st}} (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V)$. L'application B_{st} -linéaire $\nu : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V \rightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} W$ qui envoie x sur $(v^{-a} \otimes v^a) \otimes x$ est bijective et G_K -équivariante. Elle induit donc une bijection, K_0 -linéaire, de D_0 sur Δ_0 que l'on note encore ν . Elle commute à N et on a $\varphi^{rb}(\nu(x)) = p^{-a}\nu((\varphi^r)^b(x))$.

Pour tout entier m , posons $D_{K,m} = D_{K,m \bmod r}$ et $\Delta_{K,m} = \Delta_{K,m \bmod rb}$. On voit que $D_{K,m} = K \otimes_{K_0} \{\varphi^m \otimes x \mid x \in D_0\}$, tandis que $\Delta_{K,m} = K \otimes_{K_0} \{\varphi^m \otimes \nu(x) \mid x \in D_0\}$. L'application $\nu_m : D_{K,m} \rightarrow \Delta_{K,m}$ qui envoie $\lambda \otimes (\varphi^m \otimes x)$ sur $\lambda \otimes (\varphi^m \otimes \nu(x))$ est K -linéaire bijective. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on voit que

- pour $0 < m < rb$, on a $\text{Fil}^i \Delta_{K,m} = \nu_m(\text{Fil}^i D_{K,m})$,
- on a $\text{Fil}^i \Delta_{K,0} = \nu_0(\text{Fil}^{i+a} D_{K,0})$,

ce qui fait que $t_H(\Delta) = bt_H(D) - ah$. On peut donc choisir a et b pour que $t_H(\Delta) = 0$.

Il faut se convaincre que le (φ, N) -module filtré Δ sous-jacent au (φ^r, N) -module filtré Δ_0 ainsi défini est faiblement admissible. La façon la moins fatigante de le faire est de remarquer que Δ est isomorphe à un facteur direct du produit tensoriel du (φ, N) -module filtré sous-jacent à D_0 avec le (φ, N) -module filtré $D_{st}(V_{rb}^a)$. Comme le fait d'être faiblement admissible est stable par produit tensoriel ([Fa95], [To96]) et évidemment aussi par facteur direct, Δ est bien faiblement admissible.

L'égalité $t_H(\Delta) = bt_H(D) - ah$ nous permet alors de choisir a et b pour que $t_H(\Delta) = 0$. La proposition B' implique alors que Δ_0 est admissible et correspond donc à une $\mathbb{Q}_{p^{rb}}$ -représentation semi-stable W . Mais alors $V_{rb}^{-a} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} W$ est aussi semi-stable. On voit que D s'identifie à un facteur direct de $D_{st}(V_{rb}^{-a} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rb}}} W)$ et est donc encore admissible. $\square$

5. Une application du lemme fondamental de la théorie des espaces de Banach-Colmez

Le résultat qui est l'objet de ce paragraphe sera utilisé au paragraphe suivant pour achever la preuve des théorèmes A et B par une récurrence sur le polygone de Hodge.

5.1 – Soient $U = \{u \in B_{\text{cris}} \mid \varphi u = pu\} \cap B_{dR}$ et $B_2 = B_{dR}^+ / \text{Fil}^2 B_{dR}^+ = B_{dR}^+ / t^2 B_{dR}^+$. Rappelons ([Fo94a], §3.1) que le composé de l'inclusion de U dans B_{dR}^+ avec la projection sur C est surjective et que le noyau s'identifie à $\mathbb{Q}_p(1)$. On dispose donc d'un diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \rightarrow & U & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & C(1) & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, les flèches verticales étant injectives. Notons θ la projection de B_2 sur C .

