THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Contributions à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques : relations d'équivalence et problèmes birationnels, 1978

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

FACULTE DES SCIENCES · ORSAY · BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUES

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

Par

Jean-Louis COLLIOT-THELENE

30253

Sujet de la Thèse : Contributions à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques: relations d'équivalence et problèmes birationnels.

Soutenue le 28 septembre 1978 *devant le Jury composé de* :

MM. A. NERON Président
M. ARTIN
M. BERGER
C. HOUZEL
M. RAYNAUD
J.-P. SERRE
H.P.F. SWINNERTON-DYER

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

Par

Jean-Jacques SANSUC

Sujet de la Thèse : Contributions à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques: arithmétique et géométrie des groupes algébriques linéaires.

Soutenue le 28 septembre 1978 *devant le Jury composé de* :

MM. J.-P. SERRE Président

M. ARTIN

J. CERF

P. DELIGNE

A. NERON

M. RAYNAUD

H.P.F. SWINNERTON-DYER

REMERCIEMENTS.

Cette thèse, pour laquelle l'emploi de la langue française n'a pas semblé suranné, a été entreprise sur des suggestions initiales de Peter Swinnerton-Dyer; elle a été réalisée, au centre d'Orsay, grâce à la collaboration de Jean-Jacques Sansuc et à la liberté de recherche offerte (jusqu'à présent) au C.N.R.S., où j'ai travaillé sous la direction d'André Néron.

De l'enseignement et des idées de Peter Swinnerton-Dyer, j'ai commencé à profiter lors d'un séjour à Cambridge (Angleterre) lors des années 1969-1970.

J'ai bénéficié des idées et de la culture de Jean-Jacques Sansuc au cours d'innombrables discussions.

André Néron a suivi avec patience l'évolution de mes recherches et a examiné attentivement de multiples ébauches; Jean-Pierre Serre a parrainé ce travail et m'a plusieurs fois donné des conseils, le moindre n'étant pas d'y mettre un terme (provisoire).

J'ai eu de nombreuses discussions avec les membres d'un séminaire anonyme de géométrie algébrique; Jean-François Boutot, Daniel Ferrand et Lucien Szpiro m'ont à plusieurs reprises guidé dans les divers multiplodoques.

J'ai toujours appris beaucoup de mathématiques de Jean Lannes.

Marcel Berger m'a donné un sujet de seconde thèse en géométrie riemannienne; Michael Artin, Christian Houzel et Michel Raynaud ont bien voulu faire partie de mon jury.

Madame Zielinsky s'est chargée de l'impression et Madame Launay de la reliure, travaux qui n'ont pas été simplifiés par les économies de papier.

Je remercie particulièrement les membres de l'équipe de la bibliothèque mathématique d'Orsay, dont la disponibilité m'a souvent rendu service.

La rédaction de ce travail a plusieurs fois écourté les vacances de Regine Denstaedt.

J.-L. C.-T.

Cette thèse a été entièrement préparée et rédigée à l'Ecole Normale Supérieure et je tiens à souligner les conditions de travail très agréables dont j'y ai bénéficié. Je remercie à cette occasion toutes les personnes qui ont contribué à cet agrément matériel, en particulier C. Martin à la bibliothèque et N. Marc au secrétariat. Je remercie également M. Hervé et J.-L. Verdier qui m'ont permis d'achever la rédaction de cette thèse en toute tranquillité.

Sur un plan général, j'ai tiré grand profit des nombreuses discussions mathématiques que j'ai pu avoir, souvent à l'occasion de séminaires, avec les mathématiciens, et particulièrement avec les élèves, qui ont travaillé à l'Ecole Normale et je remercie tous ceux, de C. Houzel à J. Barge et J. Lannes, qui m'ont ainsi appris des mathématiques dans des secteurs variés.

Plus directement, cette thèse doit son existence aux enseignements de J.-P. Serre et à la collaboration de J.-L. Colliot-Thélène. Les cours de J.-P. Serre ont été pour moi une source d'intérêt particulier et je le remercie d'avoir suivi les divers états de mon travail et d'avoir bien voulu accepter la direction de cette thèse. Quant à la contribution de J.-L. Colliot-Thélène, elle est manifeste et essentielle, puisque la majeure partie de cette thèse est le résultat d'un travail en commun dont je ne peux que me féliciter vivement. J'ajoute qu'il m'a introduit à la problématique de la "descente" et aux travaux et questions de H.P.F. Swinnerton-Dyer sur ce sujet et qu'il a constamment stimulé mon intérêt sur divers problèmes par des idées et suggestions variées.

J. Cerf m'a donné un sujet de seconde thèse en topologie différentielle et M. Artin, P. Deligne, A. Néron, M. Raynaud et H.P.F. Swinnerton-Dyer ont bien voulu participer à mon jury.

Diverses raisons font que cette thèse est soutenue à la Faculté des Sciences d'Orsay et l'aide de G. Poitou m'a été précieuse à cet égard. Madame Zielinsky a bien voulu effectuer les travaux d'impression et Madame Launay ceux de reliure.

J.-J. S.

Table des matières

Introduction

A. La R-équivalence sur les tores (C.-T. et S.)

B. Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier (C.-T. et S.)

C. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres (S.)

D. Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques (C.-T.)

INTRODUCTION

Cette introduction est divisée en trois parties: dans la première, on donne une liste de problèmes posés par l'étude des points rationnels des variétés algébriques rationnelles, ainsi qu'une indication sur une méthode générale d'étude; dans la seconde, on explique comment les différents articles réunis pour constituer cette thèse s'articulent au programme général; dans la troisième, on donne un aperçu des différents travaux qui ont motivé cette recherche.

I.- Problèmes et méthode.

Etant donné k un corps, supposé dans cette introduction de caractéristique 0, de clôture algébrique $\bar{k}$, on dit qu'une k-variété algébrique X, toujours supposée lisse ici, est rationnelle si la variété $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est intègre, de corps des fonctions transcendant pur sur $\bar{k}$. Des exemples classiquement étudiés de telles variétés sont, d'une part, les k-groupes algébriques linéaires connexes, et leurs espaces principaux homogènes, d'autre part, les k-surfaces rationnelles, par exemple les k-surfaces cubiques lisses.

Dans la description de l'ensemble X(k) des points k-rationnels d'une telle k-variété X, on rencontre plusieurs types de problèmes, qu'on peut grossièrement classer comme suit:

(i) Existence de points k-rationnels, par exemple, si k est un corps de nombres, problème de la validité du "principe de Hasse".

(ii) Le k-variété X est-elle k-rationnelle, c'est-à-dire de corps des fonctions transcendant pur sur k? En particulier, si k est un corps de nombres, X satisfait-elle l'approximation faible?

(iii) Dans le cas où X admet des k-points, sans être k-rationnelle, trouver une description raisonnable de l'ensemble X(k) de ses points k-rationnels (problème de la "première descente" [3]), ou, du moins, définir sur X(k) des relations d'équivalence permettant d'approcher une telle description (R-équivalence, cf. III, équivalence de Brauer [15]) et donnant, entre autres, une "mesure" de la non k-rationalité de X.

Plaçons-nous plus particulièrement dans le cas où X est non seulement lisse

sur k, mais aussi propre sur k, cas auquel on peut se ramener, grâce à Hironaka, par k-compactification lisse. Notons $g = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Le g-module discret $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$ est un groupe abélien libre de type fini. Ce g-module, ainsi que le groupe $H^1(g,\mathrm{Pic}\,\bar{X})$, qui est intimement lié au groupe de Brauer de X, ont déjà joué un grand rôle dans les travaux de Manin [14,15] et de Voskresenskii [17](cf. III), en particulier en ce qui concerne les questions de k-rationalité et d'obstruction au principe de Hasse. Manin a, en particulier, utilisé le groupe de Brauer pour analyser - en partie - l'exemple de "première descente" dû à F. Châtelet [4].

Il est apparu que, si le groupe de Brauer est bien adapté à la description des obstructions connues au principe de Hasse ou à l'approximation faible, c'est un instrument en général trop grossier pour l'étude des questions du type (iii): s'il suffit dans l'exemple de F. Châtelet, c'est l'effet d'un heureux hasard, et des objets qui semblent mieux convenir pour définir sur une k-variété rationnelle X, propre et lisse sur k, un succédané de première descente sont les torseurs sur X sous des k-tores, et parmi ceux-ci, certains, dits torseurs universels, dont le groupe structural est le k-tore de module des caractères $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$: les résultats obtenus dans cette direction ont été annoncés dans les notes [6,7,8], notes qui seront développées dans [9], et qui forment, avec [15], l'arrière-plan, logiquement non nécessaire, des textes ici réunis.

II.- Les textes.

Notons tout d'abord, pour éviter toute confusion, que les tores interviennent dans notre étude de deux façons très différentes: d'une part comme k-variétés rationnelles dont on décrit les k-points [A], d'autre part comme groupes structuraux de torseurs ([A],[B]).

Le texte [A] est consacré à la description des k-points sur les k-tores. Il y a plusieurs approches possibles. L'une, qui peut s'étendre à d'autres types de k-variétés rationnelles, est esquissée dans [6] et sera reprise dans [9]. Celle choisie dans [A], très adaptée au cas des tores, est la plus algébrique et la plus effective; elle consiste à introduire d'emblée les "tores flasques", qui sont un instrument clé, comme groupes structuraux de torseurs, dans l'étude des problèmes (i), (ii), (iii) sur les k-tores quelconques (et sur leurs espaces principaux homogènes). Un k-tore F déployé par une extension galoisienne finie K/k de groupe G est dit flasque, si, pour tout sous-groupe H de G, le groupe $H^{-1}(H,\hat{F})$ est nul (il s'agit du groupe de cohomologie de Tate à valeurs dans le groupe des caractères de F). On montre que, pour tout k-tore T, il existe une suite exacte de k-

tores, essentiellement unique, dite résolution flasque de T:

(*) $$1 \to F \to P \to T \to 1$$

avec F flasque et P quasi-trivial, i.e. tel que le g-module $\hat{P}$ admette une Z-base permutée par g. Une étude directe de la cohomologie étale à valeurs dans les tores flasques permet alors de tirer de la suite (*) une description précise de T(k): calcul de la R-équivalence, finitude de celle-ci lorsque k est de type fini sur Q (cf. l'introduction de [A]).

Le processus est inspiré de la "première descente" sur les courbes elliptiques; de fait, la suite (*) fait de P, qui est une k-variété k-rationnelle, un torseur sur T sous le k-tore F. Il pourra sembler étrange au lecteur familier avec la démonstration du théorème de Mordell-Weil (faible) que l'on obtienne un théorème de finitude, alors que la base T du torseur est affine; en fait, étant donné X une k-compactification lisse de T, il existe un torseur sur X sous F qui prolonge P. Un tel torseur apparaît naturellement quand on se place de point de vue de [6]; mais on peut prouver a priori son existence, et c'est l'un des buts de l'article [B].

On peut résumer de façon technique le contenu de l'article [B] en disant qu'on y étudie le comportement des deux premiers groupes de cohomologie étale (H^1 et H^2) d'un schéma régulier intègre X, à valeurs dans un X-tore, par passage à un ouvert de X et au point générique de X. Le lecteur consultera l'introduction de [B] pour plus de détails. Cet article, où l'on s'est placé dans le cadre général des tores au-dessus d'une base quelconque, remplit plusieurs fonctions: d'une part, on y établit certains résultats annoncés dans [6] et dans [A], et qui seront utilisés dans [9]; d'autre part, nous espérons qu'il a son intérêt propre, dans la mesure, où, par exemple, on obtient une généralisation de l'injection du groupe de Brauer cohomologique d'un schéma régulier intègre dans celui de son corps des fonctions (Grothendieck [12]) et où, d'autre part, on établit qu'un torseur sur un tel schéma sous un X-tore est localement trivial pour la topologie de Zariski dès qu'il admet une section rationnelle, ce qui répond dans ce cas à une question générale sur les torseurs sous les groupes réductifs qui, dans le cas semi-simple, a été posée par Grothendieck et est largement ouverte (cf. [1,12]).

Dans l'article [C], Sansuc calcule, pour un groupe algébrique linéaire connexe G sur un corps de nombres k, essentiellement par réduction au cas semi-simple simplement connexe, au moyen d'isogénies, les groupes abéliens finis A(G) et Ш(G) qui mesurent, l'un, le défaut d'approximation faible, l'autre, le défaut du principe de Hasse (pour les espaces principaux homogènes sous G, en l'absence de facteur de type E_8). Le lien entre ces groupes et le groupe de Brauer de G est dé-

crit. Ceci permet, étant donné une k-compactification lisse X de G, d'établir la suite exacte naturelle

$$(**) \qquad 0 \to A(G) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X})^{\sim} \to Ш(G) \to 0.$$

Ceci met en évidence, dans ce cas, l'adéquation du groupe de Brauer de X à l'étude des obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible. On a, dans [8], annoncé des résultats généraux allant dans ce sens.

Si, comme le montrent le cas des tores et l'exemple des surfaces de Châtelet, les torseurs sous les tores semblent bien adaptés à l'étude des problèmes (i), (ii), (iii) pour certaines k-variétés rationnelles (et il ne semble pas déraisonnable de traiter ainsi les k-surfaces rationnelles), et si les (k-compactifiées lisses des) variétés de première descente (= torseurs universels) sur une k-variété rationnelle lisse complète X sont meilleures que X, car triviales du point de vue de la structure du module galoisien Pic $\bar{X}$ (cf.[7]), la méthode a cependant ses limites, comme le montre un contre-exemple fondé sur l'invariance $\mathbb{R}$-birationnelle du nombre de composantes connexes réelles d'une $\mathbb{R}$-variété complète lisse [7]. Il apparaît donc nécessaire de chercher de nouveaux invariants k-birationnels, si possible algébriques. Un premier pas dans cette direction est fait dans l'article [D], où Colliot-Thélène algébrise la notion de composante connexe réelle, en établissant les propriétés fonctorielles de certains groupes attachés à une k-variété lisse intègre X et à une k-forme quadratique de Pfister, propriétés très parallèles à celles de groupes attachés à X et à certains k-tores [5,6]: voir à ce sujet l'introduction et le dernier paragraphe de [D].

III.- Historique.

Le problème de la première descente, posé à propos des surfaces cubiques par F. Châtelet [3] a été résolu de façon très intéressante par cet auteur dans le cas d'une k-surface rationnelle particulière [4]. Vers 1969-1970, Manin d'une part [15], Swinnerton-Dyer d'autre part (remarques et questions inédites) ont de nouveau attiré l'attention sur l'exemple de Châtelet. Manin a interprété l'exemple au moyen du groupe de Brauer, tandis que Swinnerton-Dyer mettait, par d'autres exemples, l'accent sur l'analogie avec les méthodes de "factorisation" [2] sur les courbes elliptiques, et notait que les pratiques intervenant dans les contre-exemples connus au principe de Hasse permettent également d'amorcer des premières descentes (finitude du nombre de factorisations possibles si k est un corps de nombres).

C'est Manin [15] qui, pour formaliser les problèmes de paramétrage des points rationnels des k-variétés rationnelles, a introduit la notion de R-<u>équivalence</u>: deux points k-rationnels A et B d'une k-variété X sont dits R-équivalents s'il existe une chaîne de k-points de A à B tels que, pour deux points consécutifs M et N de la chaîne, il y ait une k-application rationnelle $\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{f} X$ avec $f(0) = M$ et $f(\infty) = N$. Manin a également introduit la notion d'<u>équivalence de Brauer</u>, par accouplement des k-points d'une k-variété X avec les algèbres d'Azumaya sur X.

Dans un travail non publié [5], motivé par les exemples et questions de Swinnerton-Dyer, Colliot-Thélène a donné une analyse de l'exemple de Châtelet plus proche de la première descente sur les courbes elliptiques que celle de Manin. Les variétés de première descente sont déjà décrites comme des torseurs sous un tore, mais il se trouve que, pour le tore particulier intervenant dans le cas de Châtelet, les torseurs de groupe structural ce tore peuvent se décrire simplement en termes de la topologie de Zariski de la base, et ce point de vue, sans doute trop élémentaire, était adopté dans tout ce travail [5]. C'est un fait que, pour l'étude des torseurs sous un tore <u>quelconque</u>, étude qui s'est révélée nécessaire pour définir les meilleures variétés de première descente possibles sur une k-variété lisse complète rationnelle quelconque, on ne peut éviter le recours à la cohomologie étale des schémas, due à Artin et Grothendieck. C'est ce qui a été ensuite fait par les deux auteurs qui ont généralisé (<u>cf</u>. [6]) l'essentiel des résultats de [5].

Voici maintenant, article par article, une indication sur les travaux qui les ont influencés plus directement.

L'article [A], comme déjà indiqué, a pour ancêtre immédiat la note [6] - qu'il ne développe pas. Les techniques qui y sont employées sont, d'une part la cohomologie galoisienne et la cohomologie étale, d'autre part les techniques employées par les différents auteurs qui ont étudié la k-rationalité des k-tores (Swan, Voskresenskii, Lenstra, Endo-Miyata), parmi lesquels nous avons surtout lu Voskresenskii et Endo-Miyata.

L'article [B] a été motivé d'une part par [6] et [A], d'autre part par les articles de Serre et Grothendieck dans "Anneaux de Chow" [1] et les exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer, en particulier [12].

L'article [C], motivé par des contre-exemples de Serre et l'article de Voskresenskiĭ [17], utilise des résultats et méthodes de Harder et Kneser (<u>cf</u>. [13]), en ce qui concerne les groupes linéaires, et de Manin [14], en ce qui concerne l'analyse, au moyen du groupe de Brauer, de l'obstruction au principe de Hasse.

A l'origine du travail [D], il y a l'article de Geyer [11] sur les composantes connexes réelles d'une courbe lisse complète sur les réels: d'aucuns ont demandé

si le rôle joué par le groupe de Brauer de la courbe dans la description de ces composantes s'étendait en dimension plus grande, mais on trouvera dans [7] un contre-exemple. Pour algébriser ce contre-exemple, les idées de [11,5,6] ont été utiles, et l'instrument essentiel a été fourni par les formes quadratiques multiplicatives de Pfister.

Nous ne saurions conclure cette introduction sans insister encore sur l'influence déterminante, pour cette recherche, des écrits et suggestions de Swinnerton-Dyer, et des travaux de Manin. Par ailleurs, il est peu probable que nous ayons été amenés à étudier la descente sur les tores s'il n'y avait eu, à l'origine, d'une part l'exemple de Châtelet, d'autre part les travaux de Voskresenskiĭ sur les tores. Enfin, il n'échappera à personne que nous n'aurions aucun des outils nécessaires (cohomologie galoisienne, cohomologie étale, torseurs) si nous n'avions pas disposé des écrits de Serre et de Grothendieck.

A J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. scient. E.N.S. 10 (1977) 175-229.

B J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier.

C J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres.

D J.-L. Colliot-Thélène, Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, Bull. S.M.F. (1978), à paraître.

1 Séminaire C. Chevalley: Anneaux de Chow et applications. E.N.S. Paris 1958.

2 J.W.S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London Math. Soc. 41 (1966) 193-291.

3 F. Châtelet, Points rationnels sur les surfaces cubiques, Séminaire d'Algèbre et Théorie des Nombres, Paris 1954.

4 F. Châtelet, Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques, Enseignement Math. 5 (1959) 153-170.

5 J.-L. Colliot-Thélène, Les fonctions dont les diviseurs sont des normes (1975), non publié.

6 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Torseurs sous des groupes de type multiplicatif, C.R.A.S. Paris 282 (1976) 1113-1116.

7 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, C.R.A.S. Paris 284 (1977) 967-970.

8 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres, C.R.A.S. Paris 284 (1977) 1215-1218.

9 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La première descente sur les variétés rationnelles (en préparation).

10 S. Endo et T. Miyata, On a classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J. 56 (1974) 85-104.

11 W.-D. Geyer, Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichold Über reelle algebraische Funktionenkörper. In: Algebraische Zahlentheorie, Oberwolfach (1964) 83-98.

12 A. Grothendieck, Le groupe de Brauer II. In: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam, North-Holland Pub. Co. 1968.

13 M. Kneser, Lectures on Galois cohomology of classical groups, Lectures on Math. 47, Tata Institute Bombay 1969.

14 Yu.I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, Actes Congrès Intern. Math. Nice (1970) 401-411.

15 Yu.I. Manin, Cubic Forms, Nauka Moscou 1972 (trad. ang. North Holland, Amsterdam, 1974).

16 H.P.F. Swinnerton-Dyer, Two special cubic surfaces, Mathematika 9 (1962) 54-56.

17 V.E. Voskresenskii, Birational properties of linear algebraic groups, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. 34 (1970) 3-19 (trad. ang. Math. USSR Izv. 4, 1970, 1-17).

A

La R-équivalence sur les tores

J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 10, 1977, p. 175 à 230.

LA R-ÉQUIVALENCE SUR LES TORES

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE et JEAN-JACQUES SANSUC

Introduction

Les tores algébriques appartiennent à la classe générale des variétés algébriques *rationnelles*, i. e. rationnelles sur la clôture algébrique du corps de définition k. Cette classe contient plus généralement les groupes algébriques linéaires connexes; elle contient aussi les surfaces cubiques lisses. Soit X une telle variété définie sur le corps k. Dans le cas où l'on connaît l'existence d'un point rationnel de X, l'étude des points rationnels de X peut s'ordonner autour de deux types de questions connexes :

(i) des questions *birationnelles* : la variété X est-elle k-unirationnelle, k-rationnelle, ...?

(ii) des questions sur l'existence et la nature précise de divers paramétrages possibles de l'ensemble $X(k)$ de *tous* les points rationnels de X : peut-on trouver un nombre fini de k-morphismes $X_i \to X$ de variétés k-rationnelles X_i dans X, tels que $X(k)$ soit la réunion des images des $X_i(k)$, peut-on en trouver un seul $X_0 \to X$ tel que $X(k)$ soit l'image de $X_0(k)$, ...?

Les questions du type (i) ont été considérées en particulier par B. Segre [27] qui a étudié de façon précise le cas des surfaces cubiques lisses sur un corps parfait. Le cas général des surfaces rationnelles, définies sur un corps parfait, a été ensuite traité par Manin et Iskovskih. Pour les tores algébriques, qui sont k-unirationnels, le premier exemple non k-rationnel est dû à Chevalley [6] et plusieurs auteurs ont, à sa suite, étudié les problèmes du type (i) sur les tores, en introduisant divers invariants k-birationnels et en formulant quelques critères de k-rationalité (*cf.* [34]).

Le deuxième type de questions a conduit Manin [20] à introduire plusieurs relations d'équivalence sur $X(k)$. La relation fondamentale, qui formalise en partie les questions du type (ii), est la R-*équivalence*, engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R-équivalents, ce qu'on note $x \sim y$, lorsqu'il existe une k-application rationnelle φ de $\mathbf{P}^1_k$ dans X telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(\infty) = y$. En raison des difficultés d'un calcul direct de la R-équivalence, en particulier sur les surfaces cubiques, Manin a introduit la notion d'*équivalence de Brauer*, qu'on peut définir

par l'accouplement des points rationnels avec les classes d'algèbres d'Azumaya sur X, et, plus généralement, la notion de B-équivalence : il s'agit là d'équivalences plus grossières que la R-équivalence; leur avantage est d'être plus faciles à calculer et de fournir ainsi une approximation par défaut de la R-équivalence. En outre, dans le cas des surfaces de Châtelet ([5], [20]), l'équivalence de Brauer coïncide avec la R-équivalence, ce qui donne, sur un corps de nombres k, des exemples de variétés rationnelles, pour lesquelles l'ensemble des points rationnels est partagé en un nombre fini de classes pour la R-équivalence, chacune d'elles étant paramétrée, de façon multivoque, par les points rationnels d'une même variété k-rationnelle (de dimension 4). Manin observe dans son livre sur les surfaces cubiques ([20], chap. II, remarque 14.5) que c'est là la seule classe (non triviale) de variétés rationnelles (ou, du moins, de surfaces cubiques) pour laquelle on parvienne à des résultats relativement explicites pour la R-équivalence.

L'objet de cet article est l'étude des questions du type (ii) dans le cas des tores, cas qui ne semble pas avoir été considéré en dehors d'une tentative de F. Châtelet sur un exemple particulier [4]. Le calcul de la R-équivalence sur un tore se révèle encore plus explicite que pour les surfaces de Châtelet : la méthode est directe et parfaitement effective. On obtient en particulier, pour un tore T défini sur le corps k, les résultats suivants :

(*a*) si T est déployé par une extension métacyclique, $T(k)/R = \{0\}$;

(*b*) si k est de type fini sur le corps premier, $T(k)/R$ est fini;

(*c*) chaque R-classe est paramétrée par les points rationnels d'une même variété k-rationnelle;

(*d*) pour le tore T des éléments de norme 1 d'une extension galoisienne finie K/k de groupe G, la surjection évidente $H^{-1}(G, K^*) \to T(k)/R$ est une bijection.

En outre, la R-équivalence coïncide avec l'équivalence rationnelle. Mais, contrairement au cas des surfaces de Châtelet, elle diffère en général de l'équivalence de Brauer. On trouve ainsi des exemples de Q-variétés projectives, lisses et rationnelles, pour lesquelles la R-équivalence n'est pas triviale, alors que l'équivalence de Brauer l'est, et d'autres, non Q-rationnelles, pour lesquelles la R-équivalence est triviale.

La méthode utilisée pour la détermination de $T(k)/R$ repose sur la considération de torseurs sous des tores particuliers, les tores *flasques*, dont l'étude fait, en partie, l'objet des paragraphes 1-3 et qui sont étroitement liés à des notions introduites par Swan [31], Voskresenskiĭ [33], Lenstra [18] et Endo-Miyata [12] dans l'étude des questions birationnelles sur les tores.

Voici, en bref, comment on est amené à introduire ces notions dans l'étude de $T(k)/R$. On observe d'abord qu'étant donné, en caractéristique 0, une k-compactification lisse $T \to X$, la suite exacte de modules galoisiens

$$\text{(B)} \qquad 0 \to \hat{T} \to \mathrm{Div}_{\bar{X}-\bar{T}}\bar{X} \to \mathrm{Pic}\,\bar{X} \to 0,$$

mise en valeur initialement par Voskresenskiĭ [33] dans l'étude des problèmes birationnels, définit, par dualité, un torseur sur T, sous le tore dual de Pic $\bar{X}$, torseur qui se prolonge à X et « donne » ainsi la R-équivalence sur $T(k)$ (*cf.* [7], proposition 6 et théorème 2). Puis, en vue de s'affranchir de l'hypothèse de caractéristique et du recours à une k-compacti-

fication lisse X et au calcul du module galoisien Pic $\bar{X}$, on repère une propriété algébrique de (B) qui suffit pour l'étude du problème : (B) est une *résolution flasque* du module galoisien $\hat{T}$ et toute résolution flasque de $\hat{T}$ définit, par dualité, un torseur sur T qui se prolonge à une k-compactification lisse éventuelle et, en tout cas, « donne » la R-équivalence sur $T(k)$. Il suffit donc, pour le calcul de $T(k)/R$, de considérer *a priori* une résolution flasque quelconque de $\hat{T}$: on dispose d'une procédure effective pour calculer une telle résolution et, même en caractéristique 0, cette procédure est bien plus simple que celle consistant à calculer une suite du type (B). Cette méthode permet aussi le calcul effectif de l'invariant k-birationnel $p(T)$ considéré par Voskresenskiĭ [35]. Ceci ne semble pas avoir été noté par Voskresenskiĭ qui, cependant, comme nous l'a signalé le rapporteur, a observé indépendamment [36] (1), à propos des problèmes birationnels, le caractère flasque d'une suite du type (B).

L'étude de la R-équivalence sera reprise dans [8] dans un cadre non limité à celui des tores, suivant la méthode indiquée en [7]. Le plan de l'article est le suivant :

1. Modules et résolutions flasques;
2. Lien avec les problèmes birationnels;
3. Les tores flasques;
4. R-équivalence et équivalence rationnelle;
5. La R-équivalence sur un tore;
6. Quelques calculs explicites de R-équivalence;
7. L'équivalence de Brauer sur un tore;
8. Comparaison de quelques critères de rationalité;

Annexe;

Bibliographie.

1. Modules et résolutions flasques

Les résultats de ce paragraphe sont essentiellement dus, moyennant parfois quelques traductions (*voir* à ce sujet § 2, R 6), à Lenstra [18], Endo-Miyata [12] et Voskresenskiĭ ([33], [35]), mais la présentation et les démonstrations (notamment celle figurant à la proposition 3) sont parfois différentes. La présentation adoptée ici, strictement algébrique, a l'avantage d'être complètement dégagée de considérations géométriques ou birationnelles. Le lien avec les problèmes birationnels est établi au paragraphe 2 (*cf.* prop. 5 et 6 et R 6).

L'objet de ce paragraphe est d'introduire la notion de *résolution flasque* d'un G-module, d'en assurer l'existence (lemme 3), le caractère essentiellement unique (lemme 5) et (uni)versel (lemme 4), puis d'entreprendre, au moins dans des cas particuliers, l'étude du monoïde F_G des classes de similitude de G-modules flasques (prop. 1-4, coroll. et R 5).

(1) Nous n'avons pu prendre connaissance des démonstrations, publiées, semble-t-il, dans *Études de théorie des nombres*, Université de Saratov, nos 5 et 6, 1975, p. 14-21 et 18-33.

Soit G un groupe profini. *Sauf mention du contraire*, on se place dans la catégorie $\mathscr{L}_G$ des G-modules (à gauche) continus *Z-libres de rang fini*. Si M et N sont deux tels modules, on désigne par Hom (M, N) le G-module $\mathrm{Hom}_Z(M, N)$, par $M \otimes N$ le G-module $M \otimes_Z N$ et par M^0 le G-module dual Hom (M, Z). On a de multiples isomorphismes canoniques : $M = (M^0)^0$, $\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}(N^0, M^0) = M^0 \otimes N$, $\mathrm{Hom}(M, N)^0 = \mathrm{Hom}(N, M)$ et, si H est un sous-groupe ouvert de G, $Z[G/H]^0 = Z[G/H]$. L'application duale de l'augmentation $\varepsilon_{G/H} : Z[G/H] \to Z$ est la norme $N_{G/H} : Z \to Z[G/H]$ définie par $N_{G/H}(1) = \sum_{G/H} gH$. On note $I_{G/H}$ le noyau de l'augmentation $\varepsilon_{G/H}$ et $J_{G/H}$ le conoyau de la norme $N_{G/H}$: $J_{G/H} = I^0_{G/H}$. Si M est un G-module, le sous-groupe G_M des éléments de G agissant trivialement sur M est un sous-groupe ouvert invariant de G et $\mathscr{L}_G$ est ainsi la réunion des $\mathscr{L}_{G/H}$ pour tous les sous-groupes ouverts invariants H de G. Si G est *fini* et si $i \in Z$, on note $H^i(G, M)$ le i-ième groupe de cohomologie à la Tate, groupe noté $\hat{H}^0(G, M)$ si i vaut explicitement 0. On sait ([3], chap. XII, § 6) que le cup-produit met en dualité les groupes finis $H^i(G, M)$ et $H^{-i}(G, M^0)$. Pour G profini, M étant sans Z-torsion, on peut encore considérer, outre les groupes de cohomologie ordinaires, le groupe $H^{-1}(G, M)$ défini par exemple comme $\varinjlim_H H^{-1}(G/H, M^H)$, pour H sous-groupe ouvert invariant quelconque de G, avec pour morphismes de transition les inclusions naturelles : pour H inclus dans G_M et invariant dans G, ce groupe coïncide avec $H^{-1}(G/H, M)$.

Un G-module est dit *de permutation* s'il admet une Z-base permutée par G. Il est donc isomorphe à son dual. Si G est fini, un module à la fois projectif et de permutation est libre. Un facteur direct d'un module de permutation est dit *inversible*. On dit que deux modules sont *semblables* lorsqu'on obtient des modules isomorphes par addition de modules de permutation convenables. Un module semblable à 0 est dit *stablement de permutation*. Les classes de similitude forment, pour la somme directe, un monoïde commutatif S_G. Soit [M] la classe de similitude du G-module M : c'est la classe neutre 0 lorsque M est stablement de permutation, c'est un élément du sous-groupe U_G des éléments inversibles de S_G lorsque M est un module inversible. La dualité $M \mapsto M^0$ induit sur S_G une involution qui conserve U_G. Les groupes $H^1(G, M)$ et $H^{-1}(G, M)$ ne dépendent que de [M].

Remarque.

R 1. Un module stablement de permutation n'est pas nécessairement de permutation. C'est déjà le cas pour $G = \mathfrak{S}_3 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^3 = 1$ et $sts = t^2$: le noyau M de l'application $Z[G] \xrightarrow{\omega} Z[G/s]$ définie par $\omega(1) = 1 - t$ n'est pas de permutation, car $\hat{H}^0(G, M) = 0$ (si M était de permutation, il serait donc libre) et $H^2(G, M) = Z_3$, et pourtant $M \oplus Z = Z[G/s] \oplus Z[G/t]$ (*cf.* § 6, *d* 1). Voici un autre exemple [30] pour G le groupe quaternionien d'ordre 8 : l'idéal $I = \langle 3, N_G \rangle$ de $Z[G]$ n'est pas de permutation, car projectif, mais non libre; pourtant, $I \oplus Z = Z[G] \oplus Z$. □

Soit $i \in Z$. Dans le cas où G est fini, le G-module M est dit H^i-trivial lorsque $H^i(G', M) = 0$ pour tout sous-groupe G′ de G : pour vérifier cette condition, il suffit de considérer les sous-groupes des sous-groupes de Sylow et, parmi eux, un seul sous-

groupe par classe de conjugaison. Pour $i = -1$, on dit que M est *flasque* et, pour $i = 1$, que M est *coflasque*. Ces deux dernières définitions s'étendent au cas où G est profini, en se limitant aux sous-groupes ouverts G′ de G : il revient au même [*cf.* lemme 2 (vii) et (viii)] de considérer M dans $\mathscr{L}_{G/H}$ pour H contenu dans G_M et invariant ouvert dans G. On note F_G (resp. F_G^0) le sous-monoïde de S_G formé des classes de similitude de G-modules flasques (resp. coflasques). Un module inversible est à la fois flasque et coflasque : $F_G \cap F_G^0$ contient donc le sous-groupe U_G. On note

$$F_G^1 = F_G/F_G \cap F_G^0 \qquad \text{et} \qquad F_G^2 = F_G \cap F_G^0/U_G;$$

ce sont deux monoïdes commutatifs sans torsion. On appelle *résolution flasque* d'un G-module M toute suite exacte de G-modules

$$0 \to M \to P \to F \to 0,$$

où P est de permutation et F flasque. On appelle *résolution coflasque* de M toute suite exacte de G-modules

$$0 \to Q \to R \to M \to 0,$$

où R est de permutation et Q coflasque.

LEMME 1. — *Soit* M *dans* $\mathscr{L}_G$. *Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) M *est flasque;*

(ii) M^0 *est coflasque;*

(iii) $H^{-1}(G', M) = 0$ *pour tout sous-groupe ouvert* G′ *de* G*;*

(iv) $H^1(G', M^0) = 0$ *pour tout sous-groupe ouvert* G′ *de* G*;*

(v) $H^1[G, \mathrm{Hom}(M, P)] = 0$ *pour tout module de permutation* P*;*

(vi) $H^1(G, M^0 \otimes P) = 0$ *pour tout module de permutation* P*;*

(vii) $\mathrm{Ext}_G^1(M, P) = 0$ *pour tout module de permutation* P*;*

(viii) $\mathrm{Ext}_G^1(P, M^0) = 0$ *pour tout module de permutation* P. □

Les conditions (v)′, ..., (viii)′ obtenues en remplaçant dans (v), ..., (viii) l'expression « pour tout module de permutation » par « pour tout module inversible » sont encore équivalentes aux précédentes.

Ainsi, toute résolution flasque de M définit par dualité une résolution coflasque de M^0 et la dualité induit un isomorphisme $F_G \xrightarrow{\approx} F_G^0$.

LEMME 2. — *Soient* M *un* G*-module et* H *un sous-groupe invariant fermé de* G *:*

(i) *si* M *est de permutation dans* $\mathscr{L}_G$, M^H *est de permutation dans* $\mathscr{L}_{G/H}$*;*

(ii) *si* M *est* G*-coflasque,* M^H *est* G/H*-coflasque;*

(iii) *si* $0 \to Q \to R \to M \to 0$ *est une résolution coflasque de* M *dans* $\mathscr{L}_G$, $0 \to Q^H \to R^H \to M^H \to 0$ *est une résolution coflasque de* M^H *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$.

Soient M *et* N *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$. *Il est équivalent,* pour M et N, *de posséder la propriété* $\mathscr{P}$ *dans* $\mathscr{L}_G$ *ou dans* $\mathscr{L}_{G/H}$, *pour chacune des propriétés* $\mathscr{P}$ *ci-dessous :*

(iv) M *est de permutation;*

(v) M *est stablement de permutation;*

(vi) M *est inversible;*

(vii) M *est flasque;*

(viii) M *est coflasque;*

(ix) M *et* N *sont semblables.*

Enfin, pour M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$ *:*

(x) *toute résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$ *est une résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_G$*;*

(xi) *toute résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_G$ *définit,* via *le foncteur* points fixes sous H, *une résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$.

COROLLAIRE. — *Si* H *est un sous-groupe invariant fermé de* G, $S_{G/H}$ *est un sous-monoïde de* S_G *et* $U_{G/H} = U_G \cap S_{G/H}$, $F_{G/H} = F_G \cap S_{G/H}$, $F^0_{G/H} = F^0_G \cap S_{G/H}$. *En outre,* S_G *est la réunion des sous-monoïdes* $S_{G/H}$, *pour* H *parcourant l'ensemble des sous-groupes invariants ouverts de* G.

Notons que, d'après le lemme, les diverses propriétés (iv) à (ix) se vérifient toutes à un niveau fini, i. e. dans $\mathscr{L}_{G/H}$ pour H invariant ouvert convenable. Les assertions du lemme se vérifient aisément : on commence par (i) et (iv), d'où (v), (vi) et (ix); on prouve (ii) par inflation, d'où (iii), puis (viii) par inflation-restriction, d'où (vii) par dualité (en supposant G fini, ce qui est possible, vu la définition de « flasque »). Pour (x) et (xi), montrons simplement que, si $0 \to M \to P \to F \to 0$ est une résolution flasque dans $\mathscr{L}_G$ d'un G/H-module M, alors la suite exacte $0 \to M \to P^H \to F^H \to 0$ est une résolution flasque de M dans $\mathscr{L}_{G/H}$. Pour voir que F^H est flasque, on peut supposer G fini. Pour tout sous-groupe G′ de G, on obtient la suite exacte $0 \to H^{-1}(G', F^H) \to \hat{H}^0(G', M) \xrightarrow{i} \hat{H}^0(G', P^H)$. Or, l'hypothèse $H^{-1}(G', F) = 0$ implique l'injectivité de $\hat{H}^0(G', M) \to \hat{H}^0(G', P)$, donc celle de i, soit $H^{-1}(G', F^H) = 0$. □

Remarques.

R 2. Soient H un sous-groupe fermé de G et Res la restriction usuelle $\mathscr{L}_G \to \mathscr{L}_H$. Soit $\mathscr{P}$ l'une quelconque des propriétés (iv) à (ix) du lemme 2, ou même la propriété (j) : M est H^j-trivial ($j \in \mathbf{Z}$ et, pour G infini, $j \geqq -1$). Il est immédiat que, si M (*ou* M et N) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{L}_G$, il en est de même pour Res (M) [*ou* Res (M) et Res (N)] dans $\mathscr{L}_H$. La restriction $\mathscr{L}_G \to \mathscr{L}_H$ induit donc des morphismes de restriction $\Phi_G \to \Phi_H$ pour $\Phi = S, U, F, F^0, F^1$ et F^2. Plus généralement, cette remarque et le lemme 2 montrent le caractère fonctoriel contravariant de S, U, F, F^0, F^1 et F^2. □

R 3. Soient H un sous-groupe d'indice fini de G et Ind l'induction usuelle $\mathscr{L}_H \to \mathscr{L}_G$. Soit $\mathscr{P}$ l'une des propriétés (iv) à (ix) ou (j). On voit aisément que, si M (*ou* M et N) vérifie

la propriété $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{L}_H$, il en est de même pour Ind (M) [*ou* Ind (M) et Ind (N)] dans $\mathscr{L}_G$ [*via* le lemme de Shapiro pour (j)]. On obtient donc des morphismes d'induction $\Phi_H \to \Phi_G$ pour $\Phi = S, U, F, F^0, F^1$ et F^2.

Si M est dans $\mathscr{L}_H$, le H-module Res $\circ$ Ind (M) contient M comme facteur direct. Un facteur direct d'un module flasque (resp. coflasque, inversible) est du même type. On en déduit que l'application Res $\circ$ Ind : $\Phi_H \to \Phi_H$ est injective pour $\Phi = F^1$ et F^2. Les inductions $F^1_H \to F^1_G$ et $F^2_H \to F^2_G$ sont donc injectives. □

Le lemme 3 ci-dessous, facile, mais important pour la suite, est déjà utilisé par Lenstra [18] (démonstration de la proposition 1.2).

LEMME 3 [12]. — *Tout* G-*module admet une résolution flasque et une résolution coflasque.*

Il suffit, bien sûr (argument de dualité), de prouver l'existence d'une résolution coflasque. On peut supposer G fini. Une surjection $R \to M$ avec R de permutation, ou simplement coflasque, a un noyau coflasque, si et seulement si, pour tout sous-groupe G′ de G, l'application $R^{G'} \to M^{G'}$ est encore surjective. Pour obtenir une résolution coflasque de M, il suffit donc de prendre la somme, pour tous les sous-groupes G′ de G, des morphismes $Z[G/G'] \otimes M^{G'} \to M$, où l'on considère $M^{G'}$ comme G-module trivial. □

LEMME 4. — *Soient* $0 \to M \xrightarrow{i} N \to F \to 0$ *une résolution flasque du* G-*module* M *et* $0 \to Q \to R \xrightarrow{j} M \to 0$ *une résolution coflasque. Si* P *est un module de permutation, tout morphisme de* M *dans* P *se factorise par i, tout morphisme de* P *dans* M *se factorise par j.*

On peut ainsi dire que l'injection *i* est « verselle » parmi tous les morphismes $M \to P$ avec P de permutation. Prouvons simplement l'assertion relative à *j* : le produit fibré de R et P au-dessus de M définit une extension de P par Q, qui, d'après le lemme 1 (viii), est triviale. □

On a ensuite un « lemme de Schanuel », énoncé indépendamment par Voskresenskiĭ [36]; ce lemme assure qu'une résolution flasque d'un module M est essentiellement unique :

LEMME 5. — *Soient* $0 \to M \to P \to F \to 0$ *une résolution flasque du* G-*module* M *et* $0 \to Q \to R \to M \to 0$ *une résolution coflasque. Les classes de similitude de* F *et* Q *ne dépendent que de la classe de* M *: on les note respectivement* $\rho(M)$ *et* $\varsigma(M)$.

On devrait les noter, pour plus de précision, $\rho_G(M)$ et $\varsigma_G(M)$, mais il n'y a pas d'inconvénient à « oublier » G, car, si H est un sous-groupe invariant fermé de G agissant trivialement sur M, alors $\rho_{G/H}(M)$ coïncide avec $\rho_G(M)$ *via* le plongement naturel de $S_{G/H}$ dans S_G et, de même, $\varsigma_{G/H}(M)$ coïncide avec $\varsigma_G(M)$; de plus [*cf.* lemme 2 (xi)], avec les notations de l'énoncé, $\rho(M) = [F] = [F^H]$ et $\varsigma(M) = [Q] = [Q^H]$.

Prouvons le lemme pour les résolutions coflasques. Si $0 \to Q' \to R' \to M \to 0$ est une autre résolution coflasque de M, le produit fibré de R et R′ au-dessus de M est extension de R par Q′ et de R′ par Q; or, ces extensions sont triviales d'après le lemme 1 (viii), d'où $[Q] = [Q']$. □

LEMME 6. — *Les applications* ρ *et* ς *sont additives et duales l'une de l'autre :* $\rho(a)^0 = \varsigma(a^0)$. *L'application* ρ *est un épimorphisme de* S_G *sur* F_G *et* ς *est un épimorphisme de* S_G *sur* F^0_G.

La restriction de ρ *à* F_G^0 *est un isomorphisme de* F_G^0 *sur* F_G *: son inverse est la restriction de* ς *à* F_G. *Sur le sous-groupe* U_G, ρ *et* ς *coïncident avec la symétrie* $a \mapsto -a$.

Il suffit de noter que, si la suite $0 \to M \to P \to N \to 0$ est exacte, avec P de permutation, M coflasque et N flasque, alors $[N] = \rho(M)$ et $[M] = \varsigma(N)$. □

Observons que, si la suite $0 \to M \to P \to N \to 0$ est exacte, avec simplement P de permutation, on trouve $\rho(M) = \rho\varsigma(N)$ et $\varsigma(N) = \varsigma\rho(M)$.

LEMME 7. — *Si la suite* $0 \to M \to N \to Q \to 0$ *est exacte et si* Q *est inversible, alors* $\rho(M) = \rho(N) + [Q]$. *En particulier, si* Q *est de permutation,* $\rho(M) = \rho(N)$.

Noter que la première égalité s'écrit encore $\rho(N) = \rho(M) + \rho(Q)$ et qu'elle résulte aisément de la seconde assertion.

Introduisons une résolution flasque $0 \to N \to P \to F \to 0$ de N. La suite $0 \to Q \to \operatorname{coker}(M \to P) \to F \to 0$ est exacte et, comme Q est inversible et que F est flasque, elle est scindée [lemme 1 (vii)']. Le terme médian est donc flasque et sa classe, qui vaut $[Q] + [F] = [Q] + \rho(N)$, n'est autre que $\rho(M)$. □

Modulo traduction (*cf.* § 2, R 6), ce lemme est simplement une forme faible de la proposition 1.5 de [18], proposition qui, en termes de tores, est un corollaire direct du théorème 90 : un torseur sous un tore facteur direct d'un tore quasi trivial est localement (Zariski) trivial.

LEMME 8. — *Soient* M *et* N *deux* G-*modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\rho(M) = \rho(N)$;

(ii) *il existe deux suites exactes* $0 \to M \to E \to P \to 0$ *et* $0 \to N \to E \to R \to 0$ *avec* P *et* R *de permutation.*

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du lemme 7. Inversement, l'égalité (i) implique l'existence de deux suites exactes $0 \to M \to P \to F \to 0$ et $0 \to N \to R \to F \to 0$ avec P et R de permutation. Il suffit alors de considérer le produit fibré E de P et R au-dessus de F. □

Noter que, modulo traduction (*cf.* R 6), ce lemme 8 n'est autre que la proposition 2 de [35] (*cf.* déjà [31], lemmes 7 et 8).

LEMME 9 (Lenstra [18]). — *Soit* G *un groupe fini. Pour* M *dans* $\mathscr{L}_G$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est inversible;*

(ii) M *est* G_p-*inversible pour chaque sous-groupe de Sylow* G_p;

(iii) $\operatorname{Ext}_G^1(M, Q) = 0$ *pour tout* G-*module coflasque* Q;

(iv) $\operatorname{Ext}_G^1(F, M) = 0$ *pour tout* G-*module flasque* F.

Précisons que, dans (ii), il suffit de considérer un seul p-sous-groupe de Sylow G_p par nombre premier p divisant l'ordre de G. Ce lemme revient à affirmer que la restriction $F_G^2 \to \bigoplus_p F_{G_p}^2$ est injective. Notons que la restriction $F_G^1 \to \bigoplus_p F_{G_p}^1$ est également injective, mais c'est là un résultat immédiat.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente (*cf.* R 2). D'après le lemme 1 (viii)', la condition (ii) implique la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{G_p}(M, Q)$ pour chaque nombre premier p, d'où (iii). Si M vérifie (iii), considérons une résolution coflasque de M : elle se décompose et M est donc inversible. Le même argument appliqué à une résolution flasque de M prouve l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) et le lemme 1 (vii)' prouve la réciproque. □

PROPOSITION 1. — *Soient* G *un groupe fini et* ε *l'augmentation* $\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ *:*

(i) *toute suite exacte de* G-*modules* $0 \to Q \to L \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$, *où* L *est un* G-*module libre donne*

$$\varsigma(I_G) = [Q] \qquad \textit{et} \qquad \rho(J_G) = [Q^0];$$

(ii) *en particulier, pour tout sous-groupe* G' *de* G *:*

$$H^1[G', \rho(J_G)] = H^3(G', \mathbf{Z}).$$

On peut, par exemple, prendre pour ω l'application $\mathbf{Z}[G \times G] \to \mathbf{Z}[G]$ définie par $\omega(g_0, g_1) = g_1 - g_0$. Rappelons que I_G est le noyau de ε et que $J_G = I_G^0$. *Remarque* : la définition même de I_G montre que $\rho(I_G) = 0$; plus généralement, si H et H' sont deux sous-groupes de G tels que $H \subset H'$, ρ vaut 0 sur le noyau de l'augmentation, notée encore ε, $\mathbf{Z}[G/H] \to \mathbf{Z}[G/H']$.

Il est immédiat que, pour tout sous-groupe G' de G et tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite exacte de l'énoncé définit un isomorphisme $H^n(G', Q) \xleftarrow{\approx} H^{n-2}(G', \mathbf{Z})$. On en déduit, pour $n = 1$, que Q est coflasque, d'où (i). L'isomorphisme ci-dessus pour $n = -1$ donne (ii) par dualité : modulo R 6, cette assertion (ii) est déjà dans [33], mais sous une apparence quelque peu restrictive. □

Cette proposition 1, quoique facile, est très intéressante pour la suite : le calcul précis (i) de l'invariant $\rho(J_G)$ intervient dans les démonstrations des propositions 2 et 3 et dans les calculs explicites de R-équivalence sur les tores $R^1_{K/k}G_m$ pour K/k galoisienne finie (§ 6, prop. 15 et coroll.); la proposition ci-dessus est également utilisée pour le calcul de l'équivalence de Brauer sur ces tores [§ 7, coroll. 2 (prop. 17)] et pour les corollaires ci-dessous, mais alors (ii) suffit.

COROLLAIRE 1. — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *tout sous-groupe de Sylow de* G *est cyclique ou quaternionien généralisé;*

(ii) *tout sous-groupe abélien de* G *est cyclique;*

(iii) $H^3(G', \mathbf{Z}) = 0$ *pour tout sous-groupe* G' *de* G*;*

(iv) $\rho(J_G)$ *est coflasque.*

Cette dernière condition s'écrit encore $\rho(J_G) \in F_G \cap F_G^0$ ou, par dualité, $\varsigma(I_G) \in F_G$. L'équivalence de (iii) et (iv) est un corollaire immédiat de la proposition 1 (ii). L'équivalence de (i), (ii) et (iii) est bien connue : (iii) $\Rightarrow$ (ii) car $H^3(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_p$; pour (ii) $\Rightarrow$ (i), *voir* [3] (chap. XII, § 11, th. 11.6) et pour (i) $\Rightarrow$ (iii), *voir* [3] (chap. XII, § 7). Il résulte de ce corollaire que si G ne vérifie pas l'une des conditions ci-dessus, alors $F_G^1 \neq 0$, puisque $\rho(J_G)$ est flasque et non coflasque. Ce résultat est déjà dans [35] (th. 3) modulo traduction par R 6. □

FACULTÉ DES SCIENCES BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES ORSAY

COROLLAIRE 2. — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est métacyclique, i. e. a ses sous-groupes de Sylow cycliques;*

(ii) $F_G^1 = 0$, *i. e. tout* G-*module flasque est coflasque.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente pour G cyclique. Comme F_G^1 se plonge dans la somme directe des $F_{G_p}^1$ pour les divers sous-groupes de Sylow G_p, l'assertion (ii) pour G métacyclique en résulte. Supposons inversement $F_G^1 = 0$: la condition (iv) du corollaire 1 est donc vérifiée et tout sous-groupe de Sylow de G est cyclique sauf éventuellement G_2 qui peut être quaternionien généralisé. Or, on aurait alors (*cf.* R 3 et le corollaire du lemme 2) $F_G^1 \supset F_{G_2}^1 \supset F_{V_4}^1$, car un groupe quaternionien généralisé admet V_4 ($= \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$) pour quotient. Mais V_4 ne vérifie pas les conditions du corollaire 1, d'où $F_{V_4}^1 \neq 0$ et cette éventualité est à exclure. □

La proposition 6 du paragraphe 2 (*cf.* R 6) montre qu'il y a coïncidence entre la relation d'équivalence $\underset{(r)}{\sim}$ définie par Endo-Miyata [12] sur $\mathscr{L}_G$ et celle définie par l'application $\rho : \mathscr{L}_G \to F_G$. On peut ainsi traduire les résultats de [12] au moyen de ρ et ς. En particulier, le monoïde noté T (G) en [12] s'identifie à F_G *via* ρ et le sous-groupe T^g (G) au groupe U_G.

PROPOSITION 2 (Endo-Miyata [12]). — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est métacyclique;*

(ii) F_G *est un groupe, i. e. tout module flasque est inversible;*

(iii) $\rho(J_G) \in U_G$, *i. e.* $\rho(J_G)$ *est inversible.*

La condition (ii) s'écrit encore $F_G = U_G$ et la condition (iii) équivaut, par dualité, à $\varsigma(I_G) \in U_G$. On vient de voir [corollaire 2 (ii) de la proposition 1] une quatrième condition équivalente : $F_G = F_G^0$, condition *a priori* plus faible que la condition (ii) (l'implication $F_G = F_G^0 \Rightarrow F_G = U_G$ est déjà dans [35], théorème 4, mais la démonstration contient un argument faux).

Montrons d'abord l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit Q comme dans la proposition 1. S'il existe N tel que $Q \oplus N$ soit un module de permutation P, alors, pour tout sous-groupe G' de G, $H^2(G', Q) = \hat{H}^0(G', \mathbf{Z})$ se plonge dans $H^2(G', P)$ et ce dernier contient donc un élément d'ordre celui de G'; or cela n'est possible, dans le cas où G' est un p-groupe, que s'il est cyclique.

Pour montrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), il suffit, d'après le lemme 9 (ii), de traiter le cas d'un p-groupe cyclique G. La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre p^a de G. Soit $f(X) = X^{p^a} - 1/X^{p^{a-1}} - 1$ le polynôme cyclotomique d'indice p^a. Soient s un générateur de G, M un G-module, M' le noyau de $f(s) : M \to M$ et M'' l'image. Supposons M flasque : comme G est cyclique, M est aussi coflasque. Comme M' est sans $\mathbf{Z}$-torsion, $s^{p^{a-1}}$ a pour seul point fixe 0 dans M', qui est donc $\hat{H}^0$-trivial. On en déduit, au moyen de la suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, que M'' est flasque. Comme M'' est un $G/\langle s^{p^{a-1}} \rangle$-module, l'hypothèse de récurrence s'applique à M'', qui est donc inversible [*cf.* lemme 2 (vii) et (vi)]. Ainsi (lemme 7), $\rho(M) = \rho(M') - [M'']$ et $\rho(M)$ inversible $\Leftrightarrow \rho(M')$ inversible.

Comme (lemme 6), M étant déjà coflasque, M inversible $\Leftrightarrow \rho(M)$ inversible, il reste simplement à prouver que $\rho(M')$ est inversible. Or M′ est un $\mathbf{Z}[\zeta]$-module pour ζ une racine primitive p^a-ième de 1. C'est un module sans torsion sur $\mathbf{Z}$, donc sur $\mathbf{Z}[\zeta]$: comme $\mathbf{Z}[\zeta]$ est de Dedekind, M′ est donc un $\mathbf{Z}[\zeta]$-module projectif. Ainsi suffit-il de traiter le cas de $\mathbf{Z}[\zeta]$ qui n'est autre que M'_0 pour $M_0 = \mathbf{Z}[G]$. Or, les raisonnements initiaux appliqués à M_0 au lieu de M montrent que $\rho(M'_0) = [M''_0]$ est inversible. □

COROLLAIRE. — *Soit* G *un 2-groupe quaternionien généralisé : les monoïdes* F^1_G *et* F^2_G *sont tous les deux non triviaux.*

Ajoutons que pour le groupe quaternionien d'ordre 8 le groupe U_G est trivial (*cf.* R 5). Le résultat pour F^1_G est déjà connu (corollaire 2 de la proposition 1). D'après le corollaire 1 de la proposition 1, $\rho(J_G)$ est flasque et coflasque; mais, d'après la proposition 2, il n'est pas inversible, d'où $F^2_G \neq 0$. □

Notons que ce corollaire contredit l'assertion $F^2_G = 0$ indiquée en [36], i. e., avec les notations de [36] et modulo R 6, le fait que, pour L/k galoisienne finie quelconque, $Z^0(L/k)$ soit un groupe : il n'en est pas toujours ainsi, même pour k p-adique (considérer sur $\mathbf{Q}_2$ l'exemple C du paragraphe 8).

PROPOSITION 3 (Endo-Miyata [12]). — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $G = \langle s, t \rangle$ *avec* $t^m = s^{2^n} = 1$ *et* $sts^{-1} = t^r$, *pour* m *impair et* $r^2 \equiv 1 \bmod m$;

(ii) $\rho(J_G) = 0$;

(iii) $\rho(J_G)$ *d'ordre fini.*

On peut, en (ii) et (iii), remplacer $\rho(J_G)$ par $\varsigma(I_G)$. Notons d'abord que la condition (i) équivaut à la condition

(iv) G *est métacyclique et* $H^4(G, \mathbf{Z}) = \hat{H}^0(G, \mathbf{Z})$.

En effet, un groupe métacyclique G est le produit semi-direct $G' \rtimes \Gamma$ d'un groupe cyclique invariant $G' = \langle t \rangle$, d'ordre m, et d'un groupe cyclique $\Gamma = \langle s \rangle$, d'ordre l premier à m ([37], p. 145). Soit $\mathbf{Z}_r$ l'image de $\Gamma \xrightarrow{\text{Int}} \text{Aut}(G')$. Ainsi, s agit sur G' *via* r et sur $H^4(G', \mathbf{Z})$ *via* r^2. Comme $H^4(G, \mathbf{Z}) = H^4(G', \mathbf{Z})^\Gamma \oplus H^4(\Gamma, \mathbf{Z})$, l'égalité $H^4(G, \mathbf{Z}) = \hat{H}^0(G, \mathbf{Z})$ équivaut à la condition $r^2 \equiv 1 \bmod m$. Ainsi (i) $\Rightarrow$ (iv). Inversement, $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$ avec Γ' d'ordre impair et Γ'' 2-primaire; comme l'image de $\Gamma \to \text{Aut}\, G'$ est d'ordre 2 au plus, Γ' est central dans G et $G = (G' \times \Gamma') \rtimes \Gamma''$, d'où (i), en prenant pour « nouveaux » s et t des générateurs respectifs de Γ'' et $G' \times \Gamma'$. Rappelons ([3], chap. XII, § 11) que la condition $H^4(G, \mathbf{Z}) = \hat{H}^0(G, \mathbf{Z})$ signifie que la cohomologie de G admet 4 pour période.

Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), *voir* [12] (th. 2.3) : le cas cyclique ($r \equiv 1 \bmod m$) est immédiat puisqu'alors $J_G = I_G$ [$\rho(I_G)$ vaut toujours 0]; le cas $G = \mathfrak{S}_3$ est explicité au paragraphe 6, *b*. Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i), i. e. (iii) $\Rightarrow$ (iv). Si $\rho(J_G)$ est d'ordre fini, il est *a fortiori* inversible et G est métacyclique (prop. 2). Soit Q comme dans la proposition 1. Il existe, par hypothèse, deux modules de permutation P et R et un entier

$n > 0$, tels que $(Q^0)^n \oplus P = R$. On en déduit $Q^n \oplus P = R$ et, par simplification (dans les groupes abéliens finis), $H^i(G, Q) = H^i(G, Q^0)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. En particulier, $\hat{H}^0(G, \mathbf{Z}) = H^2(G, Q) = H^2(G, Q^0) = H^4(G, \mathbf{Z})$. □

Remarque.

R 4. Supposons *a priori* le groupe G produit semi-direct $G' \rtimes \Gamma$ de deux groupes cycliques $G' = \langle t \rangle$, invariant, et $\Gamma = \langle s \rangle$, d'ordres respectifs p^m et 2^n avec p premier impair. Pour un tel groupe G, les conditions de la proposition 3 sont encore équivalentes aux suivantes :

(v) $\rho(J_{G/\Gamma}) = 0$;

(vi) $\rho(J_{G/\Gamma})$ *d'ordre fini.*

Quitte à diviser G et Γ par le noyau du morphisme $\Gamma \xrightarrow{\text{Int}} \text{Aut } G'$, on peut, pour la démonstration, supposer ce morphisme injectif (corollaire du lemme 2). Cela impose $n = 0$ ou 1 dans la condition (i). L'implication (i) $\Rightarrow$ (v) est déjà connue pour $n = 0$ (proposition ci-dessus); elle est prouvée pour $n = 1$ au paragraphe 6, *d* 1. Inversement, la suite exacte $0 \to Q \to \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/\Gamma] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$ définie par $\omega(1) = 1 - t$ donne une résolution coflasque de $I_{G/\Gamma}$, i. e. $\rho(J_{G/\Gamma}) = [Q^0]$ (§ 6, *d*2). On trouve ainsi

$$H^2(G, Q) = H^1(G, I_{G/\Gamma}) = \mathbf{Z}_{p^m} \qquad \text{et} \qquad H^2(G, Q^0) = H^3(G, J_{G/\Gamma});$$

or $H^3(G, J_{G/\Gamma})$ est le noyau de la restriction $H^4(G, \mathbf{Z}) \to H^4(\Gamma, \mathbf{Z})$, noyau qui s'identifie, par la restriction, à $H^4(G', \mathbf{Z})^\Gamma$. La condition (vi) implique, comme (iii) précédemment, l'égalité $H^2(G, Q) = H^2(G, Q^0)$, ce qui impose que Γ agisse trivialement sur $H^4(G', \mathbf{Z})$, i. e. Γ d'ordre 1 ou 2. □

PROPOSITION 4. — *Pour* $G = V_4$ *le monoïde* F_G^1 *est non trivial, mais* $F_G \cap F_G^0 = 0$.

Autrement dit, tout module flasque et coflasque est stablement de permutation, i. e. $F_G^2 = U_G = 0$. Montrons d'abord que, si M est flasque, $\rho(M) = 0$, i. e. il existe une suite exacte $0 \to M \to P_1 \to P_2 \to 0$ avec P_1 et P_2 de permutation. Le groupe G est engendré par deux éléments s et t d'ordre 2 qui commutent. Soient M′ le noyau de la multiplication par $1 + s$ dans M et M″ son image. Comme $H^{-1}(G, M) = H^0(G, M') = 0$, la suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne $H^{-1}(G, M'') = 0$. Le G/s-module M″ est donc de permutation (les seuls $\mathbf{Z}[\langle t \rangle]$-modules indécomposables sont $\mathbf{Z}$, $I_{\langle t \rangle}$ et $\mathbf{Z}[\langle t \rangle]$) et, d'après le lemme 7, $\rho(M) = \rho(M')$. Comme s vaut $-\text{id}$ sur M′, la décomposition de M′ en somme de $\langle t \rangle$-modules indécomposables est stable par s et montre que le G-module M′ est somme de facteurs $I_{G/t}$, $I_{G/st}$ et $\ker(\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}[G/s])$. Or, ρ vaut 0 sur chacun de ces modules. En conclusion, $\rho(M) = 0$. Si, en outre, M est coflasque, $[M] = \varsigma\, \rho(M) = 0$. □

Remarque.

