

# THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

**DANIELLE HILHORST**

*Théorie et résolution numérique d'un problème de contrôle optimal en physique des plasmas, 1977*

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



THESE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ PARIS XI - CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

28535 X

DANIELLE GOLDMAN - HILHORST



Sujet de la Thèse : *Théorie et résolution numérique d'un problème de contrôle optimal en physique des plasmas.*

Soutenue le 16 Juin 1977 devant la Commission d'examen

MM. R. TEMAM	Président
C. JOURON	} Examineurs
L.A. PELETIER	
G. STRANG	Rapporteur
C. MERCIER	Membre invité



*Je tiens à remercier tout particulièrement :*

*Monsieur R. Temam qui m'a donné le goût de l'analyse numérique et a assuré avec Monsieur G. Strang du MIT ma formation dans ce domaine, puis, qui a suivi de près mon travail de thèse après m'en avoir fourni les idées directrices ;*

*Monsieur C. Mercier et Monsieur C. Jouron qui ont bien voulu accepter de participer au jury, de même que Monsieur L.A. Peletier qui m'a fait l'honneur de venir spécialement de Hollande pour cette circonstance ;*

*Monsieur D. Edery, pour son aide efficace et quotidienne dans l'élaboration des méthodes numériques et dans leur exploitation ;*

*Monsieur J.P. Boujot qui m'a permis la réalisation matérielle du travail à la C.I.S.I. ;*

*Messieurs J.P. Morera et J. Blum auxquels je dois le bénéfice de fructueuses discussions ;*

*Monsieur A. Lichniewsky, pour ses suggestions qui lors du commencement de l'étude, m'ont été fort utiles ;*

*Monsieur J. Laminie, pour son intérêt amical ;*

*Messieurs P.J. Van der Houwen et P. Hemker, du Mathematisch Centrum à Amsterdam, qui m'ont permis de mener le travail à bonne fin ;*

*Madame Maynard qui, avec Madame Brosselard, a assuré la difficile dactylographie de ce document et dont, durant ces dernières années, j'ai eu maintes fois l'occasion d'apprécier la gentillesse et l'efficacité ;*

*enfin mon mari Henk qui m'a sans cesse encouragée et conseillée.*

TABLE DES MATIERES

-----

		Pages
0.	Notations	1
I.	Introduction - le problème physique et les équations	3
	I.1 - Introduction	3
	I.2 - Le problème physique	3
	I.3 - Mise en équations du problème	4
	I.4 - Orientation de ce travail	9
II.	Unicité de la solution du problème I quand elle existe	10
III.	Existence et unicité de la solution d'un problème auxiliaire	14
	III.1 - Problème d'évolution équivalent	14
	III.2 - Unicité de la solution	17
	III.3 - Existence de la solution	18
	III.4 - Autre système d'évolution	25
IV.	Transformation du problème I en un problème de contrôle optimal	27
	IV.1 - Transformation du problème I	27
	IV.2 - Existence et unicité de $u_\epsilon$ minimum de $J_\epsilon$	28
	IV.3 - Convergence de $u_\epsilon$ vers $u$ quand $\epsilon$ tend vers zéro	30
	IV.4 - Système adjoint - Condition d'optimalité	32
V.	Résolution du problème de contrôle par une méthode de descente	36
	V.1 - Evaluation du gradient de $J_\epsilon$	36
	V.2 - Les méthodes de descente	39
VI.	Discrétisation des équations d'évolution	41
	VI.1 - Discrétisation spatiale par une méthode de différences finies	41
	VI.2 - Discrétisation temporelle par des méthodes implicites ou de Crank-Nicolson	45
	VI.3 - Stabilité des méthodes d'approximation	48
	VI.4 - Ordre de troncature	51



VII.	Deuxième méthode de résolution numérique des systèmes d'évolution à l'aide de développements en séries de Fourier-Bessel	55
VII.1	- Exhibition d'une base hilbertienne de fonctions de Bessel	55
VII.2	- Application de la méthode de Faedo-Galerkin	58
VII.3	- Discrétisation temporelle par la méthode de Crank-Nicolson	61
VIII.	Deuxième approche du problème I	65
VIII.1	- Transformation du problème I en un problème de contrôle optimal	65
VIII.2	- Minimisation de la fonctionnelle $J_\epsilon$	67
VIII.3	- Conclusion	69
IX.	Essais numériques pour différents types de cas tests	70
IX.1	- Etude de deux cas tests où l'on sait calculer la solution analytiquement	70
IX.2	- Cas test Alcator	72
X.	Traitement des données expérimentales pour le TFR	75
X.1	- Détermination des conditions aux bords	75
X.2	- Détermination de la résistivité électrique $\eta$	76
X.3	- Résultats obtenus	77
X.4	- Cas test réaliste	78
X.5	- Conclusion	80
	Bibliographie	B1

0 - NOTATIONS PRINCIPALES

$\{x, y, z\}$  coordonnées cartésiennes, le point  $\{x, y\}$  variant dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , de frontière  $\partial\Omega$ .

$\{r, \theta, z\}$  coordonnées cylindriques telles que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi[ \end{aligned}$$

$t$  variable de temps, en général  $t \in ]0, T[$  et  $T < \infty$

$$Q = \Omega \times ]0, T[ \quad \text{et} \quad \Sigma = \partial\Omega \times ]0, T[$$

On note  $[ \cdot ]$  le terme général d'une matrice.

Dans certaines démonstrations, on écrira, pour les fonctions employées,  $f(t)$  au lieu de  $f(r, t)$ , pour simplifier l'écriture.

### PRINCIPAUX ESPACES FONCTIONNELS UTILISES

Pour simplifier l'écriture, on notera  $\mathcal{E}(0, R_0) = \mathcal{E}(]0, R_0[)$  pour tous les espaces  $\mathcal{E}$  utilisés.

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ ,  $k$  entier positif, espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\bar{\Omega}$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables dans  $\Omega$  et à support compact dans  $\Omega$ .

$\mathcal{D}'(\Omega)$  espace dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  = espace des distributions sur  $\Omega$ .

$L^2(\Omega)$  espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$

$$H = \mathcal{L}^2(0, R_0) = \{u / \sqrt{r} u \in L^2(0, R_0)\}$$

$$H^1(\Omega) = \{u / u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$$

$$V = \mathcal{H}^1(0, R_0) = \{u / \sqrt{r} u \in L^2(0, R_0) \text{ et } \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(0, R_0)\}.$$

On notera  $(\cdot, \cdot)$  (resp  $|\cdot|$ ) le produit scalaire (resp. la norme) dans  $H$

$((\cdot, \cdot))$  (resp  $\|\cdot\|$ ) le produit scalaire (resp. la norme) dans  $V$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dans la dualité  $V, V'$  où  $V'$  est

l'espace dual de  $V$ .

En fait, on a  $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$  où les signes  $\hookrightarrow$  dénotent des injections denses et continues (Lions [11]) et l'on a

$$\langle u, v \rangle = (u, v) \quad \text{si } u \in H, v \in V$$

$L^2(0, T, X)$  (où  $X$  est un espace de Banach), espace des fonctions de carré sommable de  $[0, T]$  dans  $X$  pour la mesure de Lebesgue sur  $[0, T]$ .

$$W(0, T) = \{u / u \in L^2(0, T, V) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2(0, T, V')\}$$

$\mathcal{E}^1(0, T, \mathcal{E}^\infty(\Omega))$  espace des fonctions continues et à dérivées continues de  $[0, T]$  dans  $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ .

I. - INTRODUCTION - LE PROBLEME  
PHYSIQUE ET LES EQUATIONS

I.1 - Introduction

Dans les années à venir, une source d'énergie prépondérante sera certainement l'énergie nucléaire ; en particulier, les recherches sur les réacteurs de fusion permettront, si elles aboutissent, d'obtenir une énergie moins chère qu'à présent, en utilisant comme fuel des isotopes de l'hydrogène, le deutérium et le tritium, disponibles en grande quantité. Le TOKAMAK est en ce moment considéré comme le moyen le plus probable d'obtenir la fusion contrôlée.

I.2 - Le problème physique

I.2.1 - Principe du TOKAMAK

Schématiquement, le TOKAMAK est constitué d'une coque torique contenant un plasma en équilibre, de forme toroïdale, élevé à très haute température. Le plasma, confiné magnétiquement dans une telle configuration joue le rôle de secondaire d'un transformateur dont le primaire est montré explicitement sur la figure (1.1). En agissant sur le primaire du transformateur, on peut induire un courant électrique intensif dans le plasma, circulant le long des lignes méridiennes. Ce courant chauffe le plasma et produit aussi un champ magnétique ; les lignes de champ s'enroulent autour de la surface du plasma (Boujot-Morera - Témam [5]).

I.2.2 - Le problème physique

Le but de cette étude est de déterminer au mieux le champ électrique dans le plasma, en utilisant les valeurs numériques du champ mesurées au bord du tore et celles du courant total dans le plasma.

La connaissance du champ électrique permettra ultérieurement aux physiciens la détermination de la conductivité thermique  $K$  donnée

dans l'équation de l'énergie interne

$$n \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} k \Theta \right) + \mathcal{P} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} (K \operatorname{grad} \Theta) = \frac{\vec{E}^2}{\eta} + s$$

où  $n$  est le nombre total de particules par unité de volume

- $k$  la constante de Boltzmann
- $\Theta$  la température du plasma
- $\mathcal{P}$  la pression dans le plasma
- $\vec{v}$  la vitesse macroscopique
- $\eta$  la résistivité du plasma
- $s$  un terme source

et enfin  $\vec{E}$  le vecteur champ électrique que nous chercherons à évaluer.

### I.3 - Mise en équations du problème

#### I.3.1 - Les hypothèses et approximations physiques

Nous supposons que le tore a un diamètre suffisamment grand pour pouvoir négliger l'effet toroïdal en première approximation. Ceci revient à étudier le problème dans un cylindre de révolution, de longueur infinie [figure (1.2)].

On admettra de plus que toutes les grandeurs physiques considérées champs électrique, magnétique, résistivité du plasma ont une symétrie cylindrique et sont indépendantes de la hauteur  $z$  dans le cylindre ; en particulier le champ électrique  $\vec{E}$  qui est dirigé parallèlement à l'axe du cylindre, peut s'écrire comme une fonction scalaire  $E(r,t)$  de la seule variable spatiale  $r$ , qui est la distance du point considéré à l'axe du cylindre, et du temps  $t$ . De façon similaire, la résistivité électrique est une fonction  $\eta(r,t)$ .

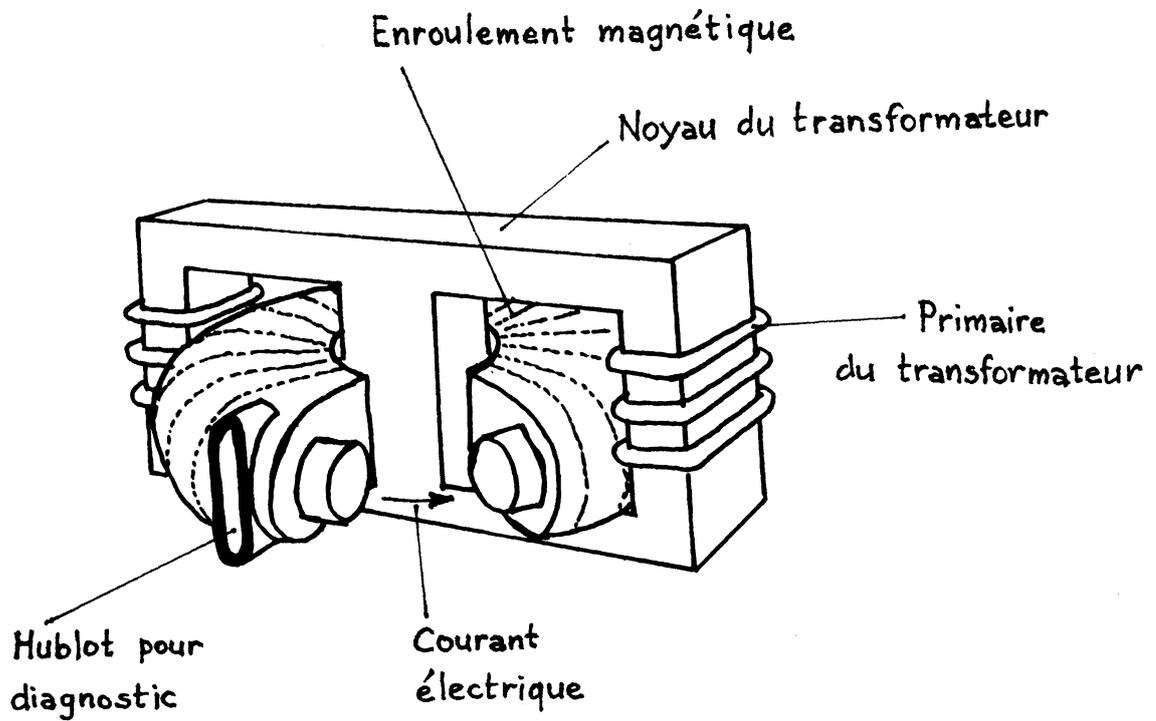


FIGURE 1.1 LE TOKAMAK

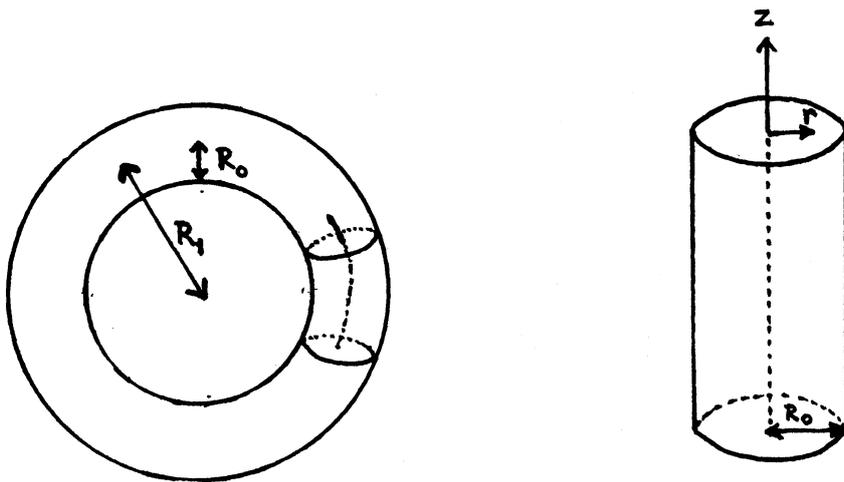


FIGURE 1.2 APPROXIMATION CYLINDRIQUE

Dans la suite, on emploiera les coordonnées cylindriques habituelles  $r, \theta$  et  $z$  aussi les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ ;  $\hat{e}_z$  sera le vecteur unitaire dans la direction  $z$ .

### I.3.2 - Mise en équations du problème

On utilise les équations de Maxwell

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \text{rot} \vec{E}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique,

$c$  la vitesse de la lumière

$\vec{E}$  le champ électrique

$\vec{B}$  le champ magnétique

$\vec{J}$  le courant électrique

Dans la suite, nous négligerons la quantité  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  petite devant  $\mu_0 \vec{J}$  et  $\text{rot} \vec{B}$ .

On écrira  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

et compte tenu de la loi d'Ohm

$$\vec{E} = \eta \vec{J} - \vec{V} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{V} = \frac{\mathcal{D}}{n} \overrightarrow{\text{grad}} n$ ,  $\mathcal{D}$  étant la diffusion particulaire, et où l'on néglige le terme  $\vec{V} \wedge \vec{B}$ .

On obtient l'équation

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}}{\eta} = - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \text{rot} \vec{E}$$

que nous pouvons encore simplifier; on écrit

$$\hat{E} = E(r,t) \hat{e}_z.$$

De l'identité vectorielle élémentaire

$$\text{rot } \vec{E} = E \text{ rot } \hat{e}_z + \vec{\nabla} E \times \hat{e}_z = \vec{\nabla} E \times \hat{e}_z$$

nous déduisons

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} E \text{ div } \hat{e}_z - \hat{e}_z \text{ div } \vec{\nabla} E + (\hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} E - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \hat{e}_z$$

et finalement

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = - \hat{e}_z \Delta E$$

L'équation (1.1) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \Delta E$$

ou encore coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r}$$

C'est l'équation qui gouverne l'évolution du champ électrique dans le temps.

### 1.3.3 - Les conditions aux limites

Maintenant, considérons les conditions aux limites du problème, qu'il faut préciser : de la mesure du courant total dans le plasma, on déduit la dérivée normale du champ au bord ; en effet, on a

$$I(t) = \int_0^{R_0} 2\pi r \, dr \, j(r,t) = 2\pi \int_0^{R_0} r \, dr \, \frac{E}{\eta}$$

En supposant la continuité de la fonction  $\frac{E}{\eta}$ , on a

$$\frac{dI}{dt} = 2\pi \int_0^{R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} r \, dr = 2\pi \int_0^{R_0} \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} r \, dr$$

d'où

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2\pi}{\mu_0} \left[ r \frac{\partial E}{\partial r} \right]_0^{R_0} = \frac{2\pi R_0}{\mu_0} \frac{\partial E}{\partial r} (R_0, t)$$

Donc

$$\frac{\partial E}{\partial r}(R_0, t) = \frac{\mu_0}{2\pi R_0} \frac{dI}{dt} \equiv g_2(t)$$

ce qui nous donne une condition aux limites. D'autre part, on mesure aussi le champ électrique au bord du plasma, ce qui donne une deuxième condition aux limites,

$$E(R_0, t) = g_1(t)$$

#### I.3.4 - Le problème I

Les équations trouvées dans les paragraphes I.3.2 et I.3.3 nous conduisent au problème I : trouver E, fonction de l'espace et du temps, satisfaisant à l'équation

$$(1.2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \Delta E \quad \text{dans } Q$$

et aux conditions aux limites

$$(1.2.2) \quad E |_{\Sigma} = g_1(t)$$

$$(1.2.3) \quad \frac{\partial E}{\partial \vec{v}} |_{\Sigma} = g_2(t)$$

où  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  appartiennent à  $L^2(0, T)$  et où  $\Omega$  est une section droite du cylindre,  $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ) et  $\vec{v}$  la normale à  $\partial\Omega$ , dirigée vers l'extérieur du domaine  $\Omega$ .  $Q$  et  $\Sigma$  sont définis par rapport à  $\bar{\Omega}$  dans le chapitre 0.

Le problème I s'écrit encore, en coordonnées cylindriques, sous la forme suivante :

$$(1.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} \end{array} \right.$$

$$(1.3.2) \quad E(R_0, t) = g_1(t)$$

$$(1.3.3) \quad \frac{\partial E}{\partial r}(0, t) = 0$$

$$(1.3.4) \quad \frac{\partial E}{\partial r}(R_0, t) = g_2(t)$$

pour tout  $t \in ]0, T[$  et  $r \in ]0, R_0[$ ,  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  appartenant à  $L^2(0, T)$ .

#### I.4 - Orientation de ce travail

Le but de ce travail est de trouver une solution au problème I. On sait que la solution d'une équation telle que (1.2.1) est déterminée par une condition initiale  $E(r,0)$  et soit (1.2.2), soit (1.2.3). Par contre, dans le problème I, la condition initiale manque tandis que les données aux limites sont surabondantes (ce sont des "données de Cauchy"). On dit que le système (1.2) est un système mal posé. En général, un tel système n'admet pas de solution  $E$  pour des valeurs au bord  $g_1$  et  $g_2$  données arbitrairement. De plus, si une solution existe, elle ne dépend pas continûment de  $g_1$  et de  $g_2$  et elle cesse même d'exister pour certaines variations arbitrairement petites dans  $g_1$  et  $g_2$  (Lattès-Lions [9]).

Nous montrerons au chapitre II par des méthodes classiques que si, pour des conditions aux limites  $g_1$  et  $g_2$  données, une solution existe, alors elle est unique. Nous appellerons de telles fonctions  $g_1$  et  $g_2$  compatibles. Or, puisque  $g_1$  et  $g_2$  proviennent de mesures expérimentales, elles ne seront jamais tout à fait compatibles.

Dans les chapitres suivants, nous résoudrons le problème I suivant une méthode décrite dans Lions [11]. Il nous faudra renoncer à l'une des conditions aux limites (1.2.2) ou (1.2.3) ; nous choisirons d'éliminer (1.2.2). Il s'agira ensuite d'estimer la condition initiale  $E(r, 0)$  pour que la solution satisfasse le mieux possible (dans une certaine norme) à la condition aux limites (1.2.2) ; cette condition ne pourra être réalisée exactement que dans le cas où  $g_1$  et  $g_2$  sont compatibles.

Nous identifierons finalement au champ électrique physique la solution  $E(r, t)$  vérifiant la condition initiale optimale  $E(r, 0)$  et la condition aux limites (1.2.3).

II. - UNICITE DE LA SOLUTION  
DU PROBLEME I QUAND ELLE EXISTE

Comme nous l'avons vu au chapitre I, le problème I n'admet pas de solution pour des conditions aux limites arbitrairement données. Nous montrerons maintenant que si une solution du problème I existe, elle est unique ; pour la démonstration, on utilisera la forme (1.2) du problème I.

Soient  $E_1$ , et  $E_2$  deux solutions différentes et soit  $E = E_1 - E_2$ ,  $E$  satisfait alors à

$$(2.1.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \Delta E \quad \text{sur } Q \\ (2.1.2) \quad E|_{\Sigma} = 0 \\ (2.1.3) \quad \frac{\partial E}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation (2.1.1) s'écrit encore

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} E = L E$$

où

$$(2.3) \quad L = \frac{\eta}{\mu_0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] - \eta \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\eta}$$

est un opérateur elliptique. On impose de plus à la fonction  $\eta$  d'être strictement positive sur le domaine.

Or, d'après Mizohata [14], toute solution de l'équation  $\frac{\partial E}{\partial t} = L E$  définie au voisinage de l'origine et vérifiant les conditions

$$(2.4) \quad E(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} E(x, y, t) = 0$$

sur l'hyperplan passant par l'origine et perpendiculaire à la direction  $\vec{\nu}$ , s'annule dans un voisinage de l'origine.

Par translation, c'est vrai dans un voisinage de tout point  $M$  au voisinage duquel la condition (2.4) est vérifiée sur l'hyperplan correspondant.

Il nous reste à montrer que l'énoncé de ce théorème est encore vrai si  $E$  et  $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}}$  s'annulent non pas sur une droite mais sur un cercle  $\partial\Omega$  passant par  $M$ ,  $\vec{\mathbf{v}}$  indiquant maintenant le vecteur perpendiculaire à la tangente au cercle au point  $M$ . Or, il est toujours possible de transformer le cercle  $\partial\Omega$  en sa tangente au point  $M$  par une transformation conforme  $(x, y) \rightarrow (\xi, \chi)$  bien choisie. Soit  $w = x + iy$  et  $u = \xi + i\chi$ . La transformation est de la forme suivante

$$w \rightarrow u = \frac{aw + b}{cw + d}$$

Comme  $w \rightarrow u$  est une transformation analytique, on a

$$(2.5) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

soit

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0$$

On montre facilement que les égalités (2.1.2) et (2.1.3) sont conservées par le changement de variable, c'est-à-dire

- (i) Si  $E(x, y, t)$  s'annule sur une courbe  $\Gamma(x, y) = 0$  du plan  $(x, y)$ , alors  $\tilde{E}(\xi, \chi, t) = E(x(\xi, \chi), y(\xi, \chi), t)$  s'annule sur la courbe  $\tilde{\Gamma}(\xi, \chi) = \Gamma(x(\xi, \chi), y(\xi, \chi))$  du plan  $(\xi, \chi)$ .
- (ii) Si  $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}}$  s'annule sur  $\Gamma$ , alors  $\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}}$  s'annule sur  $\tilde{\Gamma}$  où  $\tilde{\mathbf{v}}$  est la direction perpendiculaire à  $\tilde{\Gamma}$  dans le plan  $(\xi, \chi)$ .

Nous considérons maintenant la transformation de l'équation (2.1.1) dans le changement de variable. A l'aide de (2.5) et (2.6), on trouve, après quelques calculs

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \eta^2} \right] \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right]$$

$$\text{Or } (2.8) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\equiv J(\xi, \chi) > 0$$

D'autre part

$$(2.9) \quad \begin{aligned} E(x, y, t) &= \tilde{E}(\xi, \chi, t) \\ \eta(x, y, t) &= \tilde{\eta}(\xi, \chi, t) \end{aligned}$$

A l'aide des résultats précédents, on trouve que l'équation (2.2),

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= L E \quad \text{est transformée en} \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} &= \tilde{L} \tilde{E} \end{aligned}$$

où

$$(2.11) \quad \tilde{L} = \frac{\tilde{\eta}}{\mu_0} J \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] - \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\tilde{\eta}}$$

est encore un opérateur elliptique. A (2.10), on adjoint les conditions de bord

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \tilde{E} \Big|_{\partial \tilde{\Omega} \times ]0, T[} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{\nu}} \Big|_{\partial \tilde{\Omega} \times ]0, T[} &= 0 \end{aligned}$$

où  $\partial \tilde{\Omega}$  est maintenant une droite. (On peut donc appliquer au système (2.10), (2.11), (2.12) le théorème de Mizohata. Donc, quel que soit le point  $\tilde{M}$  de  $\partial \tilde{\Omega}$ , on peut trouver un voisinage de  $\tilde{M}$ ,  $\mathcal{V}_{\tilde{M}}$  dans lequel  $\tilde{E} = 0$ . Par conséquent, pour tout point  $M$  de  $\partial \Omega$ , on peut trouver un voisinage  $\mathcal{V}_M$  de celui-ci dans lequel  $E = 0$ . On a donc une famille infinie  $\mathcal{F}$  de voisinages recouvrant  $\partial \Omega$ ; comme  $\partial \Omega$  est compact, on peut certainement trouver  $\varepsilon_0 > 0$  tel que la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons  $R_0 - \varepsilon_0$  et  $R_0$  soit recouverte par l'union des voisinages de  $\mathcal{F}$ , donc dans laquelle  $E = 0$ .