PROPOSITION 5.1 (lemme fondamental, version forte). — *Soient s un entier ≥ 2 , $v_1, v_2, \dots, v_s \in B_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in C$ des éléments non tous nuls tels que $\sum_{n=1}^s \alpha_n \theta(v_n) = 0$ et soit*

$$Y = \{(u_1, u_2, \dots, u_s) \in U^s \mid \exists c \in C \text{ tel que } \theta(u_n) = c\alpha_n \text{ pour tout } n\}$$

Soit $\rho : Y \rightarrow B_2$ la restriction à Y de l'application de U^s dans B_2 qui envoie $(u_1, u_2, \dots, u_s)$ sur $\sum_{n=1}^s u_n v_n$. Alors $\text{Im } \rho \subset C(1)$ et

- *ou bien $\text{Im } \rho = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^s)$ (et donc $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Im } \rho \leq s$),*
- *ou bien $\text{Im } \rho = C(1)$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Ker } \rho = s$.*

Preuve : A part le fait que lorsque ρ est surjective, on a $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Ker } \rho = s$, c'est exactement la proposition 2.1 de [CF00]. Dans la preuve de cette proposition, on montre (p.18–19) que ρ est *limite uniforme de fonctions algébriques*. La dernière assertion est alors l'assertion (iii) du théorème 1.1 de [Co02]. $\square$

5.2 – Si V est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie, on pose $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. En tensorisant le diagramme situé plus haut par $V(-1)$, on obtient un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V & \rightarrow & V_C(-1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & V_C & \rightarrow & B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V & \rightarrow & V_C(-1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont encore exactes, les flèches verticales étant encore injectives.

PROPOSITION 5.2. — *Soient V un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie $s \geq 2$. On se donne une application B_2 -linéaire surjective $\eta : B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow B_2(-1)$ et on note $\bar{\eta} : V_C(-1) \rightarrow C(-1)$ l'application C -linéaire déduite par passage aux quotients. Soit $\bar{X}$ un sous- C -espace vectoriel de dimension 1 de $V_C(-1)$ et X son image inverse dans $U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. On suppose que $\bar{X} \subset \text{Ker } \bar{\eta}$, de sorte que la restriction η_X de η à X peut être considérée comme une application de X dans C .*

Supposons $\eta(V) \neq \eta(X)$. Alors $\eta_X : X \rightarrow C$ est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension s .

Preuve : Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ une base de V sur $\mathbb{Q}_p$. Les $e'_n = t^{-1} \otimes e_n$ forment une base du B_2 -module libre $B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Posons $\eta(e'_n) = v_n \otimes t^{-1}$, avec $v_n \in B_2$.

Les images $\bar{e}'_n$ des e'_n dans $V_C(-1)$ forment une base de ce C -espace vectoriel. Soit $\alpha = \sum_{n=1}^s \alpha_n \bar{e}'_n$ un élément non nul de $\bar{X}$. Le fait que $\bar{X} \subset \text{Ker } \bar{\eta}$ implique que $\sum \alpha_n \theta(v_n) = 0$ et on peut appliquer la proposition précédente. L'application

$\nu : U^s \rightarrow u(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui envoie $(u_1, u_2, \dots, u_s)$ sur $\sum (u_n \otimes t^{-1}) \otimes e_n$ est bijective et sa restriction ν_Y à Y est une bijection de Y sur X . On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\rho} & C(1) \\ \nu_X \downarrow & & \downarrow \times t^{-1} \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & C \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des bijections. La proposition n'est donc qu'une reformulation du lemme fondamental. $\square$

PROPOSITION 5.3. — *Soit V_1 un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie s . Posons $\Lambda_1 = B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ et soit Λ_2 un sous- B_{dR}^+ -module de $\Lambda_1(-1)$ tel que $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ et $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_2$ sont des B_{dR}^+ -modules simples. Soient X l'image inverse de $\Lambda_1 + \Lambda_2$ dans $U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ et*

$$\rho : U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \rightarrow \Lambda_1(-1)/\Lambda_2$$

la projection naturelle. Alors

- (i) ou bien $\dim_{\mathbb{Q}_p} \rho(X) \leq s$ et le noyau de ρ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$,
- (ii) ou bien ρ est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension s .

Preuve : Commençons par observer que, comme B_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C , les hypothèses impliquent que $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ et $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_2$ sont des C -espaces vectoriels de dimension 1. On voit que $h \geq 2$ et que l'on peut trouver des éléments e, e' de $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et un sous- B_{dR}^+ -module Λ_0 de Λ_1 , libre de rang $h - 2$ tel que

$$\Lambda_1 = B_{dR}^+ \cdot e \oplus B_{dR}^+ \cdot e' \oplus \Lambda_0 \text{ et } \Lambda_2 = B_{dR}^+ \cdot t^{-1}e \oplus B_{dR}^+ \cdot te' \oplus \Lambda_0$$

On dispose de deux diagrammes commutatifs : Le premier

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & V_1 & \rightarrow & X & \rightarrow & (\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1 \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & V_1 & \rightarrow & U(-1) \otimes V & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_1 \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

a ses lignes et ses colonnes exactes. Le second

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & U(-1) \otimes V_1 & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & (\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_2 & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) \end{array}$$

a ses lignes exactes.