R 5. *L'étude,* pour G fini, *du monoïde* F_G peut se décomposer en celles des monoïdes sans torsion F_G^1 et F_G^2 et du groupe U_G. Nous avons donné quelques résultats fort minces sur F_G^1 et F_G^2 et on peut se demander, par exemple, s'ils sont de type fini. Le groupe U_G en revanche est assez bien connu. C'est un groupe abélien de type fini (Jacobinski, *cf.* [12],

[10]), mais non nécessairement fini. En effet, si G est métacyclique, mais si sa cohomologie n'a pas pour période 4, $\rho(J_G)$ est, d'après les propositions 2 et 3, un élément d'ordre infini de U_G : on peut prendre pour G le groupe d'ordre 20 défini par $t^5 = s^4 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$ ou le groupe d'ordre 21 défini par $t^7 = s^3 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$. Le rang du groupe U_G a d'ailleurs été calculé de façon précise par A. W. M. Dress [10] (U_G y est désigné sous le nom de *permutation class group*). En particulier, U_G est un groupe fini lorsque G est un p-groupe. Endo et Miyata ont même énuméré de nombreux cas (*cf.* [11] et [12], th. 3.2 et 3.3), où U_G est égal au groupe $C(\Omega_{Z[G]})$ des classes d'un ordre maximal de $Q[G]$ contenant $Z[G]$: il en est ainsi pour un p-groupe abélien, pour un p-groupe d'ordre impair, pour le groupe diédral D_{p^c} (pour p premier $\neq 2$), pour le groupe quaternionien H_2 d'ordre 8, ... Ainsi, pour p premier $\neq 2$, si $\zeta = \sqrt[p]{1}$, $F_{Z_p} = C(Z[\zeta])$ et $F_{D_p} = C(Z[\zeta+\zeta^{-1}])$; pour H_2, l'anneau des quaternions d'Hurwitz étant principal, $U_{H_2} = 0$. □

2. Lien avec les problèmes birationnels

Fixons d'abord quelques notations et terminologies. Étant donné un corps k, on note $\bar{k}$ une clôture *séparable* et $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. On appelle *k-variété* un k-schéma algébrique, géométriquement intègre. Etant donné une *k-variété* X et une extension K/k, on note $X_K = X \times_k K$, $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, $K[X]$ l'anneau des fonctions régulières sur X_K, $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X_K. Soit en outre Y un fermé de X. On note Div X (resp. $\mathrm{Div}_Y X$) le groupe des diviseurs de Cartier (resp. à support dans Y) de X, Pic X le groupe de Picard de X, $Z^1(X)$ [resp. $Z^1_Y(X)$] le groupe des diviseurs de Weil (resp. à support dans Y), i. e. des cycles de codimension 1, de X et Cl X le groupe des classes de tels cycles pour l'équivalence rationnelle. Deux k-variétés X et Y sont dites k-birationnellement équivalentes si $k(X)$ et $k(Y)$ sont k-isomorphes, i. e. s'il existe des ouverts non vides U dans X et V dans Y qui sont k-isomorphes. On dit que X et Y sont *k-stablement birationnellement équivalentes* si, A^n_k désignant $\mathrm{Spec}\, k[T_1, \ldots, T_n]$, les variétés $X \times_k A^r_k$ et $Y \times_k A^s_k$ sont k-birationnellement équivalentes pour r et s convenables. On dit que X est K-*rationnelle* si $K(X)$ est transcendant pur sur K. On appelle *k-compactification lisse* de X une k-immersion ouverte de X dans une variété complète et lisse : il en existe en caractéristique 0 d'après Hironaka [15].

Soit G_m le groupe multiplicatif $\mathrm{Spec}\, Z[T, T^{-1}]$. Soit $\mathscr{T}_k$ (resp. $\mathscr{T}_{K/k}$) la catégorie des k-tores algébriques (resp. la sous-catégorie de ceux déployés par l'extension K/k). Étant donné un k-tore algébrique T, on note $\hat{T}$ le $\mathfrak{g}$-module Z-libre de type fini formé de ses caractères, i. e. l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $\mathrm{Hom}(\bar{T}, G_{m,\bar{k}})$. Inversement, si M est dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$, on note D(M) le k-tore $\mathrm{Spec}\, \bar{k}[M]^{\mathfrak{g}}$. On obtient ainsi une dualité entre $\mathscr{T}_k$ et $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$ qui induit, pour toute sous-extension galoisienne K/k de groupe G, une dualité entre $\mathscr{T}_{K/k}$ et $\mathscr{L}_G$. On dit que T est trivial, ou déployé, si $\mathfrak{g}$ agit trivialement sur $\hat{T}$, *quasi trivial* si $\hat{T}$ est un $\mathfrak{g}$-module de permutation, *anisotrope* si $H^0(\mathfrak{g}, \hat{T}) = 0$, *flasque* (resp. *coflasque*) si $\hat{T}$ est un $\mathfrak{g}$-module flasque (resp. coflasque). Si K/k est une sous-extension finie de $\bar{k}/k$, correspondant au sous-groupe ouvert $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$,

on note $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ le tore obtenu à partir de $\mathbf{G}_{m,K}$ par restriction des scalaires (à la Weil) de K à k : son module des caractères est $\mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$. Un tore trivial est k-isomorphe à une puissance de $\mathbf{G}_{m,k}$, un tore quasi trivial à un produit de tores du type $R_{K/k}\mathbf{G}_m$. Tout tore quasi trivial est une variété k-rationnelle : c'est un ouvert d'un espace affine. Soient $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ le noyau de la norme $N_{K/k} : R_{K/k}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$ et $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ le conoyau de l'inclusion naturelle de $\mathbf{G}_{m,k}$ dans $R_{K/k}\mathbf{G}_m$: leurs modules des caractères sont respectivement $J_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $I_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Si k est un corps *global*, i. e. un corps de nombres ou de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, une extension galoisienne K/k de groupe G définit une distribution $(G^v)_{v\in\Omega_k}$ de (classes de conjugaison de) sous-groupes G^v (groupe de décomposition d'un prolongement de v à K) de G, indexée par l'ensemble Ω_k des places v de k. Si M est un G-module continu *quelconque* (non nécessairement dans $\mathscr{L}_G$), on note, pour $i\in\mathbf{N}$, ou même $i\in\mathbf{Z}$ si G est fini, $Ш^i(K/k, M)$, ou par abus $Ш^i(G, M)$, le noyau de la restriction $H^i(G, M)\to\prod_{v\in\Omega_k} H^i(G^v, M)$. Si M est dans $\mathscr{L}_G$, ou si M et i vérifient $H^i(G^v, M) = 0$ pour presque toute place v, on note $Ч^i(K/k, M)$, ou par abus $Ч^i(G, M)$, le conoyau de cette même application de restriction. Ces notations seront utilisées ultérieurement pour les calculs sur les corps globaux. Notons que, pour un k-tore quasi trivial E, $Ш^2(k, E) = 0$ (principe de Hasse pour le groupe de Brauer d'un corps global) et, que, pour T dans $\mathscr{T}_{K/k}$ avec K/k galoisienne, $Ш^2(k, T) = Ш^2(K/k, T)$ d'après le théorème 90 et la remarque précédente. Enfin, pour un G-module de permutation M, on trouve $Ш^2(G, M) = 0$ par réduction au cas $M = \mathbf{Z}$ et application du théorème de Čebotarev à des sous-extensions finies convenables de K/k. On en déduit que, si L/k est la sous-extension galoisienne de K/k définie par le sous-groupe invariant H et si M est dans $\mathscr{L}_{G/H}$, alors $Ш^2(K/k, M) = Ш^2(L/k, M)$.

LEMME 10 (Rosenlicht [24]). — *Si* X *est une k-variété,* $U_k(X) = k[X]^*/k^*$ *est un groupe abélien* **Z***-libre de rang fini. Le foncteur contravariant* $X\mapsto U_k(X)$ *est additif sur la catégorie des k-variétés :* $U_k(X)\oplus U_k(Y)\xrightarrow{\approx} U_k(X\times_k Y)$.

Pour la première assertion, on peut se restreindre à un ouvert affine normal Y de X, car $U_k(X)\subsetneq U_k(Y)$. Une k-compactification normale $Y\to Y'$ plonge $U_k(Y)$ dans le groupe abélien libre de rang fini $Z^1_{Y'-Y}(Y')$. L'additivité de U_k est bien connue (*cf.* [24]) pour des variétés ayant des points rationnels. On s'y ramène par descente galoisienne, car $X(\bar{k})\neq\varnothing$ ($\bar{k}$ clôture séparable!) et, d'autre part, $H^0[\mathfrak{g}, U_{\bar{k}}(\bar{X})] = U_k(X)$ d'après le théorème 90. □

LEMME 11. — *Si* X *et* Y *sont deux k-variétés lisses et si* Y *est k-rationnelle, le morphisme canonique* $\operatorname{Pic} X\oplus\operatorname{Pic} Y\to\operatorname{Pic} X\times_k Y$ *est un isomorphisme.*

Montrons d'abord que, pour deux k-variétés quelconques X et Y, le morphisme ci-dessus est injectif : c'est évident si X et Y ont des points rationnels; comme c'est le cas sur $\bar{k}$, on s'y ramène par descente galoisienne *via* la suite exacte

$$0\to H^1(\mathfrak{g}, k[X]^*)\to\operatorname{Pic} X\to H^0(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic}\bar{X}),$$

en utilisant l'injection $H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[X]^* \oplus \bar{k}[Y]^*) \to H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[X \times Y]^*)$ (lemme 10 et th. 90). Soient désormais X et Y lisses et V un ouvert non vide de Y. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Div}_{X\times Y - X\times V} X\times Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X\times Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X\times V & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \approx & & \uparrow \varphi_Y & & \uparrow \varphi_V & & \\ \mathrm{Div}_{Y-V} Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathrm{Pic}\, Y & \to & \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathrm{Pic}\, V & \to & 0. \end{array}$$

La flèche de gauche est un isomorphisme, d'où φ_Y surjective $\Leftrightarrow$ φ_V surjective. Par triple application de cette remarque, on est ramené, lorsque Y est k-rationnelle, au cas où X est affine (= Spec A) et Y l'espace affine, ou même la droite affine Spec $k[t]$, auquel cas l'assertion $\mathrm{Pic}\, A \xrightarrow{\approx} \mathrm{Pic}\, A[t]$ est bien connue (pour A régulier). □

Les deux propositions ci-dessous permettent de faire le lien entre les considérations purement algébriques du paragraphe 1 et les problèmes birationnels, spécialement pour les tores. A la terminologie près, elles sont dues essentiellement à Swan [31] et Voskresenskiĭ ([33], [35]) : *cf.* pour plus de détails la remarque R 6.

PROPOSITION 5. — *Soient* X *une k-variété lisse et* K/k *une extension galoisienne de groupe* G. *On suppose* $\mathrm{Pic}\, X_K$ *de type fini. Si* U *est un ouvert non vide de* X *tel que* $\mathrm{Pic}\, U_K = 0$, *l'élément* $\rho(K[U]^*/K^*)$ *de* F_G *ne dépend que de la classe de k-équivalence birationnelle stable de* X. *On le note* $\rho_{K/k}(X)$, *ou simplement* $\rho(X)$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté. Cet invariant vaut* 0 *pour* X *k-rationnelle.*

Tout d'abord, X étant lisse et $\mathrm{Pic}\, X_K$ de type fini, il existe des ouverts non vides U tels que $\mathrm{Pic}\, U_K = 0$ et, si U est l'un deux, il en est de même de tout ouvert non vide qu'il contient. Il suffit donc, pour prouver l'indépendance vis-à-vis de U, de considérer le cas de deux ouverts emboîtés $U \supset V$ de ce type : la suite exacte de G-modules $0 \to U_K(U) \to U_K(V) \to \mathrm{Div}_{Y_K} U_K \to 0$, où $Y = U - V$, donne le résultat en vertu du lemme 7, puisque, X étant lisse, le terme de droite est un module de permutation. L'invariance par k-isomorphisme birationnel se déduit de l'existence d'ouverts k-isomorphes. Si W est k-rationnelle, l'invariance $\rho(X \times_k W) = \rho(X)$ se déduit des lemmes 10 et 11. □

PROPOSITION 6. — *Soient* T *un k-tore algébrique et* $\rho(T) = \rho_{\bar{k}/k}(T)$. *L'invariant* $\rho(T)$ *caractérise les classes de k-équivalence birationnelle stable dans* $\mathscr{T}_k$. *Il est trivial pour* T *k-stablement rationnelle, additif et coïncide avec* $\rho(\hat{T})$. *Si* T *est déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G, *l'invariant* $\rho(T)$ *est dans* F_G; *il coïncide avec* $\rho_{K/k}(T)$ *et, en caractéristique* 0, *avec* $[\mathrm{Pic}\, X_K]$, X *désignant un k-compactifié lisse de* T.

Désignons, comme Voskresenskiĭ [35], par $Z(K/k)$ l'ensemble des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-tores déployés par l'extension galoisienne K/k de groupe G. L'énoncé ci-dessus affirme que l'application $\rho : \mathscr{T}_{K/k} \to F_G$ définie par $T \mapsto \rho(T)$ *via* la proposition 5 induit un isomorphisme de monoïdes

$$\rho : \ Z(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G.$$

L'égalité $\rho(T) = \rho(\hat{T})$ résulte de la définition de $\rho(T)$: en effet, $\mathrm{Pic}\, \bar{T} = 0$ et $U_{\bar{k}}(\bar{T})$ s'identifie au $\mathfrak{g}$-module $\hat{T}$ (Rosenlicht [24]). De même, $\rho_{K/k}(T) = \rho_G(\hat{T})$ et $\rho_G(\hat{T})$

coïncide avec $\rho(\hat{T})$ dans F_g. Soient T et T′ dans $\mathscr{T}_k$, tels que $\rho(T) = \rho(T')$. L'égalité $\rho(\hat{T}) = \rho(\hat{T}')$ implique (*cf.* lemme 8) l'existence, dans $\mathscr{T}_k$, de deux suites exactes $1 \to S \to M \to T \to 1$ et $1 \to S' \to M \to T' \to 1$ avec S et S′ quasi triviaux. D'après le théorème 90, ces deux fibrations $M \to T$ et $M \to T'$ sont localement triviales, ce qui donne un k-isomorphisme birationnel de $T \times S$ sur $T' \times S'$; comme S et S′ sont k-rationnelles, les variétés T et T′ sont k-stablement birationnellement équivalentes.

En caractéristique 0, on sait, *via* Hironaka (*cf.* [33]), que Pic $\overline{X}$ est dans $\mathscr{L}_g$ si X est k-rationnelle et qu'en général la classe de similitude du g-module Pic $\overline{X}$ (non nécessairement dans $\mathscr{L}_g$) est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-variétés complètes et lisses, invariant nul pour les variétés k-stablement rationnelles. Soient X une k-compactification lisse de T, Y le fermé complémentaire et K/k comme dans l'énoncé. La suite exacte de G-modules

$$\text{(B)} \qquad 0 \to \hat{T} \to \mathrm{Div}_{Y_K} X_K \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0,$$

a pour terme médian un G-module de permutation, puisque X est lisse. L'assertion $\rho(T) = [\mathrm{Pic}\, X_K]$ équivaut donc au fait que Pic X_K est un G-module flasque. Quitte à passer au quotient par un sous-groupe ouvert de G agissant trivialement sur la suite (B) ci-dessus, on peut supposer G fini. Montrons simplement que $H^{-1}(G', \mathrm{Pic}\, X_K) = 0$ pour $G' = G$, la démonstration étant la même pour un autre sous-groupe G′ de G, à condition de remplacer k par l'extension k' correspondante. La suite exacte

$$0 = H^{-1}(G, \mathrm{Div}_{Y_K} X_K) \to H^{-1}(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \to \hat{H}^0(G, \hat{T})$$

prouve le résultat pour T anisotrope. Pour T quelconque, il existe une suite exacte de k-tores $1 \to T' \to T \to T'' \to 1$ avec T′ trivial et T″ anisotrope. Soient X′ et X″ des k-compactifications lisses de T′ et T″ respectivement. La fibration $T \to T''$ est localement triviale (th. 90). Ainsi, X est k-birationnellement équivalente à $X' \times_k X''$. Comme X′ est k-rationnelle, $[\mathrm{Pic}\, \overline{X}] = [\mathrm{Pic}\, \overline{X}'']$. Si $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, le G-module Pic X_K n'est autre que $(\mathrm{Pic}\, \overline{X})^{\mathfrak{h}}$; de même pour X″, ce qui donne $[\mathrm{Pic}\, X_K] = [\mathrm{Pic}\, X''_K]$. Comme $H^{-1}(G, \mathrm{Pic}\, X''_K) = 0$ d'après l'étude du cas anisotrope, on a donc également $H^{-1}(G, \mathrm{Pic}\, X_K) = 0$. Ainsi, Pic X_K est un G-module flasque et, par suite, $\rho(T) = [\mathrm{Pic}\, X_K]$. Quitte à réduire $\mathfrak{h}$ pour qu'il agisse trivialement sur Pic $\overline{X}$, on obtient de même $\rho(T) = [\mathrm{Pic}\, \overline{X}]$. D'ailleurs, d'après le lemme 2 (xi), l'égalité $\rho(T) = [\mathrm{Pic}\, \overline{X}]$ implique $\rho(T) = [\mathrm{Pic}\, X_K]$. □

Remarque.

R 6. La proposition 6 ci-dessus montre que la relation d'équivalence $\underset{(r)}{\sim}$ définie sur $\mathscr{L}_G$ par Endo-Miyata [12] coïncide avec celle définie par l'application $\rho : \mathscr{L}_G \to F_G$, ce qui induit des isomorphismes $T(G) \xrightarrow{\approx} F_G$ et $T^g(G) \xrightarrow{\approx} U_G$. On voit de même que, pour K/k galoisienne de groupe G, l'application $T \mapsto \rho(T)$ coïncide avec l'application $p : \mathscr{T}_{K/k} \to S_G$ de Voskresenskiĭ [35] et induit des isomorphismes $Z(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G$ et $Z^0(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G \cap F_G^0$.

Comme déjà indiqué, les arguments utilisés dans les deux dernières propositions sont essentiellement dus à Swan [31] et Voskresenskiĭ [33] (*cf.* aussi Ono [21], prop. 4.5.1). Indiquons, en bref, la démarche de Voskresenskiĭ. Soit K/k galoisienne de groupe G : Voskresenskiĭ montre ([35], th. 1 et 2) qu'on peut définir une application injective $p : Z(K/k) \to S_G$ en posant $p(T) = [\mathrm{Pic}\ X_K]$ en caractéristique 0 (*cf.* déjà [33] pour $\bar{k}/k$) et, sinon, par transfert à partir d'une extension auxiliaire K_0/k_0 de même groupe en caractéristique 0 *via* $\mathscr{T}_{K/k} \xrightarrow{\approx} \mathscr{T}_{K_0/k_0}$. L'image de p est caractérisée dans la note [36] (th. 1, 2, 3) : c'est F_G.

La représentation adoptée ici, purement algébrique, a l'avantage de fournir, *via* le lemme 3, une procédure effective (*cf.* § 6) pour le calcul de l'invariant $\rho(T)$ et d'éviter ainsi le calcul du $\mathfrak{g}$-module Pic $\bar{X}$, pour une k-compactifiée lisse X de T, calcul qui se révèle fort compliqué, même avec l'aide de la théorie des éventails (Demazure) : cette facilité de calcul (non mentionnée dans [36]) est par exemple essentielle pour obtenir dans la proposition 1 la valeur précise de $[\mathrm{Pic}\ \bar{X}]$ pour $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ avec K/k galoisienne [*cf.* (i)] et non seulement la valeur de $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\ \bar{X})$. La méthode géométrique de calcul de l'invariant $\rho(T)$ serait simplifiée par l'usage d'une k-compactification normale X, mais alors, ni Pic $\bar{X}$, ni Cl $\bar{X}$ ne donnent en général des $\mathfrak{g}$-modules convenables, comme on le voit déjà pour l'adhérence de $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ dans $R_{K/k}\mathbf{P}^1$ avec K/k galoisienne cubique : pour les diviseurs de Cartier, Div $\bar{X}$ n'est pas un module de permutation; pour les diviseurs de Weil, Cl $\bar{X}$ a de la $\mathbf{Z}$-torsion. □

Voici un exemple d'application de la proposition 6 :

PROPOSITION 7. — *Soit* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G. *Soit* T *le tore* $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$. *Pour tout sous-groupe* G′ *de* G, $H^1[G', \rho(T)] = H^3(G', \mathbf{Z})$.

C'est un corollaire immédiat des propositions 1 et 6. Ce résultat est démontré en [33] pour k de caractéristique 0 sous la forme $H^1(G', \mathrm{Pic}\ X_K) = H^3(G', \mathbf{Z})$ par une méthode assez détournée. □

COROLLAIRE. — *Soient* K *et* K′ *deux extensions galoisiennes de degré* 4, *non cycliques, d'un corps* k. *Soient* $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ *et* $T' = R^1_{K'/k}\mathbf{G}_m$. *Si* $K \neq K'$, *ces deux tores* T *et* T′, *de dimension* 3, *sont* k*-birationnellement inéquivalents.*

Ils ne sont même pas k-stablement birationnellement équivalents. En caractéristique différente de 2, K est de la forme $k_{a,b} = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ pour a et b dans k : on note $T_{a,b}$ le tore $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ correspondant. L'assertion ci-dessus répond à une question de Voskresenskiĭ [33] qui traitait uniquement le cas d'extensions $\mathbf{Q}_{a,b}/\mathbf{Q}$ ayant un groupe de décomposition non cyclique.

Soient L le corps engendré par K et K′, k' leur intersection, G, H et H′ les groupes de Galois respectifs de L/k, L/K et L/K′, F un G-module H-trivial de classe $\rho(T)$ et F′ un G-module H′-trivial de classe $\rho(T')$. Si $K \neq K'$, k'/k est de degré 1 ou 2. Dans le premier cas, $G = H \times H'$. D'après la proposition ci-dessus,

$$H^1(G/H, F) = H^3(G/H, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2 \qquad \text{puisque} \quad G/H = V_4.$$

Ainsi $H^1(H', F) = \mathbf{Z}_2$, alors que $H^1(H', F') = 0$. *A fortiori*, $\rho(T) \neq \rho(T')$ dans S_G et, d'après la proposition 6, T et T' ne sont donc pas stablement k-birationnellement équivalents. Dans le second cas, G est le produit direct de H, H' et d'un troisième sous-groupe H'' d'ordre 2. Comme ci-dessus, $H^1(G/H, F) = \mathbf{Z}_2$ et par suite $H^1(H' \times H'', F) = \mathbf{Z}_2$. Au contraire, π désignant la projection $G \to G/H'$, la proposition ci-dessus appliquée au sous-groupe cyclique $\pi(H'')$ de G/H' donne

$$H^1[\pi(H''), F'] = H^3[\pi(H''), \mathbf{Z}] = 0,$$

si bien que $H^1(H' \times H'', F') = 0$. On conclut alors comme dans le premier cas. □

3. Les tores flasques

Rappelons qu'un tore *flasque* est un k-tore S tel que $\hat{S}$ soit un $\mathfrak{g}$-module flasque. Si S est déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, il revient au même [lemme 2 (vii)] de dire que $\hat{S}$ est G-flasque. Le premier résultat sur les tores flasques est une conséquence du théorème de finitude suivant :

THÉORÈME (Roquette [23]). — *Soit* A *une* $\mathbf{Z}$*-algèbre commutative réduite de type fini :*
(i) *le groupe des unités* A^* *de* A *est de type fini;*
(ii) *si* A *est normale, le groupe* Cl A *des classes de diviseurs est de type fini.* □

Voir également [16] et, pour (i), [25]. Le résultat sur les unités généralise le théorème des unités de Dirichlet, celui sur Cl A utilise de façon essentielle le théorème de Mordell-Weil élargi par Néron au cas d'un corps de base de type fini sur le corps premier.

COROLLAIRE. — *Soient k un corps de type fini sur le corps premier et* K/k *une extension galoisienne finie de groupe de Galois* G. *Il existe alors un anneau* A, *de type fini sur* $\mathbf{Z}$, *de corps des fractions* K, *stable par* G, *régulier et tel que* Pic A = 0.

Soit B un sous-anneau de K, de corps des fractions K, de type fini sur $\mathbf{Z}$, stable par G. Comme B est une $\mathbf{Z}$-algèbre intègre, de type fini, l'ensemble Reg B des points réguliers de Spec B est, d'après Nagata (*cf.* [14] EGA IV 6.12.6), un ouvert non vide. Quitte à inverser une partie finie convenable, stable par G, on peut donc supposer l'anneau B régulier. D'après le théorème ci-dessus, Pic B est de type fini : il existe donc un ensemble fini Σ de points de codimension 1 de Spec B définissant des diviseurs dont les classes engendrent Pic B et on peut prendre Σ stable par G. Soit F son adhérence : il suffit d'inverser un système fini, stable par G, d'équations définissant F pour obtenir un anneau A ayant les propriétés requises. □

THÉORÈME 1. — *Soit k un corps de type fini sur le corps premier. Si* S *est un k-tore flasque, le groupe* $H^1(k, S)$ *est fini.*

Soit K/k une extension galoisienne finie de groupe G déployant S. Soit A un sous-anneau de K ayant les propriétés indiquées dans le corollaire ci-dessus. La suite exacte de G-modules $0 \to A^* \to K^* \to \operatorname{Div} A \to 0$ reste exacte par tensorisation sur $\mathbf{Z}$ par $\hat{S}^0$. Comme $S(K) = \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} K^*$, on obtient ainsi la suite exacte

$$H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} A^*) \to H^1(k, S) \to H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \operatorname{Div} A).$$

Or Div A est un G-module de permutation (non de type fini sur Z, mais c'est sans importance ici) et $\hat{S}$ est flasque : le terme de droite est donc nul d'après le lemme 1 (vi). Le terme de gauche est fini, quel que soit S, car A* est de type fini (théorème précédent). □

Remarques.

R 7. Si l'on suppose seulement A normal (au lieu de l'hypothèse « A régulier et Pic A = 0 »), la valeur de $H^1(k, S)$ est donnée par la suite exacte

$$N \to H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_Z A^*) \to H^1(k, S) \to Q,$$

avec pour définition de N et Q, la suite exacte

$$0 \to N \to \mathrm{Hom}_G(\hat{S}, \mathrm{Div}\, A) \to \mathrm{Hom}_G(\hat{S}, \mathrm{Cl}\, A) \to Q \to 0. \quad \square$$

R 8. Dans le cas d'un corps *global* (corps de nombres ou corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini), le résultat de finitude se déduit aussi de l'évaluation précise de $H^1(k, S)$ *via* le corps de classes [§ 5, coroll. 5 (th. 2)]. Il faut d'ailleurs noter que, dans ce cas, $H^1(k, S)$ peut être fini sans que S soit flasque (*cf.* § 6, *c*) : si S est un k-tore déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, une condition nécessaire et suffisante de finitude de $H^1(k, S)$ est la nullité de $H^1(G', \hat{S})$ pour tout sous-groupe cyclique G' de G (§ 5, R 10). On en déduit, au moyen de la proposition 2, que, pour G métacyclique, $H^1(k, S)$ fini $\Leftrightarrow H^1(k, S) = 0$. Comme autre corollaire, on voit que le théorème 5 de [33] assure déjà que, pour une k-compactification lisse X d'un tore défini sur un corps de nombres k, $H^1[k, D(\mathrm{Pic}\, \overline{X})]$ est fini.

Dans le cas d'un corps *local* à corps résiduel fini, la finitude de $H^1(k, S)$ vaut pour un k-tore S quelconque. Le corps de classes en donne la valeur exacte, mais, pour la finitude, il suffit de connaître l'existence d'un sous-groupe ouvert du groupe A* des unités de K qui soit cohomologiquement trivial : la même méthode de démonstration que pour le théorème ci-dessus s'applique encore. □

Étant donné un k-schéma X et un k-tore S, on désigne par $H^1(X, S)$ le premier groupe de *cohomologie étale* de X à valeurs dans S : ses éléments s'identifient aux classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes (i. e. torseurs représentables) sur X sous S, classes qu'on appellera, par abus de langage, *torseurs* sur X sous S. Sauf mention du contraire, la cohomologie employée dans la suite est la cohomologie étale.

PROPOSITION 8. — *Soit* U *un ouvert de l'espace affine* A_k^n *contenant un point rationnel. Si* S *est un k-tore flasque, l'homomorphisme*

$$H^1(k, S) \to H^1(U, S),$$

déduit du morphisme structural $U \to k$, *est un isomorphisme.*

Autrement dit, *tout torseur sur* U *sous le tore flasque* S *est « constant »*. La démonstration utilise uniquement les propriétés suivantes de $X = A_k^n$: X est lisse, $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ et $\mathrm{Pic}\, \overline{X} = 0$. Considérons en effet la suite spectrale de Leray :

$$H^p[k, H^q(\overline{U}, S)] \Rightarrow H^n(U, S),$$

relative au morphisme structural $U \to k$. Comme $\operatorname{Pic} \overline{X} = 0$ et que X est lisse, *a fortiori* $\operatorname{Pic} \overline{U} = 0$ et par suite $H^1(\overline{U}, S) = 0$. Le morphisme naturel

$$H^1[k, H^0(\overline{U}, S)] = H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)] \to H^1(U, S)$$

est donc bijectif. D'après les hypothèses faites sur $\overline{X}$, $\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ s'identifie au $\mathfrak{g}$-module de permutation des diviseurs de $\overline{X}$ à support en dehors de $\overline{U}$; comme S est flasque, $H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)]$ vaut 0 d'après le lemme 1 (v). L'application

$$H^1(k, S) = H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}^*)] \to H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)]$$

est donc surjective; il en est de même de l'application composée $H^1(k, S) \to H^1(U, S)$. Si $U(k) \neq \emptyset$, cette même application est évidemment injective. □

Remarque.

R 9. Si X est une k-variété, non nécessairement lisse, l'application naturelle $H^1(k, S) \to H^1(X, S)$ est encore bijective, quel que soit le k-groupe de type multiplicatif S, pourvu que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$, $\operatorname{Pic} \overline{X} = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, ce qui est le cas pour $X = \mathbf{A}_k^n$ (*cf.* [8]). □

Indiquons une dernière propriété des tores flasques qui sera uniquement utilisée aux propositions 13 et 14, mais qui justifie la terminologie employée :

PROPOSITION 9. — *Soit* U *un ouvert d'une k-variété lisse* X. *Si* S *est un k-tore flasque, l'application naturelle de restriction*

$$H^1(X, S) \to H^1(U, S)$$

est surjective.

Autrement dit, *tout torseur sur* U *sous le tore flasque* S *s'étend à* X. Comme on le verra en [8], cette proposition permet aussi de faire le lien entre la méthode exposée ici pour l'étude de $T(k)/R$ et celle résumée en [7].

La démonstration utilise (il s'agit toujours de cohomologie étale) la suite exacte

$$H^1(X, S) \to H^1(U, S) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \operatorname{Div}_{\overline{Y}} \overline{X})$$

prouvée en [8] pour un k-tore S quelconque, U un ouvert d'une k-variété lisse X et Y le fermé complémentaire. Comme X est lisse, $\operatorname{Div}_{\overline{Y}} \overline{X}$ est un $\mathfrak{g}$-module de permutation. Ainsi, pour S flasque, le terme de droite de la suite exacte ci-dessus est nul [lemme 1 (vii)]. Noter que la proposition 8 résulte aussi de cette suite exacte et de R 9. □

4. R-équivalence et équivalence rationnelle

Rappelons la définition de la R-équivalence (*cf.* l'introduction et [20], chap. II, § 14). Soit X un schéma algébrique sur le corps k. On dit que deux points rationnels x et y de X sont *directement* R-*équivalents*, si on peut les joindre par un arc k-rationnel, i. e. s'il existe

une k-application rationnelle φ de $\mathbf{P}_k^1$ dans X telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(\infty) = y$; on le note $x \sim y$. On dit que x et y sont R-*équivalents* lorsqu'on peut les joindre par un nombre fini d'arcs k-rationnels, i. e. s'il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $X(k)$ tels que $x \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n \sim y$. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes, pour la R-équivalence, de points rationnels du k-schéma X. Si K est une extension de k, on note simplement $X(K)/R$ l'ensemble $X_K(K)/R$ des classes pour le K-schéma X_K. Tout k-morphisme $X \to Y$ induit une application $X(k)/R \to Y(k)/R$. Si K/k est une extension finie séparable et si X est un K-schéma algébrique, la définition même du foncteur « descente » $R_{K/k}$ montre que $(R_{K/k} X)(k)/R = X(K)/R$. Pour deux k-schémas X et Y, l'application naturelle $(X \times_k Y)(k)/R \to X(k)/R \times Y(k)/R$ est une bijection. Notons enfin (*voir* [20]) que, si k est infini et si X est une k-variété spéciale, i. e. une k-variété dont tout point possède un voisinage ouvert k-isomorphe à un ouvert d'un espace affine, alors $X(k)/R = \{0\}$.

PROPOSITION 10. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Soient* X *et* Y *deux k-variétés complètes et lisses. Toute k-application rationnelle f de* X *dans* Y *définit une application* $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$ *qui coïncide avec l'application naturelle là où f est définie et qui dépend fonctoriellement de f. Tout k-isomorphisme birationnel induit une bijection* $X(k)/R \xrightarrow{\approx} Y(k)/R$, *i. e.* $X(k)/R$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés complètes et lisses, invariant trivial pour* X *k-rationnelle.*

Comme cet invariant est « additif », c'est même un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable.

Montrons d'abord que l'éclatement $X \to Y$ d'un sous-k-schéma fermé Z de Y, lisse et de codimension $r+1$, induit une bijection $X(k)/R \to Y(k)/R$. Cette application est surjective, puisque la fibre d'un point rationnel de Y est un espace projectif sur k de dimension 0 ou r. Ainsi, dans une telle fibre tous les points rationnels sont R-équivalents et, pour montrer l'injectivité de f_R, il suffit de prouver le résultat suivant : tout arc k-rationnel joignant deux points y' et y'' de $Y(k)$ se relève dans X en une chaîne finie d'arcs k-rationnels joignant successivement des points rationnels $x', \ldots, x''$ avec x' au-dessus de y' et x'' au-dessus de y''. Comme Y est complète, un arc k-rationnel joignant y' et y'' est l'image d'un k-morphisme $\varphi : \mathbf{P}_k^1 \to Y$ tel que $\varphi(0) = y'$ et $\varphi(\infty) = y''$. Si cet arc n'est pas contenu dans Z, φ admet un k-relèvement unique $\psi : \mathbf{P}_k^1 \to X$, d'où l'assertion. Sinon, supposons d'abord que y' et y'' appartiennent à un même ouvert U de Z, tel que $U \times_Y X$ soit k-isomorphe à $U \times_k \mathbf{P}_k^r$: il suffit alors de considérer, pour z fixé dans $\mathbf{P}^r(k)$, le k-morphisme $\psi : \mathbf{P}_k^1 \to X$ défini, sur un ouvert, par $t \mapsto [\varphi(t), z]$. En général, Z étant lisse, il existe un recouvrement fini de Z par des ouverts ayant la propriété ci-dessus, ce qui permet d'obtenir le relèvement annoncé.

Montrons ensuite qu'un morphisme k-birationnel $X \to Y$ définit une bijection $X(k)/R \xrightarrow{\approx} Y(k)/R$. D'après [15], il existe un diagramme commutatif de morphismes k-birationnels

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont composées d'un nombre fini d'éclatements du type étudié ci-dessus. D'après l'étude initiale, les deux verticales du diagramme

$$\begin{tikzcd} X'(k)/R \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & Y'(k)/R \arrow[d, "\approx"] \\ X(k)/R \arrow[r] \arrow[ur] & Y(k)/R \end{tikzcd}$$

sont bijectives; on en déduit que la diagonale l'est aussi, donc également les horizontales (type d'argument utilisé par Deligne).

Soit f une k-application rationnelle de X dans Y. Soit $\mathscr{B}_f$ la catégorie des triples (Z, π, g), où Z désigne une k-variété complète et lisse et π et g des k-morphismes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

π étant supposé birationnel. Un tel triple définit une application $X(k)/R \to Y(k)/R$ par $g_R \circ \pi_R^{-1}$. Il est clair qu'un autre triple dominant le précédent définit la même application. Comme, d'après [15], la catégorie $\mathscr{B}_f$ est non vide et filtrante, la procédure indiquée permet de définir sans ambiguïté l'application f_R. □

COROLLAIRE. — *Soient k de caractéristique* 0 *et* X *une k-variété lisse :*

(i) *toute k-application rationnelle f de* X *dans une k-variété lisse et complète* Y *définit une application* $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$;

(ii) *soit* $X \xrightarrow{i} Y$ *une k-compactification lisse de* X. *Le fait que l'application* $i_R : X(k)/R \to Y(k)/R$ *soit bijective (resp. injective, surjective) ne dépend pas de la compactification choisie.*

Soit d'abord $\mathscr{C}_X$ la catégorie des k-compactifications lisses $i : X \to X'$ de X. Un objet de $\mathscr{C}_X$ définit f_R *via* $X(k)/R \to X'(k)/R \to Y(k)/R$ par application de la proposition à l'application rationnelle de X' dans Y définie par f. Comme, d'après [15], $\mathscr{C}_X$ est non vide et filtrante, on voit que f_R ne dépend pas du choix de la compactification.

Soient i et i' deux compactifications de X. Si i' domine i *via* $j : Y' \to Y$, on a $i_R = j_R \circ i'_R$ avec j_R bijective d'après la proposition. L'assertion (ii) résulte alors du fait que $\mathscr{C}_X$ est filtrante. □

Lorsque X est k-unirationnelle, il existe une R-classe partout dense, mais il n'est pas évident *a priori* que toute R-classe soit dense.

PROPOSITION 11. — *Soit k un corps infini. Soit* G *un k-groupe algébrique linéaire connexe, k-unirationnel (hypothèse toujours vérifiée pour k parfait ou* G *réductif). Si* U *est un ouvert non vide de* G, *l'application naturelle*

$$U(k)/R \to G(k)/R$$

est une bijection.

Par hypothèse, il existe un k-morphisme dominant φ d'un ouvert Ω de $\mathbf{P}_k^n$ dans G. Quitte à faire une translation par un élément de $G(k)$, on peut supposer que l'élément neutre e de $G(k)$ appartient à l'image de $\Omega(k)$ par φ. L'ensemble Z des points de $G(k)$ directement R-équivalents à e contient $\varphi[\Omega(k)]$ et, comme k est infini, Z est donc Zariski-dense. Par translation, on en déduit que toute R-classe est dense. L'application $U(k)/R \to G(k)/R$ est donc surjective.

Soient x et y deux points de $U(k)$ liés dans $G(k)$ par une chaîne d'équivalences directes

$$x = x_0 \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n \sim x_{n+1} = y.$$

Comme Z est dense, il rencontre l'intersection des ouverts Ux_i^{-1} pour $0 \leqq i \leqq n+1$. Soit g un élément de Z appartenant à cette intersection. Par définition de Z, $x \sim gx$ et $y \sim gy$, d'où la chaîne d'équivalences directes

$$x \sim gx = gx_0 \sim gx_1 \sim \ldots \sim gx_n \sim gx_{n+1} = gy \sim y,$$

avec, pour tout i, gx_i dans $U(k)$. Les points x et y sont donc R-équivalents dans U et l'application $U(k)/R \to G(k)/R$ est injective. □

COROLLAIRE. — *Soit k infini. Soient* G *et* G′ *deux k-groupes algébriques linéaires connexes, k-unirationnels. Si* G *et* G′ *sont k-birationnellement équivalents, alors il existe une bijection*

$$G(k)/R \xrightarrow{\approx} G'(k)/R.$$

C'est un corollaire immédiat de la proposition, puisqu'il existe dans G un ouvert non vide, k-isomorphe à un ouvert de G′. □

Un argument direct montre que la structure de groupe de $G(k)$ est compatible avec la R-équivalence. On peut, par translation, supposer que la bijection de $G(k)/R$ sur $G'(k)/R$ respecte les éléments neutres. Mais il n'est pas évident *a priori* qu'elle respecte alors les structures de groupe.

Pour une k-variété X quelconque, il est plus commode de considérer, au lieu de la R-équivalence sur $X(k)$, l'*équivalence rationnelle* sur le groupe $Z_0(X)$ des 0-cycles de X : c'est le groupe libre engendré par les points fermés de X et tout sous-k-schéma fermé fini Y de X définit un 0-cycle positif $[Y]$. On dit qu'un 0-cycle W est rationnellement équivalent à 0, s'il existe un ouvert U de $\mathbf{P}_k^1$, deux points rationnels a et b de U et un cycle Z de la k-variété $U \times_k X$, fini et plat sur U, tels que $W = Z_a - Z_b$, où l'on désigne par Z_a (resp. Z_b) le 0-cycle de X que définit, par projection sur X, la fibre de Z en a (resp. b). Les 0-cycles rationnellement équivalents à 0 forment un sous-groupe $Z_0^{\mathrm{rat}}(X)$ de $Z_0(X)$ et le quotient $A_0(X)$ est le groupe des 0-cycles de X modulo l'équivalence rationnelle. Notons que, dans la définition ci-dessus, on peut se limiter, lorsque X est complète, à $U = \mathbf{P}_k^1$, l'adhérence schématique $\bar{Z}$ de Z dans $\mathbf{P}_k^1 \times_k X$ étant encore un cycle fini et plat au-dessus de $\mathbf{P}_k^1$ ([14] EGA IV 2.8.5, 13.2.12 et 8.11.1).

L'application naturelle $X(k) \to A_0(X)$ définit l'équivalence rationnelle sur $X(k)$, *a priori* moins fine que la R-équivalence. Il revient au même de considérer, O étant fixé

dans $X(k)$, l'application de $X(k)$ dans le sous-groupe des classes de 0-cycles de degré 0 donnée par $P \mapsto P - O$.

Soit S un k-tore quelconque. On peut prolonger l'accouplement (défini par fonctorialité) $X(k) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ en un accouplement

$$Z_0(X) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S),$$

en prolongeant par linéarité l'accouplement ainsi défini pour un point fermé $P \subsetneq X$ de corps résiduel K : on considère l'application composée de la flèche $H^1(X, S) \to H^1(K, S)$ définie par fonctorialité et de la norme $N_{K/k} : H^1(K, S) \to H^1(k, S)$. Si l'on introduit la notion de trace d'un torseur ([9], SGA 4, XVII 6.3.21) $Tr_u : H^1(Y', S) \to H^1(Y, S)$ pour u fini localement libre $Y' \to Y$, on trouve que, pour un 0-cycle défini par un sous-k-schéma fini $Y \subsetneq X$, l'accouplement ci-dessus s'obtient par composition de l'application naturelle $H^1(X, S) \to H^1(Y, S)$ et du morphisme trace $Tr_{Y/k} : H^1(Y, S) \to H^1(k, S)$.

PROPOSITION 12. — *Soient* S *un tore défini sur le corps* k *et* X *une* k*-variété vérifiant au moins l'une des conditions suivantes :*

(i) S *est un* k*-tore flasque;*

(ii) X *est une* k*-variété complète.*

L'accouplement naturel entre les 0*-cycles de* X *et les torseurs sur* X *sous* S *passe alors au quotient par l'équivalence rationnelle et définit donc un accouplement*

$$A_0(X) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S)$$

et, a fortiori, *un accouplement*

$$X(k)/R \times H^1(X, S) \to H^1(k, S).$$

Soient en effet U un ouvert de $\mathbf{A}^1_k$ contenant un point rationnel a et Z un sous-k-schéma fermé de $U \times_k X$, fini et plat sur U. En vertu de la compatibilité de la trace Tr au changement de base ([9], SGA 4, XVII 6.3.26), on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, S) & & \\ \downarrow & & \\ H^1(Z, S) & \to & H^1(Z_a, S) \\ \downarrow{\scriptstyle Tr} & & \downarrow{\scriptstyle Tr} \\ H^1(U, S) & \to & H^1(a, S) = H^1(k, S) \end{array}$$

qui donne précisément l'application $H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ définie par $[Z_a]$. Si S est flasque, ou si $U = \mathbf{A}^1_k$, ce qui est loisible pour X complète, l'application naturelle $H^1(k, S) \to H^1(U, S)$ est bijective (prop. 8 et R 9), si bien que l'application $H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ définie par $[Z_a]$ ne dépend pas de $a \in U(k)$. □

COROLLAIRE. — *On conserve les mêmes hypothèses sur* X *et* S. *Supposons qu'il existe un torseur sur* X *sous* S *tel que l'application* $X(k)/R \to H^1(k, S)$ *qu'il définit soit injective. Alors, l'équivalence rationnelle coïncide sur* $X(k)$ *avec la* R*-équivalence.*

D'après la proposition ci-dessus, l'application $X(k) \to H^1(k, S)$ définie par le torseur se factorise par $X(k)/R \to X(k)/\mathrm{Rat} \to H^1(k, S)$, d'où l'assertion. □

5. La R-équivalence sur un tore

On appelle *résolution flasque* d'un k-tore T toute suite exacte de k-tores $1 \to S \to E \to T \to 1$ telle que E soit quasi trivial et S flasque et *résolution quasi triviale* une telle suite où S est quasi trivial. La dualité entre $\mathscr{T}_k$ et $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$ établit une bijection entre les résolutions flasques de T et celles du $\mathfrak{g}$-module $\hat{T}$. Si T est déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, la dualité établit une bijection entre les résolutions flasques de T dans $\mathscr{T}_{K/k}$ et celles de $\hat{T}$ dans $\mathscr{L}_G$. Il résulte des lemmes 3, 4 et 5 que T admet une résolution flasque (qu'on peut prendre dans $\mathscr{T}_{K/k}$) essentiellement unique et universelle. De façon précise, si $1 \to S \to E \to T \to 1$ et $1 \to S' \to E' \to T \to 1$ sont deux résolutions flasques de T, il existe deux k-tores quasi triviaux F et F′ tels que $S \times F$ et $S' \times F'$ soient k-isomorphes. On en déduit en particulier $H^1(k, S) \xrightarrow{\approx} H^1(k, S')$ et, lorsque k est un corps global, $Ш^2(k, S) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S')$ et $Ш^2(G, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ш^2(G, \hat{S}')$: en effet, pour un tore quasi trivial E dans $\mathscr{T}_{K/k}$, $Ш^2(k, E) = Ш^2(G, \hat{E}) = 0$ (*cf.* § 2). Le caractère « versel » d'une résolution flasque (lemme 4) se traduit par l'énoncé suivant : *si* $1 \to S \to E \xrightarrow{p} T \to 1$ *est une résolution flasque de* T, *tout k-morphisme* $M \to T$ *d'un tore quasi trivial* M *dans* T *se factorise par p.*

THÉORÈME 2. — *Soit* T *un k-tore. Toute résolution flasque* $1 \to S \to E \to T \to 1$ *de* T *induit un isomorphisme de groupes*

$$T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

Chaque R-*classe de* $T(k)$ *est paramétrée par l'ensemble* $E(k)$ *des points rationnels de la k-variété* E *qui est un ouvert d'un espace affine. Deux points de* $T(k)$ *qui sont* R-*équivalents le sont directement.*

La suite exacte $1 \to S \to E \to T \to 1$ définit un torseur E sur T sous S, localement trivial pour la topologie étale. Soit ζ sa classe dans $H^1(T, S)$. Le cobord $T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, S)$ déduit de la résolution flasque n'est autre que l'application $x \mapsto x^*(\zeta)$ obtenue par fonctorialité. Le tore S étant flasque, on sait déjà (prop. 12) que cette application $T(k) \to H^1(k, S)$, définie par le torseur E, est constante sur chaque R-classe : si U est un ouvert de $\mathbf{A}_k^1$ tel que $U(k) \neq \emptyset$ et si φ est un k-morphisme de U dans T, l'application composée $U(k) \to T(k) \to H^1(k, S)$ est l'application déduite, par fonctorialité, du torseur $E \times_T U$ sur U sous S; comme ce torseur est « constant » (prop. 8), l'application $U(k) \to H^1(k, S)$ qu'il définit est également constante. Ainsi, les R-classes de $T(k)$ sont contenues dans les fibres de l'application $T(k) \to H^1(k, S)$. Comme E est quasi trivial, $H^1(k, E) = 0$ (th. 90) et on a la suite exacte

$$E(k) \to T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, S) \to H^1(k, E) = 0.$$

L'application ∂ est donc surjective. Chacune de ses fibres est translatée par un élément de $T(k)$ de la fibre de l'élément neutre qui est l'image de $E(k)$. Comme, E étant un ouvert d'un espace affine, tous les points de $E(k)$ sont directement R-équivalents, il en est de même des points de la fibre de l'élément neutre de $T(k)$ et aussi, par translation, des points de toute autre fibre de ∂. □

COROLLAIRE 1. — *Soient k un corps de caractéristique* 0 *et* T *un k-tore déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G. *Soit* X *une k-compactification lisse de* T. *Alors, si* S *est le k-tore dual du* G-*module* $\operatorname{Pic} X_K$, *on a un isomorphisme*

$$T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

Précisons que le morphisme ci-dessus se déduit de la suite exacte de tores obtenue par dualité à partir de la suite exacte de G-modules

$$\text{(B)} \qquad 0 \to \hat{T} \to M \to \operatorname{Pic} X_K \to 0,$$

où M désigne le G-module de permutation des diviseurs de X_K à support hors de T_K. L'assertion est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et de la proposition 6 qui assure que la suite ci-dessus est une résolution flasque de $\hat{T}$. □

COROLLAIRE 2. — *Soit* T *un k-tore. Si k est de type fini sur le corps premier, ou un corps local à corps résiduel fini, l'ensemble des classes* $T(k)/R$ *est fini.*

En effet, $H^1(k, S)$ est fini dans le premier cas d'après le théorème 1, S étant flasque, et dans le second cas d'après R 8. □

Noter que, sur $\mathbf{R}$, tout tore T est produit de $\mathbf{G}_m$, $R_{C/\mathbf{R}}\mathbf{G}_m$ et $R^1_{C/\mathbf{R}}\mathbf{G}_m$: c'est donc un ouvert d'un $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ et $T(\mathbf{R})/R = 0$. On a d'ailleurs le résultat suivant :

COROLLAIRE 3. — *Si* T *est déployé par une extension métacyclique,* $T(k)/R = 0$.

Comme $\hat{S}$ est un G-module flasque, il est inversible si G est métacyclique (prop. 2). Il existe donc un k-tore S′ avec $S \times S'$ quasi trivial, ce qui implique $H^1(k, S) = 0$. □

COROLLAIRE 4. — *Le groupe* $T(k)/R$ *est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-tores* T. *C'est un groupe de torsion. Si* T *est déployé par l'extension galoisienne finie* K/k *de groupe* G, *le groupe* $T(k)/R$ *est annulé par la multiplication par n/e, où n est l'ordre de* G *et e son exposant.*

L'exposant e est le p.p.c.m. des ordres des éléments de G : il est égal à n, si et seulement si G est métacyclique. Pour prouver que n/e annule $T(k)/R$, il suffit de traiter le cas d'un p-groupe : en effet, si G′ est un p-sous-groupe de Sylow de G et k' le sous-corps des éléments de k fixes par G′, $n(G')/e(G')$ est la p-partie de $n(G)/e(G)$ et la restriction $H^1(k, S)(p) \to H^1(k', S)$ est injective. Si G est un p-groupe, il existe un sous-groupe cyclique d'ordre e. L'extension correspondante L/k est de degré n/e. L'application composée $T(k)/R \to T(L)/R \to T(k)/R$ correspondant à la composée de l'inclusion naturelle $T \to R_{L/k}T$ et de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}T \to T$ est la multiplication par le degré n/e. Or elle vaut 0, car, d'après le corollaire précédent, $T(L)/R = 0$. Noter que ce même type

d'argument donne directement que $T(k)/R$ est annulé par n, puisque, T_K étant trivial, $T(K)/R = 0$.

Le fait que le *groupe* $T(k)/R$ soit un invariant résulte aussitôt du théorème ci-dessus et de la proposition 6 : en effet, $H^1(k, S)$ ne dépend que de $[\hat{S}]$, puisque $H^1(k, E) = 0$ pour un tore E quasi trivial. Noter qu'il est évident *a priori* que $T(k)/R$ est un groupe. On sait également déjà que l'ensemble $T(k)/R$ est un invariant : pour k infini, *voir* le corollaire de la proposition 11 et, pour k fini, $T(k)/R = 0$ (conséquence directe d'un théorème de Lang, *cf.* corollaire 5). Mais le fait que le *groupe* $T(k)/R$ soit un invariant ne semble pas évident *a priori*. □

COROLLAIRE 5. — *Soit* T *un k-tore déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G. *Soit* S *dans* $\mathscr{T}_{K/k}$ *tel que* $[\hat{S}] = \rho(\hat{T})$:

(i) *si k est un corps fini, ou, plus généralement, un corps de dimension cohomologique* $\leqq 1$:

$$T(k)/R = 0;$$

(ii) *si k est un corps local à corps résiduel fini,* $T(k)/R$ *s'identifie au dual du groupe fini* $H^1(G, \hat{S})$;

(iii) *si k est un corps de nombres, ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, on a une suite exacte naturelle de groupes finis*

$$0 \to Ш^2(G, \hat{S})^{\sim} \to T(k)/R \to Ч^1(G, \hat{S})^{\sim} \to 0.$$

Pour les notations $Ш^i$ et $Ч^i$, *cf.* le paragraphe 2. Observons que, $\hat{S}$ étant flasque, $H^1(G^v, \hat{S}) = 0$ pour presque toute place v de k; ainsi, $Ч^1(G, \hat{S})$ est bien un groupe fini. Précisons que la notation $\tilde{A}$ désigne, pour un groupe abélien fini A, son dual Hom (A, Q/Z). Les résultats ci-dessus permettent le calcul explicite de $T(k)/R$ dans des cas particuliers (*cf.* § 6 et 8) : on choisit, en général, pour K/k la sous-extension finie de $\bar{k}/k$ correspondant à $\mathfrak{g}_{\hat{T}}$.

D'après le théorème, $T(k)/R = H^1(k, S) = H^1(K/k, S)$. La démonstration consiste donc à évaluer $H^1[G, S(K)]$. Soient H un sous-groupe invariant ouvert de G agissant trivialement sur $\hat{S}$ et $\hat{T}$ et L/k l'extension correspondante : l'inflation définit des isomorphismes $H^1[G/H, S(L)] \xrightarrow{\approx} H^1[G, S(K)]$, $H^1(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} H^1(G, \hat{S})$, $Ч^1(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ч^1(G, \hat{S})$, $Ш^2(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ш^2(G, \hat{S})$ (*cf.* § 2), compatibles avec les accouplements définissant les morphismes « naturels » de l'énoncé (*cf.* ci-après). On peut donc supposer G *fini*.

L'assertion (i) résulte de la nullité de $H^1(k, S)$ pour un corps k de dimension cohomologique $\leqq 1$ et un k-tore S quelconque ([28], résultat dû à Lang [17] pour k fini). On peut prouver (i) sans le théorème, en considérant la norme $R_{K/k}T \xrightarrow{N_{K/k}} T$, qui reste surjective sur les points rationnels, son noyau N vérifiant $H^1(k, N) = 0$ d'après [28] (c'est un tore).

Pour k local, la composée $H^1[G, S(K)] \times H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*) \xrightarrow{\text{inv}} Q/Z$ du cup-produit $\cup$ et de inv_k établit une dualité (de Tate-Nakayama [21]) entre les groupes finis $H^1[G, S(K)]$ et $H^1(G, \hat{S})$.

Dans le cas global, soient A_K (resp. I_K, C_K) l'anneau des adèles (resp. le groupe des idèles, celui des classes d'idèles) de K, $S(A_K)$ le G-module $\mathrm{Hom}(\hat{S}, I_K)$ et $S(C_K)$ le G-module $S(A_K)/S(K) = \mathrm{Hom}(\hat{S}, C_K)$. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Pour une place v de k, on note w un prolongement à K et G^v son groupe de décomposition. Le morphisme φ : $H^i[G, S(A_K)] \to H^i[G, S(C_K)]$ s'écrit encore $\coprod_v H^i[G^v, S(K_w)] \to H^i[G, S(C_K)]$. Dans le diagramme commutatif ci-dessous (*cf.* [32]) :

$$\begin{array}{ccccccc}
[\coprod_v H^i(G^v, S(K_w))] & \times & [\prod_v H^{2-i}(G^v, \hat{S})] & \xrightarrow{\cup} & \coprod_v H^2(G^v, K_w^*) & \xrightarrow{\Sigma\, \mathrm{inv}_v} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
\downarrow \varphi & & \uparrow \mu & & \downarrow \varphi_0 & & \| \\
H^i[G, S(C_K)] & \times & H^{2-i}(G, \hat{S}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(G, C_K) & \xrightarrow{\mathrm{inv}} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{array}$$

on désigne par $\cup$ le cup-produit, par μ la restriction, par $\sum \mathrm{inv}_v$ la somme des invariants locaux et par inv l'invariant global. D'après Tate-Nakayama ([21], [32]), les deux applications composées horizontales sont des accouplements non dégénérés. Ainsi, l'application duale de φ est la restriction μ et la suite exacte

$$\hat{H}^0[G, S(A_K)] \to \hat{H}^0[G, S(C_K)] \to H^1[G, S(K)] \to H^1[G, S(A_K)] \to H^1[G, S(C_K)]$$

donne l'extension « naturelle »

$$0 \to Ш^2(G, \hat{S})^\sim \to H^1[G, S(K)] \to Ч^1(G, \hat{S})^\sim \to 0. \quad \square$$

Remarque.

R 10. Pour un tore S défini sur un corps global k et déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, une condition nécessaire et suffisante de finitude de $H^1(k, S)$ est la nullité de $H^1(G', \hat{S})$ pour tout sous-groupe cyclique G' de G (c'est le cas pour S flasque et S coflasque). En effet, la finitude de $H^1(k, S)$ équivaut à celle de $Ч^1(G, \hat{S})$, i. e. à la nullité de $H^1(G^v, \hat{S})$ pour presque toute place v de k. Or, les places v telles que G^v soit non cyclique sont en nombre fini et celles pour lesquelles G^v est conjugué d'un sous-groupe cyclique G' donné sont en nombre infini, d'après Čebotarev. $\square$

COROLLAIRE 6. — *Soit* G *un groupe algébrique linéaire connexe, défini sur un corps* k *fini ou, plus généralement, sur un corps parfait de dimension cohomologique* $\leqq 1$. *Alors*

$$G(k)/R = 0.$$

Le corps k étant parfait, le radical unipotent N de G est défini et déployé sur k. La fibration $G \to G/N$ est donc triviale sur k et, N étant un espace affine, $N(k)/R = 0$. On a donc une bijection $G(k)/R \xrightarrow{\approx} (G/N)(k)/R$, ce qui permet de supposer G réductif. Comme k est parfait de dimension $\leqq 1$, il résulte (par un argument de Serre) d'un théorème de Steinberg ([29], th. 1.9), dû à Lang [17] pour k fini, que G possède un sous-groupe de Borel B défini sur k. Soient T un tore maximal de B défini sur k, U le radical unipotent de B, défini et déployé sur k, et U^- l'unipotent opposé. D'après Borel-Tits

([2], prop. 6.25), l'application produit $U \times U^- \times B \to G$ est surjective sur les points rationnels. Or $U(k)/R = U^-(k)/R = 0$ et, comme $B = T \times U$, $B(k)/R = T(k)/R = 0$ d'après le corollaire 5 (i). Ainsi $G(k)/R = 0$. □

PROPOSITION 13. — *Soit* T *un tore défini sur le corps* k :

(i) *la* R-*équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur* $T(k)$;

(ii) *si* k *est de caractéristique* 0 *et si* $T \to X$ *est une* k-*compactification lisse de* T, *l'application*

$$T(k)/R \to X(k)/R$$

est bijective et la R-*équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur* $X(k)$.

L'assertion (i) résulte aussitôt du corollaire de la proposition 12, dont les hypothèses sont vérifiées d'après le théorème 2. Pour montrer que l'application $T(k)/R \to X(k)/R$ est bijective, on utilise le lemme suivant :

LEMME 12. — *Si* T *est anisotrope*, $X(k) = T(k)$.

Supposons connue une k-compactification particulière X_1, non nécessairement lisse, pour laquelle $X_1(k) = T(k)$. On sait [15] qu'étant donné X_1 et X, il existe, dans la catégorie des k-compactifications de T, une k-compactification lisse X′ qui domine X et X_1; on peut même supposer le morphisme $X' \to X$ composé d'éclatements de sous-k-variétés lisses (ne rencontrant pas T). Comme X_1 n'a pas de point rationnel en dehors de T, il en est de même *a fortiori* pour X′. Si X avait un point rationnel hors de T, il en serait de même à chaque éclatement, la fibre d'un point rationnel étant un espace projectif $\mathbf{P}^r_k$.

Exhibons X_1. Le tore T est déployé par une extension galoisienne finie K/k de groupe G. Comme $\hat{T}$ est quotient d'un G-module libre de rang fini, T se plonge dans un $R_{K/k}\mathbf{G}^n_m$ et même dans le noyau de la norme $R_{K/k}\mathbf{G}^n_m \to \mathbf{G}^n_m$ puisqu'il est anisotrope. L'adhérence de $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ dans $R_{K/k}\mathbf{P}^1$ n'a pas de point rationnel « à l'infini » : si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne une base de K sur k, cette adhérence est définie par l'équation $N_{K/k}(x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d) = t^d$ et, pour $(x_1, \ldots, x_d)$ dans k^d, cette norme n'est nulle que pour $x_1 = \ldots = x_d = 0$. Il en est donc de même pour l'adhérence X_1 de T dans $(R_{K/k}\mathbf{P}^1)^n$. □

Il résulte aussitôt de ce lemme que, pour T anisotrope, l'application $T(k)/R \to X(k)/R$ est bijective. Pour T quelconque, il existe une suite exacte de tores $1 \to T' \to T \to T'' \to 1$ avec T′ trivial et T″ anisotrope. La fibration $T \to T''$ est localement triviale (th. 90). Soit X′ (resp. X″) une k-compactification lisse de T′ (resp. T″). Il existe donc un ouvert non vide U de T admettant pour k-compactification lisse $X' \times_k X''$: on peut prendre U de la forme $T' \times_k U''$ où U″ est un ouvert convenable de T″. Comme $T'(k)/R = X'(k)/R = 0$ (*cf.* prop. 10), l'application $U(k)/R \to (X' \times_k X'')(k)/R$ coïncide avec l'application $U''(k)/R \to X''(k)/R$. Elle est donc bijective, car il en est ainsi des applications $U''(k)/R \to T''(k)/R$ (prop. 11) et $T''(k)/R \to X''(k)/R$ (conséquence du lemme 12). Comme $U \to X$ est une autre k-compactification lisse de U, l'application

$$U(k)/R \to X(k)/R$$

est également bijective [corollaire de la proposition 10, (ii)]; il en est donc de même de l'application $T(k)/R \to X(k)/R$, puisque l'application $U(k)/R \to T(k)/R$ est bijective (prop. 11).

Considérons enfin une résolution flasque $1 \to S \to E \to T \to 1$ du tore T. Elle définit un torseur E sur T sous S qui se prolonge, S étant flasque (prop. 9), en un torseur $\tilde{E}$ sur X sous S. Celui-ci définit (prop. 12) une application $X(k)/R \to H^1(k, S)$ qui, composée avec la bijection $T(k)/R \to X(k)/R$, redonne l'application $T(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par le torseur E. Comme cette dernière est bijective (th. 2), il en est de même de l'application $X(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par le torseur $\tilde{E}$. Il en résulte que la R-équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $X(k)$ (corollaire de la proposition 12). □

PROPOSITION 14. — *Soit* G *un k-groupe algébrique linéaire connexe possédant un sous-groupe de Borel* B *défini sur k. On suppose k parfait ou* G *réductif :*

(i) *si* T *est un tore maximal de* B *défini sur k, l'application*

$$T(k)/R \to G(k)/R$$

est un isomorphisme de groupes. L'équivalence rationnelle et la R*-équivalence coïncident sur* $G(k)$*;*

(ii) *si k est de type fini sur le corps premier,* $G(k)/R$ *est fini;*

(iii) *soit k de caractéristique* 0. *Si* $G \to X$ *est une k-compactification lisse de* G, *l'application* $G(k)/R \to X(k)/R$ *est bijective et l'équivalence rationnelle et la* R*-équivalence coïncident sur* $X(k)$.

On va également prouver l'assertion suivante :

(i)′ *il existe un torseur sur* G *sous un tore flasque* S, *tel que l'application*

$$G(k)/R \to H^1(k, S)$$

qu'il définit soit un isomorphisme.

La question se pose de savoir si l'assertion (ii) est encore vraie sans l'hypothèse « G quasi déployé ».

Si k est parfait, on peut se ramener au cas où G est réductif en le divisant par son radical unipotent U, la fibration $G \to G/U$ étant triviale sur k et U étant un espace affine. On peut également supposer k infini, le cas fini étant trivial d'après le corollaire 6 du théorème 2. Soient B et T comme dans l'énoncé. Le radical unipotent N de B est défini et déployé sur k (*cf.* [2], 3.13 et 3.18). Il en est de même du sous-groupe unipotent opposé N^-. L'application produit $N^- \times T \times N \to G$ est une k-immersion ouverte ayant pour image la « grosse cellule » Ω. On en déduit aussitôt que l'application $T(k)/R \to G(k)/R$ est bijective (prop. 11). Pour obtenir (i)′, considérons le torseur E sur T défini par une résolution flasque $1 \to S \to E \to T \to 1$. Il se prolonge trivialement à $N^- \times T \times N$, donc à Ω. Puis, S étant flasque, il se prolonge en un torseur E_G sur G et, en caractéristique 0, en un torseur E_X sur X (prop. 9). Ces torseurs successifs définissent, S étant flasque (prop. 12), des applications de $T(k)/R$, $\Omega(k)/R$, $G(k)/R$ et $X(k)/R$ dans $H^1(k, S)$ compatibles avec les flèches naturelles $T(k)/R \to \Omega(k)/R \to G(k)/R \to X(k)/R$. Comme les

applications $T(k)/R \to H^1(k, S)$ et $T(k)/R \to G(k)/R$ sont bijectives [th. 2 et (i)], il en est de même de l'application $G(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par E_G, d'où (i)'. En caractéristique 0, on peut considérer comme k-compactification lisse de $N^- \times T \times N$ le produit de k-compactifications lisses des facteurs. On obtient ainsi une k-compactification lisse X_0 de Ω pour laquelle $\Omega(k)/R \to X_0(k)/R$ est bijective (prop. 13); il en est donc de même de $\Omega(k)/R \to X(k)/R$ (corollaire de la proposition 10). Ainsi, l'application $G(k)/R \to X(k)/R$ est bijective et le torseur E_X définit donc une bijection

$$X(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

La coïncidence entre l'équivalence rationnelle et la R-équivalence sur $G(k)$ et $X(k)$ résulte alors du corollaire de la proposition 12. □

COROLLAIRE. — *Soit k un corps de nombres ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini. Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe, supposé réductif en caractéristique non nulle. Alors, pour presque toute place v de k :*

$$G(k_v)/R = 0.$$

On peut se ramener au cas où G est réductif. Supposons d'abord G quasi déployé et soit K/k une extension galoisienne finie déployant G. D'après (i)', il existe un k-tore flasque S dans $\mathscr{T}_{K/k}$, tel que, pour toute extension k'/k, $G(k')/R$ soit égal à $H^1(k', S)$. Si Kk'/k' est cyclique, $S_{k'}$ est facteur direct d'un k'-tore quasi trivial (proposition 2, *voir* la démonstration du corollaire 3 au théorème 2), d'où $G(k')/R = H^1(k', S) = 0$. Ainsi, pour toute place v non ramifiée dans K/k, $G(k_v)/R = 0$.