Nous supposons de plus les fonctions  $\eta$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  indéfiniment différentiables sur  $\bar{\Omega}$ ; alors  $E$  l'est également et s'annule sur tout le disque de rayon  $R_0$ . En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un rayon minimum  $R_{\min}$  tel que  $E$  s'annule sur la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon  $R_{\min}$  et  $R_0$ . Mais alors considérons le cercle de rayon  $R_{\min}$ : par continuité,  $E$  et  $\frac{\partial E}{\partial \nu}$  sont nuls sur celui-ci; on peut réitérer

l'application du théorème de Mizohata et trouver  $R' < R_{\min}$  tel que  $E$  s'annule sur la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon  $R'$  et  $R_0$ .

Enfin,  $E$  est identiquement nul sur  $Q$  et le problème I admet au plus une solution.

III. - EXISTENCE ET UNICITE DE SOLUTION  
D'UN PROBLEME AUXILIAIRE

Nous démontrerons ici l'existence et l'unicité dans l'espace  $W(0, T)$  de la solution  $E$  du système suivant, en nous inspirant de la méthode indiquée dans Lions [11].

$$(3.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r}(R_0, t) = g_2(t) \\ E(r, 0) = v(r) \end{array} \right.$$

avec  $g_2 \in L^2(0, T)$

et  $v \in H = \mathcal{L}^2(0, R_0) = \{u / \sqrt{r} u \in L^2(0, R_0)\}$

Ce système sera utilisé par la suite pour l'étude des problèmes de contrôle et d'identification associés au problème I.

On admet de plus l'hypothèse de régularité suivante sur la fonction  $\eta$

$$\eta \in \mathcal{C}^1(0, T, \mathcal{C}^\infty(0, R_0)), \quad \eta(r, t) \geq \eta_0 > 0 \quad \begin{array}{l} \forall r \in [0, R_0] \\ \forall t \in [0, T] \end{array}$$

III.1 - Problème d'évolution équivalent

a) On effectue le changement de fonction

$$e(r, t) = E(r, t) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(t)$$

dans le système (3.1); on obtient le système (3.2) pour lequel les conditions de bord de Neumann sont homogènes

$$\begin{aligned}
 (3.2.1) \quad & \left[ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} &= \frac{2}{\mu_0 R_0} g_2 - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta} \end{aligned} \right. \\
 (3.2.2) \quad & \left. \frac{\partial e}{\partial r} (0, t) = 0 \right. \\
 (3.2.3) \quad & \left. \frac{\partial e}{\partial r} (R_0, t) = 0 \right. \\
 (3.2.4) \quad & \left. e(r, 0) = v(r) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(0) \right.
 \end{aligned}$$

Il est maintenant équivalent de démontrer l'existence et l'unicité de la solution des systèmes (3.1) et (3.2).

b ) Définition d'une famille de formes bilinéaires sur V

soit la forme bilinéaire

$$a(e_1, e_2) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{R_0} \frac{\partial e_1}{\partial r} \frac{\partial e_2}{\partial r} r \, dr$$

définir sur  $V = \mathcal{H}^1(0, R_0)$  ; elle a les propriétés suivantes

i ) elle est continue ; pour le voir, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_0^{R_0} \frac{\partial e_1}{\partial r} \frac{\partial e_2}{\partial r} r \, dr \right| \leq \left[ \int_0^{R_0} \left( \frac{\partial e_1}{\partial r} \right)^2 r \, dr \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{R_0} \left( \frac{\partial e_2}{\partial r} \right)^2 r \, dr \right]^{\frac{1}{2}}$$

et l'on déduit

$$|a(e_1, e_2)| \leq \frac{1}{\mu_0} \|e_1\| \|e_2\|$$

ii ) elle est coercive ; on a l'égalité

$$a(e_1, e_1) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{R_0} \left( \frac{\partial e_1}{\partial r} \right)^2 r \, dr \quad \forall e_1 \in V$$

et donc

$$a(e_1, e_1) + \frac{1}{\mu_0} |e_1|^2 = \frac{1}{\mu_0} \|e_1\|^2$$

ce qui correspond à la définition générale de la coercivité, il existe  $\lambda, \alpha > 0$  tel que, pour tout  $e_1 \in V$

$$(3.3) \quad a(e_1, e_1) + \lambda |e_1|^2 \geq \alpha \|e_1\|^2$$

Or d'après Lions [11], comme  $T$  est fini, on peut se ramener au cas où (3.3) a lieu avec  $\lambda = \lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est un réel négatif donné. En effet, si l'on pose

$$(3.4) \quad e = \exp(kt) e_3$$

le système (3.2) équivaut à

$$(3.5) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_3}{\eta} + k \frac{e_3}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e_3}{\partial r} = \frac{2}{\mu_0 R_0} g_2 - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta} \\ -\frac{\partial e_3}{\partial r}(0, t) = 0 \\ -\frac{\partial e_3}{\partial r}(R_0, t) = 0 \\ e_3(r, 0) = v(r) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(0) \end{array} \right.$$

L'opérateur  $-\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$  est remplacé par  $-\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{k}{\eta}$  et la forme bilinéaire  $a(e_1, e_2)$  par  $a(e_1, e_2) + k \int \frac{e_1 e_2}{\eta}$ . Si l'on choisit

$$(3.6) \quad k > \left(\frac{1}{\mu_0} - \lambda_0\right) \sup_{\substack{r \in [0, R_0] \\ t \in [0, T]}} (\eta(r, t))$$

on obtient (3.3) avec  $\lambda = \lambda_0$ .

On supposera, dans la suite, qu'on a effectué ce changement de fonction.

### III.2 - Unicité de la solution

Soit  $e$  solution du système

$$(3.7.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} = 0 \end{array} \right.$$

$$(3.7.2) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial r} (0, t) = 0 \end{array} \right\}$$

$$(3.7.3) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial r} (R_0, t) = 0 \end{array} \right\}$$

$$(3.7.4) \quad \left. \begin{array}{l} e(r, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

On va montrer que si  $e$  est solution du système (3.7),  $e$  est identiquement nulle, ce qui impliquera l'unicité de la solution du système (3.2). On obtient, en multipliant (3.7.1) par  $e$  et en intégrant, tenant compte des conditions au bord

$$(3.8) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta}, e \right) + a(e, e) = 0$$

or on a les égalités suivantes [21]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\eta}, e \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\sqrt{\eta}}, \frac{e}{\sqrt{\eta}} \right) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\sqrt{\eta}}, \frac{e}{\sqrt{\eta}} \right) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{\eta} e}{\eta}, \frac{e}{\sqrt{\eta}} \right)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\eta}, e \right) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta}, e \right) + \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} e, e \right)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\eta}, e \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\eta}, e \right) - \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} e, e \right)$$

égalité qu'on substitue dans (3.8) où l'on utilise également la coercivité de la forme bilinéaire  $a$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{\eta}, e \right) - \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} e, e \right) + \frac{1}{\mu_0} \|e\|^2 - \lambda |e|^2 \leq 0$$

On a donc, en intégrant en temps et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2} \int_0^{R_0} \frac{e^2(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr - \left( \sup \left| \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| + \lambda \right) \int_0^T |e|^2 \, dt + \frac{1}{\mu_0} \int_0^T \|e\|^2 \, dt \leq 0$$

$$r \in [0, R_0], t \in [0, T]$$

On choisit alors  $k$  tel que  $\lambda = - \sup_{r \in [0, R_0], t \in [0, T]} \left| \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|$  ; il vient

$$\frac{1}{2} \int_0^{R_0} \frac{e^2(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr + \frac{1}{\mu_0} \int_0^T \|e\|^2 \, dt \leq 0$$

ce qui implique  $e = 0$ .

### III.3 - Existence de la solution (Lions [11])

#### a) Application de la méthode de Faedo-Galerkin

L'espace  $V = \mathcal{H}^1(0, R_0)$  est séparable : il existe un ensemble dénombrable dense dans  $V$ . On peut alors trouver (nous en exhiberons une au chapitre VII) une "base"  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$  de  $V$  au sens suivant

$\forall m$   $w_0, w_1, \dots, w_m$  sont linéairement indépendants et les combinaisons

$\sum_{j=0}^m \xi_j w_j, \xi_j \in \mathbb{R}$  sont denses dans  $V$ .  
finie

On définit alors une solution approchée de (3.2) par

$$e_m(r, t) = \sum_{k=0}^m e_{km}(t) w_k(r)$$

les  $e_{km}$  étant choisis de façon que

$$(3.9.1) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m}{\eta}, w_j \right) + a(t, e_m, w_j) = \langle -f_1(t), w_j \rangle \quad 0 \leq j \leq m$$

$$(3.9.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ e_m(0) = \sum_{k=0}^m e_{km}(0) w_k(r) \rightarrow e(0) \text{ dans } \mathcal{L}^2(0, R_0) \text{ quand} \\ m \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\text{où } f_1(r, t) = \frac{2}{\mu_0 R_0} g_2(t) - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2(t)}{\eta(r, t)}$$

Le système (3.9) est un système de  $m$  équations différentielles linéaires

en les  $e_{km}(t)$  de la forme

$$(3.10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} A_m(t) \vec{e}_m(t) + \Lambda_m \vec{e}_m(t) = \vec{f}_{lm} \\ \vec{e}_m(0) = (e_{0m}(0), e_{1m}(0), \dots, e_{mm}(0)) \end{cases}$$

$$\text{où} \quad A_m(t) = \left[ \left( \frac{w_i}{\sqrt{\eta}}, \frac{w_j}{\sqrt{\eta}} \right) \right]$$

$$\Lambda_m = [a(t, w_i, w_j)]$$

$$\vec{e}_m(t) = (e_{0m}(t), e_{1m}(t), \dots, e_{mm}(t))$$

$$\text{et } \vec{f}_{lm}(t) = ((f_{lm}(t), w_0), (f_{lm}(t), w_1), \dots, (f_{lm}(t), w_m))$$

Pour prouver que le système (3.10) admet une solution unique, nous allons montrer que la matrice  $A_m(t)$  est inversible.

b) Régularité de la matrice  $A_m(t)$ , à tout instant  $t$

Considérons les fonctions  $\left( \frac{w_i}{\sqrt{\eta}}, i = 0, \dots, m \right)$  ; elles sont indépendantes ; en effet, si l'on a

$$\alpha_0 \frac{w_0}{\sqrt{\eta}} + \dots + \alpha_i \frac{w_i}{\sqrt{\eta}} + \dots + \alpha_m \frac{w_m}{\sqrt{\eta}} = 0$$

où les  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) sont des nombres réels,

cela implique en particulier

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_m = 0$$

puisque le système  $\{w_0, \dots, w_i, \dots, w_m\}$  est libre.

Finalement, les fonctions  $\frac{w_i}{\sqrt{\eta}}$ ,  $i = 0, \dots, m$  étant indépendantes, la

matrice  $A_m(t) = \left[ \left( \frac{w_i}{\sqrt{\eta}}, \frac{w_j}{\sqrt{\eta}} \right) \right]$  est régulière. On voit aisément que la matrice  $A_m(t)$  est de plus définie positive.

c ) Convergence forte de  $e_m(r,t)$  vers  $e(r,t)$  quand  $m$  tend vers l'infini

Nous allons montrer que, quand  $m$  tend vers l'infini, la fonction

$$e_m(r,t) = \sum_{k=0}^m e_{km}(t) w_k(r) \text{ tend vers la solution du système (3.2).}$$

Pour cela, nous nous inspirons de Lions [11] et procédons suivant les étapes classiques de ce genre de démonstration.

i ) La fonction en demeure dans un borné de  $L^2(0, T, V)$

Multiplions (3.9.1) par  $e_{km}(t)$  et sommons sur  $k$  ; il vient

$$(3.11) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m(t)}{\eta(t)}, e_m(t) \right) + a(e_m(t), e_m(t)) = \langle f_1(t), e_m(t) \rangle$$

On utilise ici la formule de Cauchy-Schwarz pour le second membre et on intègre en  $t$

$$\int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m(t)}{\eta(t)}, e_m(t) \right) dt + \int_0^T a(e_m(t), e_m(t)) dt \leq \int_0^T \|f_1(t)\|_{V'} \|e_m(t)\| dt$$

On obtient, en utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2}{\alpha} + \alpha b^2 \quad \forall \alpha, a, b > 0$

$$(3.12) \quad \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m(t)}{\eta(t)}, e_m(t) \right) dt + \int_0^T a(e_m(t), e_m(t)) dt \\ \leq \int_0^T \frac{2}{\alpha} \|f_1(t)\|_{V'}^2 dt + \int_0^T \frac{\alpha}{2} \|e_m(t)\|_{V'}^2 dt$$

Comme pour la démonstration de l'unicité, on substitue dans (3.12) l'égalité suivante

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m}{\eta}, e_m \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_m}{\eta}, e_m \right) - \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} e_m, e_m \right)$$

On utilise de plus la coercivité de  $a$  pour obtenir

$$\frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r,T)}{\eta(r,T)} r dr + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|e_m(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \frac{2}{\alpha} \|f_1(t)\|_{V'}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r,0)}{\eta(r,0)} r dr$$



Or, grâce à (3.9.2), on a

$$|e_m(o)| \leq c |e(o)|$$

D'où l'on déduit une majoration pour la norme de  $e_m$

$$(3.13) \quad \int_0^T \|e_m(t)\|^2 dt \leq c_1 \int_0^T \|f_1(t)\|_V^2 dt + c_2 |e(o)|^2$$

La fonction  $e_m(r,t)$  demeure donc dans un borné de  $L^2(0, T, V)$ .

ii) Convergence faible de  $e_m$  vers  $e$  quand  $m$  tend vers l'infini

De i) on déduit que l'on peut extraire une sous-suite  $e_m^*$  de  $e_m$  telle que

$$(3.14) \quad e_m^* \rightharpoonup z \text{ dans } L^2(0, T, V) \text{ faible}$$

On va montrer maintenant qu'en fait la fonction  $z(r,t)$  n'est autre que  $e(r,t)$ .

Soit  $j$  fixé quelconque et  $m^* \geq j$ . Alors (3.9) est valable avec  $m = m^*$ ; multiplions (3.9.1) par  $\varphi^*(t)$  où

$$(3.15) \quad \varphi^*(t) \in \mathcal{E}'(0, T) \text{ et } \varphi^*(T) = 0$$

et intégrons sur  $[0, T]$ ; il vient, si  $\varphi_j^*(t) = \varphi^*(t) w_j$

$$(3.16) \quad \int_0^T \left[ - \left( \frac{e_m^*(t)}{\eta(t)}, \varphi_j^{*'}(t) \right) + a(t, e_m^*(t), \varphi_j^*(t)) \right] dt \\ = \int_0^T \langle f_1(t), \varphi_j^*(t) \rangle dt + \left( \frac{e_m^*(o)}{\eta(o)}, \varphi_j^*(o) \right)$$

Grâce à (3.14), on peut passer à la limite dans (3.16)

$$(3.17) \quad \int_0^T \left[ - \left( \frac{z}{\eta}, \varphi_j^{*'} \right) + a(t, z, \varphi_j^*) \right] dt \\ = \int_0^T \langle f_1, \varphi_j^* \rangle dt + \left( \frac{e(o)}{\eta(o)}, \varphi_j^*(o) \right)$$

Mais cela vaut pour  $\varphi^*$  quelconque satisfaisant à (3.15). On peut donc choisir  $\varphi^* \in \mathcal{D}(0, T)$  et alors (3.17) donne

$$(3.18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z(t)}{\eta(t)}, w_j \right) + a(t, z(t), w_j) = \langle f_1(t), w_j \rangle$$

où la dérivée est prise dans  $\mathcal{D}'(0, T)$

Mais dans (3.17),  $j$  est quelconque et comme les combinaisons linéaires finies des  $w_j$  sont denses dans  $V$ , on en déduit

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{z}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial z}{\partial r} = f_1$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \eta \left[ f_1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial z}{\partial r} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\eta} \right) z \right] \in L^2(0, T, V')$$

et  $z \in W(0, T)$ .

On peut intégrer (3.17) par parties en  $t$ , ce qui donne, tenant compte de (3.19)

$$\left( \frac{z(o)}{\eta(o)}, w_j \right) \varphi^*(o) = \left( \frac{e(o)}{\eta(o)}, w_j \right) \varphi^*(o) \quad \forall j, \forall \varphi$$

et donc

$$\left( \frac{z(o)}{\eta(o)}, w_j \right) = \left( \frac{e(o)}{\eta(o)}, w_j \right) \quad \forall j$$

d'où finalement

$$z(o) = e(o).$$

Donc  $z$  est solution et, d'après III.2,  $z = e$  est l'unique solution. On peut donc remplacer (3.14) par

$$(3.20) \quad e_m \longrightarrow e \text{ dans } L^2(0, T, V) \text{ faible}$$

iii) Convergence forte de  $e_m$  vers  $e$  dans  $L^2(0, T, V)$

Pour la démontrer, on utilise l'égalité

$$\begin{aligned} a(e_m - e, e_m - e) &= a(e_m, e_m - e) - a(e, e_m - e) \\ &= a(e_m, e_m) - a(e_m, e) - a(e, e_m - e) \end{aligned}$$

Il vient alors, compte-tenu de (3.11)

$$\begin{aligned} \int_0^T a(e_m - e, e_m - e) dt &= \int_0^T \langle f_1, e_m \rangle dt - \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{e_m}{\eta}, e_m \right) dt \\ &\quad - \int_0^T a(e_m, e) dt - \int_0^T a(e, e_m - e) dt \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad & \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr + \int_0^T a(e_m - e, e_m - e) dt \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r, 0)}{\eta(r, 0)} r \, dr + \int_0^T \langle f_1, e_m \rangle dt + \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} e_m, e_m \right) dt \\
 & \quad - \int_0^T a(t, e_m, e) dt - \int_0^T a(t, e, e_m - e) dt
 \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(e_m(r, T) - e(r, T))^2}{\eta(r, T)} r \, dr \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e^2(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr + \int_0^{Ro} \frac{e_m(r, T) e(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr
 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e_m^2 \right) dt &= \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, (e_m - e)^2 \right) dt \\
 &\quad - \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e^2 \right) dt + 2 \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e_m e \right) dt
 \end{aligned}$$

(3.21) devient alors

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{(e_m(r, T) - e(r, T))^2}{\eta(r, T)} r \, dr - \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, (e_m - e)^2 \right) dt + \int_0^T a(e_m - e, e_m - e) dt \\
 & = - \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e(r, T)(e_m(r, T) - e(r, T))}{\eta(r, T)} r \, dr - \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m(r, T)e(r, T)}{\eta(r, T)} r \, dr \\
 & \quad + \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e(e_m - e) \right) dt + \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e_m e \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^{Ro} \frac{e_m^2(r, 0)}{\eta(r, 0)} r \, dr \\
 & \quad + \int_0^T \langle f_1, e_m \rangle dt - \int_0^T a(e_m, e) dt - \int_0^T a(e, e_m - e) dt
 \end{aligned}$$

mais, quand  $m$  tend vers l'infini, on a

$$\int_0^{R_0} \frac{e(r,T) (e_m(r,T) - e(r,T))}{\eta(r,T)} r dr \rightarrow 0$$

$$\int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e(e_m - e) \right) dt \rightarrow 0$$

$$\int_0^T a(t, e, e_m - e) dt \rightarrow 0$$

Le second membre de l'égalité (3.21) tend vers

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^{R_0} \frac{e^2(r,T)}{\eta(r,T)} r dr + \frac{1}{2} \int_0^{R_0} \frac{e^2(r,0)}{\eta(r,0)} r dr + \int_0^T \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}, e^2 \right) dt \\ & + \int_0^T \langle f_1, e \rangle dt - \int_0^T a(e, e) dt = 0 \end{aligned}$$

Nous utilisons finalement la coercivité de la forme bilinéaire  $a$  pour déduire la convergence forte de  $e_m$  vers  $e$  dans  $L^2(0, T, V)$ .

$$\|e_m(r,t) - e(r,t)\|_{L^2(0, T, V)} \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

On a établi jusqu'ici que le système (3.2) admet une solution unique  $e(r,t)$  ; on va montrer de plus que

iv) La solution  $e(r,t)$  dépend continument des données

Ce qu'on énonce de la façon suivante

lemme (3.3) - l'application bilinéaire

$$\{f_1, e(0)\} \rightarrow e$$

est continue de  $L^2(0, T, V') \times H$  dans  $W(0, T)$ .

En effet, on obtient, en passant à la limite dans (3.13)

$$(3.22) \quad \int_0^T \|e(t)\|^2 dt \leq c_1 \int_0^T \|f_1(t)\|_{V'}^2 dt + c_2 |e(0)|^2$$

D'autre part, l'équation (3.2.1) peut s'écrire

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\eta} e + \eta f_1$$

et l'on a

$$(3.23) \quad \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} \right\|_{V'} \leq c \|e\|_V$$

En effet

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} \right\|_{V'} = \sup_{e_4 \in V} \frac{\left| \int_0^{R_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} e_4 r dr \right|}{\|e_4\|} = \sup_{e_4 \in V} \frac{\left| \int_0^{R_0} \frac{\partial e}{\partial r} \frac{\partial e_4}{\partial r} r dr \right|}{\|e_4\|}$$

ce qui implique (3.23).

On obtient donc

$$\left\| \frac{\partial e}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,V')} \leq c_3 \|e\|_{L^2(0,T,V)} + c_4 \|f_1\|_{L^2(0,T,V')}$$

ce qui donne, compte tenu de (3.22)

$$\left\| \frac{\partial e}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,V')} \leq c_5 |e(0)| + c_6 \|f_1\|_{L^2(0,T,V')}$$

Le lemme (3.3) est ainsi établi.

#### III.4 - Autre système d'évolution

On considérera, par la suite, des systèmes liés au système adjoint du système (3.1) du type

$$\left[ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\eta}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}(R_0,t) = \phi(t) \quad \text{où } \phi \in L^2(0,T) \\ p(r,T) = 0 \end{array} \right.$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution de ce type de systèmes est similaire à celle que nous avons donnée précédemment.

Remarques.remarque 3.1

Strictement, en faisant le changement de fonction  $e(r,t) = E(r,t) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(t)$ , on doit imposer la condition  $g_2 \in H^1(0,T)$ ; en fait, la démonstration d'existence et d'unicité s'applique encore au système (3.1), avec dans la formulation variationnelle la même forme bilinéaire mais un second membre différent. La forme (3.2) sera celle utilisée pour la deuxième méthode de résolution du problème I.

remarque 3.2

Si le changement de fonction (3.4) a été effectué, on a démontré en fait la convergence forte de  $e_{3m}$  vers  $e_3$  quand  $m$  tend vers l'infini, dans  $L^2(0,T,V)$ .

$e_3$  a été défini tel que

$$e(r,t) = \exp(kt) e_3(r,t)$$

mais, si on avait employé la méthode de Faedo-Galerkin sans faire le changement de fonction, la solution  $e_m$  du système correspondant à (3.9) serait encore telle que

$$e_m(r,t) = \exp(kt) e_{3m}(r,t)$$

et l'on aurait

$$\begin{aligned} \int_0^T \|e_m(r,t) - e(r,t)\|^2 dt &= \int_0^T \exp(2kt) \|e_{3m}(r,t) - e_3(r,t)\|^2 dt \\ &\leq \exp(2kT) \int_0^T \|e_{3m}(r,t) - e_3(r,t)\|^2 dt \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc, on a en fait démontré également la convergence forte de  $e_m$  vers  $e$  dans  $L^2(0,T,V)$  [ce qui nous sera utile au chapitre VII].

IV. - TRANSFORMATION DU PROBLEME I EN  
UN PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL

 IV.1 - Transformation du problème I

Nous retournons maintenant au problème original (1.3). Comme on l'a vu au paragraphe I.4, la solution d'un tel système est déterminée par une condition initiale  $E(r, 0)$  et soit  $g_1(t)$ , soit  $g_2(t)$ . Nous prendrons comme contrôle la fonction  $E(r, 0) \equiv v(r)$  et allons essayer de l'ajuster de telle façon que pour  $g_2(t)$  donnée nous trouvions la meilleure estimation de  $g_1(t)$  possible. S'inspirant de la méthode indiquée dans Lions [11], p. 231, on pose alors le problème de contrôle optimal suivant. Soit  $E(v, r, t)$  la solution du système

$$(4.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r}(R_0, t) = g_2(t) \\ E(r, 0) = v(r) \end{array} \right.$$

et soit

$$J(v) = \int_0^T (E(v, R_0, t) - g_1(t))^2 dt$$

Il s'agit alors de déterminer la fonction  $u(r)$  tel que

$$u \in \mathcal{U} \equiv \mathcal{L}^2(0, R_0)$$

et

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v)$$

Si le problème (1.3) admet une solution, on a

$$E(R_0, t) = g_1(t)$$

et donc  $J(u) = 0$

Mais, ici, la fonctionnelle  $J$  n'est pas coercive ; pour assurer sa coercivité, nous allons donc la modifier en posant

$$(4.2) \quad J_{\varepsilon}(v) = \int_0^T (E(v, R_0, t) - g_1(t))^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} v^2(r)r dr$$

Nous appellerons  $u_{\varepsilon}$  le minimum de la fonctionnelle  $J_{\varepsilon}$

$$(4.3) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J_{\varepsilon}(v)$$

#### IV.2 - Existence et unicité de $u_{\varepsilon}$ , minimum de $J_{\varepsilon}$

On a les propriétés suivantes

i) la fonctionnelle  $J_{\varepsilon}$  est coercive puisqu'on a trivialement l'inégalité

$$J_{\varepsilon}(v) \geq \varepsilon \int_0^{R_0} v^2(r)r dr = \varepsilon |v|^2$$

ii) d'après le lemme (3.3)  $E$  est une fonction continue de  $v$  ; on en déduit la continuité de  $J_{\varepsilon}$ .

iii) enfin, la fonctionnelle  $J_{\varepsilon}$  est strictement convexe ; en effet,  $E$  étant fonction affine de sa valeur initiale  $v$ , on peut poser

$$(4.4) \quad E(R_0, t) = \Lambda v + E^{\circ}(R_0, t)$$

L'opérateur linéaire  $\Lambda$  est écrit plus explicitement au paragraphe V.1. Si l'on pose de plus  $\zeta(t) = E^{\circ}(R_0, t) - g_1(t)$ , on obtient, pour  $J_{\varepsilon}$  l'expression suivante

$$J_{\varepsilon}(v) = \int_0^T (\Lambda v + \zeta)^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} v^2(r)r dr$$

Nous devons prouver que, pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , pour tous  $v_1 \neq v_2 \in H$

$$\mathcal{E} = J(\theta v_1 + (1-\theta) v_2) - \theta J(v_1) + (1-\theta) J(v_2) < 0$$

On a encore

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \int_0^T (\theta \Lambda v_1 + (1-\theta)\Lambda v_2 + \zeta)^2 dt + \varepsilon \int_0^{Ro} (\theta v_1 + (1-\theta)v_2)^2 r dr \\ &\quad - \theta \int_0^T (\Lambda v_1 + \zeta)^2 dt - (1-\theta) \int_0^T (\Lambda v_2 + \zeta)^2 dt \\ &\quad - \theta \varepsilon \int_0^{Ro} v_1^2 r dr - (1-\theta) \varepsilon \int_0^{Ro} v_2^2 r dr \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= (\theta^2 - \theta) \left[ \int_0^T (\Lambda v_1 + \zeta)^2 dt + \varepsilon \int_0^{Ro} v_1^2 r dr \right] \\ &\quad + \left[ (1-\theta)^2 - (1-\theta) \right] \left[ \int_0^T (\Lambda v_2 + \zeta)^2 dt + \varepsilon \int_0^{Ro} v_2^2 r dr \right] \\ &\quad + 2 \theta(1-\theta) \left[ \int_0^T (\Lambda v_1 + \zeta)(\Lambda v_2 + \zeta) dt + \varepsilon \int_0^{Ro} v_1 v_2 r dr \right] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \theta(\theta-1) \left[ \int_0^T dt (\Lambda v_1 + \zeta)^2 + (\Lambda v_2 + \zeta)^2 - 2(\Lambda v_1 + \zeta)(\Lambda v_2 + \zeta) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_0^{Ro} r dr (v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2) \right] \end{aligned}$$

soit finalement

$$\mathfrak{E} = \theta(\theta-1) \left[ \int_0^T dt [\Lambda(v_1 - v_2)]^2 + \varepsilon \int_0^{Ro} r dr (v_1 - v_2)^2 \right]$$

Donc, pour  $\theta \in ]0,1[$  et  $v_1 \neq v_2$ , l'expression  $\mathfrak{E}$  est strictement négative.