On a $B_2(-1) \otimes V_1 = \Lambda_1(-1)/\Lambda_1(1)$. Si ε (resp. ε') désigne l'image de $t^{-1}e$ (resp. $t^{-1}e'$) dans ce B_2 -module, celui-ci est la somme directe du B_2 -module libre de rang 2 de base $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ et du B_2 -module $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0(-1)/\Lambda_0(1)$.

Notons $\eta : B_2(-1) \otimes V_1 \rightarrow B_2(-1)$ l'application qui envoie $a\varepsilon + a'\varepsilon' + b$ sur $a't^{-1}$ (où $a, a' \in B_2$ et $b \in \bar{\Lambda}_0$). L'image de la restriction η_X de η à X est contenue dans C et le diagramme ci-dessus induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & U(-1) \otimes V_1 & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) \\ & & \downarrow \eta_X & & \downarrow \rho & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) \end{array}$$

(où $C \rightarrow \Lambda_1(-1)/\Lambda_2$ est l'application qui envoie c sur l'image de $ct^{-1}\varepsilon'$) dont les lignes sont exactes.

On voit que l'image $\bar{X}$ de X dans $\Lambda_1(-1)\Lambda_1 = (C \otimes V_1)(-1)$ est un C -espace vectoriel de dimension 1 contenu dans le noyau de $\bar{\eta}$. On voit aussi que X est l'image inverse de $\bar{X}$ dans $U(-1) \otimes V_1$. On peut donc appliquer la proposition précédente. Si $\eta(V_1) = \eta(X)$ on est dans le cas (i). Sinon, η_X est surjective, donc aussi ρ et le noyau de ρ qui est égal à celui de η_X est de dimension s sur $\mathbb{Q}_p$. $\square$

6. Récurrence sur le polygone de Hodge

6.1 – On veut prouver le théorème A (resp. B). On a vu au §4 qu'il suffit de prouver la proposition A (resp. B), on peut supposer que celle-ci est vraie pour tous les couples d'entiers (r', h') avec $h' < h$. On peut aussi supposer que $t_H(V) = 0$ (resp. $t_H(D_0) = 0$).

Considérons l'ensemble des polygones convexes du plan d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(hr, 0)$ dont les sommets sont des points à coordonnées entières. Le polygone de Hodge P_H de V (resp. D_0) est un élément de cet ensemble. On a vu au §2 que la proposition est vraie lorsque P_H est le polygone trivial. En procédant par récurrence, on peut supposer que la proposition est vraie pour toute $\mathbb{Q}_{p^r}$ -représentation de dimension h (resp. tout (φ^r, N) -module filtré de dimension h dont le polygone est strictement au-dessus de P_H). Enfin, on peut supposer (§3) que V (resp. D_0) est irréductible.

Avec les notations du §4.1, posons $\Delta_m = D_{dR, m}(V)$ (resp. $\Delta_m = D_{K, m}$) et $\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \Delta_m$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Fil}^i \Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \text{Fil}^i \Delta_m \cap \Delta_m$. Ceci nous permet de choisir une base $\{\delta_j\}_{1 \leq j \leq rh}$ de Δ qui soit à la fois adaptée à la filtration $(\text{Fil}^i \Delta)_{i \in \mathbb{Z}}$ et à la graduation $\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \Delta_m$. De façon précise,

– si i_j désigne le plus grand entier tel que $\delta_j \in \text{Fil}^{i_j} \Delta$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\text{Fil}^i \Delta$ est le K -espace vectoriel de base les δ_j avec $i_j \geq i$,

– pour tout $m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, Δ_m est le K -espace vectoriel de base les δ_j qui y appartiennent.