Si G est réductif quelconque, considérons le groupe quasi déployé G_0 dont G est une forme interne. Les formes internes de G_0 sont classées par $H^1(k, G_0^{ad})$, où G_0^{ad} désigne le groupe adjoint. Le groupe G étant connexe, G_0^{ad} l'est aussi et un k-espace principal homogène sous G_0^{ad} a donc un point à valeurs dans k_v pour presque tout v (*cf.* [1], prop. 7.6). Autrement dit, G est k_v-isomorphe à G_0 pour presque toute place v, ce qui permet de conclure. □

Remarque.

R 11. Dans son livre [20] sur les surfaces cubiques, Manin pose un certain nombre de questions à propos de la R-équivalence sur les surfaces cubiques. Les résultats de ce paragraphe montrent qu'on peut en général y répondre dans le cas des tores, cas qui se révèle nettement plus simple que celui des surfaces cubiques. En particulier :

(i) il y a un théorème de finitude pour $T(k)/R$ dans le cas global (problème 11.12) et même dans le cas d'un corps de type fini sur le corps premier;

(ii) il est possible de paramétrer toute R-classe par un nombre fini de paramètres (problème 11.13), toujours le même d'ailleurs (*voir* aussi problème 46.3) : chaque R-classe est paramétrée par un ouvert d'un espace affine et on peut prendre le même ouvert pour toutes les classes; les « variétés de première descente » sont toutes isomorphes à cet ouvert et ont donc toutes des points rationnels, ce qui n'est pas le cas pour les surfaces cubiques (*voir* la fin du paragraphe 45);

(iii) le *groupe* $T(k)/R$ est un invariant birationnel (*voir* remarque 14.4);

(iv) le calcul de $T(k)/R$ est parfaitement effectif (remarque 14.5);

(v) l'invariant ρ (T), égal en caractéristique 0 à [Pic X_K], détermine la classe de k-équivalence birationnelle stable de T [*cf.* 23.13 (iii)];

(vi) pour un tore sur un corps de nombres, la R-équivalence est localement presque partout triviale (*cf.* 44.2.5). □

6. Quelques calculs explicites de R-équivalence

Le calcul explicite de la R-équivalence sur un tore T, défini sur le corps k et déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, se décompose en plusieurs étapes. On doit successivement :

(i) exhiber une résolution flasque $0 \to \hat{T} \to \hat{E} \to \hat{S} \to 0$ du G-module $\hat{T}$;

(ii) calculer $H^1(k, S)$;

(iii) expliciter le paramétrage $E(k) \to T(k)$ de la classe de l'élément neutre de $T(k)$;

(iv) exhiber, s'il en existe, une résolution quasi triviale de T.

Les étapes (i) et (iii) sont parfaitement effectives (*cf.* lemme 3). Le calcul de $H^1(k, S)$ est facile dans le cas local, un peu plus délicat pour un corps global (corollaire 5 du théorème 2).

a. Le cas de $R^1_{K/k} G_m$ pour K/k galoisienne. — C'est le cas le plus simple et le plus intéressant. On a le résultat suivant :

Proposition 15. — *Soit* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G, *engendré par* $\{s_i\}_{1 \leq i \leq r}$. *Si* T *est le tore* $R^1_{K/k} G_m$, *on trouve*

$$T(k)/R = H^{-1}(G, K^*).$$

De façon précise, l'application

$$R_{K/k} G_m^r \to R^1_{K/k} G_m,$$

définie sur le i-ième facteur par $x \mapsto s_i(x)/x$, *fournit une résolution flasque de* T.

Le paramétrage de l'élément neutre de $T(k) = K^{*1}$, sous-groupe de K^* formé des éléments de norme 1, est donc donné par l'application

$$(K^*)^r \to K^{*1},$$

définie par

$$(x_i)_{1 \leq i \leq r} \mapsto \prod_{1 \leq i \leq r} [s_i(x_i)/x_i].$$

Le G-module $\hat{T}^0$ est le noyau I_G de l'augmentation $Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z$. Il est facile de voir que le morphisme ω :

$$L = \coprod_{1 \leq i \leq r} Z[G].e_i \to Z[G]$$

défini par $\omega(e_i) = s_i - 1$, a pour image I_G. Il résulte alors de la proposition 1 que le noyau Q de ce morphisme ω est coflasque. Par la dualité $M \mapsto M^0$ on en déduit une résolution flasque de $I_G^0 = J_G = \hat{T}$; puis, par la dualité $M \mapsto D(M)$, on obtient, en changeant s_i en s_i^{-1}, la résolution flasque de T indiquée dans l'énoncé. □

COROLLAIRE 1. — *Soit* $T = R^1_{K/k} G_m$ *pour* K/k *galoisienne finie de groupe* G :

(i) *si k est un corps* $\mathfrak{p}$-*adique*, $T(k)/R = H^3(G, Z)^{\sim}$;

(ii) *si k est un corps de nombres, on a la suite exacte naturelle*

$$0 \to Ш^4(G, Z)^{\sim} \to T(k)/R \to Ч^3(G, Z)^{\sim} \to 0.$$

Cela résulte aussitôt du corollaire 5 au théorème 2, moyennant l'identification $H^i(G', \hat{S}) = H^{i+2}(G', Z)$ pour tout i et tout sous-groupe G′ de G avec $\hat{S} = Q^0$ (*cf.* prop. 1). □

COROLLAIRE 2. — *Pour un tore* T *défini sur* Q *et de dimension* 3, *l'ordre de* T (Q)/R *peut être arbitrairement grand. D'autre part, il existe de tels tores* T *pour lesquels l'ordre de* T (*k*)/R *n'est pas borné lorsque* [*k* : Q] *tend vers l'infini.*

Considérons en effet $T = R^1_{K/k} G_m$ pour K/k extension de corps de nombres galoisienne de groupe $G = V_4$, i. e. T du type $T_{a,b}$ considéré au corollaire de la proposition 7. Désignons par s le nombre de places v de k telles que $G^v = G$. Comme $H^3(G, Z) = Z_2$, on trouve que $Ч^3(G, Z)$ vaut 0 si $s \leqq 1$ et Z_2^{s-1} si $s \geqq 1$. D'autre part, $H^4(G, Z) = Z_2^3$ et l'on voit, par exemple par Künneth, que les morphismes de restriction relatifs à chacun des trois sous-groupes cycliques non nuls de G s'identifient aux trois projections $Z_2^3 \to Z_2$, ce qui implique $Ш^4(G, Z) = 0$. Ainsi, $T(k)/R$ vaut 0 si $s \leqq 1$ et Z_2^{s-1} sinon.

Comme $s(Q_{a,b}/Q)$ est arbitrairement grand, l'ordre de $T_{a,b}(Q)/R$ l'est également : considérer par exemple $T_{a,b}$ pour $a = 2$ et $b = p_1 \ldots p_n$, où les p_i sont des nombres premiers 2 à 2 distincts et congrus à 3 mod 8; alors $s = n+1$ pour n impair et n pour n pair, soit, en posant $n = 2m$ ou $2m-1$, $T_{2,b}(Q)/R = Z_2^{2m-1}$.

Considérons $T = T_{-1,2}$ sur Q. Ici $s = 1$, car 2 est le seul nombre premier p pour lequel $G^p = G$ dans l'extension $Q(i, \sqrt{2})/Q$. On a donc $T(Q)/R = 0$. Soient $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ des nombres premiers 2 à 2 distincts et congrus à 1 mod 8 (ce sont des carrés dans Q_2) et $k_n = Q(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. On trouve $s[k_n(i, \sqrt{2})/k_n] = 2^n$. L'ordre de $T(k_n)/R$ n'est donc pas borné. □

b. LE CAS DE $R^1_{K/k} G_m$ POUR K/k GALOISIENNE DE GROUPE $\mathfrak{S}_3$. — Le groupe $G = \mathfrak{S}_3 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^3 = 1$ et $sts = t^2$ est métacyclique diédral. Le tore $R^1_{K/k} G_m$ admet donc, d'après la proposition 3, une résolution quasi triviale : il en est d'ailleurs de même pour tout tore déployé par K/k, car $F_{\mathfrak{S}_3} = 0$ (*cf.* § 1, R 5). On doit donc exhiber une telle résolution quasi triviale de $R^1_{K/k} G_m$, afin d'obtenir un paramétrage $E(k) \to K^{*1}$ du groupe K^{*1} des éléments de K de norme 1 dont le noyau se décrive simplement. La proposition 15 fournit, par exemple, la suite exacte

$$0 \to Q \to Z[G]^2 \xrightarrow{\omega} Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$$

définie par $\omega(1, 0) = s-1$ et $\omega(0, 1) = t^2-1$. Le module Q est coflasque, mais non de permutation, car $\hat{H}^0(G, Q) = Z_2$ et $H^2(G, Q) = Z_6$. Toutefois, par addition de Z, on en déduit la suite exacte

$$0 \to Z[G/s] \oplus Z[G/st] \oplus Z[G/t] \xrightarrow{\iota} Z[G]^2 \oplus Z \xrightarrow{\eta} Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

définie par

$$\begin{aligned} &\iota(1, 0, 0) = (1+s, 0, 1), && \eta(1, 0, 0) = s-1, \\ &\iota(0, 1, 0) = (1+st, -1-st, 0), && \eta(0, 1, 0) = t^2-1, \\ &\iota(0, 0, 1) = (0, 1+t+t^2, 1), && \eta(0, 0, 1) = 0. \end{aligned}$$

On note K_u le sous-corps fixe par l'élément u de G. La suite exacte ci-dessus fournit, par la double dualité $M \mapsto D(M^0)$, une résolution quasi triviale de $R^1_{K/k} G_m$, qui, sur les points rationnels, donne la présentation suivante de K^{*1} :

$$1 \to K_s^* \times K_{st}^* \times K_t^* \xrightarrow{\rho} K^* \times K^* \times k^* \xrightarrow{\pi} K^{*1} \to 1,$$

où

$$\rho(x, y, z) = \left[xy, \frac{z}{y}, N_{K_s/k}(x).N_{K_t/k}(z)\right],$$

$$\pi(a, b, c) = \frac{s(a).t(b)}{ab}.$$

On peut se demander si ce tore est une variété k-rationnelle.

c. La nécessité d'une résolution flasque. — Cherchons, sur un corps de nombres k, une suite exacte de tores $1 \to S \to E \to T \to 1$ avec E quasi trivial, $H^1(k, S)$ fini, mais $T(k)/R \neq H^1(k, S)$. Rappelons (R 10) que, pour S dans $\mathscr{T}_{K/k}$ et K/k galoisienne finie de groupe G,

$$H^1(k, S) \text{ fini} \Leftrightarrow H^1(G', \hat{S}) = 0 \text{ pour tout sous-groupe cyclique } G' \text{ de } G.$$

Considérons $T = G_{m,k}$, puis une extension galoisienne finie K/k de groupe $G = V_4 = \langle s, t \rangle$ et la suite exacte

$$0 \to \hat{S}^0 \to Z[G/s] \oplus Z[G/t] \oplus Z[G/st] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

où ε désigne la somme des augmentations. On vérifie aisément que $H^1(G', \hat{S}^0) = 0$ pour tout sous-groupe cyclique G'. Soient k_1, k_2, k_3 les sous-corps de K fixes par s, t et st respectivement et N_i la norme $N_{k_i/k}$ pour $i = 1, 2, 3$. On trouve

$$H^1(k, S) = k^*/N_1(k_1^*).N_2(k_2^*).N_3(k_3^*)$$

qui vaut Z_2 sur un corps de nombres si, pour chaque place v, $G^v \neq G$ (et 0 sinon) : c'est par exemple le cas pour l'extension $Q(\sqrt{13}, \sqrt{17})/Q$. Or, $T(k)/R = 0$.

d. LE TORE $R^1_{K/k}G_m$ EN GÉNÉRAL. — Le tore $R^1_{K/k}G_m$ est défini comme le noyau d'un k-épimorphisme de tores quasi triviaux, ce qui explique l'utilité du lemme ci-dessous pour reconnaître, dans ce genre de situation, si une résolution est flasque, ou non.

LEMME 13. — *Soit* $0 \to M \to P \to P_1 \to P_2 \to 0$ *une suite exacte de* G-*modules avec* P, P_1 *et* P_2 *de permutation. Le* G-*module* M *est coflasque, si et seulement si, pour tout sous-groupe* G′ *de* G, *la suite*

$$\hat{H}^0(G', P) \to \hat{H}^0(G', P_1) \to \hat{H}^0(G', P_2)$$

est exacte. □

Pour savoir que M est coflasque, il suffit (*cf.* § 1) de vérifier la condition $H^{-1}(G', M) = 0$ pour un sous-groupe G′ par classe de conjugaison, en se limitant aux p-sous-groupes. Il en est donc de même pour la condition du lemme.

Soit L/K une extension telle que L/k soit galoisienne finie de groupe G et soit H le groupe de Galois de L/K. Trouver une résolution flasque de $R^1_{K/k}G_m$ revient, d'après le lemme 13, à trouver un morphisme π, tel que la suite

$$P \xrightarrow{\pi} Z[G/H] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$$

soit exacte, avec P de permutation, et que, pour tout sous-groupe G′ de G, la suite

$$\hat{H}^0(G', P) \to \hat{H}^0(G', Z[G/H]) \to \hat{H}^0(G', Z)$$

soit exacte. On commence donc par exhiber un épimorphisme $P_0 \to I_{G/H}$ avec P_0 de permutation. Comme $I_{G/H}$ est engendré par les $1-\bar{g}$ pour g dans G et même dans une partie γ telle que γH engendre G, le morphisme

$$P_0 = \coprod_{s \in \gamma} Z[G].e_s \to Z[G/H],$$

défini par $e_s \mapsto \bar{s} - 1$ convient. Il se trouve que, pour H trivial (exemple *a*), le noyau de ce morphisme est coflasque, i. e. les conditions d'exactitude figurant au lemme 13 et relatives aux divers sous-groupes G′ de G sont automatiquement vérifiées. Il n'en est rien en général. Nous allons juste considérer trois exemples particuliers du type $G = \langle s, t \rangle$ avec $H = \langle s \rangle$ et avec $\langle t \rangle$ invariant.

d 1. Soit *d'abord* $G = D_n$ avec *n impair* : $s^2 = t^n = 1$ et $sts = t^{-1}$. Ce cas est semblable à l'exemple *b*. La résolution fournie par P_0, à savoir

$$Z[G] \xrightarrow{\omega} Z[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

avec

$$\omega(1) = t - 1,$$

donne une résolution coflasque de $I_{G/s}$, i. e. le noyau de ω est coflasque : en effet, comme n est impair, il suffit de vérifier la condition du lemme 13 pour $G' = \langle s \rangle$ ou un sous-groupe de $\langle t \rangle$; dans ce deuxième cas, $\hat{H}^0(G', Z[G/s]) = 0$, car, en tant que t-module, $Z[G/s]$

est libre de rang 1; la condition relative à un tel sous-groupe G′ est donc automatiquement vérifiée; il en est de même pour $G' = \langle s \rangle$, car, en tant que s-module,

$$\mathbf{Z}[G/s] = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[s]^{(n-1)/2},$$

si bien que l'application $\hat{H}^0(s, \varepsilon)$ est injective. La résolution ci-dessus donne sur les points rationnels, par double dualité et changement de t en t^{-1}, l'application

$$\pi : \ L^* \to K^{*1},$$

définie par

$$\pi(x) = N_{L/K}[t(x)/x].$$

Comme G est métacyclique, on sait *a priori* (prop. 2) que le noyau de ω est inversible. Il est même stablement de permutation, car, par addition de $\mathbf{Z}$ à la résolution initiale, on trouve la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}[G/ts] \oplus \mathbf{Z}[G/t] \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

avec

$$\iota(1, 0) = (1+ts, 1), \qquad \eta(1, 0) = t-1,$$

$$\iota(0, 1) = \left(N_t, \frac{n-1}{2}\right), \qquad \eta(0, 1) = 0,$$

où $N_t = 1+t+ \ldots +t^{n-1}$. On peut ainsi préciser le paramétrage $\pi : L^* \to K^{*1}$ en indiquant la suite exacte

$$1 \to K'^* \times k'^* \xrightarrow{\rho} L^* \times k^* \xrightarrow{\pi} K^{*1} \to 1$$

définie par

$$\rho(x, y) = [xy, N_{K'/k}(x).N_{k'/k}(y^{(n-1)/2})],$$

$$\pi(a, b) = N_{L/K}[t(a)/a],$$

où $K' = L_{st}$ et $k' = L_t$. En fait, une étude directe montre que dans ce cas le tore $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ est une variété k-rationnelle.

d 2. Soit *ensuite* le cas où $G = \langle s, t \rangle$ avec s d'ordre 2^n, t d'ordre p^m pour *p premier impair* et $sts^{-1} = t^r$. Quitte à diviser G et H par le noyau du morphisme $H = \langle s \rangle \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$, ce qui n'altère pas $I_{G/H}$, on peut supposer que H opère fidèlement sur le sous-groupe $\langle t \rangle$. On vérifie alors aisément que $\mathbf{Z}[G/s]$ est isomorphe, en tant que s-module, à la somme directe de $\mathbf{Z}$ et d'un module libre. Ce résultat permet de reproduire l'argumentation utilisée dans le cas précédent pour prouver que la résolution fournie par P_0, à savoir

$$\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

avec

$$\omega(1) = t-1,$$

donne une résolution coflasque de $I_{G/s}$ (on se limite aux sous-groupes G′ de $\langle s \rangle$ ou de $\langle t \rangle$). On obtient ainsi une surjection (G étant métacyclique)

$$\pi : \quad L^* \to K^{*1},$$

où

$$\pi(x) = N_{L/K}[t(x)/x].$$

Noter que, si $H \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$ a un noyau non nul H_0, il suffit de remplacer dans l'application ci-dessus le corps L par le sous-corps L_0 fixe par H_0. Le groupe G étant métacyclique, on sait *a priori* (prop. 2) que le noyau de ω est inversible, d'où $T(k)/R = 0$. Mais, comme on l'a noté en R 4, ce noyau n'est stablement de permutation que si l'image du morphisme $H \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$ est triviale ou d'ordre 2, ce qui nous ramène au cas où G est cyclique ou diédral métacyclique (exemple précédent).

Notons que, pour $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^{15} = 1$ et $sts^{-1} = t^2$, la résolution fournie par P_0 n'est plus coflasque. En revanche, la suite exacte

$$Z[G] \oplus Z[G/s^2] \xrightarrow{\eta} Z[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

définie par

$$\eta(1, 0) = t-1 \qquad \text{et} \qquad \eta(0, 1) = t^5-1,$$

fournit une résolution coflasque de $I_{G/s}$.

d 3. Soit *enfin* le cas, plus instructif, où $G = D_4 : s^2 = t^4 = 1$ et $sts = t^{-1}$. Dans ce cas, K/k est donc de degré 4, sa clôture galoisienne L/k a pour groupe D_4 et $K = L_s$. La résolution donnée par P_0 est loin de convenir. On vérifie que la résolution

$$Z[G] \oplus Z[G/s] \xrightarrow{\omega} Z[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

définie par

$$\omega(1, 0) = t-1 \qquad \text{et} \qquad \omega(0, 1) = t^2-1,$$

a un noyau presque coflasque, i. e. $H^1(G', .) = 0$ pour tout sous-groupe cyclique G′ de G, mais non coflasque, car la condition relative au sous-groupe $\langle s, t^2 \rangle$ n'est pas vérifiée. On doit donc considérer la suite exacte

$$Z[G] \oplus Z[G/s] \oplus Z[G/\langle s, t^2 \rangle] \xrightarrow{\chi} Z[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0,$$

définie par

$$\chi = \omega \quad \text{sur les deux premiers facteurs,}$$

$$\chi(0, 0, 1) = (1+t^2)(t-1),$$

pour obtenir un noyau coflasque. Par double dualité et changement de t en t^{-1}, ces deux résolutions donnent respectivement, sur les points rationnels, les applications

$$L^* \times K^* \xrightarrow{\pi} K^{*1},$$

$$L^* \times K^* \times k'^* \xrightarrow{\lambda} K^{*1},$$

définies par

$$\lambda(a, b, c) = N_{L/K}[t(a)/a].[t^2(b)/b].[t(c)/c],$$
$$\pi(a, b) = \lambda(a, b, 1),$$

k' désignant le sous-corps L_{s,t^2} d'indice 2 dans K. Soient M et N les conoyaux respectifs de χ^0 et ω^0. Soit G'_0 le sous-groupe $\langle st, t^2 \rangle$. On trouve $H^1(G', M) = Z_2$ pour $G' = G'_0$ et 0 sinon. Cela implique $[M] \neq 0$ et, comme $[M] = \rho(T)$, le tore T n'est pas k-stablement rationnel (prop. 6). D'autre part, la restriction $H^2(G, M) \to \prod_{g \in G} H^2(\langle g \rangle, M)$ est injective. On obtient les mêmes résultats pour N (ces calculs demandent une analyse précise de divers morphismes d'inflation et de restriction). En résumé :

ASSERTION. — *Soit* K/k *une extension séparable de degré* 4, *dont la clôture galoisienne ait pour groupe* $G = D_4$. *Alors, le tore* $T = R^1_{K/k} G_m$, *de dimension* 3, *n'est pas k-rationnel. Si en outre k est un corps de nombres, les applications* π *et* λ *ont la même image, à savoir la* R-*classe de l'élément neutre, et pour conoyau commun* $T(k)/R$: *si r désigne le nombre de places v de k telles que* $G^v = G'_0$, *on obtient* $T(k)/R = Z_2^r$.

7. L'équivalence de Brauer sur un tore

L'objet de ce paragraphe est le calcul précis, au moins sur un corps de nombres, de l'équivalence de Brauer sur un tore, en vue de la comparer, dans ce cas, à la R-équivalence.

a. QUELQUES RAPPELS. — Soit X une k-variété. On note Br X le *groupe de Brauer étale* $H^2(X, G_m)$. Si K est une extension de k, on désigne par Br (X, K) le noyau de $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, X_K$. On pose $\mathrm{Br}_1 X = \mathrm{Br}(X, \bar{k})$, $\mathrm{Br}_0 X = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X)$ et $\mathrm{Br}_a X = \mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}_0 X$.

DÉFINITION. — *Soit* X *une k-variété lisse et complète. On appelle* Br-*équivalence, ou équivalence de Brauer, sur* X(k) *la relation d'équivalence définie par l'accouplement*

$$X(k) \times \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, k.$$

Si X *est une k-variété lisse et si k est de caractéristique* 0, *on désigne ainsi la restriction à* X(k) *de la* Br-*équivalence sur l'ensemble des points rationnels d'une k-compactification lisse de* X.

On note X(k)/Br *l'ensemble des classes d'équivalence pour la* Br-*équivalence.*

Pour X non complète, l'hypothèse sur la caractéristique de k sert à assurer l'existence d'une k-compactification lisse de X; mais elle sert aussi à montrer que, lorsqu'il en existe, la définition adoptée pour la Br-équivalence sur X (k) ne dépend pas de la k-compactification lisse choisie : cela résulte de la k-invariance birationnelle du groupe de Brauer en caractéristique 0 ([13], « Brauer III », coroll. 7.3). Les B-équivalences, introduites par Manin ([19], [20]) et *a priori* moins fines, s'obtiennent de la même façon, en considérant, au lieu de Br X tout entier, certains sous-groupes B particuliers, tels que Br (X, K) ou $\mathrm{Br}_1 X$.

PROPOSITION 16. — *Soit* X *une k-variété lisse, supposée complète si k est de caractéristique non nulle. L'équivalence de Brauer sur* $X(k)$ *est moins fine que la* R-*équivalence. Si k est de caractéristique* 0, *l'ensemble* $X(k)/\mathrm{Br}$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés lisses et complètes : cet invariant est trivial pour* X *k-rationnelle.*

L'application naturelle $\mathrm{Br}\ k \to \mathrm{Br}\ \mathbf{P}^1_k$ est un isomorphisme : en effet, d'après le lemme 15 (i), $\mathrm{Br}_1\ \mathbf{P}^1_k = 0$ et, d'après « Brauer III » ([13], coroll. 5.8), $\mathrm{Br}\ \mathbf{P}^1_k = 0$. Cela prouve la première assertion et définit donc une surjection canonique $X(k)/R \to X(k)/\mathrm{Br}$. Soit k de caractéristique 0. Un morphisme k-birationnel $X \to Y$ induit une application $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$ qui est injective, d'après l'invariance k-birationnelle du groupe de Brauer $\mathrm{Br}\ Y \xrightarrow{\approx} \mathrm{Br}\ X$, et surjective, par réduction, comme dans la proposition 10, au cas d'un éclatement d'une sous-k-variété lisse; on peut aussi bien utiliser la surjectivité, déjà connue, de $X(k)/R \to Y(k)/R$. On voit enfin, par le même argument que dans la proposition 10, qu'une k-application rationnelle de X dans Y induit une application naturelle $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$. Ainsi, un k-isomorphisme birationnel induit une bijection $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$. □

Rappelons le résultat suivant [19], dû à Lichtenbaum dans le cas des courbes :

LEMME 14. — *Soient* X *une k-variété lisse et complète et* K/k *une extension galoisienne de groupe* G. *On a la suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Br}(X, K) \to H^2[G, K(X)^*] \to H^2(G, \mathrm{Div}\, X_K).$$

Soient, en topologie étale, $\mathscr{M}^*_X$ le faisceau des fonctions rationnelles sur X et $\mathscr{D}iv_X$ le faisceau quotient $\mathscr{M}^*_X/G_{m,X}$ des diviseurs de Cartier sur X. D'après « Brauer II » ([13], lemme 1.9), X étant lisse, $H^1(X, \mathscr{D}iv_X) = 0$, ce qui donne la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}\, X \to H^2(X, \mathscr{M}^*_X) \to H^2(X, \mathscr{D}iv_X).$$

On a la suite analogue sur X_K. Comme, d'après « Brauer II » ([13], lemmes 1.6 et 1.9), $H^1(X_K, \mathscr{M}^*_{X_K}) = H^1(X_K, \mathscr{D}iv_{X_K}) = 0$, les deux suites spectrales d'Hochschild-Serre relatives au revêtement galoisien $X_K \to X$ de groupe G et aux faisceaux $\mathscr{M}^*_X$ et $\mathscr{D}iv_X$ donnent les deux suites exactes horizontales du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to H^2[G, K(X)^*] & \to & H^2(X, \mathscr{M}^*_X) & \to & H^2(X_K, \mathscr{M}^*_{X_K}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to H^2(G, \mathrm{Div}\, X_K) & \to & H^2(X, \mathscr{D}iv_X) & \to & H^2(X_K, \mathscr{D}iv_{X_K})
\end{array}$$

d'où le résultat *via* la suite exacte des noyaux. □

LEMME 15. — *Soit* K/k *une extension galoisienne de groupe* G :

(i) *si* X *est une k-variété lisse et complète, telle que* $X(k) \neq \emptyset$, *on a la suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Br}(k, K) \to \mathrm{Br}(X, K) \to H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \to 0$$

et tout point rationnel de X *en définit un scindage;*

(ii) *si* X *est une k-variété telle que* $\operatorname{Pic} X_K = 0$ *:*

$$\operatorname{Br}(X, K) = H^2(G, K[X]^*);$$

(iii) *soit* X *une k-variété lisse et complète. On suppose qu'il existe un ouvert* U *de* X *possédant un point rationnel* O *et tel que* $\operatorname{Pic} U_K = 0$*; soit* Y *le fermé complémentaire. Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \operatorname{Br}(k, K) & \to & \operatorname{Br}(X, K) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(G, \operatorname{Pic} X_K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle -\mathfrak{d}} & & \\
0 & \to & \operatorname{Br}(k, K) & \to & \operatorname{Br}(U, K) & \xrightarrow{\beta} & H^2(G, K[U]^*/K^*) & \to & 0
\end{array}$$

Dans ce diagramme, λ *désigne la restriction de* X *à* U, $\mathfrak{d}$ *est le cobord déduit de la suite exacte de* G*-modules*

$$0 \to K[U]^*/K^* \to \operatorname{Div}_{Y_K} X_K \to \operatorname{Pic} X_K \to 0$$

et la seconde ligne provient de l'égalité $\operatorname{Br}(U, K) = H^2(G, K[U]^*)$. *Ce diagramme est commutatif;*

(iv) *considérons, sous les hypothèses* (iii), *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
X(k) \times H^1(G, \operatorname{Pic} X_K) & \longrightarrow & \operatorname{Br}(k, K) \\
\uparrow \quad \downarrow{\scriptstyle -\mathfrak{d}} & & \| \\
U(k) \times H^2(G, K[U]^*/K^*) & \to & \operatorname{Br}(k, K)
\end{array}$$

Les flèches horizontales sont définies respectivement par les accouplements avec $\operatorname{Br}(X, K)$ *et* $\operatorname{Br}(U, K)$ via *les sections de* α *et* β *définies par le point* O. *Ce diagramme est commutatif. La seconde flèche horizontale est la composée*

$$U(k) \times H^2(G, K[U]^*/K^*) \to U(k) \times H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\cup} \operatorname{Br}(k, K)$$

de la flèche induite par la section définie par O *et du cup-produit.*

Notons que $\operatorname{Br}(k, K) = H^2(G, K^*)$. Ces diverses assertions proviennent simplement de la suite spectrale d'Hochschild-Serre relative au revêtement galoisien $X_K \to X$ de groupe G et au faisceau G_m, à savoir

$$H^p[G, H^q(X_K, G_m)] \Rightarrow H^n(X, G_m).$$

Les assertions (i) et (ii) en sont des conséquences immédiates : la suite exacte (i) est la suite $0 \to E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1} \to 0$ qui est exacte en raison de l'existence d'un point rationnel définissant, X étant complète, des rétractions $E^2 \to E_2^{2,0}$ et $E^3 \to E_2^{3,0}$; pour X quelconque, l'edge $E_2^{2,0} \to E^2$ induit le morphisme naturel $H^2(G, K[X]^*) \to \operatorname{Br} X$ et l'isomorphisme (ii) est donné par la flèche $E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2})$, l'hypothèse $\operatorname{Pic} X_K = 0$ impliquant $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = 0$. Notons que, pour X quelconque, le cup-produit $X(k) \times H^2(G, K[X]^*) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*)$ et l'accouplement $X(k) \times \operatorname{Br}(X, K) \to \operatorname{Br}(k, K)$ sont compatibles *via* le morphisme naturel $H^2(G, K[X]^*) \to \operatorname{Br}(X, K)$. En (iii), l'hypo-

thèse (ii) est vérifiée pour U et la suite inférieure du diagramme résulte de l'isomorphisme $H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Br}(U, K)$ et de la suite exacte de G-modules

$$0 \to K^* \to K[U]^* \to K[U]^*/K^* \to 0,$$

suite exacte dont le point rationnel O définit un scindage. La première ligne provient de (i). Pour la commutativité du diagramme, *voir* **annexe**. L'assertion (iv) résulte aussitôt des précédentes, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X(k) & \times & \mathrm{Br}(X, K) & \to & \mathrm{Br}(k, K) \\ \uparrow & & \downarrow \lambda & & \| \\ U(k) & \times & \mathrm{Br}(U, K) & \to & \mathrm{Br}(k, K) \end{array}$$

étant évidemment commutatif : on a déjà noté que le second accouplement n'est autre que le cup-produit $U(k) \times H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*)$ *via* l'identification $H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Br}(U, K)$. □

LEMME 16. — *Soit* X *une k-variété lisse et complète sur un corps k de caractéristique* 0, *k-rationnelle et telle que* $X(k) \neq \emptyset$. *Soit* K/k *une extension galoisienne de groupe* $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, *telle que* $H^1(\mathfrak{h}, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$. *Alors* $\mathrm{Br}\,X = \mathrm{Br}\,k + \mathrm{Br}(X, K)$ *et la* Br-*équivalence coïncide sur* $X(k)$ *avec la* $\mathrm{Br}(X, K)$-*équivalence. Elle coïncide aussi avec l'équivalence donnée par l'accouplement*

$$X(k) \times H^1(G, \mathrm{Pic}\,X_K) \to \mathrm{Br}\,k,$$

défini par un point O *de* $X(k)$.

Notons d'abord que, X étant $\bar{k}$-rationnelle, $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$. Il existe donc K/k finie telle que $H^1(\mathfrak{h}, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$: il suffit que $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ soit $\mathfrak{h}$-trivial, ou simplement $\mathfrak{h}$-stablement de permutation. D'autre part $\mathrm{Br}\,\overline{X} = 0$ en vertu de l'invariance birationnelle du groupe de Brauer ([13], « Brauer III », coroll. 7.3) et de sa nullité pour l'espace projectif ($B_2 - \rho = 0$). Par suite, d'après le lemme 15 (i), $\mathrm{Br}\,X_K = \mathrm{Br}_1\,X_K = \mathrm{Br}\,K$. Si π_O est la projection $\mathrm{Br}\,X \to \mathrm{Br}\,k$ définie par O, $A - \pi_O(A) \in \mathrm{Br}(X, K)$ pour A dans $\mathrm{Br}\,X$, d'où $\mathrm{Br}\,X = \mathrm{Br}\,k + \mathrm{Br}(X, K)$. L'accouplement $X(k) \times H^1(G, \mathrm{Pic}\,X_K) \to \mathrm{Br}(k, K)$ se déduit, par définition, de l'accouplement de $X(k)$ avec $\mathrm{Br}(X, K)$ *via* la section $H^1(G, \mathrm{Pic}\,X_K) \to \mathrm{Br}(X, K)$ définie par O. □

b. LE CAS DES TORES. — Soit T un tore défini sur un corps k de caractéristique 0 et déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G. Soient $T \to X$ une k-compactification lisse de T et S le k-tore dual du G-module $\mathrm{Pic}\,X_K$. Les hypothèses des lemmes 15 (iii) et 16 sont vérifiées pour X, K/k et $U = T$. Par définition de S, les G-modules $\hat{S}$ et $\mathrm{Pic}\,X_K$ coïncident. La section $K[T]^*/K^* \to K[T]^*$ définie par l'élément neutre de $T(k)$ s'identifie (*cf.* prop. 6 ou [24]) au plongement naturel de $\hat{T}$ dans $K[T]^*$. Considérons les applications

$$T(k) \times H^1(G, \hat{S}) \to T(k) \times H^2(G, \hat{T}) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Br}(k, K),$$

définies respectivement par $\mathrm{id}_{T(k)}$, par le cobord tiré de la suite exacte de G-modules $0 \to \hat{T} \to M \to \hat{S} \to 0$, où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de T_K, et, enfin, par le cup-produit $\cup$. Il résulte des lemmes 15 (iv) et 16 que l'application composée définit sur $T(k)$ l'équivalence de Brauer. La bilinéarité du cup-produit implique aussitôt la compatibilité de l'équivalence de Brauer avec la structure de groupe de $T(k)$, mais cela est évident directement pour tout groupe algébrique et toute relation d'équivalence compatible avec les k-isomorphismes (ce qui est le cas pour l'équivalence de Brauer). Notons enfin que, d'après le lemme 5, on peut remplacer la résolution de $\hat{T}$ ci-dessus par n'importe quelle autre résolution flasque.

PROPOSITION 17. — *Soient* T *un tore défini sur un corps* k *de caractéristique* 0, *déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G, $0 \to \hat{T} \to M \to \hat{S} \to 0$ *une* G-*résolution flasque du* G-*module* $\hat{T}$ *et* $\partial : H^1(G, \hat{S}) \hookrightarrow H^2(G, \hat{T})$ *le monomorphisme qu'elle définit :*

(i) *soit* $\beta : T(k) \times H^1(G, \hat{S}) \to \mathrm{Br}(k, K)$ *l'accouplement bilinéaire induit,* via ∂, *par le cup-produit* $T(k) \times H^2(G, \hat{T}) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Br}(k, K)$. *Cette application* β *définit sur* $T(k)$ *l'équivalence de Brauer;*

(ii) *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} T(k)/R \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta"', "\approx"] & T(k)/\mathrm{Br} \arrow[d, hook, "\gamma"] \\ H^1(k, S) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \mathrm{Br}(k, K)] \end{tikzcd}$$

dans lequel δ *provient de la suite exacte de tores* $1 \to S \to D(M) \to T \to 1$, γ *de* β *et* ω *du cup-produit, est un diagramme anticommutatif d'homomorphismes de groupes. Il identifie le groupe* $T(k)/\mathrm{Br}$ *à l'image de* ω*;*

(iii) *le groupe* $T(k)/\mathrm{Br}$ *est un invariant des classes de* k-*équivalence birationnelle stable de* k-*tores* T*;*

(iv) *si* X *est une* k-*compactification lisse de* T, *l'application induite* $T(k)/\mathrm{Br} \to X(k)/\mathrm{Br}$ *est une bijection.*

L'assertion (i) a été déjà prouvée. Pour (ii), rappelons que δ est un isomorphisme d'après le théorème 2 et que l'application $T(k)/R \to T(k)/\mathrm{Br}$ est bien définie d'après la proposition 16. Le fait que γ soit un plongement traduit l'assertion (i). L'anticommutativité du diagramme (ii) se réduit à celle du diagramme

$$\begin{tikzcd} T(k) \times H^2(G, \hat{T}) \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\cup"] & \\ H^1(k, S) \times H^1(G, \hat{S}) \arrow[u, "\partial"', "\cup"] \arrow[r, "\cup"'] & H^2(G, K^*) \end{tikzcd}$$

défini par δ, ∂ et les cup-produits et celle-ci résulte aisément de la formule

$$d(a \cup b) = da \cup b + a \cup db \qquad \text{pour} \quad a \in D(M)(K) \quad \text{et} \quad b \in C^1(G, M).$$

L'invariance du groupe $T(k)/Br$ résulte de son identification à l'image de ω et de l'invariance de $[\hat{S}]$ (prop. 6). En (iv) enfin, l'application $T(k)/Br \to X(k)/Br$ est injective par définition de la Br-équivalence sur $T(k)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(k)/R & \twoheadrightarrow & T(k)/Br \\ \downarrow \approx & & \downarrow \\ X(k)/R & \twoheadrightarrow & X(k)/Br \end{array}$$

montre qu'elle est également surjective puisqu'il en est ainsi de $T(k)/R \to X(k)/R$ (prop. 13). □

COROLLAIRE 1. — *On conserve les mêmes hypothèses et notations :*

(i) *si k est de type fini sur* $\mathbf{Q}$, $T(k)/Br$ *est un groupe fini;*

(ii) *si k est un corps $\mathfrak{p}$-adique, l'équivalence de Brauer coïncide sur* $T(k)$ *avec la* R-*équivalence et le groupe des classes est le groupe fini*

$$T(k)/Br = H^1(G, \hat{S})^{\sim};$$

(iii) *si k est un corps de nombres, soit μ l'application composée*

$$H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\Delta} \prod_v H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\lambda} \prod_v H^1(G^v, \hat{S}),$$

de l'application diagonale Δ et du produit λ des restrictions de G *à* G^v, *pour l'ensemble des places v de k. Alors*

$$T(k)/Br = [\operatorname{im}\lambda/\operatorname{im}\mu]^{\sim}.$$

L'assertion (i) résulte aussitôt du corollaire 2 au théorème 2, *via* la surjection $T(k)/R \to T(k)/Br$. Si k est un corps $\mathfrak{p}$-adique, l'application ω du diagramme de la proposition 17 est bijective en vertu de la dualité locale de Tate-Nakayama [21], d'où l'assertion (ii). Dans le cas global, supposons, ce qui est loisible, G fini et complétons ce même diagramme par le morphisme ι :

$$\operatorname{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \operatorname{Br} k] \hookrightarrow \operatorname{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \coprod_v \operatorname{Br} k_v],$$

ce qui donne le morphisme $\chi = \iota\omega$:

$$H^1(k, S) \to \operatorname{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \coprod_v \operatorname{Br} k_v],$$

morphisme dont l'image est encore isomorphe à $T(k)/Br$. Ce morphisme se factorise en

$$H^1(k, S) \xrightarrow{\nu} \coprod_v \operatorname{Hom}[H^1(G^v, \hat{S}), \operatorname{Br} k_v] \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \coprod_v \operatorname{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \operatorname{Br} k_v],$$

où le second morphisme est défini par les restrictions de G à G^v et le premier par la restriction $H^1(k, S) \to \coprod_v H^1(k_v, S)$ composée avec le produit des morphismes locaux $H^1(k_v, S) \to \operatorname{Hom}[H^1(G^v, \hat{S}), \operatorname{Br} k_v]$ définis par cup-produit. Soient I_K le G-module

des idèles de K, $S(A_K)$ le G-module Hom $(\hat{S}, I_K)$ et $S(C_K) = S(A_K)/S(K)$. La suite exacte de groupes finis (S est flasque!)

$$H^1(k, S) \to H^1[G, S(A_K)] \to H^1[G, S(C_K)]$$

donne, par les dualités locales et globale de Tate-Nakayama ([21], [32]) (*voir* la démonstration du corollaire 5 du théorème 2), la suite exacte

$$H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\mu} \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \xrightarrow{\tilde{\nu}} H^1(k, S)^{\sim}.$$

L'image de χ, canoniquement isomorphe à $T(k)/\mathrm{Br}$, a donc pour duale

$$\mathrm{im}\,\tilde{\chi} = \mathrm{im}\,\tilde{\nu} \circ \lambda = \tilde{\nu}(\mathrm{im}\,\lambda) = \mathrm{im}\,\lambda/\mathrm{im}\,\mu. \quad \square$$

Ce corollaire 1 donne en particulier, par la proposition 7 :

COROLLAIRE 2. — *Soient* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G *et* $T = R^1_{K/k}\,G_m$:
(i) *si k est un corps* $\mathfrak{p}$*-adique,*

$$T(k)/\mathrm{Br} = H^3(G, \mathbf{Z})^{\sim};$$

(ii) *si k est un corps de nombres,*

$$T(k)/\mathrm{Br} = [\mathrm{im}\,\lambda/\mathrm{im}\,\mu]^{\sim},$$

où μ *désigne l'application composée*

$$H^3(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\Delta} \prod_v H^3(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\lambda} \prod_v H^3(G^v, \mathbf{Z})$$

de l'application diagonale Δ *et du produit* λ *des restrictions de* G *à* G^v. $\square$

8. Comparaison de quelques critères de rationalité

On dispose, pour l'étude des problèmes k-birationnels sur une k-variété X, d'un certain nombre d'invariants k-birationnels, définis éventuellement sous des hypothèses restrictives sur X ou k. La proposition 5, par exemple, définit, pour X convenable, l'invariant $\rho(X) = [\hat{S}]$ et, par suite, d'autres invariants, moins fins, mais plus « calculables », tels que $H^1(k, S)$, $H^1(G, \hat{S})$, $H^{-1}(G, \hat{S})$ et, sur un corps global, $Ш^2(k, S)$ et $Ш^2(G, \hat{S})$: *voir* le début du paragraphe 2. En caractéristique 0, on dispose encore, comme invariants des k-variétés complètes et lisses, de $X(k)/R$ (prop. 10), du groupe Br X ([13], « Brauer III », coroll. 7.3) et de $X(k)/\mathrm{Br}$ (prop. 16). L'objet de ce paragraphe est de comparer ces divers invariants sur l'exemple des tores.

Pour un tore T défini sur un corps global k, on peut encore considérer le k-défaut du principe de Hasse $Ш(T) = Ш^1(k, T)$ et le k-défaut d'approximation faible A(T) : si i désigne l'application diagonale de $T(k)$ dans le produit, pour toutes les places v de k, des groupes topologiques $T(k_v)$, A(T) est, par définition, le quotient de $\prod_v T(k_v)$ par

l'adhérence de l'image de i. Voskresenskiĭ ([33], th. 6) a montré, en caractéristique 0, l'existence d'une suite exacte

$$0 \to A(T) \to H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X})^{\sim} \to Ш(T) \to 0,$$

mettant en relation, de manière un peu inattendue, A (T) et Ш (T) [*voir* prop. 19 (iB)]; il en a déduit en particulier la nullité de Ш (T) pour T k-rationnelle. En fait, les groupes A (T) et Ш (T) sont, dans le cas global, deux invariants k-birationnels supplémentaires pour les tores T définis sur k :

PROPOSITION 18. — *Soit* T *un tore défini sur un corps de nombres k, ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, et déployé par l'extension galoisienne finie* K/k *de groupe* G. *Soient* $1 \to S \to E \to T \to 1$ *une résolution flasque de* T *dans* $\mathscr{T}_{K/k}$ *et* $\mu : H^1(G, \hat{S}) \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S})$ *l'application de restriction :*

(i) *cette résolution définit des isomorphismes de groupes finis*

$$A(T) \xrightarrow{\approx} Ч^1(k, S) \quad \textit{et} \quad A(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \operatorname{im}\mu,$$

$$Ш(T) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S) \quad \textit{et} \quad Ш(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \ker\mu;$$

(ii) *les groupes finis* A (T) *et* Ш (T) *sont des invariants des classes de k-équivalence birationnelle stable de tores* T *définis sur le corps k.*

Tout d'abord, l'assertion (ii) est une conséquence immédiate des isomorphismes $A(T) \approx \operatorname{im}\mu$ et $Ш(T) \approx \ker\mu$ et de l'invariance de $[\hat{S}]$ (prop. 6). L'isomorphisme $A(T) \xrightarrow{\approx} Ч^1(k, S)$ est donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E(k) & \longrightarrow & T(k) & \longrightarrow & H^1(k, S) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \nu & & \\ \prod_v E(k_v) & \xrightarrow{\pi} & \prod_v T(k_v) & \xrightarrow{\partial} & \prod_v H^1(k_v, S) & \to & 0 \end{array}$$

Il suffit de voir que $i[T(k)]$ est dense dans le sous-groupe ouvert $\partial^{-1}(\operatorname{im}\nu)$. Or, si U est un ouvert de $\prod_v T(k_v)$ tel qu'il existe x dans $T(k)$ avec $\partial i(x) \in \partial(U)$, $\pi^{-1}[i(x)^{-1}.U]$ est un ouvert non vide de $\prod_v E(k_v)$; comme $A(E) = 0$, le tore E étant quasi trivial, cet ouvert rencontre l'image de $E(k)$, d'où $U \cap i[T(k)] \neq \emptyset$. L'isomorphisme $Ш(T) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S)$ est donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k, T) & \longrightarrow & H^2(k, S) & \longrightarrow & H^2(k, E) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \prod_v H^1(k_v, T) & \to & \prod_v H^2(k_v, S) & \to & \prod_v H^2(k_v, E) \end{array}$$

compte tenu de $Ш^2(k, E) = 0$, le tore E étant quasi trivial. Les isomorphismes $A(T)^{\sim} \to \operatorname{im}\mu$ et $Ш(T)^{\sim} \to \ker\mu$ proviennent alors des dualités, données par le corps

de classes, entre $Ч^1(k, S) = \operatorname{coker} \nu$ et $\operatorname{im} \mu = \ker \tilde{\nu}$ (*cf.* la démonstration du corollaire 1 de la proposition 17) d'une part, $Ш^2(k, S)$ et $\ker \mu$ d'autre part. □

La proposition ci-dessous résume les relations qui existent entre les divers invariants introduits dans le cas d'un tore sur un corps global.

PROPOSITION 19. — *On conserve les notations et hypothèses de la proposition précédente. On considère, en outre, sur un corps de nombres, une k-compactification lisse* $T \to X$ *de* T *:*

(i) *on a deux suites exactes naturelles*

$$\text{(iR)} \qquad 0 \to Ш(S) \to T(k)/R \to \prod_v T(k_v)/R \to A(T) \to 0,$$

$$\text{(iB)} \qquad 0 \to A(T) \to H^1(G, \hat{S})^{\sim} \to Ш(T) \to 0;$$

(ii) *sur un corps de nombres, on a un diagramme naturel*

$$\begin{array}{c} 0 \to Ш(T)^{\sim} \to \mathrm{Br}_a X \xrightarrow{\mu} \prod_v \mathrm{Br}_a X_v \xrightarrow{\tau} T(k)/R^{\sim} \to Ш(S)^{\sim} \to 0 \\ \uparrow \lambda \\ \prod_v \mathrm{Br}_a X \end{array}$$

Dans ce diagramme, la suite horizontale est exacte et

$$A(T)^{\sim} = \operatorname{im} \mu, \qquad T(k)/\mathrm{Br}^{\sim} = \operatorname{im} \tau\lambda.$$

Rappelons (§ 7, *a*) que $\mathrm{Br}_a X$ désigne le quotient du noyau de $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X}$ par l'image de $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X$. Si X est une k-compactification lisse d'un tore T défini sur un corps k de caractéristique 0 et déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, on a des isomorphismes canoniques [*cf.* lemmes 15 (i) et 16]

$$\mathrm{Br}_a X \xrightarrow{\approx} H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \xleftarrow{\approx} H^1(G, \operatorname{Pic} X_K).$$

Comme on l'a déjà signalé, la suite (iB) est due, en caractéristique 0, à Voskresenskiĭ [33], sous la forme

$$0 \to A(T) \to H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})^{\sim} \to Ш(T) \to 0.$$

La considération d'accouplements avec des groupes de Brauer convenables permet alors de l'interpréter naturellement [26] sous la forme

$$0 \to A(T) \to \mathrm{Br}_a X^{\sim} \to Ш(T) \to 0.$$

La suite (iR) est la simple traduction, *via* le théorème 2 et la proposition 18 (i), de la suite

$$0 \to Ш(S) \to H^1(k, S) \to \prod_v H^1(k_v, S) \to Ч^1(k, S) \to 0,$$

qui est exacte par définition. La suite (iB) est la conséquence immédiate des isomorphismes $A(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \operatorname{im} \mu$ et $Ш(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \ker \mu$ donnés par la résolution flasque et le corps de classes

[prop. 18 (i)]. Par assemblage de ces deux suites et dualité, on obtient donc la suite exacte longue

$$0 \to Ш(T)^{\sim} \to H^1(G, \hat{S}) \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \to T(k)/R^{\sim} \to Ш(S)^{\sim} \to 0,$$

étant donné les résultats locaux

$$T(k_v)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k_v, S) \xrightarrow{\approx} H^1(G^v, \hat{S})^{\sim}$$

et les compatibilités des dualités locales et globale. Voici inversement comment se découpe cette suite, en fonction de Ш (T), A (T), T (k)/R et de la cohomologie de $\hat{S}$:

$$0 \to Ш(T)^{\sim} \to H^1(G, \hat{S}) \to A(T)^{\sim} \to 0,$$

$$0 \to A(T)^{\sim} \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \to Ч^1(G, \hat{S}) \to 0,$$

$$0 \to Ч^1(G, \hat{S}) \to [T(k)/R]^{\sim} \to Ш^2(G, \hat{S}) \to 0.$$

Sur un corps de nombres, $H^1(G, \hat{S}) = \mathrm{Br}_a X$ et $H^1(G^v, \hat{S}) = \mathrm{Br}_a X_v$, puisque $[\hat{S}] = [\mathrm{Pic}\, X_K]$ (*cf.* ci-dessus) : on peut prendre pour G-résolution flasque de $\hat{T}$ la suite exacte

$$\text{(B)} \qquad 0 \to \hat{T} \to M \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0,$$

où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de T_K (prop. 6). Enfin, l'assertion sur T (k)/Br est la traduction du corollaire 1 (iii) de la proposition 17. □

On se restreint *désormais* au cas d'un corps de nombres k, en conservant les hypothèses et notations des deux propositions précédentes. On se propose, pour finir, de préciser le diagramme d'implications reliant, en général, les critères de rationalité suivants (critères relatifs au k-tore T) :

(i) T est une variété k-rationnelle;

(ii) T est une variété k-stablement rationnelle, i. e., pour n assez grand, $T \times G^n_{m,k}$ est k-rationnelle;

(iii) T est le quotient d'un tore quasi trivial par un sous-tore quasi trivial, i. e. $[\hat{S}] = 0$;

(iv) T^n est, pour $n > 0$ convenable, k-stablement rationnelle, i. e. $[\hat{S}]$ est d'ordre fini;

(v) il existe un k-tore T′ tel que $T \times T'$ soit k-rationnelle, i. e. $[\hat{S}]$ est inversible;

(vi) $\mathrm{Br}_a X = 0$ et $T(k)/R = 0$, i. e. $H^1(G, \hat{S}) = 0$ et $H^1(k, S) = 0$;

(vii) $T(k)/R = 0$, i. e. $H^1(k, S) = 0$;

(viii) $\mathrm{Br}_a X = 0$, i. e. $H^1(G, \hat{S}) = 0$;

(ix) $T(k)/\mathrm{Br} = 0$;

(x) $A(T) = 0$;

(xi) $Ш(T) = 0$.

FACULTÉ DES SCIENCES BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES ORSAY

Ces diverses propriétés sont liées par le diagramme d'implications ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & & & & \text{(vii)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{(i)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(ii)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(iii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(v)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(vi)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(viii)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \text{(ix)} \\ & & & & & & & [\text{(x) et (xi)}] \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Ces mêmes propriétés et implications subsistent pour k quelconque de caractéristique 0, à condition de supprimer (x) et (xi), et, pour k quelconque, si l'on supprime (ix) et la mention $\mathrm{Br}_a X$ dans (vi) et (viii). Pour chacune des propriétés (vi) à (xi), on note respectivement (vi)', ..., (xi)' la propriété plus forte obtenue en exigeant la propriété correspondante, non seulement pour k et G, mais aussi pour toute extension finie k'/k et tout sous-groupe G' de G.

PROPOSITION 20. — *Il n'y a pas, dans le diagramme d'implications ci-dessus, d'autre relation que celles indiquées, hormis éventuellement la réciproque de* (i) $\Rightarrow$ (ii).

La question de savoir si cette réciproque est vraie ou non est, bien entendu, la question essentielle : c'est le *problème de Zariski* pour les tores (*voir* [34]). Il semble que Voskresenskiĭ [33] ait le premier posé la question sous la forme (iii) $\Rightarrow$ (i) : le quotient d'un tore quasi trivial par un sous-tore quasi trivial est-il une variété k-rationnelle ?

Les implications indiquées dans le diagramme ci-dessus résultent essentiellement de remarques déjà faites : l'équivalence de (ii) et (iii) est prouvée dans la proposition 6 et remonte à Voskresenskiĭ [33] en caractéristique 0 et Swan [31]; si $A(T) = 0$, chaque restriction $H^1(G, \hat{S}) \to H^1(G^v, \hat{S})$ est nulle et l'application λ est donc nulle, d'où (x) $\Rightarrow$ (ix).

Nous allons montrer par des contre-exemples que la plupart des implications du diagramme ont leur réciproque fausse, même au sens fort, i. e. (vii)' n'implique pas (viii), (viii)' n'implique pas (vii), etc. L'exemple généralement utilisé est celui du tore $R^1_{K/k} G_m$ pour K/k galoisienne finie de groupe G sur un corps de nombres k. Rappelons les résultats obtenus dans ce cas (corollaire 1 de la proposition 15, corollaire 2 de la proposition 17 et proposition 18) : on désigne par X une k-compactification lisse de T, par k'/k une extension finie (sauf mention du contraire), par G' le groupe de Galois de Kk'/k' (c'est un sous-groupe de G); alors :

$\mathrm{Br}_a X_{k'} = H^1(G', \hat{S}) = H^3(G', \mathbf{Z})$, que k'/k soit finie ou non;

$T(k')/R$ est extension du dual de $Ч^3(G', \mathbf{Z})$ par celui de $Ш^4(G', \mathbf{Z})$;

$T(k')/\mathrm{Br}$ est le dual de l'image dans $Ч^3(G', \mathbf{Z})$ du produit $\prod_{v'} H^3(G', \mathbf{Z})$ (on peut s'y limiter aux v' ramifiées dans Kk'/k');

$A_{k'}(T)$ est le dual de l'image de $H^3(G', \mathbf{Z})$ dans le produit des $H^3(G'^{v'}, \mathbf{Z})$;

$Ш(k', T)$ est le dual de $Ш^3(G', \mathbf{Z})$.

A. LA CONDITION (iv) N'IMPLIQUE PAS (iii). — Cela signifie simplement que le sous-groupe de torsion de U_G peut être non trivial, ce qui est déjà le cas pour $G = \mathbf{Z}_{23}$ (d'après R 5, $U_{\mathbf{Z}_{23}} = C(\mathbf{Z}[\sqrt[23]{1}]) = \mathbf{Z}_3$). Exhibons dans ce cas, grâce à Swan [31] (*voir* aussi [33]), un k-tore qui convienne. Soient I l'idéal de $\mathbf{Z}[G]$ noyau de la surjection

$Z[G] \to Z_{47}$ obtenue en faisant opérer un générateur s de G sur Z_{47} *via* $1 \mapsto 2$ et T le tore dual. L'idéal $I = \langle s-2, 47 \rangle$ n'est pas principal [31], mais il est projectif, car cohomologiquement trivial (Nakayama). Ainsi, [I] est d'ordre fini dans U_G (*cf.* [22]). En revanche, il n'existe pas de modules de permutation P et Q, tels que $I \oplus P = Q$: s'il en était ainsi, P et Q seraient chacun la somme d'un facteur libre et d'un même facteur Z^r et I serait alors libre (par simplification, *cf.* [22]). Comme $[\hat{S}] = \rho(I) = -[I]$, on a bien $[\hat{S}]$ d'ordre fini, mais non nul.

B. La condition (v) n'implique pas (iv). — Cela revient à dire que le groupe U_G peut être infini. En effet, si G est métacyclique et si 4 n'est pas une période de sa cohomologie, $\rho(J_G)$ est, d'après les propositions 2 et 3, un élément d'ordre infini de U_G. On peut donc prendre pour exemple $T = R^1_{K/k} G_m$, pour K/k galoisienne de groupe $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^5 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$ (*cf.* R 5) : il existe de telles extensions pour $k = Q$.

C. La condition (vi) n'implique pas (v). — Soit $T = R^1_{K/k} G_m$ pour $K/k = Q(\sqrt{\zeta})/Q$ avec $\zeta = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$: cette extension est galoisienne de groupe G le groupe quaternionien d'ordre 8. Comme G n'est pas métacyclique, $[\hat{S}] = \rho(J_G)$ n'est pas inversible (prop. 2). Comme Z est H^3-trivial dans $\mathscr{L}_G$ ([3], chap. XII, § 7), on a, d'une part, $Br_a X_{k'} = 0$ pour *toute* extension k'/k (finie ou non), d'où *a fortiori* (viii), et, d'autre part, $T(k)/R = Ш^4(G, Z)^{\sim}$. Or, ce groupe vaut 0, car il existe une place v de $k = Q$, à savoir 2, pour laquelle $G^v = G$. Ainsi, ce tore T vérifie (vi) sans vérifier (v).

D. La condition (vii)′ n'implique pas (xi). — *A fortiori*, (vii)′ n'implique pas (viii) ! On a déjà considéré au paragraphe 6 (corollaire 2 de la proposition 15) le cas du tore $T = R^1_{K/k} G_m$ pour $G = V_4$. Si K/k est telle que $G^v \neq G$ quelle que soit v, on trouve $A(T) = T(k)/R = T(k)/Br = 0$ et cela reste vrai pour toute extension finie k'/k : c'est évident si Kk'/k' est cyclique et, sinon, on a encore $G^{v'} \neq G$ pour toute place v' de k'. Pourtant $Ш(T) = Z_2$. On peut prendre $K/k = Q(\sqrt{13}, \sqrt{17})/Q$.

E. La condition (vii)′ implique (x), mais (vii) n'implique pas (x). — Soit T déployé par K/k galoisienne finie de groupe G. Si $A(T) \neq 0$, il existe [*cf.* prop. 19 (iR)] une place v de k, telle que $T(k_v)/R = H^1(G^v, \hat{S})^{\sim} \neq 0$. Soit k'/k quadratique, disjointe de K et telle que v ait deux prolongements distincts v'_1 et v'_2 à k'. Alors $\mathrm{Gal}(Kk'/k') = G$, $G^{v'_1} = G^{v'_2} = G^v$. L'application $H^1(G, \hat{S}) \to \prod_{v'} H^1(G^{v'}, \hat{S})$ n'est pas surjective, car $H^1(G^v, \hat{S}) \to H^1(G^{v'_1}, \hat{S}) \oplus H^1(G^{v'_2}, \hat{S})$ ne l'est pas, d'où $T(k')/R \neq 0$. On peut toutefois avoir (vii) sans avoir (x). Soient $T = R^1_{K/k} G_m$ avec $G = V_4$ et $s = s(K/k)$ le nombre de places v de k telles que $G^v = G$. Si $s = 1$, par exemple pour $Q(i, \sqrt{2})/Q$, alors $T(k)/R = 0$, mais $A(T) = Z_2$. Noter toutefois que, pour $K/k = Q(i, \sqrt{2})/Q$, on a certes $T(Q)/R = 0$, mais $T(Q_2)/R = T[Q(\sqrt{17})]/R = Z_2$.

F. La condition (viii)″ n'implique pas (vii). — On désigne par (viii)″ la condition : $Br_a X_{k'} = 0$ pour *toute* extension k'/k, finie ou non. Soit $T = R^1_{K/k} G_m$ pour $K/k = Q(\sqrt{\zeta})/Q$ avec $\zeta = 221+26\sqrt{17}+6\sqrt{221}$: cette extension est galoisienne

de groupe G le groupe quaternionien d'ordre 8. Le même argument qu'en C prouve que T vérifie (viii)". Comme $\mathbf{Q}(\sqrt{\zeta})$ contient $\mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, pour toute place v de $\mathbf{Q}$, $G^v \neq G$. Or, $H^4(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_8$, tandis que, pour un sous-groupe G' de G autre que G, $H^4(G', \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_2$ ou 0. On en déduit $Ш^4(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$ et, par suite, $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$.

G. Les conditions (ix), (x), (xi) sont uniquement liées par (x) $\Rightarrow$ (ix). — Reprenons l'exemple de $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ pour $G = V_4$ (*cf.* E). Si $s = 0$, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})/\mathbf{Q}$, on trouve $Ш(T) = \mathbf{Z}_2$, mais $A(T) = T(k)/Br = 0$. Si $s = 1$, comme pour $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$, alors $A(T) = \mathbf{Z}_2$, mais $Ш(T) = T(k)/Br = 0$. Enfin, si $s > 1$, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbf{Q}$, $A(T)$ et $T(k)/Br$ sont non nuls, alors que $Ш(T) = 0$. □

Remarques.

R 12. Comme on le voit sur la suite exacte (iR) (prop. 19), deux points rationnels de T peuvent être partout localement R-équivalents sans l'être globalement. C'est manifeste sur l'exemple F, car dans ce cas $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$ alors que, pour tout nombre premier p, $T(\mathbf{Q}_p)/R = 0$ et, évidemment, $T(\mathbf{R})/R = 0$. De même, d'après la proposition 13 (ii), $X(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$ et $X(\mathbf{Q}_v)/R = 0$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$. □

R 13. L'exemple E, où $T(\mathbf{Q})/R = T(\mathbf{Q}_p)/R = 0$ pour tout p premier impair, alors que $T(\mathbf{Q}_2)/R = T[\mathbf{Q}(\sqrt{17})]/R = \mathbf{Z}_2$ est typique de la variation de $T(k)/R$ avec k (*voir* aussi le corollaire 2 de la proposition 15). □

Proposition 21. — *Soient* T *un tore défini sur* $\mathbf{Q}$ *et* X *une* $\mathbf{Q}$*-compactifiée lisse de* T. *On peut avoir*

(i) *l'équivalence de Brauer triviale sur* $X(k)$ *pour tout corps* k *de caractéristique* 0 *et pourtant* $X(\mathbf{Q})/R \neq 0$;

(ii) *la* R*-équivalence triviale sur* $X(k)$ *pour tout corps* k *de caractéristique* 0 *et pourtant* X *non* $\mathbf{Q}$*-rationnelle.*

La démonstration utilise dans les deux cas la bijection $T(k)/R \xrightarrow{\approx} X(k)/R$ [prop. 13 (ii)]. Pour l'assertion (i), il suffit de considérer le tore de dimension 7 décrit en F : en effet, pour toute extension $k/\mathbf{Q}$, $Br_a X_k = 0$, mais $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$. Pour (ii), l'exemple de Voskresenskiĭ ([33], *cf.* A) convient : c'est un $\mathbf{Q}$-tore, de dimension 23, non $\mathbf{Q}$-rationnel, mais facteur direct d'un tore quasi trivial, d'où aussitôt $T(k)/R = 0$ pour toute extension $k/\mathbf{Q}$. Pour un exemple plus simple, on peut considérer une extension galoisienne $L/\mathbf{Q}$ de groupe $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^5 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$, puis la sous-extension $K/\mathbf{Q}$ fixe par s et le tore $T = R^1_{K/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_m$ de dimension 4 (l'exemple B n'est autre que $R^1_{L/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_m$ et convient aussi) : d'après R 4 et la proposition 6, ce tore T n'est pas une variété $\mathbf{Q}$-stablement rationnelle et, pourtant (corollaire 3 du théorème 2), $T(k)/R = 0$ pour *toute* extension $k/\mathbf{Q}$, puisque T, et donc T_k, est déployé par une extension métacyclique. □

Remarque.