D'après Céa [6], la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  coercive, continue, strictement convexe sur le Hilbert  $H$  admet un minimum unique  $u_\varepsilon$ .

IV.3 - Convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u$  (si  $u$  existe) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro

1°) On utilisera ici la définition suivante

Définition 4.1 : deux espaces de Banach  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{H}$  étant donnés, un opérateur  $A$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{H}$  est dit Gateaux-différentiable si, pour tout  $\bar{w} \in \mathcal{V}$ ,  $\varphi \in \mathcal{V}$

$$\lim_{\theta \searrow 0} \frac{A(\bar{w} + \theta\varphi) - A(\bar{w})}{\theta} \text{ existe.}$$

Or les fonctionnelles  $J$  et  $J_\varepsilon$  sont Gateaux-différentiables sur l'espace de Hilbert  $H$  ; elles vérifient donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (J'(u), (v - u)) &= 0 && \text{si } u \text{ existe, } \forall v \in H \\ (J'_\varepsilon(u_\varepsilon), (v - u_\varepsilon)) &= 0 && \forall v \in H \end{aligned}$$

qui s'écrivent encore

$$(4.5) \quad \int_0^T (\Delta u + \zeta) \Delta (v - u) dt = 0 \quad \forall v \in H$$

$$(4.6) \quad \int_0^T (\Delta u_\varepsilon + \zeta) \Delta (v - u_\varepsilon) dt + \varepsilon \int_0^{Ro} u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) r dr = 0$$

Après avoir posé  $v = u_\varepsilon$  dans (4.5) et  $v = u$  dans (4.6), on additionne ces deux égalités

$$- \int_0^T [\Delta(u_\varepsilon - u)]^2 dt + \varepsilon \int_0^{Ro} u_\varepsilon (u - u_\varepsilon) r dr = 0$$

D'où l'on déduit

$$(4.7) \quad \int_0^{Ro} u_\varepsilon (u - u_\varepsilon) r dr \geq 0$$

Soit, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|u_\varepsilon|^2 \leq |u_\varepsilon| |u|$$

et donc

$$|u_\varepsilon| \leq c$$

2°) On peut alors extraire de  $u_\varepsilon$  une sous-suite encore notée  $u_\varepsilon$  telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ dans } H \text{ faible}$$

Les applications convexes  $J_1 : v \rightarrow \int_0^T (\Lambda v)^2 dt$  et  $J_2 : v \rightarrow \int_0^{Ro} v^2 r dr$

de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  sont telles que leurs Gateaux-différentielles

$$(v, \varphi) \rightarrow \int_0^T 2(\Lambda v)(\Lambda \varphi) dt \quad \text{et} \quad (v, \varphi) \rightarrow \int_0^{Ro} 2v \varphi r dr \text{ sont linéaires et}$$

continues en  $\varphi$  ; on en déduit que  $J_1$  et  $J_2$  sont faiblement semi-continues inférieurement (Céa [6]).

On fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans (4.6) et l'on obtient

$$(4.8) \quad \int_0^T (\Lambda w + \zeta) \Lambda(v - w) dt \geq 0 \quad \forall v \in H$$

On choisit  $v = u$  dans (4.8) et  $v = w$  dans (4.5) ; il vient

$$(4.9) \quad \int_0^T (\Lambda w + \zeta) \Lambda(w - u) dt \geq 0$$

$$(4.10) \quad \int_0^T (\Lambda u + \zeta) \Lambda(w - u) dt = 0$$

d'où, par addition

$$\int_0^T \Lambda(w - u) \Lambda(u - w) dt \geq 0$$

Soit

$$\int_0^T [\Lambda(w - u)]^2 dt \leq 0$$

Ce qui implique  $\Lambda w = \Lambda u$  dans  $L^2(0, T)$

Maintenant, on peut considérer le système suivant

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^*}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E^*}{\partial r} \\ \frac{\partial E^*}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial E^*}{\partial r}(Ro, t) = 0 \\ E^*(r, 0) = w(r) - u(r) \end{array} \right.$$

La solution  $E^*(R_0, t)$  s'écrit de nouveau sous la forme (4.4) où maintenant  $E^0$  est zéro. Donc

$$E^*(R_0, t) = \Lambda(w - u) = 0$$

Or, d'après Mizohata, cela implique  $E^*(r, t) = 0$  dans  $W(0, T)$  et en particulier  $w = u$  dans  $H$ .

3°) Il reste à montrer que  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$  dans  $H$  fort, donc que

$$\int_0^{R_0} (u_\varepsilon - u)^2 r \, dr \rightarrow 0$$

or d'après (4.7)

$$\int_0^{R_0} (u_\varepsilon - u)^2 r \, dr \leq \int_0^{R_0} u(u - u_\varepsilon) r \, dr \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

#### VI.4 - Système adjoint - Condition d'optimalité

Nous montrerons maintenant que la résolution du problème de contrôle optimal (4.1), (4.2), (4.3) est équivalente à celle d'un système d'équations bien posé. Dans ce but, on associe au système (4.1) le système adjoint suivant

$$\begin{array}{l} (4.11.1) \\ (4.11.2) \\ (4.11.3) \\ (4.11.4) \end{array} \left[ \begin{array}{l} -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}(R_0, t) = \mu_0 \frac{E(u_\varepsilon, R_0, t) - g_1(t)}{R_0} \\ p(r, T) = 0 \end{array} \right.$$

On exprime de plus la condition d'optimalité

$$J'_\varepsilon(u_\varepsilon)(v - u_\varepsilon) = 0 \quad u_\varepsilon \in \mathcal{U} \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

ce qui s'écrit encore à l'aide de (4.11)

$$(4.12) \quad \int_0^T (E(u_\varepsilon, R_0, t) - g_1(t))(E(v, R_0, t) - E(u_\varepsilon, R_0, t)) dt \\ + \int_0^{R_0} u_\varepsilon(r) (v - u_\varepsilon)(r) r dr = 0.$$

On multiplie par  $(E(v, r, t) - E(u_\varepsilon, r, t))$  et on intègre l'équation (4.11.1)

$$\int_0^{R_0} r dr \int_0^T dt \left( -\frac{\mu_0}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) (E(v, r, t) - E(u_\varepsilon, r, t)) = 0$$

et on obtient, après intégration par parties

$$\int_0^{R_0} r dr \int_0^T dt p \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) (E(v, r, t) - E(u_\varepsilon, r, t)) \\ + \int_0^{R_0} r dr \frac{p(r, 0)}{\eta(r, 0)} (E(v, r, 0) - E(u_\varepsilon, r, 0)) \\ - \int_0^{R_0} r dr \frac{p(r, T)}{\eta(r, T)} (E(v, r, T) - E(u_\varepsilon, r, T)) \\ - \int_0^T dt \left[ \frac{1}{\mu_0} r \frac{\partial p}{\partial r} (E(v, r, t) - E(u_\varepsilon, r, t)) \right]_0^{R_0} \\ + \int_0^T dt \left[ \frac{1}{\mu_0} p r \frac{\partial}{\partial r} (E(v, r, t) - E(u_\varepsilon, r, t)) \right]_0^{R_0} = 0$$

En tenant compte des systèmes (4.1) et (4.11), il vient :

$$0 = \int_0^{R_0} r dr \frac{p(r, 0)}{\eta(r, 0)} (v - u_\varepsilon)(r) \\ - \int_0^T dt \frac{R_0}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial r} (R_0) (E(v, R_0, t) - E(u_\varepsilon, R_0, t)) \\ + \int_0^T dt \frac{R_0}{\mu_0} p(R_0) \frac{\partial}{\partial r} (E(v, R_0, t) - E(u_\varepsilon, R_0, t)).$$

Utilisant encore (4.1), on obtient :

$$0 = \int_0^{R_0} r dr \frac{p(r, 0)}{\eta(r, 0)} (v - u_\varepsilon)(r) \\ - \int_0^T dt \frac{R_0}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial r} (R_0) (E(v, R_0, t) - E(u_\varepsilon, R_0, t)).$$

De (4.11) et (4.12), on déduit :

$$\int_0^{R_0} r \, dr \frac{p(r,0)}{\eta(r,0)} (v - u_\varepsilon)(r) = - \varepsilon \int_0^{R_0} u_\varepsilon(r) (v - u_\varepsilon)(r) r \, dr$$

et finalement on conclut que la solution  $p(r,t)$  du système adjoint satisfait à

$$\begin{aligned} p(r,0) &= - \varepsilon \eta(r,0) E(u_\varepsilon, r, 0) \\ &= - \varepsilon \eta(r,0) u_\varepsilon(r) \end{aligned}$$

Finalement, résoudre le problème de contrôle optimal (4.1), (4.2), (4.3) est équivalent à la résolution du système d'équations suivant, qui est bien posé

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \\ - \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \\ \frac{\partial E}{\partial r}(0,t) = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial r}(R_0,t) = g_2(t) \\ \frac{\partial p}{\partial r}(0,t) = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial r}(R_0,t) = \mu_0 \frac{E(u_\varepsilon, R_0, t) - g_1(t)}{R_0} \\ \\ p(r,T) = 0 \\ p(r,0) = - \varepsilon \eta(r,0) E(u_\varepsilon, r, 0) \end{array} \right.$$

On peut résoudre ce système par itérations, en donnant à priori une estimation du champ  $E$  à l'instant initiale, soit  $E^{(0)}(r,0)$ ; à la  $k^{\text{ième}}$  itération, on résoudra successivement les systèmes (4.13) et (4.14).

$$(4.13) \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^{(k)}}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E^{(k)}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E^{(k)}}{\partial r}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial E^{(k)}}{\partial r}(R_0,t) = g_2(t) \\ E^{(k)}(r,0) = - \frac{p^{(k-1)}(r,0)}{\varepsilon \eta(r,0)} \quad k > 1 \\ \\ \text{(pour } k = 1, E^{(1)}(r,0) = E^{(0)}(r,0)) \end{array} \right.$$

$$(4.14) \quad \left[ \begin{array}{l} -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^{(k)}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p^{(k)}}{\partial r} (0, t) = 0 \\ \frac{\partial p^{(k)}}{\partial r} (R_0, t) = \mu_0 \frac{E^{(k)}(R_0, t) - g_1(t)}{R_0} \\ p^{(k)}(T) = 0 \end{array} \right.$$

On itère ainsi jusqu'à l'obtention de résultats suffisamment convergés. Mais, la convergence de ce type de méthode étant trop lente, nous préférons utiliser une méthode de descente pour la résolution numérique du problème.

V. - RESOLUTION DU PROBLEME DE CONTROLE  
PAR UNE METHODE DE DESCENTE

V.1 - Evaluation du gradient de  $J_\varepsilon$

On utilisera une méthode de descente pour minimiser la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(v) = \int_0^T (E(v, R_0, t) - g_1(t))^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} v^2(r) r dr$$

Le problème principal réside dans la détermination du gradient de  $J_\varepsilon$ .  
Pour cela, s'inspirant de Boujot-Morera-Témam [5], on utilise l'application  $\Lambda$  linéaire et continue de  $\mathcal{L}^2(0, R_0)$  dans  $L^2(0, T)$ .

$v \rightarrow \Lambda v = \tilde{E}(R_0, t)$  telle que

$$(5.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \mu^0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{E}}{\eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r}(R_0, t) = 0 \\ \tilde{E}(r, 0) = v(r) \end{array} \right. \quad v \in \mathcal{L}^2(0, R_0)$$

Soit  $E^0$  la solution du système :

$$(5.2) \quad \left[ \begin{array}{l} \mu^0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^0}{\eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E^0}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E^0}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial E^0}{\partial r}(R_0, t) = g_2(t) \quad g_2 \in L^2(0, T) \\ E^0(r, 0) = 0 \end{array} \right.$$

La solution  $E$  du système (4.1) est telle que

$$E(r, t) = E^0(r, t) + \tilde{E}(r, t) \quad \forall r \in ]0, R_0[ , \quad \forall t \in [0, T]$$

On en déduit en particulier que  $E$  est une fonction affine de  $v$ .

On notera dans la suite

$$E^0 = E^0(R_0, t)$$

On minimise la fonctionnelle :

$$J_{\varepsilon}(v) = \int_0^T (E^0 - g_1 + \Lambda v)^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} v^2 r dr$$

$$= \int_0^T (\Lambda v)^2 dt + 2 \int_0^T (E^0 - g_1) \Lambda v dt + \int_0^T (E^0 - g_1)^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} v^2 r dr$$

D'où en dérivant :

$$\langle J'_{\varepsilon}(v), w \rangle = 2 \int_0^T (\Lambda v)(\Lambda w) dt + 2 \int_0^T (E^0 - g_1) \Lambda w dt + 2 \varepsilon \int_0^{R_0} v w r dr$$

Soit  $\Lambda^*$ , l'adjoint de  $\Lambda$ , application linéaire et continue de  $L^2(0, T)$  dans  $\mathcal{L}^2(0, R_0)$ .

Alors :

$$\langle J'_{\varepsilon}(v), w \rangle = 2 \int_0^{R_0} r dr w [ \Lambda^* \Lambda v + \varepsilon v + \Lambda^* (E^0 - g_1) ]$$

Finalement,

$$(5.3) \quad J'_{\varepsilon}(v) = 2 [ (\Lambda^* \Lambda + \varepsilon) v + \Lambda^* (E^0 - g_1) ]$$

On déduit également le Hessian  $H_{\varepsilon}$  de  $J_{\varepsilon}$ ,

$$(5.4) \quad H_{\varepsilon} = 2 [ \Lambda^* \Lambda + \varepsilon ]$$

Pour pouvoir calculer le gradient  $J'_{\varepsilon}(v)$  donné dans la formule (5.3), il nous faut encore trouver une expression explicite de l'application  $\Lambda^*$  ; dans ce but il sera utile ici de considérer le système :

$$(5.5) \quad \left[ \begin{array}{l} -\frac{\mu^0}{\eta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(R_0, t) = \psi(t) \quad \psi \in L^2(0, T) \\ \tilde{p}(r, T) = 0 \end{array} \right.$$

Par définition de  $\Lambda^*$ , on a

$$(\Lambda^* \phi(t), v(r))_{\mathcal{L}^2(0, R_0)} = (\phi(t), \Lambda v(r))_{L^2(0, T)}$$

Evaluons la quantité

$$A = (\phi(t), \Lambda v(r))_{L^2(0, T)} = \int_0^T \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(R_0, t) \tilde{E}(v, R_0, t) dt.$$

A est le terme constant d'une double intégration par parties; en effet,

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0} r dr \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \right) \tilde{E} \\ &= \left[ r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \tilde{E} \right]_0^{R_0} - \int_0^{R_0} r dr \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \\ &= \left[ r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \tilde{E} \right]_0^{R_0} - \left[ r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \tilde{p} \right]_0^{R_0} + \int_0^{R_0} dr \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \right) \tilde{p} \\ &= R_0 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(R_0, t) \tilde{E}(R_0, t) + \int_0^{R_0} r dr \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \right) \tilde{p} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A = \frac{1}{R_0} \int_0^T dt \int_0^{R_0} r dr \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \right) \tilde{E} - \tilde{p} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \right) \right]$$

On utilise (4.1) et (4.5) pour obtenir

$$A = \frac{\mu_0}{R_0} \int_0^T dt \int_0^{R_0} r dr \left( -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \tilde{E} - \tilde{p} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{E}}{\eta} \right)$$

On intervertit [21] l'ordre des intégrations, et on intègre par parties en  $t$ . Tenant compte de la condition finale  $\tilde{p}(r, T) = 0$ , on trouve

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0}{R_0} \int_0^{R_0} r dr \left[ -\tilde{p}(r, T) \frac{\tilde{E}(r, T)}{\eta(r, T)} + \tilde{p}(r, 0) \frac{\tilde{E}(r, 0)}{\eta(r, 0)} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{R_0} \int_0^{R_0} r dr \tilde{p}(r, 0) \frac{\tilde{E}(r, 0)}{\eta(r, 0)} = \frac{\mu_0}{R_0} \int_0^{R_0} r dr \frac{\tilde{p}(r, 0)}{\eta(r, 0)} v(r) \end{aligned}$$

D'où l'expression désirée pour  $\Lambda^*$

$$\Lambda^* \psi(t) = \frac{\mu^0}{R_0} \frac{\tilde{p}(r,0)}{\eta(r;0)}$$

## V.2 - Les méthodes de descente

On est maintenant à même, moyennant la résolution des équations d'évolution (5.1), (5.2) et (5.5) pour  $\tilde{E}$ ,  $E^0$  et  $\tilde{p}$ , d'évaluer le gradient (5.3) et le Hessian (5.4) de la fonctionnelle  $J_\epsilon$  en tout point  $v$ .

Pour la minimisation de  $J_\epsilon$ , on emploiera deux méthodes, celle du gradient simple et celle du gradient conjugué.

Nous indiquerons maintenant le principe des deux méthodes. A chaque itération, on détermine le gradient, puis sa direction conjuguée. On évalue le minimum de la fonctionnelle dans la direction du gradient (pour la méthode du gradient simple), ou dans la direction conjuguée (pour la méthode du gradient conjugué). Théoriquement, comme la fonctionnelle  $J_\epsilon$  est quadratique en  $v$ , le nombre de pas pour converger à l'aide de la méthode du gradient conjugué est égal à la dimension spatiale de l'espace discrétisé.

L'algorithme pour la méthode du gradient conjugué est le suivant.

Partant d'un vecteur  $v_0$ , on définit  $d_0 = -J'_0$  où  $J'_0 = J'_\epsilon(v_0)$  puis on itère selon les formules ci-après,

$$v_{k+1} = v_k + \alpha_k d_k$$

$$d_{k+1} = -J'_{k+1} + \beta_k d_k \quad \text{où} \quad J'_{k+1} = J'_\epsilon(v_{k+1})$$

avec

$$\alpha_k = \frac{\int_0^{R_0} r dr J'_k{}^2}{2 \int_0^{R_0} r dr J'_k (\Lambda^* \Lambda + \epsilon) J'_k}$$

ou encore

$$\alpha_k = \frac{\int_0^{R_0} r dr J'_k{}^2}{2 \left[ \epsilon \int_0^{R_0} r dr J'_k{}^2 + \int_0^T dt (\Lambda J'_k)^2 \right]}$$

et

$$\beta_k = \frac{J'_{k+1}{}^2}{J'_k{}^2}$$

L'algorithme de la méthode du gradient simple est obtenu en prenant à chaque itération  $\beta_k = 0$ .

Théoriquement, d'après Luenberger [13], chaque pas de la méthode du gradient conjugué est au moins aussi bon qu'un pas de gradient simple, à partir du même point ; de plus la méthode du gradient conjugué n'est pas beaucoup plus compliquée à mettre en oeuvre que celle du gradient simple.

Dans les essais numériques, nous avons employé indifféremment l'une ou l'autre méthode ; dans les deux cas, on est surtout limité par le manque de précision sur le calcul des coefficients  $\alpha_k$  : les erreurs numériques proviennent d'une part de l'erreur commise dans la résolution des systèmes d'évolution, d'autre part de celle commise sur le calcul des différentes intégrales.

VI. - DISCRETISATION DES EQUATIONS  
D'EVOLUTION

Nous appliquerons à notre problème des résultats classiques sur la discrétisation des systèmes d'évolution.

VI.1 - Discrétisation spatiale par une méthode de différences finies

Pour la discrétisation spatiale des équations, nous utilisons une méthode de différences finies à pas variables. L'intervalle  $[0, R_0]$  est divisé en  $M$  segments de longueurs  $\Delta r_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) variables comme indiqué dans la figure (6.1).

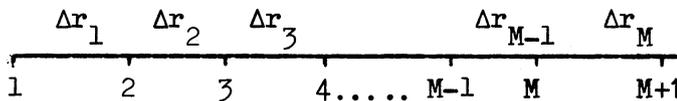


Figure (6.1)  
discrétisation spatiale

Considérons le système

$$(6.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} (0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} (R_0, t) = g(t) \quad r \in ]0, R_0[ \quad t \in ]0, T[ \\ E(r, 0) = h(r) \end{array} \right.$$

Pour  $g = 0$ , ce système se réduit au système (5.1) pour  $\tilde{E}$ , et pour  $h = 0$ , il se réduit au système (5.2) pour  $E^0$ . Soient  $E_i = E(r_i)$ ,  $\eta_i = \eta(r_i)$  et  $h_i = h(r_i)$ . Pour obtenir la discrétisation spatiale, on intègre l'équation d'évolution pour  $\frac{E}{\eta}$  sur des petits sous-intervalles de  $[0, R_0]$ , en négligeant les termes non linéaires en  $\Delta r_i$ . Pour la première demi-maille de la figure (6.1), on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{E_1}{\eta_1} \int_0^{r_2/2} r \, dr - \frac{1}{\mu_0} \left[ r \frac{dE}{dr} \right]_0^{r_2/2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{E_1}{\eta_1} \frac{r_2^2}{8} - \frac{1}{\mu_0} \frac{r_2}{2} \frac{E_2 - E_1}{\Delta r_1} = 0,$$

d'où



$$(6.2) \quad \frac{d}{dt} \frac{E_1}{\eta_1} - \frac{4}{\Delta r_1^2 \mu_0} (E_2 - E_1) = 0$$

L'intégration autour d'un point de discrétisation quelconque donne

$$\frac{d}{dt} \frac{E_i}{\eta_i} \int_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}}^{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} r dr - \frac{1}{\mu_0} \left[ r \frac{dE}{dr} \right]_{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}}^{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{E_i}{\eta_i} \frac{1}{2} \left[ \left( r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right)^2 - \left( r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ \left( r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right) \frac{E_{i+1} - E_i}{\Delta r_i} - \left( r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2} \right) \frac{E_i - E_{i-1}}{\Delta r_{i-1}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{E_i}{\eta_i} \left[ \left( 2r_i + \frac{\Delta r_i - \Delta r_{i-1}}{2} \right) \left( \frac{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}}{2} \right) \right] - \frac{2}{\mu_0} \left[ \frac{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}}{\Delta r_i} E_{i+1} - \left( \frac{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}}{\Delta r_i} + \frac{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}}{\Delta r_{i-1}} \right) E_i + \frac{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}}{\Delta r_{i-1}} E_{i-1} \right] = 0$$

On a donc pour  $i = 2, \dots, M$

$$(6.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{E_i}{\eta_i} + a_i E_{i-1} + b_i E_i + c_i E_{i+1} = 0$$

où, avec

$$d = \left( 2r_i + \frac{\Delta r_i - \Delta r_{i-1}}{2} \right) \left( \frac{\Delta r_i + \Delta r_{i-1}}{2} \right)$$

$$(6.4) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{on a} \\ a_i = -2 \frac{r_i - \frac{\Delta r_{i-1}}{2}}{\mu_0 \Delta r_{i-1} d} \\ c_i = -2 \frac{r_i + \frac{\Delta r_i}{2}}{\mu_0 \Delta r_i d} \\ b_i = -(a_i + c_i) \end{array} \right.$$

L'intégration sur la dernière demi-maille donne

$$\frac{d}{dt} \frac{E_{M+1}}{\eta_{M+1}} \int_{r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2}}^{r_{M+1}} r dr - \frac{1}{\mu_0} \left[ r \frac{dE}{dr} \right]_{r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2}}^{r_{M+1}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{E_{M+1}}{\eta_{M+1}} + \frac{1}{2} \left[ r_{M+1}^2 - \left( r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ r_{M+1} g(t) - \left( r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right) \frac{E_{M+1} - E_M}{\Delta r_M} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{E_{M+1}}{\eta_{M+1}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta r_M}{2} \left( 2r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right) \right] - \frac{1}{\mu_0} r_{M+1} g(t) + \frac{r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2}}{\mu_0 \Delta r_M} (E_{M+1} - E_M) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{E_{M+1}}{\eta_{M+1}} + \frac{1}{\mu_0} \left[ 4 \frac{r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2}}{\Delta r_M} \left/ \left( \Delta r_M \left( 2r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right) \right) \right. \right] (E_{M+1} - E_M) \\ = \frac{1}{\mu_0} \frac{4r_{M+1} g(t)}{\Delta r_M \left( 2r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$(6.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{E_{M+1}}{\eta_{M+1}} + a_{M+1} E_M + b_{M+1} E_{M+1} = s$$

où

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{M+1} &= -4 \frac{r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2}}{\mu_0 (\Delta r_M)^2 \left( 2r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right)} \\ s(t) &= 4 \frac{r_{M+1} g(t)}{\mu_0 \Delta r_M \left( 2r_{M+1} - \frac{\Delta r_M}{2} \right)} \\ b_{M+1} &= -a_{M+1} \end{aligned} \right.$$

Les équations (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6), et la condition initiale  $u_i(0) = h_i$ , constituent la version discrétisée en espace du système (6.1). Nous remarquons que cette méthode de discrétisation est similaire à une méthode d'éléments finis linéaires par morceaux où les

points de discrétisation seraient les points  $\frac{r_i + r_{i+1}}{2}$ ,  $i=1, \dots, M$ .