En outre, la longueur de la projection sur l'axe des x du segment de pente i de P_H est égal au nombre de j tels que $i_j = i$. On a $0 = t_H = \sum_{j=1}^{rh} i_j$. Comme P_H n'est pas trivial, quitte à changer l'ordre des δ_j , on peut supposer que $i_2 \geq i_1 + 2$.

6.2 – *Fin de la preuve du théorème B* : Traitons d'abord le cas de D_0 (la preuve est alors essentiellement celle de [CF00]). Considérons le (φ^r, N) -module filtré D'_0 ainsi défini :

- le (φ^r, N) -module sous-jacent est le (φ^r, N) -module sous-jacent à D_0 ;
- ceci implique que $D'_K = D_K = \Delta$; on définit la filtration sur D'_K en convenant que la base des δ_j , toujours adaptée à la graduation indexée par $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ est encore adaptée à la filtration mais que, avec des notations évidentes :

$$i'_1 = i_1 + 1, i'_2 = i_2 - 1 \text{ et } i'_j = i_j \text{ pour } j \geq 2$$

Alors D'_0 est bien un (φ^r, N) -module filtré de dimension h . Si D' désigne le (φ, N) -module filtré sous-jacent :

- on a $t_H(D') = t_H(D) - 1 + 1 = t_H(D) = 0$ tandis que $t_N(D') = t_N(D)$,
- tout sous- K_0 -espace vectoriel E' de D' stable par φ et N , différent de 0 et D' , s'identifie à un sous- K_0 -espace vectoriel E de D stable par φ et N , différent de 0 et D . On a $t_N(E') = t_N(E)$, tandis que $t_H(E') = t_H(E) + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$. L'admissibilité faible de D implique que $t_H(E) \leq t_N(E)$. Si l'on avait l'égalité, alors E serait un sous-objet de D dans la catégorie des (φ, N) -modules filtrés faiblement admissibles, ce qui contredit l'irréductibilité de D . On a donc $t_H(E') \leq t_N(E')$.

On en déduit que D'_0 est un (φ^r, N) -module faiblement admissible de dimension h vérifiant $t_H(D'_0) = 0$. Comme son polygone de Hodge est strictement au-dessus de celui de D_0 , l'hypothèse de récurrence implique qu'il est admissible.

Posons

$$V_{st}^0(D) = V_{st}^0(D') = \{x \in B_{st} \otimes_{K_0} D \mid \varphi x = x \text{ et } Nx = 0\}$$

Soient $W = B_{dR} \otimes_K D_K = B_{dR} \otimes_K D'_K$, $\Lambda_1 = \text{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D_K) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^{-i} B_{dR} \otimes_K \text{Fil}^i D_K$ et $\Lambda_1 = \text{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D_K)$. Enfin, pour $i = 1, 2$, notons V_i le noyau de l'application composée

$$V_{st}^0(D) \subset B_{st} \otimes_{K_0} D \subset W \rightarrow W/\Lambda_i$$

Le fait que D' est admissible implique ([CF00], prop.5.3) que $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_1 = rh$ et que l'application naturelle $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \rightarrow \Lambda_1$ est un isomorphisme. Par ailleurs ([CF00], prop.4.5), le fait que D est faiblement admissible implique que V_2 est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ et, pour montrer que D est admissible, il suffit de vérifier que $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_2 \geq rh$.

Remarquons que Λ_2 est un sous- B_{dR}^+ -module de $\Lambda_1(-1)$ et que $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ et $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_2$ sont des B_{dR}^+ -modules simples. On peut donc appliquer la proposition 5.3. On a $U(-1) \subset B_e = \{b \in B_{st} \mid Nb = 0 \text{ et } \varphi b = b\}$. On en déduit que $U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \subset V_{st}^0(D)$ et que le noyau de ρ est contenu dans V_2 . Il est donc de dimension finie, ce qui implique que sa dimension est rh et D est bien admissible. $\square$

6.3 – *Remarque* : La preuve originale [CF00] du théorème B est la suivante : On travaille uniquement avec des $\mathbb{Q}_p$ -représentations. Du coup, on n'a pas besoin du §4, ce qui permet d'éviter d'utiliser la stabilité par produit tensoriel mais ce qui nous empêche de nous ramener au cas où $t_H = 0$. En utilisant les §3, 5 et 6 et des torsions à la Tate, on se ramène au cas où les pentes de P_H sont contenues dans $\{0, 1\}$, ce qui fait que le §1 où