R 14. On aurait pu raffiner la définition de l'équivalence de Brauer donnée au paragraphe 7, *a*, en considérant, non seulement l'accouplement $X(k) \times Br\ X \to Br\ k$, mais

également tous les accouplements $X(k) \times \mathrm{Br}\, X_K \to \mathrm{Br}\, K$ pour toutes les extensions K/k finies (ou même quelconques). Or, même avec cette définition, on obtient encore, pour l'exemple (i) ci-dessus, une équivalence triviale, alors que $X(\mathbf{Q})/R$ n'est pas trivial. □

Annexe

On se propose de prouver l'anticommutativité du diagramme [*cf.* § 7, lemme 15 (iii)]

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Br}(X, K) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] & H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \arrow[dd, "\mathfrak{b}"] \\
H^2(G, K[U]^*) \arrow[r, "\gamma", "\approx"'] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Br}(U, K) & \\
H^2(G, K[U]^*/K^*) & &
\end{tikzcd}$$

Rappelons les deux suites spectrales

$$(\mathrm{HS}_X) \qquad H^p(G, H^q(X_K, G_m)) \Rightarrow H^n(X, G_m),$$

$$(\mathrm{HS}_U) \qquad H^p(G, H^q(U_K, G_m)) \Rightarrow H^n(U, G_m)$$

et la suite exacte de G-modules

$$(\mathrm{B}) \qquad 0 \to K[U]^*/K^* \to M \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0,$$

où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de U_K. Dans le diagramme ci-dessus, λ et π sont les flèches évidentes, γ est l'edge $E_2^{2,0} \to E^2$ tiré de (HS_U), α est le morphisme $\ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1}$ tiré de (HS_X) et $\mathfrak{b}$ est le cobord tiré de (B). Noter que γ coïncide avec le morphisme naturel.

Soient Y le fermé complémentaire de U, j l'immersion de U dans X, $\mathscr{H}^i_Y$ (resp. H^i_Y) les faisceaux (resp. groupes) de cohomologie à support dans Y. Pour un faisceau étale F sur X, on note simplement $j_* F$ le faisceau $j_* j^* F$ et, pour un élément b de $H^0(X, F)$ ou $H^0(X_K, F)$, on note b_u sa restriction à U ou U_K.

Soit $G_{m,X} \to I^\cdot$ une résolution injective du faisceau étale $G_{m,X}$; on note δ la différentielle de $I^\cdot$. Pour un G-module Q, on note ∂ la différentielle du complexe $C^\cdot(G, Q)$ des cochaînes de G à valeurs dans Q. Les suites spectrales (HS_X) et (HS_U) sont respectivement données par les bicomplexes $L_X^{\cdot\cdot}$ et $L_U^{\cdot\cdot}$ avec $L_X^{p,q} = H^0(X_K^p, I_q)$ et $L_U^{p,q} = H^0(U_K^p, I_q)$, la notation X_K^p (resp. U_K^p) désignant le produit fibré au-dessus de X (resp. U) de $p+1$ exemplaires de X_K (resp. U_K). Chaque complexe « simplicial » $H^0(X_K^\cdot, I_q)$ fournit une résolution exacte de $H^0(X, I_q)$ et s'identifie au complexe $C^\cdot[G, H^0(X_K, I_q)]$; de même en remplaçant X par U et X_K par U_K. On prend pour différentielle totale $d = d' + d''$ avec $d' = \partial$ et $d'' = (-1)^p \delta$.

a. Description de (B) *via* $I^{\cdot}$. — La suite exacte de cohomologie tirée de la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathscr{H}^0_Y(X_K, I^{\cdot}) \to I^{\cdot}_{X_K} \to j_* I^{\cdot}_{X_K} \to 0,$$

commence par

$$0 \to G_{m, X_K} \to j_* G_{m, X_K} \to \mathscr{H}^1_Y(X_K, G_m) \to 0,$$

ce qui donne l'identification $\mathscr{D}iv_{Y_K} X_K \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}^1_Y(X_K, G_m)$. Par application du foncteur $H^0(X_K, .)$ à la suite de complexes ci-dessus, on obtient la suite exacte de complexes

$$0 \to H^0_Y(X_K, I^{\cdot}) \to H^0(X_K, I^{\cdot}) \to H^0(U_K, I^{\cdot}) \to 0.$$

La suite exacte de cohomologie qu'on en tire commence (sans hypothèse particulière sur la k-variété X et l'ouvert U) par la suite exacte naturelle

$$0 \to K[X]^* \to K[U]^* \to M \to \operatorname{Pic} X_K \to \operatorname{Pic} U_K,$$

comme il résulte de l'identification ci-dessus $\mathscr{D}iv_{Y_K} X_K \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}^1_Y(X_K, G_m)$ et de l'isomorphisme $H^1_Y(X_K, G_m) \xrightarrow{\approx} H^0(X_K, \mathscr{H}^1_Y(X_K, G_m))$ dû à la nullité de $\mathscr{H}^0_Y(X_K, G_m)$.

b. Le diagramme (D). — Ce diagramme est en partie extrait du diagramme obtenu en considérant le morphisme de restriction $H^{\cdot}(G, H^{\cdot}(X_K, G_m)) \to H^{\cdot}(G, H^{\cdot}(U_K, G_m))$:

$$\begin{tikzcd}
\xrightarrow{\partial} \arrow[d, "\delta"'] & & & C^2(G, K[U]^*) \arrow[d, "j"] \\
 & H^0(X_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & H^0(X^1_K, I_1) \arrow[dr] & H^0(U^1_K, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^2_K, I_0) \\
H^0(X, I_2) \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & H^0(X_K, I_2) \arrow[dr] & H^0(U_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^1_K, I_1) & \\
 & & H^0(U, I_2) \arrow[r, "i"] & H^0(U_K, I_2) &
\end{tikzcd}$$

c. Description de α. — Un élément de Br (X, K) se représente par un élément b de $H^0(X, I_2)$ tel qu'il existe c dans $H^0(X_K, I_1)$ avec $i(b) = \delta c$ et que $\delta b = 0$. Comme $dc = \partial c + \delta c$, l'élément $i(b)$ est homologue pour d à $-\delta c$ et l'image par α de la classe de b dans Br (X, K) est la classe de $-\delta c$ dans $H^1(G, \operatorname{Pic} X_K)$: noter que $C^{\cdot}(G, \operatorname{Pic} X_K)$ est l'homologie de $H^0(X^{\cdot}, I_0) \to H^0(X^{\cdot}, I_1) \to H^0(X^{\cdot}, I_2)$.

d. Description de $\mathfrak{d}$. — Un élément de $H^1(G, \operatorname{Pic} X_K)$ se représente par un élément p de $H^0(X^1_K, I_1)$ tel qu'il existe q dans $H^0(X^2_K, I_0)$ avec $\delta q = \partial p$ et que $\delta p = 0$. D'après **a**, la suite exacte $C^1(G, (B))$ provient naturellement du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdot\delta \arrow[d] & 0 \arrow[r] & H^0_Y(X^1_K, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X^1_K, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^1_K, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & H^0_Y(X^1_K, I_1) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & H^0(X^1_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^1_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & H^0_Y(X^1_K, I_2) \arrow[r] & H^0(X^1_K, I_2) \arrow[r] & H^0(U^1_K, I_2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme Pic $U_K = 0$, la colonne de droite est exacte. Il existe donc r dans $H^0(X_K^1, I_0)$ tel que $\delta r_u = p_u$. Ainsi, $p - \delta r$ appartient à l'image de η et définit un relèvement dans $C^1(G, M)$ de la classe de p dans $C^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K)$. Par application de ∂, on obtient donc un élément du noyau $C^2(G, K[U]^*)$ de $H^0(U_K^2, I_0) \to H^0(U_K^2, I_1)$, à savoir $q_u - \partial r_u$, car $\partial(p - \delta r) = \delta(q - \partial r)$. Finalement, la classe de p dans $H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K)$ a pour image par $\mathfrak{d}$ la classe de $q_u - \partial r_u$ dans $H^2(G, K[U]^*/K^*)$.

e. Description de λ. — C'est l'application induite par la restriction $H^0(X, I_2) \to H^0(U, I_2)$.

f. Description de γ. — Un élément de $H^2(G, K[U]^*)$ se représente par un élément s de $C^2(G, K[U]^*)$ tel que $\partial s = 0$. Dans le diagramme ci-dessous, il existe une chaîne d'éléments joignant, comme indiqué, s à un élément w de $H^0(U, I_2)$:

$$
\text{(D)}\quad
\begin{tikzcd}
 & & C^2(G, K[U]^*) \arrow[d, "j"] & \\
 & & H^0(U_K^1, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U_K^2, I_0) \\
 & H^0(U_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U_K^1, I_1) & \\
H^0(U, I_2) \arrow[r, "i"] & H^0(U_K, I_2) & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d] \\
 & t \arrow[r] \arrow[d] \\
 & v \arrow[r] \arrow[d] \\
w \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$\partial \xrightarrow{\delta}$$

L'existence d'une telle chaîne provient de l'exactitude des complexes horizontaux et on peut la remonter en raison de l'hypothèse Pic $U_K = 0$. Comme $dt = \partial t - \delta t$ et que $dv = \partial v + \delta v$, $j(s)$ est homologue pour d à $-i(w)$. L'image par γ de la classe de s dans $H^2(G, K[U]^*)$ est donc la classe de $-w$ dans $\mathrm{Br}(U, K)$.

g. Bilan. — Soient b et c comme en **c**. Prenons, en **d**, $p = \partial c$; on peut alors prendre $q = 0$. Soit r_u un relèvement de p_u dans $H^0(U_K^1, I_0)$: il existe alors un élément s dans $C^2(G, K[U]^*)$ tel que $j(s) = \partial r_u$. D'après **c** et **d**, l'image par $\mathfrak{d}\alpha$ de la classe de b dans $\mathrm{Br}(X, K)$ est la classe de s dans $H^2(G, K[U]^*/K^*)$.

Par ailleurs, l'élément b_u de $H^0(U, I_2)$ est connecté à s comme indiqué ci-dessous :

$$
\text{(D)}\quad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[ddr] & p \arrow[ddr] & & s \arrow[d] \\
b \arrow[r] \arrow[dr] & {} & & r_u \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & & c_u \arrow[r] \arrow[d] & p_u & \\
 & b_u \arrow[r] & {} & &
\end{tikzcd}
$$

D'après **e** et **f**, la classe de b dans $\mathrm{Br}(X, K)$ a donc pour image par $\gamma^{-1}\lambda$ la classe de $-s$ dans $H^2(G, K[U]^*)$ d'où l'anticommutativité annoncée. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel et J.-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 39, 1964, p. 111-164).

[2] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 27, 1965, p. 55-151).

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

[4] F. Châtelet, *Points rationnels sur les surfaces cubiques* (*Séminaire d'algèbre et de théorie des nombres*, Paris, 1954).

[5] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques* (*Enseignement math.*, vol. 5, 1959, p. 153-170).

[6] C. Chevalley, *On Algebraic Group Varieties* (*J. Math. Soc. Jap.*, vol. 6, 1954, p. 303-324).

[7] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 282, série A, 1976, p. 1113-1116).

[8] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La première descente sur les variétés rationnelles* (en préparation).

[9] P. Deligne, *Cohomologie à supports propres* in *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), t. 3 (*Lecture Notes in Math.*, n° 305, Springer, Berlin, 1973).

[10] A. W. M. Dress, *The Permutation Class Group of a Finite Group* (*J. of Pure and Applied Algebra*, vol. 6, 1975, p. 1-12).

[11] S. Endo and T. Miyata, *Quasi-Permutation Modules Over Finite Groups I, II* (*J. Math. Soc. Jap.*, vol. 25, 1973, p. 397-421 et vol. 26, 1974, p. 698-713).

[12] S. Endo and T. Miyata, *On a Classification of the Function Fields of Algebraic Tori* (*Nagoya Math. J.*, vol. 56, 1974, p. 85-104).

[13] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III* in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[14] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie algébrique*, EGA IV (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 24, 1965, vol. 28, 1966).

[15] H. Hironaka, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero, I, II* (*Ann. of Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-326).

[16] S. Lang, *Diophantine Geometry*, Interscience, New York, 1962.

[17] S. Lang, *Algebraic Groups Over Finite Fields* (*Amer. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 555-563).

[18] H. W. Lenstra, *Rational Functions Invariant Under a Finite Abelian Group* (*Inv. Math.*, vol. 25, 1974, p. 299-325).

[19] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne* (*Actes Congrès intern. Math.*, Nice, 1970, p. 401-411).

[20] Yu. I. Manin, *Cubic Forms* (*Nauka*, Moscou, 1972) (*trad. anglaise* : North-Holland, Amsterdam, 1974).

[21] T. Nakayama, *Cohomology of Class Field Theory and Tensor Product Modules I* (*Ann. of Math.*, vol. 65, 1957, p. 255-267), voir aussi T. Ono, *On the Tamagawa Number of Algebraic Tori* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 47-73).

[22] I. Reiner, *Integral Representations of Cyclic Groups of Prime Order* (*Proc. A.M.S.*, vol. 8, 1957, p. 142-146).

[23] P. Roquette, *Einheiten und Divisorklassen in endlich erzeugbaren Körpern* (*Jahresbericht d. Deutschen Math.-Verein.*, vol. 60, 1958, p. 1-27).

[24] M. Rosenlicht, *Toroidal Algebraic Groups* (*Proc. A.M.S.*, vol. 12, 1961, p. 984-988).

[25] P. Samuel, *A propos du théorème des unités* (*Bull. Sc. Math.*, vol. 90, 1966, p. 89-96).

[26] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires* (à paraître).

[27] B. Segre, *Questions arithmétiques sur les variétés algébriques* (*Colloque intern. d'algèbre et de théorie des nombres*, Paris, 1949, p. 83-91).

[28] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires* (*Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, Bruxelles, 1962, p. 53-68).

[29] R. Steinberg, *Regular Elements of Semi-Simple Algebraic Groups* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, 25, 1965, p. 49-80).

[30] R. G. Swan, *Induced Representations and Projective Modules* (*Ann. of Math.*, vol. 71, 1960, p. 552-578).

[31] R. G. SWAN, *Invariant Rational Functions and a Problem of Steenrod* (*Inv. Math.*, vol. 7, 1969, p. 148-158).

[32] J. TATE, *The Cohomology Groups of Tori in Finite Galois Extensions of Number Fields* (*Nagoya Math. J.*, vol. 27, 1966, p. 709-719) voir aussi *Global Class Field Theory* in J. CASSELS et A. FRÖHLICH, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967, p. 162-203).

[33] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Birational Properties of Linear Algebraic Groups* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., vol. 34, 1970, p. 3-19) (trad. anglaise : *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 4, 1970, p. 1-17), voir aussi *On the Birational Equivalence of Linear Algebraic Groups* (*Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 188, 1969, p. 978-981) (trad. anglaise : *Soviet Math. Dokl.*, vol. 10, 1969, p. 1212-1215).

[34] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Fields of Invariants of Abelian Groups* (*Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 28, 1973, p. 77-102) (trad. anglaise : *Russian Math. Surveys*, vol. 28, 1973, p. 79-105).

[35] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Stable Equivalence of Algebraic Tori* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., vol. 38, 1974, p. 3-10) (trad. anglaise : *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 8, 1974, p. 1-7).

[36] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Invariants birationnels des tores algébriques* (en russe) (*Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 30, 1975, p. 207-208), voir aussi *Quelques problèmes de géométrie birationnelle sur les tores algébriques* (en russe) (*Congrès intern. math.*, Vancouver, 1974, p. 343-347).

[37] H. ZASSENHAUS, *The Theory of Groups*, Chelsea, New York, 1949.

(Manuscrit reçu le 29 juin 1976)

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE,
C.N.R.S.
Mathématiques, bât. 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay;

Jean-Jacques SANSUC,
École Normale Supérieure,
Centre de Mathématiques,
45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05.

B

Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier

J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc

Propriétés cohomologiques des tores sur un schéma régulier

J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc

Introduction

L'étude des points rationnels des variétés algébriques rationnelles, entreprise dans [8'] et [8], s'appuie de façon essentielle sur la considération de torseurs (= espaces homogènes principaux) ayant pour groupe structural un tore algébrique: la situation est d'ailleurs très analogue au cas des courbes elliptiques où l'on considère des torseurs sous des groupes finis pour effectuer l'opération classique de descente.

Nous nous proposons ici d'établir de façon plus systématique certaines des propriétés de ces torseurs, déjà utilisées dans [8'] et [8]. Nous nous intéressons spécialement au cas où le groupe structural est un tore flasque: cette notion et celle de résolution flasque d'un tore ont été précisément introduites dans [8] pour l'étude des points rationnels d'un tore algébrique; ce sont des notions duales de notions dues à Endo-Miyata [10] et elles sont rappelées et développées au §1.

Rappelons qu'étant donné un schéma localement noethérien X et un X-schéma en groupes affine de type fini M, l'ensemble de cohomologie fppf $H^1(X,M)$ classe les X-torseurs sous M. Les propriétés des torseurs qui interviennent dans [8'] et [8] ont trait, dans une large mesure, au comportement de $H^1(X,M)$ par restriction à un ouvert ou, dans le cas intègre, au point générique. Il se trouve que ce dernier point rejoint une question de Serre et Grothendieck, posée initialement dans le cas d'un groupe M semi-simple (cf. ci-après): nous la résolvons dans le cas d'un groupe de type multiplicatif et l'étude du comportement du groupe $H^2(X,M)$ pour un tel groupe permet de traiter le cas de certains groupes semi-simples.

L'énoncé ci-après résume, de façon technique, les résultats principaux:

Théorème. - Soient X un schéma intègre noethérien régulier, K son corps des fonctions rationnelles et M un X-groupe de type multiplicatif de type fini. Soient

$$\rho_1 : H^1(X,M) \to H^1(K,M_K) \quad \text{et} \quad \rho_2 : H^2(X,M) \to H^2(K,M_K)$$

les applications induites, sur la cohomologie fppf, par la restriction au point générique.

(i) Si M est un X-tore flasque et X quelconque, ρ_1 est surjective et ρ_2 est injective.

(ii) Si X est semi-local et M quelconque, ρ_1 et ρ_2 sont injectives.

(iii) Si M et X sont quelconques, $H^1(X_{Zar},M)$ est le noyau de ρ_1.

Cet énoncé vaut encore si, au lieu de supposer X régulier, on suppose seulement les anneaux strictement locaux (= hensélisés stricts des anneaux locaux) de X factoriels.

Ce théorème est exposé dans le texte sous la forme des théorèmes 2.2, 3.1, 3.6 et 5.7. Sa démonstration est, en partie, une généralisation de celle de Grothendieck (cf. [GB II]) dans le cas du groupe multiplicatif $M = G_{m,X}$. La présentation adoptée ici est fondée sur les notions de tore et résolution flasques évoquées ci-dessus: on commence par prouver (i); on déduit ensuite (ii) de $(i)_2$ et enfin (iii) de (ii). Une autre méthode de démonstration permet d'éviter le recours initial aux notions de tore et résolution flasques: elle consiste à prouver directement (ii) et (i) dans le cas semi-local (cf. remarque 3.3), à en déduire (iii) comme précédemment et, de même, (i) (cf. remarque 5.8).

Précisons que l'assertion $(i)_1$ vaut également pour la restriction à un ouvert U: tout U-torseur sous un X-tore flasque se prolonge à X. Ceci généralise le cas $M = G_{m,X}$ et explique la terminologie "flasque".

Le résultat $(i)_2$ généralise l'injectivité, prouvée par Grothendieck ([GB II], cor. 1.8), de la restriction $H^2(X,G_m) \to H^2(K,G_m)$ et, par suite (cf. [GB II], cor. 1.10), celle, prouvée par Auslander-Goldman ([2], th. 7.2), de la restriction Br X → Br K pour le groupe de Brauer usuel.

L'assertion (iii) est la variante globale de $(ii)_1$: tout X-torseur sous M qui admet une section rationnelle est localement trivial pour la topologie de Zariski. Rappelons que Serre et Grothendieck ont posé la question de la validité d'un tel énoncé, mais dans des cadres essentiellement différents: Serre ([18] 5.5, p. 1-31) s'est placé dans le cas d'une variété algébrique X, lisse sur un corps algébriquement clos k, et d'un groupe algébrique connexe M provenant de k; Grothendieck ([GB II], remarque 1.11 a, voir aussi [13] n°5, remarque 3°, p. 5-26) s'est placé dans le cas d'un schéma X localement noethérien régulier et d'un X-schéma en groupes M semi-simple. L'assertion $(ii)_2$ permet de répondre affirmativement à cette question pour quelques schémas en groupes semi-simples M, par une méthode analogue à celle utilisée par Grothendieck ([GB II] 1.11 a) pour résoudre le cas $M = PGL_{n,X}$, ceci sous la même hypothèse de factorialité des anneaux strictement locaux de X. Néanmoins, cette hypothèse ne suffit pas à assurer la validité de l'énoncé ci-dessus pour un schéma en groupes semi-simple M quelconque.

Une application immédiate du théorème est l'injectivité de l'application naturelle $A^\times/N_{B/A}(B^\times) \to K^\times/N_{L/K}(L^\times)$ lorsque B/A est une extension étale finie d'anneaux semi-locaux intègres noethériens réguliers d'extension générique L/K.

Une autre application du théorème est le calcul, sous les hypothèses initiales, des groupes $H^i(X_{Zar},M)$. Ils sont nuls pour $i \geqslant 2$, ce qui généralise le cas $M = G_{m,X}$ (Grothendieck, [12] 3.4.1). On peut calculer $H^1(X_{Zar},M)$ par (iii). Si U

est un ouvert de X, la restriction $H^1(X_{\underline{Zar}},M) \to H^1(U_{\underline{Zar}},M)$ est surjective. Enfin, si X est le spectre d'un anneau de Dedekind intègre A, dont les corps résiduels aux points fermés p soient finis, et si T est un A-tore, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(A_{\underline{Zar}},T) \to H^1(A,T) \to Ш^1_A(K,T) \to 0$$

où, K_p désignant le complété de K pour la valuation associée à p, on désigne par $Ш^1_A(K,T)$ le noyau de la restriction $H^1(K,T) \to \prod_p H^1(K_p,T)$.

Indiquons, en bref, le découpage du texte. Le §0 fixe diverses notations et conventions et rappelle quelques définitions et propriétés sur les schémas en groupes et les modules flasques. Le §1 introduit la notion de X-tore flasque. Le §2 en étudie les propriétés cohomologiques, à savoir l'assertion (i) du théorème et la finitude de $H^1(K,T)$ pour un tel tore T défini sur un corps K de type fini. Le §3 est consacré à l'assertion (ii) du théorème. Le §4 s'appuie sur l'exemple du groupe $M = R^1_{Y/X}G_m$ des éléments de norme 1 d'une extension Y/X, finie et plate, pour illustrer, dans le cas étale, les résultats du §3 et donner, dans le cas général, divers contre-exemples. Le §5 traite le cas global: il établit et précise l'assertion (iii) du théorème et développe le calcul déjà mentionné des groupes $H^i(X_{\underline{Zar}},M)$.

Plan

Introduction

§ 0. Préliminaires

§ 1. Les tores flasques

§ 2. Propriétés cohomologiques des tores flasques

§ 3. Le cas semi-local

§ 4. Exemples et contre-exemples

§ 5. Le cas global

Appendice

Bibliographie

§0. Préliminaires

Sauf mention explicite d'une autre topologie, comme celle de Zariski, notée Zar, ou la topologie étale, notée ét, la cohomologie employée est celle relative à la topologie fppf, encore notée pl. La notation $H^i(X, \ )$ désigne donc, sauf mention du contraire, $H^i(X_{pl}, \ )$.

0.1.- On note G_a (resp. G_m) le groupe additif Spec $\mathbb{Z}[t]$ (resp. multiplicatif Spec $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$). Soient X un schéma et G un X-schéma en groupes affine de présentation finie. Par descente fpqc, tout X-torseur sous G est représentable et, si en outre G est plat, l'ensemble $H^1(X,G)$ classe les X-torseurs sous G. Si G est lisse, on a même $H^1(X,G) = H^1(X_{ét},G)$ et, s'il est en outre commutatif, $H^i(X,G) = H^i(X_{ét},G)$ quel que soit i ([GB III], remarque 11.8.3 et th. 11.7).

0.2.- Pour les notions sur les groupes de type multiplicatif, on renvoie à [SGA 3] chap. VIII-X. Rappelons néanmoins qu'un X-groupe de type multiplicatif (resp. un X-tore) est un X-schéma en groupes M localement diagonalisable (resp. localement isomorphe à un G_m^n) pour la topologie fpqc ([SGA 3] VIII 1.1, IX 1.1 et 1.3). On dit qu'il est quasi-isotrivial s'il est localement diagonalisable pour la topologie étale et isotrivial s'il existe un revêtement étale (= morphisme étale fini surjectif) $X' \to X$ qui le trivialise, i.e. qui le rende diagonalisable: s'il en est ainsi et si X est connexe, on peut même choisir $X' \to X$ connexe et galoisien. Si M est de type fini, il est quasi-isotrivial ([SGA 3] X 4.5). Si en outre X est localement noethérien normal, il est même isotrivial ([SGA 3] X 5.16). Rappelons ([SGA 3] X 5.1) qu'un X-groupe constant tordu est un X-schéma en groupes localement constant pour la topologie fpqc et qu'un tel groupe est dit quasi-isotrivial s'il est même localement constant pour la topologie étale, ce qui est le cas s'il est à engendrement fini ([SGA 3] X 5.9).

Etant donné un X-groupe de type multiplicatif M, on pose $\hat{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-gr}}(M,G_{m,X})$ Si M est quasi-isotrivial (resp. de type fini), $\hat{M}$ est un X-groupe constant tordu quasi-isotrivial (resp. constant tordu à engendrement fini), cf. [SGA 3] X 5.1,

5.6 à 5.9. Inversement, le morphisme naturel $M \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-gr}}(\hat{M}, G_{m,X})$ est un isomorphisme de X-schémas en groupes (cf. [SGA 3] VIII 1.4). On obtient ainsi, en se limitant à des groupes quasi-isotriviaux, diverses anti-équivalences de catégories ([SGA 3] X 5.7).

Soient X connexe et $X' \to X$ un revêtement étale connexe galoisien de groupe g. Le foncteur $M \mapsto \hat{M}(X')$ définit ([SGA 3] X 1.1) une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des X-groupes de type multiplicatif (resp. des X-groupes de type multiplicatif de type fini, resp. des X-groupes de type multiplicatif lisses, resp. des X-tores) trivialisés par $X' \to X$ et la catégorie des g-modules (resp. des g-modules de type fini, resp. des g-modules de type fini et $\mathbb{Z}$-torsion première aux caractéristiques résiduelles de X, resp. des g-modules $\mathbb{Z}$-libres de rang fini). A une suite exacte de g-modules correspond ainsi une "suite exacte" de X-groupes de type multiplicatif trivialisés par $X' \to X$ (cf. [SGA 3] VIII 3.1) qui, lorsqu'on part de g-modules de type fini, définit une suite exacte de faisceaux abéliens pour la topologie fppf.

0.3.- Soient $p: X' \to X$ un morphisme de schémas et A un X-groupe constant tordu. Si A est quasi-isotrivial, par exemple s'il est à engendrement fini, la flèche naturelle $p^*_{\text{ét}} A \to A_{X'} = A \times_X X'$ de faisceaux étales sur X' est un isomorphisme, comme on le voit par réduction au cas constant.

Soit M un X-groupe de type multiplicatif quasi-isotrivial, par exemple de type fini. On vérifie aisément, par réduction au cas diagonalisable, que le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & p_{\text{ét}*} M_{X'} \arrow[d, "\approx"] \\ \underline{\mathrm{Hom}}_X(\hat{M}, G_{m,X}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_X(\hat{M}, p_{\text{ét}*} G_{m,X'}) \end{tikzcd} \tag{0.3.1}$$

de faisceaux étales sur X est commutatif et que les verticales y sont des isomorphismes.

0.4.- Soit $\pi: X' \to X$ un morphisme fini localement libre. Si G est un X'-schéma en groupes affine , on note $R_{X'/X}(G)$ le X-schéma en groupes affine , généralement noté $\prod_{X'/X} G$, obtenu par "restriction" de X' à X. Si G est de type fini (resp. plat, resp. lisse), il en est de même de $R_{X'/X}(G)$. Si H est un X-schéma en groupes affine ,on note simplement $R_{X'/X}(H)$ le X-schéma en groupes $R_{X'/X}(H_{X'})$.

Le morphisme π étant fini, les faisceaux étales $R^1\pi_{\underline{ét}*}(G)$ et, si G est commutatif, $R^i\pi_{\underline{ét}*}(G)$, pour $i > 0$, sont tous nuls ([SGA 4] VIII 5.5 et 5.3). Comme le X-schéma en groupes $R_{X'/X}G$ définit sur X le faisceau étale $\pi_{\underline{ét}*}G$, on obtient ainsi (cf. [SGA 3] XXIV 8.5) des isomorphismes et bijections canoniques

$$(0.4.1) \qquad H^i(X_{\underline{ét}}, R_{X'/X}G) \xrightarrow{\approx} H^i(X'_{\underline{ét}}, G),$$

pour tout $i > 0$, si G est commutatif, et pour $i = 1$ sinon.

Si G est un X-schéma en groupes affine commutatif ,on note $N_{X'/X}$ le morphisme norme, souvent appelé trace, $R_{X'/X}G \to G$ de X-schémas en groupes (cf. [SGA 4] XVII 6.3.13.2) et $R^1_{X'/X}G$ le X-schéma en groupes noyau. Si $G = G_{m,X}$ (resp. $G_{a,X}$), la norme $N_{X'/X}$ induit ([SGA 4] XVII 6.3.18), dans le cas affine, la norme usuelle $G_m(X') \to G_m(X)$ (resp. la trace usuelle $G_a(X') \to G_a(X)$). Si π est de rang constant n, le morphisme composé de la norme et du morphisme naturel $G \to R_{X'/X}G$ est la multiplication par n dans G (loc. cit. 6.3.15). Comme, enfin, la norme est compatible (loc. cit. 6.3.15) à tout changement de base $Y \to X$, il en est de même du foncteur $R^1_{X'/X}$.

Supposons que π soit un revêtement étale connexe et soient $X'' \to X$ un revêtement étale connexe, galoisien de groupe g, majorant π et h le groupe du revêtement $X'' \to X'$. Si M est un X-groupe de type multiplicatif (resp. un X-tore), il en est de même de $R_{X'/X}M$ et $R^1_{X'/X}M$, et, si $X'' \to X$ trivialise M, il trivialise aussi $R_{X'/X}M$ et $R^1_{X'/X}M$. Soit $J_{g/h}$ le g-module $\mathbb{Z}$-libre défini par la suite exacte

(0.4.2) $$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{N_{g/h}} \mathbb{Z}[g/h] \longrightarrow J_{g/h} \to 0$$

où $N_{g/h}(1) = \sum_{x \in g/h} x$. On a, sous les mêmes hypothèses sur M, une suite exacte de X-groupes de type multiplicatif (resp. de X-tores)

(0.4.3) $$1 \to R^1_{X'/X}M \longrightarrow R_{X'/X}M \xrightarrow{N_{X'/X}} M \to 1$$

qui, dans le cas $M = G_{m,X'}$ donne précisément, <u>via</u> $G \mapsto \hat{G}(X'')$, la suite exacte (0.4.2).

0.5.- Soient g un groupe fini et L_g la catégorie des g-modules $\mathbb{Z}$-libres de type fini. Un g-module A de L_g est dit <u>de permutation</u> s'il admet une $\mathbb{Z}$-base permutée par g. Il est dit <u>flasque</u> lorsqu'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes ([8] §1, lemme 1):

(i) $H^{-1}(g',A) = 0$ pour tout sous-groupe g' de g

(ii) $H^1[g,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}[g/g'])] = 0$ " " " " " " "

(iii) $\mathrm{Ext}^1_g(A,\mathbb{Z}[g/g']) = 0$ " " " " " " ".

Tout facteur direct d'un module de permutation est flasque, mais, dès que g n'est pas métacyclique, il existe d'autres modules flasques ([8] §1, prop. 2). Tout g-module A de L_g admet une <u>résolution flasque</u> (Endo-Miyata [10]), i.e. s'insère dans une suite exacte de g-modules

$$0 \to A \to P \to F \to 0$$

avec P de permutation et F flasque ([8] §1, lemme 3). Soit, par exemple, $A = J_g$ le g-module défini par la suite exacte de g-modules

(0.5.1) $$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{N_g} \mathbb{Z}[g] \to J_g \to 0$$

où $N_g(1) = \sum_{x \in g} x$: c'est (0.4.2) pour le sous-groupe h réduit à l'unité e de g. Le morphisme de g-modules $\iota : \mathbb{Z}[g] \to \mathbb{Z}[g \times g]$, défini par

$$\iota(e) = \sum_{x \in g} [(e,x)-(x,e)]$$

induit une suite exacte

(0.5.2) $$0 \to J_g \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}[g \times g] \to R_g \to 0$$

qui est une résolution flasque du g-module J_g ([8] §1, prop. 1).

§1. Les tores flasques

Cette notion, introduite dans [8] §3, dans le cas d'un corps de base, est étendue ici au cas d'une base quelconque.

Lemme 1.1.- Soient X un schéma connexe, X_o un sous-schéma fermé de même espace sous-jacent, T un X-tore isotrivial et $X' \to X$ et $X'' \to X$ deux revêtements étales connexes, galoisiens de groupes respectifs g' et g'', trivialisant T. On pose $X'_o = X_o \times_X X'$. Les conditions suivantes sur T sont équivalentes:

(i) $\hat{T}(X')$ est un g'-module flasque (resp. de permutation)

(ii) $\hat{T}(X'')$ est un g''-module flasque (resp. de permutation)

(iii) $\hat{T}(X'_o)$ est un g'-module flasque (resp. de permutation).

Prouvons d'abord l'équivalence de (i) et (ii). Comme il existe un revêtement étale connexe galoisien de X majorant les deux revêtements donnés (considérer le schéma induit sur une composante connexe de $X' \times_X X''$), il suffit de traiter le cas où $X'' \to X$ majore $X' \to X$. En ce cas, g' est le quotient de g'' par un sous-groupe invariant h et l'équivalence de (i) et (ii) résulte alors de la proposition suivante ([8] §1, lemme 2 (vii) et (iv)) pour $A = \hat{T}(X'') = \hat{T}(X')$: si A est dans $L_{g''/h}$, il est flasque (resp. de permutation) comme g''-module si, et seulement si, il l'est comme g''/h-module. L'équivalence de (i) et (iii) résulte aussitôt de l'isomorphisme de g'-modules $\hat{T}(X') \xrightarrow{\sim} \hat{T}(X'_o)$ lié à la connexité de X'_o.

Définition 1.2.- Soient X un schéma et T un X-tore isotrivial. On dit que T est flasque (resp. quasi-trivial) si, pour chaque composante connexe Z de X, il existe un revêtement étale connexe $Z' \to Z$, galoisien de groupe g, trivialisant T_Z, tel que $\hat{T}(Z')$ soit un g-module flasque (resp. de permutation).

Le lemme 1.1 et [SGA 3] X 2.2 montrent que le choix de la structure de sous-schéma fermé sur Z n'a pas d'importance dans cette définition et que, si T est flasque (resp. quasi-trivial), pour toute composante connexe Z de X et tout re-

vêtement étale connexe $Z'' \to Z$, galoisien de groupe g', trivialisant T, le g'-module $\hat{T}(Z'')$ est encore flasque (resp. de permutation).

On voit aisément que, pour X connexe, un X-tore quasi-trivial n'est autre qu'un X-tore isomorphe au produit, sur i, d'un nombre fini de tores $R_{X_i'/X}G_{m,X_i'}$, où chaque $X_i' \to X$ est un revêtement étale connexe, ce qu'on peut encore écrire $R_{X'/X}G_{m,X'}$, pour un revêtement étale $X' \to X$ convenable. De plus, tout "facteur direct" d'un tore quasi-trivial est un tore flasque, mais il existe en général bien d'autres tores flasques (cf. 0.5).

Définition 1.3.- On appelle résolution flasque d'un X-tore isotrivial T toute suite exacte de X-tores

$$1 \to S \to P \to T \to 1$$

telle que P soit quasi-trivial et S flasque. Si X est localement noethérien, ou, plus généralement, si ses composantes connexes sont ouvertes, tout X-tore isotrivial admet une résolution flasque.

Il suffit de traiter le cas où X est connexe. Soit $X' \to X$ un revêtement étale connexe, galoisien de groupe g, trivialisant T. L'existence (0.5) d'une résolution flasque du g-module $\hat{T}(X')$ implique, par dualité, l'existence d'une résolution flasque du X-tore T formée de tores trivialisés par $X' \to X$.

Proposition 1.4.- Soient X un schéma normal, intègre et localement noethérien, K son corps des fonctions rationnelles et T un X-tore flasque. Il existe alors un ouvert non vide U de X et un U-tore flasque S tels que $T = S \times_U K$.

On peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine noethérien. Soit L/K une extension galoisienne finie, de groupe g, trivialisant T. La clôture intégrale B de A dans L est un A-module de type fini ([4] chap. V, §1, n°6, cor.1 de la prop.18). Le morphisme π: $\operatorname{Spec} B \to X$ est donc fini et l'extension L/K est séparable. Il existe donc ([EGA IV] 18.2.4) un ouvert non vide U de X au-dessus duquel π est étale. On obtient ainsi un revêtement étale connexe $Y \to U$ galoisien de groupe g. Il suffit alors de prendre pour S le U-tore défini par ce revêtement et le g-module $\hat{T}(L)$.

Proposition 1.5.- Soit $Y \to X$ un morphisme de schémas. Si T est un X-tore flasque, T_Y est un Y-tore flasque.

La même propriété est vraie pour la notion de tore quasi-trivial. On peut supposer X et Y connexes réduits. La définition 1.2 implique l'existence d'un revêtement étale connexe $X' \to X$, galoisien de groupe g, trivialisant T. Soit $Z \to Y$ le revêtement étale connexe défini par une composante connexe du revêtement étale $X' \times_X Y \to Y$. Ce dernier est galoisien de groupe g et trivialise T. Ainsi, le revêtement $Z \to Y$ est galoisien, trivialise T et a pour groupe de Galois un sous-groupe h de g. Comme, par hypothèse, $\hat{T}(X')$ est un g-module flasque, $\hat{T}_Y(Z)$ qui n'est autre que le h-module $\mathrm{Res}_h^g[\hat{T}(X')]$ est *a fortiori* un h-module flasque et T_Y est un Y-tore flasque.

§2. Propriétés cohomologiques des tores flasques

Contrairement aux conventions initiales, la cohomologie utilisée dans tout ce §2 est la cohomologie étale. On pose donc ici $H^i(X, \ ) = H^i(X_{\text{ét}}, \ )$ et les notations $\mathrm{Ext}^i_X(\ , \ )$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\ , \ )$ désignent respectivement des groupes et faisceaux "Ext" de faisceaux étales sur X. Rappelons (0.1 et 0.2) que, pour un X-tore T,

$$H^i(X_{\text{pl}}, T) = H^i(X_{\text{ét}}, T)$$

pour tout $i \geqslant 0$. On note enfin $\mathbb{Z}_X$ le faisceau étale "constant" de fibre $\mathbb{Z}$ sur X et on oublie même l'indice X s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X.

Lemme 2.1.- Soient X un schéma et T un X-tore flasque.

(i) Si X est connexe et géométriquement unibranche,

$$\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, \mathbb{Z}_X) = 0.$$

(ii) Si X est quasi-compact quasi-séparé et si $(i_j)_{j \in J}$ est une famille de morphismes $i_j : X_j \to X$ de schémas connexes et géométriquement unibranches X_j dans X,

$$\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, \bigoplus_{j \in J} i_{j*} \mathbb{Z}_{X_j}) = 0.$$

Rappelons qu'un schéma normal est géométriquement unibranche ([EGA IV] 0_{IV} 23.2.1), i.e. a ses anneaux strictement locaux irréductibles ([EGA IV] 18.8.15), qu'un schéma connexe et géométriquement unibranche est irréductible et qu'un schéma est quasi-compact quasi-séparé lorsqu'il est réunion finie d'ouverts affines et que l'intersection de deux ouverts affines est aussi réunion finie d'ouverts affines, ce qui est le cas si X est noethérien.

Montrons d'abord (i). Soit $X' \to X$ un revêtement étale connexe, galoisien de groupe g, qui trivialise T. L'hypothèse sur X montre que X' est irréductible et géométriquement unibranche, ce qui implique ([SGA 4] IX 3.6)

$$H^1(X',\mathbb{Z}) = 0.$$

On en déduit, $T_{X'}$ étant trivial, la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{X'}(\hat{T}_{X'},\mathbb{Z})$: c'est la somme d'un nombre fini de copies de $\mathrm{Ext}^1_{X'}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = H^1(X',\mathbb{Z})$. Considérons alors la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$(2.1.1) \qquad H^p(g,\mathrm{Ext}^q_{X'}(\hat{T}_{X'},\mathbb{Z})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^n_X(\hat{T},\mathbb{Z}).$$

Elle donne la suite des termes de bas degré

$$(2.1.2) \qquad 0 \to H^1(g,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{T}(X'),\mathbb{Z})) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{T},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_{X'}(\hat{T}_{X'},\mathbb{Z}) = 0.$$

Comme T est un X-tore flasque, $\hat{T}(X')$ est un g-module flasque (cf. 1.2 et 1.1) et le terme de gauche est donc nul (cf. 0.5 (ii)). D'où (i).

Montrons (ii). Comme $\hat{T}$ est à engendrement fini et que X est quasi-compact quasi-séparé, $\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T},\ )$ commute aux sommes directes quelconques (cf. [SGA 4] VII 3.3 et IX 2.7.3). Il suffit donc de prouver l'assertion pour un seul morphisme $i: Y \to X$ d'un schéma connexe et géométriquement unibranche Y dans X. Une vérification directe montre l'existence d'une injection naturelle

$$\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T},i_*\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_Y(i^*\hat{T},\mathbb{Z})$$

qu'on peut aussi interpréter comme l'edge $E_2^{1,0} \hookrightarrow E^1$ de la suite spectrale

$$(2.1.3) \qquad \mathrm{Ext}^p_X(\hat{T},R^qi_*\mathbb{Z}) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^n_Y(i^*\hat{T},\mathbb{Z}).$$

Comme T_Y est un Y-tore flasque (prop. 1.5) et qu'on a un isomorphisme $i^*\hat{T} \xrightarrow{\sim} \hat{T}_Y$ de faisceaux étales sur Y (cf. 0.3), on déduit de (i) la nullité de $\mathrm{Ext}^1_Y(i^*\hat{T},\mathbb{Z})$, ce qui implique celle de $\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T},i_*\mathbb{Z})$ et achève de prouver (ii).

Théorème 2.2.- Soit X un schéma noethérien intègre dont les anneaux strictement locaux soient factoriels, par exemple un schéma noethérien régulier intègre. Soient K son corps des fonctions rationnelles et U un ouvert non vide de X. Si T est un X-tore flasque,

(i) les restrictions

$$H^1(X,T) \to H^1(U,T_U) \qquad \text{et} \qquad H^1(X,T) \to H^1(K,T_K)$$

sont surjectives,

(ii) les restrictions

$$H^2(X,T) \to H^2(U,T_U) \qquad \text{et} \qquad H^2(X,T) \to H^2(K,T_K)$$

sont injectives.

Noter qu'on peut déduire $(i)_K$ de $(i)_U$ au moyen de [SGA 4] VII 5.9 et, inversement, $(ii)_U$ de $(ii)_K$. Rappelons (1.2 et 0.5) que tout X-tore quasi-trivial, en particulier $G_{m,X}$, est flasque, mais qu'il y a généralement bien d'autres tores flasques que les facteurs directs des tores quasi-triviaux. L'assertion $(i)_U$ explique la terminologie "flasque" et généralise le cas du groupe de Picard. L'assertion $(ii)_K$ généralise le cas du groupe de Brauer cohomologique, dû à Grothendieck ([GB II] cor. 1.8) et, par suite ([GB II] cor. 1.10), le cas du groupe de Brauer usuel, dû à Auslander-Goldman ([2] th. 7.2).

Rappelons que les anneaux strictement locaux de X sont les hensélisés stricts ([EGA IV] 18.8.7) de ses anneaux locaux et que, pour un anneau local noethérien A d'nensélisé strict $\overline{\overline{hs}}A$, la régularité de A équivaut à celle de $\overline{\overline{hs}}A$ ([EGA IV] 18.8.13) et implique donc (Auslander-Buchsbaum [EGA IV] 21.11.1) la factorialité de A et de $\overline{\overline{hs}}A$, la factorialité de $\overline{\overline{hs}}A$ entraînant celle de A ([EGA IV] 21.13.12).

Soient d'abord X un schéma quelconque et F et G deux faisceaux étales abéliens sur X. On a la suite spectrale ([SGA 4] V 6.1) de passage du local au global

(2.2.1) $$H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}_X^q(F,G)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_X^n(F,G)$$

dont on note $\theta_n = \theta_n(X;F,G)$ l'edge $E_2^{n,0} \to E^n$, soit

(2.2.2) $$\theta_n : H^n(X,\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,G)) \to \mathrm{Ext}_X^n(F,G).$$

Soit T un X-tore quelconque. Rappelons (0.3.1) que le morphisme naturel

(2.2.3) $$T \to \underline{\mathrm{Hom}}_X(\hat{T},G_{m,X})$$

est un isomorphisme de faisceaux étales sur X. Montrons que, pour $q>0$,

(2.2.4) $$\underline{\mathrm{Ext}}_X^q(\hat{T},G_{m,X}) = 0.$$

La vérification étant locale sur X et $\hat{T}$ localement constant pour la topologie étale, il suffit de vérifier que, pour X quelconque, $\underline{\mathrm{Ext}}_X^q(\mathbb{Z}_X,G_{m,X}) = 0$: mais, en ce cas, le résultat est évident. Considérons (2.2.1) pour $F = \hat{T}$ et $G = G_{m,X}$. D'après (2.2.4), c'est une suite spectrale dégénérée et les θ_n sont des isomorphismes. On obtient donc des isomorphismes canoniques

(2.2.5) $$\theta_n : H^n(X,\underline{\mathrm{Hom}}_X(\hat{T},G_{m,X})) \to \mathrm{Ext}_X^n(\hat{T},G_{m,X}).$$

Soit $i : Y \to X$ un morphisme de schémas. On a, pour tout n, le diagramme commutatif

(2.2.6) $$\begin{tikzcd}
H^n(X,\underline{\mathrm{Hom}}_X(\hat{T},G_{m,X})) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_n"] & H^n(Y,\underline{\mathrm{Hom}}_Y(i^*\hat{T},i^*G_{m,X})) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_n"] & H^n(Y,\underline{\mathrm{Hom}}_Y(i^*\hat{T},G_{m,Y})) \arrow[d, "\theta_n"] \\
\mathrm{Ext}_X^n(\hat{T},G_{m,X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_Y^n(i^*\hat{T},i^*G_{m,X}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_Y^n(i^*\hat{T},G_{m,Y})
\end{tikzcd}$$

où les horizontales du carré de gauche sont les morphismes naturels induits par i et celles du carré de droite les morphismes naturels induits par le morphisme canonique $i^*G_{m,X} \to G_{m,Y}$. La fonctorialité de la suite spectrale (2.2.1) en X et

en G implique donc la commutativité de ce diagramme. Compte tenu de l'isomorphisme canonique $i^*\hat{T} \xrightarrow{\sim} \hat{T}_Y$ (cf. 0.3) et des isomorphismes (2.2.3) pour X et Y, le diagramme (2.2.6) prend la forme du diagramme commutatif

$$(2.2.7)\qquad \begin{array}{ccc} H^n(X,T) & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(Y,T_Y) \\ \downarrow \theta_n & & \downarrow \theta_n \\ \mathrm{Ext}^n_X(\hat{T},G_{m,X}) & \xrightarrow{\sigma_n} & \mathrm{Ext}^n_Y(\hat{T}_Y,G_{m,Y}) \end{array}$$

où les horizontales sont les flèches naturelles induites par i.

Etant donné $i: Y \to X$ et deux faisceaux étales abéliens F sur X et H sur Y, on a la suite spectrale

$$(2.2.8)\qquad \mathrm{Ext}^p_X(F,R^q i_* H) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^n_Y(i^*F,H)$$

de composition des foncteurs i_* et $\mathrm{Hom}_X(F,\ )$. L'edge $E_2^{n,0} \to E^n$ définit une application

$$(2.2.9)\qquad \varphi_n: \mathrm{Ext}^n_X(F,i_*H) \to \mathrm{Ext}^n_Y(i^*F,H)$$

qui, pour $F = \hat{T}$ et $H = G_{m,Y}$ prend la forme

$$(2.2.10)\qquad \varphi_n: \mathrm{Ext}^n_X(\hat{T},i_*G_{m,Y}) \to \mathrm{Ext}^n_Y(i^*\hat{T},G_{m,Y}).$$

On obtient ainsi, compte tenu de l'identification $i^*\hat{T} \xrightarrow{\sim} \hat{T}_Y$, le diagramme

$$(2.2.11)\qquad \begin{array}{ccc} H^n(X,T) & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(Y,T_Y) \\ \approx \downarrow \theta_n & & \approx \downarrow \theta_n \\ \mathrm{Ext}^n_X(\hat{T},G_{m,X}) & \xrightarrow{\sigma_n} & \mathrm{Ext}^n_Y(\hat{T}_Y,G_{m,Y}) \\ & \searrow^{\lambda_n} \quad \nearrow_{\varphi_n} & \\ & \mathrm{Ext}^n_X(\hat{T},i_*G_{m,Y}) & \end{array}$$

où λ_n est le morphisme induit par le morphisme canonique $G_{m,X} \to i_*G_{m,Y}$. Ce diagramme est commutatif: la commutativité du carré a été établie, celle du triangle est prouvée en <u>appendice</u>.

Supposons que i vérifie la condition

(2.2.12) $$R^1 i_* G_{m,Y} = 0.$$

On en déduit, pour $F = \hat{T}$ et $H = G_{m,Y}$, la nullité du terme $E_2^{0,1}$ de la suite spectrale (2.2.8). Il en résulte que φ_1 est un isomorphisme et φ_2 une injection. Le diagramme (2.2.11) pour $n = 1$ et 2 donne alors les équivalences

(2.2.13) ρ_1 <u>surjective</u> $\Leftrightarrow \lambda_1$ <u>surjective</u> et ρ_2 <u>injective</u> $\Leftrightarrow \lambda_2$ <u>injective</u>.

Montrons que (2.2.12) est vérifiée pour $i = i_K$ et $i = i_U$, où i_K: Spec $K \to X$ et i_U: $U \to X$ sont les morphismes canoniques. Le faisceau étale $R^1 i_* G_{m,Y}$ est le faisceau associé au préfaisceau $X' \mapsto \mathrm{Pic}(Y \times_X X')$ ([SGA 4] V 5.1). Ce dernier est déjà nul, par le théorème 90, pour $Y = \mathrm{Spec}\, K$. Pour $Y = U$, l'hypothèse sur les anneaux strictement locaux de X implique la factorialité des anneaux locaux de X', donc la surjectivité de la restriction $\mathrm{Pic}\, X' \to \mathrm{Pic}\, U'$ où $U' = U \times_X X'$ ([EGA IV] 21.6.11). Le faisceau associé à $X' \mapsto \mathrm{Pic}\, X'$ étant nul, il en est donc de même alors de celui associé à $X' \mapsto \mathrm{Pic}\, U'$.

On est ainsi ramené à l'étude de λ_1 et λ_2. Comme X est noethérien et que ses anneaux strictement locaux sont factoriels, on a ([Br II] §1, (2) et (3)), pour $Y = \mathrm{Spec}\, K$ et $i = i_K$, et pour $Y = U$ et $i = i_U$, une suite exacte canonique de faisceaux étales sur X

(2.2.14) $$0 \to G_{m,X} \to i_* G_{m,Y} \to \bigoplus_x i_{x*} \mathbb{Z}_x \to 0$$

où la somme directe porte sur l'ensemble des points x de codimension 1 de X hors de Y, où $\mathbb{Z}_x$ désigne le faisceau "constant" $\mathbb{Z}$ porté par Spec $\kappa(x)$ (où $\kappa(x)$ est le corps résiduel de X en x) et où i_x: Spec $\kappa(x) \to X$ est le morphisme canonique. On en déduit la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, G_{m,X}) \xrightarrow{\lambda_1} \mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, i_* G_{m,Y}) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, \bigoplus_x i_{x*}\mathbb{Z}_x) \to \mathrm{Ext}^2_X(\hat{T}, G_{m,X}) \xrightarrow{\lambda_2} \mathrm{Ext}^2_X(\hat{T}, i_* G_{m,Y})$$

où les deux flèches extrêmes sont précisément λ_1 et λ_2. Utilisons enfin l'hypothèse sur T: comme c'est un X-tore flasque, le lemme 2.1 (appliqué en prenant

pour i_j les i_x, donc pour X_j des spectres de corps!) montre que le terme médian $\mathrm{Ext}^1_X(\hat{T}, \bigoplus_x i_{x*}\mathbb{Z}_x)$ est nul. D'où la surjectivité de λ_1 et l'injectivité de λ_2, ce qui, d'après (2.2.13), achève la démonstration.

Remarque 2.3.- L'assertion $(i)_U$ généralise, compte tenu de la proposition 1.5, la proposition 9 de [8] , relative au cas d'une variété X lisse sur un corps k et d'un tore flasque T provenant de k.

Théorème 2.4 ([8] §3 th.1).- Soit K un corps de type fini sur le corps premier. Si T est un K-tore flasque, le groupe $H^1(K,T)$ est fini.

Nous indiquons une démonstration quelque peu différente de celle de [8] et fondée sur l'assertion $(i)_K$ du théorème précédent et sur le lemme suivant:

Lemme 2.5.- Soit A un anneau régulier de type fini sur $\mathbb{Z}$. Si T est un A-tore, le groupe $H^1(A,T)$ est de type fini.

On peut supposer A intègre. Comme A est régulier, T est isotrivial (0.2) et il existe une extension finie étale connexe B/A, galoisienne de groupe g, qui trivialise T. Comme alors B est intègre, régulier et de type fini sur $\mathbb{Z}$, les groupes $B^\times$ et Pic B sont de type fini (Roquette et Mordell-Weil-Néron, cf. [8] §3). La suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^p(g,H^q(B,T_B)) \Rightarrow H^n(A,T) \tag{2.5.1}$$

donne la suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \to H^1(g,T(B)) \to H^1(A,T) \to H^1(B,T_B). \tag{2.5.2}$$

Le tore T_B étant trivial, le terme de droite est somme d'un nombre fini de copies de Pic B, donc de type fini. De même, le groupe T(B) est le produit d'un nombre fini de copies de $B^\times$, donc de type fini et, par suite, $H^1(g,T(B))$ est un groupe fini. Le terme médian $H^1(A,T)$ est donc un groupe abélien de type fini.

Démonstration du théorème.- Le corps K étant de type fini sur le corps premier, il existe un sous-anneau A de K, régulier, de type fini sur $\mathbb{Z}$ et de corps des fractions K: on peut invoquer Nagata ([EGA IV] 6.12.6) ou, plus simplement, considérer une extension transcendante pure K_0, en n variables, du corps premier, dont K soit une extension séparable finie, puis $A_0 = \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ ou $\mathbb{F}_p[X_1,\ldots,X_n]$ et sa clôture intégrale A_1 dans K, d'où, par les arguments utilisés en 1.4, un anneau A convenable en inversant un nombre fini d'éléments de A . Quitte à inverser encore un nombre fini d'éléments de A, on peut supposer, d'après la proposition 1.4, que le K-tore flasque T se prolonge en un A-tore flasque S. D'après le théorème 2.2 $(i)_K$, la restriction

$$H^1(A,S) \to H^1(K,T)$$

est donc surjective. D'où la conclusion, puisque $H^1(A,S)$ est, d'après le lemme 2.5, un groupe abélien de type fini et que $H^1(K,T)$ est un groupe de torsion.

§3. Le cas semi-local

On revient à la cohomologie fppf: sauf mention du contraire,

$$H^i(X, \ ) = H^i(X_{pl}, \ ).$$

Théorème 3.1.- Soient X un schéma noethérien intègre dont les anneaux strictement locaux soient factoriels, par exemple un schéma noethérien intègre régulier, K son corps des fonctions rationnelles, M un X-groupe de type multiplicatif de type fini et $X' \to X$ un revêtement étale connexe galoisien qui le trivialise.

La restriction

$$\rho_1 : H^1(X,M) \to H^1(K,M_K)$$

est injective dans chacun des cas suivants:

(i) X est semi-local;

(ii) X <u>est un ouvert d'un espace affine</u> $\mathbb{A}^n_A$ <u>sur un anneau semi-local noethérien intègre</u> A, <u>de localisés stricts factoriels, et</u> $M = N\times_A X$ <u>où</u> N <u>est un</u> A-<u>groupe de type multiplicatif de type fini</u>;

(iii) <u>tout sous-revêtement</u> $X'' \to X$ <u>de</u> $X' \to X$ <u>vérifie</u> Pic $X'' = 0$.

Précisons qu'on appelle schéma semi-local le spectre d'un anneau semi-local. Notons d'autre part que les hypothèses (ii) impliquent les hypothèses initiales sur X et M et qu'un revêtement tel que $X' \to X$ existe automatiquement (<u>cf</u>. 0.2).

Il est clair que (ii) généralise (i). Montrons que (iii) généralise (ii). Soit B/A une extension finie étale intègre, galoisienne de groupe g, qui trivialise N. On peut prendre pour X'/X le revêtement étale connexe $X\times_A B/X$, galoisien de groupe g. Tout sous-revêtement X"/X est alors de la forme $X\times_A C/X$ pour C/A une sous-extension étale de B/A. Comme A est semi-local noethérien, il en est de même de C, d'où Pic C = 0 ([4] chap.II, §5, n°3, prop.5). Comme C est noethérien normal, Pic $\mathbb{A}^n_C$ = Pic C (<u>cf</u>. par exemple [4] chap.7, §1, n°s9-10, prop.18 et [EGA IV] Err_{IV} 21.4.13). Ainsi, Pic $\mathbb{A}^n_C = 0$ et comme $\mathbb{A}^n_C$ est noethérien localement factoriel, d'après l'hypothèse de factorialité des localisés stricts de A, la restriction Pic $\mathbb{A}^n_C \to$ Pic $X\times_A C$ est surjective ([EGA IV] 21.6.11), d'où Pic $X\times_A C = 0$.

On peut donc se limiter au cas (iii). Traitons d'abord le cas où M est un X-tore. Soient g le groupe du revêtement $X' \to X$ et

(3.1.1) $$1 \to T \to P \to M \to 1$$

une résolution flasque (<u>cf</u>. 1.3) du X-tore M formée de tores trivialisés par X'/X. Cette résolution donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X,P) & \to & H^1(X,M) & \to & H^2(X,T) \\ & & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 \\ & & H^1(K,M_K) & \to & H^2(K,T_K) \end{array}$$

dont la première ligne est exacte. Comme P est quasi-trivial et trivialisé par X'/X, il est isomorphe à un produit fini de tores $R_{X''/X}G_{m,X''}$, où X''/X est un sous-revêtement étale de X'/X. Ainsi, d'après (0.4.1), $H^1(X,P)$ est un produit fini de groupes Pic X'' pour de tels X''. Il est donc nul en raison de l'hypothèse (iii). Les hypothèses sur X et le caractère flasque de T permettent d'appliquer le théorème 2.2 $(ii)_K$: la restriction ρ_2 est injective. On en déduit qu'il en est de même de ρ_1.

Si M est un X-groupe de type multiplicatif de type fini quelconque, il existe une suite exacte

$$1 \to T \to M \to \mu \to 1$$

de X-groupes de type multiplicatif de type fini, où T soit un X-tore et μ un X-groupe fini, les deux étant trivialisés par X'/X: on prend pour $\hat{\mu}(X')$ le sous-groupe de torsion de $\hat{M}(X')$ (cf. [SGA 3] VIII 3.1 dans le cas diagonalisable). Cette suite définit une suite exacte de faisceaux abéliens fppf sur X et donne donc le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\mu(X) & \longrightarrow & H^1(X,T) & \longrightarrow & H^1(X,M) & \longrightarrow & H^1(X,\mu) \\
\alpha\downarrow\wr & & \downarrow\theta & & \downarrow\rho_1 & & \downarrow\beta \\
\mu(K) & \longrightarrow & H^1(K,T_K) & \longrightarrow & H^1(K,M_K) & \longrightarrow & H^1(K,\mu_K).
\end{array}$$

Comme μ est fini sur X et que X, ayant ses anneaux strictement locaux factoriels, est normal, α est surjective ([EGA II] 6.1.14); c'est donc un isomorphisme. De même, tout X-torseur sous μ étant représentable par un X-schéma fini, l'existence d'une section rationnelle pour ce torseur implique, X étant normal, l'existence d'une section: ainsi, β est injective. Comme T est un X-tore trivialisé par X'/X, on sait d'après l'alinéa précédent que θ est injective. On déduit alors du diagramme que ρ_1 est injective.

Corollaire 3.2.- On conserve les hypothèses et notations du théorème 3.1. Si M est un X-tore flasque, la restriction

$$\rho_1 : H^1(X,M) \to H^1(K,M_K)$$

est, dans chacun des cas (i), (ii), (iii), un isomorphisme.

Corollaire immédiat des théorèmes 2.2 $(i)_K$ et 3.1. Notons qu'on a le même résultat pour la restriction

$$H^1(X,M) \to H^1(U,M)$$

à un ouvert non vide U de X.

Remarque 3.3.- Dans la démonstration ci-dessus du théorème 3.1, l'injectivité de ρ_1 pour un X-tore M a été établie grâce à l'existence d'une résolution flasque de M et à l'injectivité, déjà connue, de ρ_2 pour un X-tore flasque. Montrons brièvement qu'on peut obtenir ce même résultat, plus directement, grâce au lemme suivant:

Lemme 3.3.1.- On conserve les hypothèses et notations du théorème 3.1. On désigne par g le groupe de Galois de X'/X, par η le point générique de X et on pose $\eta' = \eta \times_X X'$. Dans chacun des cas (i), (ii), (iii), la suite naturelle de g-modules

$$1 \to G_m(X') \to G_m(\eta') \to \mathrm{Div}\ X' \to 0$$

est une suite exacte qui admet un g-scindage. En particulier, si Φ est un foncteur covariant $(g\text{-Mod}) \to (\mathrm{Ens})$, l'application naturelle

$$\Phi(G_m(X')) \to \Phi(G_m(\eta'))$$

est, dans chacun de ces cas, une injection.

Elle admet même une rétraction! Pour prouver ce lemme, il suffit d'établir la nullité de $\mathrm{Ext}^1_g(\mathrm{Div}\ X', G_m(X'))$. Comme le g-module Div X' est, d'après la factorialité des anneaux strictement locaux de X, somme directe de g-modules $\mathbb{Z}[g/h]$ pour h sous-groupe de g, il suffit de savoir que, pour tout tel sous-groupe h, le groupe $H^1(h,G_m(X'))$ est nul. Or, si $X'' = X'^h$, le revêtement X'/X'' est galoisien de groupe h et on a une injection naturelle (cf. (2.5.2))

$$H^1(h,G_m(X')) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\ X''.$$

La conclusion résulte alors de l'hypothèse Pic X" = 0.