Dans les calculs, nous prendrons des pas constants ; le système (6.1) discrétisé s'écrit alors

$$(6.7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} D^{-1} \vec{E} + A \vec{E} = \vec{f} \\ \vec{E}(0) = \vec{h} \end{cases}$$

où

$$\vec{E}(t) = (E_1(t), E_2(t), \dots, E_{M+1}(t))$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_M, h_{M+1})$$

$$\vec{f}(t) = (0, 0, \dots, 0, s_1(t))$$

avec

$$s_1(t) = \frac{4R_0 g(t)}{\mu_0 \Delta r (2R_0 - \Delta r/2)}$$

$$D = \begin{bmatrix} \eta_1(t) & & & & \\ & \eta_2(t) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \eta_{M+1}(t) & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\mu_0 \Delta r^2} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ -\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_2}\right) & 2 & -\left(1 + \frac{\Delta r}{2r_2}\right) & 0 & \\ 0 & -\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_3}\right) & 2 & -\left(1 + \frac{\Delta r}{2r_3}\right) & 0 \dots 0 \\ 0 \dots & & 0 & -\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_M}\right) & 2 & -\left(1 + \frac{\Delta r}{2r_M}\right) \\ 0 \dots & & & 0 & -2\left(1 - \frac{\Delta r}{4R_0 - \Delta r}\right) & 2\left(1 - \frac{\Delta r}{4R_0 - \Delta r}\right) \end{bmatrix}$$

L'équation (5.5) est discrétisée de façon similaire

$$(6.8) \quad \begin{cases} -D^{-1} \frac{d}{dt} \vec{p} + A\vec{p} = \vec{f}^2 \\ \vec{p}(T) = 0 \end{cases}$$

où

$$\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{M+1}(t))$$

$$\vec{f}^2(t) = (0, 0, \dots, s_2(t))$$

avec

$$s_2(t) = \frac{4R_0 \psi(t)}{\mu_0 \Delta r (2R_0 - \Delta r/2)}$$

## VI.2 - Discrétisation temporelle par des méthodes implicite ou de Crank-Nicolson

Nous utilisons, suivant les données, une méthode semi-implicite (Crank-Nicolson) ou une méthode complètement implicite ; la méthode de Crank-Nicolson dont l'ordre de troncature est  $O(\Delta r^2) + O(\Delta t^2)$  est certainement préférable du point de vue de la précision, à la méthode complètement implicite dont l'ordre de troncature est  $O(\Delta r^2) + O(\Delta t)$  ; mais, dans certains cas, nous lui préférons cette dernière qui permet d'éviter certaines oscillations qu'on obtient quand on utilise la méthode de Crank-Nicolson.

Comme nous allons le montrer, ces deux méthodes sont inconditionnellement stables, pour toutes valeurs des pas en temps et en espace. Nous décrirons tout d'abord ces méthodes.

a ) On part du système (6.7) déjà discrétisé en espace

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D^{-1} \vec{E} + A \vec{E} = \vec{f} \\ \vec{E}(0) = \vec{h} \end{cases}$$

Soit  $\Delta t$  un petit intervalle de temps et  $t_n = n \Delta t$  où  $n = 0, 1, \dots, N$  et  $N \Delta t = T$ . On pose

$$\vec{E}^n = \vec{E}(t_n) = (E_1^n, E_2^n, \dots, E_{M+1}^n)$$

$$D_n = D(t_n)$$

$$\vec{F}_n = \vec{f}(t_n)$$

En intégrant (6.7) entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on obtient

$$(6.9) \quad D_{n+1}^{-1} \vec{E}^{n+1} - D_n^{-1} \vec{E}^n + A \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{E} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{f} dt.$$

$X(t)$  étant une fonction de  $t$  quelconque, on approxime les intégrales de  $X$  sur les sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  de la façon suivante

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) dt \approx [\theta X(t_n) + (1-\theta) X(t_{n+1})] \Delta t \quad \theta \in [0,1]$$

La méthode de Crank-Nicolson correspond à  $\theta = \frac{1}{2}$ ; la méthode complètement implicite à  $\theta = 0$ .

Alors (6.9) devient

$$(6.10) \quad D_{n+1}^{-1} \vec{E}^{n+1} - D_n^{-1} \vec{E}^n + A (\theta \vec{E}^n + (1-\theta) \vec{E}^{n+1}) \Delta t \\ = (\theta \vec{f}_n + (1-\theta) \vec{f}_{n+1}) \Delta t$$

ou encore

$$(D_{n+1}^{-1} + (1-\theta)\Delta t A) \vec{E}^{n+1} = (D_n^{-1} - \theta\Delta t A) \vec{E}^n + (\theta \vec{f}_n + (1-\theta)\vec{f}_{n+1}) \Delta t$$

soit finalement

$$(6.11) \quad (I + (1-\theta)\Delta t D_{n+1} A) \vec{E}^{n+1} = D_{n+1} D_n^{-1} (I - \theta \Delta t D_n A) \vec{E}^n \\ + \Delta t D_{n+1} (\theta \vec{f}_n + (1-\theta)\vec{f}_{n+1})$$

La matrice  $(I + (1-\theta)\Delta t D_{n+1} A)$ , dont la diagonale est strictement dominante est inversible (Témam [20]); la formule (6.11) permet donc de calculer le vecteur  $\vec{E}^{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de  $\vec{E}^n$  à l'instant  $t_n$  précédent, étant donnés le nombre  $\theta$ , les matrices  $D_{n+1}$  et  $D_n$  et les vecteurs  $\vec{f}_{n+1}$  et  $\vec{f}_n$ . En donnant  $\vec{E}^0$ , on peut ainsi déduire  $\vec{E}^1, \vec{E}^2, \dots, \vec{E}^N$ .

Pour la méthode de Crank-Nicolson , (6.11) s'écrit

$$(6.12) \quad \left( I + \frac{\Delta t}{2} D_{n+1} A \right) \vec{E}^{n+1} = D_{n+1} D_n^{-1} \left( I - \frac{\Delta t}{2} D_n A \right) \vec{E}_n + \frac{\Delta t}{2} D_{n+1} (\vec{f}_n + \vec{f}_{n+1})$$

et pour la méthode implicite

$$(6.13) \quad \left( I + \Delta t D_{n+1} A \right) \vec{E}^{n+1} = D_{n+1} D_n^{-1} \vec{E}^n + \Delta t D_{n+1} \vec{f}_{n+1}$$

b ) Il nous faut également discrétiser en temps le système (6.8)

$$\begin{cases} - D^{-1} \frac{dp}{dt} + Ap = f^2 \\ \vec{p}(T) = 0 \end{cases}$$

On procède de façon identique et l'on trouve

$$(6.14) \quad - \frac{\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n}{\Delta t} + (\theta D_n A \vec{p}_n + (1-\theta) D_{n+1} A \vec{p}_{n+1}) = \theta D_n \vec{f}_n^2 + (1-\theta) D_{n+1} \vec{f}_{n+1}^2$$

où

$$\vec{p}_n = \vec{p}(t_n) = (p_1^n, p_2^n, \dots, p_{M+1}^n)$$

$$\vec{f}_n^2 = \vec{f}^2(t_n)$$

La formule (6.14) s'écrit encore

$$(6.15) \quad \left( I + \theta \Delta t D_n A \right) \vec{p}_n = \left( I - (1-\theta) \Delta t D_{n+1} A \right) \vec{p}_{n+1} + \Delta t (\theta D_n \vec{f}_n^2 + (1-\theta) D_{n+1} \vec{f}_{n+1}^2)$$

Cette formule permet de calculer  $\vec{p}_n$  à partir de  $\vec{p}_{n+1}$  ;  $\vec{p}^N$  étant donné,

on peut déterminer successivement,  $\vec{p}_{N-1}, \dots, \vec{p}_1, \vec{p}^0$

Pour la méthode de Crank-Nicolson (où  $\theta = \frac{1}{2}$ ), (6.14) s'écrit

$$(6.16) \quad (I + \frac{\Delta t}{2} D_n A) \vec{p}^n = (I - \frac{\Delta t}{2} D_{n+1} A) \vec{p}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (D_n \vec{f}_n^2 + D_{n+1} \vec{f}_{n+1}^2)$$

et pour la méthode complètement implicite (où  $\theta = 1$ )

$$(6.17) \quad (I + \Delta t D_n A) \vec{p}^n = \vec{p}^{n+1} + \Delta t D_n \vec{f}_n^2$$

On démontrera la stabilité et la consistance des approximations de l'équation (6.1), ces deux propriétés impliquant la convergence de ces approximations. Des démonstrations analogues peuvent être données pour les approximations de l'équation (5.5). Pour la démonstration de la stabilité, on s'inspirera de Strang [19] et pour prouver la consistance, on utilisera des techniques classiques indiquées dans Richtmyer-Morton [16]. Alternativement, on peut utiliser des méthodes d'énergie pour établir la stabilité et la convergence des approximations, comme cela a été fait dans Raviart [15].

### VI.3 - Stabilité des méthodes d'approximation

On démontre ici, pour le cas  $\Delta r_i = \Delta r$  ( $i=1, \dots, M+1$ ) la stabilité des approximations (6.12) et (6.13) de l'équation (6.1). Il s'agit de prouver que la solution  $\vec{E}^n$  reste bornée quand  $n$  tend vers l'infini et  $\Delta r$  tend vers zéro.

D'après la formule (6.11), on a

$$\begin{aligned} \vec{E}^{n+1} &= (P_{n+1}^{+-1} D_{n+1} D_n^{-1} P_n^- P_n^{+ -1} D_n D_{n-1}^{-1} P_{n-1}^- \dots P_1^{+ -1} D_1 D_0^{-1} P_0^-) \vec{E}_0 \\ &+ (P_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} \mathcal{F}_{n+1} + P_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} D_n^{-1} P_n^- P_n^{+ -1} D_n \mathcal{F}_n + \dots \\ &\quad + P_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} D_n^{-1} P_n^- \dots P_1^{+ -1} D_1 \mathcal{F}_1) \Delta t \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad P_n^- = I - \theta \Delta t D_n A$$

$$P_n^+ = I + (1-\theta) \Delta t D_n A$$

$$\mathcal{F}_n = \theta \vec{f}_{n-1}^1 + (1-\theta) \vec{f}_n^1$$

$$\text{Soit } \mathcal{A}_{n+1} = P_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} D_n \dots P_0^-$$

$$\text{et } \mathbb{B}_{n+1} = \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} \mathfrak{F}_{n+1} + \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} D_n^{-1} \mathbb{P}_n^- \mathbb{P}_n^{+ -1} D_n \mathfrak{F}_n + \dots + \\ + \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} D_{n+1} D_n^{-1} \mathbb{P}_n^- \dots \mathbb{P}_1^{+ -1} D_1 \mathfrak{F}_1$$

On a

$$\| \mathcal{A}_{n+1} \| \leq \| \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} \| \| D_{n+1} D_n^{-1} \| \| \mathbb{P}_n^- \mathbb{P}_n^{+ -1} \| \dots \| \mathbb{P}_1^- \mathbb{P}_1^{+ -1} \| \| D_1 D_0^{-1} \| \\ \| \mathbb{P}_0^- \|$$

or  $\forall k$

$$\| D_{k+1} D_k^{-1} \| = 1 + o(\Delta t)$$

$$\text{Donc } \prod_{k=0}^n \| D_{k+1} D_k^{-1} \| = (1 + o(\Delta t))^{n+1} \leq (1 + o(\Delta t))^N$$

$$\text{où } \Delta t = \frac{T}{N}$$

finalemt,

$$\prod_{k=0}^n \| D_{k+1} D_k^{-1} \| \sim e^{o(T)}$$

Considérons maintenant, pour  $k$  quelconque dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , le produit

$$\mathbb{P}_k^- \mathbb{P}_k^{+ -1} = (I - \theta \Delta t D_k A) (I + (1-\theta) \Delta t D_k A)^{-1}$$

On a

$$\| \mathbb{P}_k^- \mathbb{P}_k^{+ -1} \| = \sup_{m=1, M+1} \left| \frac{1 - \theta \lambda_{km}}{1 + (1-\theta) \lambda_{km}} \right|$$

ou les  $\lambda_{km}$  ( $m=1, \dots, M+1$ ) sont les valeurs propres de la matrice  $\Delta t D_k A$ . D'après le théorème de Gerschgorin, toutes les valeurs propres de la matrice  $\Delta t D_k A$ , matrice à diagonale dominante, ont leur partie réelle positive.

Soient  $a$  et  $b$  les parties réelle et imaginaire de  $\lambda_{km}$

i) pour la méthode de Crank-Nicolson

$$\left| \frac{1 - (a + ib)/2}{1 + (a + ib)/2} \right|^2 = \frac{(1 - a/2)^2 + b^2/4}{(1 + a/2)^2 + b^2/4} \leq 1 \text{ puisque } a \geq 0$$

ii) pour la méthode complètement implicite

$$\left| \frac{1}{1+a+ib} \right|^2 = \frac{1}{(1+a)^2 + b^2} \leq 1$$

Finalement, on a

$$(6.18) \quad \| \mathcal{A}_{n+1} \| \leq e^{0(T)} \| \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} \| \| \mathbb{P}_0^- \| \leq e^{0(T)} \| \mathbb{P}_0^- \|$$

Démontrons maintenant que  $\mathbb{B}_{n+1}$  est une quantité finie

$$\| \mathbb{B}_{n+1} \| \leq (n+1) \Delta t \| \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} \| (1 + o(\Delta t))^{n+1} \sup_{k=1, \dots, n+1} \| D_k \mathcal{F}_k \|$$

$$\| \mathbb{B}_{n+1} \| \leq T e^{0(T)} \| \mathbb{P}_{n+1}^{+ -1} \| \sup_{k=1, \dots, n+1} \| D_k \mathcal{F}_k \|$$

Finalement,

$$(6.19) \quad \| \mathbb{B}_{n+1} \| \leq C e^{0(T)} \sup_{\substack{r \in [0, R_0] \\ t \in [0, T]}} (|g(t)| \eta(r, t))$$

On déduit de l'expression

$$E^{n+1} \vec{1} = \mathcal{A}_{n+1} E^0 \vec{0} + \mathbb{B}_{n+1}$$

et de (6.18) et (6.19) que

$$\| E^{n+1} \vec{1} \| \leq \mathcal{C}_1 \| E^0 \vec{0} \| + \mathcal{C}_2$$

pour tout  $n$ , indépendamment du pas en espace  $\Delta r$ . On conclut finalement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| E^n \vec{1} \| < \infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

et donc la stabilité inconditionnelle des méthodes complètement implicites et de Crank-Nicolson.

VI.4 - Ordre de troncature

Nous voulons évaluer la précision des méthodes numériques décrites ci-dessus en fonction des mailles  $\Delta r$  et  $\Delta t$ . Dans ce but, nous calculons l'ordre de troncature  $\tau$  de ces méthodes. Celui-ci indique dans quelle mesure la solution exacte d'un système satisfait au système discrétisé correspondant.

Soit  $\hat{E}(r,t)$  la solution exacte du système (6.1). Nous définissons

$$\hat{E}(j \Delta x, n \Delta t) = \hat{E}_j^n$$

$$\eta(j \Delta x, n \Delta t) = \eta_j^n$$

pour toutes valeurs réelles de  $j$  et de  $n$ . Par développement en séries de Taylor avec reste on a, pour deux nombres réels  $\theta_1$  et  $\theta_2$  compris entre 0 et 1

$$(6.20) \quad \frac{\hat{E}_j^{n+1}}{\eta_j^{n+1}} - \frac{\hat{E}_j^n}{\eta_j^n} = \Delta t \left[ \theta \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^n + (1-\theta) \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+1} \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_1} - (1-\theta) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_2} \right]$$

et pour  $\theta_3$  dans l'intervalle  $]0,1[$

$$(6.21) \quad \hat{E}_{j+1}^n - \hat{E}_j^n = \Delta r \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial r} \right)_j^n + \frac{\Delta r^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_j^n + \frac{\Delta r^3}{6} \left( \frac{\partial^3 \hat{E}}{\partial r^3} \right)_j^n \\ + \frac{\Delta r^4}{24} \left( \frac{\partial^4 \hat{E}}{\partial r^4} \right)_{j+\theta_3}^n$$

et un développement semblable pour la différence  $\hat{E}_{j-1}^n - \hat{E}_j^n$ .

Le système discrétisé correspondant à (6.1) est donné par (6.12) pour la méthode de Crank-Nicolson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) et dans (6.13) pour la méthode totalement implicite ( $\theta = 0$ ). Nous en trouvons facilement l'équation pour une composante  $E_j^n$  du vecteur  $\vec{E}^n$ , pour  $j = 2, \dots, M$ ;  $n=1, \dots, N$ .

$$(6.22) \quad \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[ \frac{E_j^{n+1}}{\eta_j^{n+1}} - \frac{E_j^n}{\eta_j^n} \right] - \frac{1}{\Delta r^2} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta r}{2r_j} \right) \left( \theta E_{j-1}^n + (1-\theta) E_{j-1}^{n+1} \right) \right. \\ \left. - 2 \left( \theta E_j^n + (1-\theta) E_j^{n+1} \right) + \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r_j} \right) \left( \theta E_{j+1}^n + (1-\theta) E_{j+1}^{n+1} \right) \right] = 0$$

L'ordre de troncature  $\tau$  des systèmes (6.12) et (6.13) est défini comme l'ordre de grandeur des différences

$$\tau = \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[ \frac{\hat{E}_j^{n+1}}{\eta_j^{n+1}} - \frac{\hat{E}_j^n}{\eta_j^n} \right] - \frac{1}{\Delta r^2} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta r}{2r_j} \right) \left( \theta \hat{E}_{j-1}^n + (1-\theta) \hat{E}_{j-1}^{n+1} \right) \right. \\ \left. - 2 \left( \theta \hat{E}_j^n + (1-\theta) \hat{E}_j^{n+1} \right) + \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r_j} \right) \left( \theta \hat{E}_{j+1}^n + (1-\theta) \hat{E}_{j+1}^{n+1} \right) \right]$$

Nous substituons (6.20) et (6.21) dans (6.22), en utilisant l'égalité

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} = \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}}{\partial r}$$

On obtient finalement

$$\tau = \frac{\Delta t}{2} \mu_0 \left[ \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_1} - (1-\theta) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_2} \right] + o(\Delta r^2)$$

(i) pour la méthode de Crank-Nicolson

Il existe  $\theta_4 \in ]0,1[$  tel que

$$\tau = \frac{\Delta t^2}{4} \mu_0 \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_4} + o(\Delta r^2)$$

L'ordre de troncature de la méthode est donc

$$\tau = o(\Delta t^2) + o(\Delta r^2)$$

(ii) pour la méthode complètement implicite

$$\tau = - \frac{\Delta t}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_j^{n+\theta_2} + o(\Delta r^2)$$

$$\tau = o(\Delta t) + o(\Delta r^2)$$

pour  $j = 1$ , l'ordre de troncature est donné par

$$(6.23) \quad \tau = \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[ \frac{\hat{E}_1^{n+1}}{\eta_1^{n+1}} - \frac{\hat{E}_1^n}{\eta_1^n} \right] + \frac{4}{\Delta r^2} \left[ \theta \hat{E}_1^n + (1-\theta) \hat{E}_1^{n+1} \right] \\ - \frac{4}{\Delta r^2} \left[ \theta \hat{E}_2^n + (1-\theta) \hat{E}_2^{n+1} \right]$$

De nouveau, on utilise (6.20) et (6.21) et l'égalité

$$\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_1^n = \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_1^n + \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{E}}{\partial r} \right)_1^n$$

c'est-à-dire, grâce à la règle de l'Hopital

$$\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_1^n = 2 \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_1^n$$

On tient compte de plus de la parité de la fonction  $\hat{E}$  en  $r$  d'où l'on déduit

$$\left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial r} \right)_1^n = \left( \frac{\partial^3 \hat{E}}{\partial r^3} \right)_1^n = 0$$

on trouve de nouveau

$$\tau = \frac{\Delta t}{2} \mu_0 \left[ \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_1^{n+\theta_1} - (1-\theta) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_1^{n+\theta_2} \right] + o(\Delta r^2)$$

et donc les mêmes ordres de troncature que précédemment

$$\tau = o(\Delta t^2) + o(\Delta r^2) \quad \text{pour la méthode de Crank-Nicolson}$$

et

$$\tau = o(\Delta t) + o(\Delta r^2) \quad \text{pour la méthode complètement implicite.}$$

Pour  $j = M+1$ , l'ordre de troncature est donné par la formule

$$(6.24) \quad \tau = \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[ \frac{\hat{E}_{M+1}^{n+1}}{\eta_{M+1}^{n+1}} - \frac{\hat{E}_{M+1}^n}{\eta_{M+1}^n} \right] - \frac{2}{\Delta r^2} \left[ 1 - \frac{\Delta r}{4Ro - \Delta r} \right] \left[ \theta \hat{E}_M^n + (1-\theta) \hat{E}_M^{n+1} \right] \\ + \frac{2}{\Delta r^2} \left[ 1 - \frac{\Delta r}{4Ro - \Delta r} \right] \left[ \theta \hat{E}_{M+1}^n + (1-\theta) \hat{E}_{M+1}^{n+1} \right] - \frac{8Ro (\theta g^n + (1-\theta) g^{n+1})}{\Delta r (4Ro - \Delta r)}$$

où  $g^n = g(t_n)$

De (6.20), (6.21) et de l'égalité

$$\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_{M+1}^n = \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_{M+1}^n + \frac{1}{Ro} g^n$$

on déduit

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\Delta t}{2} \mu_0 & \left[ \theta \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_{M+1}^{n+\theta_1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} \frac{\hat{E}}{\eta} \right)_{M+1}^{n+\theta_2} \right] \\ & + \Delta r \left[ \theta \left( -\frac{g^n}{4Ro^2} + \frac{1}{4Ro} \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_{M+1}^n + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^3 \hat{E}}{\partial r^3} \right)_{M+1}^n \right) \right. \\ & \left. + (1-\theta) \left( \frac{g^{n+1}}{4Ro^2} + \frac{1}{4Ro} \left( \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial r^2} \right)_{M+1}^{n+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^3 \hat{E}}{\partial r^3} \right)_{M+1}^n \right) \right] + o(\Delta r^2) \end{aligned}$$

Finalement, on déduit les résultats bien connus

$$\tau = o(\Delta t^2) + o(\Delta r^2) \quad \text{pour la méthode de Crank-Nicolson}$$

$$\text{et} \quad \tau = o(\Delta t) + o(\Delta r^2) \quad \text{pour la méthode complètement implicite}$$

Ces deux méthodes d'approximation sont donc consistantes ; étant également stables, elles sont convergentes.

$$(7.2) \quad \int_0^{Ro} \hat{w}_k(r) \hat{w}_j(r) r dr = 0 \quad \forall k \neq j$$

En effet, en multipliant (8.1.1) par  $\hat{w}_j$  et après intégration, on obtient

$$\int_0^{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial r} \hat{w}_j r dr + \frac{\lambda_k^2}{Ro^2} \int_0^{Ro} \hat{w}_k \hat{w}_j r dr = 0$$

$$\text{soit} \quad \left[ r \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial r} \right]_0^{Ro} + \frac{\lambda_k^2}{Ro^2} \int_0^{Ro} \hat{w}_k \hat{w}_j r dr = 0$$

Finalement, en utilisant (7.1.2) et (7.1.3), on obtient (7.2)

Si l'on a des nombres réels  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, \infty$ ) tels que

$$\gamma_0 \hat{w}_0 + \gamma_1 \hat{w}_1 + \dots + \gamma_k \hat{w}_k + \dots = 0$$

cela implique, pour tout  $j$

$$\gamma_0 \int_0^{Ro} \hat{w}_0 \hat{w}_j r dr + \gamma_1 \int_0^{Ro} \hat{w}_1 \hat{w}_j r dr + \dots + \gamma_k \int_0^{Ro} \hat{w}_k \hat{w}_j r dr + \dots = 0$$

$$\text{d'où (7.3)} \quad \gamma_j \int_0^{Ro} \hat{w}_j^2 r dr = 0$$

Or, d'après Abramowitz-Stegun [1], on a

$$\int_0^t J_0^2(t') t' dt' = \frac{t^2}{2} [ J_0^2(t) + J_1^2(t) ]$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{Ro} \hat{w}_1^2 r dr &= \int_0^{Ro} J_0^2 \left( \lambda_j \frac{r}{Ro} \right) r dr = \frac{Ro^2}{\lambda_j^2} \int_0^{\lambda_j} t dt J_0^2(t) \\ &= \frac{Ro^2}{\lambda_j^2} \frac{\lambda_j^2}{2} [ J_0^2(\lambda_j) + J_1^2(\lambda_j) ] \end{aligned}$$

On a finalement

$$(7.4) \quad \int_0^{Ro} \hat{w}_j^2 r dr = \frac{Ro^2}{2} J_0^2(\lambda_j)$$

et l'on déduit de (7.3) et (7.4) que  $\gamma_j = 0$  et par suite que le système  $(\hat{w}_k, k = 0, 1, \dots, \infty)$  est libre.

b) Le système  $(\hat{w}_k, k = 0, 1, \dots, \infty)$  est complet dans  $V$

La démonstration en est donnée dans Tolstov [22], à l'aide des lemmes suivants :

Lemme 8.1

Si pour toute fonction continue  $F(r)$  sur  $[0, R_0]$  et pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une combinaison linéaire

$$\sigma_n(r) = \gamma_0 \hat{w}_0(r) + \gamma_1 \hat{w}_1(r) + \dots + \gamma_n \hat{w}_n(r)$$

pour laquelle

$$(7.5) \quad \int_0^{R_0} [F(r) - \sigma_n(r)]^2 r dr < \varepsilon$$

alors le système  $(\hat{w}_k, k = 0, \dots, \infty)$  est complet dans  $\mathcal{L}^2(0, R_0)$

Lemme 8.2

Si une fonction  $g(r)$  est continue sur  $[0, R_0]$ , si  $g$  a une dérivée régulière par morceaux et satisfait aux conditions de bord

$$\frac{dg}{dr}(0) = \frac{dg}{dr}(R_0) = 0$$

alors la série de Fourier de  $g(r)$  (i.e. la somme  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{w}_k(r)$  où

$$c_k = \int_0^{R_0} r dr g(r) \hat{w}_k(r)) \text{ converge vers } g(r) \text{ absolument et uniformément.}$$

Toute fonction  $F(r)$  continue sur  $[0, R_0]$  peut être approchée par une fonction  $g$  dont les deux premières dérivées sont continues et qui vérifie

$$\frac{dg}{dr}(0) = \frac{dg}{dr}(R_0) = 0$$

On a  $\int_0^{R_0} (F(r) - g(r))^2 r dr \leq \frac{\varepsilon}{4}$  pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit.