0 est la seule pente ne suffit plus. Toutefois, l'irréductibilité implique que $N = 0$. En jouant encore avec la proposition 5.3, on peut changer la filtration sur D_K sans changer P_H pour se ramener au cas où cette filtration est définie sur K_0 . On peut alors conclure de deux façons différentes :

i) ou bien utiliser le fait que l'admissibilité de D avait déjà été prouvée dans ce cas particulier dans [FL82],

ii) ou bien utiliser les idées du §2 pour se ramener au cas où k est algébriquement clos. En utilisant encore la proposition 5.3, on se ramène alors au cas où, avec les notations du §4, $D = D_{st}(V_s^{-1})$, pour un entier $s \geq 1$ convenable et est donc bien admissible.

Il est vraisemblable qu'en se fatigant un peu, on doit pouvoir vérifier "à la main" le petit bout de stabilité par produit tensoriel de la notion d'admissibilité faible que l'on utilise ici, évitant ainsi d'utiliser [To96]. Je n'ai pas vérifié.

6.4 – Avant de traiter le cas de V , commençons par rappeler deux résultats plus ou moins bien connus sur les B_{dR}^+ -représentations (de G_K).

LEMME 1. — *Il n'existe pas de section $\mathbb{Q}_p$ -linéaire G_K -équivariante de la projection de B_2 sur C .*

Preuve : Soit V_0 une représentation p -adique de G_K , extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$ (une telle représentation existe bien : lorsque $K = \mathbb{Q}_p$, cela résulte de ce que le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel $\text{Ext}_{\mathbb{Q}_p[G_{\mathbb{Q}_p}]}^1(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $H_{cont}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(-1))$ qui est de dimension 1 ; l'extension ainsi fabriquée reste non triviale après le changement de base $\mathbb{Q}_p \rightarrow K$).

La représentation V_0 n'est pas de de Rham car sinon, comme $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_p(1)$ sont semi-stables, elle le serait aussi (prop. 3.A), mais il n'y a pas d'extension non triviale de $D_{st}(\mathbb{Q}_p(1))$ par $D_{st}(\mathbb{Q}_p)$. Rappelons que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ non nul $H_{cont}^1(K, C(i)) = 0$ ([Ta67], prop.8). En particulier, $\text{Ext}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}^1(\mathbb{Q}_p(1), C) = H_{cont}^1(K, C(-1)) = 0$ et le plongement de $\mathbb{Q}_p$ dans C s'étend en un plongement de V_0 dans C . Si le lemme n'était pas vrai, on pourrait relever ce plongement en un plongement de V_0 dans B_2 . La nullité des $H_{cont}^1(K, C(i))$ implique, de proche en proche, que ce plongement se relève en un plongement i_0 de V_0 dans $B_{dR}^+ = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_{dR}^+ / \text{Fil}^n B_{dR}^+$. Mais alors $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_0, B_{dR})$ serait de dimension ≥ 2 (puisqu'il contient aussi le composé de la projection de V_0 sur $\mathbb{Q}_p(1)$ avec l'inclusion de $\mathbb{Q}_p(1)$ dans B_{dR}), ce qui contredit le fait que V_0 , et donc sa duale, n'est pas de de Rham. $\square$

Appellons alors B_{dR}^+ -représentation (de G_K) la donnée d'un B_{dR}^+ -module de type fini muni d'une action linéaire et continu de G_K . Avec comme morphismes les applications B_{dR} -linéaires G_K -équivariantes, ils forment une catégorie abélienne $\text{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ qui est même artiniennne. Pour $m \in \mathbb{N}^*, i \in \mathbb{Z}$, $B_m(i) = \text{Fil}^i B_{dR} / \text{Fil}^{i+m} B_{dR} = (B_{dR}^+ / t^m B_{dR}^+)(i)$ est un objet indécomposable de cette catégorie. On dit qu'une B_{dR}^+ -représentation est de Hodge-Tate si elle est somme directe d'indécomposables de ce type. Dans $\text{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$, tout sous-objet ou tout quotient d'un objet qui est de Hodge-Tate est encore de Hodge-Tate.