Pour obtenir, comme annoncé, l'injectivité de ρ_1 pour un X-tore M, il suffit d'appliquer le lemme en considérant $\Phi = \mathrm{Ext}^1_g(\hat{M}, \ )$. On vérifie en effet aisément, Pic X' étant nul, que la restriction $\rho_1 : H^1(X,M) \to H^1(K,M_K)$ s'identifie au morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^1_g(\hat{M},G_m(X')) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_g(\hat{M},G_m(\eta')).$$

De plus, si M est un X-tore <u>flasque</u>, Φ (Div X') = 0, ce qui donne d'après le lemme 3.3.1 l'égalité $\Phi(G_m(X')) = \Phi(G_m(\eta'))$, autrement dit $H^1(X,M) = H^1(K,M_K)$, ce qui est une autre manière de prouver le corollaire 3.2 ci-dessus.

<u>Remarque</u> 3.4.- Dans le cas où M est un X-groupe de type multiplicatif <u>fini</u>, la restriction ρ_1 est encore injective lorsqu'on suppose seulement X normal intègre (<u>voir</u> la fin de la démonstration du théorème 3.1). En revanche, on donne au §4 un exemple de tore M sur un schéma local, <u>normal</u> et intègre, pour lequel la restriction ρ_1 n'est pas injective (exemple 4.10).

<u>Remarque</u> 3.5.- On donne également au §4 l'exemple d'un schéma en groupes <u>lisse</u> sur un schéma local régulier intègre X pour lequel la restriction ρ_1 n'est pas injective (exemple 4.11). On notera cependant que ce X-schéma en groupes est connexe, mais non à fibres connexes!

Théorème 3.6.- <u>On conserve les hypothèses et notations du théorème</u> 3.1. <u>Dans chacun des cas</u> (i), (ii), (iii), <u>la restriction</u>

$$\rho_2 : H^2(X,M) \to H^2(K,M_K)$$

<u>est injective</u>.

On peut écrire le g-module $\hat{M}(X')$ comme le quotient d'un $\mathbb{Z}[g]$-module libre de rang fini, ce qui donne, par dualité, une suite exacte

(3.6.1) $$1 \to M \to T' \to T \to 1$$

de X-groupes de type multiplicatif, où T est un X-tore et T' un X-tore quasi-trivial. Cette suite définit une suite exacte de faisceaux fppf sur X et donne donc le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^1(X,T) & \to & H^2(X,M) & \to & H^2(X,T') \\ & & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \rho_2' \\ 0 = H^1(K,T'_K) & \to & H^1(K,T_K) & \to & H^2(K,M_K) & \to & H^2(K,T'_K). \end{array}$$

Le K-tore T'_K étant quasi-trivial, (0.4.1) et le théorème 90 impliquent la nullité de $H^1(K,T'_K)$. L'injectivité de ρ_1 résulte du théorème 3.1. Celle de ρ_2' résulte, comme T' est flasque, du théorème 2.2 $(ii)_K$, mais, en utilisant (0.4.1), c'est déjà une conséquence de l'injectivité pour le groupe multiplicatif $G_{m,X}$ ([GB II] 1.8). Le diagramme montre alors que ρ_2 est injective.

Corollaire 3.7.- On conserve les hypothèses et notations du théorème 3.1 et on se place dans l'un des cas (i), (ii), (iii) ou

(iv) M est un X-tore flasque.

On considère en outre une extension centrale

(3.7.1) $$1 \to M \to G' \to G \to 1$$

de X-schémas en groupes affine de type fini et la restriction d'ensembles pointés $$\rho_1 : H^1(X,G) \to H^1(K,G_K).$$

Si l'on suppose en outre

(v) $H^1(X,G') = 0$,

la restriction ρ_1 a un noyau trivial, i.e. $\rho_1(\xi) = 0$ implique $\xi = 0$.

Si l'on suppose même

(vi) $H^1(X,{}^aG') = 0$ pour toute forme tordue ${}^aG'$ de G' par un X-torseur a sous G opérant sur G' par automorphismes intérieurs de G', la restriction ρ_1 est injective.

Précisons que l'hypothèse sur (3.7.1) signifie que M est un X-sous-schéma en groupes fermé central de G' et que le morphisme $G' \to G$ est fidèlement plat de présentation finie et fait de G' un G-torseur sous M agissant par translations à gauche. D'autre part, pour la notion de torsion par un X-torseur a sous G, on renvoie à [11] III 2.3.1.

La "suite exacte" (3.7.1) définit une suite exacte de faisceaux en groupes <u>fppf</u> sur X. On en déduit ([11] IV 4.2.10) le diagramme d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X,G') & \to & H^1(X,G) & \to & H^2(X,M) \\ & & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 \\ & & H^1(K,G_K) & \to & H^2(K,M_K). \end{array} \tag{3.7.2}$$

Dans ce diagramme d'ensembles pointés, la première ligne est exacte ([11] IV 4.2.10) et le carré est commutatif ([11] V 1.5.2.2 et IV 4.2.12 (iii)). Comme ρ_2 est injective, d'après le théorème 3.6 pour les cas (i), (ii), (iii), et d'après le théorème 2.2 $(ii)_K$ pour le cas (iv), on déduit du diagramme que le noyau de ρ_1 est trivial lorsque $H^1(X,G') = 0$.

Soient α un élément de $H^1(X,G)$ et a un X-torseur sous G de classe α. Comme M est central, la torsion ([11] III 2.3.1) de la "suite exacte" (3.7.1) par a sous l'action de G opérant grâce aux automorphismes intérieurs de G' donne la "suite exacte" du même type

$$1 \to M \to {}^aG' \to {}^aG \to 1$$

et, par suite, le diagramme d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X,{}^aG') & \to & H^1(X,{}^aG) & \to & H^2(X,M) \\ & & \downarrow {}^a\rho_1 & & \downarrow \rho_2 \\ & & H^1(K,{}^aG_K) & \to & H^2(K,M_K). \end{array} \tag{3.7.3}$$

Il existe une bijection τ_a de (3.7.2) sur (3.7.3) ([11] III 2.6.3 et IV 4.3.4) qui transforme $\rho_1^{-1}[\rho_1(\alpha)]$ en ${}^a\rho_1^{-1}[{}^a\rho_1(0)]$ par fonctorialité. Si $H^1(X,{}^aG') = 0$, le raisonnement initial appliqué à (3.7.3) montre que ${}^a\rho_1$ a un noyau trivial, d'où $\rho_1^{-1}[\rho_1(\alpha)] = \{\alpha\}$.

Le résultat ci-dessous permet de donner des exemples d'application du corollaire 3.7. Il est au moins bien connu dans le cas de $GL_{n,A}$ (cf. [SGA 1] XI 5.1 et 5.2, voir aussi [18] 4.3, 4.4 et [13] n°5).

Proposition 3.8.- Si A est un anneau semi-local et D une A-algèbre d'Azumaya,

(3.8.1) $$H^1(A,GL_{1,D}) = 0$$

(3.8.2) $$H^1(A,SL_{1,D}) = A^\times/N(D^\times).$$

Dans cet énoncé, A est commutatif, $GL_{1,D}$ désigne le A-schéma en groupes "des éléments inversibles de D" et $SL_{1,D}$ le A-schéma en groupes "des éléments de D de norme réduite 1": on a une "suite exacte" de A-schémas en groupes affines de type fini

$$1 \to SL_{1,D} \to GL_{1,D} \xrightarrow{N} G_{m,A} \to 1$$

où N désigne la norme réduite. L'égalité (3.8.2) résulte donc de (3.8.1). En particulier, $H^1(A,SL_{n,A}) = 0$. Notons enfin que, l'anneau A étant produit d'un nombre fini d'anneaux semi-locaux connexes, on peut le supposer connexe pour la démonstration.

On sait déjà que $H^1(A,GL_{n,A}) = 0$: la théorie de la descente fpqc pour les modules et la proposition 12 de [4] (chap.I, §3, n°6) montrent que, pour A commutatif quelconque, $H^1(A,GL_{n,A})$ classe les A-modules projectifs de rang n, d'où la conclusion dans le cas semi-local puisqu'alors tout A-module projectif de rang constant est libre ([4] chap.II, §5, n°3, prop.5).

On sait qu'une algèbre d'Azumaya D sur un anneau local A est neutralisée par un revêtement étale B/A défini par un élément régulier ([2] th.6.3). On en déduit la même assertion pour A semi-local d'idéaux maximaux $m_1,\dots,m_r$: il s'agit de trouver un élément ξ de D qui soit régulier, i.e. tel que le discriminant $D(\xi)$ du polynôme de Hamilton-Cayley de ξ appartienne à $A^\times$ ([GB I] 5.13); comme, d'après le cas local, il existe, pour chaque i entre 1 et r, un élément ξ_i de D tel que $D(\xi_i)$ n'appartienne pas à m_i, on en déduit, par le théorème des restes chinois, l'existence d'un élément ξ tel que $D(\xi)$ n'appartienne à aucun des m_i.

Soit donc B/A un revêtement étale tel que $D_B = D \otimes_A B$ soit une B-algèbre de matrices. D'après [11] 3.6.3, le noyau de la restriction

$$H^1(A,GL_{1,D}) \to H^1(B,GL_{1,D})$$

s'identifie à $H^1(B/A,GL_{1,D})$, ce qui, compte tenu de la nullité de $H^1(B,GL_{1,D})$, montre que (3.8.1) équivaut à la nullité de $H^1(B/A,GL_{1,D})$. Comme A est semi-local connexe, B est libre de rang fini sur A. L'ensemble $H^1(B/A,GL_{1,D})$ classe les D_B-modules à droite libres de rang 1 munis d'une donnée de descente, i.e. les couples (M,φ) où M est un B-module à droite, $\varphi: D_B \to \mathrm{End}_B(M)$ un morphisme de B-algèbres faisant de M un D_B-module à droite libre de rang 1, le tout muni d'une donnée de descente. On sait qu'alors $M = N_B$ où N est un A-module à droite. On sait aussi qu'on peut descendre le morphisme d'algèbres $\varphi: D_B \to \mathrm{End}(N_B)$ ce qui donne à N une structure de D-module à droite descendue de celle de D_B-module de M. Comme B est libre de rang n sur A, le D-module N est facteur direct du D-module libre $N_B = M$. Il est donc projectif et de type fini ([4] chap.I, §3, n°6, prop.11), donc de présentation finie. On en déduit, par le lemme de Nakayama ([4] chap.II, §3,n°2, prop.5) que, si $\bar{A} = A/\mathrm{rad}\, A$, le D-module N est libre s'il en est ainsi du $D\otimes_A\bar{A}$-module $N\otimes_A\bar{A}$, ce qui nous ramène au cas où A est un produit fini de corps. L'isomorphisme $N_B \approx D_B$ implique l'isomorphisme de D-modules $N^n \approx D^n$, d'où, l'anneau D étant semi-simple, par Krull-Remak-Schmidt, $N \approx D$, ce qui achève la démonstration de (3.8.1).

Corollaire 3.9.- <u>Soient</u> A <u>un anneau semi-local intègre noethérien, d'anneaux strictement locaux factoriels, ce qui est le cas pour</u> A <u>régulier</u>, K <u>son corps des fractions. La restriction</u>

(3.9.1) $$H^1(A,PGL_{n,A}) \to H^1(K,PGL_{n,K})$$

<u>est injective. Il en est de même, si</u> D <u>est une</u> A-<u>algèbre d'Azumaya, de la restriction</u>

(3.9.2) $$H^1(A,PGL_{1,D}) \to H^1(K,PGL_{1,D}).$$

La trivialité du noyau de (3.9.1) est due à Grothendieck ([GB II] 1.11 a) qui l'obtient comme corollaire de l'injectivité de la restriction $H^2(A,G_{m,A}) \to H^2(K,G_{m,K})$. La démonstration ci-après utilise simplement la proposition 3.8 comme ingrédient supplémentaire.

Notons d'abord que (3.9.2) est une conséquence de (3.9.1). En effet, si D est de rang n^2 sur A, elle définit (cf. [GB I] cor. 5.11) un A-torseur a sous $PGL_{n,A}$ et on vérifie aisément que la torsion τ_a par a sous l'action de $PGL_{n,A}$ opérant par automorphismes intérieurs de $GL_{n,A}$ donne d'abord ${}^aM_n(A) = D$ et, par suite, ${}^aGL_{n,A} = GL_{1,D}$ et ${}^aPGL_{n,A} = PGL_{1,D}$. On en déduit ([11] 2.6.1 et 2.6.3) que τ_a définit une bijection, fonctorielle en A, de $H^1(A,PGL_{n,A})$ sur $H^1(A,PGL_{1,D})$.

Démontrons (3.9.1). Un A-torseur a sous $PGL_{n,A}$ définit une A-algèbre d'Azumaya D et on vient de voir que ${}^aGL_{n,A} = GL_{1,D}$. On en déduit, grâce à (3.8.1), que l'hypothèse (vi) du corollaire 3.7 est vérifiée pour l'extension centrale

$$1 \to G_{m,A} \to GL_{n,A} \to PGL_{n,A} \to 1.$$

On déduit alors de 3.7 que ρ_1 est injective pour $PGL_{n,A}$.

Exemple 3.10.- On considère A comme dans 3.9 et on suppose $2 \in A^\times$. Montrons qu'un cas particulier de (3.9.2) est l'injectivité de la restriction

$$\rho_1 : H^1(A,SO(f)) \to H^1(K,SO(f))$$

pour une A-forme quadratique f non dégénérée de rang 3. Comme A est semi-local, f est diagonalisable et, comme $SO(af) = SO(f)$ pour $a \in A^\times$, on peut supposer $f = ax^2+by^2-abz^2$ avec $a, b \in A^\times$. Soit D la A-algèbre de quaternions $H(-a,-b)$. On vérifie aussitôt qu'en faisant opérer $D^\times$ par automorphismes intérieurs sur le A-module libre de rang 3 des quaternions purs, on obtient un isomorphisme de A-schémas en groupes $PGL_{1,D} \xrightarrow{\sim} SO(f)$, d'où le résultat annoncé par (3.9.2). Notons par ailleurs que l'injectivité de ρ_1 pour $SO(f)$ et f non dégénérée de rang 2 est une conséquence immédiate du théorème 3.1 (i) appliqué à $M = R^1_{B/A}G_m$ où, supposant, ce qui est loisible, $f = x^2-ay^2$, on prend $B = A[X]/(X^2-a)$. Notons enfin que, pour

f de rang 4 non dégénérée, la non trivialité du noyau de ρ_1 pour SO(f) n'est plus nécessairement vraie sous la seule hypothèse de factorialité des anneaux strictement locaux de A, comme le montre l'exemple suivant ([7] 2.3.3) déjà utilisé par Craven-Rosenberg-Ware à propos de l'anneau de Witt: le localisé à l'origine A de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_5]/(X_1^2+\ldots+X_5^2)$ a ses anneaux strictement locaux factoriels (Nagata-Grothendieck) et, pourtant, si $f = x^2+y^2+z^2+t^2$, la forme $-f$ définit un élément non trivial de $H^1(A,SO(f))$ qui devient trivial sur K. Pour d'autres démonstrations des résultats ci-dessus et une discussion détaillée du cas orthogonal, on renvoie à [7].

Exemple 3.11.- On voit aussitôt, comme en 3.9, que l'hypothèse 3.7 (vi) (resp. (v)) est vérifiée chaque fois que, dans (3.7.1), on a $G' = R_{Y/X}GL_{n,Y}$ (resp. $R_{Y/X}SL_{n,Y}$), où Y/X désigne un revêtement étale. On obtient ainsi divers exemples d'application de 3.7. Soient par exemple n un entier premier aux caractéristiques résiduelles de X et Y/X un revêtement étale tel que Y possède une section globale racine primitive n-ième de 1. Celle-ci définit un morphisme de X-schémas en groupes $\mathbb{Z}_{n,X} \to R_{Y/X}SL_{n,Y}$ et, par suite, par passage au quotient, un X-schéma en groupes semi-simple G, pour lequel la restriction ρ_1 a, pour A comme dans 3.9, un noyau trivial.

§4. Exemples et contre-exemples

Nous utilisons l'exemple du schéma en groupes $R^1_{Y/X}G_{m,Y}$ (cf. 0.4) pour illustrer le théorème 3.1 dans le cas étale et donner divers contre-exemples dans le cas fini fidèlement plat quelconque.

Lemme 4.1.- Soient $\pi: Y \to X$ un morphisme fini localement libre de schémas et A (resp. B) l'anneau des sections globales de X (resp. Y). On a la suite exacte, fonctorielle en X,

$$(4.1.1) \qquad 1 \to A^\times/N(B^\times) \to H^1(X,R^1_{Y/X}G_m) \to {}_N\mathrm{Pic}\ Y \to 0$$

où N désigne la norme $N_{Y/X}$ et ${}_N\mathrm{Pic}\ Y$ le noyau de $N: \mathrm{Pic}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X$. En particulier, si X est intègre, de corps des fonctions rationnelles K, on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$(4.1.2)\qquad \begin{array}{ccc} 1 \to A^\times/N_{B/A}(B^\times) & \longrightarrow & H^1(X,R^1_{Y/X}G_m) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho_1 \\ 1 \to K^\times/N_{B_K/K}(B_K^\times) & \longrightarrow & H^1(K,R^1_{B_K/K}G_m). \end{array}$$

Précisons que B_K désigne $B \otimes_A K$. La norme $N_{Y/X}: R_{Y/X}G_{m,Y} \to G_{m,X}$ est un morphisme fidèlement plat de présentation finie: la question étant locale sur X, on peut supposer de rang constant n, auquel cas le composé de $N_{Y/X}$ et du morphisme canonique $G_{m,X} \to R_{Y/X}G_{m,Y}$ est le morphisme entier $G_{m,X} \xrightarrow{n} G_{m,X}$, d'où la surjectivité de $N_{Y/X}$; la platitude se vérifie fibre par fibre ([EGA IV] 11.3.11), ce qui nous ramène au cas d'un corps de base k, où la vérification est facile, $G_{m,k}$ étant de dimension 1. On a donc une "suite exacte"

$$(4.1.3)\qquad 1 \to R^1_{Y/X}G_m \to R_{Y/X}G_m \xrightarrow{N_{Y/X}} G_{m,X} \to 1$$

qui fait de $R_{Y/X}G_m$ un torseur <u>fppf</u> sur $G_{m,X}$ sous $R^1_{Y/X}G_m$ et définit une suite exacte de faisceaux abéliens <u>fppf</u> sur X. D'où la suite exacte, fonctorielle en X,

$$(4.1.4)\qquad 1 \to A^\times/N(B^\times) \to H^1(X,R^1_{Y/X}G_m) \to H^1(X,R_{Y/X}G_m) \xrightarrow{N} H^1(X,G_m).$$

La lissité de $R_{Y/X}G_m$ et (0.4.1) impliquent $H^1(X,R_{Y/X}G_m) = H^1(X_{\underline{ét}},R_{Y/X}G_m) = \mathrm{Pic}\ Y$, ce qui montre que le morphisme de droite de (4.1.4) n'est autre que l'application norme usuelle $\mathrm{Pic}\ Y \xrightarrow{N} \mathrm{Pic}\ X$ (<u>cf</u>. [EGA II] 6.5.5.1). D'où le lemme.

Lemme 4.2.- <u>On conserve les mêmes hypothèses et notations. Le X-schéma en groupes affine $R^1_{Y/X}G_m$ est plat de présentation finie. Il est lisse si, et seulement si, Y/X est modérément ramifié en au moins un point de chaque fibre. C'est un tore si, et seulement si, Y/X est étale.</u>

On dit que Y/X est <u>modérément ramifié</u> au point y de Y d'image $x = \pi(y)$ lorsque l'extension résiduelle $\kappa(y)/\kappa(x)$ est séparable et que la longueur e de l'anneau artinien $O_{Y,y} \otimes_{O_{X,x}} \kappa(x)$ est première à la caractéristique du corps résiduel $\kappa(x)$.

La première assertion figure dans la démonstration du lemme précédent. La lissité se vérifie donc fibre par fibre ([SGA IV] 17.5.1 b), ce qui nous ramène au cas où X est le spectre d'un corps k. Comme l'application linéaire tangente à $N: R_{Y/X}G_m \to G_{m,X}$ en l'élément neutre est la trace $N: R_{Y/X}G_a \to G_{a,X}$, la lissité du k-groupe algébrique $R^1_{Y/X}G_m$ équivaut à la non-nullité de cette trace, i.e. (cf. [3] §12, prop.6) à l'existence d'un point y de Y en lequel $Y \to \operatorname{Spec} k$ soit modérément ramifié. On sait déjà (cf. (0.4.2) et (0.4.3)) que, si Y/X est étale, $R^1_{Y/X}G_m$ est un tore. Inversement, il suffit de noter que ce n'est pas le cas lorsque X est le spectre d'un corps k et Y celui d'une k-algèbre artinienne de dimension finie non séparable.

Proposition 4.3.- Soient A un anneau semi-local noethérien intègre, de corps des fractions K, et $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ un revêtement étale. On suppose les anneaux strictement locaux de A factoriels, par exemple A régulier. Sous ces hypothèses, un élément de $A^\times$ qui est une norme d'un élément de $B^\times_K$ est aussi une norme d'un élément de $B^\times$.

Compte tenu de (4.1.2), c'est un corollaire immédiat du théorème 3.1 (i) appliqué au A-tore $M = R^1_{B/A}G_m$ (cf. 0.4 ou le lemme 4.2).

Indiquons néanmoins, dans le cas où B est intègre, une démonstration plus directe, fondée sur le lemme 3.3.1 et n'utilisant pas le langage des tores. Comme B est intègre, on peut majorer B/A par une extension C/A qui soit un revêtement étale galoisien de groupe g, de telle sorte que, si $h = g \cap \operatorname{Aut}(C/B)$, on ait $B = C^h$. Si L est un g-module, la suite exacte (0.4.2) définissant $J_{g/h}$ donne une injection canonique

$$L^g/N_{g/h}(L^h) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1_g(J_{g/h},L) \tag{4.3.1}$$

qui est même un isomorphisme si $H^1(h,L) = 0$. L'injection de g-modules $C^\times \xrightarrow{\iota} C^\times_K$ définit ainsi le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} 1 \to A^\times/N(B^\times) & \to & \operatorname{Ext}^1_g(J_{g/h},C^\times) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\Phi(\iota) \\ K^\times/N(B^\times_K) & \to & \operatorname{Ext}^1_g(J_{g/h},C^\times_K) \end{array} \tag{4.3.2}$$

où l'on tient compte de l'identité des normes définies sur B^* (resp. B_K^*) par $N = N_{B/A}$ et $h_{g/h}$ (cf. (0.4.2) et (0.4.3)). L'injectivité de ρ résulte alors de celle de $\Phi(\iota)$ pour $\Phi = \mathrm{Ext}^1_g(J_{g/h}, \ )$, celle-ci étant assurée par le lemme 3.1.1. Notons qu'en fait les horizontales du carré (4.3.2) sont des isomorphismes!

Proposition 4.4.- Soient A comme en 4.3, puis B_i/A un nombre fini d'extensions finies étales intègres, de corps des fractions L_i, pour $i = 1,\dots,n$, et $a_1,\dots,a_n$ des entiers relatifs non nuls. On pose $N_i = N_{B_i/A}$. Si un élément x de A^* s'écrit $\prod_{i=1}^{n} N_i(x_i^{a_i})$ avec $x_i \in L_i^*$, il s'écrit aussi ainsi avec $x_i \in B_i^*$.

Comme 4.3, c'est un corollaire immédiat du théorème 3.1 (i), appliqué ici au A-groupe de type multiplicatif de type fini M, noyau du morphisme fidèlement plat de présentation finie

$$\nu : \prod_{i=1}^{n} R_{B_i/A}G_m \longrightarrow G_{m,A}$$

défini par $\nu((x_i)) = \prod_i N_i(x_i^{a_i})$. Dans le cas où les a_i sont égaux à ± 1, c'est même un corollaire de 4.3 pour $B = B_1 \times \dots \times B_n$. On peut aussi, comme pour 4.3, donner une démonstration fondée sur le lemme 3.3.1.

Remarque 4.5.- De même que, pour le calcul de la R-équivalence sur les points rationnels du k-tore $R^1_{K/k}G_m$ dans le cas d'une extension galoisienne finie de corps, de groupe g, on parvient au résultat $H^{-1}(g,K^*)$ simplement grâce à la cohomologie de Tate et au lemme de Shapiro, en particulier sans recours à une résolution flasque explicite de $R^1_{K/k}G_m$ (cf. [6] IV 4), de même ici, pour B/A étale galoisienne finie de groupe g, on a une démonstration directe et immédiate de la proposition 4.3, n'utilisant pas le lemme 3.3.1, en considérant simplement la suite exacte de g-modules

$$(4.5.1) \qquad 1 \to B^* \to B_K^* \to \mathrm{Div}\ B \to 0 \ ,$$

la cohomologie de Tate et la nullité de $H^{-1}(g,\mathrm{Div}\ B)$ pour obtenir le diagramme commutatif, à ligne exacte,

$$\begin{array}{ccccc} 0 = H^{-1}(g,\mathrm{Div}\ B) & \to & \hat{H}^0(g,B^*) & \to & \hat{H}^0(g,B^*) \\ & & \| & & \| \\ & & A^*/N(B^*) & \xrightarrow{\rho} & K^*/N(B_K^*). \end{array}$$

Corollaire 4.6.- Soient A un anneau semi-local intègre noethérien, d'anneaux strictement locaux factoriels, ce qui est le cas si A est réqulier, tel que $2 \in A^\times$ et K son corps des fractions. Soit f une A-forme quadratique non dégénérée de rang $\leqslant 4$. Si f est isotrope sur K, elle l'est aussi sur A, i.e. elle a un zéro primitif dans A.

Rappelons qu'un zéro primitif est un zéro dont les coordonnées engendrent A. Comme A est semi-local et $2 \in A^\times$, une forme quadratique non dégénérée de rang n équivaut à une forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ avec $a_i \in A^\times$ pour tout i. Notons que, pour $a \in A^\times$, l'isotropie de f équivaut à celle de af. Le cas de rang 1 est trivial. En rang 2, on peut supposer $f = x^2-ay^2$, d'où l'assertion puisque A est intégralement clos. En rang 3, on peut supposer $f = x^2-ay^2-bz^2$ et exclure le cas trivial où a est un carré. Soit B/A l'extension étale quadratique $A[\sqrt{a}]/A$. Si f est isotrope sur K, l'élément b de $A^\times$ est une norme de $B_K^\times$, donc aussi de $B^\times$ d'après la proposition 4.3 et f admet donc un zéro primitif $(x_o,y_o,1)$ dans A. En rang 4 enfin, on peut supposer $f = x^2-ay^2-c(z^2-bt^2)$ et exclure le cas trivial où a ou b est un carré. Il suffit alors d'appliquer la proposition 4.4 pour les extensions quadratiques étales $B_1/A = A[\sqrt{a}]/A$ et $B_2/A = A[\sqrt{b}]/A$, avec $a_1 = -a_2 = 1$: si f est isotrope sur K, l'élément c de $A^\times$ s'écrit $N_1(x_1)/N_2(x_2)$ avec $x_i \in L_i$, donc aussi avec $x_i \in B_i^\times$, d'après 4.4. On obtient ainsi un zéro primitif (x_o,y_o,z_o,t_o) dans A, car, $x_o^2-ay_o^2$ étant inversible dans A, on a $x_oA + y_oA = A$.

Remarque 4.7.- Excluant le cas facile où a ou b ou ab est un carré, on peut préciser l'étude du cas de rang 4 en considérant les extensions étales $B_3/A = A[\sqrt{ab}]/A$ quadratique, $B/A = A[\sqrt{a},\sqrt{b}]/A$, galoisienne de groupe $\mathbb{Z}_2^2 = \langle\sigma,\tau\rangle$, où $\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et $\tau(\sqrt{b}) = \sqrt{b}$, le A-tore T défini par la suite exacte

$$(4.7.1) \qquad 1 \to T \to R_{B_1/A}G_m \times R_{B_2/A}G_m \xrightarrow{\gamma} G_{m,A} \to 1$$

où $\gamma(x_1,x_2) = N_1(x_1)/N_2(x_2)$, et enfin la résolution flasque explicite de T

$$(4.7.2) \qquad 1 \to R_{B_3/A}G_m \xrightarrow{\iota} R_{B/A}G_m \times G_{m,A} \xrightarrow{\pi} T \to 1$$

où $\iota(x) = [x, N_3(x)]$ et $\pi(x,y) = [x\sigma(x)/y, x\tau(x)/y]$. L'élément c de $A^\times$ définit, par (4.7.1), un élément de $H^1(A,T)$ qui donne 0 dans $H^1(K,T)$. Il suffit, pour conclure, de savoir que ρ_1 est injective pour T, ce qui résulte aussitôt de (4.7.2) et de la nullité de Pic A et Pic B et de l'injectivité de Br $B_3 \to$ Br L_3 (on peut noter que $B_3 = A[\sqrt{d}]$ où $d = \mathrm{disc}(f)$ et que, par ailleurs, si A est un corps de nombres, les deux suites ci-dessus ramènent le principe de Hasse pour f de rang 4 à l'injection du groupe de Brauer de B_3 dans la somme directe des localisés). Cf. [7] 4.3.2 pour une démonstration directe qui se trouve être la transcription par le calcul de la présentation ci-dessus.

Remarque 4.8 .- Si f est de rang $\geqslant 5$, l'hypothèse de factorialité des anneaux strictement locaux de A ne suffit plus à assurer la validité de l'énoncé ci-dessus, comme le montre l'exemple (cf. 3.10) du localisé à l'origine A de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]/(X_1^2+\ldots+X_n^2)$, pour $n \geqslant 5$, et de la forme quadratique $f = x_1^2+\ldots+x_n^2$: celle-ci a un zéro non trivial $(X_1,\ldots,X_n)$ dans K, mais ne peut, pour des raisons de positivité, avoir de zéro primitif dans A (cf. [7] 2.3.3 pour les relations avec d'autres problèmes sur les formes quadratiques).

Question 4.9 .- Soient A un anneau semi-local intègre noethérien de corps des fractions K et Spec B $\to$ Spec A un morphisme fini localement libre. On peut se demander dans quels cas l'application

$$\rho : A^\times/N(B^\times) \to K^\times/N(B_K^\times)$$

est injective. On peut affirmer que c'est le cas pour chacune des hypothèses

(i) A régulier et B/A étale
(ii) B de valuation discrète
(iii) B régulier et $A = B^g$ où g est un groupe fini d'automorphismes de B.

Le cas (i) a en effet été établi en 4.3. Le cas (ii), où A est automatiquement de valuation discrète, résulte simplement du diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & B^\times & \to & B_K^\times & \to & \mathrm{Div}\ B & \to & 0 \\ & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \\ 1 & \to & A^\times & \to & K^\times & \to & \mathrm{Div}\ A & \to & 0 \end{array}$$

compte tenu

de l'injectivité de la norme N: Div B → Div A puisque Div B - Div A = $\mathbb{Z}$ et que N ≠ 0. Le cas (iii) enfin, où A est automatiquement régulier ([EGA IV] 15.4.2), se traite suivant la méthode indiquée en 4.5, les normes $N_{B/A}$ et N_g étant encore identiques (par passage à K). Notons que le cas (iii) se présente en pratique sous la forme d'une extension finie B/A d'anneaux réguliers intègres, d'extension générique galoisienne de groupe g, le morphisme Spec B → Spec A étant alors automatiquement localement libre.

Exemple 4.10.- Nous allons voir que ρ, et a fortiori ρ_1 (cf. (4.1.2)), n'est pas toujours injective, même pour A et B locaux noethériens intègres, sous la seule hypothèse

(iv) A normal et B/A étale.

Soit en effet A l'anneau local du point (0,0,0) sur la $\mathbb{R}$-variété normale d'équation $x^2+y^2+z^2 = x^3$ dans l'espace affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Soit $B = A[\sqrt{-1}]$. L'élément $f = x-1$ de $A^\times$ est égal à $\frac{y^2+z^2}{x^2}$: c'est donc une norme d'un élément de $B^\times_K = K(\sqrt{-1})^\times$. Mais ce n'est pas la norme d'un élément g de $B^\times$, car $f(0,0,0) = -1$ ne peut être égal à $N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(g(0,0,0))$! Cet exemple montre qu'il ne suffit pas de supposer X normal, ni dans le théorème 3.1, ni, ce qui est bien connu, dans le théorème 2.2 (ii).

Exemple 4.11.-Nous allons voir que ρ, et a fortiori ρ_1 (cf. (4.1.2)), n'est pas toujours injective, même pour A et B locaux noethériens intègres, sous la seule hypothèse

(v) A régulier.

Soient en effet A l'anneau local de l'origine de la droite affine Spec $\mathbb{R}[x]$ et B celui du point double de la cubique d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ dans le plan affine Spec $\mathbb{R}[x,y]$. Soit Spec B → Spec A la projection $(x,y) \mapsto x$. La fonction $f = -x-1$ appartient à $A^\times$ et c'est la norme de $\frac{y}{x} \in B^\times_K$, mais, comme $f(0) = -1$, ce ne peut être la norme d'un élément g de $B^\times$ (on aurait $f(0) = g(0,0)^2$). Cette hypothèse montre qu'on ne peut omettre l'hypothèse sur B dans (ii). Il montre aussi que le théorème 3.1 ne vaut pas pour un X-schéma en groupes lisse quelcon-

que, même en supposant X local régulier: en effet, dans cet exemple, $R^1_{B/A}G_m$ est lisse (cf. 4.2) de dimension relative 1. Noter néanmoins que sa fibre spéciale, égale à $\mu_{2,\mathbb{R}}\times_{\mathbb{R}}G_{a,\mathbb{R}}$, n'est pas connexe, alors que la fibre générique est un tore, et est donc connexe.

Proposition 4.12.- Soient K/k une extension finie séparable de corps, f une fonction rationnelle sur l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ et U l'ouvert de $\mathbb{A}^n_k$ où f est inversible. Si f est la norme $N_{K/k}(g)$ d'une fonction rationnelle $g \in K(T_1,\ldots,T_n)$, c'est aussi la norme $N_{K/k}(h)$ d'une fonction rationnelle h inversible sur U_K.

L'application du théorème 3.1 (ii) à $A = k$, $X = U$ et $M = (R^1_{K/k}G_m)\times_k U$ donne l'injectivité de ρ_1 dans le diagramme (4.1.2) qui s'écrit, en désignant par $k[U]$ (resp. $K[U]$) l'anneau des fonctions régulières sur U (resp. U_K) et par $k(U)$ (resp. $K(U)$) le corps des fonctions rationnelles de U (resp. U_K),

$$\begin{array}{ccc} k[U]^\times/N_{K/k}(K[U]^\times) & \hookrightarrow & H^1(U,M_U) \\ \downarrow\rho & & \downarrow\rho_1 \\ k(U)^\times/N_{K/k}(K(U)^\times) & \hookrightarrow & H^1(k(U),M_{k(U)}). \end{array}$$

§5. Le cas global

Soient X un schéma intègre, de point générique η et corps résiduel K en η, $i_\eta : \eta \to X$ le morphisme canonique et $\underline{s}$ l'une des deux topologies ét ou Zar sur X. Etant donné un X-groupe de type multiplicatif de type fini M, on note $\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{s}}}$ le conoyau du morphisme canonique $M \to i_{\eta\underline{s}*}M_\eta$ de faisceaux abéliens sur $X_{\underline{s}}$, puis $\mathrm{Div}^M X_{\underline{s}}$ le groupe des sections globales de ce faisceau sur X. Dans ces notations on oublie généralement l'exposant M si $M = G_{m,X}$ et l'indice $\underline{s}$ si $\underline{s}$ = Zar (mais on le maintient dans les notations cohomologiques!)

Proposition 5.1.- Soient X un schéma intègre localement noethérien et M un X-groupe de type multiplicatif de type fini.

(i) Si X est normal ou si la torsion de $\hat{M}$ est première aux caractéristiques résiduelles de X,

(5.1.1) $$\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{\text{ét}}}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, \underline{\mathrm{Div}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}).$$

(ii) Si les anneaux strictement locaux de X sont factoriels, par exemple si X est régulier, le faisceau $\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{\mathrm{Zar}}}}$ est flasque. Plus précisément, si U est un ouvert de X et si $X' \to X$ est un revêtement étale connexe, galoisien de groupe g, qui trivialise M, on a

(5.1.2) $$\mathrm{Div}^M U = \mathrm{Hom}_g(\hat{M}(X'), \mathrm{Div}\, U')$$

où $U' = U \times_X X'$.

Rappelons d'abord (cf. 0.2) que, X étant localement noethérien normal, un revêtement $X' \to X$ comme indiqué en (ii) existe automatiquement.

Posons $i_\eta = i$ et $i_{\underline{\text{ét}}*}G_{m,\eta} = \underline{K}^\times_X$. Comme X est réduit, le morphisme canonique $G_{m,X} \to \underline{K}^\times_X$ est une injection de faisceaux étales sur X. On a donc la suite exacte

(5.1.3) $$0 \to G_{m,X} \to \underline{K}^\times_X \to \underline{\mathrm{Div}}_{X_{\underline{\text{ét}}}} \to 0$$

de faisceaux étales sur X. Par application du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, \ )$, on obtient d'abord l'injection $\underline{\mathrm{Hom}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, G_{m,X}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, \underline{K}^\times_X)$ qui, d'après (0.3.1), n'est autre que le morphisme canonique $M \to i_{\underline{\text{ét}}*}M_\eta$, d'où finalement la suite exacte de faisceaux étales

(5.1.4) $$0 \to \underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{\text{ét}}}} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, \underline{\mathrm{Div}}_{X_{\underline{\text{ét}}}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, G_{m,X}) \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\hat{M}, \underline{K}^\times_X).$$

Montrons que ε est une injection. La vérification est locale sur X. Comme $\hat{M}$ est localement constant, on est ramené aux cas $\hat{M} = \mathbb{Z}$ et $\hat{M} = \mathbb{Z}/n$. Le premier cas est immédiat, car $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{X_{\underline{\text{ét}}}}(\mathbb{Z}, \ ) = 0$. Ainsi, dans le second cas, ε est le morphisme naturel de faisceaux étales $G_{m,X}/G^n_{m,X} \to \underline{K}^\times_X/\underline{K}^{\times n}_X$. Sous la seconde hypothèse de (i),

n est premier aux caractéristiques résiduelles de X, si bien que le faisceau étale $G_{m,X}/G^n_{m,X}$ est nul: la propriété de Hensel montre en effet que, pour A strictement local, i.e. hensélien à corps résiduel séparablement clos, $A^\times = A^{\times n}$. Montrons que, si X est normal, ε est encore injective: ceci se vérifie sur les anneaux strictement locaux de X qui sont encore normaux; or, si X est le spectre d'un anneau intègre A de corps des fractions K, l'application ε: $A^\times/A^{\times n} \to K^\times/K^{\times n}$ est évidemment injective si A est intégralement clos. Ce qui achève de prouver (i).

Soient $\underline{s} = \underline{\text{ét}}$ ou $\underline{\text{Zar}}$ et $p: X_{\underline{\text{ét}}} \to X_{\underline{\text{Zar}}}$ le morphisme canonique. On vient de voir que le morphisme canonique $M \to i_{\underline{s}*}M_\eta$ est une injection de faisceaux sur $X_{\underline{s}}$ pour $\underline{s} = \underline{\text{ét}}$, donc <u>a fortiori</u> pour $\underline{s} = \underline{\text{Zar}}$, d'où, par définition de $\underline{\text{Div}}^M_{X_{\underline{s}}}$, la suite exacte de faisceaux abéliens sur $X_{\underline{s}}$

$$(5.1.5) \qquad 0 \to M \to i_{\underline{s}*}M_\eta \to \underline{\text{Div}}^M_{X_{\underline{s}}} \to 0.$$

On en déduit, par application de p_* à cette suite dans le cas $\underline{s} = \underline{\text{ét}}$, la suite exacte de faisceaux abéliens sur $X_{\underline{\text{Zar}}}$

$$0 \to M \to i_{\underline{\text{Zar}}*}M_\eta \to p_*\underline{\text{Div}}^M_{X_{\underline{\text{ét}}}} \to R^1p_*M \to (R^1p_*)(i_{\underline{\text{ét}}*}M_\eta),$$

suite qui s'écrit encore

$$(5.1.6) \qquad 0 \to \underline{\text{Div}}^M_{X_{\underline{\text{Zar}}}} \to p_*\underline{\text{Div}}^M_{X_{\underline{\text{ét}}}} \to R^1p_*M \xrightarrow{\iota} (R^1p_*)(i_{\underline{\text{ét}}*}M_\eta).$$

Montrons que, sous l'hypothèse (ii), le morphisme ι est injectif. La vérification se fait fibre par fibre sur $X_{\underline{\text{Zar}}}$, ce qui, d'après le calcul des fibres de ι (<u>cf</u>. [SGA 4] V 5.1 et VII 5.9 où l'on prend pour système projectif de schémas un système fondamental de voisinages ouverts affines du point de X considéré), nous ramène à l'injectivité du morphisme canonique $H^1(X_{\underline{\text{ét}}},M) \xrightarrow{\iota'} H^1(X_{\underline{\text{ét}}},i_{\underline{\text{ét}}*}M_\eta)$, dans le cas où X est local. La commutativité du diagramme (A.2) de l'<u>appendice</u> pour $Y = \eta$, $F = \mathbb{Z}_X$, $G = M$ et $H = M_\eta$, montre que l'application composée

$$H^1(X_{\underline{\text{ét}}},M) \xrightarrow{\iota'} H^1(X_{\underline{\text{ét}}},i_{\underline{\text{ét}}*}M_\eta) \xrightarrow{\varphi} H^1(\eta_{\underline{\text{ét}}},M_\eta)$$

où ι' est induite par l'adjonction et où φ est l'edge $E_2^{1,0} \to E^1$ de la suite spectrale de Leray relative à $i_{\underline{ét}}: \eta \to X$ et à M_η, est l'application naturelle de changement de base. On a donc le diagramme commutatif "naturel"

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_{\underline{ét}},M) & \xrightarrow{\varphi\circ\iota'} & H^1(\eta_{\underline{ét}},M_\eta) \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow \\ H^1(X,M) & \xhookrightarrow{\rho} & H^1(\eta,M_\eta). \end{array}$$

L'application γ est automatiquement injective et, comme les hypothèses impliquent ici que X est noethérien d'anneaux strictement locaux factoriels, le théorème 3.1 (i) s'applique et assure que ρ est injective. En conclusion, ι' est <u>a fortiori</u> injective. On a ainsi prouvé l'injectivité de ι et donc l'isomorphisme canonique de faisceaux sur $X_{\underline{Zar}}$

$$\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{Zar}}} = p_*\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{ét}}}. \tag{5.1.7}$$

Soient U un ouvert non vide de X et i_U l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$. L'isomorphisme canonique $i_U^*\underline{\mathrm{Div}}^M_X \to \underline{\mathrm{Div}}^M_U$ montre que $H^0(U,\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{Zar}}}) = H^0(U,\underline{\mathrm{Div}}^M_{U_{\underline{Zar}}})$, ce qui enlève toute ambiguïté à la notation $\mathrm{Div}^M U$. L'isomorphisme (5.1.7) montre que $\mathrm{Div}^M U = H^0(U,\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{ét}}})$. Comme $U' \to U$ est un revêtement étale galoisien de groupe g, on trouve $\mathrm{Div}^M U = H^0[g,H^0(U',\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{ét}}})] = H^0(g,\mathrm{Div}^M U')$. Comme $\hat{M}_{|X'}$ est le "faisceau constant" défini par $\hat{M}(X')$, on déduit de (5.1.1), qui vaut car X est normal, l'isomorphisme de g-modules

$$\mathrm{Div}^M U' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{M}(X'),\mathrm{Div}\ U'),$$

ce qui achève la démonstration de (5.1.2).

L'hypothèse (ii) sur les anneaux strictement locaux de X entraîne que les anneaux locaux de X' sont factoriels. Par suite, si $X'^{(1)}$ désigne l'ensemble des points de X' de codimension 1, le g-module Div X' s'identifie au g-module des applications $X'^{(1)} \to \mathbb{Z}$ à support localement fini. On en déduit que le g-module Div U' est un facteur direct du g-module Div X' et la formule (5.1.2) montre alors que la restriction $\mathrm{Div}^M X \to \mathrm{Div}^M U$ est surjective. Le faisceau $\underline{\mathrm{Div}}^M_{X_{\underline{Zar}}}$ est donc flasque.

Corollaire 5.2.- Soient X un schéma intègre localement noethérien, d'anneaux strictement locaux factoriels, K son corps des fractions rationnelles et M un X-groupe de type multiplicatif de type fini. Alors

(5.2.1) $$H^1(X_{Zar},M) = \mathrm{Div}^M X/\mathrm{Div}^M_{pr} X \quad \text{avec} \quad \mathrm{Div}^M_{pr} X = M(K)/M(X),$$

(5.2.2) $$H^i(X_{Zar},M) = 0 \quad \text{pour tout } i \geqslant 2.$$

En effet, d'après la proposition 5.1 (ii), la suite exacte

$$0 \to M \to i_* M_\eta \to \underline{\mathrm{Div}}^M_X \to 0$$

de faisceaux abéliens sur X_{Zar}, où $i_* M_\eta$ est le faisceau constant défini par M(K), est une résolution du faisceau M par des faisceaux abéliens flasques (au sens de la théorie des faisceaux!)

Corollaire 5.3.- On conserve les mêmes hypothèses et notations. Si U est un ouvert de X, la restriction

$$H^1(X_{Zar},M) \to H^1(U_{Zar},M)$$

est surjective.

FACULTE DES SCIENCES BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUES ORSAY

D'après le corollaire précédent, c'est un "quotient" de la restriction $\mathrm{Div}^M X \to \mathrm{Div}^M U$ dont on a vu (prop. 5.1) qu'elle est surjective.

Remarque 5.4.- Ces résultats généralisent ceux, bien connus, relatifs au cas $M = G_{m,X}$: par exemple, (5.2.2) est dû, dans ce cas à Grothendieck ([12] prop. 3.4.1). Notons néanmoins que, pour $M = G_{m,X}$, il suffit de supposer les anneaux locaux de X factoriels. D'autre part, le cas où M est de type multiplicatif fini est particulièrement simple, puisqu'un tel groupe définit, si X est intègre et normal, un faisceau flasque sur X_{Zar}, d'où, en ce cas, $H^i(X_{Zar},M) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. Notons enfin que le corollaire 5.3 est généralement en défaut pour la topologie étale, mais qu'il vaut précisément pour un X-tore flasque (th. 2.2 $(i)_U$).

Corollaire 5.5.- Soient A un anneau de Dedekind, K son corps des fractions, $A_{K,A}$ l'anneau des adèles de K limitées à A et $A^+_{K,A}$ le sous-anneau des adèles entières. Si M est un A-groupe de type multiplicatif de type fini,

(5.5.1) $$H^1(A_{Zar},M) = M(A_{K,A})/M(K)M(A^+_{K,A}).$$

Rappelons que $A_{K,A} = \varinjlim_{\Sigma} A^{\Sigma}_{K,A}$ où Σ parcourt l'ensemble des parties finies du spectre maximal de A et où $A^{\Sigma}_{K,A} = \prod_{p\in\Sigma} K_p \times \prod_{p\notin\Sigma} O_p$, où K_p désigne le complété de K pour la valuation discrète définie par p et O_p le complété de l'anneau local en p. De plus, $A^{+}_{K,A} = A^{\emptyset}_{K,A}$. Si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres, on oublie l'indice A.

Soient B/A un revêtement étale connexe galoisien de groupe g, qui trivialise M, et L le corps des fractions de B qui est la clôture intégrale de A dans L. La suite exacte de g-modules

$$0 \to A^{+\times}_{L,B} \to A^{\times}_{L,B} \to \mathrm{Div}\ B \to 0$$

est décomposée par un choix convenable d'uniformisantes locales, d'où la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_g(\hat{M}(B), A^{+\times}_{L,B}) \to \mathrm{Hom}_g(\hat{M}(B), A^{\times}_{L,B}) \to \mathrm{Hom}_g(\hat{M}(B), \mathrm{Div}\ B) \to 0.$$

Or elle s'écrit encore, d'après (5.1.2),

$$0 \to M(A^{+}_{K}) \to M(A_K) \to \mathrm{Div}^{M} A \to 0,$$

d'où la conclusion par (5.2.1).

<u>Remarque</u> 5.6.- On peut mettre ce résultat en rapport avec un théorème de Harder ([17] 2.3.1) affirmant l'égalité $H^1(A_{\underline{Zar}}, M) = M(A^{+}_{K,A}) \backslash M(A_{K,A}) / M(K)$ pour tout A-schéma en groupes affine M, plat et de type fini, vérifiant l'approximation faible vis-à-vis des places de K définies par A. Effectivement, si les corps résiduels des points fermés de A sont (C_1), par exemple s'ils sont finis, et si M est un A-tore, il vérifie l'approximation faible vis-à-vis des places de K définies par A, comme on peut le voir en considérant, pour un ensemble fini de places Σ, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P(K) & \longrightarrow & M(K) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{p\in\Sigma} P(K_p) & \longrightarrow & \prod_{p\in\Sigma} M(K_p) & \longrightarrow & \prod_{p\in\Sigma} H^1(K_p, S) = 0 \end{array}$$

défini par une résolution flasque $1 \to S \to P \to M \to 1$ de M, la nullité de $H^1(K_p, S)$ résultant de celle de $H^1(O_p, S) = H^1(\kappa(p), S) = 0$ (d'après [SGA 3] XXIV 8.1 et le fait que $\kappa(p)$ soit (C_1)) et de la surjectivité de $H^1(O_p, S) \to H^1(K_p, S)$, le tore S étant flasque (th. 2.2 $(i)_K$).

Théorème 5.7.- Soient X un schéma intègre localement noethérien d'anneaux strictement locaux factoriels, par exemple un schéma localement noethérien régulier intègre, et M un X-groupe de type multiplicatif de type fini. Soit $p: X_{pl} \to X_{Zar}$ le morphisme canonique.

(i) On a la suite exacte naturelle

(5.7.1) $$0 \to H^1(X_{Zar},M) \to H^1(X,M) \to H^0(X_{Zar},R^1p_*M) \to 0$$

et l'injection canonique

(5.7.2) $$H^0(X_{Zar},R^1p_*M) \hookrightarrow H^1(K,M_K).$$

(ii) Si T est un X-tore flasque, on a la suite exacte naturelle

(5.7.3) $$0 \to H^1(X_{Zar},T) \to H^1(X,T) \to H^1(K,T_K) \to 0.$$

La suite spectrale de Leray ([SGA 4] V 5.3)

(5.7.4) $$H^p(X_{Zar},R^qp_*M) \Rightarrow H^n(X,M)$$

relative au morphisme p et au faisceau défini par M sur X_{pl} a, d'après (5.2.2) et le calcul des fibres du faisceau R^2p_*M ([SGA 4] V 5.1 et VII 5.9), son terme $E_2^{2,0}$ nul, d'où la suite exacte $0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to 0$ qui n'est autre que la première suite (5.7.1) de l'énoncé. Soit

$$r_1 : R^1p_*M \to [H^1(K,M_K)]_X$$

le morphisme canonique de faisceaux sur X_{Zar} défini par la restriction à la fibre générique, R^1p_*M étant le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^1(U,M)$ ([SGA 4] V 5.1) et le terme de droite désignant le faisceau constant défini sur X_{Zar} par le groupe $H^1(K,M_K)$. Les hypothèses sur X permettent d'appliquer le théorème 3.1 (i) à M et aux anneaux locaux de X, ce qui assure, vu le calcul des fibres de R^1p_*M ([SGA 4] V 5.1 et VII 5.9), que r_1 est une injection. Il en est donc de même de $H^0(X,r_1)$, ce qui prouve (5.7.2). On voit de même, par le théorème 2.2 $(i)_K$, que, si M est un X-tore flasque, r_1 est un isomorphisme, d'où l'assertion (ii), compte tenu de (i).

Remarque 5.8.- Notons d'abord que le théorème 2.2 vaut encore si l'on suppose X localement noethérien: pour (i) cela résulte de (5.7.3) et 5.3 et pour (ii) des calculs ci-après. Notons en effet que, d'après (i), le noyau de la restriction ρ_1: $H^1(X,M) \to H^1(K,M_K)$ s'identifie à $H^1(X_{Zar},M)$. Montrons que celui de la restriction ρ_2: $H^2(X,M) \to H^2(K,M_K)$ s'identifie à $H^1(X_{Zar},R^1p_*M)$: d'après (5.2.2) et le calcul des fibres de R^2p_*M et R^3p_*M, les termes $E_2^{2,0}$ et $E_2^{3,0}$ de la suite spectrale (5.7.4) sont nuls, d'où la suite exacte $0 \to E_2^{1,1} \to E^2 \to E_2^{0,2}$ et la conclusion par le théorème 3.6 et le calcul des fibres de R^2p_*M qui montrent que le morphisme r_2: $R^2p_*M \to [H^2(K,M_K)]_X$ est une injection. Ainsi, pour un X-tore flasque M, r_1 étant un isomorphisme, le faisceau R^1p_*M est constant sur X_{Zar}, donc acyclique et ρ_2 est bien injective.

Corollaire 5.9.- Soit X un schéma noethérien ayant les mêmes propriétés qu'en 5.7. Les conditions suivantes sur X sont équivalentes:

(i) $H^1(X_{Zar},M) = 0$ pour tout X-groupe de type multiplicatif de type fini M;

(ii) la restriction $H^1(X,M) \to H^1(K,M_K)$ est injective pour tout X-groupe de type multiplicatif de type fini M;

(iii) Pic X' = 0 pour tout revêtement étale $X' \to X$, ce qui est le cas pour X semi-local.

Variante: si k est un corps et X un k-schéma et si l'on se limite en (i) et (ii) à des M provenant de Spec k et en (iii) à des revêtements étales provenant aussi de Spec k, i.e. du type $X_{k'} \to X$ pour k'/k finie séparable, on obtient encore des conditions équivalentes.

Cet énoncé complète le théorème 3.1. L'équivalence de (i) et (ii) résulte du théorème 5.7. Le théorème 3.1 (iii) montre l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii). Enfin, si X'/X est un revêtement étale, $R_{X'/X}G_m$ est un X-tore (0.4) et on voit aisément que $H^1(X_{Zar},R_{X'/X}G_m)$ = Pic X', même sans hypothèse particulière sur X, d'où (i)$\Rightarrow$(iii).

Corollaire 5.10.- Soit X un schéma ayant les mêmes propriétés qu'en 5.7. Soit

(5.10.1) $$1 \to S \to M' \to M \to 1$$

une suite exacte de X-groupes de type multiplicatif de type fini.

(i) Si S est un X-tore flasque, l'application induite

$$H^1(X_{\underline{Zar}},M') \to H^1(X_{\underline{Zar}},M)$$

est surjective.

(ii) Si M est un X-tore et si la suite initiale est une résolution flasque de M, i.e. si M' est un X-tore quasi-trivial et S un X-tore flasque, on a la suite exacte

(5.10.2) $$H^1(X,S) \to H^1(X,M') \to H^1(X_{\underline{Zar}},M) \to 0.$$

Notons qu'on a encore la suite exacte (5.10.2) lorsqu'au lieu de supposer M' quasi-trivial on suppose seulement $H^1(K,M'_K) = 0$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H^1(X_{\underline{Zar}},M') \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X_{\underline{Zar}},M) \arrow[d] & \\
H^1(X,S) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\rho_1"] & H^1(X,M') \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,M) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X,S) \arrow[d, hook, "\rho_2"] \\
H^1(K,S_K) \arrow[r] & H^1(K,M'_K) \arrow[r] & H^1(K,M_K) \arrow[r] & H^2(K,S_K).
\end{tikzcd}$$

Les deux suites verticales médianes sont exactes d'après le théorème 5.7 (i). Les deux suites horizontales sont évidemment exactes. Si S est un X-tore flasque, ρ_1 est surjective et ρ_2 est injective (th. 2.2 $(i)_K$, $(ii)_K$ et remarque 5.8). D'où (i), en chassant dans le diagramme. Si, en outre, $H^1(K,M'_K) = 0$, on obtient (ii).

Remarque 5.11.- Etant donné que tout X-tore M admet une résolution flasque (cf. 1.3), on obtient ainsi, dans le cas d'un tore, un mode de calcul de $H^1(X_{\underline{Zar}},M)$ en fonction des groupes de Picard d'un nombre fini de revêtements étales de X. L'exemple de $R^1_{Y/X}G_m$ pour X et Y connexes et Y/X étale cyclique, de groupe de Galois $g = \langle\sigma\rangle$, est très simple et se traite d'ailleurs directement grâce à la suite exacte

(5.11.1) $$1 \to G_{m,X} \to R_{Y/X}G_m \xrightarrow{\tilde{\omega}} R^1_{Y/X}G_m \to 1$$

obtenue par dualité à partir de la suite exacte de g-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[g] \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z}[g] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

où ε est l'augmentation, où $N = N_g$ et où $\omega(e) = e-\sigma$. La suite (5.11.1) définit une suite exacte de faisceaux abéliens sur $X_{\underline{Zar}}$, ce qui donne, par (5.2.2),

(5.11.2) $$H^1(X_{\underline{Zar}}, R^1_{Y/X}G_m) = \mathrm{Pic}\ Y/\mathrm{im}(\mathrm{Pic}\ X).$$

Corollaire 5.12.- <u>Soient</u> A <u>un anneau de Dedekind</u>, K <u>son corps des fractions</u>, A_K <u>l'anneau des adèles de</u> K <u>limitées à</u> A <u>et</u> A_K^+ <u>le sous-anneau des adèles entières. Etant donné</u> p <u>dans le spectre maximal</u> X_{max} <u>de</u> A, <u>on note</u> K_p (<u>resp.</u> $\kappa(p)$) <u>le complété de</u> K (<u>resp. le corps résiduel) en</u> p. <u>Soit</u> T <u>un</u> A-<u>tore, tel que</u> $H^1(\kappa(p),T) = 0$ <u>pour tout</u> $p \in X_{max}$, <u>ce qui est automatique si les corps</u> $\kappa(p)$ <u>sont</u> (C_1), <u>en particulier s'ils sont finis. On a alors la suite exacte naturelle</u>

(5.12.1) $$0 \to T(A_K)/T(K)T(A_K^+) \to H^1(A,T) \to Ш^1_A(K,T) \to 0$$

<u>où</u> $Ш^1_A(K,T)$ <u>désigne le noyau de la restriction</u> $H^1(K,T) \to \prod_p H^1(K_p,T)$.

Notons O_p le complété de l'anneau local de A en p. Montrons d'abord que l'image de $H^1(A,T) \to H^1(K,T)$ coïncide avec $Ш^1_A(K,T)$. D'après Harder ([17] lemme 4.1.3), cette image est formée des éléments ξ dont l'image dans $H^1(K_p,T)$ appartient, pour chaque p, à l'image de $H^1(O_p,T)$. Or, T étant lisse et O_p local hensélien, on a un isomorphisme ([SGA 3] XXIV 8.1) canonique $H^1(O_p,T) \xrightarrow{\sim} H^1(\kappa(p),T)$. L'hypothèse $H^1(\kappa(p),T) = 0$ donne alors le résultat annoncé. L'image de $H^1(A,T) \to H^1(K,T)$ coïncide aussi, d'après le théorème 5.7 (i), avec $H^0(A,R^1p_*T)$, qui est donc égal à $Ш^1_A(K,T)$. On obtient ainsi (5.12.1) à partir de (5.7.1) en tenant compte en outre du corollaire 5.5.

<u>Exemple</u> 5.13.- Soient $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{2},\frac{1}{17}]$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{34})$, $B_o = \mathbb{Z}[\sqrt{34}]$ et B la clôture intégrale de A dans L. Il est connu que L a pour nombre de classes 2 et que l'unité fondamentale a pour norme 1. De plus, les seuls nombres premiers ramifiés sont 2 et 17. Ainsi, B/A est étale quadratique et $R^1_{B/A}G_m$ est un A-tore de dimension 1. Comme $(2) = (6+\sqrt{34})^2$ et que $(17) = (17+3\sqrt{34})^2$, au sens des idéaux de B_o, on trouve $\mathrm{Pic}\, B = \mathrm{Pic}\, B_o = \mathbb{Z}/2$. On en déduit, par (5.11.2),

$$H^1(A_{\underline{Zar}}, R^1_{B/A}G_m) = \mathbb{Z}/2.$$

Comme $2 = N(6+\sqrt{34})$ et que $-17 = N(17+3\sqrt{34})$, on voit aisément que $A^\times/N(B^\times)$ s'identifie à $Z^\times/N(B_o^\times) = \mathbb{Z}/2$ avec pour générateur la classe de -1. On a le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes (<u>cf</u>. 4.1 et 5.7 (i))

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker\rho \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^1(A_{\underline{Zar}}, R^1G_m) \arrow[d, "\iota"] & \\
0 \arrow[r] & A^\times/N(B^\times) \arrow[r, "\theta"] \arrow[ur, "\zeta"] \arrow[d, "\rho"] & H^1(A, R^1G_m) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathrm{Pic}\, B \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{Q}^\times/N(L^\times) \arrow[r, equal] & H^1(\mathbb{Q}, R^1G_m) & &
\end{tikzcd}$$

La restriction ρ est nulle puisque -1 est la norme de $\frac{5+\sqrt{34}}{3}$, ou encore de $\frac{3+\sqrt{34}}{5}$. Ainsi, θ se factorise en $\iota\zeta$ et l'injection ζ est un isomorphisme:

$$A^\times/N(B^\times) = H^1(A_{\underline{Zar}}, R^1G_m) = \mathbb{Z}/2.$$

Le morphisme θ associant à une unité ε la classe du torseur défini par l'équation globale $N_{L/K}(\xi) = \varepsilon$, on voit donc que la classe du torseur sur $X = \mathrm{Spec}\, A$ sous $R^1_{B/A}G_m$ défini par l'équation $x^2-34y^2 = -1$ engendre $H^1(A_{\underline{Zar}}, R^1_{B/A}G_m)$: ce torseur est effectivement trivial sur chaque ouvert $U_3 = X - \{3\}$ et $U_5 = X - \{5\}$, comme le montrent les égalités déjà mentionnées $-1 = N(\frac{5+\sqrt{34}}{3}) = N(\frac{3+\sqrt{34}}{5})$. Considérons le torseur sur X sous $R^1_{B/A}G_m$ obtenu par recollement des torseurs d'équations $x^2-34y^2 = -6$ sur U_3 et $x'^2-34y'^2 = 5$ sur U_5 au moyen de la condition $x + y\sqrt{34} = (\frac{2+\sqrt{34}}{5})(x'+y'\sqrt{34})$. On vérifie aisément que le carré de sa classe dans $H^1(A, R^1G_m)$ coïncide avec la classe du torseur d'équation globale $x^2-34y^2 = -1$. Comme, de

plus, $H^1(A,R^1G_m)$ est d'ordre 4 puisque Pic B = $\mathbb{Z}/2$, on obtient finalement

$$H^1(A,R^1_{B/A}G_m) = \mathbb{Z}/4$$

avec pour générateur la classe du torseur indiqué ci-dessus. Ainsi, la suite (5.12.1) s'écrit ici

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

et, effectivement, la classe de 5 engendre le groupe $Ш^1_A(K,R^1_{B/A}G_m)$: c'est bien une norme partout localement aux places de A, mais non en 17.

Remarque 5.14.- Signalons enfin une propriété cohomologique indépendante des résultats antérieurs. Soient A un anneau localement noethérien intègre, de corps des fractions K, et M un A-groupe de type multiplicatif de type fini. Soit t une indéterminée:

(i) si A est normal, $H^1(A,M) \xrightarrow{\approx} H^1(A[t],M)$;

(ii) si K est de caractéristique 0 et A régulier, $H^2(A,M) \xrightarrow{\approx} H^2(A[t],M)$.

Démonstration de (i): le cas diagonalisable résulte des égalités $A^\times = A[t]^\times$ et Pic A = Pic A[t] (cf. la démonstration de 3.1) et le cas général s'en déduit, si B/A est un revêtement galoisien de groupe $\underline{g}$ diagonalisant M, par la suite exacte (cf. (2.5.1))

$$0 \to H^1(g,M(B)) \to H^1(A,M) \to H^1(B,M)^g \to H^2(g,M(B))$$

sur A et l'analogue sur A[t]. Démonstration de (ii): on connaît le résultat pour $M = \underline{G}_{m,A}$ (la démonstration de la proposition 7.7 de [2] se recopie pour le groupe de Brauer cohomologique), donc pour un A-tore quasi-trivial, d'où le résultat général en utilisant une suite exacte comme (3.6.1), les suites exactes de cohomologie qu'on en déduit sur A et A[t] et (i).

Appendice

Il s'agit de prouver que le triangle figurant dans le diagramme (2.2.11) est commutatif:

Assertion.- <u>Soient</u> $i: Y \to X$ <u>un morphisme de schémas et</u> M <u>un</u> X-<u>groupe de type multiplicatif de type fini. Le triangle</u>

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^n_X(\hat{M}, G_{m,X}) \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\lambda_n"'] & & \mathrm{Ext}^n_Y(\hat{M}_Y, G_{m,Y}) \\ & \mathrm{Ext}^n_X(\hat{M}, i_* G_{m,Y}) \arrow[ur, "\varphi_n"'] & \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

<u>est commutatif</u>.