Or, d'après le lemme 8.2, la série de Fourier de  $g$  converge uniformément vers  $g$ . Donc, il existe une combinaison linéaire des  $\hat{w}_k$

$$\sigma_n(r) = \gamma_0 \hat{w}_0(r) + \gamma_1 \hat{w}_1(r) + \dots + \gamma_n \hat{w}_n(r)$$

$$\text{telle que } |g(r) - \sigma_n(r)| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 R_0^2}} \quad 0 \leq r \leq R_0$$

$$\text{ce qui implique } \int_0^{R_0} (g(r) - \sigma_n(r))^2 r \, dr \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

De l'inégalité élémentaire  $(A + B)^2 \leq 2(A^2 + B^2)$  on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} (F(r) - \sigma_n(r))^2 r \, dr &= \int_0^{R_0} [(F(r) - g(r)) + (g(r) - \sigma_n(r))]^2 r \, dr \\ &\leq 2 \int_0^{R_0} (F(r) - g(r))^2 r \, dr + 2 \int_0^{R_0} (g(r) - \sigma_n(r))^2 r \, dr \end{aligned}$$

On en déduit (7.5) et donc que le système  $(\hat{w}_k, k = 0, \dots, \infty)$  est complet.

Le système  $(\hat{w}_k, k = 1, \dots, \infty)$  constitue donc une base hilbertienne de  $\mathcal{L}^2(0, R_0)$  et également de  $V = \mathcal{H}^1(0, R_0)$ ; nous disposons donc d'une base hilbertienne de  $V$  que nous normalisons, en posant

$$w_k(r) = \frac{\sqrt{2} \hat{w}_k(r)}{R_0 J_0(\lambda_k)} = \frac{\sqrt{2} J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R_0}\right)}{R_0 J_0(\lambda_k)} \quad k = 0, \dots, \infty$$

## VII.2 - Application de la méthode de Faedo-Galerkin

### a<sup>o</sup>) Recherche d'une formulation approchée du système (3.2)

Nous utilisons ici la méthode de Faedo-Galerkin, que nous avons présentée au chapitre III, en prenant comme base, la base des fonctions de Bessel définie plus haut; on a

$$e_m(r, t) = \sum_{k=0}^m e_{km}(t) w_k(r)$$

(3.9.1) s'écrit ici

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{Ro} r \, dr \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{k=0}^m \frac{e_{km}(t) w_k(r)}{\eta(r,t)} \right] w_j(r) \\
 & - \frac{1}{\mu_0} \int_0^{Ro} r \, dr \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=0}^m e_{km}(t) w_k(r) \right] w_j(r) \\
 = & \frac{2g_2(t)}{\mu_0 Ro} \int_0^{Ro} w_j(r) r \, dr - \frac{d}{dt} \left( \frac{g_2(t)}{2 Ro} \int_0^{Ro} \frac{r^3 w_j(r)}{\eta(r,t)} \, dr \right)
 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
 a_{jk}(t) &= \int_0^{Ro} \frac{w_k(r) w_j(r)}{\eta(r,t)} r \, dr \\
 \alpha_j(t) &= \int_0^{Ro} w_j(r) r \, dr \\
 \beta_j(t) &= \int_0^{Ro} \frac{w_j(r)}{\eta(r,t)} r^3 \, dr
 \end{aligned}$$

et tenant compte de (7.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
 (7.6) \quad \sum_{k=0}^m \frac{d}{dt} a_{jk}(t) e_{km}(t) + \frac{\lambda_j^2}{\mu_0 Ro^2} e_{jm}(t) \\
 = \frac{2g_2(t)}{\mu_0 Ro} \alpha_j - \frac{1}{2 Ro} \frac{d}{dt} (\beta_j(t) g_2(t))
 \end{aligned}$$

où le coefficient  $\alpha_j$  peut être facilement calculé. Pour  $\alpha_0$ , on a

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{Ro} \int_0^{Ro} J_0(0) r \, dr = \frac{\sqrt{2}}{Ro} \frac{Ro^2}{2} = \frac{Ro}{\sqrt{2}}$$

Pour  $j=1, \dots, \infty$ , on a

$$\alpha_j = \frac{Ro}{\sqrt{2}} \int_0^{Ro} w_j(r) w_0(r) r dr$$

et donc, comme les fonctions  $w_j$  sont deux à deux orthogonales, il vient

$$\alpha_j = 0 \quad \text{pour } j=1, \dots, \infty .$$

Pour écrire (7.6) sous forme matricielle, nous posons de plus

$$\Lambda_m(t) = \{a_{jk}(t) ; j = 0, \dots, m ; k = 0, \dots, m\}$$

$$\Lambda_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^2}{\mu_0 Ro^2} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\lambda_m^2}{\mu_0 Ro^2} & \end{bmatrix}$$

$$\vec{s}_{1m} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0} (1, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{s}_{2m}(t) = \frac{1}{2Ro} \vec{\beta}_m(t) \vec{g}_2(t) \quad \text{où } \vec{\beta}_m(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_m(t))$$

$$\vec{e}_m(t) = (e_{0m}(t), e_{1m}(t), \dots, e_{mm}(t))$$

Nous avons alors le système d'équations différentielles ordinaires

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} A_m(t) \vec{e}_m(t) + A_m \vec{e}_m(t) = \vec{s}_{1m} g_2(t) - \frac{d\vec{s}_{2m}(t)}{dt} \\ \vec{e}_m(0) = (e_{0m}(0), e_{1m}(0), \dots, e_{mm}(0)) \\ \text{avec } e_{km}(0) = \int_0^{R_0} e(r,0) w_k(r) r dr \quad k = 0, \dots, m \end{array} \right.$$

et donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m e_{km}(0) w_k(r) = e(r,0) \quad \text{dans } H$$

On a démontré au chapitre III que la matrice  $A_m(t)$  est inversible ; Le système (7.7) admet donc une solution unique  $\vec{e}_m(t)$  ; d'après le paragraphe (III.3)  $e_m(r,t)$  tend vers  $e(r,t)$  quand  $e$  tend vers l'infini dans  $L^2(0,T,V)$ .

### VII.3 - Discrétisation temporelle par la méthode de Crank-Nicolson

#### a ) Description du schéma d'approximation

On pose

$$A_m^n = A_m(t_n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$B_m^n = B_m(t_n)$$

$$\vec{S}_{1m}^n = \vec{S}_{1m}(t_n)$$

$$\vec{e}_m^n = \vec{e}_m(t_n)$$

Le système (7.7) devient

$$\left( A_m^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} A_m e_m^{n+1} \right) = \left( A_m^n - \frac{\Delta t}{2} A_m \right) \vec{e}_m^n + \Delta t \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \vec{S}_{1m} - \left( S_{2m}^{n+1} - S_{2m}^n \right)$$

$$\vec{e}_m^0 = (e_{0m}, e_{1m}, \dots, e_{mm})$$

Ce qui s'écrit encore

$$(7.8) \quad \left[ \begin{array}{l} \left( I + \frac{\Delta t}{2} (A_m^{n+1})^{-1} \Lambda \right) \vec{e}_m^{n+1} = (A_m^{n+1})^{-1} A_m^n \left( I - \frac{\Delta t}{2} A_m^{n-1} \Lambda_m \right) \vec{e}_m^n \\ \quad + (A_m^{n+1})^{-1} \left( \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \Delta t \vec{S}_{1m} - (S_{2m}^{n+1} - S_{2m}^n) \right) \\ \vec{e}_m^0 = (e_{0m}, e_{1m}, \dots, e_{mm}) \end{array} \right.$$

b ) Stabilité de l'approximation

On ne présentera pas la démonstration ici car elle est similaire à celle du paragraphe (VI.3).

Il suffit, pour pouvoir nous ramener aux hypothèses du paragraphe (VI.3) de montrer que la matrice  $\frac{\Delta t}{2} A_{n+1,m}^{-1} \Lambda_m^n$  admet que des valeurs propres non négatives, c'est-à-dire qu'elle est semi-définie positive.

Or, nous avons vu, au paragraphe (III.3.b) que la matrice  $A_{n+1,m}$  est définie positive ; donc, son inverse  $A_{n+1,m}^{-1}$  l'est aussi. La matrice  $\Lambda_m$  étant une matrice diagonale dont les éléments sont positifs ou nuls, on en déduit que la matrice  $\frac{\Delta t}{2} A_{n+1,m}^{-1} \Lambda_m^n$  est semi-définie positive.

c ) Consistance de l'approximation

Considérons le système

$$(7.9) \quad \left[ \begin{array}{l} (A_m^{n+1} \vec{e}_m^{n+1} - A_m^n \vec{e}_m^n) + \Delta t \frac{\Lambda_m}{2} (\vec{e}_m^{n+1} + \vec{e}_m^n) \\ \quad = \Delta t \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \vec{S}_{1m} + (S_{2m}^{n+1} - S_{2m}^n) \\ \vec{e}_m^0 = \vec{e}^0 \end{array} \right.$$

Il est équivalent de résoudre le système (7.10)

$$(7.10) \quad \left[ \begin{array}{l} (A_{m\infty}^{n+1} \vec{e}_{m\infty}^{n+1} - A_{m\infty}^n \vec{e}_{m\infty}^n) + \Delta t \frac{\Lambda_{m\infty}}{2} (\vec{e}_{m\infty}^{n+1} + \vec{e}_{m\infty}^n) \\ \quad = \Delta t \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \vec{S}_{1m\infty} + (S_{2m\infty}^{n+1} - S_{2m\infty}^n) \\ \vec{e}_{m\infty}^0 = \vec{e}_{\infty}^0 \end{array} \right.$$

où la matrice  $A_{m\infty}^n$  est la matrice infinie suivante

$$A_{m\infty}^n = \begin{bmatrix} A_m^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice infinie  $\Lambda_{m\infty}$  est définie similairement par

$$\Lambda_{m\infty} = \begin{bmatrix} \Lambda_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs infinis  $\vec{e}_{m\infty}^n, \vec{S}_{1m\infty}^n, \vec{S}_{2m\infty}^n$  sont les vecteurs finis  $e_m^n, \vec{S}_{1m}, \vec{S}_{2m}$  complétés par des zéros.

Soient  $\hat{e}(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{e}_k(t) w_k(r)$  la solution du système (3.2),

$$\hat{e}_{mm}(r,t) = \sum_{k=0}^m \hat{e}_k(t) w_k(r) \text{ et } \vec{e}_m^n(t) = (\hat{e}_0(t), \hat{e}_1(t), \dots, \hat{e}_m(t))$$

On notera

$$\begin{aligned} \hat{e}_k^n &= \hat{e}_k(t_n) \\ \text{et } \vec{e}_m^n &= \vec{e}_m(t_n) \end{aligned}$$

L'ordre de troncature de l'approximation s'écrit alors

$$\vec{\tau} = \frac{A_{m\infty}^{n+1} \vec{e}^{n+1} - A_{m\infty}^n \vec{e}^n}{\Delta t} + \frac{\Lambda_{m\infty}}{2} (\vec{e}^{n+1} + \vec{e}^n) - \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \vec{S}_{1m\infty}^n + \frac{S_{2m\infty}^{n+1} - S_{2m\infty}^n}{\Delta t}$$

ou encore  $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{A_m^{n+1} \vec{e}_m^{n+1} - A_m^n \vec{e}_m^n}{\Delta t} + \frac{\Lambda_m}{2} (\vec{e}_m^{n+1} + \vec{e}_m^n) - \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \vec{S}_{1m}^n + \frac{S_{2m}^{n+1} - S_{2m}^n}{\Delta t}$$

Par développement en série de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} A_m^{n+1} \hat{e}_m^{n+1} - A_m^n \hat{e}_m^n &= \frac{\Delta t}{2} \left( \left[ \frac{d}{dt} (A_m \hat{e}_m) \right]^n + \left[ \frac{d}{dt} (A_m \hat{e}_m)^{n+1} \right] \right) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4} \left( \left[ \frac{d^2}{dt^2} (A_m \hat{e}_m) \right]^n - \left[ \frac{d^2}{dt^2} (A_m \hat{e}_m) \right]^{n+1} \right) + o(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Soit finalement

$$(7.11) \quad A_m^{n+1} \hat{e}_m^{n+1} - A_m^n \hat{e}_m^n = \frac{\Delta t}{2} \left( \left[ \frac{d}{dt} (A_m \hat{e}_m) \right]^n + \left[ \frac{d}{dt} (A_m \hat{e}_m) \right]^{n+1} \right) + o(\Delta t^3)$$

et similairement, on a

$$(7.12) \quad S_{2m}^{n+1} - S_{2m}^n = \frac{\Delta t}{2} \left( \left[ \frac{d S_{2m}}{dt} \right]^n + \left[ \frac{d S_{2m}}{dt} \right]^{n+1} \right) + o(\Delta t^3)$$

On substitue (7.11) et (7.12) dans  $\vec{\tau}_1$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= o(\Delta t^2) + \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} (A_m^{n+1} \hat{e}_m^{n+1}) + A_m \hat{e}_m^{n+1} - g_2^{n+1} \vec{S}_{1m} + \left( \frac{d S_{2m}}{dt} \right)^{n+1} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} (A_m^n \hat{e}_m^n) + A_m \hat{e}_m^n - g_2^n \vec{S}_{1m} + \left( \frac{d S_{2m}}{dt} \right)^n \right] \end{aligned}$$

Il reste à montrer que, quand  $m$  tend vers l'infini, le vecteur

$$\vec{\hat{\tau}} = \frac{d}{dt} (A_m(t) \hat{e}_m(t)) + A_m \hat{e}_m(t) - g_2(t) \vec{S}_{1,m} + \frac{d S_{2,m}}{dt}(t)$$

tend vers zéro pour tout  $t$ .

Considérons la  $j^e$  composante  $\hat{\tau}_j$  de  $\vec{\hat{\tau}}$ ; elle s'écrit aussi, de façon similaire à (3.9.1)

$$\hat{\tau}_j = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{e}_{mm}}{\eta}, w_j \right) + a(\hat{e}_{mm}, w_j) - \left( \frac{2g_2}{\mu_0 R_0} - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta}, w_j \right)$$

$\hat{\tau}_j$  est une fonction continue de  $e_m$ ; quand  $m$  tend vers l'infini, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\tau}_j = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{e}}{\eta}, w_j \right) + a(\hat{e}, w_j) - \left( \frac{2g_2}{\mu_0 R_0} - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta}, w_j \right) = 0$$

L'approximation du système (3.2) par le système (7.8) est stable et consistante; elle est donc convergente. Dans le chapitre VIII, c'est cette méthode de discrétisation que nous utiliserons pour les équations d'évolution.

VIII. - DEUXIEME APPROCHE DU  
PROBLEME I

Dans ce chapitre, nous présentons une deuxième méthode pour approcher au mieux la solution du problème I. On fait préalablement un changement de fonction qui permet de transformer le problème I en un problème de contrôle optimal dont l'état  $e$  satisfait à des conditions aux limites de Neumann homogènes ; puis, on applique au système d'évolution vérifié par  $e$  la méthode de Faedo-Galerkin, comme exposé au chapitre VII. Enfin, on exprime explicitement que la solution  $\vec{e}_m(t)$  du système semi-discrétisé est une fonction affine de la condition initiale  $\vec{e}_m(0)$ , ce qui réduit le problème de la minimisation de la fonctionnelle coût à la résolution d'un système linéaire.

VIII.1 - Transformation du problème I en un problème de contrôle optimal

Dans le système

$$(8.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} \\ \frac{\partial E}{\partial r} (0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} (R_0, t) = g_2(t) \\ E(R_0, t) = g_1(t) \end{array} \right.$$

on procède au changement de fonction

$$(8.2) \quad e(r, t) = E(r, t) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(t)$$

et l'on pose

$$h(t) = g_1(t) - \frac{R_0}{2} g_2(t)$$

On en déduit le système (8.3), équivalent au système (8.1), moyennant le changement de fonction (8.2)

$$(8.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{2}{\mu_0 R_0} g_2 - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta} \\ \frac{\partial}{\partial r} e(0,t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} e(R_0,t) = 0 \\ e(R_0,t) = h(t) \end{array} \right.$$

Le système (8.3), tout comme le système (8.1), est mal posé ; grâce au théorème de Mizohata énoncée au chapitre II, si une solution de (8.3) existe, elle est unique.

De la même façon qu'au chapitre IV, nous transformons ce problème en un problème de contrôle sur la condition initiale

(8.4) Minimiser

$$J_\varepsilon(\phi) = \int_0^T (e(R_0,t) - h(t))^2 dt + \varepsilon \int_0^{R_0} \phi^2(r) r dr$$

où  $\varepsilon$  est un nombre réel positif et  $\phi$  la condition initiale du système (8.4) que nous recherchons dans l'espace H, e satisfaisant au système (8.5)

$$(8.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{\eta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{2}{\mu_0 R_0} g_2(t) - \frac{r^2}{2R_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_2}{\eta} \\ (8.5.2) \quad \frac{\partial e}{\partial r}(0,t) = 0 \\ (8.5.3) \quad \frac{\partial e}{\partial r}(R_0,t) = 0 \\ (8.5.4) \quad e(r,0) = \phi(r) \end{array} \right.$$

dont nous avons montré au chapitre III l'existence et l'unicité de la solution.

Enfin, de la même façon qu'au chapitre IV, on montre que le minimum  $J_\varepsilon$  de  $J_\varepsilon$  converge vers  $E(r,0) - \frac{r^2}{2R_0} g_2(0)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

VIII.2 - Minimisation de la fonctionnelle } $\epsilon$

On pose maintenant le problème de contrôle (8.4), (8.5) sous la forme (8.6), (8.7) où l'état est solution du système semi-discretisé déduit de (8.5).

(8.6) Minimiser

$$J_{\epsilon}(\phi_m) = \int_0^T dt \left[ \sum_{k=0}^m e_{km}(t) w_k(R_0) - h(t) \right]^2 + \epsilon \int_0^{R_0} r dr \left[ \sum_{k=0}^m e_{km}(0) w_k(r) \right]^2$$

où  $\phi_m = \sum_{k=0}^m \phi_{km} w_k$ .

et où la famille de vecteurs  $\vec{e}_m(t) = (e_{0m}(t), e_{1m}(t), \dots, e_{mm}(t))$

vérifie le système

$$(8.7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (A_m(t) \vec{e}_m(t)) + \Lambda_m \vec{e}_m(t) = \vec{S}_{1m} g_2(t) - \frac{dS_{2m}}{dt}(t) \\ \vec{e}_m(0) = \vec{\phi}_m \end{cases}$$

$\vec{\phi}_m$  étant défini comme le vecteur de composantes  $(\phi_{0m}, \phi_{1m}, \dots, \phi_{mm})$

Le vecteur  $\vec{e}_m(t)$  étant une fonction affine de sa valeur initiale  $\vec{e}_m(0)$ ,

on pose

$$(8.8) \quad \vec{e}_m(t) = B_m(t) \vec{\phi}_m + \vec{K}_m(t)$$

où  $B_m(t)$  est une matrice  $(m, m)$

On déduit aisément de (8.7) et de (8.8) que la matrice  $B_m(t)$  et le vecteur  $\vec{K}_m(t)$  vérifient les systèmes suivants

$$(8.9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} A_m(t) B_m(t) + \Lambda_m B_m(t) = 0 \\ B_m(0) = I_m \end{cases}$$

où  $I_m$  est la matrice identité d'ordre  $m$

et

$$(8.10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} A_m(t) \vec{K}_m(t) + \Lambda_m \vec{K}_m(t) = \vec{S}_{1m} g_2(t) - \frac{d\vec{S}_{2m}}{dt}(t) \\ \vec{K}_m(0) = \vec{0} \end{cases}$$

Une fois les systèmes (8.9) et (8.10) résolus, il nous reste à déterminer le vecteur  $\vec{\phi}_m$ . Pour cela, on minimise la fonctionnelle  $J_\epsilon$  qui s'écrit

$$(8.11) \quad J_\epsilon(\vec{\phi}_m) = \int_0^T dt \left[ \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sum_{k=0}^m e_{jm}(t) - h(t) \right]^2 + \epsilon \sum_{k=0}^m e_{jm}^2(0)$$

Or, d'après la formule (8.8), si  $B_m(t)$  est la matrice  $[B_{jkm}(t)]$  et  $\vec{K}_m(t)$  et  $\vec{\phi}_m$  les vecteurs d'éléments  $K_{jm}(t)$  et  $\phi_{jm}$  ( $j = 0, \dots, m$ ), on a

$$(8.12) \quad e_{jm}(t) = \sum_{k=0}^m B_{jkm}(t) \phi_{km} + K_{jm}(t)$$

expression qu'on substitue dans (8.11) pour obtenir

$$J_\epsilon(\vec{\phi}_m) = \int_0^T dt \left[ \frac{\sqrt{2}}{R_0} \left( \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m B_{jkm}(t) \phi_{km} + \sum_{j=0}^m K_{jm}(t) \right) - h(t) \right]^2 + \epsilon \sum_{j=0}^m \phi_{jm}^2$$

Soit encore

$$J_\epsilon(\vec{\phi}_m) = \int_0^T dt \left[ \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m B_{jkm}(t) \phi_{km} - p_m(t) \right]^2 + \epsilon \sum_{j=0}^m \phi_{jm}^2$$

$$\text{où } p_m(t) = h(t) - \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sum_{j=0}^m K_{jm}(t)$$

On obtient enfin, en intervertissant l'ordre des sommations en  $j$  en  $k$  et en posant

$$d_{km}(t) = \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sum_{j=1}^m B_{jkm}(t) \quad k = 0, \dots, m$$

$$(8.13) \quad \int_{\varepsilon} (\vec{\phi}_m) = \int_0^T dt \left[ \sum_{k=0}^m d_{km}(t) \phi_{km} - p_m(t) \right]^2 + \sum_{j=0}^m \phi_{jm}^2$$

On exprime ici le fait que le minimum  $\vec{\phi}_{m\varepsilon}$  de  $\int_{\varepsilon}$  est le vecteur unique pour lequel le gradient de  $\int_{\varepsilon}$  s'annule, ce qui donne

$$(8.14) \quad \int_0^T dt \left[ \sum_{k=0}^m d_{km}(t) \phi_{km\varepsilon} - p_m(t) \right] d_{jm}(t) + \varepsilon \phi_{jm\varepsilon} = 0$$

pour  $j = 0, \dots, m$

Soit finalement le système linéaire suivant

$$(8.15) \quad \sum_{k=0}^m \left[ \int_0^T dt d_{jm}(t) d_{km}(t) \right] \phi_{km\varepsilon} + \varepsilon \phi_{jm\varepsilon} = \int_0^T dt p_m(t) d_{jm}(t)$$

pour  $j = 0, \dots, m$

qui admet une solution unique ; en effet

la matrice  $D_m = \left[ \int_0^T dt d_{jm}(t) d_{km}(t) \right]$  est semi-définie positive ; la

matrice  $D_m + I_{\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$  est donc définie positive et le système (8.15) est régulier.

Finalement, la minimisation de la fonctionnelle  $\int_{\varepsilon}$  se réduit donc à la résolution du système linéaire (8.15).

### VIII.3 - Conclusion

Le principal intérêt de cette nouvelle méthode, comparée à celle présentée au chapitre IV est le fait qu'elle nécessite un temps de calcul nettement moindre ; la première méthode nécessite un nombre minimal d'itérations égal à la dimension spatiale du système discrétisé et trois résolutions de systèmes d'évolution par itération. Ici, le nombre de systèmes d'évolution à résoudre numériquement est de l'ordre du nombre de termes du développement en séries de Bessel, qu'on peut prendre en général nettement inférieur au nombre de pas de discrétisation en espace par la méthode des différences finies.

IX. - ESSAIS NUMERIQUES POUR  
DIFFERENTS TYPES DE CAS TEST

IX.1 - Etude de deux cas test où l'on sait calculer la solution analytiquement

Présentation des cas test

Cas test 1 (équation de la chaleur)

$$(9.1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} \\ \frac{\partial E}{\partial r} (0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} (R_0, t) = g_2(t) \equiv \frac{j_0}{R_0} J_1(j_0) e^{-\left(\frac{j_0}{R_0}\right)^2 t} \\ E(R_0, t) = g_1(t) \equiv K \end{array} \right.$$

où l'on a pris  $K = 3$ ,  $T = .5$ ,  $R_0 = .5$  et  $j_0$  la plus petite racine de la fonction de Bessel  $J_0$ .

La solution en est  $E(r, t) = K - J_0 \left(\frac{j_0 r}{R_0}\right) e^{-\left(\frac{j_0}{R_0}\right)^2 t}$

et donc la valeur initiale s'écrit

$$u(r) = E(r, 0) = K - J_0 \left(j_0 \frac{r}{R_0}\right)$$

Cas test 2

$$(9.2) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} \\ \frac{\partial E}{\partial r} (0, t) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} (R_0, t) = g_2(t) = -\frac{2}{R_0} e^{-t} \\ E(R_0, t) = g_1(t) = -\frac{2}{R_0} e^{-t} \end{array} \right.$$

avec  $\eta(r, t) = \frac{1}{4} (\gamma R_0^2 e^t - r^2)$

On a pris de nouveau  $T = .5$  et  $R_0 = .5$

La solution de (9.2) s'écrit  $E(r,t) = 3 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 e^{-t}$

et on trouve donc comme condition initiale

$$u(r) = E(r,0) = 3 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2$$

Pour ces deux cas tests, on a utilisé successivement les deux méthodes de résolution.