LEMME 2. — *Soit*

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de B_{dR}^+ -représentations de Hodge-Tate. Pour que cette suite soit scindée, il faut et il suffit qu'il existe une section $\mathbb{Q}_p$ -linéaire G_K -équivariante de la projection de W sur W'' .

Preuve : La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On voit que l'on peut trouver une décomposition de W en somme directe d'indécomposables $W = \bigoplus_{1 \leq n \leq h} W_n$ telle que, si $W'_m = W' \cap W_m$, alors W' est la somme directe des W'_m et W'' est la somme directe des W_m/W'_m . En utilisant une telle écomposition, on se ramène au cas où $h = 1$. Il s'agit donc de montrer que si $r, s, i \in \mathbb{Z}$ avec $r, s \geq 1$, il n'existe pas de section G_K -équivariante de la projection de $B_{r+s}(i)$ sur $B_r(i)$. Celle-ci induirait, par "passage au sous-quotient", une section de la projection de $B_2(i+r-1)$ sur $C(i+r-1)$, donc, après tensorisation par $\mathbb{Z}_p(1-r-i)$, une section $\mathbb{Q}_p$ -linéaire, G_K -équivariante, de la projection de B_2 sur C ce qui contredirait le lemme précédent. $\square$

Remarque : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'anneau B_m a une structure naturelle de $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach, ce qui fait que l'on dispose d'un foncteur d'oubli de la catégorie des B_{dR} -représentations de Hodge-Tate dans celle des $\mathbb{Q}_p$ -espaces de Banach munis d'une action linéaire et continue de G_K . Ce foncteur est pleinement fidèle [Fo03]. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat. $\square$

On va alors appliquer la proposition 5.3 avec $V_1 = V$. Comme V est de de Rham et comme $\Delta = D_{dR}(V)$, le B_{dR} -espace vectoriel $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ s'identifie à $B_{dR} \otimes_K \Delta$ et on a $\Lambda_1 = B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \text{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K \Delta)$. C'est le B_{dR}^+ -module libre de base les $e_j = t^{-i_j} \otimes \delta_j$, pour $1 \leq j \leq rh$. Posons

$$e'_1 = t^{-1}e_1, \quad e'_2 = te_2 \quad \text{et} \quad e'_j = e_j \quad \text{pour} \quad 2 \leq j \leq rh$$

Le sous- B_{dR}^+ -module Λ_2 de $\Lambda_1(-1)$ de base les e'_j satisfait les hypothèses de la proposition 5.3. Avec les notations de cette proposition, le quotient $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ est le C -espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'image de $e'_1 = t^{-i_1-1} \otimes \delta_1$ et est isomorphe à $C(-i_1 - 1)$. On a donc une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow C(-i_1 - 1) \rightarrow 0$$

Cette suite n'admet pas de section $\mathbb{Q}_p$ -linéaire G_K -équivariante. En effet, on a des applications injectives $X \rightarrow U(-1) \otimes V \rightarrow B_2(-1) \otimes V = \Lambda_1(-1)/\Lambda_1(1)$. Ce dernier est un B_2 -module libre de base les images b_j des $t^{-i_j-1} \otimes \delta_j$. Le facteur de base b_1 est isomorphe à $B_2(-i_1 - 1)$ et la projection sur ce facteur parallèlement aux autres induit un diagramme commutatif G_K -équivariant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & X & \rightarrow & C(-i_1 - 1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & C(-i_1) & \rightarrow & B_2(-i_1 - 1) & \rightarrow & C(-i_1 - 1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Si la suite exacte du haut était scindée, celle du bas le serait aussi, ce qui contredirait le lemme 1.

Remarquons que $V = V_1$ n'est pas contenu dans le noyau de ρ : sinon V serait contenu dans Λ_2 , il en serait de même du sous- B_{dR}^+ -module de $\Lambda_1(-1)$ engendré par V_1 qui est Λ_1 , et ce n'est pas le cas.

Comme l'application ρ est G_K -équivariante et comme V est irréductible, la restriction de ρ à V est injective. On a $\rho(X) \neq \rho(V)$ (parce que, sinon, on aurait $X = V \oplus \text{Ker } \rho$, ce qui contredirait le fait que la suite exacte $(*)$ n'est pas scindée). On a donc $\dim_{\mathbb{Q}_p} \rho(X) > rh$. D'après la proposition 5.3, ρ est surjective et son noyau V_2 est de dimension rh sur $\mathbb{Q}_p$. On voit que c'est une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de G_K de dimension h .