Notons F le faisceau étale défini sur X par $\hat{M}$, puis G celui défini sur X par $G_{m,X}$ et H celui défini sur Y par $G_{m,Y}$. Soient $\lambda: G \to i_* H$ et $\mu: i^*G \to H$ les morphismes canoniques, mutuellement adjoints. Comme $\hat{M}$ est à engendrement fini, le morphisme canonique $i^*\hat{M} \to \hat{M}_Y$ est un isomorphisme de faisceaux étales sur Y (0.3). Etant donné la définition du triangle (A.1), sa commutativité revient à celle du triangle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^n_X(F,G) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathrm{Ext}^n_Y(i^*F, i^*G) \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{Ext}^n_Y(i^*F, H) \\ & \mathrm{Ext}^n_Y(F, i_* H) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

où la seule flèche non évidente est l'edge $\varphi: E_2^{n,0} \to E^n$ de la suite spectrale

(A.3) $$\mathrm{Ext}_X^p(F, R^q i_* H) \Rightarrow \mathrm{Ext}_Y^n(i^* F, H).$$

Précisons que, dans un bicomplexe, nous prenons des différentielles partielles d' et d'' qui commutent et $d = d' + (-1)^p d''$ sur un élément de type (p,q).

Lemme A.4.- <u>Soient</u> C, C', C'' <u>trois catégories abéliennes</u>, $\Phi: C \to C'$ <u>et</u> $\Psi: C' \to C''$ <u>deux foncteurs. On suppose que</u> C <u>et</u> C' <u>ont assez d'injectifs, que</u> Φ <u>possède un adjoint à gauche exact et que</u> Ψ <u>est exact à gauche. Soit</u> $\varphi: E_2^{n,0} \to E^n$ <u>l'edge de la suite spectrale de composition</u>

$$E_2^{p,q} = (R^p\Psi)[R^q\Phi(A)] \Rightarrow E^n = [R^n(\Psi\Phi)](A).$$

<u>Si</u> $A \to I^\bullet$ <u>et</u> $\Phi(A) \to J^\bullet$ <u>sont des résolutions injectives respectives de</u> A <u>et</u> $\Phi(A)$ <u>et si</u> $\theta: J^\bullet \to \Phi(I^\bullet)$ <u>rend commutatif le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc} \Phi(A) & \longrightarrow & J^\bullet \\ \| & & \downarrow \theta \\ \Phi(A) & \longrightarrow & \Phi(I^\bullet) \end{array},$$

<u>l'edge</u> $$\varphi: (R^n\Psi)[\Phi(A)] \to [R^n(\Psi\Phi)](A)$$

<u>n'est autre que le morphisme induit par</u> θ <u>sur l'homologie de degré</u> n.

Comme Φ admet un adjoint à gauche, il est exact à gauche et, comme cet adjoint est exact, Φ transforme injectif en injectif. Soit

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \Phi(I^\bullet) & \xrightarrow{\alpha} & L^{\bullet\bullet} \\ & & \uparrow & & \uparrow \beta \\ 0 & \to & \Phi(A) & \to & J^\bullet \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

une résolution injective, à la Cartan-Eilenberg, de $0 \to \Phi(A) \to \Phi(I^\bullet)$. Le bicomplexe $\Psi(L^{\bullet\bullet})$ définit deux suites spectrales, aboutissant à sa cohomologie totale, l'une de terme initial $E_2^{p,q} = (R^p\Psi)[R^q\Phi(A)]$, l'autre de terme initial $E_2^{p,q} = 0$ si $q > 0$ et $E_2^{p,0} = (R^p(\Psi\Phi))(A)$. L'edge $E_2^{n,0} \to E^n$ est, dans le premier cas, le morphisme

$$\varepsilon: (R^n\Psi)[\Phi(A)] \to H^n(\Psi(L^{\bullet\bullet}))$$

induit par le morphisme $\Psi(J^\bullet) \to \Psi(L^{\bullet\bullet})$ et, dans le second cas, l'isomorphisme

$$\eta : (R^n(\Psi\Phi))(A) \to H^n[\Psi(L^{\bullet\bullet})]$$

induit par le morphisme $\Psi\Phi(I^\bullet) \to \Psi(L^{\bullet\bullet})$. Par composition avec η^{-1}, la première suite spectrale donne donc la suite spectrale de l'énoncé. L'edge φ est donc l'application composée $\eta^{-1} \circ \varepsilon$.

Comme $0 \to \Phi(A) \to J^\bullet$ est acyclique et que $\Phi(I^\bullet)$ est formé d'injectifs, il existe ([5], chap. V, prop. 1.1.a) une application θ rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} & \Phi(I^\bullet) \\ \Phi(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & J^\bullet \arrow[uu, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Alors, β et $\alpha\theta$ sont deux applications rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} & L^{\bullet\bullet} \\ \Phi(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & J^\bullet \arrow[uu, shift right, "\beta"'] \arrow[uu, shift left, "\alpha\theta"] \end{tikzcd}$$

Elles sont donc homotopes ([5] loc. cit.) et induisent donc la même application

$$H^n[\Psi(J^\bullet)] \to H^n[\Psi(L^{\bullet\bullet})]$$

ce qui donne $\varepsilon = \eta \circ H^n[\Psi(\theta)]$, i.e. $H^n[\Psi(\theta)] = \varphi$.

Démonstration de l'assertion.- On applique le lemme en prenant $C = \{\text{Faisceaux}_{/Y}\}$, $C' = \{\text{Faisceaux}_{/X}\}$, $C'' = \{\text{Ab}\}$, $\Phi = i_*$, $\Psi = \text{Hom}_X(F, \ )$ et $A = H$. Soient $0 \to G \to E^\bullet$, $0 \to H \to I^\bullet$ et $0 \to i_*H \to J^\bullet$ des résolutions injectives respectives de G, H et i_*H. Il existe alors des morphismes de complexes γ et θ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & E^\bullet \arrow[d, "\gamma"] \\ 0 \arrow[r] & i_*H \arrow[r] \arrow[d, equal] & J^\bullet \arrow[d, "\theta"] \\ 0 \arrow[r] & i_*H \arrow[r] & i_*I^\bullet \end{tikzcd}$$

Soit $\chi = \text{adj}(\theta\gamma)$ la flèche adjointe. On obtient, par adjonction, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & i^*G \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & i^*E^\bullet \arrow[d, "\chi"] \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r] & I^\bullet. \end{tikzcd}$$

La définition de (A.2) et le lemme montrent que le diagramme (A.2) est simplement l'homologie de degré n du diagramme de complexes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_X(F,E^\bullet) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathrm{Hom}_Y(i^*F,i^*E^\bullet) \arrow[r, "\lambda"] & \mathrm{Hom}_Y(i^*F,I^\bullet) \\
& \mathrm{Hom}_X(F,J^\bullet) \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{Hom}_X(F,i_*I^\bullet) \arrow[u, "\approx", "\mathrm{adj}"'] \;.
\end{tikzcd}$$

Or, ce diagramme est commutatif, car, si $\omega \in \mathrm{Hom}\,(F,E^\bullet)$,

$$(\mathrm{adj}\circ\theta\circ\gamma)(\omega) = \mathrm{adj}(\theta\gamma)\circ i^*(\omega) = \lambda\circ i^*(\omega).$$

Bibliographie

1. [SGA 4] Artin,M., Grothendieck,A., Verdier,J.-L.: Théorie des Topos et Cohomologie étale des schémas. Lecture Notes in Math. n°s 269, 270 et 305. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972-73.

2. Auslander,M., Goldman,O.: The Brauer group of a commutative ring. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 367-409 (1960).

3. Bourbaki,N.: Algèbre, chap.8: Modules et anneaux semi-simples. Paris: Hermann 1958.

4. Bourbaki,N.: Algèbre commutative. Paris: Hermann 1961-65.

5. Cartan,H., Eilenberg,S.: Homological Algebra. Princeton University Press 1956.

6. Colliot-Thélène,J.-L.: L'équivalence rationnelle sur les tores. Séminaire de Théorie des Nombres. Exposé n°15. Université de Bordeaux 1975-76.

7. Colliot-Thélène,J.-L.: Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers. In: Colloque sur les formes quadratiques. Montpellier 1977 (à paraître).

8. Colliot-Thélène,J.-L., Sansuc,J.-J.: La R-équivalence sur les tores. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^{è} série,10, 175-229 (1977).

8'. Colliot-Thélène,J.-L., Sansuc,J.-J.: Torseurs sous des groupes de type multiplicatif. C.R. Acad. Sci. Paris 282, série A, 1113-1116 (1976).

9. [SGA 3] Demazure,M., Grothendieck,A.: Schémas en groupes. Lecture Notes in Math. n°s 151, 152 et 153; Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

10. Endo,S., Miyata,T.: On a classification of the function fields of algebraic tori. Nagoya Math. J., 56, 85-104 (1974).

11. Giraud,J.: Cohomologie non abélienne. Grundlehren der Math. W. 179. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

12. Grothendieck,A.: Sur quelques points d'Algèbre Homologique. Tohoku Math. J. 9, 119-221 (1957).

13. Grothendieck,A.: Torsion homologique et Sections rationnelles. In: Séminaire Chevalley: Anneaux de Chow et applications. E.N.S. Paris 1958

14. [SGA 1] Grothendieck,A.: Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture Notes in Math. n° 224; Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

15. [EGA] Grothendieck,A., Dieudonné,J.: Eléments de Géométrie Algébrique. Publications Mathématiques, I.H.E.S. 8, 24, 28, 32 Paris 1962-68.

16. [GB] Grothendieck,A.: Le groupe de Brauer I. Exposé Bourbaki 290 (1965). Le groupe de Brauer II: Théorie cohomologique. Exposé Bourbaki 297 (1965). Le groupe de Brauer III: Exemples et compléments. Publié in: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland Pub. Co. 1968.

17. Harder,G.: Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. Inventiones math. 4, 165-191 (1967).

18. Serre,J.-P.: Espaces fibrés algébriques. In: Séminaire Chevalley: Anneaux de Chow et applications. E.N.S. Paris 1958.

C

Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres

J.-J. Sansuc

Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres

J.-J. Sansuc

Introduction

Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps de nombres k. On note Ω l'ensemble des places de k et k_v le complété de k en la place v. Si l'on plonge G(k) diagonalement dans le produit $\prod_{v\in\Omega} G(k_v)$, son adhérence est un sous-groupe invariant et on appelle <u>défaut d'approximation faible</u> pour G le quotient A(G). On appelle <u>défaut du principe de Hasse</u> pour G le noyau Ш(G) de la restriction $H^1(k,G) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,G)$. Les deux résultats fondamentaux à leur sujet concernent le cas semi-simple simplement connexe: en ce cas, l'approximation faible vaut pour G, i.e. A(G) = 0 (<u>cf.</u> Kneser [18,21], Harder [15]) et, en l'absenoe de facteur de type E_8, le principe de Hasse vaut également pour G, i.e. Ш(G) = 0 (<u>cf.</u> Kneser [22,23], Harder [12]). Mais il est bien connu, par des exemples de Serre (<u>cf.</u> [18,33]), que, même pour G semi-simple, A(G) et Ш(G) ne sont pas toujours nuls.

L'objet de cet article est l'étude de ces deux invariants arithmétiques A(G) et Ш(G) et de leur rapport avec le <u>groupe de Brauer</u> Br G de la k-variété G.

On commence par étudier directement A(G) et Ш(G) à partir du cas semi-simple simplement connexe, ce qui exclut pour ce dernier le cas où G a un facteur de type E_8. On obtient ainsi divers modes de calcul et propriétés de ces invariants: en particulier, ce sont des groupes abéliens finis. La considération, inspirée de Manin [25], d'accouplements définis par des groupes de Brauer convenables permet ensuite d'évaluer A(G) et Ш(G) en fonction de Br G.

On met ainsi en évidence leur caractère d'invariant k-birationnel. On obtient enfin, par l'intermédiaire de Br G, un lien naturel, sous la forme d'une extension canonique de $Ш(G)$ par $A(G)$, entre ces deux invariants: la suite exacte obtenue généralise celle de Voskresenskiĭ pour les tores [39,40] et l'analogie avec la suite duale de Cassels [6] pour les variétés abéliennes est complète (cf. [25]).

De façon précise, soient Br_1G le sous-groupe de Br G, formé des éléments annulés par passage à la clôture algébrique de k, puis $Br_aG = Br_1G/Br\,k$ et $Б(G)$ (resp. $Б_\omega(G)$) le sous-groupe de Br_aG formé des éléments localement nuls pour toute (resp. presque toute) place v de k. La suite exacte canonique qu'on obtient s'écrit

$$(Б) \qquad 0 \to A(G) \to Б_\omega(G)^\sim \to Ш(G) \to 0$$

où $\sim$ désigne la dualité des groupes abéliens finis. En considérant en outre une k-compactification lisse V de G, on peut la transformer en la suite exacte

$$(V) \qquad 0 \to A(G) \to H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V})^\sim \to Ш(G) \to 0$$

qui, dans le cas des tores, est la suite de Voskresenskiĭ déjà citée: $\bar{V}$ désigne la variété déduite de V par passage à la clôture algébrique de k.

La première partie de l'article (§§ 1-5) est consacrée à l'étude directe et autonome de $A(G)$ et $Ш(G)$, fondée sur la connaissance préalable du cas semi-simple simplement connexe. On commence par calculer $A(G)$ et $Ш(G)$ dans le cas où G possède un k-revêtement spécial, i.e. une k-isogénie centrale $G' \to G$ où G' soit le produit d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore quasi-trivial: si B est le groupe du revêtement,

$$A(G) = \mathrm{coker}\Big[H^1(k,B) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,B)\Big]$$

où Σ désigne une partie finie convenable de Ω et, si G n'a pas de facteur de type E_8,

$$Ш(G) = \ker\Big[H^2(k,B) \to \prod_{v\in\Omega} H^2(k_v,B)\Big].$$

Les expressions de droite sont étudiées aux §§ 1-2 qui contiennent également des lemmes préliminaires sur les groupes algébriques et leur cohomologie. On obtient ainsi, pour G linéaire connexe quelconque, diverses propriétés, en

partie classiques, de $A(G)$ et $Ш(G)$, toujours en l'absence de facteur de type E_8 pour $Ш(G)$:

a.- $A(G)$ et $Ш(G)$ sont des groupes abéliens finis;

b.- si G est déployé par une extension galoisienne de degré n et exposant e, les groupes $A(G)$ et $Ш(G)$ sont annulés par n/e ;

c.- si G est déployé par une extension métacyclique, $A(G) = Ш(G) = 0$;

d.- les groupes adjoints et les groupes absolument presque simples vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible;

e.- il existe des groupes G quasi-déployés et presque simples tels que $A(G)$ et $Ш(G)$ soient non nuls;

f.- étant donné G semi-simple connexe sans facteur de type E_8, il existe un entier $m(G) > 1$ tel que, pour toute extension finie K/k de degré premier à $m(G)$, l'application $H^1(k,G) \to H^1(K,G)$ soit injective;

g.- si G est linéaire connexe sans facteur de type E_8, tout espace principal homogène sous G qui a un point dans des extensions finies k_i/k de degrés premiers dans leur ensemble a déjà un point dans k.

On obtient enfin, au §5, lorsque G possède un k-revêtement spécial de groupe B, une première forme de la suite exacte $(\mathcal{B})$:

$$0 \to A(G) \to Ш^1_\omega(k,\hat{B})^\sim \to Ш(G) \to 0$$

où $\hat{}$ désigne le dual d'un k-groupe algébrique de type multiplicatif et où $Ш^1_\omega(k, \ )$ désigne le sous-groupe de $H^1(k, \ )$ formé des éléments localement nuls pour presque toute place v de k.

La <u>seconde partie</u> (§§ 6-7), indépendante de la précédente, est consacrée à l'étude des groupes de Picard et de Brauer des groupes linéaires et de leurs espaces principaux homogènes. En particulier, si X est un tel espace de groupe structural G, on obtient, au §6, l'identification

$$Br_a G = Br_a X,$$

essentielle pour la dernière partie. L'étude directe et l'analyse, au §7, du comportement par isogénie donnent, pour un tore T,

$$\mathrm{Pic}\, T = H^1(k,\hat{T}) \quad \text{et} \quad Br_a T = H^2(k,\hat{T})$$

et, pour un groupe G admettant un k-revêtement spécial de groupe B, par exemple pour G semi-simple de groupe fondamental B,

$$\mathrm{Pic}\ G = \hat{B}(k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_a G = H^1(k,\hat{B}),$$

résultats bien connus pour le groupe de Picard (cf. [40]) et valables pour k de caractéristique 0 quelconque.

La troisième partie (§§ 8-9) est consacrée aux rapports entre A(G), Ш(G) et Br G. On définit, pour G quelconque, grâce aux résultats du §6, des accouplements naturels entre A(G) et $Б_\omega(G)/Б(G)$, puis entre Ш(G) et Б(G). L'étude de leur comportement par produit et par isogénie permet de se ramener au cas où G est semi-simple simplement connexe et d'obtenir finalement ainsi les identifications

$$A(G) = [Б_\omega(G)/Б(G)]^\sim$$

et, en l'absence de facteur de type E_8,

$$Ш(G) = Б(G)^\sim.$$

Ceci donne l'extension (Б), puis la considération d'une k-compactification lisse V de G lui donne la forme (V). Au §9, on obtient plus précisément, S désignant le k-tore dual du module galoisien Pic $\bar{V}$, les identifications

$$A(G) = \mathrm{coker}\Big[H^1(k,S) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,S)\Big]$$

$$Ш(G) = \ker\Big[H^2(k,S) \to \prod_{v\in\Omega} H^2(k_v,S)\Big]$$

ce qui prolonge les résultats de [7] dans le cas des tores et montre que A(G) et Ш(G) sont des invariants k-birationnels de la k-variété G. On signale finalement, en supposant vérifiée la conjecture de Weil pour le nombre de Tamagawa du revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G, une formule, mise en évidence par Voskresenskiĭ [39,40] dans le cas des tores, sur le nombre de Tamagawa $\tau(G)$ du groupe réductif connexe G:

$$\tau(G) = \frac{[\mathrm{Pic}\ G]}{[Ш(G)]}.$$

Plan

Introduction

Notations et conventions

§1 Lemmes préliminaires

§2 Calculs de groupes $Ш^1_\Sigma(k,B)$

§3 L'approximation faible

§4 Le principe de Hasse

§5 Principe de Hasse et approximation faible

§6 Le groupe de Brauer d'un groupe linéaire

§7 Comportement du groupe de Brauer par isogénie

§8 Approximation, principe de Hasse et groupe de Brauer

§9 Lien avec les problèmes birationnels.

Notations et conventions

Sauf mention du contraire, k désigne un corps de caractéristique 0, et même généralement un corps de nombres. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Si k est un corps de nombres, Ω désigne l'ensemble des places de k et ∞ l'ensemble des places à l'infini; si v est une place de k, on note k_v le complété de k en v. On note $\underline{g}(K/k)$ le groupe de Galois d'une extension galoisienne K/k. Etant donné un $\underline{g}(\bar{k}/k)$-module continu M, de type fini sur $\mathbb{Z}$, on note $\underline{g}_M$ le sous-groupe ouvert de $\underline{g}(\bar{k}/k)$ formé des éléments agissant trivialement sur M et k_M la sous-extension galoisienne finie de $\bar{k}/k$ correspondante. Une extension galoisienne finie K/k est dite <u>métacyclique</u>, lorsque son groupe de Galois $\underline{g}$ l'est, i.e. lorsque ses sous-groupes de Sylow sont cycliques: il revient au même de dire que l'ordre de $\underline{g}$ est égal à son exposant, i.e. au p.p.c.m. des ordres de ses éléments.

On appelle k-variété un k-schéma algébrique géométriquement intègre X. Etant donné une extension quelconque K/k, on note $X_K = X \times_k K$; on pose en particulier $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ et $X_v = X \times_k k_v$, dans le cas d'un corps de nombres k et d'une

place v de k. On note Pic X le groupe de Picard de X et Br X le groupe de Brauer de X, formé des classes d'équivalence d'algèbres d'Azumaya sur X (cf. [11],[26]). Ce dernier est naturellement filtré par les flèches naturelles $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \bar{X}$: on note $\mathrm{Br}_0 X$ l'image de la première, $\mathrm{Br}_1 X$ le noyau de la deuxième, $\mathrm{Br}_a X = \mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}_0 X$ et, si k est un corps de nombres, $Б(X)$ (resp. $Б_\omega(X)$) le sous-groupe de $\mathrm{Br}_a X$ formé des éléments localement nuls pour toute (resp. presque toute) place v de k. Les notions analogues relatives au groupe de Brauer cohomologique $H^2_{ét}(X,G_m)$ sont notées respectivement Br'X, $\mathrm{Br}'_0 X$,...: en fait, comme nous le verrons, Br et Br' coïncident pour tout ce qui nous intéresse ici!

Soit G un k-groupe algébrique linéaire. On note $\hat{G}$ le k-groupe $\underline{\mathrm{Hom}}_{gr}(G,G_m)$ des caractères de G: on l'identifie généralement au module galoisien (= $\underline{g}(\bar{k}/k)$-module) G(k). La correspondance $G \mapsto \hat{G}$ détermine une dualité (en fait, une anti-équivalence de catégories) entre les k-groupes algébriques de type multiplicatif (resp. k-tores, resp. k-groupes finis) et les $\underline{g}(\bar{k}/k)$-modules continus discrets (resp. sans torsion, resp. finis), cf. [33]. Etant donné une extension finie K/k, on note $R_{K/k}G$ le k-groupe algébrique linéaire déduit de G par restriction des scalaires, à la Weil, de K à k. Si G est commutatif, $R^1_{K/k}G$ désigne le noyau de la norme $N_{K/k}: R_{K/k}G \to G$. S'il n'y a pas de doute sur K/k, on pose simplement $RG = R_{K/k}G$ et $R^1G = R^1_{K/k}G$. On appelle <u>tore quasi-trivial</u> (= induit) tout k-tore T isomorphe à un produit de tores de la forme $R_{K/k}G_m$: cela revient à dire que $\hat{T}$ est un $\underline{g}(\bar{k}/k)$-<u>module de permutation</u>, i.e. admettant une $\mathbb{Z}$-base permutée par $\underline{g}(\bar{k}/k)$. On appelle <u>revêtement quasi-trivial</u> d'un k-tore T toute k-isogénie $T' \to T$ avec T' quasi-trivial. On appelle <u>revêtement spécial</u>, ou isogénie spéciale, toute k-isogénie centrale $G' \to G$ de groupes réductifs, où G' soit le produit d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore quasi-trivial. Un k-tore T est dit compact, ou <u>anisotrope</u>, s'il ne contient pas de k-sous-groupe isomorphe à $G_{m,k}$, ou, ce qui revient au même, s'il n'a pas de k-caractère non trivial, i.e. si $\hat{T}(k) = 0$. Précisons que G_m désigne évidemment le groupe multiplicatif Spec $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ et que, de même, G_a désigne le groupe additif Spec $\mathbb{Z}[t]$.

Sauf mention du contraire, les ensembles ou groupes de cohomologie considérés sont relatifs à la topologie étale (cf. [10]) et on les note $H^i_{ét}(X, \ )$ ou simplement $H^i(X, \ )$. Lorsque $X = \operatorname{Spec} k$, on retrouve (cf. [35]) la cohomologie galoisienne $H^i(k, \ )$, à coefficients commutatifs ou non (Serre [33]), i.e. la cohomologie du groupe profini $\underline{g}(\bar{k}/k)$, encore notée $H^i(\bar{k}/k, \ )$ ou $H^i(\underline{g}, \ )$. Etant donné un k-groupe algébrique linéaire G et une partie Σ de Ω, on note

$A_\Sigma(k,G)$ le quotient, à gauche a priori, de $\prod_{v\in\Sigma} G(k_v)$ par l'adhérence de l'image de $G(k)$ par le plongement diagonal;

$A(k,G)$ le quotient, à gauche a priori, de $\prod_{v\in\Omega} G(k_v)$ par l'adhérence de l'image de $G(k)$ par le plongement diagonal, i.e. $A_\Omega(k,G)$;

$Ш^i_\Sigma(k,G)$ le noyau de la restriction $H^i(k,G) \to \prod_{v\notin\Sigma} H^i(k_v,G)$;

$Ш^i(k,G)$ le noyau de la restriction $H^i(k,G) \to \prod_{v\in\Omega} H^i(k_v,G)$, i.e. $Ш^i_\emptyset(k,G)$;

$Ш^i_\omega(k,G)$ la réunion, lorsque Σ parcourt l'ensemble des parties finies de Ω, des ensembles $Ш^i_\Sigma(k,G)$;

$Ч^1_\Sigma(k,G)$ le conoyau, pour G commutatif, de la restriction

$$H^1(k,G) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,G) \ ;$$

$Ч^1_\omega(k,G)$ la limite projective, lorsque Σ parcourt l'ensemble des parties finies de Ω, des groupes $Ч^1_\Sigma(k,G)$.

Dans les trois définitions médianes, on se limite à $i = 1$ si G n'est pas commutatif. Si, au lieu de considérer la cohomologie $H^i(k, \ )$, on considère une extension galoisienne quelconque K/k et la cohomologie galoisienne correspondante $H^i(K/k, \ )$, on note $Ш^i_\Sigma(K/k, \ )$ le noyau de l'application de localisation correspondante,... S'il n'y a pas de doute sur k, on note simplement $A_\Sigma(G)$, $A(G)$, $Ш^i_\Sigma(G)$,... les ensembles notés $A_\Sigma(k,G)$, $A(k,G)$, $Ш^i_\Sigma(k,G)$,... On pose même souvent $Ш(G) = Ш^1(G)$. Ajoutons encore que, si M est un module galoisien quelconque, on utilisera les notations $Ш^i_\Sigma(k,M)$, $Ш^i(k,M)$,... avec des significations évidentes.

§1.- Lemmes préliminaires.

Il s'agit de résultats généralement bien connus (Serre, Ono, Tate, Kneser, Harder), les premiers sur la cohomologie galoisienne des modules finis (lemmes 1.1 à 1.6), les suivants sur les groupes réductifs et leur cohomologie (lemmes 1.7 à 1.13). Le lemme 1.4, conséquence de théorèmes de dualité de Tate-Poitou, est à l'origine de la suite exacte ($\mathfrak{S}$) qu'on se propose d'obtenir au §8. Le lemme 1.10 permet les réductions au cas où le groupe linéaire G étudié possède un k-revêtement spécial et le lemme 1.11 est utile pour réduire, au §4, l'étude de $Ш(G)$ au cas d'un tore.

a.- Sur la cohomologie galoisienne des modules finis.- Dans tout cet alinéa, k désigne un corps de nombres, B un k-groupe algébrique commutatif fini, souvent identifié au module galoisien $B(\bar{k})$, et Σ une partie finie de Ω. Lorsque Σ parcourt l'ensemble des parties finies de Ω, les groupes $Ш^1_\Sigma(k,B)$ forment un système inductif d'injections de groupes de limite $Ш^1_\omega(k,B)$, tandis que les groupes $Ч^1_\Sigma(k,B)$ forment un système projectif d'épimorphismes de groupes finis, de limite $Ч^1_\omega(k,B)$.

Lemme 1.1.- Soit K/k une extension galoisienne finie de groupe $\underline{g}$.

(i) Si $\underline{g}$ agit trivialement sur B(K), alors $Ш^1_\Sigma(K/k,B) = 0$.

(ii) Si l'extension K/k trivialise B, on a la réduction

$$Ш^1_\Sigma(k,B) = Ш^1_\Sigma(K/k,B).$$

(iii) Si Σ' est une partie finie de Ω formée de places dont les groupes de décomposition dans K/k sont cycliques, alors

$$Ш^1_{\Sigma\cup\Sigma'}(K/k,B) = Ш^1_\Sigma(K/k,B).$$

Si B(K) est $\underline{g}$-trivial, $Ш^1_\Sigma(K/k,B)$ est le noyau de l'application

$$\mathrm{Hom}_{gr}[\underline{g},B(K)] \longrightarrow \prod_{v\notin\Sigma} \mathrm{Hom}_{gr}[\underline{g}^v,B(K_w)]$$

où $\underline{g}^v$ désigne le groupe de décomposition de l'une des places w de K prolongeant v.

Cette application est injective, car, d'après le théorème de Čebotarev, tout élément de $\underline{g}$ est conjugué d'un élément d'un sous-groupe $\underline{g}^v$, même après suppression d'un nombre fini de places v.

Ce résultat (i) s'étend évidemment par inflation au cas d'une extension galoisienne quelconque. Si K/k trivialise B, i.e. si $B(K) = B(\bar{k})$, et si l'on note Σ' l'ensemble des prolongements à K des places de Σ, on a donc $Ш^1_{\Sigma'}(K,B) = 0$. Ainsi, dans le diagramme ci-dessous, obtenu à partir des suites exactes d'inflation-restriction, après choix d'un prolongement particulier w_o pour chaque place v,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(K/k,B) & \longrightarrow & H^1(k,B) & \longrightarrow & H^1(K,B) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ 0 & \rightarrow & \prod_{v\notin\Sigma} H^1(K_{w_o}/k_v,B) & \longrightarrow & \prod_{v\notin\Sigma} H^1(k_v,B) & \longrightarrow & \prod_{w\notin\Sigma'} H^1(K_w,B) \end{array}$$

l'application φ est injective, ce qui prouve (ii).

Le théorème de Čebotarev assure l'existence, pour toute place v dont le groupe de décomposition est cyclique, d'une infinité d'autres places v' qui ont "le même" groupe de décomposition: on en déduit l'assertion (iii).

Lemme 1.2.- <u>Le groupe</u> $Ш^1_\omega(k,B)$ <u>est un groupe fini, égal au noyau de la restriction</u>

$$H^1(\underline{g},B) \rightarrow \prod_{g\in \underline{g}} H^1(\langle g\rangle,B),$$

<u>où</u> $\underline{g}$ <u>désigne le groupe de Galois de l'extension finie</u> k_B/k <u>trivialisant</u> B <u>et</u> $\langle g\rangle$ <u>le sous-groupe de</u> $\underline{g}$ <u>engendré par</u> g. <u>On peut également écrire</u>

$$Ш^1_\omega(k,B) = Ш^1_{\Sigma_o}(k_B/k,B),$$

<u>où</u> Σ_o <u>est la partie finie, formée des places, ramifiées, dont le groupe de décomposition dans</u> k_B/k <u>n'est pas cyclique</u>.

Le groupe $Ш^1_\Sigma(k,B)$ se réduit, d'après le lemme 1.1 (ii) et la définition de k_B, à $Ш^1_\Sigma(k_B/k,B)$, puis d'après 1.1 (iii), à $Ш^1_{\Sigma\cap\Sigma_o}(k_B/k,B)$. Ceci prouve la finitude de $Ш^1_\omega(k,B)$ et donne l'écriture réduite de l'énoncé. La première expression en résulte, puisque, d'après Čebotarev, tout sous-groupe cyclique de $\underline{g}$ est conjugué d'un groupe de décomposition $\underline{g}^v$.

Remarque 1.2.1.- Ce lemme montre que le groupe $Ш^1_\omega(k,B)$ est de nature algébrique, en ce sens qu'il ne dépend que du module galoisien B, alors que le groupe $Ш^1(k,B)$ est de nature arithmétique, en ce sens qu'il dépend aussi de la distribution des sous-groupes de décomposition $\underline{g}^v$.

Lemme 1.3.- Soient n l'ordre et e l'exposant du groupe de Galois de k_B/k. La multiplication par n/e vaut 0 dans $Ш^1_\omega(k,B)$. En particulier, si k_B/k est métacyclique,

$$Ш^1_\omega(k,B) = 0.$$

Il en est de même si l'ordre de B est premier à n/e.

Soit g un élément de $\underline{g} = \underline{g}(k_B/k)$ et soit n_g son ordre. L'application Cor ∘ Res relative à $\underline{g}$ et au sous-groupe $\langle g \rangle$ est la multiplication par n/n_g dans $H^1(\underline{g},B)$. Vu le lemme 1.2, sa restriction à $Ш^1_\omega(k,B)$ vaut 0, ce qui prouve la première assertion. Les deux autres en résultent aussitôt.

Lemme 1.4.- Le groupe fini $Ч^1_\Sigma(k,\hat{B})$ est canoniquement isomorphe au dual du groupe fini $Ш^1_\Sigma(k,B)/Ш^1(k,B)$. Les groupes finis $Ч^1_\omega(k,\hat{B})$ et $Ш^1_\omega(k,B)/Ш^1(k,B)$ sont en dualité: on a une suite exacte naturelle de groupes finis

$$0 \to Ч^1_\omega(k,\hat{B}) \to Ш^1_\omega(k,B)^\sim \to Ш^1(k,B)^\sim \to 0.$$

Considérons la suite

$$H^1(k,B) \xrightarrow{\rho} \prod_{v\notin\Sigma} H^1(k_v,B) \times \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,B) \xrightarrow{\sigma} H^1(k,\hat{B})^\sim,$$

où $\prod$ désigne le produit restreint, ρ la restriction naturelle ρ_B et σ l'application déduite de $\tilde{\rho}_{\hat{B}}$ via les dualités locales données par composition du cup-produit $\cup$ et de l'invariant local inv_v: $H^1(k_v,B) = H^1(k_v,\hat{B})^\sim$. D'après Tate-Poitou (cf. Tate [37] thm. 3.1), la suite ci-dessus est exacte. Il en résulte que l'image par ρ de $Ш^1_\Sigma(k,B)$, égale à $Ш^1_\Sigma(k,B)/Ш^1(k,B)$, s'identifie au noyau de la restriction σ_Σ de σ au produit partiel relatif à Σ:

$$\prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,B) \to H^1(k,\hat{B})^\sim.$$

La définition de σ montre que σ_Σ est l'application duale de la restriction naturelle

$$H^1(k,\hat{B}) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,\hat{B}),$$

application dont le conoyau est précisément $Ч^1_\Sigma(k,\hat{B})$, ce qui prouve la première assertion du lemme.

Il est utile de préciser comment se réalise explicitement l'accouplement entre $Ч^1_\Sigma(k,\hat{B})$ et $Ш^1_\Sigma(k,B)/Ш^1(k,B)$, en vertu de la démonstration ci-dessus. Soit θ l'application composée

$$\prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,B) \times \prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,\hat{B}) \xrightarrow{\cup} \coprod_{v\in\Sigma} \mathrm{Br}\, k_v \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Soient x un élément de $Ш^1_\Sigma(k,B)/Ш^1(k,B)$ et y un élément de $Ч^1_\Sigma(k,\hat{B})$. Soient ξ l'image dans $\prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,B)$ d'un relèvement de x dans $H^1(k,B)$ et η un relèvement de y dans $\prod_{v\in\Sigma} H^1(k_v,\hat{B})$: l'élément $\theta(\xi,\eta)$ ne dépend que de x et y et c'est l'élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ cherché.

On voit ainsi que cet accouplement est compatible, lorsque Σ varie, avec le système inductif des groupes $Ш^1_\Sigma(k,B)/Ш^1(k,B)$ et le système projectif des groupes $Ч^1_\Sigma(k,\hat{B})$. On en déduit la dualité entre $Ч^1_\omega(k,\hat{B})$ et $Ш^1_\omega(k,B)/Ш^1(k,B)$.

Lemme 1.5.- <u>Le groupe</u> $Ч^1_\omega(k,B)$ <u>est un groupe fini. On a la réduction</u>

$$Ч^1_\omega(k,B) = Ч^1_{\Sigma_0}(k,B)$$

<u>où</u> Σ_0 <u>est la partie finie de</u> Ω <u>formée des places dont le groupe de décomposition dans</u> $k_{\hat{B}}/k$ <u>n'est pas cyclique.</u>

C'est un corollaire immédiat des lemmes 1.2 et 1.4. On a, plus généralement, la réduction

$$Ч^1_\Sigma(k,B) = Ч^1_{\Sigma\cap\Sigma_0}(k,B).$$

Lemme 1.6.- <u>Si</u> Σ <u>est formée de places dont le groupe de décomposition dans</u> $k_{\hat{B}}/k$ <u>est cyclique, par exemple si</u> $k_{\hat{B}}/k$ <u>est non ramifiée aux places finies de</u> Σ,

$$Ч^1_\Sigma(k,B) = 0.$$

En particulier, on a toujours

$$Ш^1_\infty(k,B) = 0.$$

Le lemme 1.4 montre que $Ш^1_\Sigma(k,B) = 0$ si, pour toute place $v \in \Sigma$, il existe une autre place v' en dehors de Σ, dont le groupe de décomposition dans $k_{\hat{B}}/k$ soit conjugué de celui de v. On en déduit aussitôt, via Čebotarev, les assertions du lemme.

b.- Sur les groupes réductifs.- Dans cet alinéa, k désigne encore un corps de nombres, sauf si l'on précise que k peut être quelconque. On commence par des lemmes sur les tores. Un k-tore ne possède pas en général de revêtement quasi-trivial: c'est déjà le cas pour $R^1_{K/k}G_m$ avec K/k quadratique. On a néanmoins le résultat suivant:

Lemme 1.7 (Ono [27]).- Soient k un corps quelconque, T un k-tore et K/k une extension galoisienne qui le déploie. Il existe un entier $m > 0$ et un k-tore quasi-trivial T', déployé par K/k, tels que $T^m \times_k T'$ soit k-isogène à un k-tore quasi-trivial.

C'est le théorème 1.5.1 de [27], traduction dans le langage des tores du théorème d'Artin sur les caractères induits à partir de sous-groupes cycliques.

Remarque 1.7.1.- Ce lemme permet de déduire de résultats sur la cohomologie galoisienne des modules finis des résultats sur celle des tores. Mais la démarche inverse est plus fréquente et plus simple: tout module galoisien fini B se plonge dans un k-tore quasi-trivial déployé par $k_{\hat{B}}/k$.

Lemme 1.8.- Soit T un k-tore déployé par l'extension galoisienne finie K/k. Si les groupes de décomposition dans K/k des places de Σ sont cycliques,

(1.8.1) $$Ш^1_\Sigma(k,T) = 0.$$

En particulier, on a toujours

(1.8.2) $$Ш^1_\infty(k,T) = 0.$$

Ce résultat, qu'on peut prouver directement (cf. [12_{II}], thm. A.1.2) grâce à la dualité de Tate-Nakayama [28,38], se déduit aussi du lemme 1.6: quitte à modifier T comme indiqué au lemme 1.7, ce qui n'est pas gênant pour l'assertion à démontrer, on peut supposer l'existence d'une k-isogénie $T \to T'$ de noyau B, dans laquelle T' soit quasi-trivial, ce qui, d'après le théorème 90, donne des surjections $H^1(k_v,B) \to H^1(k_v,T)$ pour toute place v, donc une surjection $Ч^1_\Sigma(k,B) \to Ч^1_\Sigma(k,T)$; il reste simplement à noter que $k_{\hat{B}}$ est contenu dans K.

Lemme 1.9.- Si T est un k-tore quasi-trivial et K/k une extension quelconque,

$$(1.9.1)\qquad \begin{array}{ll} H^1(K,T) = 0 \quad , & Ш^2(k,T) = 0 \\ H^1(K,\hat{T}) = 0 \quad , & Ш^2_\omega(k,\hat{T}) = 0. \end{array}$$

Si S est un k-tore et K/k une extension galoisienne telle que S_K soit quasi-trivial,

$$(1.9.2)\qquad \begin{array}{ll} H^1(k,S) = H^1(K/k,S) \quad , & Ш^2(k,S) = Ш^2(K/k,S) \\ H^1(k,\hat{S}) = H^1(K/k,\hat{S}) \quad , & Ш^2_\omega(k,\hat{S}) = Ш^2_\omega(K/k,\hat{S}). \end{array}$$

Si, enfin, S est un k-tore, compact en au moins une place v_o de k,

$$(1.9.3)\qquad Ш^2(k,S) = 0.$$

Les résultats concernant T sont immédiats, d'après $H^i(k,R_{L/k}G_m) = H^i(L,G_m)$, le théorème 90 et l'injection du groupe de Brauer d'un corps global dans la somme directe des groupes de Brauer locaux. Le dual $\hat{T}$ est un module galoisien de permutation: si $\underline{g} = \underline{g}(\bar{k}/k)$, il est isomorphe à une somme directe de $\underline{g}$-modules $\mathbb{Z}[\underline{g}/\underline{h}]$ pour $\underline{h}$ sous-groupe ouvert de $\underline{g}$. Les résultats concernant $\hat{T}$ proviennent alors des réductions $H^i(\underline{g},\mathbb{Z}[\underline{g}/\underline{h}]) = H^i(\underline{h},\mathbb{Z})$, de la nullité de $H^1(\underline{h},\mathbb{Z})$ enfin de l'égalité $H^2(\underline{h},\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{gr}(\underline{h},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et du théorème de Čebotarev. Par inflation-restriction, on déduit aussitôt des résultats sur T les réductions (1.9.2). Le dernier résultat (1.9.3) est dû à Kneser-Harder (cf. [12_{II}] p.408, [23] thm.7). Il suffit de vérifier que, pour K/k galoisienne finie de groupe $\underline{g}$ déployant S, on a $Ш^2(K/k,S) = 0$. Or, si $\mathbb{A}_K$ désigne l'anneau des adèles de K, le groupe $Ш^2(K/k,S)$ est le conoyau de l'application

$$H^1(K/k,S(\mathbb{A}_K)) \to H^1(K/k,S(\mathbb{A}_K)/S(K));$$

il est donc isomorphe, par la "dualité" de Tate-Nakayama (cf. [28]), au conoyau de l'application ς :

$$\coprod_{v\in\Omega} H^{-1}(\underline{g}^v,\hat{S}^o) \longrightarrow H^{-1}(\underline{g},\hat{S}^o)$$

où H^{-1} désigne le groupe d'homologie $\hat{H}_0$ modifié "à la Tate" et $\hat{S}^o$ le $\underline{g}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{S},\mathbb{Z})$ des sous-groupes à un paramètre de S. Si S est compact en v_o, on a $H^0(\underline{g}^{v_o},\hat{S}^o) = 0$; la norme $N_{\underline{g}^{v_o}}$ est donc nulle dans $\hat{S}^o$ et $H^0(\underline{g}^{v_o},\hat{S}^o) = 0$. On en déduit la surjectivité de l'application $H_0(g^{v_o},\hat{S}^o) \to H_0(g,\hat{S}^o)$, donc celle de ς.

Remarque 1.9.1.- On peut très bien avoir le k-tore S compact et cependant $Ш^2(k,S) \neq 0$. Par exemple, si $S = R_{K/k}G_m/G_{m,k}$ avec K/k galoisienne finie de groupe $\underline{g}$, le groupe $Ш^2(k,S)$ est cyclique d'ordre $n/\mathrm{ppcm}(n_v)$, où n est l'ordre de $\underline{g}$ et n_v celui de $\underline{g}^v$; or, ce nombre peut très bien être différent de 1 : c'est le cas pour $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt{13},\sqrt{17})$.

Lemme 1.10.- Soient k un corps quelconque, G un k-groupe algébrique réductif connexe et K/k une extension galoisienne qui déploie G. Il existe un entier $m > 0$ et un k-tore quasi-trivial T, déployé par K/k, tels que $G^m \times_k T$ possède un k-revêtement spécial.

Cette assertion généralise le lemme 1.7 et en résulte d'ailleurs aussitôt. Le groupe G est le quotient par un sous-groupe fini central du produit de son sous-groupe dérivé G' par son radical S (cf. [5]). Celui-ci est un k-tore déployé par K/k: il existe donc, d'après 1.7, un entier $m > 0$ et deux k-tores T et T', quasi-triviaux et déployés par K/k, tels que $S^m \times_k T$ soit k-isogène à T'. Si $G'' \to G'$ est le revêtement simplement connexe de G', on obtient ainsi un k-revêtement spécial $G''^m \times_k T' \to G^m \times_k T$.

Lemme 1.11 (Harder [12]).- Soit G un k-groupe algébrique réductif connexe. Soient Σ une partie finie de Ω et, pour chaque $v \in \Sigma$, un tore maximal T^v de G_v défini sur k . Il existe alors un tore maximal T de G, défini sur k et tel que, pour chaque place v de Σ, le tore T_v soit conjugué de T^v par $G(k_v)$.

C'est le lemme 5.5.3 de $[12_{II}]$. Ainsi, pour un tel T et pour toute place $v \in \Sigma$, les images des applications $H^1(k,T) \to H^1(k_v,G)$ et $H^1(k_v,T^v) \to H^1(k_v,G)$ coïncident.

Lemme 1.12 (Kneser-Harder [12]).- <u>Si</u> G <u>est un</u> k-<u>groupe algébrique linéaire connexe, l'application</u>

$$H^1(k,G) \longrightarrow \prod_{v\in\infty} H^1(k_v,G)$$

<u>est surjective</u>.

C'est le théorème 5.5.1 de $[12_{II}]$. La démonstration s'appuie sur le cas particulier (1.8.2) grâce au lemme d'approximation précédent.

Lemme 1.13.- <u>Soient</u> k <u>un corps quelconque</u>, G <u>un</u> k-<u>groupe algébrique linéaire connexe et</u> U <u>un</u> k-<u>sous-groupe invariant</u> k-<u>résoluble. L'application canonique</u>

$$H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k,G/U)$$

<u>est une bijection. Ceci s'applique en particulier si</u> k <u>est parfait et</u> U <u>le radical unipotent de</u> G.

Clair, d'après la nullité des $H^i(k,G_a)$ pour le groupe additif G_a et $i>0$: il suffit de traiter le cas $U = G_a$; si $\alpha \in H^1(k,G)$ et si a est un représentant de α dans $Z^1(k,G)$, la suite exacte d'ensembles pointés

$$0 = H^1(k,U) \to H^1(k,{}_aG) \to H^1(k,{}_aG/U) \to H^1(k,U) = 0,$$

obtenue par torsion par le 1-cocycle a, donne le résultat.

§2.- <u>Calculs de groupes</u> $Ш^1_\Sigma(k,B)$.

On se propose de calculer dans quelques cas particuliers les groupes $Ш^1_\Sigma(k,B)$ et $Ш^1_\omega(k,B)$ considérés au §1, $\underline{a}$. On désigne toujours par k un corps de nombres et par B un k-groupe algébrique commutatif fini. On note $\underline{g}$ le groupe de Galois $\underline{g}(k_B/k)$ et n son ordre, e son exposant (= ppcm des ordres des éléments de $\underline{g}$), enfin $f = n/e$.

a.- Etude des cas $B = \mathbb{Z}/m$ et $B = \mu_m$.

On obtient les résultats suivants:

(2.1) $$Ш^1_\Sigma(\mathbb{Z}/m) = 0$$

(2.2) $$Ш^1_\Sigma(\mu_m) = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

De façon précise, on trouve $\mathbb{Z}/2$ dans ce dernier cas, lorsque les conditions suivantes sont remplies:

k est un corps spécial,

$m = 2^t m'$ avec m' impair et $t > s(k)$,

$\Sigma \supset \Sigma_0(k)$.

Si ζ_r désigne une racine primitive 2^r-ème de l'unité, l'entier $s(k)$ est défini par la condition $k(\zeta_{s+1}) \neq k(\zeta_s) = k$: il est au moins égal à 2 et k est dit spécial lorsque l'extension $k(\zeta_{s+1})/k$ n'est pas cyclique; enfin $\Sigma_0(k)$ est une certaine partie finie de Ω. Par exemple, les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ sont spéciaux, $s(k)$ vaut 2 dans les deux cas, $\Sigma_0(\mathbb{Q}) = \{2\}$ et $\Sigma_0(\mathbb{Q}(\sqrt{7})) = \emptyset$.

Dans le cas $B = \mathbb{Z}/m$, les calculs sont immédiats (lemme 1.1). Dans le cas $B = \mu_m$, les résultats sont évidemment liés à l'étude de l'extension $k(\sqrt[m]{1})/k$ et sont la simple traduction de résultats d'Artin-Tate ([2], chap.10) et Wang [42] : en effet, $H^1(k,\mu_m) = k^*/k^{*m}$, si bien que $Ш^1_\Sigma(\mu_m)$ est le quotient par k^{*m} du sous-groupe de k^* formé des éléments qui sont, localement en dehors de Σ, des puissances m-ièmes.

Le lemme 1.4 donne aussitôt à partir des résultats précédents

(2.3) $$Ч^1_\Sigma(\mathbb{Z}/m) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z}/2,$$

(2.4) $$Ч^1_\Sigma(\mu_m) = 0.$$

On voit que, dans le premier cas, le lemme 1.4 traduit exactement les rapports qui existent entre le principe de Hasse pour μ_m et le problème de Grünwald.

Voici enfin deux exemples particuliers:

- si $k = \mathbb{Q}$,

(2.5) $\quad Ш^1(\mu_8) = 0$, puis $Ш^1_{\{2\}}(\mu_8) = Ш^1_\omega(\mu_8) = \mathbb{Z}/2$, d'où

(2.6) $\quad Ч^1_\omega(\mathbb{Z}/8) = \mathbb{Z}/2$;

- si $k = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$,

(2.7) $\quad Ш^1(\mu_8) = Ш^1_\omega(\mu_8) = \mathbb{Z}/2$, d'où

(2.8) $\quad Ч^1_\omega(\mathbb{Z}/8) = 0.$

b.- Cas du conoyau de la norme $\mathbb{Z}/n \to (\mathbb{Z}/n)[\underline{g}]$.

On considère une extension galoisienne K/k de degré n et groupe $\underline{g}$. On note $N_{\underline{g}} = \sum_{g \in \underline{g}} g$ la norme et $\varepsilon_{\underline{g}} : \mathbb{Z}[\underline{g}] \to \mathbb{Z}$ l'augmentation. Le k-groupe fini B est le dual du groupe fini $R^1_{K/k}\mu_n$. On vérifie aisément que le diagramme ci-dessous est commutatif et que les deux lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbb{Z}[\underline{g}] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\underline{g}]/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}/n & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow \iota & & \downarrow N_{\underline{g}} & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}[\underline{g}] & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z}[\underline{g}] & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n)[\underline{g}] & \to & 0 \ ;
\end{array}$$

dans ce diagramme, α est composée de $\varepsilon_{\underline{g}}$ et de la projection, β est composée de la projection et de $-\varepsilon_{\underline{g}}$ suivie de la projection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$ et, enfin, $\iota(1,0) = N_{\underline{g}}$, $\iota(0,1) = n - N_{\underline{g}}$. Cette application ι est donc injective et a pour conoyau B. On en déduit que, pour tout sous-groupe $\underline{h}$ de $\underline{g}$, $H^1(\underline{h},B) = H^2(\underline{h},\mathbb{Z}) \oplus H^3(\underline{h},\mathbb{Z})$, d'où, en vertu des lemmes 1.1 et 1.9 et de la nullité de $H^3(\underline{h},\mathbb{Z})$ pour $\underline{h}$ cyclique,

(2.9) $$Ш^1_\Sigma(k,B) = Ш^3_\Sigma(\underline{g},\mathbb{Z})$$

(2.10) $$Ш^1_\omega(k,B) = H^3(\underline{g},\mathbb{Z})$$

(2.11) $$Ч^1_\omega(k,R^1\mu_n) = H^3(\underline{g},\mathbb{Z})/Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z}).$$

Notons que le diagramme ci-dessus fait apparaître par dualité le groupe $R^1\mu_n$ comme le noyau de l'isogénie $RG_m \to G_m \times_k R^1G_m$ définie par $x \mapsto [N(x), x^n/N(x)]$ (cf. [28]).

c.- Cas du noyau de l'augmentation $(\mathbb{Z}/n)[\underline{g}] \to \mathbb{Z}/n$.

On trouve

(2.12) $$Ш^1_\omega(k,B) = \mathbb{Z}/f.$$

En effet, $H^1(\underline{g},B) = \mathbb{Z}/n$ et $H^1(\underline{g}^v,B) = \mathbb{Z}/n_v$ où n_v désigne l'ordre de $\underline{g}^v$. Le groupe $Ш^1_\Sigma(k,B)$ est donc le groupe cyclique d'ordre $n/\mathrm{ppcm}(n_v)$ pour v en dehors de Σ. Cet exemple montre qu'on ne peut améliorer le lemme 1.3.

d.- Cas où $\underline{g} = V_4$.

Dans ces cas-là, deux situations peuvent se présenter suivant la nature de K/k. Ou bien tous les groupes de décomposition sont cycliques et alors

(2.13) $$Ш^1(k,B) = Ш^1_\omega(k,B) \text{ , d'où } Ч^1_\omega(k,\hat{B}) = 0.$$

Ou bien, il existe une partie finie non vide Σ de Ω, formée des places dont le groupe de décomposition est V_4; alors

(2.14) $$Ш^1(k,B) = 0, \text{ puis } Ш^1_\Sigma(k,B) = Ш^1_\omega(k,B), \text{ d'où}$$

(2.15) $$Ч^1_{\Sigma'}(k,\hat{B}) = 0 \text{ si } \Sigma' \not\supset \Sigma \text{ et } Ч^1_\Sigma(k,\hat{B}) = Ч^1_\omega(k,\hat{B}).$$

Par exemple, si B est le noyau de l'augmentation $(\mathbb{Z}/4)[g] \to \mathbb{Z}/4$, on trouve

(2.16) $$Ш^1_\omega(k,B) = \mathbb{Z}/2,$$

avec tantôt, par exemple pour $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{2})/\mathbb{Q}$,

(2.17) $$Ш^1(k,B) = 0 \quad \text{et} \quad Ч^1_\omega(k,\hat{B}) = \mathbb{Z}/2,$$

tantôt, par exemple pour $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt{13},\sqrt{17})/\mathbb{Q}$,

(2.18) $$Ш^1(k,B) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{et} \quad Ч^1_\omega(k,\hat{B}) = 0.$$

§3.- L'approximation faible.

Rappelons qu'étant donné un groupe algébrique linéaire G défini sur le corps de nombres k et une partie Σ de Ω, on note $A_\Sigma(G)$ le quotient, a priori à gauche, de $\prod_{v\in\Sigma} G(k_v)$ par l'adhérence de l'image diagonale de G(k) et $A(G) = A_\Omega(G)$. On dit que l'approximation faible vaut pour (G,Σ) lorsque $A_\Sigma(G) = 0$ et qu'elle vaut pour G lorsque $A(G) = 0$. Les propriétés ci-après de A(G) se déduisent aisément du résultat suivant dans le cas semi-simple simplement connexe:

Théorème 3.1.- L'approximation faible vaut pour un groupe semi-simple simplement connexe sur un corps de nombres.

Ce théorème est essentiellement dû à Kneser qui a traité directement ([18], th. 7.1) les groupes classiques, puis, via l'approximation forte, tous les groupes sans facteur de type E_8 ([19,21]). Le cas des groupes de type E_8 est dû à Harder ([15], conséquence du th. 2.2). La démonstration directe de l'approximation forte par Platonov [31] donne une preuve globale de ce théorème.

Proposition 3.2.- Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k. Si U est son radical unipotent,

$$A_\Sigma(G) = A_\Sigma(G/U).$$

Evident: le groupe U vérifie l'approximation faible, car c'est une variété k-rationnelle; le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & U(k) & \to & G(k) & \longrightarrow & (G/U)(k) & \longrightarrow & H^1(k,U) = 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \prod_\Sigma U(k_v) & \to & \prod_\Sigma G(k_v) & \xrightarrow{\varphi} & \prod_\Sigma (G/U)(k_v) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne le résultat annoncé, vu que φ est une application ouverte.

Le résultat suivant illustre de façon précise les commentaires faits par Kneser au §8 de [18]: une fois traité le cas simplement connexe, l'approximation faible se ramène à des questions de cohomologie galoisienne de modules finis. La démonstration utilise des arguments analogues à ceux de [18] qui contient d'ailleurs l'implication $Ш^1_\Sigma(B) = 0 \Rightarrow A_\Sigma(G) = 0$.

Théorème 3.3.- Soit G un groupe réductif connexe défini sur le corps de nombres k et admettant un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B. Si Σ est une partie finie de Ω,

(3.3.1) $$A_\Sigma(G) = Ш^1_\Sigma(k,B).$$

Ainsi, le défaut d'approximation faible $A(G)$ est un groupe commutatif fini et

(3.3.2) $$A(G) = Ш^1_\omega(k,B),$$

(3.3.3) $$A(G) = A_{\Sigma_0}(G),$$

où Σ_0 est formée uniquement de places finies, ramifiées dans k_B/k.

Précisons la signification de (3.3.1): d'une part, l'adhérence dans le produit $\prod_{v\in\Sigma} G(k_v)$ de l'image diagonale de $G(k)$ est un sous-groupe invariant, ce qui fait de $A_\Sigma(G)$ un groupe; d'autre part, l'isogénie $G' \to G$ induit un isomorphisme de groupes $A_\Sigma(G) \xrightarrow{\sim} Ш^1_\Sigma(k,B)$. De même pour (3.3.2).

Le k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G'(k) \arrow[r] \arrow[d] & G(k) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] & H^1(k,B) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\theta"] & H^1(k,G') \arrow[d] \\
\prod_\Sigma G'(k_v) \arrow[r] & \prod_\Sigma G(k_v) \arrow[r, "\chi"] & \prod_\Sigma H^1(k_v,B) \arrow[r, "\xi"] & \prod_\Sigma H^1(k_v,G').
\end{tikzcd}$$

On en déduit, en posant $X = \chi^{-1}(\mathrm{im}\,\theta\varphi)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G'(k) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & G(k) \arrow[r, "\bar\varphi"] \arrow[d, "\bar i"] & \mathrm{im}\,\varphi \arrow[r] \arrow[d, "\bar\theta"] & 0 \\
\prod_\Sigma G'(k_v) \arrow[r, "\psi"] & X \arrow[r, "\bar\chi"] & \mathrm{im}\,\theta\varphi \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme le produit, pour $v \in \Sigma$, des groupes $H^1(k_v,B)$ est fini et discret, X est un sous-groupe invariant ouvert du produit $\prod_{v\in\Sigma} G(k_v)$; en particulier, il contient l'adhérence de $i[G(k)]$. Montrons que $i[G(k)]$ est dense dans X: soient U un ouvert non vide de X et g un élément de $G(k)$ tel que $\bar\chi\cdot\bar i(g)$ appartienne à $\bar\chi(U)$; l'ouvert $\psi^{-1}[\bar i(g)^{-1}.U]$ est alors non vide; il rencontre donc, en vertu de l'approximation faible pour G' (l'approximation faible vaut en effet pour un groupe semi-simple simplement connexe d'après le théorème 3.1 et pour un tore quasi-trivial qui est une k-variété k-rationnelle, donc aussi pour le produit de deux tels groupes), l'image de $G(k)$. On trouve ainsi un élément a de $G(k)$, tel que

$\bar{i}(g\rho(a))$ appartienne à U. On a ainsi prouvé que X est l'adhérence de $i(G(k))$ dans $\prod_{\Sigma} G(k_v)$, ce qui assure que cette adhérence est un sous-groupe invariant et que le groupe $A_{\Sigma}(G)$ ainsi défini est un groupe commutatif fini, égal au quotient de im χ par $\theta(\text{im } \varphi)$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{im } \varphi & \longrightarrow & H^1(k,B) & \longrightarrow & \text{im } \zeta & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{\theta} & & \downarrow \theta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{im } \chi & \longrightarrow & \prod_{\Sigma} H^1(k_v,B) & \longrightarrow & \text{im } \xi & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que l'application χ induit un isomorphisme $A_{\Sigma}(G) = Ш^1_{\Sigma}(k,B)$, lorsque γ est bijective. Or, c'est le cas lorsque le groupe dérivé G" de G' est sans facteur de type E_8 et que Σ contient les places à l'infini: l'application γ est en effet injective, puisque, d'après Harder [12], le principe de Hasse vaut, sous ces hypothèses, pour G" et que $H^1(k,G') = H^1(k,G")$, $H^1(k_v,G') = H^1(k_v,G")$; comme $H^1(k_v,G") = 0$ d'après Kneser [20] et que, d'après 1.6, $Ш^1_{\infty}(k,B) = 0$, l'application γ est également surjective. Si l'on suppose seulement G" sans facteur de type E_8, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{\Sigma\cup\infty}(G) & \xrightarrow{h} & A_{\Sigma}(G) \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Ш^1_{\Sigma\cup\infty}(B) & \xrightarrow{q} & Ш^1_{\Sigma}(B) \end{array}$$

montre que f est encore bijective: on vient en effet de voir que f' est bijective; or, h est surjective et q est bijective (lemmes 1.4 et 1.1 (iii)). Enfin, dans le cas général, G" est le produit d'un groupe G'_1 de type E_8 et d'un groupe sans facteur de type E_8, si bien que G' est le produit de G'_1 et d'un groupe G'_2 dont le groupe dérivé $G"_2$ est sans facteur de type E_8; comme le centre de G'_1 est trivial, G est le produit de G'_1 et de $G_2 = G'_2/B$. Or, l'approximation faible vaut pour G'_1 d'après le théorème 3.1, d'où $A_{\Sigma}(G) = A_{\Sigma}(G_2) = Ш^1_{\Sigma}(B)$.

Les résultats concernant A(G) se déduisent aussitôt de celui qu'on vient de prouver pour $A_{\Sigma}(G)$ et du lemme 1.5.

Corollaire 3.4.- Si G est un groupe algébrique semi-simple connexe, défini sur le corps de nombres k, et si B est son groupe fondamental,

$$A_\Sigma(G) = \text{Ш}^1_\Sigma(k,B),$$
$$A(G) = \text{Ш}^1_\omega(k,B).$$

On applique évidemment le théorème en considérant le revêtement simplement connexe $G' \to G$.

Corollaire 3.5.- Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k.

(i) Les ensembles $A_\Sigma(G)$ et $A(G)$ sont des groupes commutatifs finis.

(ii) Si G est déployé par l'extension galoisienne finie K/k et si les groupes de décomposition des places de Σ dans K/k sont cycliques, l'approximation faible vaut pour (G,Σ), i.e.

$$A_\Sigma(G) = 0.$$

C'est le cas si K/k est non ramifiée.

(iii) L'approximation faible vaut pour (G,∞).

On peut supposer, d'après la proposition 3.2 et le lemme 1.10, que G est réductif et admet un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B: l'approximation faible vaut en effet pour un tore quasi-trivial et $A_\Sigma(G_1 \times G_2) = A_\Sigma(G_1) \times A_\Sigma(G_2)$. L'assertion (i) résulte alors du théorème 3.3. Comme G' contient un tore maximal, défini sur k et décomposé par K/k, et que B est un sous-groupe de ce tore, $\underline{g}(\bar{K}/K)$ agit trivialement sur $\hat{B}$ et $k_{\hat{B}}/k$ est donc une sous-extension de K/k: l'assertion (ii) résulte alors du lemme 1.6 via le théorème 3.3.

Notons que (ii) et (iii) sont dus à Serre pour les tores.

Corollaire 3.6 (Harder [15]).- Si G est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k et déployé aux places finies de Σ, l'approximation faible vaut pour (G,Σ).

On peut supposer G réductif. Il existe, d'après l'hypothèse et le lemme

1.11, un tore maximal T de G, défini sur k et décomposé aux places finies de Σ. Soit $\underline{g} = \underline{g}(k_{\hat{T}}/k)$. Si v est une place finie de Σ, le choix de T assure que T_v est un k_v-tore trivial, donc que $\hat{T}$ est un $\underline{g}^v$-module trivial. La définition de $\underline{g}$ implique donc $\underline{g}^v = 0$. On conclut alors grâce à 3.4 (ii).

Notons qu'en revanche un groupe quasi-déployé ne vérifie pas en général l'approximation faible: c'est déjà le cas pour le groupe $R_{K/k}SL_8/\mathbb{Z}_8$ où l'on considère $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{1})/\mathbb{Q}$, le plongement de $\mathbb{Z}_8$ étant donné par la racine $\sqrt[8]{1}$, exemple dû à Serre (cf. [18] §6 et ci-après 5.8).

§4.- Le principe de Hasse.

On se propose de calculer, pour un groupe algébrique linéaire connexe G, sans facteur de type E_8, défini sur un corps de nombres k, le défaut de validité du principe de Hasse: celui-ci est mesuré par l'ensemble pointé $Ш^1(k,G)$, noyau de la restriction

$$H^1(k,G) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,G) \ ;$$

on verra qu'en fait les autres fibres non vides de cette restriction sont aussi en bijection avec $Ш^1(k,G)$.

On sait que $Ш^1(k,G)$ est, en toute généralité, un ensemble fini (Borel-Serre [4]), mais cela résulte aussi, pour G connexe sans facteur de type E_8, des calculs ci-après.

Indiquons d'abord une réduction évidente:

Proposition 4.1.- Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k. Si U est le radical unipotent de G, la bijection canonique $H^1(k,G) \to H^1(k,G/U)$ met en bijection les fibres des deux applications $H^1(k,G) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,G)$ et $H^1(k,G/U) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,G/U)$. En particulier,

$$Ш^1(k,G) = Ш^1(k,G/U).$$

Cela résulte aussitôt de 1.13 appliqué à la situation tordue par un 1-cocycle $a \in Z^1(k,G)$ quelconque.