Les fonctions initiales  $u(r)$  trouvées à l'aide de la première méthode sont portées sur la figure (9.1) (cas test 1) et la figure (9.2) (cas test 2) et comparées avec les solutions exactes correspondantes. Dans l'espace, on a pris soit 30, soit 50 pas de discrétisation, c'est-à-dire  $\Delta r = .0167$  et  $\Delta r = 0.0100$  respectivement. Dans le temps, on a pris 90 pas, c'est-à-dire  $\Delta t = .0055$  et on a discrétisé les équations par la méthode de Crank-Nicolson.

Pour la minimisation, on a employé la méthode du gradient conjugué ; toutefois, au lieu de laisser le processus se poursuivre, nous redémarrons la méthode du gradient conjugué par un pas de gradient simple à chaque fois que la fonctionnelle à minimiser est supérieure à ce qu'elle était à l'itération précédente ; le nombre de pas de descente qu'on effectue est pris égal à la dimension spatiale de l'espace discrétisé (30 ou 50 ici). Une explication du fait qu'on n'obtient pas une décroissance régulière de la fonctionnelle est l'erreur commise sur le calcul des coefficients  $\alpha_k$  qui déterminent la position du minimum dans les directions de descente successives ; l'erreur provient d'une part de l'erreur sur la résolution des systèmes d'évolution, d'autre part de l'évaluation des intégrales en espace et en temps par la méthode des trapèzes, erreurs de l'ordre de  $\Delta r^2$  et de  $\Delta t^2$ .

Pour le cas test 1, quand on a diminué le pas en espace, l'erreur sur la solution a diminué de façon beaucoup plus appréciable pour des valeurs du rayon proches de  $R_0$  que pour des valeurs presque nulles de celui-ci ; une explication en est le poids en  $r$   $dr$  accordé aux points du segment  $[0, R_0]$ . La fonctionnelle  $J_\epsilon$  a décréu notablement plus vite pour un pas d'espace plus petit (figure (9.3)).

On a aussi traité le cas test 1 par la méthode de Fourier, en prenant 20 pas en temps et 4 termes pour les développements en séries de fonctions de Bessel (Figure (9.4)).

Le cas test 2 (figure (9.5)) a été traité avec 20 pas en temps. On a utilisé 12 termes pour le développement en série de Fourier. Tous ces essais ont été effectués avec  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

## IX.2 - Cas test ALCATOR

ALCATOR est un tokamak américain. Le rayon médian de son tore est de 54 cm, celui de sa section cylindrique de 9.5 cm. Il est à peu près deux fois plus petit que TFR, le tokamak français.

Dans le cas test ALCATOR, nous travaillons sur des fonctions  $\eta(r,t)$ ,  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  réalistes. Les données  $\eta(r,t)$  et  $g_2(t)$  viennent directement de l'expérience. La fonction  $g_1(t)$  a été calculée de façon à être compatible avec  $\eta(r,t)$ ,  $g_2(t)$  et avec une fonction initiale  $\tilde{u}(r)$ , choisies à l'aide de considérations physiques (Boujot-Meurant-Saussais [4]). Notre programme calcule, comme précédemment,  $u(r)$  à partir de  $\eta(r,t)$ ,  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  et nous pouvons donc comparer notre solution  $u(r)$  à  $\tilde{u}(r)$ .

Nous avons fait nos calculs avec 26 points de discrétisation d'espace, soit  $\Delta r = .38$  cm. Pour la discrétisation en temps, on a utilisé la méthode de Crank-Nicolson, le nombre de pas variant de 10 à 72, suivant la valeur de T. Nous avons étudié en particulier les changements dans les résultats numériques quand on varie les valeurs des deux paramètres  $\varepsilon$  et T et quand on perturbe la fonction  $\eta$  donnée.

### (i) Le paramètre $\varepsilon$

Dans les calculs, il faut s'assurer de choisir  $\varepsilon$  suffisamment petit de façon que le gradient du terme  $\varepsilon \int_0^{R_0} v^2(r)r dr$  reste petit devant celui de la fonctionnelle qu'on veut réellement minimiser, c'est-à-dire  $\int^T (F(R_0,t) - g_1(t))^2 dt$  ; si l'on choisit  $\varepsilon$  trop grand, c'est le

premier terme qui est minimisé. Pour la première méthode, on a pris en général

$$\varepsilon \sim 10^{-5} \frac{\int_0^T (E(R_0, t) - g_1(t))^2 dt}{\int_0^{R_0} v^2(r) r dr}$$

$\varepsilon$  a donc varié à chaque itération et s'amenuise au fur et à mesure de la convergence. Pour la méthode de Fourier, on a choisi  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Pour les deux méthodes, aussi on a essayé de prendre  $\varepsilon = 0$ . Comme on le voit sur la figure (9.6), le changement de résultats est négligeable pour la première méthode ; une cause pourrait être les erreurs commises sur l'évaluation du gradient qui donneraient une certaine coercivité au problème discrétisé. Pour la méthode de Fourier, où nous avons calculé les produits scalaires de façon plus précise  $\varepsilon = 0$  avec un nombre restreints de termes dans les développements en séries mais lorsque l'on augmente le nombre de termes (par exemple pour  $m = 17$ ), le déterminant de la matrice à inverser dans le système (8.15) devient quasi-nul. Un problème encore non résolu est la détermination d'une valeur optimale pour  $\varepsilon$ .

### (ii) Le "temps d'observation" T

Nous avons étudié l'effet du choix de T. En pratique, il s'avère que le temps T doit avoir une valeur minimum  $T_{\min}$  pour qu'on obtienne de bons résultats. Quand on prend T trop petit, le champ initial  $u(r)$  calculé est faux dans le centre du cylindre. Quand on augmente T, les valeurs de  $u(r)$  s'améliorent progressivement vers le centre ; les courbes de la figure (9.7) ont été obtenus par la première méthode.

Cet effet s'explique comme suit. Une perturbation de la fonction initiale  $\dot{u}(r)$  près du centre  $r = 0$  est perçue sur le cercle  $\partial\Omega$  sous forme de variations des fonctions  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  seulement après le temps  $T_{\min}$  dont elle a besoin pour se propager sur la distance  $R_0$ . On peut estimer l'ordre de grandeur de  $T_{\min}$  en considérant l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \alpha \left( \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \right)$$

avec, pour condition initiale  $E(r,0) = \delta(r)$  représentant un "signal" partant du centre à l'instant  $t = 0$ . La solution s'écrit

$$(9.3) \quad E(r,t) = \frac{1}{4\pi \alpha t} e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}}$$

Pour  $r = R_0$  fixé, elle est nulle pour  $t = 0$  puis augmente, atteint un maximum et s'annule de nouveau quand  $t$  tend vers l'infini. Le maximum correspond au temps de "passage du signal" que nous identifions à  $T_{\min}$ . De (9.3), on déduit

$$T_{\min} \approx C \frac{R_0^2}{\alpha}$$

où  $C$  est une constante de l'ordre de 1. Dans notre cas  $\alpha$  doit être évidemment remplacée par une valeur moyennée de  $\eta(r,t)/\mu_0$ .

### (iii) perturbation de la fonction $\eta$ donnée

Dans le TFR, les valeurs du champ sur le bord et du courant total sont mesurées avec une grande exactitude ; on connaît donc de façon assez précise celles de  $g_1(t)$  et de  $g_2(t)$ . Par contre, les valeurs de  $\eta(r,t)$  sont entachées de plus de 20% d'erreur. Il est physiquement important de savoir comment l'incertitude en  $\eta(r,t)$  se traduit en incertitude sur le champ  $E(r,t)$ . Pour investiguer cette question, nous avons perturbé ici  $\eta(r,t)$  de 10% suivant la formule

$$\eta_{\text{pert}}(r,t) = \eta(r,t) \left( 1 + \frac{1}{10} \sin \left[ \frac{1}{2} \left( 52 \frac{r}{R_0} - 1 \right) \pi \right] \right)$$

La solution trouvée présente également des perturbations sinusoïdales de l'ordre de 10% (figure (9.8)) ; ces calculs ont été effectués à l'aide de la première méthode.

X. - TRAITEMENT DES DONNEES  
EXPERIMENTALES POUR LE TFR

Le TFR (TOKAMAK de Fontenay-aux-Roses) a un rayon médian  $R_1$  de 98 cm et une section cylindrique  $R_0$  de 20 cm. On dispose de mesures expérimentales pour les données suivantes : le courant total  $I$  dans le plasma, la tension au bord  $V$ , la température  $\theta$  et la densité électronique  $n_e$  ; à partir de ces grandeurs, un premier travail numérique est la détermination des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  et de la résistivité électrique du plasma . Ensuite, on utilise l'une ou l'autre des méthodes précédemment exposées pour estimer au mieux le champ électrique  $E$  dans le plasma.

X.1 - Détermination des conditions au bord

a ) Calcul de la dérivée du champ au bord  $g_2(t)$

La fonction  $g_2(t)$  est calculée à partir de la donnée du courant total  $I(t)$  dans le plasma. Sur la figure (10.1), nous avons représenté le courant correspondant à l'expérience n° 2086, du 22 Mai 1975. On a

$$(10.1) \quad g_2(t) = -\frac{\mu_0}{2\pi R_0} \frac{dI}{dt}$$

où  $\frac{dI}{dt}$  est exprimé en décaampères par seconde,  $g_2$  en u.e.m (unité électromagnétique),  $R_0$  en centimètres et avec  $\mu_0 = 4\pi$ .

On emploiera ici la formule

$$(10.2) \quad g_2(t) = \frac{10^5 \mu_0}{2\pi R_0} \frac{dI}{dt}$$

où  $\frac{dI}{dt}$  est exprimé en kiloampères par milliseconde.

b ) Calcul du champ au bord  $g_1(t)$

On utilise la donnée de la tension par tour  $V(t)$ , représentée pour l'expérience du 22 Mai 1975 sur la figure (10.2). On a

$$(10.3) \quad E(R_0, t) = \frac{10^8}{2\pi R_1} V(t) - 2 \text{ Log } \frac{b}{R_0} \frac{dI}{dt}$$

où  $\text{Log} \frac{b}{R_0} = .3$ ,  $R_1$  est exprimé en centimètres,  $V$  en volts,

$\frac{dI}{dt}$  en décaampères par seconde et  $E$  en u.e.m.

On écrira finalement en utilisant (10.2)

$$(10.4) \quad E(R_0, t) = \frac{10^8}{2\pi R_1} V(t) - 6 g_2(t)$$

## X.2 - Détermination de la résistivité électrique $\eta$

On utilise la formule donnée dans Spitzer [18]

$$\eta(r, t) = \eta_0 \Theta^{-3/2} \text{Log} \Lambda E_\epsilon(r) Z.$$

où

i)  $\eta_0$  est la conductivité électrique

$$\eta_0 = .307 \cdot 10^7$$

ii) le logarithme coulombien  $\text{Log} \Lambda$  est donné par

Si  $\Theta \leq 50$  électrons-volts

$$\text{Log} \Lambda = 23.4 - 1.15 \text{Log}_{10} n_e + 3.45 \text{Log}_{10} \Theta$$

et si  $\Theta > 50$  électrons-volts

$$\text{Log} \Lambda = 25.3 - 1.15 \text{Log}_{10} n_e + 2.3 \text{Log}_{10} \Theta$$

iii)  $E_3(r)$  est la correction de Rosenbluth due aux particules piégées

$$E_3(r) = \left( 1. - 1.95 \sqrt{\frac{r}{R_1}} + .95 \frac{r}{R_1} \right)^{-1}$$

iv) Nous évaluerons  $Z$ , fonction mal connue relative aux impuretés en négligeant la dépendance de  $Z$  en  $r$ . On a

$$I(t) = 2\pi r j(r, t) dr = 2\pi \int_0^R \frac{E(r, t)}{\eta_0 \Theta^{-3/2} \text{Log} \Lambda E_3(r) Z(r)} r dr$$

Soit

$$(10.5) \quad I(t) = \frac{2\pi}{\eta_0 Z(t)} \int_0^{R_0} \frac{E(r,t)}{\theta^{-3/2} \text{Log } \Lambda E_3(r)} r \, dr$$

Une première estimation de  $Z$  est obtenue en assimilant  $E(r,t)$  à la fonction, constante en  $r$ ,  $g_1(t)$ . Alors, on obtient

$$Z(t) = \frac{2\pi g_1(t)}{\eta_0 I(t)} \int_0^{R_0} \frac{r \, dr \, \theta^{3/2}}{\text{Log } \Lambda E_3}$$

Pour une meilleure estimation de  $Z$ , on peut, à l'aide d'une première évaluation du champ électrique  $E$ , recalculer  $Z$  à l'aide de la formule (10.5).

### X.3 - Résultats obtenus

Pour estimer la qualité des résultats, on ne peut plus, ici comparer le champ électrique calculé par le programme au champ électrique réel, qui est inconnu. Aussi, le critère de validité que nous choisirons sera la différence

$$E(R_0, t) - g_1(t)$$

prise point par point ; en fait, on pourrait prendre également l'intégrale

$$\int_0^T (E(R_0, t) - g_1(t))^2 \, dt$$

$g_1(t)$  étant ici la condition au bord imposée et  $E(R_0, t)$  la fonction calculée par le programme.

Pour l'expérience du 22 Mai 1975, on a représenté les courbes obtenues par la première méthode (figure (10.3)), avec une discrétisation implicite en temps (la méthode de Crank-Nicolson donnant des oscillations inacceptables en temps et en espace) et par la méthode de Fourier (figure (10.4)) ; les résultats semblent acceptables à partir de 70 ms, ce qui correspond au moment où le courant est devenu stationnaire et les grandeurs physiques utilisées connues avec une plus grande précision ; avant 70 ms, le champ électrique  $E(R_0, t)$  s'écarte davantage de  $g_1(t)$  tandis que la

courbe  $E(r, t_i)$  à un instant  $t_i$  donné sont oscillantes.

Sur la figure (10.5), on a représenté les fonctions  $g_1(t)$  et  $E(Ro, t)$  pour l'expérience du 14 Mai 1975.

Pour expliquer les oscillations et l'erreur obtenue, il semble que l'on doive mettre en cause la compatibilité des données  $\eta$ ,  $g_1$  et  $g_2$ ; en particulier,  $\eta$  a été évalué à l'aide de la température donnée en trop peu de points auxquels, de plus, les mesures physiques sont très entachées d'erreurs. Nous avons du interpoler en temps des courbes, en n'en connaissant que trois points.

Notre programme, par ailleurs, peut servir à "mesurer" l'incompatibilité des données; l'intégrale

$$\int_0^T (E(Ro, t) - g_1(t))^2 dt$$

est d'autant plus élevée que les données sont incompatibles; on peut, en particulier, prendre comme référence la valeur de cette intégrale pour un cas test que nous avons construit de façon à ce que les données choisies s'écartent le moins possible des grandeurs expérimentales.

#### X.4 - Cas test réaliste

Dans ce cas test, nous conservons les valeurs des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  déduites de l'expérience mais construisons une fonction  $\eta$  de telle façon qu'elle soit compatible avec  $g_1$  et  $g_2$ . Pour cela, on choisit arbitrairement un champ électrique  $E$ , en lui imposant simplement qu'il vérifie les conditions de bord  $g_1$  et  $g_2$ . On prend ici

$$E(r, t) = \frac{r^2}{2Ro} g_2(t) + (g_1(t) - \frac{Ro}{2} g_2(t)) u(r, t) \quad (10.6)$$

$$u(r, t) = 1 - A e^{-B \frac{t}{T}} \left( 1 - \left( \frac{r}{Ro} \right)^2 \right)^q$$

$A$ ,  $B$  et  $q$  étant des paramètres que nous fixerons par la suite de telle façon que

$B$  soit positif

$q \geq 2$

On a donc

$$u(Ro, t) = 1 \quad \text{et en conséquence} \quad E(Ro, t) = g_1(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(Ro, t) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial E}{\partial r}(Ro, t) = g_2(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \frac{\partial E}{\partial r}(0, t) = 0$$

On va maintenant calculer  $\eta$  de telle façon que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\eta} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2}{\mu_0 Ro} g_2(t) \\ &+ \frac{4Aq}{\mu_0 Ro^2} (g_1(t) - \frac{Ro}{2} g_2(t)) e^{-B \frac{t}{T}} (1 - (\frac{r}{Ro})^2)^{q-2} (1 - q(\frac{r}{Ro})^2) \end{aligned}$$

$$\text{or } g_2(t) = \frac{\mu_0}{2\eta Ro} \frac{dI}{dt}$$

On trouve finalement

$$(10.7) \quad \frac{E(r, t)}{\eta(r, t)} = \frac{1}{\eta Ro^2} \frac{dI}{dt} + \frac{4Aq}{\mu_0 Ro^2} (1 - (\frac{r}{Ro})^2)^{q-2} (1 - q(\frac{r}{Ro})^2)$$

$$\int_0^T (g_1(t) - \frac{Ro}{2} g_2(t)) e^{-B \frac{t}{T}} dt + k(r)$$

où  $k$  est une fonction arbitraire de  $r$ .

La fonction  $\eta$  est le rapport des expressions (10.6) et (10.7). Nous devons lui imposer d'être strictement positive et choisir les quantités arbitraires  $A$ ,  $B$ ,  $q$  et  $k(r)$  de façon à ce que cette condition soit réalisée.

Pour les essais numériques, nous avons pris

$$A = .1 \quad B = 5 \quad q = 3 \quad \text{et } k \equiv 0$$

et comparé le champ initial trouvé par les deux méthodes à la solution analytique

$$E(r, 0) = \frac{r^2}{2Ro} g_2(0) + (g_1(0) - \frac{Ro}{2} g_2(0) (1 - .1(1 - (\frac{r}{Ro})^2)^3)$$

Sur la figure (10.6), on a tracé  $E(r,0)$  et la solution trouvée par la première méthode, avec une discrétisation de Crank-Nicolson en temps. On a utilisé 50 pas d'espace ( $\Delta r = .4\text{cm}$ ) et 150 pas en temps ( $\Delta t = 1\text{ms}$ ) ; l'erreur maximale obtenue en un point est inférieure à 2%.

Sur la figure (10.7), on a tracé aussi  $E(r,0)$  et la solution trouvée par la méthode de développements en séries de Fourier ; on a pris 10 termes pour les développements et 150 pas en temps de 1ms. L'erreur maximale est en  $r = 0$  et de l'ordre de 4%.

#### X.5 - Conclusion

Une conclusion nous paraît être la validité des deux méthodes de résolution numérique que nous avons présentées ; pour tous les cas tests que nous avons exécutés, les résultats calculés ne sont pas entachés de plus de 5 à 6 % d'erreur ponctuellement et cette erreur peut très certainement être diminuée par la réduction des pas de discrétisation et l'augmentation du nombre de termes dans la méthode de Fourier.

Il semble donc qu'on puisse espérer obtenir des résultats satisfaisants pour des jeux de données déduites de l'expérience lorsque l'on disposera de grandeurs mesurées de façon plus précise et de davantage de points de mesure sur le nouveau modèle de TOKOMAK construit en ce moment à Fontenay-aux-Roses.