LEMME 3. — *L'application B_{dR}^+ -linéaire $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2 \rightarrow \Lambda_2$ déduite de l'inclusion $V_2 \rightarrow \Lambda_2$ est un isomorphisme.*

Preuve : Comme $B_{dR}^+ \otimes V_2$ et Λ_2 sont des B_{dR}^+ -modules libres de même rang fini, il suffit de vérifier que l'application est surjective, ou encore, grâce au lemme de Nakayma, que, si Λ_{V_2} désigne le sous- B_{dR}^+ -module de Λ_2 engendré par V_2 et $t\Lambda_2 = \Lambda_2(1)$, alors $\Lambda_{V_2} = \Lambda_2$.

En composant l'inclusion de $U(-1) \otimes V$ dans $\Lambda_1(-1)$ avec la projection de $\Lambda_1(-1)$ sur $\Lambda_1(-1)/\Lambda_{V_2}$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V_2 & \rightarrow & U(-1) \otimes V & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \Lambda_2/\Lambda_{V_2} & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_{V_2} & \rightarrow & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et la dernière ligne doit admettre une section $\mathbb{Q}_p$ -linéaire G_K -équivariante. Mais $\Lambda_1(-1)/\Lambda_{V_2}$, quotient de $\Lambda_1(-1)/\Lambda_2(1)$, est une B_{dR}^+ -représentation de Hodge-Tate. D'après le lemme 2, cette suite doit donc être scindée en tant que suite exacte de B_{dR}^+ -modules.

Si, pour $1 \leq j \leq rh$, $\bar{u}_j$ désigne l'image de $t^{-i_j-1} \otimes \delta_j$ dans $\Lambda_1(-1)/\Lambda_2$, on a $\bar{u}_1 = 0$, $t\bar{u}_j = 0$ pour $j \geq 3$ et $\Lambda_1(-1)/\Lambda_2$ est la somme directe du B_2 -module libre de base $\bar{u}_2$ et du C -espace vectoriel de base les $\bar{u}_j$, pour $j \geq 3$. Comme Λ_2/Λ_3 est tué par t , on en déduit que $t^{-i_2+1} \otimes \delta_2$ et les $t^{-i_j} \otimes \delta_j$ pour $j \geq 3$ sont dans Λ_{V_2} . Donc Λ_{V_2} contient le sous- B_{dR}^+ -module engendré par ces éléments et par $t^{-i_1} \otimes \delta_1$ qui n'est autre que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Comme $\Lambda_2/(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ est un B_{dR}^+ -module simple, il suffit de vérifier que $\Lambda_{V_2} \not\subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, ou encore que V_2 n'est pas contenu dans Λ_1 . Mais $(U(-1) \otimes V) \cap \Lambda_1 = V$ et $V \cap V_2 = 0$ puisque la restriction de ρ à V est injective. $\square$

6.5– *Fin de la preuve du théorème A :* En inversant t , on déduit du lemme 3, un isomorphisme de $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ sur $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est G_K -équivariant. Il induit donc un isomorphisme de $\Delta' = D_{dR}(V_2)$ sur $\Delta = D_{dR}(V)$ et V_2 est donc encore une représentation de de Rham. Posons $i'_1 = i_1 + 1$, $i'_2 = i_2 - 1$ et $i'_j = i_j$ pour $3 \leq j \leq rh$. On avait $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \Lambda_1$ et on a $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2 = \Lambda_2$. Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{Fil}^i \Delta = \oplus_{i_j \geq i} K \delta_j \quad \text{tandis que} \quad \text{Fil}^i \Delta' = \oplus_{i'_j \geq i} K \delta_j$$

Il en résulte que le polygone de Hodge de V_2 est strictement au-dessus de celui de V . L'hypothèse de récurrence implique que V_2 est potentiellement semi-stable. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer V_2 semi-stable.