Indiquons ensuite le résultat fondamental suivant, sur lequel s'appuie l'étude ultérieure de $Ш(G)$ pour G quelconque:

Théorème 4.2 (Kneser-Harder).- Si G est un groupe algébrique semi-simple simplement connexe, sans facteur de type E_8, et défini sur le corps de nombres k, l'application

$$H^1(k,G) \longrightarrow \prod_{v\in\infty} H^1(k_v,G)$$

est bijective. En particulier, le principe de Hasse vaut pour un tel groupe:

$$Ш(G) = 0.$$

Le cas des groupes classiques a été traité par Kneser (cf. [22,23]) et celui des groupes exceptionnels par Harder [12].

Théorème 4.3.- Soit G un groupe algébrique réductif connexe, défini sur le corps de nombres k, sans facteur de type E_8 et pourvu d'un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B. L'application

$$Ш^1(k,G) \xrightarrow{\partial} Ш^2(k,B)$$

définie par ce revêtement est une bijection.

Rappelons d'abord que, d'après Tate-Poitou (cf. [37]), le groupe fini $Ш^2(k,B)$ est, de façon naturelle (cf.8.2.3), le dual de $Ш^1(k,\hat{B})$. On a donc

$$Ш^1(k,G) = Ш^2(k,B) = Ш^1(k,\hat{B})^{\vee}. \tag{4.3.1}$$

Notons ensuite que, si G a un facteur de type E_8, la démonstration assure au moins que l'application $Ш^1(k,G) \xrightarrow{\partial} Ш^2(k,B)$ est surjective. On conjecture évidemment que 4.2, donc 4.3 restent vrais même dans ce cas.

Corollaire 4.4.- Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur le corps de nombres k et sans facteur de type E_8. Si B désigne son groupe fondamental, l'application canonique

$$Ш^1(k,G) \xrightarrow{\partial} Ш^2(k,B)$$

est une bijection.

Elle reste au moins surjective pour G semi-simple connexe quelconque. Il s'agit bien sûr de l'application ∂ définie par le revêtement simplement connexe $G' \to G$. Cette assertion est indiquée dans [8], mais la démonstration qui en est donnée est très nettement insuffisante. Notons en outre que l'équivalence entre la nullité de $Ш^1(k,G)$ et celle de $Ш^2(k,B)$ est déjà prouvée par Harder (cf. [14], thm.4.3.2) et par Kneser [23].

La <u>démonstration du théorème</u> se fait en trois étapes.

(i) <u>Le noyau de</u> ∂ <u>est</u> $\{0\}$.

Il s'agit du noyau au sens des ensembles pointés. L'assertion $\partial^{-1}(0) = \{0\}$ résulte aussitôt de la considération du diagramme, à lignes exactes,

$$\begin{tikzcd}
H^1(k,B) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & H^1(k,G') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^1(k,G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\psi"] & H^2(k,B) \\
\prod_{\infty} H^1(k_v,B) \arrow[r] & \prod_{\infty} H^1(k_v,G') \arrow[r] & \prod_{\infty} H^1(k_v,G) ,
\end{tikzcd}$$

dans lequel ρ est surjective (lemme 1.6) et φ injective, au sens ordinaire, en vertu du principe de Hasse (théorème 4.2) pour le groupe semi-simple simplement connexe G' sans facteur de type E_8. On vérifie ensuite simplement que $\Delta^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0) = \{0\}$.

(ii) <u>L'application</u> ∂ <u>est injective</u>.

Soient α un élément de $Ш^1(k,G)$ et a un représentant de α dans $Z^1(k,G)$. On peut, B étant central dans G', tordre toute la situation par le cocycle a, ce qui donne en particulier le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
H^1(k,B) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,{}_aG') \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,{}_aG) \arrow[r, "{}_a\Delta"] \arrow[d] & H^2(k,B) \arrow[d] \\
\prod_{\Omega} H^1(k_v,B) \arrow[r] & \prod_{\Omega} H^1(k_v,{}_aG') \arrow[r] & \prod_{\Omega} H^1(k_v,{}_aG) \arrow[r] & \prod_{\Omega} H^2(k_v,B).
\end{tikzcd}$$

Il existe une bijection t_a qui transforme le carré de droite en le carré homologue du diagramme initial, i.e. avant torsion par a. Cette bijection transforme le zéro de $H^1(k,{}_aG)$ en α et, comme α appartient à $Ш^1(k,G)$, elle transforme le

zéro de $H^1(k_v, {}_aG)$ en celui de $H^1(k_v, G)$. Elle transforme donc $Ш^1(k, {}_aG)$ en $Ш^1(k,G)$ et le noyau de ${}_a\Delta$ en $\Delta^{-1}[\Delta(\alpha)]$. L'assertion (i) appliquée à ${}_aG' \to {}_aG$ s'écrit $(\ker {}_a\Delta) \cap Ш^1(k, {}_aG) = \{0\}$, soit, en appliquant t_a,

$$(\Delta^{-1}[\Delta(\alpha)] \cap Ш^1(k,G) = \{\alpha\}.$$

(iii) <u>L'application δ est surjective</u>.

Notons d'abord (Kneser-Harder) qu'il existe dans G' un tore maximal S' défini sur k et tel que $Ш^2(S') = 0$. Considérons en effet une place finie particulière v; si G" est le groupe dérivé de G', il existe, d'après Kneser [20], un tore maximal T" de G", défini sur k et compact sur k_v, d'où, d'après 1.9, $Ш^2(T") = 0$; il suffit de prendre $S' = T" \times_k T'$ où T' désigne le radical de G', radical quasi-trivial par hypothèse et vérifiant donc aussi $Ш^2(T') = 0$ (lemme 1.9). Soit alors S l'image de S' dans G. Considérons le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(k,S') & \xrightarrow{\pi} & H^1(k,S) & \xrightarrow{\delta} & H^2(k,B) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^2(k,S') \\ \downarrow & & \downarrow j & & \| & & \\ H^1(k,G') & \longrightarrow & H^1(k,G) & \xrightarrow{\Delta} & H^2(k,B) & & . \end{array}$$

Soit β un élément de $Ш^2(k,B)$. Comme $Ш^2(k,U') = 0$, on trouve $\varepsilon(\beta) = 0$, d'où $\beta = \delta(s)$. Comme β appartient à $Ш^2(k,B)$, on peut écrire $s_v = \pi_v(s'_v)$ pour chaque place v. L'application $H^1(k,S') \to \prod_\infty H^1(k_v,S')$ étant surjective (lemme 1.8), on peut, quitte à modifier s par un certain $\pi(s")$, supposer $s'_v = 0$ pour toute place infinie. Dès lors, $j(s_v) = 0$ pour toute place infinie; mais, comme, pour toute place finie v, $H^1(k_v,G') = 0$ d'après Kneser [20], on a $j(s_v) = 0$ pour toute place v, i.e. $j(s) \in Ш^1(k,G)$. Or, $\Delta[j(s)] = \beta$.

On notera que cette démonstration de (iii) vaut encore si G a un facteur de type E_8: il en est en effet ainsi des résultats de Kneser [20] qui y sont utilisés.

<u>Remarque</u> 4.4.1.- Dans les exemples classiques, comme le problème de la classification des formes antihermitiennes quaternioniques (<u>cf.</u> [16]) ou celui des classes d'isomorphisme pour les formes d'un groupe semi-simple dont le diagramme de Dynkin possède des automorphismes non triviaux, où le principe

de Hasse est mis en défaut, cela provient simplement du fait que le classifiant du problème considéré est le quotient d'un certain ensemble $H^1(k,G)$ par l'action d'un groupe fini non trivial; dans ces exemples, $Ш^1(G) = 0$, ce qui permet de restaurer le principe de Hasse en remontant à $H^1(k,G)$. Autrement dit, on trouve dans ces cas-là une façon naturelle de "marquer" les objets à classer, de telle sorte que la classification des objets marqués obéisse au principe de Hasse. En revanche, lorsque $Ш^1(G) \neq 0$, on ne voit pas de moyen analogue qui permette de restaurer le principe de Hasse.

Remarque 4.4.2.- Alors qu'a priori $Ш^1(G)$ est simplement un ensemble pointé, il résulte du théorème 4.3 que le revêtement $G' \to G$ le munit d'une structure de groupe, puisqu'il se trouve canoniquement isomorphe à $Ш^2(B)$. En particulier, les diverses fibres non vides de la restriction $H^1(k,G) \to \prod_{\Omega} H^1(k_v,G)$ sont toutes isomorphes à $Ш^1(G)$ et cette application est injective, dès que son noyau $Ш^1(G)$ est nul.

Corollaire 4.5.- Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe, défini sur le corps de nombres k et sans facteur de type E_8. Si B est son groupe fondamental, le diagramme

$$H^1(k,G) \xhookrightarrow{\iota} H^2(k,B) \times \prod_{\infty} H^1(k_v,G) \rightrightarrows \prod_{\infty} H^2(k_v,B)$$

est exact et les projections de $H^1(k,G)$ sur $H^2(k,B)$ d'une part et sur $\prod_{\infty} H^1(k_v,G)$ d'autre part sont surjectives.

Autrement dit, $H^1(k,G)$ est le produit fibré de $H^2(k,B)$ et $\prod_{\infty} H^1(k_v,G)$ au-dessus de $\prod_{\infty} H^2(k_v,B)$.

Montrons d'abord que l'application ι est injective. Soient γ un élément de $H^1(k,G)$ et c un relèvement de γ dans $Z^1(k,G)$. Comme B est central dans G, on peut tordre le tout par c. On obtient ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k,{}_cG) & \xrightarrow{c^{\Delta}} & H^2(k,B) \\ \wr \downarrow t_c & & \wr \downarrow t'_c \\ H^1(k,G) & \xrightarrow{\Delta} & H^2(k,B), \end{array}$$

dans lequel t'_c est la translation par $\Delta(\gamma)$ et t_c est une bijection qui transforme $\Delta^{-1}[\Delta(\gamma)]$ en le noyau de ${}_c\Delta$. Soit γ' un élément de $H^1(k,G)$ tel que $\iota(\gamma') = \iota(\gamma)$. L'élément $\gamma'' = t_c^{-1}(\gamma')$ de $H^1(k,{}_cG)$ appartient aux noyaux de ${}_c\Delta$ et de la projection sur $\prod_\infty H^1(k_v,{}_cG)$; il appartient donc à $Ш^1(k,{}_cG)$ d'après l'isomorphisme, pour v finie, $H^1(k_v,{}_cG) \xrightarrow{\sim} H^2(k_v,B)$ [20]. Or, d'après le théorème, la restriction de ${}_c\Delta$ à $Ш^1(k,{}_cG)$ est injective, d'où $\gamma'' = 0$ et, via t_c, $\gamma' = \gamma$.

On sait déjà, par 1.12, que la projection $H^1(k,G) \to \prod_\infty H^1(k_v,G)$ est surjective. La surjectivité de $\Delta : H^1(k,G) \to H^2(k,B)$ est prouvée par Kneser [23], chap.5, thm 1b, et pratiquement par Harder ([12]+[13] lemme 4.2.3). Voici, en bref, la démonstration. Soit $\zeta \in H^2(k,B)$. Comme il est presque partout localement nul, il existe une partie finie Σ de Ω, qui contienne au moins une place finie et telle que $\zeta_v = 0$ en dehors de Σ. On peut, en outre, trouver, pour chaque place finie $v \in \Sigma$, un k_v-tore maximal compact dans G'_v (Kneser [20]) et, pour chaque place réelle $v \in \Sigma$, un R-tore maximal dans G'_v dont le H^2 soit trivial (Harder [13] lemme 4.2.3). On en déduit, par 1.11, l'existence dans G' d'un tore maximal T', défini sur k et tel que T'_v soit compact pour toute place finie $v \in \Sigma$ et que $H^2(k_v,T') = 0$ pour toute place réelle $v \in \Sigma$. L'image de ζ dans $H^2(k,T')$ est nulle, puisqu'elle l'est partout localement et que, d'après 1.9, $Ш^2(k,T') = 0$. Ainsi, ζ appartient à l'image de $H^1(k,T)$, où T désigne l'image de T' dans G; il appartient a fortiori à l'image de $H^1(k,G)$.

Soient $\pi : H^2(k,B) \to \prod_\infty H^2(k_v,B)$ et $\Delta_\infty : \prod_\infty H^1(k_v,G) \to \prod_\infty H^2(k_v,B)$. Soit (β,α) un élément de $H^2(k,B) \times \prod_\infty H^1(k_v,G)$ tel que $\pi(\beta) = \Delta_\infty(\alpha)$. D'après la surjectivité de Δ, on peut relever β en $\gamma \in H^1(k,G)$, puis γ en $c \in Z^1(k,G)$. Quitte à tordre le tout par c, on peut donc supposer $\gamma = 0$, donc $\beta = 0$. Il s'agit alors de prouver que $(0,\alpha)$ appartient à l'image de ι lorsque $\Delta_\infty(\alpha) = 0$. Sous cette condition, α appartient à l'image de $\prod_\infty H^1(k_v,G')$, isomorphe, vu les hypothèses, à $H^1(k,G')$. Soit alors $\lambda' \in H^1(k,G')$, d'image α dans $\prod_\infty H^1(k_v,G)$. L'image λ de λ' dans $H^1(k,G)$ vérifie $\iota(\lambda) = (0,\alpha)$.

Remarque 4.5.1.- Ce corollaire fournit une description de $H^1(k,G)$ qui ramène son étude à celles de $H^2(k,B)$ et des fibres de l'application

$$\Delta_\infty : \prod_\infty H^1(k_v,G) \longrightarrow \prod_\infty H^2(k_v,B).$$

En effet, l'application

$$\Delta : H^1(k,G) \longrightarrow H^2(k,B)$$

est surjective et a pour fibre en $\Delta(\xi)$ la fibre $\Delta_\infty^{-1}[\Delta_\infty(\xi_\infty)]$ correspondante à l'infini.

Le corollaire ne vaut plus pour G réductif: ainsi, dans l'isogénie $G_m \xrightarrow{2} G_m$ de noyau μ_2, $H^1(k,G_m)$, qui vaut 0, n'est pas le noyau de la projection ${}_2\mathrm{Br}\, k \to \prod_\infty {}_2\mathrm{Br}\, k_v$. Il reste cependant vrai que, pour G sans facteur de type E_8, ι plonge $H^1(k,G)$ dans le noyau de la double flèche (π,Δ_∞) et que l'application Δ a pour fibre en $\Delta(\xi)$ la fibre correspondante à l'infini. Mais l'image de Δ reste à préciser!

Exemple 4.5.2.- Soient f une forme quadratique sur $\mathbb{Q}$ et SO(f) le groupe spécial orthogonal de f. L'ensemble $H^1(\mathbb{Q},SO(f))$ classe sur $\mathbb{Q}$ les formes quadratiques g de même rang et discriminant que f. L'application qui associe à g les invariants $\varepsilon(g)$ et $j(g)$ réalise $H^1(\mathbb{Q},SO(f))$ comme la partie du produit ${}_2\mathrm{Br}\,\mathbb{Q} \times H^1(\mathbb{R},SO(f))$ formée des couples (ε,j) vérifiant la condition "à l'infini" $\varepsilon_\infty = (-1)^{j(j-1)/2}$.

Corollaire 4.6.- On conserve les hypothèses et notations du théorème 4.3. On considère en outre une extension finie K/k de degré impair n. Si $H^2(k,B)$ n'a pas de n-torsion, par exemple s'il en est ainsi de B, l'application canonique

$$H^1(k,G) \to H^1(K,G)$$

est injective.

En particulier, tout espace principal homogène sous G qui a un point à valeurs dans K en a déjà un dans k.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du précédent 4.5 (cf. 4.5.1):

l'hypothèse "n impair" assure l'injectivité de $\prod_{\infty} H^1(k_v,G) \to \prod_{\infty} H^1(K_w,G)$; la restriction $H^2(k,B) \to H^2(K,B)$ est également injective, car, étant donné l'hypothèse sur B, l'application composée Cor $\circ$ Res est injective dans $H^2(k,B)$, puisque c'est la multiplication par n.

Exemples 4.6.1.- Si G est semi-simple adjoint, les hypothèses sur n sont vérifiées si n est impair et premier à m+1 pour tout facteur de type A_m et à 3 pour tout facteur de type ${}^2E_6$. Si G = SO(f), on peut prendre n impair quelconque. Il en est de même pour G semi-simple simplement connexe.

Corollaire 4.7.- On conserve les hypothèses et notations du théorème 4.3. Soient $\{k_i\}$ des extensions finies de k dont les degrés soient premiers entre eux dans leur ensemble. L'application canonique

$$H^1(k,G) \longrightarrow \prod_i H^1(k_i,G)$$

est injective. En particulier, un espace principal homogène sous G qui a un point dans chaque k_i a déjà un point dans k.

Cet énoncé est encore une conséquence immédiate du corollaire 4.5. Soit n_i le degré de k_i/k. L'un des n_i au moins est impair et l'application correspondante $\prod_{\infty} H^1(k_v,G) \to \prod_{\infty} H^1(k_{i,w},G)$ est injective. Par hypothèse, il existe des entiers α_i tels que $\sum \alpha_i n_i = 1$, d'où, dans $H^2(k,B)$, avec des notations évidentes, $\sum_i \alpha_i . \mathrm{Cor}_i \circ \mathrm{Res}_i = \mathrm{id}$. On en déduit l'injectivité de la restriction $H^2(k,B) \to \prod_i H^2(k_i,B)$ et l'énoncé résulte alors de 4.5.

Remarque 4.7.1.- Il est naturel de conjecturer que les deux énoncés 4.6 et 4.7 restent vrais sur un corps k de caractéristique 0 quelconque. C'est au moins le cas aussi si k est un corps p-adique, d'après [20]. D'autre part, Springer a prouvé [36] que, si G = SO(f) ou O(f) et si K/k est une extension finie de degré impair quelconque, l'application $H^1(k,G) \to H^1(K,G)$ est injective.

§5.- Principe de Hasse et approximation faible.

Le lemme 1.4 permet, dans le cas où G possède un k-revêtement spécial, de déduire des résultats obtenus aux §§3-4 sur l'approximation faible et le principe de Hasse une extension naturelle de $Ш(G)$ par $A(G)$ qui met en évidence leurs propriétés communes.

Théorème 5.1.- Soit G un groupe réductif connexe, défini sur le corps de nombres k, sans facteur de type E_8 et pourvu d'un k-revêtement spécial $G' \to G$. Ce revêtement définit une suite exacte naturelle de groupes finis

$$0 \to A(G) \longrightarrow Ш^1_\omega(k,\hat{B})^\sim \longrightarrow Ш(G) \longrightarrow 0.$$

En outre,

$$Ш^1_\omega(k,\hat{B}) = Ш^1_{\Sigma_0}(k_{\hat{B}}/k,\hat{B})$$

où Σ_0 est formée de places dont les groupes de décomposition dans $k_{\hat{B}}/k$ ne sont pas cycliques.

La première assertion résulte aussitôt du lemme 1.4 et des théorèmes 3.3 et 4.3. Les autres résultats sont contenus dans le lemme 1.2.

Rappelons (cf. 1.2.1) que le terme médian de la suite exacte ci-dessus est de nature algébrique, alors que les termes extrêmes sont de nature arithmétique: ils ne dépendent pas seulement du $k_{\hat{B}}/k$-module B, mais aussi de la distribution des groupes de décomposition dans $k_{\hat{B}}/k$. Pour un même $\underline{g}$-module $\hat{B}$, donc pour un même terme médian $Ш^1_\omega(\underline{g},\hat{B})$, on obtient une répartition variable entre $A(G)$ et $Ш(G)$ pour diverses réalisations $\underline{g} = \underline{g}(K/k)$.

Corollaire 5.2.- On conserve les hypothèses et notations du théorème. On désigne en outre par n l'ordre de $\underline{g}(k_{\hat{B}}/k)$ et par e son exposant. Les groupes finis $A(G)$ et $Ш(G)$ sont annulés par n/e. En particulier, si $k_{\hat{B}}/k$ est métacyclique, $A(G) = Ш(G) = 0$.

Conséquence du théorème ci-dessus et du lemme 1.3.

Remarque 5.2.1.- En revanche, dès que $\underline{g}(k_{\hat{B}}/k) = V_4$, on peut très bien avoir $A(G)$ et $Ш(G)$ non nuls (cf. 5.6 et 5.7).

Corollaire 5.3.- Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur le corps de nombres k et sans facteur de type E_8. Si G est déployé par l'extension galoisienne finie K/k, d'ordre n et exposant e, les groupes finis $A(G)$ et $Ш(G)$ sont tués par n/e. En particulier, si G est déployé par une extension métacyclique, $A(G) = Ш(G) = 0$.

Conséquence du corollaire précédent et du lemme 1.10 qui permet la réduction au cas où G possède un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B: en effet, l'extension $k_{\hat{B}}/k$ est alors une sous-extension galoisienne de K/k.

Corollaire 5.4.- Les groupes semi-simples connexes suivants, supposés définis sur un corps de nombres et sans facteur de type E_8, vérifient l'approximation faible et le principe de Hasse:

(i) les groupes adjoints

(ii) les groupes absolument presque simples

(iii) les groupes déployés par une extension métacyclique et leurs formes internes.

Le cas (i) se ramène, par la restriction des scalaires, au cas (ii), cas particulier des groupes déployés par une extension métacyclique (corollaire 5.3); noter enfin qu'une torsion interne n'affecte pas le groupe fondamental B.

Les cas (i) et (ii) sont déjà traités par Harder (cf. [13,14]) grâce à la notion d'isogénie "normale".

Remarque 5.5.- Pour toutes les assertions relatives uniquement à l'approximation faible, on peut, dans les corollaires ci-dessus, oublier l'hypothèse "sans facteur de type E_8".

Exemple 5.6: le tore $R^1_{K/k}\mathbb{G}_m$ pour K/k galoisienne.

Soient n le degré de K/k et $\underline{g}$ son groupe de Galois. L'isogénie $RG_m \to G_m \times R^1G_m$ définie par $x \mapsto [N(x), x^n/N(x)]$ a pour noyau $R^1\mu_n$, dont le dual $\hat{B}$ a été étudié au §2, ex.b. On obtient donc

$$A_\Sigma(R^1G_m) = Ш^3_\Sigma(\underline{g},\mathbb{Z})/Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z})$$
$$A(R^1G_m) = H^3(\underline{g},\mathbb{Z})/Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z})$$
$$Ш(R^1G_m) = Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z});$$

ce dernier résultat se déduit aussitôt également de la dualité de Tate-Nakayama [28]. Ainsi, le terme médian de l'extension de Ш(G) par A(G) est, dans ce cas, le dual de $H^3(g,\mathbb{Z})$, qui vaut déjà $\mathbb{Z}_2$ pour $g = V_4$. Pour $g(K/k) = V_4$, on a tantôt $A(G) = 0$ et $Ш(G) = \mathbb{Z}_2$,

tantôt $A(G) = \mathbb{Z}_2$ et $Ш(G) = 0$,

suivant la répartition des groupes de décomposition dans K/k. On est, par exemple, dans le premier cas pour $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt{13},\sqrt{17})/\mathbb{Q}$ (cf. §2,ex.d)et dans le second cas pour $K/k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{2})/\mathbb{Q}$; on peut même préciser, dans ce dernier cas, que K^{*1} est dense dans $\prod_{v\in\Sigma} K_w^{*1}$ lorsque Σ ne contient pas 2, alors que son adhérence dans ce produit est d'indice 2, dès que Σ contient 2.

Exemple 5.7: le groupe semi-simple $R_{K/k}SL_n/R^1\mu_n$ pour K/k galoisienne.

Ici encore, n désigne le degré de K/k. Les conclusions sont les mêmes qu'en 5.6, puisque c'est le même groupe $B = R^1\mu_n$ qui intervient. Comme ce groupe G est presque simple et quasi-déployé, on obtient ainsi, pour des choix convenables de K/k, des exemples de groupe semi-simple presque simple et quasi-déployé ne vérifiant ni le principe de Hasse, ni l'approximation faible et même pour lesquels A(G) et Ш(G) prennent toute valeur fixée d'avance, au moins sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 5.8: le groupe semi-simple $R_{K/k}SL_8/\mathbb{Z}_8$ pour $K = k(\sqrt[8]{1})$.

Exemple dû à Serre (cf. 3.6). Supposons k spécial et s(k) = 2 (cf. §2, ex.a). Le terme médian de (5.5.1) est alors égal à $\mathbb{Z}_2$. On trouve tantôt, par exemple pour $k = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $A(G) = 0$ et $Ш(G) = \mathbb{Z}_2$,

tantôt, par exemple pour $k = \mathbb{Q}$,

$$A(G) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad Ш(G) = 0,$$

avec, dans ce dernier cas, $A_\Sigma(G) = \mathbb{Z}_2$ ou 0, suivant que Σ contient, ou non, 2.

§6.- Le groupe de Brauer d'un groupe linéaire.

L'introduction du groupe de Brauer a pour but de réinterpréter la suite exacte (5.1.1), de manière à en donner une présentation intrinsèque et à l'étendre aux cas où G ne possède pas de revêtement spécial, et de mettre en évidence les rapports entre A(G) et W(G) et les problèmes birationnels.

a.- Quelques rappels sur le groupe de Brauer.

Pour les notations, cf. les notations adoptées au début et [11]. En fait, si k désigne un corps quelconque et X une k-variété algébrique affine lisse, il y a, d'après un résultat récent de Hoobler [17], coïncidence entre Br X et Br'X:

(6.0) $$\mathrm{Br}\, X = \mathrm{Br}'X.$$

Comme ici nous nous intéressons au cas des groupes algébriques linéaires sur un corps et de leurs espaces homogènes principaux, il n'y a donc pas lieu de distinguer entre Br et Br'. Comme, de plus, seul intervient vraiment par la suite le sous-groupe Br_1X, noyau de $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \bar{X}$, il est même inutile d'utiliser le résultat de Hoobler. Pour obtenir l'égalité $\mathrm{Br}_1X = \mathrm{Br}'_1X$, il suffit en effet de rappeler les deux lemmes suivants, où k désigne un corps quelconque et $\bar{k}$ la clôture séparable:

Lemme 6.1.- Si X est une k-variété lisse, on a la suite exacte naturelle

$$0 \to \mathrm{Br}'_1X \to H^2(k,\bar{k}(X)^*) \to H^2(k,\mathrm{Div}\, \bar{X}).$$

Cf. [25] et [7], §7, lemme 14, où l'hypothèse "X complète" est superflue.

Lemme 6.2.- Si X est une k-variété lisse, Br'_1X est constitué de classes d'algèbres d'Azumaya, i.e.

(6.2.1) $$\mathrm{Br}_1X = \mathrm{Br}'_1X.$$

L'accouplement naturel

(6.2.2) $$\begin{array}{ccc} X(k)\times \mathrm{Br}_1X & \longrightarrow & \mathrm{Br}\, k \\ (x,b) & \longmapsto & b(x) \end{array}$$

peut se calculer ainsi: étant donné x, on peut représenter b par un 2-cocycle $f = (f_{s,t}) \in Z^2(g,\bar{k}(X)^*)$ défini en x et alors $b(x)$ est la classe de $(f_{s,t}(x))$. Si, enfin, k est un corps de nombres, on a un accouplement naturel

$$(6.2.3) \qquad X(A_k) \times Br_1X \longrightarrow \coprod_{\Omega} Br\, k_v \xrightarrow{\sum inv_v} Q/Z.$$

Le lemme 6.1 assure que le groupe noté ici $Br_1'X$ coïncide avec celui noté Br_1X dans [26]. Il suffit alors de rassembler les résultats 41.7 et 41.8 de [26] pour obtenir les deux premières assertions. Si X est une k-variété lisse et k un corps de nombres d'anneau des entiers A, il existe un ouvert U de Spec A et un U-schéma lisse Y, tels que $X = Y\times_U k$. Comme $Br'X = \varinjlim_V Br'Y\times_U V$ pour V ouvert de Spec A contenu dans U (cf. [10] VII 5.9), il en est de même pour Br_1, i.e. tout élément b de Br_1X appartient à l'image d'un certain Br_1Y_V pour V convenable. Soit $x = (x_v)_{v\in\Omega}$ un point adélique de X, i.e. un élément du produit $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$, tel que, pour un ouvert W non vide convenable de U, on ait, pour toute place finie v définie par un point fermé de W, la section x_v qui se prolonge en $y_v \in Y(O_v)$ où O_v désigne l'anneau des entiers du complété k_v, en bref $x_v \in Y(O_v)$. Dès lors, si v "appartient" à l'ouvert $V\cap W$, l'accouplement $(x,b)_v \in Br\, k_v$ est nul, puisqu'il se factorise par $Br\, O_v$ qui vaut 0.

Par la suite, on appellera parfois "accouplements de Manin" les accouplements du type (6.2.2) ou (6.2.3).

b.- Le groupe de Brauer d'un torseur.

Etant donné une k-variété X, on note $U(X) = k[X]^*/k^*$ le groupe des unités relatives de X. On se propose de calculer U(X), Pic X et $Br_a X$ pour un espace principal homogène sous un groupe algébrique linéaire.

Lemme 6.3.- Soit X une k-variété, $\mathcal{G} = g(\bar{k}/k)$.

(i) On a la suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(k,\bar{k}[X]^*) \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathcal{G}} \to H^2(k,\bar{k}[X]^*) \to Br_1 X \to H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,\bar{k}[X]^*).$$

(ii) Si $X(k) \neq \emptyset$, on a même la suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(k,U(\bar{X})) \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathcal{G}} \to H^2(k,U(\bar{X})) \to Br_a X \to H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,U(\bar{X})).$$

(iii) Si $H^3(k,G_m) = 0$, par exemple si k est un corps de nombres ou un corps $\mathcal{P}$-adique, on a la suite exacte naturelle

$$E(X) \qquad (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathcal{G}} \to H^2(k,U(\bar{X})) \to Br_a X \to H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,U(\bar{X})).$$

La suite exacte (i) est simplement la suite exacte des termes de bas degré

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$$

tirée de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^p(\mathcal{G},H^q(\bar{X},G_m)) \Rightarrow H^n(X,G_m)$$

définie, en cohomologie étale, par le revêtement galoisien $\bar{X} \to X$ de groupe $\mathcal{G}$ et le faisceau G_m. En (ii), l'existence d'un point rationnel assure que les suites $0 \to H^i(k,G_m) \to H^i(k,\bar{k}[X]^*) \to H^i(k,U(\bar{X})) \to 0$ sont exactes et scindées et que les morphismes $H^i(k,G_m) \to H^i(X,G_m)$ admettent une rétraction. On déduit la suite (ii) de la suite (i) par passage au quotient grâce au théorème 90 et à la définition de $Br_a X$. L'exactitude de cette suite (ii) résulte aisément des conséquences indiquées ci-dessus de l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$: par exemple, la coïncidence des noyaux de $H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,\bar{k}[X]^*)$ et de $H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,U(\bar{X}))$ provient du scindage $H^3(k,\bar{k}[X]^*) = H^3(k,\bar{k}^*) \oplus H^3(k,U(\bar{X}))$ et du fait que la flèche $E_2^{3,0} \to E^3$ soit une injection sur le facteur $H^3(k,G_m)$, si bien que la flèche $E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$ qui, composée avec la précédente, donne 0 a son image contenue dans le facteur $H^3(k,U(\bar{X}))$. Enfin, la dernière suite exacte s'obtient à partir de (i) et de l'hypothèse $H^3(k,G_m) = 0$, par utilisation de la suite exacte de cohomologie galoisienne tirée de la suite exacte $0 \to \bar{k}^* \to \bar{k}[X]^* \to U(\bar{X}) \to 0$ (on ne suppose plus $X(k) \neq \emptyset$!),

d'où l'on deduit que $H(k,k[X]) \to H(k,U(X))$ est surjective et que $H^3(k,\bar{k}[X]^*) \to H^3(k,U(\bar{X}))$ est injective.

Soit $\mathcal{C}_k$ la sous-catégorie de la catégorie des k-variétés algébriques ainsi définie: un objet de $\mathcal{C}_k$ est la variété sous-jacente à un k-espace principal homogène à droite sous un k-groupe algébrique linéaire connexe. Soient G un tel groupe et X un k-espace principal homogène à droite sous G. Considérons les deux projections p_1 et p_2: $X\times X \to X$, le morphisme diagonal $\Delta : X \to X\times X$ et le morphisme $q: X\times X \to G$ défini par $q[(xg,x)]=g$. Si F est un foncteur contravariant additif défini sur $\mathcal{C}_k$ et à valeurs dans une catégorie abélienne, i.e. tel que le morphisme $F(X_1)\times F(X_2) \to F(X_1\times X_2)$ soit un isomorphisme, on obtient, en posant $i = F(p_1)-F(p_2)$, $d = F(\Delta)$ et $s = F(q)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & F(G) \arrow[d, "s"] & \\ F(X) \arrow[r, "i"] & F(X\times X) \arrow[r, "d"] & F(X). \end{tikzcd}$$

On peut écrire, en identifiant $F(X\times X)$ à $F(X)\times F(X)$, que $i(x) = (x,-x)$ et $d[(x_1,x_2)]=x_1+x_2$. La ligne inférieure du diagramme est donc exacte. De plus, l'application $q\circ\Delta$ a pour image $\{e\}$, si bien que $d\circ s$ est l'application 0. Il existe donc un morphisme $\varphi: F(G) \to F(X)$ et un seul vérifiant $i\circ\varphi = s$. En résumé:

Lemme 6.4.-*Soient* F *un foncteur contravariant additif défini sur* $\mathcal{C}_k$, G *un* k-*groupe algébrique linéaire connexe et* X *un* k-*espace principal homogène à droite sous* G. *Il existe alors un morphisme canonique*

$$\varphi : F(G) \longrightarrow F(X)$$

caractérisé par la relation $i\circ\varphi = s$. *Si en outre* $F \to F'$ *est un morphisme de foncteurs, le carré*

$$\begin{tikzcd} F(G) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F(X) \arrow[d] \\ F'(G) \arrow[r, "\varphi'"] & F'(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

A tout 1-cocycle $a = (a_s)_{s\in\mathcal{G}}$ appartenant à $Z^1(k,G)$ on associe un k-espace principal homogène à droite sous G: c'est la k-variété algébrique X_a obtenue en faisant opérer $\mathcal{G}$ sur $\bar{X}_a = \bar{G}$ via l'opération "prime" $'^s x = a_s.{}^s x$. Inversement, X étant donné, le choix d'un point-base x_o dans $\bar{X}$ détermine le 1-cocycle $a = (\bar{q}({}^s x_o,x_o))_{s\in\mathcal{G}}$ et le morphisme $X \to X_a$ défini sur $\bar{k}$ par $x_o g \to g$ est un k-isomorphisme compatible avec l'action de G. Les foncteurs F considérés seront à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{G}$-modules continus, sauf exception.

Lemme 6.5.-*Le* $\mathcal{G}$-*module* $\bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$ *est canoniquement isomorphe à* $\hat{G}$. *Le foncteur contravariant* $X \mapsto \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$ *est additif et le morphisme canonique*

$$\bar{k}[G]^*/\bar{k}^* \longrightarrow \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}$-*modules. De même le foncteur* $X \mapsto \mathrm{Pic}\,\bar{X}$ *est additif et le morphisme canonique*

$$\mathrm{Pic}\,\bar{G} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\bar{X}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}$-*modules*.

D'après Rosenlicht [32], l'application $\bar{k}[G]^* \to \bar{k}^* \times \hat{G}$, définie par $f \mapsto [f(e), f/f(e)]$, est un isomorphisme de $\mathcal{G}$-modules. Supposons $X=X_a$. Les groupes abéliens $\bar{k}[X]^*$ et $\bar{k}[G]^*$ sont alors identiques et l'action de $\mathcal{G}$ sur $\bar{k}[X]^*$ est l'action naturelle sur les constantes, tandis que sur un caractère f de $\bar{G}$ on trouve ${}^{s}f = [{}^{s}f(a_s^{-1})].{}^{s}f$; l'identité $\bar{k}[X]^*/\bar{k}^* \to \bar{k}[G]^*/\bar{k}^*$ est donc un morphisme de $\mathcal{G}$-modules. Si X est quelconque, le choix d'un point-base dans $\bar{X}$ détermine un k-isomorphisme $X \to X_a$, donc un isomorphisme $\psi : \bar{k}[X]^* \to \bar{k}[X_a]^*$ de $\mathcal{G}$-modules; le choix d'un autre point-base $x_o.g$ donne un isomorphisme ψ' et l'application $\psi'\circ\psi^{-1} : \bar{k}[X_a]^* \to \bar{k}[X_{a'}]^*$ est l'identité sur les constantes et transforme un caractère f de $\bar{G}$ en $f(g).f$; c'est donc l'identité modulo $\bar{k}^*$. La première assertion est ainsi démontrée. Il en résulte que le foncteur considéré est additif, ce qui permet de définir un morphisme canonique via le lemme 6.4. Il reste à vérifier qu'il rend commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \bar{k}[G]^*/\bar{k}^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{k}[X]^*/\bar{k}^* \arrow[dl] \\ & \hat{G} . & \end{tikzcd}$$

FACULTE DES SCIENCES BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUES ALGER

Cela revient à voir que les "identifications" de $\bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$ et $\bar{k}[G]^*/\bar{k}^*$ à $\hat{G}$ identifient i et s. Soit donc f un caractère de $\bar{G}$ et x_o un point-base dans $\bar{X}$. On trouve alors, g et h étant quelconques dans $\bar{G}$, $[s(f)](x_o hg, x_o h) = f(g)$ et $[i(\bar{f})](x_o hg, x_o h) = \bar{f}(x_o hg)/\bar{f}(x_o h)$ soit $f(hg)/f(h) = f(g)$.

Si $X = X_a$, les groupes abéliens Pic $\bar{X}$ et Pic $\bar{G}$ coïncident et si $s \in \mathcal{G}$ les deux actions de s sur un diviseur D diffèrent par une translation par a_s, si bien que, $\bar{G}$ étant une variété rationnelle, ${}^{s}D$ et ${}^{'s}D$ sont linéairement équivalents: les deux actions de $\mathcal{G}$ sur Pic $\bar{G}$ coïncident donc. Si X est quelconque, le choix d'un point-base définit un k-isomorphisme $X \to X_a$, donc un isomorphisme de $\mathcal{G}$-modules ψ : Pic $\bar{X} \to$ Pic $\bar{X}_a$ = Pic $\bar{G}$ et celui-ci est indépendant du point-base, car le changement de x_o en $x_o.g$ se traduit sur les diviseurs par une translation par g, donc par l'identité sur Pic $\bar{G}$, puisque $\bar{G}$ est rationnelle. Si X_1 et X_2 sont deux objets de $\mathcal{C}_k$, le morphisme Pic $\bar{X}_1 \times$ Pic $\bar{X}_2 \to$ Pic$(\bar{X}_1 \times \bar{X}_2)$ est un isomorphisme, puisque $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont des variétés rationnelles. Il reste à vérifier que le triangle

$$\begin{tikzcd} & \text{Pic } \bar{G} \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "s"] \\ \text{Pic } \bar{X} \arrow[r, "i"] & \text{Pic } \bar{X}\times\bar{X} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit x_o dans $\bar{X}$ et D un diviseur sur $\bar{G}$; alors $[s(D)](\bar{X}\times\{x_o\})$ coïncide avec $i.\theta(D)$, θ désignant l'inverse de ψ ; en effet θ est défini à partir du morphisme $x_o.g \mapsto g$ de $\bar{X}$ dans $\bar{G}$; on vérifie également que $[s(D)](\{x_o\}\times\bar{X}) = i.\theta(D)(\{x_o\}\times\bar{X})$, l'application $g \mapsto g^{-1}$ induisant le changement de signe dans Pic $\bar{G}$. Comme un diviseur sur $\bar{X}\times\bar{X}$ est déterminé par ses restrictions à $\bar{X}\times\{x_o\}$ et $\{x_o\}\times\bar{X}$, on obtient $s(D) = i.\theta(D)$ et θ coïncide avec ψ.

Lemme 6.6.- Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps k. On a la suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(k,\hat{G}) \to \mathrm{Pic}\, G \to (\mathrm{Pic}\, \bar{G})^{\mathcal{G}} \to H^2(k,\hat{G}) \to \mathrm{Br}_a G \to H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{G}) \to H^3(k,\hat{G}).$$

En particulier, si T est un k-tore,

$$\mathrm{Pic}\, T = H^1(k,\hat{T}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Br}_a T = H^2(k,\hat{T}).$$

Si G est un groupe semi-simple connexe,

$$\mathrm{Pic}\, G = (\mathrm{Pic}\, \bar{G})^{\mathcal{G}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Br}_a G = H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{G}),$$

ainsi, pour G semi-simple simplement connexe,

$$\mathrm{Pic}\, G = \mathrm{Br}_a G = 0.$$

Enfin, si G est un groupe réductif spécial,

$$\mathrm{Pic}\, G = 0, \qquad \mathrm{Br}\, G = H^2(k,\hat{G}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_\omega(G) = 0,$$

cette dernière égalité sur un corps de nombres.

La suite exacte initiale n'est autre que la suite exacte (ii) de 6.3, moyennant le lemme de Rosenlicht $U(\bar{G}) = \hat{G}$ (cf. 6.5). Les "égalités" ultérieures sont des corollaires immédiats de cette suite, de la nullité de $\mathrm{Pic}\, \bar{T}$ pour un tore, de la trivialité de $\hat{G}$ pour un groupe semi-simple connexe, de la nullité de $\mathrm{Pic}\, \bar{G}$ pour un groupe semi-simple simplement connexe (cf. [9] par exemple) et, enfin, du fait que, pour G réductif spécial, $\hat{G}$ soit un $\mathcal{G}$-module de permutation et de (1.9.2).

Remarque 6.6.1.- L'application $\mathrm{Pic}\, G \to (\mathrm{Pic}\, \bar{G})^{\mathcal{G}}$ n'est pas toujours surjective! Par exemple, pour $G = [R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}SL_2 \times R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}G_m]/B$ avec $B = R\mu_2$, plongé via $x \mapsto [x,N(x)]$, on trouve l'application 0, alors que les deux termes valent $\mathbb{Z}_2$.

Lemme 6.7.- Soit k un corps tel que $H^3(k,G_m) = 0$, par exemple un corps global ou local de dimension 1. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur k. Si X est un k-espace principal homogène sous G, la suite exacte

$$E(X) \qquad (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathcal{G}} \to H^2(k,U(\bar{X})) \to \mathrm{Br}_a X \to H^1(k,\mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k,U(\bar{X}))$$

est additive en X et canoniquement isomorphe à $E(G)$. En particulier, le

<u>foncteur</u> Br_a <u>est additif et le morphisme canonique</u>

$$Br_a G \to Br_a X$$

<u>est un isomorphisme</u>.

La suite exacte $E(X)$ est celle du lemme 6.3 (iii). On sait déjà, par 6.5, que les foncteurs $X \mapsto U(\bar{X})$ et $X \mapsto \mathrm{Pic}\,\bar{X}$, définis sur $\mathcal{C}_k$, à valeurs dans ($\mathcal{G}$-mod), sont additifs. Il en est donc de même des foncteurs $\mathcal{C}_k \longrightarrow (Ab)$, associant à X l'un quelconque des termes de la suite $E(X)$ autres que $Br_a X$. Il en est par suite de même de $Br_a X$. L'additivité de E définit alors, par 6.4, un morphisme canonique $E(G) \to E(X)$ qui est un isomorphisme, puisque, d'après 6.5, c'en est déjà un au niveau des quatre termes autres que $Br_a G \to Br_a X$.

§7.- <u>Comportement du groupe de Brauer par isogénie</u>.

Pour achever les calculs entrepris au § précédent, spécialement dans le cas semi-simple, il faut étudier le comportement de Pic et Br_a dans une isogénie. On indique également dans ce § le comportement de Br, bien que cela soit superflu pour la suite.

Etant donné un groupe profini $\mathcal{G}$, un sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ et un $\mathcal{G}$-module continu M, on note $H^p(\mathcal{G},\mathcal{H};M)$ les groupes de cohomologie relative de $\mathcal{G}$ modulo $\mathcal{H}$ à valeurs dans M (<u>cf</u>. [1]): ce sont les groupes d'homologie du complexe inhomogène $C^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{H};M)$ des cochaînes continues de $\mathcal{G}$ modulo $\mathcal{H}$ à valeurs dans M, complexe défini par $C^p(\mathcal{G},\mathcal{H};M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}[(\mathcal{G}/\mathcal{H})^p, M]$ et par la formule donnant d:

$$(df)(\gamma_1,\dots,\gamma_{p+1}) = g_1.f(g_1^{-1}\gamma_2,\dots,g_1^{-1}\gamma_{p+1}) + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j.f(\gamma_1,\dots,\hat{\gamma}_j,\dots,\gamma_{p+1})$$

avec $g_1\mathcal{H} = \gamma_1$; il revient au même de considérer le complexe homogène défini par $\Gamma^p(\mathcal{G},\mathcal{H};M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}[(\mathcal{G}/\mathcal{H})^{p+1}, M]$ et $(df)(\gamma_0,\dots,\gamma_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j f(\gamma_0,\dots,\hat{\gamma}_j,\dots,\gamma_{p+1})$

Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}$, on a également une description simple "à la Grothendieck" (<u>cf</u>. [35], chap.VI, §2): si $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ est la $\mathcal{G}$-topologie, définie par la catégorie des $\mathcal{G}$-ensembles finis et les familles finies $\{E_i \to E\}$ couvrantes, M définit un faisceau sur $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ et $H^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{H};M)$ n'est autre que la cohomologie de Čech $\check{H}^\bullet(\{\mathcal{G}/\mathcal{H} \to 1\}, M)$. Pour $\mathcal{H}$ invariant dans $\mathcal{G}$, $H^\bullet(\mathcal{G},\mathcal{H};M)$ n'est autre que la cohomologie $H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{H}, M^{\mathcal{H}})$.

Lemme 7.1.- Soient $\pi = B \rtimes \mathcal{G}$ un groupe profini, produit semi-direct d'un sous-groupe invariant fini B et d'un sous-groupe $\mathcal{G}$, et M un π-module continu et B-trivial.

(i) $H^1(\pi,M) = H^1(\mathcal{G},M) \oplus H^1(B,M)^{\mathcal{G}}$

$H^1(\pi,\mathcal{G};M) = H^1(B,M)^{\mathcal{G}}$.

(ii) On a la suite exacte naturelle

$$0 \to H^2(\mathcal{G},M) \oplus H^1[\mathcal{G},H^1(B,M)] \xrightarrow{(\mathrm{Inf},\varphi)} H^2(\pi,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(B,M),$$

où φ associe à la classe du 1-cocycle $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{G}}$ la classe du 2-cocycle ζ défini par $\zeta_{b\sigma,c\tau} = -\sigma(\lambda_\tau)(b) = \lambda_\sigma(b) - \lambda_{\sigma\tau}(b)$.

(iii) Si $H^1(\mathcal{G}',M) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$, on a les suites exactes naturelles

$$0 \to H^2(\pi,\mathcal{G};M) \to H^2(\pi,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(\mathcal{G},M)$$

$$0 \to H^1[\mathcal{G},H^1(B,M)] \to H^2(\pi,\mathcal{G};M) \to H^2(B,M).$$

(iv) Si $H^1(B,M) = 0$, par exemple si M est sans $\mathbb{Z}$-torsion, on a un plongement naturel

$$H^2(\pi,\mathcal{G};M) \hookrightarrow H^2(B,M).$$

Pour un π-module continu M quelconque, on a la suite spectrale d'Hochschild-Serre, associée à l'égalité $\pi/B = \mathcal{G}$,

(I) $$H^p[\mathcal{G},H^q(B,M)] \Rightarrow H^n(\pi,M)$$

et la suite spectrale de Čech relative au revêtement $\pi/\mathcal{G} \to 1$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ et au faisceau défini par M (cf. [35] loc. cit. th. 41)

(II) $$H^p[\pi,\mathcal{G};\mathcal{H}^q(M)] \Rightarrow H^n(\pi,M),$$

où $\mathcal{H}^q(M)$ désigne le préfaisceau prenant sur π/π', pour π' sous-groupe ouvert de π, la valeur $H^q(\pi',M)$. Précisons que, dans (I), les edge $E_2^{n,0} \to E^n$ sont les morphismes d'inflation relatifs à $\pi \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ et que les edge $E^n \to E_2^{0,n}$ sont les morphismes de restriction relatifs à $B \hookrightarrow \pi$

La suite des termes de bas degré de (I) s'écrit, si M est B-trivial,

$$0 \to H^1(\mathcal{G},M) \to H^1(\pi,M) \to H^1(B,M) \to H^2(\mathcal{G},M) \to \ker[H^2(\pi,M) \to H^2(B,M)] \to H^1(\mathcal{G},H^1(B,M)).$$

En outre, M étant B-trivial, les edge $E_2^{n,0} \to E^n$ possèdent une rétraction don-

née par le morphisme de restriction relatif à $\mathfrak{g} \hookrightarrow \pi$, d'où $E_2^{n,0} \xhookrightarrow{\mathrm{Inf}} E^n$. On en déduit, pour n = 2, la nullité de $E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$, ce qui, joint à l'existence d'une rétraction $E^1 \to E_2^{1,0}$, donne $E^1 = E_2^{1,0} \oplus E_2^{0,1}$, soit le début de (i). De même, $E_2^{3,0}$ se plonge, par inflation, dans E^3, donc dans $E_3^{3,0}$, d'où la nullité de la flèche $E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$ et la suite exacte $0 \to E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1} \to 0$, scindée d'après l'existence d'une rétraction $E^2 \to E_2^{2,0}$, d'où la suite exacte indiquée en (ii). On vérifie que, si $\alpha \in Z^2(\pi, M)$ est un 2-cocycle normalisé, dont la restriction à B soit le bord d'une application β de B dans M, la flèche $\ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1}$ de la suite des termes de bas degré associe à la classe de α la classe du 1-cocycle $\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{g}}$ défini par

$$\lambda_\sigma(b) = \beta(b) - \sigma.\beta[\sigma^{-1}(b)] + \alpha(\sigma, \sigma^{-1} b \sigma) - \alpha(b, \sigma).$$

On voit aisément alors que la section $\varphi : E_2^{1,1} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2})$ correspondant à la rétraction $E^2 \xrightarrow{\mathrm{Res}} E_2^{0,2}$ associe à la classe du 1-cocycle λ la classe du 2-cocycle $\zeta \in Z^2(\pi, M)$ défini, pour $b, c \in B$ et $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$, par

$$\zeta_{b\sigma, c\tau} = -\sigma(\lambda_\tau)(b) = \lambda_\sigma(b) - \lambda_{\sigma\tau}(b).$$

La suite exacte des termes de bas degré de (II) s'écrit

$$0 \to H^1(\pi, \mathfrak{g}; M) \to H^1(\pi, M) \to H^0[\pi, \mathfrak{g}; \mathcal{H}^1(M)] \to H^2(\pi, \mathfrak{g}; M) \to \ker[H^2(\pi, M) \to H^2(\mathfrak{g}, M)]$$
$$\to H^1[\pi, \mathfrak{g}; \mathcal{H}^1(M)] \to H^3(\pi, \mathfrak{g}; M).$$

Comme, par définition, $H^0[\pi, \mathfrak{g}; \mathcal{H}^1(M)]$ est un sous-groupe de $H^1(\mathfrak{g}, M)$, que les edge $E^n \to E_2^{0,n}$ sont induits par la restriction de π à $\mathfrak{g}$ et que, d'après le début de (i), la restriction $H^1(\pi, M) \to H^1(\mathfrak{g}, M)$ est surjective, on obtient la suite exacte

$$0 \to H^1(\pi, \mathfrak{g}; M) \to H^1(\pi, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(\mathfrak{g}, M) \to 0,$$

d'où, d'après le début de (i), $H^1(\pi, \mathfrak{g}; M) = H^1(B, M)^{\mathfrak{g}}$. Cela se voit d'ailleurs très facilement sur la définition en termes de cocycles. On a donc ensuite la suite exacte

$$0 \to H^2(\pi, \mathfrak{g}; M) \to \ker H^2(\pi, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(\mathfrak{g}, M) \to H^1[\pi, \mathfrak{g}; \mathcal{H}^1(M)].$$

L'hypothèse $H^1(\mathfrak{g}', M) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ implique la nullité du préfaisceau $\mathcal{H}^1(M)$ sur le système simplicial des $(\pi/\mathfrak{g})^p$, d'où

$$H^2(\pi, \mathfrak{g}; M) = \ker[H^2(\pi, M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(\mathfrak{g}, M)].$$

Il est immédiat sur l'expression de ζ que $\mathrm{Res}_{\pi,\mathfrak{g}} \circ \varphi = 0$, si bien que φ se factorise à travers $H^2(\pi,\mathfrak{g};M)$. Comme $\mathrm{Res}_{\pi,\mathfrak{g}} \circ \mathrm{Inf}_{\mathfrak{g},\pi} = \mathrm{id}_{H^2(\mathfrak{g},M)}$, on obtient finalement d'après la suite exacte (ii) la nouvelle suite exacte

$$0 \to H^1[\mathfrak{g},H^1(B,M)] \to H^2(\pi,\mathfrak{g};M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(B,M).$$

Si, enfin, $H^1(B,M) = 0$, la flèche $H^1(\pi,M) \to H^0[\pi,\mathfrak{g};\mathcal{H}^1(M)]$ figurant dans la suite des termes de bas degré de (II) est un isomorphisme, car, composée avec l'injection naturelle $H^0[\pi,\mathfrak{g};\mathcal{H}^1(M)] \hookrightarrow H^1(\mathfrak{g},M)$, c'est la restriction de π à $\mathfrak{g}$, qui est un isomorphisme d'après (i). On tire donc de cette suite des termes de bas degré la suite exacte

$$0 \to H^2(\pi,\mathfrak{g};M) \to H^2(\pi,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(\mathfrak{g},M).$$

L'hypothèse implique encore, d'après (I), l'exactitude de la suite exacte

$$0 \to H^2(\mathfrak{g},M) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(\pi,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(B,M).$$

Comme $\mathrm{Res}_{\pi,\mathfrak{g}} \circ \mathrm{Inf}_{\mathfrak{g},\pi} = \mathrm{id}_{H^2(\mathfrak{g},M)}$, on déduit de ces deux dernières suites exactes que l'application composée $H^2(\pi,\mathfrak{g};M) \to H^2(\pi,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(B,M)$ est une injection.

Théorème 7.2.- <u>Soit</u> $G' \to G$ <u>une</u> k-<u>isogénie de groupes algébriques linéaires connexes définis sur un corps</u> k <u>de caractéristique</u> 0. <u>Soit</u> B <u>le noyau de cette isogénie</u>, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\bar{k}/k)$ <u>et</u> π <u>le produit semi-direct</u> $B \rtimes \mathfrak{g}$. <u>On a les suites exactes naturelles</u>

(i) $$0 \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \hat{B}(k) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Pic}\, G \to \mathrm{Pic}\, G' \to H^2(\pi,\mathfrak{g};\bar{k}[G']^*) \to \ker(\mathrm{Br}G \to \mathrm{Br}G')$$

(ii) $$0 \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \hat{B}(k) \to \mathrm{Pic}\, G \to \mathrm{Pic}\, G' \to H^1(k,\hat{B}) \to \mathrm{Br}_1 G \to \mathrm{Br}_1 G'$$

(iii) $$0 \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \hat{B}(k) \to \mathrm{Pic}\, G \to \mathrm{Pic}\, G' \to H^1(k,\hat{B}) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Br}_a G \to \mathrm{Br}_a G'.$$

<u>Dans le cas d'une isogénie</u> $T' \to T$ <u>de tores, cette suite</u> (iii) <u>n'est autre, à des signes près, que le début de la suite exacte de cohomologie</u>

(iv) $$0 \to \hat{T}(k) \to \hat{T}'(k) \to \hat{B}(k) \to H^1(k,\hat{T}) \to H^1(k,\hat{T}') \to H^1(k,\hat{B}) \to H^2(k,\hat{T}) \to H^2(k,\hat{T}')$$

<u>tirée de la suite</u> $0 \to \hat{T} \to \hat{T}' \to \hat{B} \to 0$, via <u>les isomorphismes</u> $\mathrm{Pic}\, T \xleftarrow{\sim} H^1(k,\hat{T}),\ldots,$ $\mathrm{Br}_a T \xleftarrow{\sim} H^2(k,\hat{T}),\ldots$

Il s'agit des isomorphismes du lemme 6.6. Notons tout de suite que les suites (ii) et (iii) sont évidemment équivalentes, d'après les décompositions $Br_1 G = Br\, k \oplus Br_a G$, et de même pour G', données par l'élément neutre de G et G'.

Nous allons voir que la suite exacte (i) n'est autre que la suite des termes de bas degré de la suite spectrale de Čech relative, en cohomologie étale, au revêtement $G' \to G$ et au faisceau G_m, à savoir

$$\text{(III)} \qquad \check{H}^p[G'/G, \mathcal{H}^q(G_m)] \Longrightarrow H^n(G, G_m),$$

où $\mathcal{H}^q(G_m)$ est le préfaisceau $U \mapsto H^q(U, G_m)$. La suite exacte des termes de bas degré s'écrit <u>a priori</u>

$$0 \to H^1(\pi, \mathcal{G}; \bar{k}[G']^\times) \to \mathrm{Pic}\, G \to \check{H}^0(G'/G, \underline{\mathrm{Pic}}) \to H^2(\pi, \mathcal{G}; \bar{k}[G']^\times) \to \ker(\mathrm{Br}\, G \to \mathrm{Br}\, G') \to \check{H}^1(G'/G, \underline{\mathrm{Pic}}) \to \dots$$

étant donné que, pour le faisceau G_m, la cohomologie de Cech $\check{H}^\bullet(G'/G, G_m)$ s'identifie à la cohomologie relative $H^\bullet(\pi, \mathcal{G}; \bar{k}[G']^\times)$.

Montrons d'abord que $\check{H}^0(G'/G, \underline{\mathrm{Pic}}) = \mathrm{Pic}\, G'$. C'est en effet le noyau de la double flèche $\mathrm{Pic}\, G' \rightrightarrows \mathrm{Pic}\, G' \times_G G'$, ou encore de $\mathrm{Pic}\, G' \rightrightarrows \prod_{B/\mathcal{G}} \mathrm{Pic}\, G'_{k(b)}$, où les deux flèches se déduisent de $G'_{k(b)} \to G'$ et de la composée avec la translation par b dans $G'_{k(b)}$. Comme la $k(b)$-variété $G'_{k(b)}$ est unirationnelle, cette translation induit l'identité sur $\mathrm{Pic}\, G'_{k(b)}$ et, par suite, la flèche $d_0 : \mathrm{Pic}\, G' \to \mathrm{Pic}\, G' \times_G G'$ est nulle.

Calculons ensuite les termes $H^1(\pi, \mathcal{G}; \bar{k}[G']^\times)$ et $H^2(\pi, \mathcal{G}; \bar{k}[G']^\times)$ grâce à la suite exacte de π-modules

$$0 \to \bar{k}^\times \to \bar{k}[G']^\times \to \hat{G}'^{\mathcal{G}} \to 0$$

où $\bar{k}^\times$ et $\hat{G}'^{\mathcal{G}}$ sont les π-modules B-triviaux de $\mathcal{G}$-modules sous-jacents les $\mathcal{G}$-modules naturels $\bar{k}^\times$ et $\hat{G}'$ (c'est le lemme de Rosenlicht auquel on ajoute la remarque selon laquelle B agit trivialement sur les constantes et, <u>via</u> ${}^b\chi = \chi(b)\chi$, sur un caractère χ de G').

La nullité de $H^1(\mathcal{G}', \bar{k}^\times)$ pour tout sous-groupe $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ montre que la suite exacte ci-dessus induit sur le système simplicial $\{\pi/\mathcal{G} \to 1\}$ une suite exacte de préfaisceaux (<u>voir</u> aussi [1] th. 5.4), ce qui donne donc une suite exacte longue par application du foncteur $H^\bullet(\pi, \mathcal{G}; \ )$:

$$0 \to k^\times \to k[G]^\times \to \hat{G}'(k) \to H^1(\pi,\mathcal{G};\bar{k}^\times) \to H^1(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) \to H^1(\pi,\mathcal{G};\hat{G}'^{\natural}) \to H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}^\times)$$
$$\to H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) \to H^2(\pi,\mathcal{G};\hat{G}'^{\natural}).$$

Or, d'après le lemme 7.1(i), $H^1(\pi,\mathcal{G};\bar{k}^\times) = \hat{B}(k)$ et $H^1(\pi,\mathcal{G};\hat{G}'^{\natural}) = 0$ car $\hat{G}'$ est sans torsion, d'où la suite exacte

$$0 \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \hat{B}(k) \to H^1(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) \to 0.$$

Ceci achève de prouver (i).
On a d'autre part le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}^\times) & \to & H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) & \to & H^2(\pi,\mathcal{G};\hat{G}'^{\natural}) \\ & \varphi\downarrow & & \psi\downarrow & & \hookrightarrow \\ 0 \to & H^2(B,\bar{k}^\times) & \to & H^2(B,\bar{k}[G']^\times) & \to & H^2(B,\hat{G}'^{\natural}). \end{array}$$

La verticale de droite est injective d'après le lemme 7.1(iv), puisque $\hat{G}'$ est sans torsion, d'où $\ker\varphi \xrightarrow{\approx} \ker\psi$. La valeur de $\ker\varphi$ est donnée par le lemme 7.1 (iii), ce qui donne finalement la suite exacte

$$0 \to H^1(k,\hat{B}) \to H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) \xrightarrow{\psi} H^2(B,\bar{k}[G']^\times).$$

La suite exacte (i) relative à $\bar{G}' \to \bar{G}$ est la suite des termes de bas degré de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^p[B,H^q(\bar{G}',G_m)] \Rightarrow H^n(\bar{G},G_m)$$

et on obtient ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to & \hat{G}(k) & \to & \hat{G}'(k) & \to & \hat{B}(k) & \to & \mathrm{Pic}\ G & \to & \mathrm{Pic}\ G' & \xrightarrow{\omega} H^2(\pi,\mathcal{G};\bar{k}[G']^\times) \to \ker(\mathrm{Br}\ G \to \mathrm{Br}\ G') \\ & \hookrightarrow & & \hookrightarrow & & \hookrightarrow & & \downarrow & & \downarrow & \qquad\qquad \downarrow\psi \qquad\qquad \downarrow\lambda \\ 0 \to & \hat{G}(\bar{k}) & \to & \hat{G}'(\bar{k}) & \to & \hat{B}(\bar{k}) & \to & \mathrm{Pic}\ \bar{G} & \to & \mathrm{Pic}\ \bar{G}' & \xrightarrow{\bar{\omega}} H^2(B,\bar{k}[G']^\times) \to \ker(\mathrm{Br}\ \bar{G} \to \mathrm{Br}\ \bar{G}'). \end{array}$$

Mais $\bar{\omega}$: $\mathrm{Pic}\ \bar{G} \to \mathrm{Pic}\ \bar{G}'$ est surjective: tout d'abord, la division de $\bar{G}'$ par son radical unipotent ne modifie pas $\bar{\omega}$; on peut ensuite supposer que le groupe réductif $\bar{G}'$ possède un revêtement spécial $H \to \bar{G}'$ de groupe A' (cf. 1.10); si A est le noyau de $H \to \bar{G}$, on obtient alors que $\bar{\omega}$ n'est autre que l'application induite par la restriction $A(k) \to A'(k)$ qui est surjective:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \hat{G}(\bar{k}) & \to & \hat{H}(\bar{k}) & \to & \hat{A}(\bar{k}) & \to & \mathrm{Pic}\ \bar{G} & \to 0 \\ & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow\bar{\omega} & \\ 0 \to & \hat{G}'(\bar{k}) & \to & \hat{H}(\bar{k}) & \to & \hat{A}'(\bar{k}) & \to & \mathrm{Pic}\ \bar{G}' & \to 0 \end{array}$$

étant donné que Pic H = O. Dès lors, ω se factorise par le noyau de ψ, égal (cf. ci-dessus) à $H^1(k,\hat{B})$, et il suffit d'observer en outre, pour obtenir (ii), que le noyau de λ est aussi le noyau de $Br_1G \to Br_1G'$ et, enfin, que l'application

$$H^1(k,\hat{B}) \xrightarrow{\theta} \ker(Br_1G \to Br_1G')$$

ainsi obtenue est surjective. On peut d'abord supposer G' réductif, car, si U est son radical unipotent, $U \cap B = O$, la division de G' par U et G par U ne modifie pas θ (noter simplement que, si $U = G_a$, la fibration par U étant triviale, $G' = k[G'/U][t]$, d'où $Br'G'/U = Br'G'$ par un argument analogue à celui de [3] prop. 7.7 pour le groupe de Brauer ordinaire, et de même $Br'G/U = Br'G$). On peut ensuite supposer que le groupe réductif connexe G' possède un revêtement spécial $H \to G'$ de groupe A': il en est en effet ainsi de $G'^m \times T$ pour $m > O$ et T convenables (cf. 1.10) et $\ker(Br_1G^m \times T \to Br_1G'^m \times T) = \ker(Br_1G \to Br_1G')^m$ en vertu de l'additivité de Br_a (lemme 6.7). Soit alors A le noyau de $H \to G$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
O \to & H^1(k,\hat{A}') & \to & \ker(Br_1G' & \to & Br_1H) & \to O \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
O \to & H^1(k,\hat{A}) & \to & \ker(Br_1G & \to & Br_1H) & \to O \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & H^1(k,\hat{B}) & \xrightarrow{\theta} & \ker(Br_1G & \to & Br_1G') &
\end{array}$$

où les lignes et la colonne de gauche sont exactes: Pic $H_K = O$ pour toute extension K/k et la suite $O \to \hat{B} \to \hat{A} \to \hat{A}' \to O$ est exacte. D'où la surjectivité de θ.