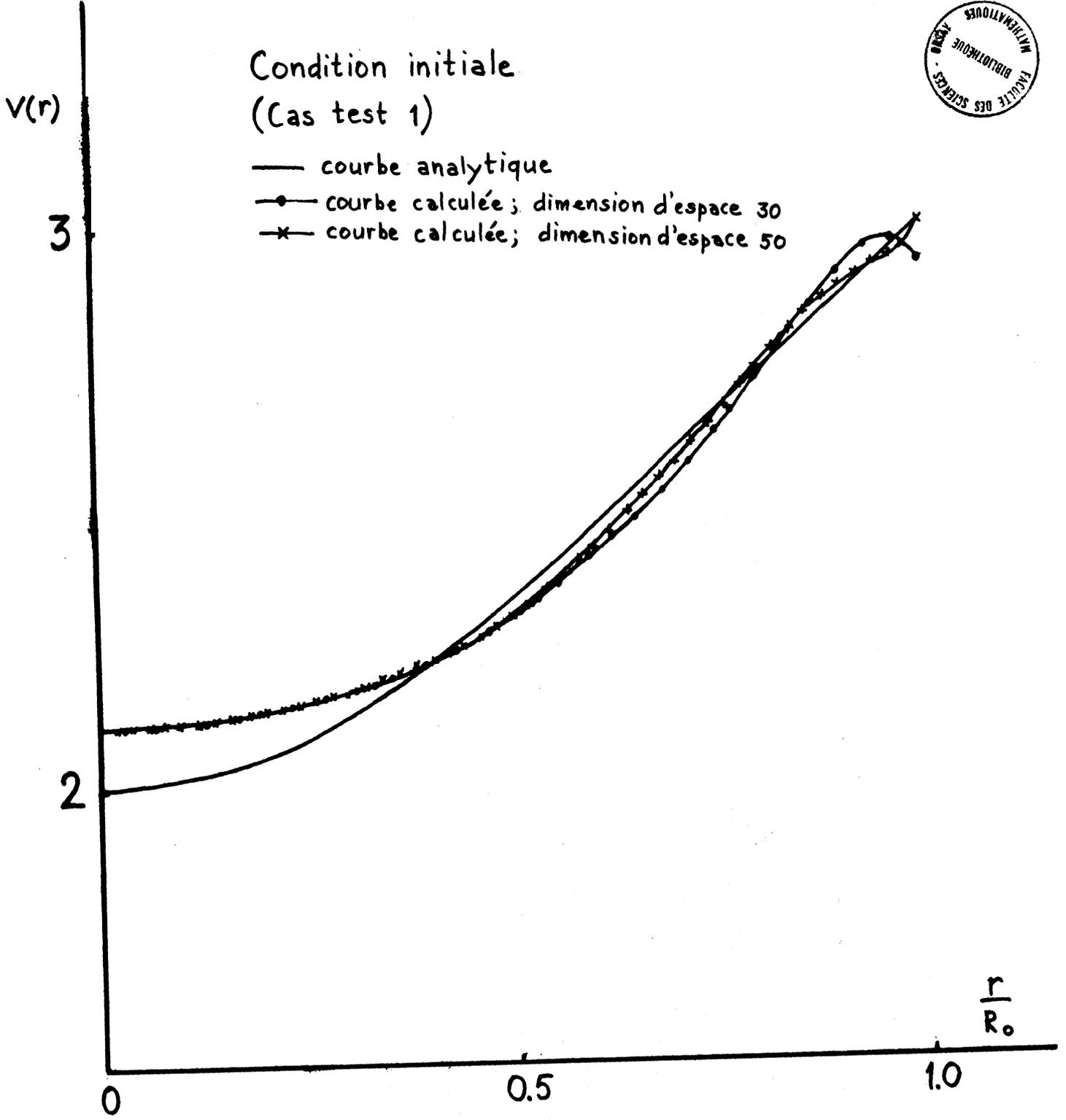


FIGURE 9-1

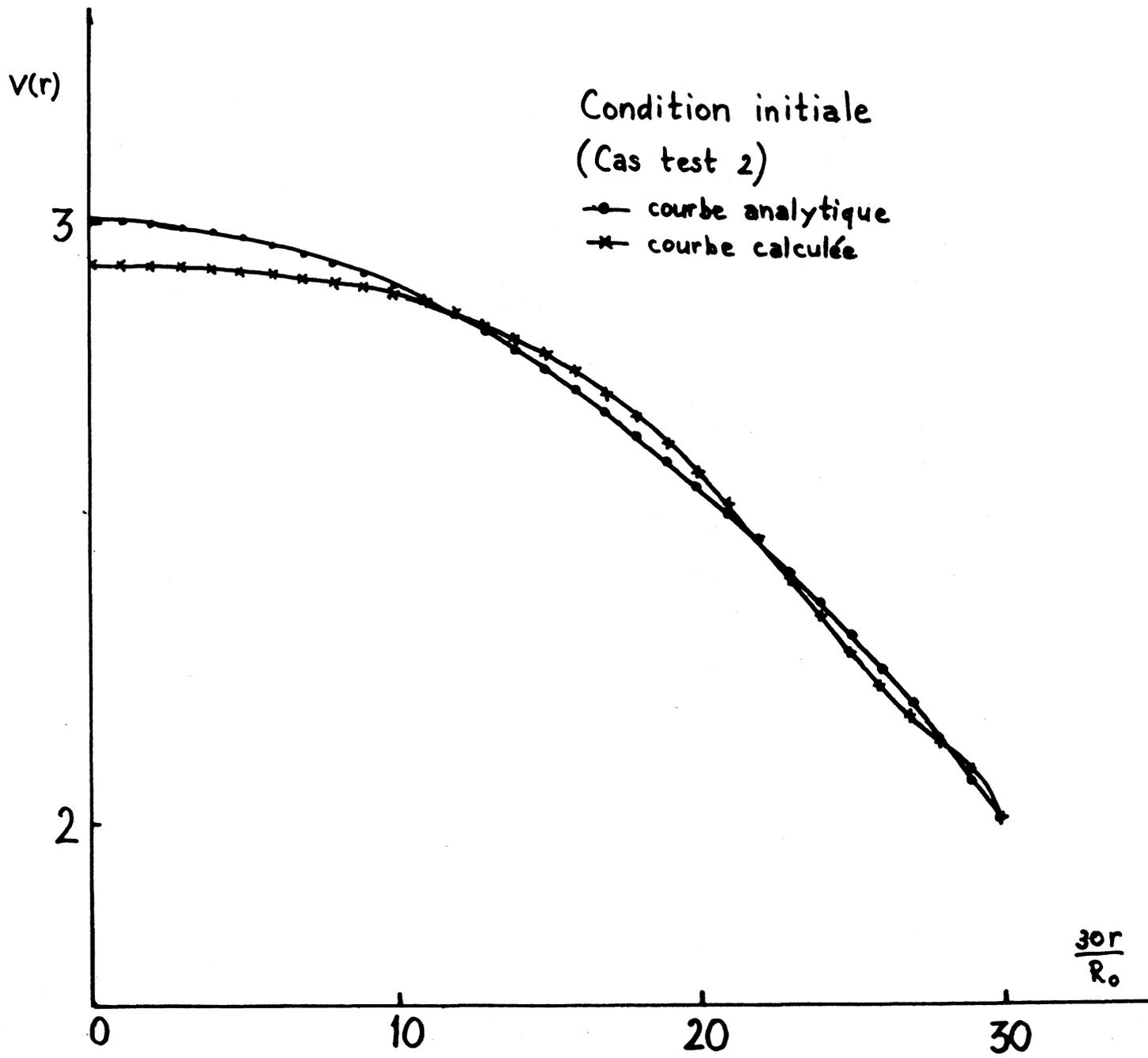


FIGURE 9-2

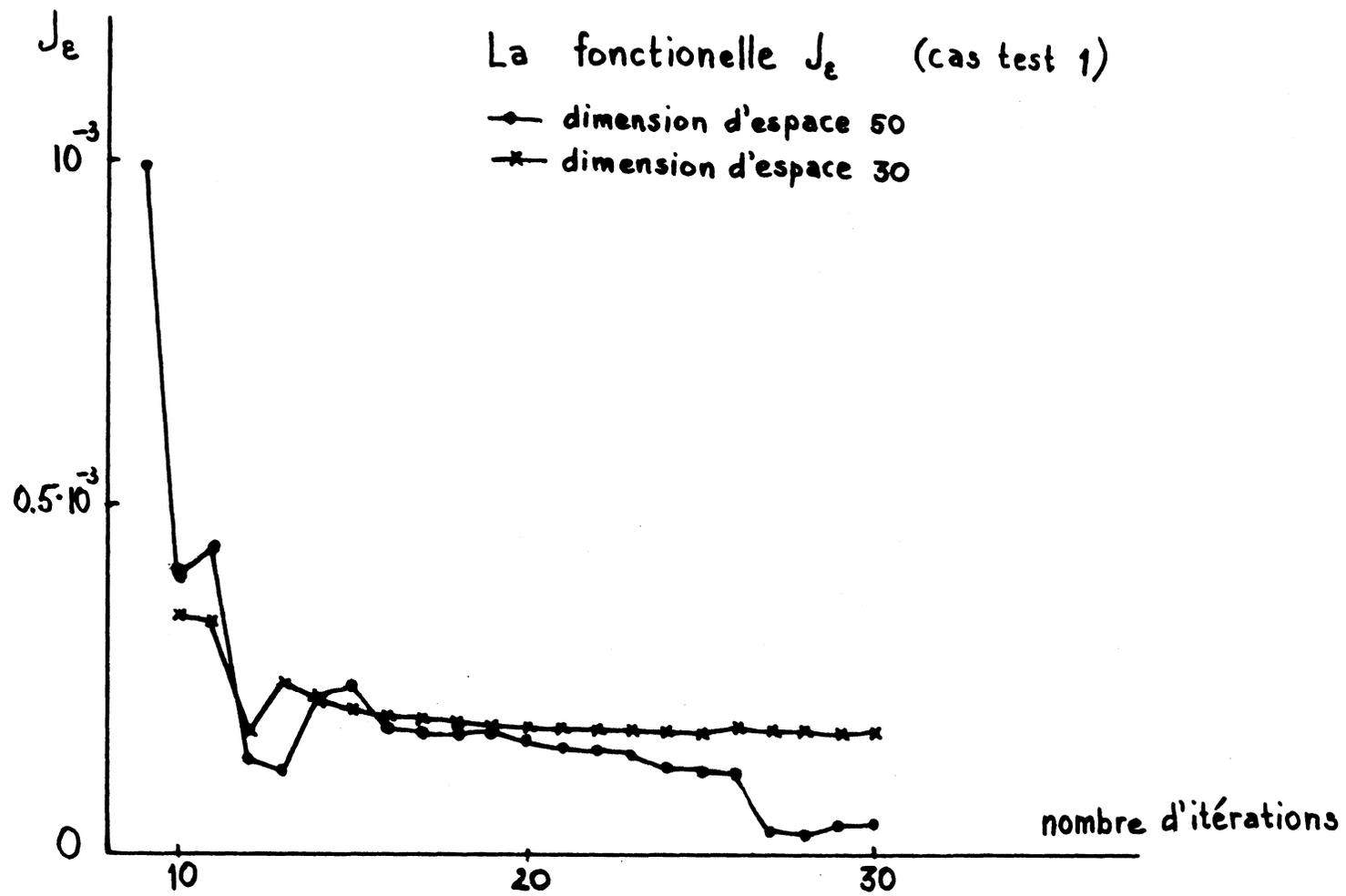


FIGURE 9-3

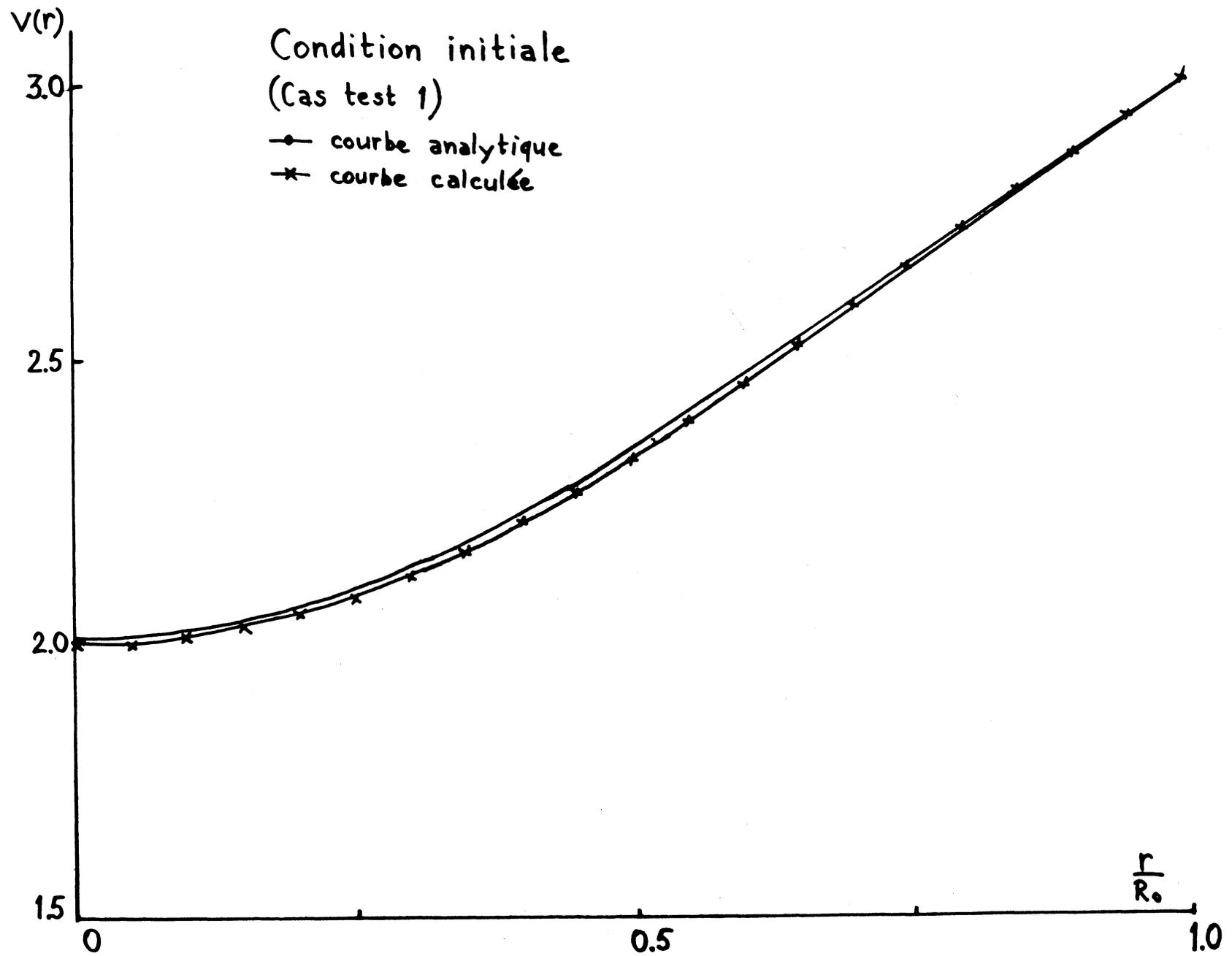


FIGURE 9-4

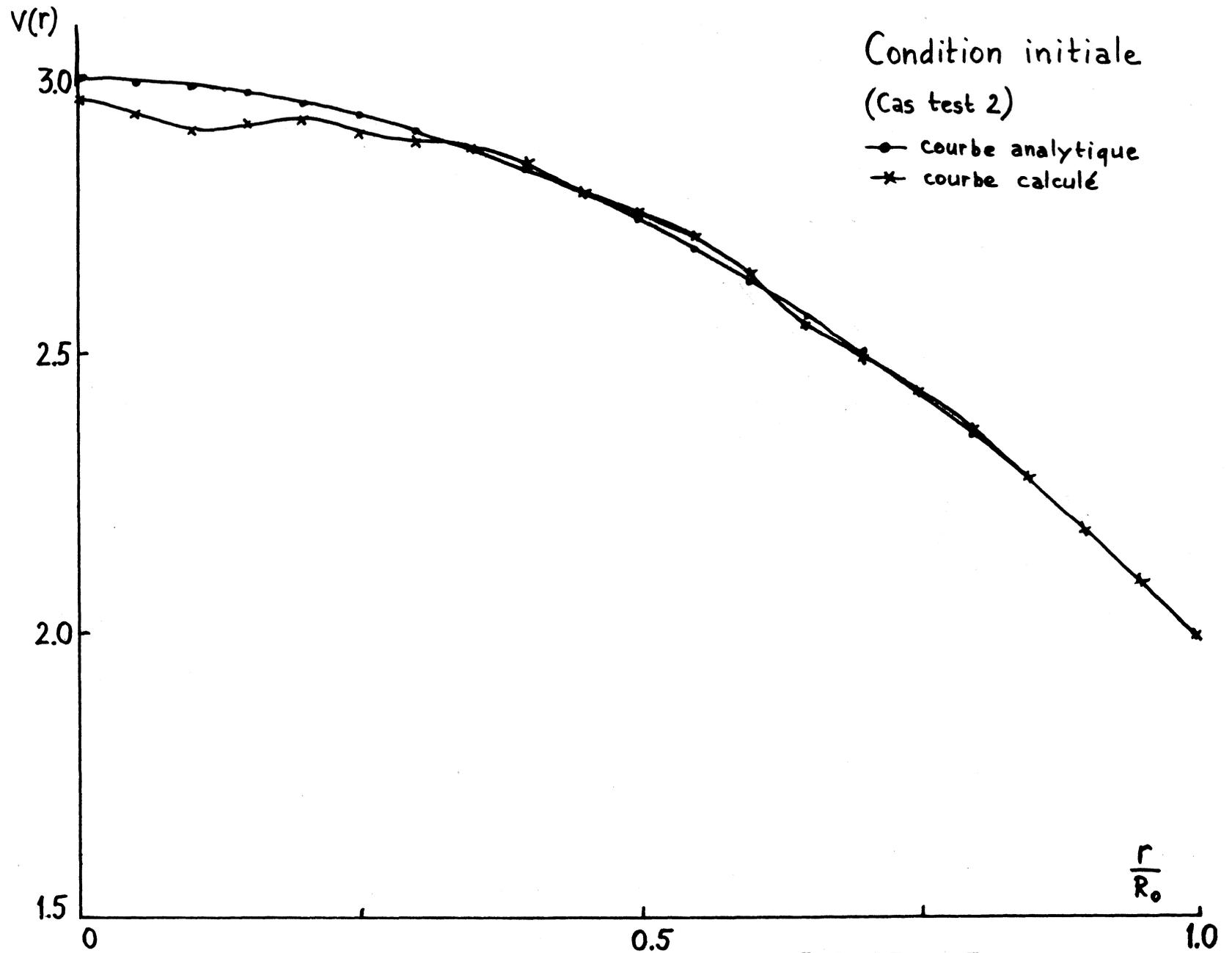


FIGURE 9-5

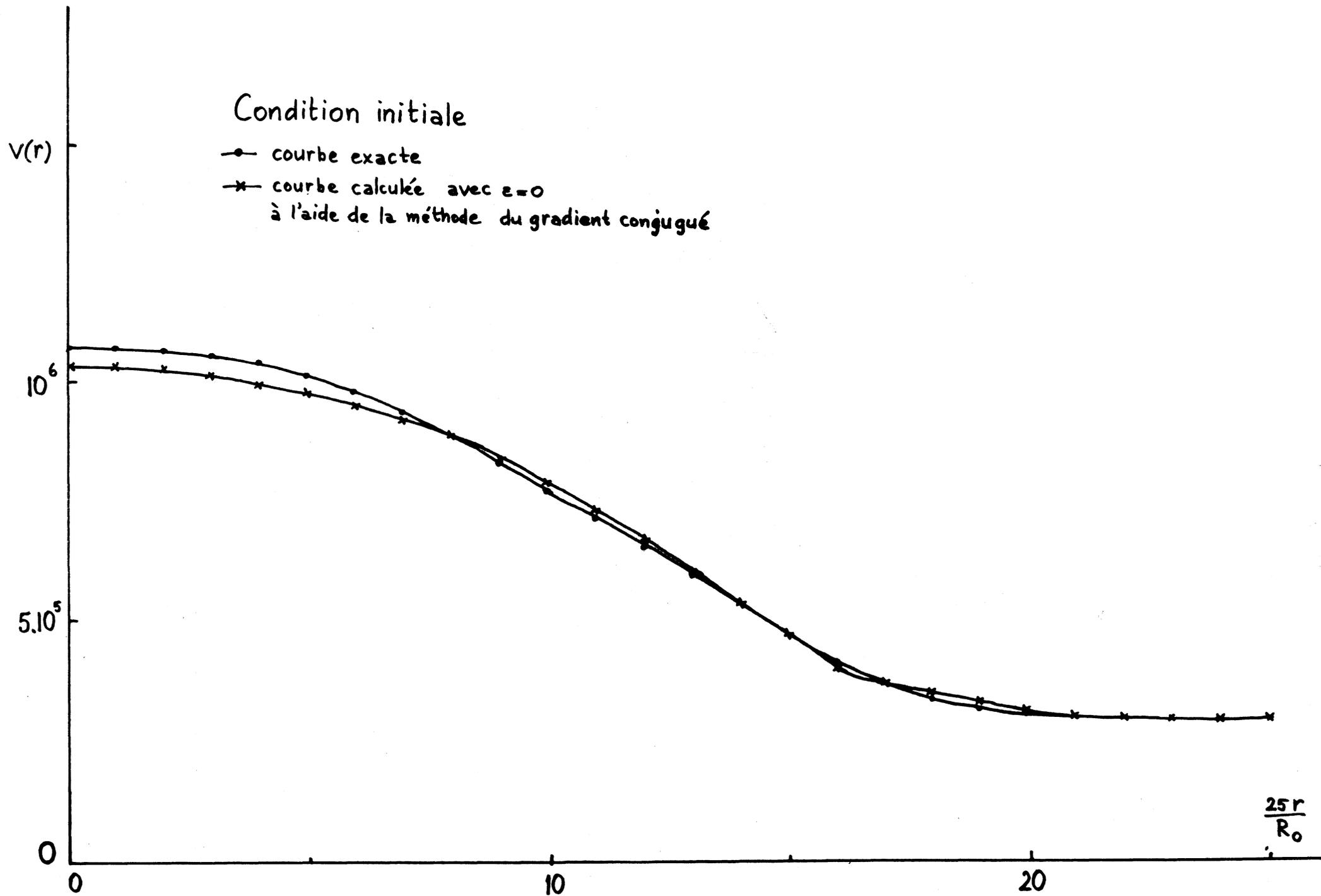


FIGURE 9-6

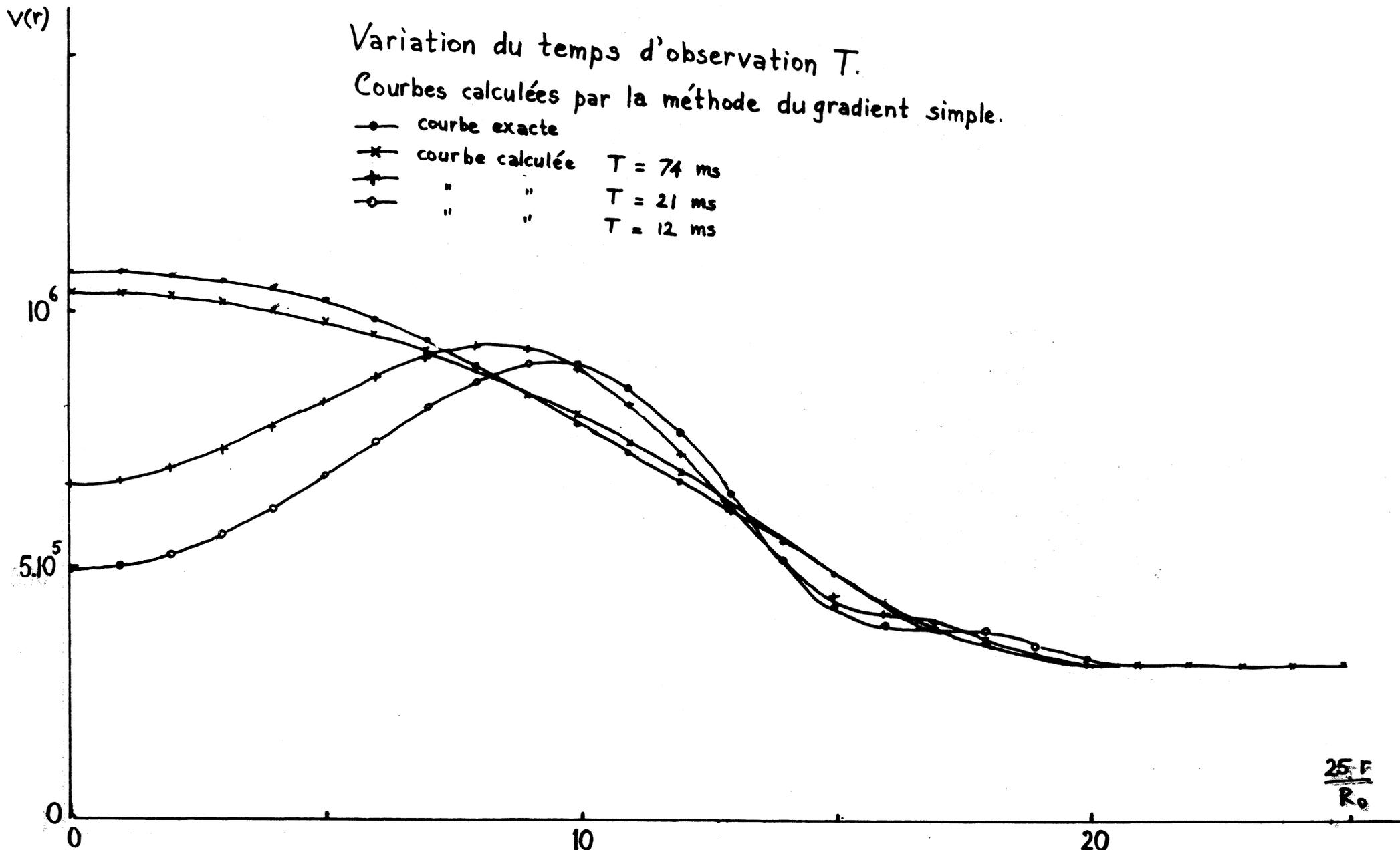


FIGURE 9-7

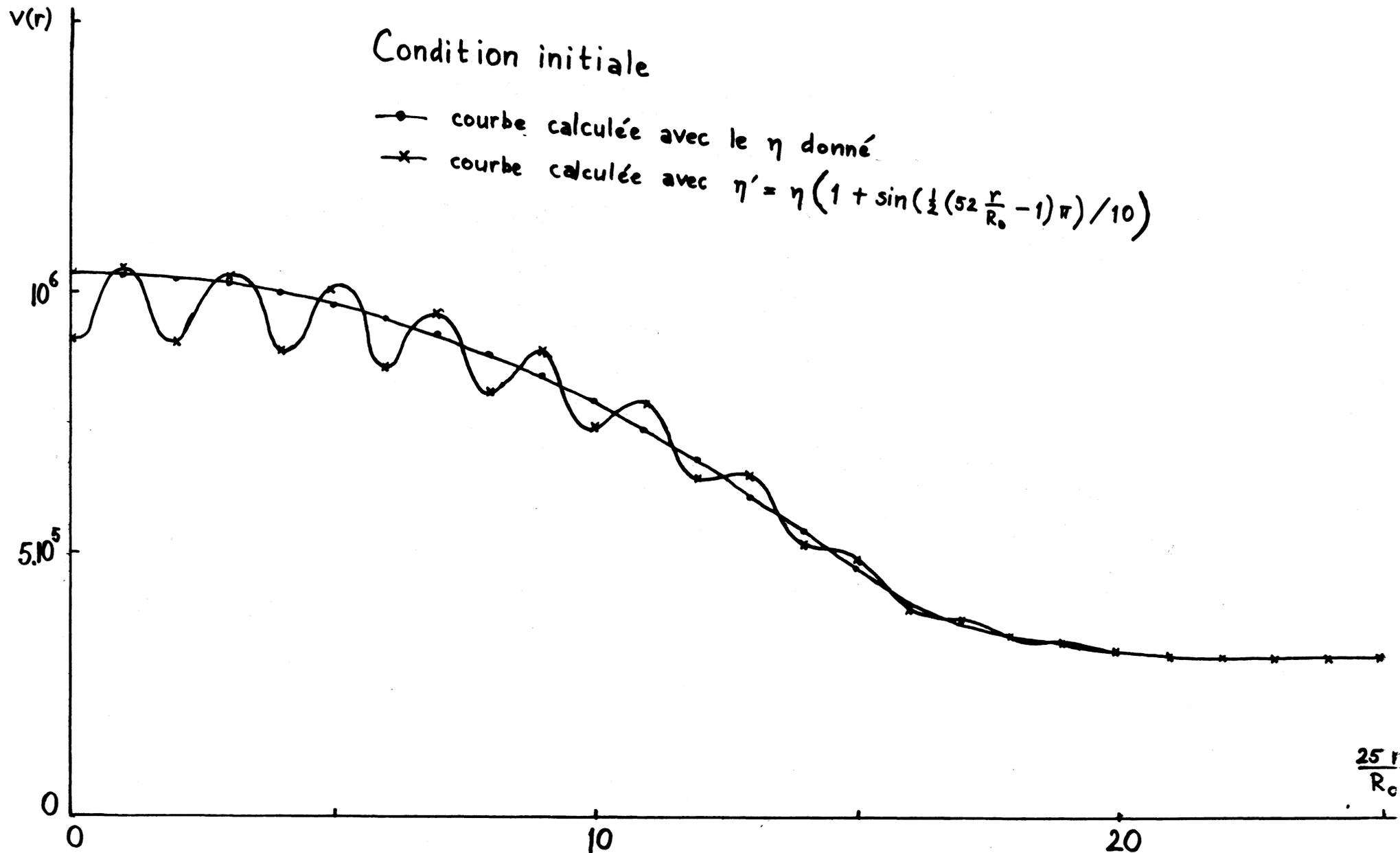


FIGURE 9-8

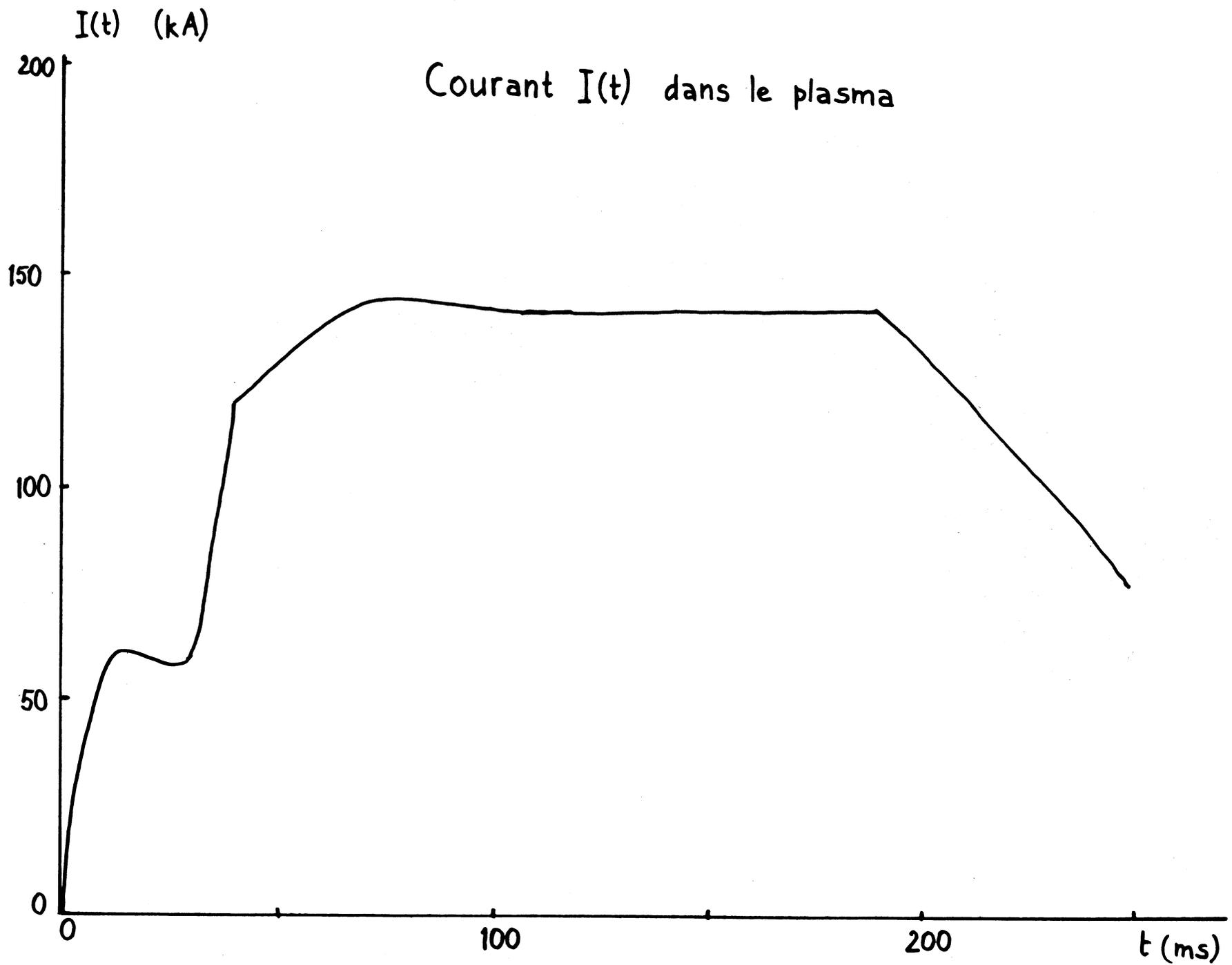


FIGURE 10-1

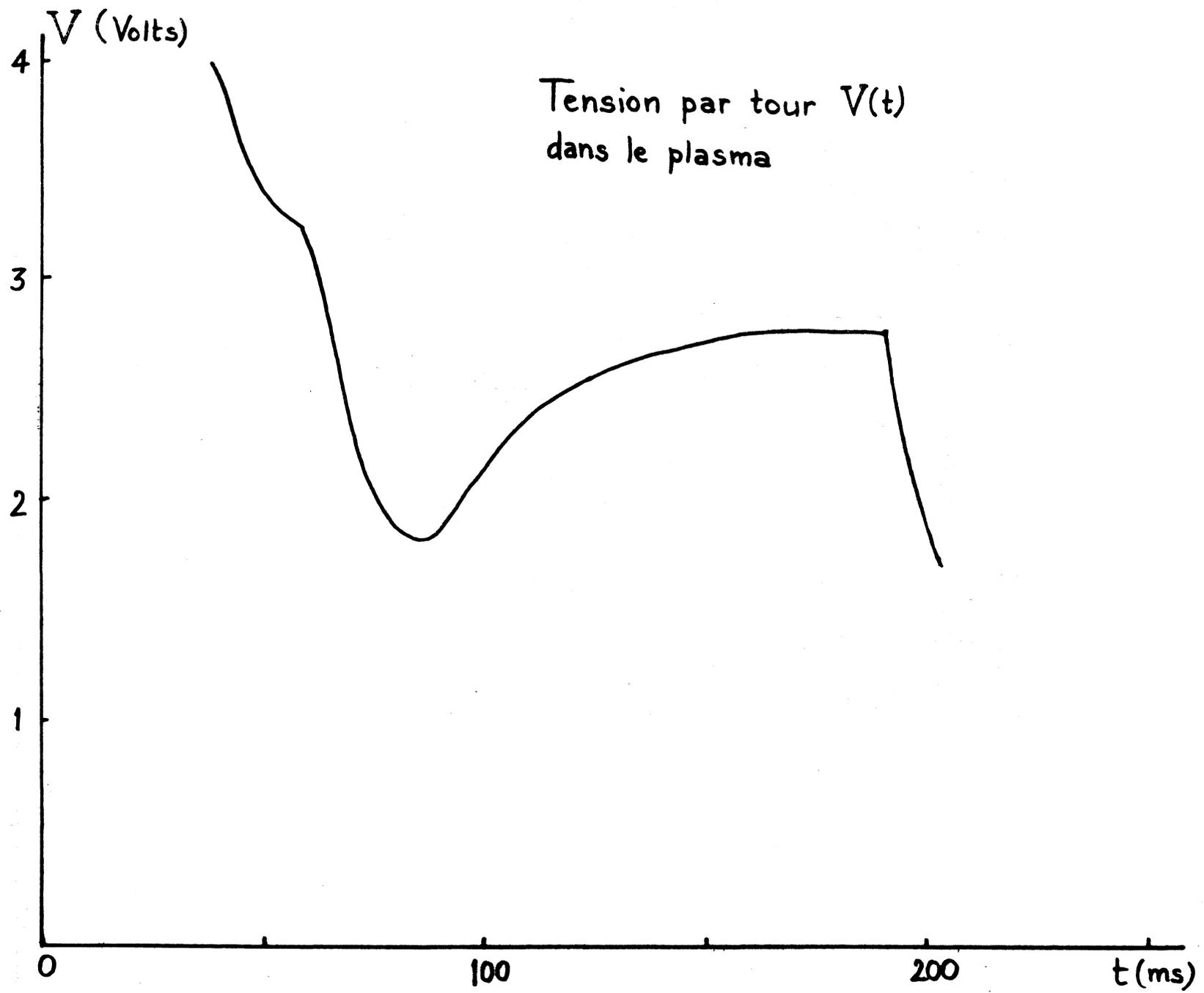


FIGURE 10-2

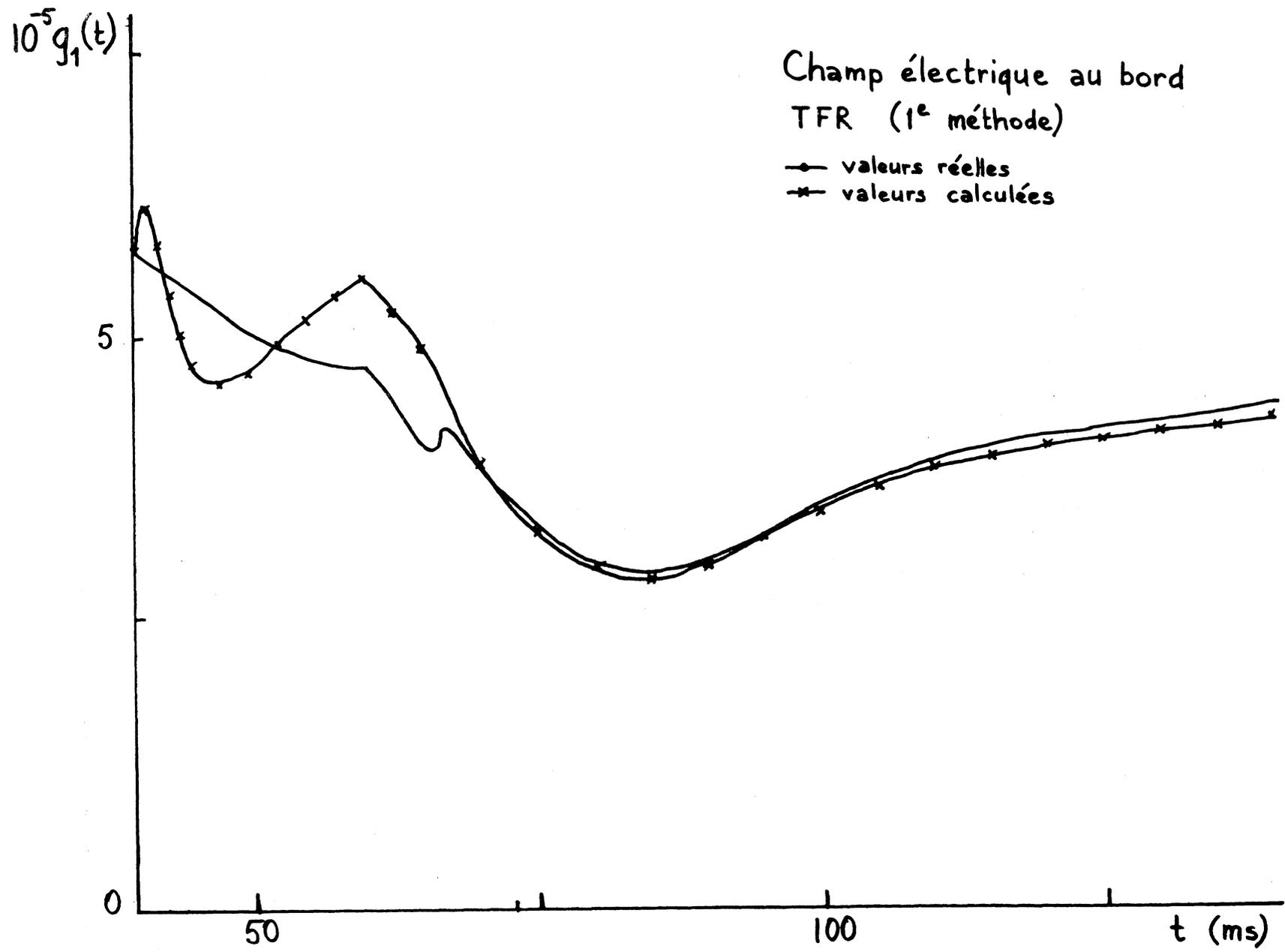


FIGURE 10-3

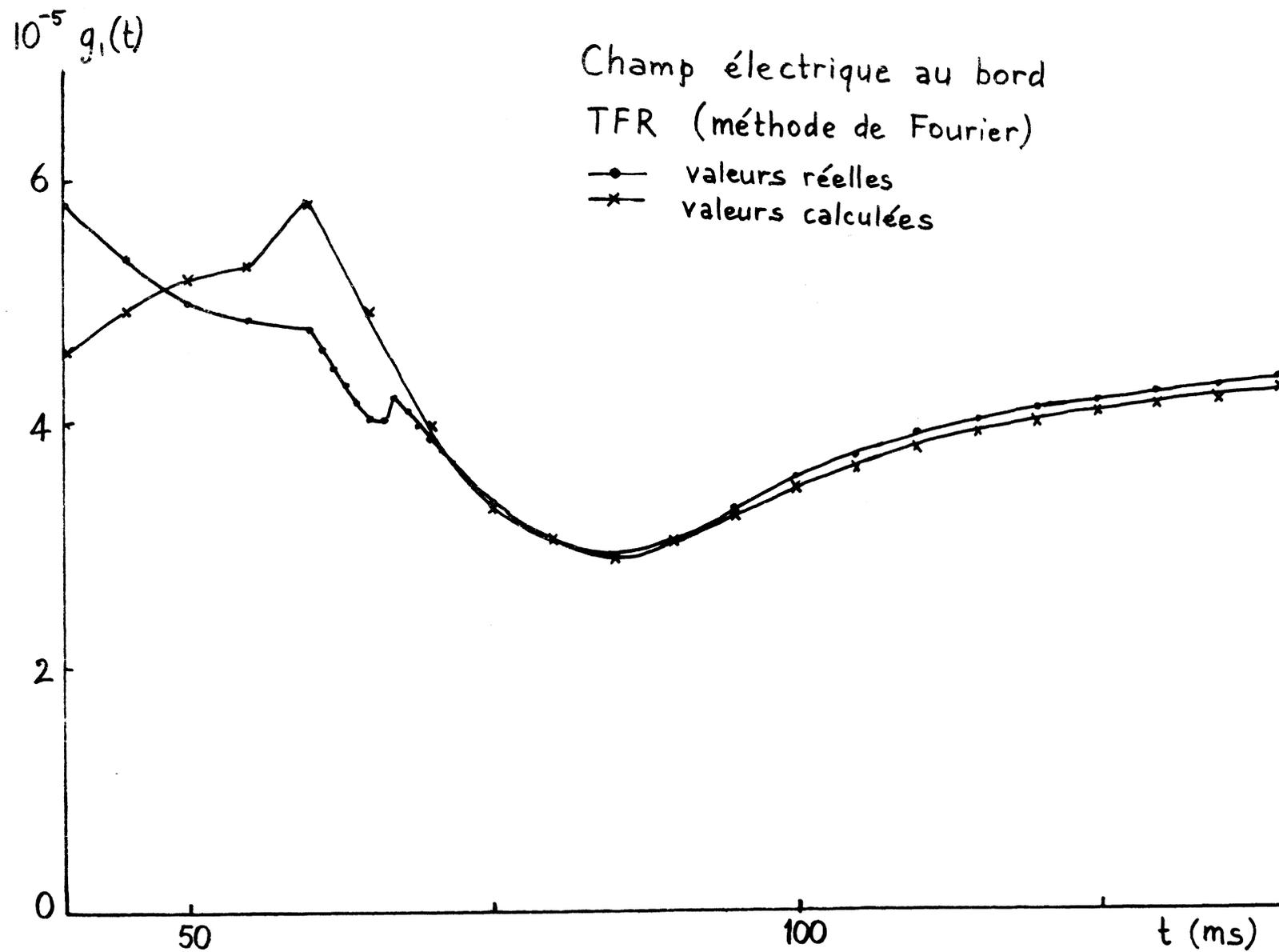


FIGURE 10-4

$10^{-5} g_1(t)$

Champ électrique au bord

Cas réaliste

—•— courbe donnée

—\*— courbe calculée

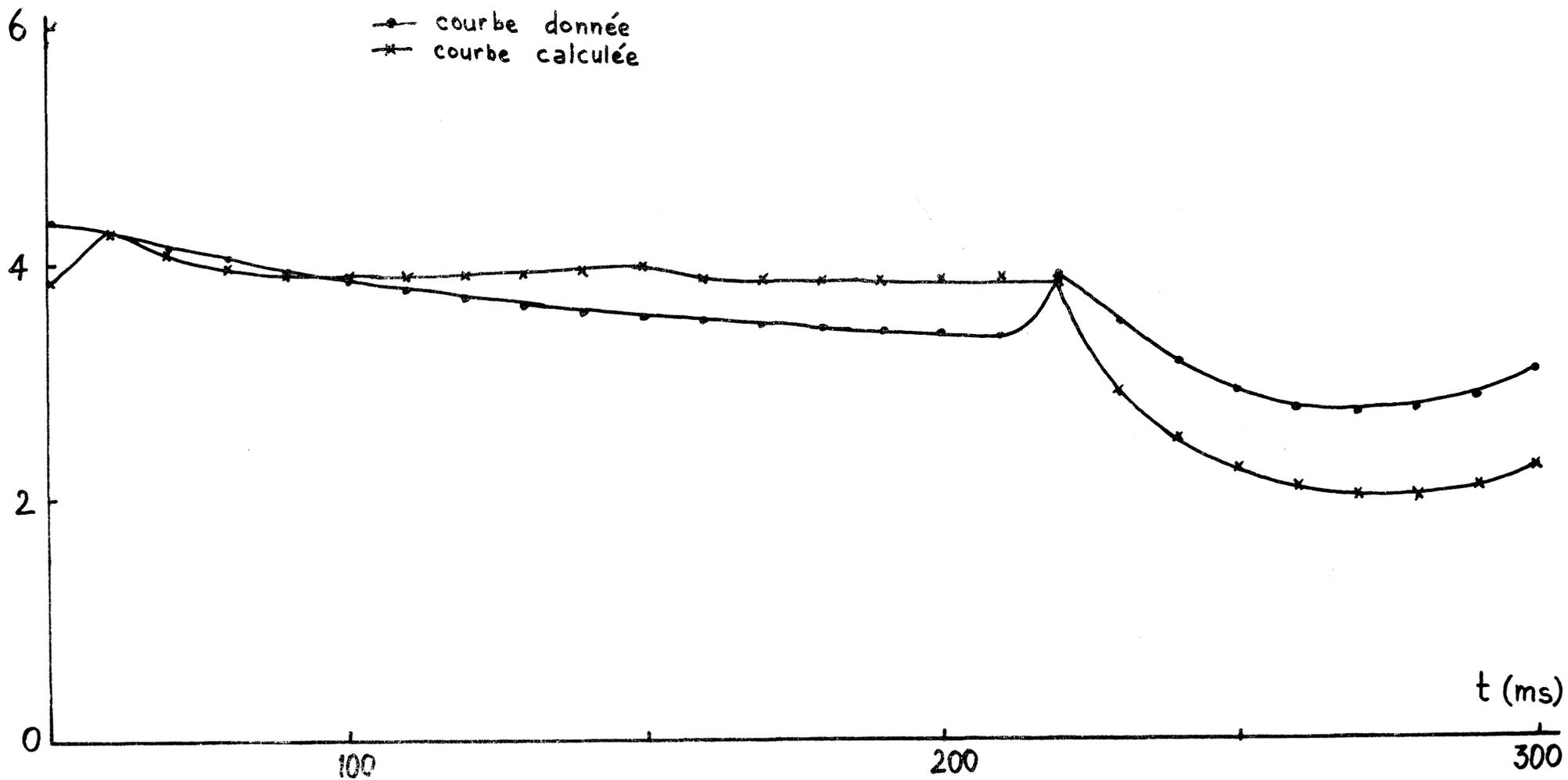


FIGURE 10-5

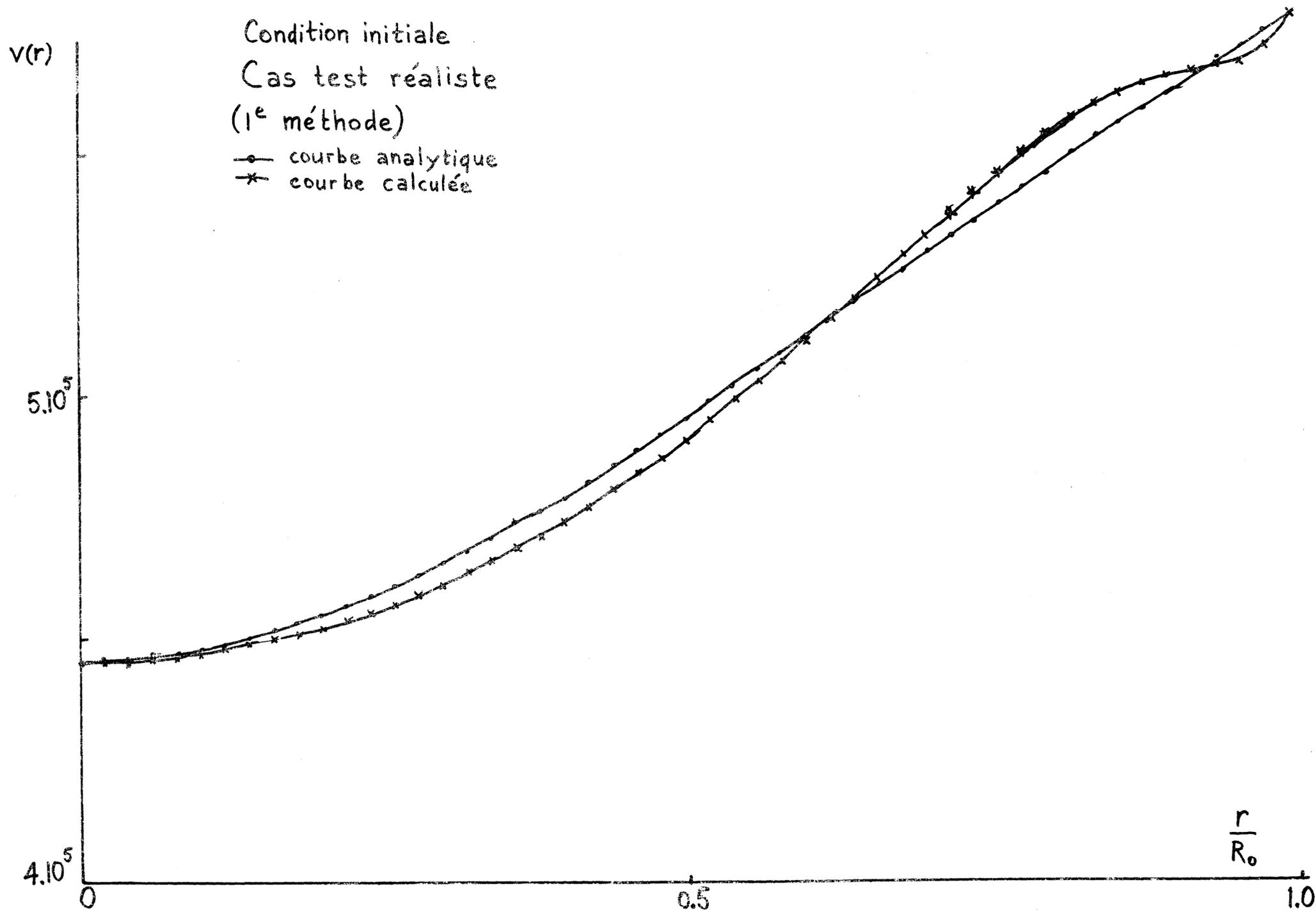


FIGURE 10-6

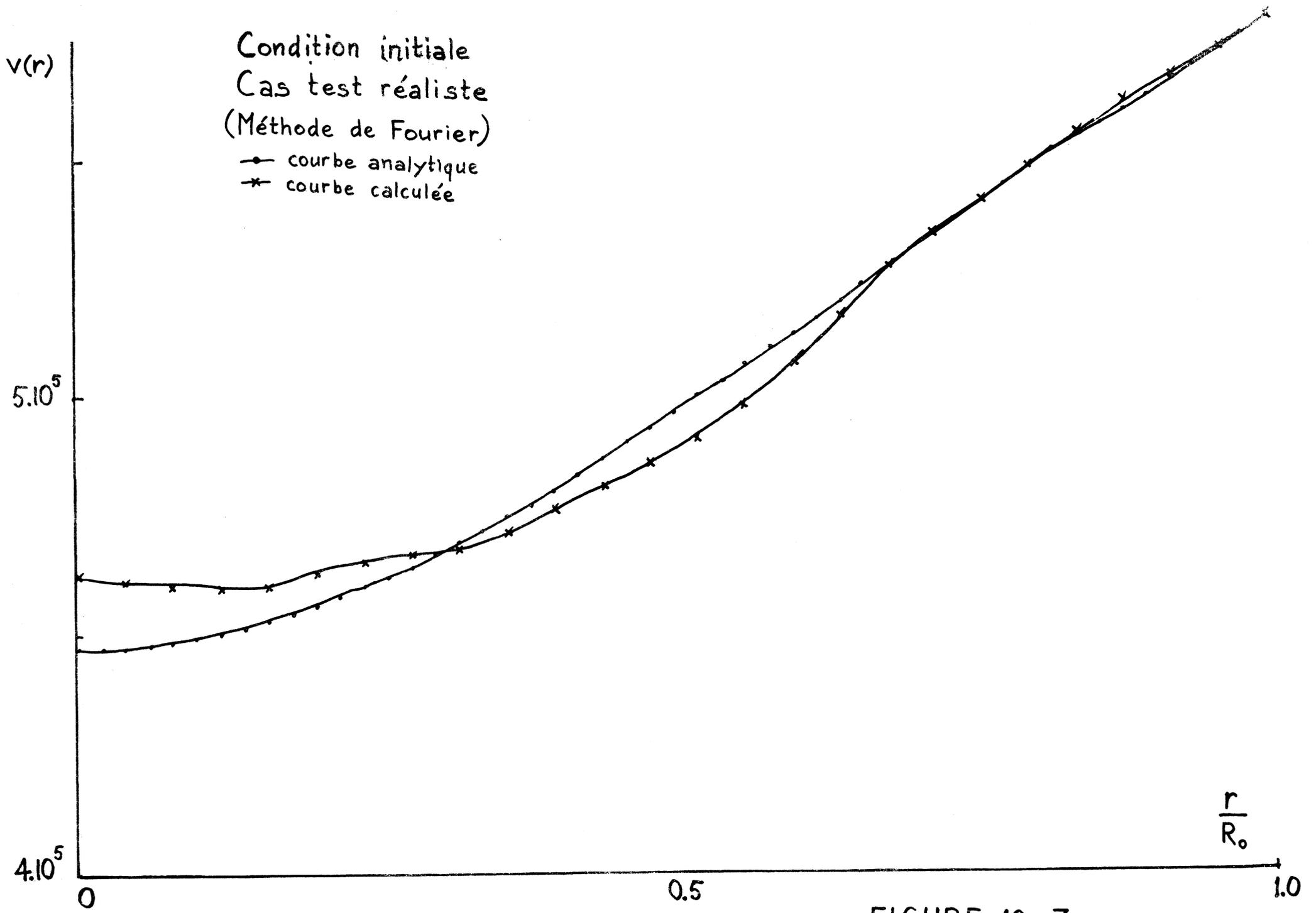


FIGURE 10-7

BIBLIOGRAPHIE  
-----

- [1] M. ABRAMOWITZ ; I.A. STEGUN  
Handbook of mathematical functions  
Dover Publications 1972
- [2] J.P. BAYARD ; J.P. BOUJOT ; J.L. SOULE  
Evolution d'un plasma dans une configuration de type "TOKAMAK"  
Note CEA - N - 1463 Août 1971
- [3] A. BENSOUSSAN  
Une méthode d'identification de valeur initiale  
C.R. Acad Sc. Paris, t.265 (1967) p.724-727
- [4] J.P. BOUJOT ; J. MEURANT ; J.P. SAUSSAIS  
Le problème TOKOMAK-2  
Note CEA - N - 1546 Septembre 1972
- [5] J.P. BOUJOT ; J.P. MORERA ; R. TEMAM  
An optimal control problem related to the equilibrium of a  
plasma in a cavity  
Applied mathematics and optimization  
Springer-Verlag 1975 Vol 2 n°2 p 98-129
- [6] J. CEA  
Optimisation - Théorie et algorithmes  
Dunod 1971
- [7] P.J. DAVIS  
Interpolation and approximation  
Blaisdell Publishing Company 1963