On peut identifier V et V_2 à des sous- $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels du B_{dR} -espace vectoriel $W = B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Soit $A \in GL_{rh}(B_{dR})$ la matrice dont les colonnes sont les composantes d'une base choisie de V_2 sur $\mathbb{Q}_p$ sur une base choisie de V . Le fait que $t_H(V_2) = t_H(V) = 0$ implique que le déterminant de A est une unité de B_{dR}^+ . Comme $V_2 \subset U(-1) \otimes V$, la matrice A est à coefficients dans $U(-1)$. Comme $U(-1)$ est contenue dans le sous-anneau B_e de B_{dR} , le déterminant de A est un élément non nul de $B_e \cap B_{dR}^+ = \mathbb{Q}_p$ (cf., par exemple, [Fo94a], th.5.3.7). Il est donc inversible dans B_e . Autrement dit l'inclusion de V_2 dans $U(-1) \otimes V$ induit un isomorphisme de $B_e \otimes V_2$ sur $B_e \otimes V$, donc a fortiori de $B_{st} \otimes V_2$ sur $B_{st} \otimes V$. En prenant les invariants sous G_K , on obtient un isomorphisme de $D_{st}(V_2)$ sur $D_{st}(V)$. Comme V_2 est semi-stable, on a $\dim_{K_0} D_{st}(V_2) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_2 = rh = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et V est aussi semi-stable. $\square$

7. Bibliographie

- [An02] , Y. André, *Filtration de type Hasse-Arf et monodromie p-adique*, Inv. Math. **148** (2002), 285–317.
- [Be02] L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*, Inv. Math. **148** (2002), 219–284.
- [CC98] , F. Cherbonnier et P. Colmez, *Représentations p-adiques surconvergentes*, Inv. Math. **133** (1998), 581–611.
- [Co02] P. Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*, J. Inst. Math. Jussieu, **1** (2002), 331–439.
- [Co04] , P. Colmez, *Les conjectures de monodromie p-adique*, Séminaire Bourbaki, Astérisque, à paraître.
- [CF00] P. Colmez et J.-M. Fontaine, *Construction des représentations semi-stables*, Inv. Math. **140** (2000), 1–43.
- [Cr98] R. Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. scient. E.N.S. **31** (1998), 717–763.
- [Fa95] G. Faltings, *Mumford Stabilität in der algebraischen Geometrie*, Proceedings of the I.C.M. Zürich 1994, vol. I, Birkhäuser, Basel (1995), 648–655.
- [Fo90] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux*, in the Grothendieck Festschrift, vol II, Birkhäuser, Boston (1990), 249–309.
- [Fo94a] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, avec un appendice par Pierre Colmez, in Périodes p-adiques, Astérisque **223**, S.M.F., Paris (1994), 59–111.
- [Fo94b] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, in Périodes p-adiques, Astérisque **223**, S.M.F., Paris (1994), 113–184.
- [Fo02] J.-M. Fontaine, *Analyse p-adique et Représentations Galoisienne*, Proc. of the I.C.M. Beijing 2002, vol. II, Higher Education Press, Beijing (2002), 139–148.
- [Fo03] J.-M. Fontaine, *Presque- $\mathbb{C}_p$ -représentations*, Documenta Mathematica, Extra Volume

- Kato (2003), 285–385.
- [FL82] J.-M. Fontaine et Guy Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Sci. E.N.S. **15** (1982), 547–608.
 - [Hy89] O. Hyodo, $H_g^1(K, V) = H_{st}^1(K, V)$, manuscrit non publié (1989).
 - [Ke04] K. Kedlaya, *A p -adic local monodromy theorem*, Annals of mathematics, à paraître.
 - [Me02] Z. Mebkhout, *Analogie p -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p -adique*, Inv. Math. **148** (2002), 319–351.
 - [Ne93] J. Nekovar, *On p -adic height pairings*, in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1990-91*, Progr. in Math. **108**, Birkhäuser, Boston (1993), 127–202.
 - [Se73] S. Sen, *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*, Annals of Math. **97** (1973), 160–170.
 - [Ta67] J. Tate, *p -Divisible Groups*, in *Proceedings of a Conference on Local Fields*, Springer, Berlin (1967), 158–183.
 - [To96] B. Totaro, *Tensor products in p -adic Hodge theory*, Duke Math. J. **83**, (1996), 79–104.
 - [Ts98] N. Tsuzuki, *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F -crystals on a curve*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.