- [8] D. EDERY  
Présentation d'un algorithme numérique pour la résolution de  
certaines équations aux dérivées partielles paraboliques du  
type quasi-linéaire  
Note CEA - N - 1534 Juillet 1972
- [9] R. LATTES ; J.L. LIONS  
Méthode de quasi-réversibilité et applications  
Dunod 1967

- [10] N.N. LEBEDEV  
Special functions and their applications  
Prentice Hall 1965
- [11] J.L. LIONS  
Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations  
aux dérivées partielles  
Dunod 1968
- [12] D.G. LUENBERGER  
Optimization by vector space methods  
Wiley and Sons 1969
- [13] D.G. LUENBERGER  
Introduction to linear and non linear programming  
Addison-Wesley 1973
- [14] S. MIZOHATA  
Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs  
différentiels paraboliques  
Mémoires of the College of Science University of Kyoto  
Séries A - Vol XXXI Mathematics n° 3 1958 p. 219-239
- [15] P.A. RAVIART  
Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires  
et non linéaires  
J. Math. Pures Appl., 46, 1967 p. 11-107 et 109-183
- [16] R.D. RICHTMYER ; K.W. MORTON  
Difference methods for initial value problems  
Tracts in Mathematics Wiley 1967
- [17] D.L. SMART  
Review Lecture on Fusion Engineering  
2nd international conference on "Gas discharges"  
London 1972
- [18] L. SPITZER Jr  
Fully ionized gases  
Interscience Publishers N. Y. 1956
- [19] G. STRANG ; G.J. FIX  
An analysis of the finite element method  
Prentice Hall 1973

- [20] R. TEMAM  
Algèbre linéaire - C3 Analyse Numérique (1969-1970)  
Publication Mathématique d'Orsay
- [21] R. TEMAM  
On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes  
equations  
Publication Mathématique d'Orsay n° 64 June 1973
- [22] G.P. TOLSTOV  
Fourier Series  
Prentice Hall 1962