Montrons enfin la coïncidence entre (iii) et (iv) dans le cas d'une isogénie de tores. La commutativité des carrés

$$\begin{array}{ccc}
H^1(k,\hat{T}) & \to & H^1(k,\hat{T}') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Pic } T & \to & \text{Pic } T'
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
H^2(k,\hat{T}) & \to & H^2(k,\hat{T}') \\
\downarrow & & \downarrow \\
Br_aT & \to & Br_aT'
\end{array}$$

résulte de la fonctorialité (contravariante) de la suite exacte du lemme 6.6. La coïncidence entre les deux débuts jusqu'à $\hat{B}(k)$ est évidente. Montrons que les triangles

$$(7.2.1) \qquad \begin{array}{ccc}
 & \partial \nearrow & H^1(k,\hat{T}) \\
\hat{B}(k) & & \downarrow \zeta \\
 & \gamma \searrow & \text{Pic } T
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & -\partial \nearrow & H^2(k,\hat{T}) \\
H^1(k,\hat{B}) & & \downarrow \nu \\
 & \theta \searrow & Br_aT
\end{array}$$

où les verticales sont les isomorphismes du lemme 6.6, les ascendantes les flèches de (iv) et les descendantes les flèches de (iii), sont commutatifs. Considérons les suites spectrales d'Hochschild-Serre

$$\text{(IV)} \qquad H^p(\bar{T}'/T, \mathcal{H}^q(G_m)] \Rightarrow H^n(T, G_m)$$

$$\text{(V)} \qquad H^p(\bar{T}/T, \mathcal{H}^q(G_m)] \Rightarrow H^n(T, G_m).$$

On a des morphismes d'inflation (III) → (IV) et (V) → (IV) induisant l'identité au but et donc les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
H^1(\pi,\mathfrak{g};\bar{k}[T']^\times) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^1(\pi,\bar{k}[T']^\times) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Pic}\ T \\
H^1(\mathfrak{g},\bar{k}[T]^\times) \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\zeta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^2(\pi,\mathfrak{g};\bar{k}[T']^\times) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^2(\pi,\bar{k}[T']^\times) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Br}_a T \\
H^2(\mathfrak{g},\bar{k}[T]^\times) \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}
.$$

Il suffit donc de vérifier que les flèches $\hat{B}(k) \to H^1(\mathfrak{g},\hat{T})$ et $H^1(k,\hat{B}) \to H^2(k,\hat{T})$ définies par les diagrammes ci-après coïncident avec les bords ∂ définis par la suite exacte $0 \to \hat{T} \to \hat{T}' \to \hat{B} \to 0$:

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(\pi,\bar{k}^\times) \arrow[d, "\iota"] \arrow[r, shift left, "\varsigma"] & H^1(B,\bar{k}^\times)^{\mathfrak{g}} = \hat{B}(k) \arrow[l, shift left, "\rho"] \\
H^1(\mathfrak{g},\hat{T}) \arrow[r, "i"] & H^1(\mathfrak{g},\bar{k}[T]^\times) \arrow[r, "j"] & H^1(\pi,\bar{k}[T']^\times)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(\pi,\bar{k}^\times) \arrow[d, "w"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & H^1(k,\hat{B}) \arrow[l, shift left, "\gamma"] \\
H^2(k,\hat{T}) \arrow[r, "\lambda"] & H^2(k,\bar{k}[T]^\times) \arrow[r, "\mu"] & H^2(\pi,\bar{k}[T']^\times).
\end{tikzcd}$$

Rappelons en effet les définitions de γ et θ : l'identification du lemme 7.1 (i) est donnée par la composée $H^1(\pi,\mathfrak{g};\bar{k}^\times) \to H^1(\pi,\bar{k}^\times) \to H^1(B,\bar{k}^\times) = \hat{B}(k)$ et la flèche γ n'est autre que $\alpha\iota\varsigma$; de même, d'après le lemme 7.1 (iii), la flèche composée $H^1(k,\hat{B}) \to H^2(\pi,\mathfrak{g};\bar{k}^\times) \to H^2(\pi,\bar{k}^\times)$ n'est autre que l'application φ du lemme 7.1 (ii) si bien que θ n'est autre que la composée $\beta w \varphi$.

Montrons que $\gamma = \zeta\partial$. Soient $\chi \in \hat{B}(k)$ et ξ un relèvement dans $\hat{T}'(\bar{k})$. Alors, $\varsigma(\chi)_{b\sigma} = \chi(b)$, tandis que $[ji\partial(\chi)]_{b\sigma} = \sigma.\xi - \xi$. Or, $(\partial\xi)_{b\sigma} = (b\sigma).\xi - \xi = (\sigma.\xi)(b^{-1}) + \sigma\xi - \xi = -\chi(b) + \sigma\xi - \xi$, puisque ξ est un caractère et que χ est invariant par $\mathfrak{g}$. Les cocycles $\iota\varsigma(\chi)$ et $ji\partial(\chi)$ sont donc homologues dans $Z^1(\pi,\bar{k}[T']^\times)$.

On conclut alors grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(k,\hat{T}) \arrow[dr, "\zeta"] \arrow[d, hook, "ji"] & \\
\hat{B}(k) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "\iota\zeta"'] & H^1(\pi,\bar{k}[T']^\times) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathrm{Pic}\ T
\end{tikzcd}$$

dont on vient de voir la commutativité du triangle de gauche, celle du triangle de droite étant donnée par l'inflation (V) → (IV).

Montrons que $\theta = -\upsilon\partial$. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(k,\hat{T}) \arrow[dr, "\upsilon"] \arrow[d, "\mu\lambda"] & \\
H^1(k,\hat{B}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "w\varphi"'] & H^2(\pi,\bar{k}[T']^\times) \arrow[r, "\beta"'] & \mathrm{Br}_a T
\end{tikzcd}$$

dont le triangle de droite commute grâce à l'inflation (V) → (IV) et où $\theta = \beta w\varphi$. Il suffit donc de prouver que $w\varphi = -\mu\lambda\partial$. Soit χ un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans B; l'image de sa classe par $w\varphi$ est la classe du 2-cocycle f avec (lemme 7.1 (ii))

$$f_{b\sigma,c\tau} = \sigma(\chi_\tau)(b^{-1}) = \chi_\sigma(b) - \chi_{\sigma\tau}(b).$$

Prolongeons chaque χ_σ en un caractère ξ_σ de T'. Alors, $\varepsilon = \mathrm{Inf}(d\xi)$ est défini par

$$\varepsilon_{b\sigma,c\tau} = \sigma\xi_\tau - \xi_{\sigma\tau} + \xi_\sigma$$

et sa classe est l'image par $\mu\lambda\partial$ de la classe de (χ_σ). Considérons la 1-cochaîne h de π à valeurs dans $\bar{k}[T']^\times$ définie par $\mathrm{Inf}(\xi)$. On obtient

$$(dh)_{b\sigma,c\tau} = b\sigma(\xi_\tau) - \xi_{\sigma\tau} + \xi_\sigma = \varepsilon_{b\sigma,c\tau} + b\sigma(\xi_\tau) - \sigma(\xi_\tau).$$

Comme $\sigma(\xi_\tau)$ est un caractère sur T', la fonction $b\sigma(\xi_\tau) - \sigma(\xi_\tau)$ est la fonction constante $-\sigma(\xi_\tau)(b) = -\sigma(\chi_\tau)(b) = f_{b\sigma,c\tau}$, ce qui montre que les 2-cocycles ε et $-f$ sont homologues dans $Z^2(\pi,\bar{k}[T']^\times)$.

Il reste à vérifier la commutativité du triangle

$$\begin{tikzcd}
H^1(k,\hat{T}') \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,\hat{B}) \\
\mathrm{Pic}\ T' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

mais, comme elle n'intervientpas dans la suite, elle est laissée en exercice.

Corollaire 7.3.- <u>Une</u> k-<u>isogénie spéciale de groupes réductifs</u> $G' \to G$ <u>de noyau</u> B <u>définit des suites exactes</u>

(7.3.1) $$0 \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \hat{B}(k) \to \mathrm{Pic}\ G \to 0$$

(7.3.2) $$0 \to H^1(k,\hat{B}) \to \mathrm{Br}_a G \to \mathrm{Br}_a G'$$

<u>et, si en outre</u> k <u>est un corps de nombres,</u>

(7.3.3) $$Ш(G) = Ш^1(k,\hat{B}) \quad \underline{\text{et}} \quad Ш_\omega(G) = Ш^1_\omega(k,\hat{B}).$$

<u>En particulier, si</u> G <u>est semi-simple connexe de groupe fondamental</u> B,

(7.3.4) $$\mathrm{Pic}\ G = \hat{B}(k) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{Br}_a G = H^1(k,\hat{B}).$$

D'après le lemme 6.6, si G' est le produit d'un k-tore quasi-trivial et d'un groupe semi-simple simplement connexe, Pic G' = 0 et $\mathrm{Br}_a G' = H^2(k,\hat{G}')$ et, sur un corps de nombres, $Ш_\omega(G') = 0$. Les diverses assertions ci-dessus résultent alors de la suite exacte du théorème 7.2. Notons que le calcul de Pic G pour G semi-simple connexe est déjà dans [40], voir aussi pour Pic, dans le cas algébriquement clos, par exemple [9].

<u>Exercice</u> 7.4.- Vérifier qu'étant donné une k-isogénie $G' \to G$ de noyau B, le triangle

$$\begin{tikzcd} H^1(k,\hat{B}) \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\theta"'] & & H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{G}) \\ & \mathrm{Br}_a G \arrow[ur, "\circ"'] & \end{tikzcd}$$

qu'elle définit commute au signe près: χ est l'application déduite du morphisme $\hat{B} \to \mathrm{Pic}\ \bar{G}$ indiqué en 7.2 (i), θ est le morphisme figurant en 7.2 (iii) et $\circ$ est celui figurant dans la suite exacte du lemme 6.6. En déduire que, pour une k-isogénie $G' \to G$ de groupes semi-simples connexes, de noyau B, la suite exacte 7.2 (iii) n'est autre, moyennant les identifications du corollaire 7.3 ci-dessus et à des signes près, que la suite exacte de cohomologie

(v) $$0 \to \hat{B}(k) \to \hat{\pi}_1(G)(k) \to \hat{\pi}_1(G')(k) \to H^1(k,\hat{B}) \to H^1(k,\hat{\pi}_1(G)) \to H^1(k,\hat{\pi}_1(G')),$$

déduite de la suite exacte de k-groupes finis

$$0 \to \hat{B} \to \hat{\pi}_1(G) \to \hat{\pi}_1(G') \to 0.$$

Cette "identification" n'est pas utilisée dans la suite.

§8.- Approximation, principe de Hasse et groupe de Brauer.

Commençons par évaluer $Ш(G)$ en fonction de Br G, suivant une méthode inspirée de Manin (cf. [25], [26] §41).

Proposition 8.1.- Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini le corps de nombres k. Il existe un accouplement naturel

$$Ш(G) \times B(G) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{8.1.1}$$

fonctoriel en G.

Cela signifie que, pour tout k-morphisme $G' \to G$, le carré ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Ш(G) & \times & B(G) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \uparrow & & \downarrow & & \| \\ Ш(G') & \times & B(G') & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

La définition utilise essentiellement l'identification $Br_a X = Br_a G$ obtenue en 6.7 pour un k-espace principal homogène X sous G. Soient ξ un élément de $Ш(G)$ et β un élément de $B(G)$. On peut représenter ξ par un espace principal homogène X sous G et β par un élément b de $Br_1 X$ puisque $Br_a G = Br_a X$. Comme β est locale trivial, chaque b_v appartient à $Br_0(X_v)$ qui s'identifie à Br k_v, étant donné que l'hypothèse $\xi \in Ш(G)$ implique $X(k_v) \neq \emptyset$. On obtient ainsi, d'après le lemme 6.2, un élément de $\coprod$ Br k_v et la somme des invariants locaux ainsi obtenus est l'élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qu'on associe au couple (ξ,β).

Il reste à voir que cet élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ainsi obtenu ne dépend pas des divers choix effectués: modifier b consiste à lui ajouter un élément de $Br_0 X$, image d'un certain b' appartenant à Br k; or la somme des invariants locaux de b' est nulle. Si l'on modifie X en X', il existe un k-isomorphisme $X' \xrightarrow{f} X$, ce qui permet de choisir comme relèvement de β dans $Br_1 X'$ l'élément $b' = f^*(b)$, si bien que $b'_v = b_v$.

Vérifions enfin le caractère fonctoriel de cet accouplement: tout k-morphisme $G' \to G$ définit des morphismes $f_*: H^1(k,G') \to H^1(k,G)$ et $f^*: Br\ G \to Br\ G'$; soient ξ' un élément de $Ш(G')$ et β un élément de $B(G)$, X' un espace principal homogène sous G' représentant ξ', X son image par f_*, puis $\varphi: X' \to X$ le k-morphisme corres-

pondant (X s'obtient en prenant par exemple le cocycle image dans $Z^1(k,G)$ de celui associé à X'); soit b un relèvement de β dans Br_1X; la compatibilité de φ avec l'action de G sur X et de G' sur X' assure la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Br_1X & \xrightarrow{\varphi^*} & Br_1X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Br_aG & \xrightarrow{f^*} & Br_aG' \end{array}$$

ce qui permet de prendre $b' = \varphi^*(b)$ comme relèvement de $\beta' = f^*(\beta)$ dans Br_1X'. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Br\ X_v \\ Br\ k_v & \nearrow & \downarrow \varphi_v^* \\ & \searrow & Br\ X'_v \end{array}$$

étant commutatif, on a, avec de tels choix, l'égalité $b_v = b'_v$ dans $Br\ k_v$, d'où <u>a fortiori</u> l'égalité

$$\langle f_*(\xi'),\beta\rangle = \langle \xi', f^*(\beta)\rangle .$$

Théorème 8.2.- <u>Si</u> G <u>est un groupe algébrique linéaire connexe sans facteur de type</u> E_8, <u>défini sur le corps de nombres</u> k, <u>l'accouplement</u> (8.1.1) <u>met les groupes commutatifs finis</u> $Ш(G)$ <u>et</u> $B(G)$ <u>en dualité</u>:

(8.2.1) $$Ш(G) = B(G)^{\sim}.$$

On doit prouver que le morphisme naturel $Ш(G) \xrightarrow{\omega} B(G)^{\sim}$ défini par l'accouplement (8.1.1) est un isomorphisme. On peut d'abord supposer G réductif, car la division par le radical unipotent ne modifie en rien ce morphisme ω(<u>cf</u>. 4.1 et la démonstration de 7.2). On peut ensuite supposer que G possède un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B: si G est réductif quelconque, il existe, d'après 1.10, un entier $m>0$ et un k-tore quasi-trivial T' tels que $G^m \times_k T'$ possède un tel revêtement et on peut se réduire à ce cas, car ω est fonctoriel d'après 8.1, additif en G (voir en particulier 6.7) et trivial sur T' (<u>cf</u>. (1.9.1) et 6.6).

Supposons donc désormais que G possède un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B. On sait qu'alors le morphisme canonique

$$Ш(G) \xrightarrow{\partial} Ш^2(B)$$

est un isomorphisme en l'absence de facteur de type E_8 (théorème 4.3) et que le morphisme canonique

$$Ш^1(\hat{B}) \xrightarrow{\theta} Б(G)$$

est également un isomorphisme (corollaire 7.3). Il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, de prouver le lemme suivant et d'appliquer le théorème de dualité de Tate-Poitou (cf. [37])

(8.2.2) $$Ш^1(\hat{B}) = Ш^2(B)^\vee, \text{ la}$$

dualité étant donnée par l'accouplement de Tate

(8.2.3) $$Ш^1(\hat{B}) \times Ш^2(B) \xrightarrow{\tau} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ainsi défini: soient χ et b des cocycles représentant les classes de cohomologie qu'on désire accoupler; comme $H^3(k,G_m) = 0$, il existe une 2-cochaîne $h \in C^2(\mathcal{G},\bar{k}^*)$ telle que $\chi \cup b = dh$ dans $Z^3(\mathcal{G},\bar{k}^*)$; localement, il existe, pour chaque place v, d'une part $\xi_v \in C^0(\hat{B})$, d'autre part $a_v \in C^1(B)$ avec $\chi_v = d\xi_v$ et $b_v = da_v$; l'accouplement des classes de χ et b est alors défini par la somme des invariants locaux des 2-cocycles $x_v \in Z^2(\mathcal{G}^v,\bar{k}_v^*)$ définis par

$$x_v = \xi_v \cup b_v - h_v \equiv -\chi_v \cup a_v - h_v.$$

Lemme 8.3.- <u>Soit</u> $G' \to G$ <u>une</u> k-<u>isogénie de groupes algébriques réductifs connexes définis sur le corps de nombres</u> k <u>et soit</u> B <u>son noyau. Le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} Ш(G) \times Б(G) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\omega"] & \\ Ш^2(B) \times Ш^1(\hat{B}) \arrow[u, "\theta"'] \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

<u>qu'elle définit est commutatif</u>.

Montrons qu'on peut se ramener, pour démontrer le lemme, au cas des tores. Considérons le diagramme croisé (cf. [29] ou [13]) ci-dessous, obtenu en écrivant B comme noyau d'un épimorphisme $T' \to T$ de k-tores avec T' quasi-trivial: on plonge B dans $G' \times T'$ via $z \mapsto (z,z^{-1})$ et on pose $H = G' \times T'/B$, ce qui donne le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & T & \\ & T' \arrow[ur] & & \\ & & H \arrow[u] \arrow[dr] & \\ B \arrow[uur] \arrow[r] & G' \arrow[r] & & G \end{tikzcd} .$$

On a ainsi un diagramme commutatif d'isogénies

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
G' \arrow[r] \arrow[d] & G' \times T' \arrow[r] \arrow[d] & T' \arrow[d] \\
G & H \arrow[l] \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

où $\iota(b) = b^{-1}$. On en déduit le diagramme commutatif d'accouplements

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}^2(B) \times \mathfrak{m}^1(\hat{B}) \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\iota"'] \arrow[ddrr] \\
\mathfrak{m}(G) \times \mathfrak{b}(G) \arrow[d, "\approx"] \arrow[drr] \\
\mathfrak{m}(H) \times \mathfrak{b}(H) \arrow[d] \arrow[rr] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathfrak{m}(T) \times \mathfrak{b}(T) \arrow[d] \arrow[urr] \\
\mathfrak{m}^2(B) \times \mathfrak{m}^1(\hat{B}) \arrow[uu, bend right=60, "\iota"] \arrow[uurr]
\end{tikzcd}$$

ceci d'après la fonctorialité des accouplements définis à la proposition 8.1. Comme T' est quasi-trivial et central dans H, on trouve aisément (cf. lemme 1.9) que l'application $\mathfrak{m}(G) \xleftarrow{\approx} \mathfrak{m}(H)$ est bijective, ce qui montre aussitôt qu'il suffit de prouver la commutativité du carré inférieur d'accouplements pour obtenir celle du carré supérieur.

La démonstration de cette commutativité dans le cas des tores fait l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 8.4.- Soit $U' \to U$ une k-isogénie de tores de noyau B sur le corps de nombres k. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}^1(k,U) \times \mathfrak{m}^2(k,\hat{U}) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
\mathfrak{m}^2(k,B) \times \mathfrak{m}^1(k,\hat{B}) \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

qu'elle définit est commutatif.

Les flèches obliques sont les accouplements de Tate (cf. 8.2.3) et les verticales sont les morphismes déduits des "suites exactes" $1 \to B \to U' \to U \to 1$ et, par dualité, $0 \to \hat{U} \to \hat{U}' \to \hat{B} \to 0$.

Soient α et φ respectivement dans $\mathfrak{m}^1(k,U)$ et $\mathfrak{m}^1(k,\hat{B})$ qu'on représente par $(a_s) \in Z^1(k,U)$ et $(f_s) \in Z^1(k,\hat{B})$. Puis, on relève (a_s) en $(a'_s) \in C^1(k,U')$ et (f_s) en (f'_s) dans $C^1(k,\hat{U}')$. Soient alors $b = da' \in Z^2(k,B)$ et $g = df' \in Z^2(k,\hat{U})$. Il

s'agit de voir que, si β désigne la classe de b et χ celle de g, on a

$$\langle\alpha,\chi\rangle = \langle\beta,\varphi\rangle \ .$$

Comme $H^3(k,G_m) = 0$, les cup-produits $a\cup g$ et $b\cup f$ appartiennent à $B^3(k,G_m)$. Or, le calcul donne $d(a'\cup f') = da'\cup f' - a'\cup df' = b\cup f - a\cup g$, ce qui permet d'écrire

$$a\cup g = dh \quad \text{et} \quad b\cup f = dl$$

avec

$$l = h + a'\cup f' \in C^2(k,G_m).$$

Soit alors v une place de k. On peut considérer $x \in C^0(k_v,U)$ tel que $a = dx$, puis relever x en $x' \in C^0(k_v,U')$. Alors, $y = a' - dx'$ appartient en fait à $C^1(k_v,B)$ et $dy = b$. Or les accouplements de Tate sont obtenus à partir des termes locaux

$$\langle\alpha,\chi\rangle_v = x\cup g - h$$

$$\langle\beta,\varphi\rangle_v = y\cup f - l \ ,$$

en faisant la somme des invariants locaux correspondants dans Q/Z. Mais, $x'\cup f' \in C^1(k_v,G_m)$ et

$$d(x'\cup f') = x'\cup df' + dx'\cup f' = x\cup g + a'\cup f' - y\cup f$$

$$= x\cup g - h - (y\cup f - l),$$

ce qui montre que les termes locaux ci-dessus sont homologues dans $Z^2(k_v,G_m)$ et ont donc les mêmes invariants dans Q/Z: leur somme est <u>a fortiori</u> la même!

Lemme 8.5.- <u>Soit</u> T <u>un tore défini sur le corps de nombres</u> k. <u>Le diagramme naturel</u>

$$\begin{tikzcd}
Ш^1(T) \times Ш^2(\hat{T}) \arrow[d, equal] \arrow[d, shift left=6ex, "\upsilon"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
 & Q/Z \\
Ш^1(T) \times \mathcal{B}(T) \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>est anti-commutatif</u>.

Ce diagramme est défini par l'accouplement de Tate τ, analogue à (8.2.3), par l'accouplement défini en 8.1 et par le morphisme naturel $H^2(k,\bar{k}[T]^*) \to \mathrm{Br}\ T$.

Considérons un 1-cocycle a dont la classe α appartienne à $Ш^1(k,T)$ et le k-espace principal homogène $X = X_a$, sous T, associé. L'application naturelle $H^2(k,\bar{k}[X]^*) \to \mathrm{Br}_1 X$ est un isomorphisme (lemme 6.3 (i)) puisque $\mathrm{Pic}\ \bar{X} = 0$. L'application $\mathrm{Br}_1 X \to \mathrm{Br}_a X = \mathrm{Br}_a T = H^2(k,\hat{T})$ est donc l'application $H^2(k,\bar{k}[X]^*) \to H^2(k,\hat{T})$ obtenue à partir de la suite exacte de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \to \bar{k}^* \to \bar{k}[X]^* \to \hat{T} \to 0.$$

Soit $f \in Z^2(k,\hat{T})$ un cocycle dont la classe appartienne à $Ш^2(\hat{T})$. Etant donné l'action de $\mathcal{G}$ sur $\bar{k}[X]$ (cf. la démonstration du lemme 6.5), le bord df est le 3-cocycle $\lambda_{s,t,u} = {}^s f_{t,u}(a_s^{-1})$, autrement dit $\lambda = -\, a \cup f$ dans $Z^3(k,G_m)$ et $-\, a \cup f = dh$ avec h dans $C^2(k,G_m)$, puisque $H^3(k,G_m) = 0$. On peut encore considérer h dans $C^2(k,\bar{k}[X]^*)$ et, si g désigne le 2-cocycle f considéré comme élément de $C^2(k,\bar{k}[X]^*)$, on trouve $dg = \lambda = dh$, si bien que g-h est un 2-cocycle à valeurs dans $\bar{k}[X]^*$ et qu'ainsi la classe du 2-cocycle $g-h \in Z^2(k,\bar{k}[X]^*)$ relève celle de f. Localement, $g_v - h_v$ a sa classe dans Br k_v: c'est celle du 2-cocycle $g_v(x_v) - h_v = f_v(x_v) - h_v$ dans $Z^2(k_v,G_m)$.

Or, l'accouplement de Tate s'obtient justement comme suit: étant donné (a,f), on écrit $-a \cup f = dh$ et on considère la 2-cochaîne $-f_v \cup x_v + h_v = -f_v(x_v) + h_v$ qui est en fait un 2-cocycle à valeurs dans $\bar{k}_v^*$, d'où, au signe près, le même élément de Br k_v que dans l'accouplement ω décrit auparavant.

Ceci achève la démonstration de ce lemme, donc du lemme 8.3 par conjonction de 8.4 et 8.5, donc celle du théorème 8.2! Ajoutons que 8.3 se déduit de 8.4, 8.5 et 7.2.1, par la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
Ш(T) \times B(T) \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\omega"] & \\
Ш(T) \times Ш^2(\hat{T}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\partial"] & Q/Z \\
Ш^2(B) \times Ш^1(\hat{B}) \arrow[ur, "\tau"'] \arrow[u, "\upsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

où le triangle supérieur anticommute par 8.5, le triangle inférieur commute par 8.4 et où $\upsilon \circ \partial = -\theta$ d'après (7.2.1).

<u>Remarque</u> 8.6.- On peut, en principe, espérer déduire de 8.2 des contre-exemples explicites au principe de Hasse, de la même manière que Manin ([26], chap. VI, §47) utilise des obstructions liées au groupe de Brauer pour interpréter des contre-exemples classiques dans le cas des surfaces cubiques (Mordell, Cassels-Guy). Par exemple, dans le cas du tore $T = R^1_{K/k}G_m$, pour K/k galoisienne, on sait bien (cf. [2] ou ici 5.6) que le principe de Hasse est en défaut exactement lors-

que $Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z}) \neq 0$ où $\underline{g} = \underline{g}(K/k)$. Autrement dit, dans ce cas, il existe des k-variétés X définies dans l'espace affine A^n_k, où $n = [K:k]$, par une équation du type $N_{K/k}(x) = \alpha$, où $\alpha \in k^*$, et possédant partout localement un point rationnel sans en posséder dans k. Il est relativement facile de trouver des critères très explicites et efficaces permettant de décider si $Ш^3(\underline{g},\mathbb{Z})$ est, ou non, trivial. Mais, dnns le cas où il est non nul, on ne dispose pas de critère simple pour trouver un α tel que la variété "normique" associée contrevienne au principe de Hasse. L'obstruction donnée par l'accouplement (8.1.1) n'est pas simple à calculer en pratique en raison de l'exploitation délicate de la nullité de $H^3(k,G_m)$!

Proposition 8.7.- <u>Soit</u> X <u>une variété algébrique définie sur le corps de nombres</u> k <u>et possédant un point rationnel. Il existe un accouplement naturel</u>

$$A(X) \times Б_\omega(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

<u>fonctoriel en</u> X, <u>additif à droite et trivial sur le sous-groupe</u> $Б(X)$.

Soit b un élément de Br_1X dont presque toutes les images locales dans les Br_1X_v soient nulles. Il définit donc une application composée (<u>cf</u>. lemme 6.2) continue

$$\alpha_b : \prod X(k_v) \to \coprod Br\, k_v \to \coprod \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Celle-ci est triviale sur l'image, par la diagonale, de X(k), car elle se factorise alors par Br k. Si b et b' sont deux tels éléments, $\alpha_{b+b'} = \alpha_b + \alpha_{b'}$. Si b a ses images locales dans les divers Br_oX_v, comme $X(k) \neq \emptyset$, c'est la somme d'un élément de Br k = Br_oX et d'un élément dont toutes les images locales sont nulles, d'où $\alpha_b = 0$. L'existence d'un point rationnel permet de représenter tout élément de $Б_\omega(G)$ par un élément de Br_1X dont presque toutes les images dans les Br_1X_v soient nulles, d'où l'accouplement de l'énoncé par passage au quotient à gauche par l'adhérence de X(k) et à droite par Br_oX. Il est évidemment fonctoriel en X puisque les accouplements de Manin (lemme 6.2) le sont.

Lemme 8.8.- <u>Etant donné une</u> k-<u>isogénie</u> $G' \to G$ <u>de groupes algébriques linéaires, de noyau</u> B, <u>le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} H^1(k,B) \times H^1(k,\hat{B}) \arrow[dr, "\cup"] & \\ G(k) \times Br_1 G \arrow[u, "\partial"] \arrow[u, shift left=6, "\theta"] \arrow[r, "\mu"'] & Br\ k \end{tikzcd}$$

<u>qu'elle définit est commutatif</u>.

Dans ce lemme, k est de caractéristique 0 quelconque, le premier accouplement est le cup-produit, le second l'accouplement de Manin (6.2.2), la première verticale est le cobord et la seconde est l'application θ de 7.2.(ii) .

Soit $Br_e G$ le noyau de l'application $Br_1 G \to Br\ k$ définie par l'élément neutre de G(k). Alors, $Br_1 G = Br\ k \oplus Br_e G$ et l'application θ se factorise par $Br_e G$. L'assertion à prouver étant ponctuelle sur G(k) et l'accouplement inférieur étant fonctoriel en G (<u>cf</u>. 8.1), on peut supposer que G est le produit sur k d'un tore et d'un groupe unipotent, et même de G_a, ce qui nous ramène finalement au cas des tores, la partie unipotente ne jouant pas de rôle dans l'isogénie: si $G = T \times_k U$, l'application $U(k) \to H^1(k,B)$ est triviale et de même $H^1(k,\hat{B}) \to Br_e U = 0$. Vérifions donc le lemme simplement dans le cas d'une isogénie de tores $T' \to T$, auquel cas $Br_e T = H^2(k,\hat{T})$. On sait de plus que l'accouplement de Manin se traduit (<u>cf</u>. 6.6 et 6.2) par l'application

$$T(k) \times H^2(k,\hat{T}) \xrightarrow{\cup} Br\ k$$

cup-produit qui à $x \in T(k)$ et χ dans $Z^2(k,\hat{T})$ associe le 2-cocycle λ défini par $\lambda_{s,t} = \chi_{s,t}(x)$, i.e. $\lambda = x \cup \chi$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} T(k) \times Br_1 T \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\mu"] & \\ T(k) \times H^2(k,\hat{T}) \arrow[d, "\partial"] \arrow[r, "\cup"] & Br\ k \\ H^1(k,B) \times H^1(k,\hat{B}) \arrow[ur, "\cup"'] & \end{tikzcd}$$

.

Le triangle supérieur commute d'après ce qui vient d'être dit. Comme, d'après (7.2.1), l'application θ est l'opposée de $\nu \circ \partial$, tout revient à prouver que le triangle inférieur anticommute, ce qui est standard: soient $x \in T(k)$ et f dans $Z^1(k,B)$; on relève x en $x' \in T'(\bar{k})$ et f en f' dans $C^1(k,\hat{T}')$; l'image par ∂ de la classe de f est la classe de df' et celle de x est la classe de dx' et, comme

$d(x' \cup f') = dx' \cup f' + x' \cup df'$, les 2-cocycles $\partial x \cup f$ et $-x \cup \partial f$ sont homologues dans $Z^2(k, G_m)$, ce qui prouve l'anticommutativité du triangle inférieur du diagramme ci-dessus et achève la démonstration du lemme.

Lemme 8.9.- <u>Soient</u> k <u>un corps de nombres et</u> $G' \to G$ <u>une</u> k-<u>isogénie de groupes algébriques linéaires connexes, de noyau</u> B. <u>Le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} A(G) \times Б_\omega(G) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Ч^1_\omega(B) \times Ш^1_\omega(\hat{B}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

<u>qu'elle définit est commutatif</u>.

L'accouplement supérieur est celui défini en 8.7 et celui du bas s'obtient de façon analogue à partir des cup-produits locaux, par addition des invariants locaux ainsi obtenus (<u>cf</u>. lemme 1.4). La première verticale se déduit simplement par passage au quotient des morphismes cobords locaux $G(k_v) \xrightarrow{\partial} H^1(k_v, B)$ et la seconde du morphisme $H^1(k, \hat{B}) \xrightarrow{\theta} Br_a G$ défini en 7.2 (iii).

Désignons, une partie finie Σ de Ω étant donnée, par $Б_\Sigma(G)$ le noyau de la restriction $Br_a G \longrightarrow \prod_{v \notin \Sigma} Br_a G_v$ où l'on peut d'ailleurs remplacer Br_a par Br_e. Ainsi, $Б_\omega(G)$ est la réunion, lorsque Σ parcourt l'ensemble des parties finies de Ω, des groupes $Б_\Sigma(G)$. Il suffit (voir en particulier la démonstration du théorème 3.3), pour démontrer le lemme, de prouver, pour toute partie finie Σ de Ω, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} A_\Sigma(G) \times Б_\Sigma(G) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Ч^1_\Sigma(G) \times Ш^1_\Sigma(\hat{B}) \arrow[u] \arrow[r] & \prod_\Sigma Br\, k_v \end{tikzcd}$$

ce qui résulte aussitôt, vu la définition des accouplements, de la commutativité indiquée au lemme précédent pour chaque place v.

Théorème 8.10.- <u>Si</u> G <u>est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres</u> k, <u>l'accouplement</u> (8.7.1) <u>met en dualité les groupes commutatifs finis</u> A(G) <u>et</u> $Б_\omega(G)/Б(G)$.

Comme A(G) et $Br_a G$ sont additifs en G et que, pour un k-tore quasi-trivial T, A(T) = 0 et $Б_\omega(T) = Ш^2_\omega(\hat{T}) = 0$ (<u>cf</u>. 6.6), le raisonnement fait au théorème 8.2 montre qu'on peut supposer l'existence d'un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B. En ce cas, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A(G) \times [Б_\omega(G)/Б(G)] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H^1_\omega(B) \times [Ш^1_\omega(\hat{B})/Ш^1(\hat{B})] \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

commute d'après le lemme précédent. Or, la flèche $A(G) \to H^1_\omega(B)$ est un isomorphisme (théorème 3.3). Il en est de même des flèches $Ш^1(B) \to Б(G)$ et $Ш^1_\omega(B) \to Б_\omega(G)$, donc aussi de la flèche induite par passage au quotient (<u>cf</u>. (7.3.3)), à savoir la verticale de droite du diagramme ci-dessus. D'où le théorème, puisque l'accouplement inférieur est une dualité parfaite (lemme 1.4).

Corollaire 8.11.- <u>Si</u> G <u>est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres</u> k <u>et sans facteur de type</u> E_8, <u>la suite naturelle</u>

$$(Б) \qquad 0 \to A(G) \to Б_\omega(G)^\sim \to Ш(G) \to 0$$

<u>est une suite exacte de groupes commutatifs finis</u>.

Plus précisément, l'accouplement (8.7.1) définit une suite naturelle

$$0 \to A(G) \to Б_\omega(G)^\sim \to Б(G)^\sim \to 0$$

qui est exacte d'après le théorème 8.10 et l'accouplement (8.1.1) définit un morphisme naturel

$$Ш(G) \to Б(G)^\sim$$

qui est un isomorphisme d'après le théorème 8.2.

<u>Remarque</u> 8.12.- Les résultats de trivialité simultanée de A(G) et Ш(G) indiqués au §5 sont donc équivalents à la trivialité de $Б_\omega(G)$.

§9.- Lien avec les problèmes birationnels.

Le but de ce § est d'établir le caractère d'invariant k-birationnel de A(G) et Ш(G) pour G un groupe algébrique linéaire connexe, sans facteur de type E_8, défini sur un corps de nombres et d'étendre à ce cas les résultats de Voskresenskii (cf. [39],[40]) obtenus essentiellement pour les tores. On étend en particulier la suite exacte (V) et une formule sur le nombre de Tamagawa.

a.- Problèmes birationnels.

On considère un corps k de caractéristique 0 quelconque. D'après Hironaka (cf. [39,40]), toute k-variété lisse X admet une k-compactification lisse V(X) et la classe de similitude du module galoisien Pic $\bar{V}(X)$ est déterminée par la classe d'équivalence k-birationnelle de X (cf. également [7]p. 190). De plus, si $\bar{X}$ est une variété $\bar{k}$-rationnelle, Pic $\bar{V}(X)$ est un $\mathfrak{g}$-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini, pour $\mathfrak{g} = \underline{g}(\bar{k}/k)$. On en déduit (cf. [39,40]) que le foncteur $X \mapsto H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(X))$ est bien défini, additif et constant sur toute classe de k-équivalence birationnelle stable, pour la catégorie des k-variétés algébriques lisses $\bar{k}$-rationnelles (voir aussi 6.5 ou [7] lemme 11). On va voir que, pour un groupe linéaire G sur un corps de nombres, A(G) et Ш(G) sont des invariants k-birationnels qui dérivent de l'invariant $H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G))$. Le cas des tores est déjà traité de façon détaillée et complète dans [39,40] et repris d'un point de vue un peu différent dans [7], §8.

Si G est un k-groupe algébrique linéaire connexe, toute k-compactification lisse $G \to V(G)$ définit (cf. [39,40]) une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules

$$(9.0.0) \qquad 0 \to \hat{\bar{G}} \to M \to \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G) \to \mathrm{Pic}\ \bar{G} \to 0$$

où M est le $\mathfrak{g}$-module de permutation $\mathbb{Z}$-de type fini formé des diviseurs de $\bar{V}(G)$ à support "à l'infini", i.e. hors de l'ouvert $\bar{G}$ et où $\mathfrak{g} = \underline{g}(\bar{k}/k)$. Dans le cas d'un tore T, cette suite se réduit à la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules

$$(9.0.1) \qquad 0 \to \hat{\bar{T}} \to M \to \mathrm{Pic}\ \bar{V}(T) \to 0$$

et, si G est semi-simple, on obtient la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules

(9.0.2) $$0 \to M \to \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G) \to \hat{B} \to 0$$

compte tenu du fait que $\mathrm{Pic}\ \bar{G} = \hat{B}$ (cf. 7.3 ou [9]).

Lemme 9.1.- Les suites exactes de cohomologie galoisienne déduites de (9.0.1) et (9.0.2) dans les cas respectifs d'un k-tore T et d'un k-groupe semi-simple connexe G, à savoir

(9.1.1) $$0 \to H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{V}(T)) \to H^2(k,\hat{T}) \to H^2(k,M)$$

(9.1.2) $$0 \to H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{V}(G)) \to H^1(k,\hat{B}) \to H^2(k,M)$$

coïncident, à des signes près, avec les suites exactes naturelles

$$0 \to \mathrm{Br}_a V(T) \to \mathrm{Br}_a T \to H^2(k,M)$$

$$0 \to \mathrm{Br}_a V(G) \to \mathrm{Br}_a G \to H^2(k,M).$$

Ces dernières sont les suites exactes de restriction (cf. 6.1): on désigne par M le $\mathfrak{g}$-module des diviseurs "à l'infini". De plus, dans cette "identification", on identifie $H^2(k,\hat{T})$ à $\mathrm{Br}_a T$ suivant le lemme 6.6, puis $H^1(k,\hat{B})$ à $\mathrm{Br}_a G$ suivant (7.3.4) et enfin $\mathrm{Br}_a V(T)$ à $H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{V}(T))$ et $\mathrm{Br}_a V(G)$ à $H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{V}(G))$ suivant 6.3 (ii) puisque $U(\bar{V}(T)) = U(\bar{V}(G)) = 0$.

Ce lemme est simplement mentionné ici, sans démonstration, pour montrer que, dans le cas des tores et des groupes semi-simples connexes, on peut obtenir des démonstrations plus rapides des résultats ci-après, directement à partir des suites exactes (9.0.1) et (9.0.2) via (9.1.1) et (9.1.2), démonstrations qui, d'après ce lemme, seront des cas particuliers des démonstrations générales ci-après.

Les résultats de Voskresenskii pour les tores (cf.[39,40]) peuvent se résumer ainsi:

Théorème 9.2 (Voskresenskii [39,40]).- Soit T un tore défini sur un corps de caractéristique 0. Soit $T \to V(T)$ une k-compactification lisse de T.

(i) Si T est décomposé par une extension cyclique de k,

$$H^1(k,\mathrm{Pic}\ \bar{V}(T)) = 0.$$

(ii) Si k est un corps de nombres, on a une suite exacte de groupes commuta-

$$(V) \qquad 0 \to A(T) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(T))^{\sim} \to Ш(T) \to 0.$$

Il s'agit des théorèmes 5 et 6 de [40]. L'examen de la démonstration de ce théorème 6 montre que le terme médian naturel de (V) est bien le dual du groupe fini $H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(T))$. Voir également [7], §8, proposition 19.

Dans la suite, on utilise uniquement (i), l'assertion (ii) étant démontrée de nouveau comme cas particulier du théorème 9.5 ci-après.

Proposition 9.3 (Voskresenskii [41]).- Si G est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k, et si $G \to V(G)$ est une k-compactification lisse de G,

$$H^1(k_v, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G)) = 0$$

pour presque toute place v de k.

C'est le théorème 3 de [41]. On peut supposer G réductif, car si U est le radical unipotent de G, le morphisme $G \to G/U$ possède une k-section, d'où, U étant une variété k-rationnelle, $H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G)) = H^1(k, \mathrm{Pic}\ \bar{V}(G/U))$. Soit alors G_o le k-groupe quasi-déployé dont G est une forme interne. L'espace principal homogène $\mathrm{Isom}(G, G_o)$ sous le groupe adjoint de G_o a un k_v-point pour presque toute place v de k: il se prolonge à un ouvert de l'anneau des entiers de k et a, partout en réduction sur cet ouvert un point rationnel (Lang [24]). Autrement dit, G est k_v-isomorphe à G_o pour presque toute place v. Il suffit de considérer le cas où G est quasi-déployé, i.e. possède un Borel B défini sur k. Si T est un k-tore maximal de B, la variété G est k-birationnellement équivalente au produit de T par un k-groupe unipotent ("grosse cellule" de la décomposition de Bruhat, cf. [5]). On est donc ramené au cas des tores: comme un tore est trivialisé presque partout localement par une extension cyclique, il suffit alors d'appliquer l'assertion (i) du théorème 9.2 pour obtenir le résultat.

Corollaire 9.4.- Avec les mêmes hypothèses et notations,

$$\mathrm{Br}_a V(G) = B_\omega(G).$$

On déduit aussitôt de 6.1 la suite exacte de restriction

$$0 \to Br_a V(G) \to Br_a G \to H^2(k,M)$$

où M désigne le $\mathcal{G}$-module de permutation des diviseurs de $\bar{V}(G)$ à support hors de $\bar{G}$. Par suite, d'après (1.9.1), on trouve $Ш^2_\omega(k,M) = 0$, d'où $\sigma_\omega(V(G)) = \sigma_\omega(G)$. La variété V(G) étant complète, $Br_a V(G) = H^1(k, \mathrm{Pic}\, \bar{V}(G))$ d'après 6.3 (ii). La proposition ci-dessus implique donc l'égalité $Br_a V(G) = \sigma_\omega(V(G))$, d'où le corollaire.

Théorème 9.5.- <u>Soit</u> G <u>un groupe algébrique linéaire connexe, sans facteur de type</u> E_8, <u>défini sur le corps de nombres</u> k. <u>Soient</u> $G \to V(G)$ <u>une</u> k-<u>compactification lisse de</u> G <u>et</u> S <u>le</u> k-<u>tore dual du module galoisien</u> Pic $\bar{V}(G)$.

(i) <u>La compactification</u> V(G) <u>définit des isomorphismes de groupes finis</u>

(9.5.1) $$A(G) = Ч^1(k,S)$$

(9.5.2) $$Ш(G) = Ш^2(k,S).$$

(ii) <u>Les groupes commutatifs finis</u> A(G) <u>et</u> Ш(G) <u>sont des invariants des classes de</u> k-<u>équivalence birationnelle stable de</u> k-<u>groupes algébriques linéaires</u>.

(iii) <u>La compactification</u> V(G) <u>définit une suite exacte de groupes abéliens</u>

(V) $$0 \to A(G) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, \bar{V}(G))^\sim \to Ш(G) \to 0.$$

Ajoutons que le terme médian de (V) n'est autre que $Br_a V(G) = H^1(k,\hat{S})$. De plus, si l'on note μ la restriction $H^1(k,\hat{S}) \to \prod_v H^1(k_v,\hat{S})$, on peut encore écrire

(9.5.3) $$A(G)^\sim = \mathrm{im}\, \mu$$

(9.5.4) $$Ш(G)^\sim = \ker \mu.$$

Notons tout de suite que (V) généralise la suite exacte obtenue par Voskresenskii dans le cas des tores [39,40] (<u>voir</u> aussi [25], remarque b p. 406), et reprise dans [7] (<u>cf</u>. p. 220 prop. 19 (iB)). D'autre part, les assertions (i) et (ii) généralisent la proposition 18 de [7]. En revanche, la liaison avec la R-équivalence sur G(k) n'est pas établie dans le cas général comme on a su le faire dans le cas des tores (<u>cf</u>. [7], proposition 19).

Notons encore que, dans (V), l'inclusion de A(G) dans le terme médian vaut également en présence d'un facteur de type E_8. De plus, le terme médian s'écrit

aussi bien $Br_a V(G)$. L'analogie avec la "suite duale" de Cassels [6] dans le cas des variétés abéliennes est donc <u>complète</u>, puisque, dans les deux cas, le terme médian est le dual de $Br_a V(G)$, ou, si l'on préfère, de $Б_\omega(G)$ (<u>cf</u>. [25] §6, remarque b).

<u>Démonstration du théorème</u>.- La k-compactification $G \to V(G)$ détermine des isomorphismes $Б_\omega(G) = Br_a V(G) = H^1(k,\hat{S}) = Ш^1_\omega(k,\hat{S})$ et $Б(G) = Б(V(G)) = Ш^1(k,\hat{S})$, <u>cf</u>. 9.3 et 9.4. Ainsi, μ désignant la restriction $H^1(k,\hat{S}) \to \prod_v H^1(k_v,\hat{S})$, obtient-on les identifications $Б(G) = \ker \mu$ et $Б_\omega(G)/Б(G) = \operatorname{im} \mu$. Compte tenu des théorèmes 8.2 et 8.10, on trouve donc les identifications $Ш(G)^\sim = \ker \mu$ et $A(G)^\sim = \operatorname{im} \mu$ annoncées plus haut. On en déduit aussitôt (<u>cf</u>. [7] p. 220, fin de la démonstration de la prop. 18) par le corps de classes [38] les égalités (i). Comme la classe de similitude (<u>cf</u>. [7] §1, p. 178) du module galoisien $\hat{S} = \operatorname{Pic} \bar{V}(G)$ est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-variétés (<u>cf</u>. ci-dessus), additif pour les variétés $\bar{k}$-rationnelles, on obtient aussitôt (ii) à partir de (9.5.3) et (9.5.4) puisque $H^1(k,\hat{S})$ n'est pas modifié par l'addition à $\hat{S}$ d'un module de permutation. Enfin, (V) est la simple traduction de la suite exacte (Б) du corollaire 8.1, compte tenu de 9.4.

<u>Remarque</u> 9.6.- Si l'on désire obtenir (V) plus directement, sans souci d'accouplements canoniques, on peut, du moins dans le cas semi-simple et dans celui des tores, éviter le recours au groupe de Brauer décrit aux §§ 7-8, en s'appuyant simplement sur les suites exactes (9.0.1) et (9.0.2). Dans le cas semi-simple, on obtient aussitôt les égalités $H^1(k,\operatorname{Pic} \bar{V}(G)) = Ш^1_\omega(k,\hat{B})$ compte tenu de 9.3 et $Ш^1(k,\operatorname{Pic} \bar{V}(G)) = Ш^1(k,\hat{B})$. On en déduit, par les théorèmes 3.3, 4.3 et par le lemme 1.4, que $Ш(G) = Ш^1(k,\hat{S})^\sim$ et $A(G) = [H^1(k,\hat{S})/Ш^1(k,\hat{S})]^\sim$. Dans le cas des tores, il suffit de considérer la suite exacte de tores $1 \to S \to T' \to T \to 1$ duale de la suite exacte de modules galoisiens (9.0.1) pour obtenir (c'est la méthode de [7], prop. 18) $A(T) = Ч^1(k,S)$ et $Ш(T) = Ш^2(k,S)$ et donc les autres résultats par le corps de classes (cf. [7]). Cependant, ces méthodes de démonstration plus rapides dépendent du choix d'une compactification, sont spécifiques de

chacun des deux cas considérés et ne s'étendent pas au cas général, auquel cas la suite exacte (9.0.0) est vraiment à quatre termes et semble de ce fait inexploitable.

Corollaire 9.7.- Si G est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur le corps de nombres k et si c'est une variété k-rationnelle, il vérifie l'approximation faible et, en l'absence de facteur de type E_8, le principe de Hasse.

Le résultat sur l'approximation faible est évident a priori! Celui sur le principe de Hasse est dû à Voskresenskiĭ ([40] §3, corollaire 1 du thm. 6 et §5, thm. 8) dans le cas des tores et des groupes semi-simples.

Corollaire 9.8.- Si G est un groupe algébrique réductif connexe sur le corps de nombres k admettant un k-revêtement spécial de groupe B, par exemple si G est semi-simple de groupe fondamental B, l'invariant k-birationnel $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(G))$ est égal à $Ш^1_\omega(k,\hat{B})$: il est nul pour G semi-simple adjoint, pour G semi-simple simplement connexe, pour G déployé par une extension métacyclique,... Si T est un k-tore, cet invariant $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(T))$ est égal à $Ш^2_\omega(k,\hat{T})$.

Dans le premier cas, l'égalité $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(G)) = Ш^1_\omega(k,\hat{B})$ résulte de l'égalité $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(G)) = \mathfrak{S}_\omega(G)$ prouvée en 9.4 et de l'égalité $\mathrm{Br}_a G = H^1(k,\hat{B})$ prouvée en 7.3, tandis que, pour le second cas, on a $\mathrm{Br}_a T = H^2(k,\hat{T})$ d'après 6.6. Dans le cas semi-simple, on peut aussi bien utiliser directement la suite exacte (9.1.2) et dans le cas des tores la suite exacte (9.1.1). La nullité de cet invariant dans divers cas, dont ceux de l'énoncé, résulte alors de 5.3 et 5.4.

Remarque 9.8.1.- Il est bien connu que, pour un tore T défini sur un corps de nombres, la nullité de l'invariant $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(T))$, équivalente à la nullité simultanée de A(T) et Ш(T), n'entraîne pas la k-rationalité de T, puisqu'il y a même des tores, sur $\mathbb{Q}$ par exemple, déployés par une extension cyclique, qui cependant ne sont pas des variétés k-rationnelles (cf. [39,40] et [7], §8, ex. A): pour une discussion détaillée du cas des tores, cf. [7], §8, p.221-223. Pour les groupes semi-simples sur un corps de nombres, ou même un corps $\mathfrak{p}$-adique, la question de

savoir si la nullité de $H^1(k,\mathrm{Pic}\,\bar{V}(G))$ implique, ou non, la k-rationalité de G reste ouverte: en particulier, un groupe semi-simple simplement connexe sur un tel corps est-il une variété k-rationnelle? La question générale a été résolue par la négative sur un corps quelconque par des exemples de Platonov de groupes semi-simples simplement connexes non k-rationnels.

L'énoncé 9.8 fournit, tout au moins, des exemples de groupes semi-simples connexes, et même quasi-déployés, sur un corps de nombres, qui ne sont pas des variétés k-rationnelles: il suffit de considérer les exemples 5.7 et 5.8; il est évident que tout G, tel que $A(G) \neq 0$, par exemple le groupe indiqué en 3.6 (Serre), constitue un contre-exemple à la k-rationalité, mais il est plus facile d'exhiber des contre-exemples dans le cas semi-simple à partir de l'invariant plus fin et plus facile à calculer $Ш^1_\omega(k,\hat{B})$.

b.- Une remarque sur le nombre de Tamagawa.

Nous nous proposons d'étendre, grâce aux résultats antérieurs, une formule, quelque peu anecdotique, déjà observée par Voskresenskiĭ dans le cas des tores ([40] §5, remarque 2) et concernant le nombre de Tamagawa d'un groupe linéaire réductif connexe sur un corps de nombres: il s'agit d'ailleurs d'une simple transcription des théorèmes d'Ono dans le cas des tores [28] et dans le cas semi-simple relatif [29,30] moyennant les expressions de Pic G et $Ш(G)$ indiquées précédemment, avec extension au cas réductif quelconque.

Proposition 9.9.- Soit G un groupe réductif connexe défini sur le corps de nombres k. On suppose G sans facteur de type E_8 et le revêtement simplement connexe G' du groupe dérivé de G tel que $\tau(G') = 1$. Alors le nombre de Tamagawa $\tau(G)$ de G est égal à

$$\tau(G) = \frac{[\mathrm{Pic}\,G]}{[Ш(G)]}.$$

On désigne par $[\gamma]$ le cardinal du groupe γ.

On peut penser que l'expression de $\tau(G)$ donnée ci-dessus vaut pour G réductif connexe quelconque, ce qui signifie essentiellement que $\tau(G) = 1$ et $Ш(G) = 0$ pour G semi-simple simplement connexe!

Le cas des tores est indiqué par Voskresenskiĭ ([40] §5, remarque 2). Rappelons d'autre part que la conjecture de Weil $\tau(G) = 1$ pour G semi-simple simplement connexe est prouvée pour les groupes classiques et quelques groupes exceptionnels (cf. Mars), pour les groupes déployés (Langlands) et quasi-déployés (Laĭ).

Lemme 9.10.- Soit $1 \to G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \to 1$ une suite exacte de groupes réductifs connexes définis sur le corps de nombres k. Alors

$$\frac{\tau(G')\,\tau(G'')}{\tau(G)} = q(\mu)[\operatorname{coker} \hat{i}_k]$$

où $\hat{i}_k : \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k)$ et $\mu : j(G(A_k))/j(G(k)) \to G''(A_k)/G''(k)$ sont les applications naturelles et où $q(\mu)$ désigne le quotient $[\operatorname{coker}(\mu)]/[\ker(\mu)]$.

La démonstration d'Ono [29,30] s'étend du cas semi-simple au cas réductif.

Lemme 9.11.- On conserve les notations et hypothèses du lemme précédent. On suppose en outre $H^1(k_v, G') = 0$ pour toute place non archimédienne et $Ш(k,G') = 0$, ce qui est le cas si G' est réductif spécial sans facteur de type E_8. Alors

$$\frac{\tau(G')\,\tau(G'')}{\tau(G)} = [\operatorname{coker} \hat{i}_k].$$

La démonstration d'Ono [29,30] s'étend encore aisément au cas réductif.

Pour démontrer la formule $\tau(G) = \dfrac{[\operatorname{Pic} G]}{[Ш(G)]}$, on peut supposer, puisque τ, Pic et Ш sont multiplicatifs, que G possède un k-revêtement spécial $G' \to G$ de noyau B. Ce dernier peut se plonger dans un tore quasi-trivial T', ce qui fournit le diagramme croisé

$$\begin{tikzcd}
 & T \\
 & T' \arrow[u] \\
 & H \arrow[u, "i"] \arrow[dr] \arrow[uu, bend left] & \\
B \arrow[ur] \arrow[r] & G' \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

obtenu en plongeant B dans $G' \times T'$ via $z \mapsto (z, z^{-1})$ et en posant $H = G' \times T'/B$. On commence par prouver la formule annoncée pour H, étant donné qu'on la connaît déjà pour T. La suite exacte $G' \xrightarrow{i} H \to T$ vérifie les conditions du lemme 9.11 avec en outre $\tau(G') = 1$, ce qui donne $\tau(T)/\tau(H) = [\text{coker } \hat{i}_k]$. Comme, d'après le théorème 4.3, $Ш(T) = Ш^2(B) = Ш(H)$, il s'agit donc de prouver que $[\text{Pic } T]/[\text{Pic } H] = [\text{coker } \hat{i}_k]$, ce qui résulte aussitôt de la suite exacte

$$0 \to \hat{T}(k) \to \hat{H}(k) \xrightarrow{\hat{i}_k} \hat{G}'(k) \to \text{Pic } T \to \text{Pic } H \to 0$$

suite qui se déduit aisément du diagramme (cf. th. 7.2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \hat{T}(k) & \to & \hat{T}'(k) & \to & \hat{B}(k) & \to & \text{Pic } T \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
0 & \to & \hat{H}(k) & \to & \hat{G}'(k) \times \hat{T}'(k) & \to & \hat{B}(k) & \to & \text{Pic } H \to 0
\end{array}$$

compte tenu de Pic G' = Pic T' = 0 (on peut d'ailleurs montrer qu'étant donné une suite exacte de k-groupes algébriques linéaires connexes $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ on a la suite exacte $0 \to \hat{G}''(k) \to \hat{G}(k) \to \hat{G}'(k) \to \text{Pic } G'' \to \text{Pic } G \to \text{Pic } G'$). On démontre alors la formule $\tau(G) = [\text{Pic } G]/[Ш(G)]$ exactement de la même manière en utilisant la suite exacte $1 \to T' \xrightarrow{i} H \to G \to 1$ à laquelle on peut appliquer le lemme 9.11 , car T' est quasi-trivial; comme $Ш(G) = Ш(H)$, il faut simplement prouver que $[\text{Pic } G]/[\text{Pic } H] = [\text{coker } \hat{i}_k]$, ce qui résulte de la suite exacte

$$0 \to G(k) \to H(k) \xrightarrow{\hat{i}_k} T'(k) \to \text{Pic } G \to \text{Pic } H \to 0.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 9.9.

Bibliographie

1 I.T. Adamson, Cohomology Theory for non-normal subgroups and non-normal fields, Proc. Glasgow Math. Assoc. (1954) 66-76.

2 E. Artin, J.T. Tate, Class field theory. Harvard University Press 1961.

3 M. Auslander, O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367-409.

4 A. Borel, J.-P. Serre, Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne, Comment. Math. Helvet. 39 (1964), 111-164.

5 A. Borel, J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965) 55-151.

6 J.W.S. Cassels, Arithmetic on curves of genus 1. VII. The dual exact sequence, J. reine und angew. Math. 216 (1964),150-158.

7 J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4è série, 10 (1977), 175-229.

8 J.-C. Douai, Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps globaux, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 281, série A (1975), 1077-1080.

9 R. Fossum, B. Iversen, On Picard Groups of Algebraic Fibre Spaces, J. of Pure and Appl. Algebra 3 (1973), 269-280.

10 A. Grothendieck in Théorie des Topos et Cohomologie étale des schémas (= SGA 4). Lecture Notes in Math. n° 270, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

11 A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland Pub. Co., Amsterdam 1968.

12 G. Harder, Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen, I, Math. Zeit. 90 (1965), 404-428; II, Math. Zeit. 92 (1966), 396-415; III, J. reine u. angew. Math.274/5(1975) 125-138.

13 G. Harder, Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, Inventiones Math. 4 (1967), 165-191.

14 G. Harder, Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen, Jahresbericht d. DMV, 70 (1968), 182-216.

15 G. Harder, Eine Bemerkung zum schwachen Approximationssatz, Archiv der Math., 19 (1968), 465-471.

16 H. Hijikata, Hasse's principle on quaternionic anti-hermitian forms, J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 165-175.

17 R. Hoobler, A Cohomological Interpretation of Brauer Groups of Rings, Preprint CUNY (1976).

18 M. Kneser, Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, CBRM (1962), 41-52.

19 M. Kneser, Starke Approximation in algebraischen Gruppen, I, J. reine u. angew. Math. 218 (1965), 190-203.

20 M. Kneser, Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, I, Math. Zeit. 88 (1965), 40-47; II, Math. Zeit. 89 (1965), 250-272.

21 M. Kneser, Strong Approximation, Proc. Sympos. Pure Math. 9, A.M.S. (1966), 187-196.

22 M. Kneser, The Hasseprinciple for H^1 of simply connected groups, Proc. Sympos. Pure Math. 9, A.M.S. (1966), 159-163.

23 M. Kneser, Lectures on Galois cohomology of classical groups, Lectures on Math. 47, Tata Institute Bombay 1969.

24 S. Lang, Algebraic Groups over Finite Fields, Amer. J. of Math. 78 (1956), 555-563.

25 Y.I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, Actes du Congrès intern. Nice, 1 (1970), 401-411.

26 Y.I. Manin, Cubic forms, Nauka, Moscou 1972 (trad. anglaise, North-Holland, Amsterdam 1974).

27 T. Ono, Arithmetic of Algebraic Tori, Annals of Math. 74 (1961), 101-139.

28 T. Ono, On the Tamagawa number of algebraic tori, Annals of Math. 78 (1963), 47-73.

29 T. Ono, On the relative theory of Tamagawa numbers, Annals of Math. 82 (1965), 88-111.

30 T. Ono, On Tamagawa numbers, Proc. Sympos. Pure Math. 9, A.M.S. (1966), 122-132.

31 V.P. Platonov, The problem of strong approximation and the Kneser-Tits conjecture for algebraic groups, Izv. Ak. Nauk SSSR 33 n°6 (1969), 1211-1219 = Math. USSR Izv. 3 n°6 (1969), 1139-1147: Supplement to the paper "The problem of strong approximation...", Izv. Ak. Nauk SSSR 34 n°4 (1970) 775-777 = Math. USSR Izv. 4 n°4 (1970) 784-786.

32 M. Rosenlicht, Toroïdal Algebraic Groups, Proc. A.M.S. 12 (1961), 984-988.

33 J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer, Berlin-Heidelberg- New York 1965.

34 J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires, Colloque sur la théorie des groupes algébriques linéaires, CBRM (1962), 53-68.

35 S.S. Shatz, Profinite Groups, Arithmetic and Geometry, Annals of Math. Studies 67, Princeton University Press 1972.

36 T.A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro, C.R. Acad. Sci. 234 (1952), 1517-1519.

37 J.T. Tate, Duality Theorems in Galois cohomology over number fields, Proc. International Congeess Math., Stockholm (1962), 288-295.

38 J.T. Tate, The Cohomology Groups of Tori in Finite Galois Extensions of Number fields, Nagoya Math. J. 27 (1966), 709-719.

39 V.E. Voskresenskiĭ, On the Birational Equivalence of Linear Algebraic Groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969), 878-981 = Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1212-1215.

40 V.E. Voskresenskiĭ, Birational Properties of Linear Algebraic Groups, Izv. Akad. Nauk SSSR 34 (1970), 3-19 = Math. USSR Izv. 4 (1970), 1-17.

41 V.E. Voskresenskiĭ, Rationality of certain algebraic tori, Izv. Akad. Nauk SSSR 35 (1971), 1037-1046 = Math. USSR Izv. 5 (1971), 1049-1056.

42 S. Wang, On Grunwald's Theorem, Annals of Math. 51 (1950), 471-484.

D

Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques

J.-L. Colliot-Thélène

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. [redacted].

FORMES QUADRATIQUES MULTIPLICATIVES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

PAR

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

[Université Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit Φ une k-forme quadratique multiplicative (au sens de PFISTER). A tout k-schéma intègre X, on associe des groupes $D^{\Phi}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ dont les bonnes propriétés fonctorielles permettent, dans le cas où k est le corps $\mathbf{R}$ des réels,

(*a*) d'obtenir une généralisation aux $\mathbf{R}$-variétés projectives et lisses de dimension quelconque d'un théorème de Geyer sur le nombre de composantes connexes des courbes réelles,

(*b*) de montrer que, sur de telles variétés, deux points réels rationnellement équivalents sont dans la même composante connexe,

(*c*) d'établir de façon algébrique que certaines de ces variétés ne sont pas $\mathbf{R}$-rationnelles.

Introduction

Cet article a été motivé par l'article de GEYER [G 1] sur les composantes connexes des courbes algébriques réelles et par les travaux de SANSUC et de l'auteur ([CS 1 à 4]) sur les variétés rationnelles, prolongeant ceux de MANIN [M].

Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit Φ une forme quadratique définie sur k, non singulière et multiplicative (*cf.* [L], chap. 10, § 2); seules les formes anisotropes auront un intérêt ici. Etant donné K/k une extension de corps, on note $D_K(\Phi)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif K^* formé des éléments représentés par Φ sur K. Rappelons le théorème de PFISTER : sur tout corps, pour tout entier $n \geqslant 1$, la forme quadratique $\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2$ est multiplicative [P 1].

Etant donné X un k-schéma intègre, on note $k(X)$ son corps des fractions. On appelle ici k-variété un k-schéma séparé de type fini géométriquement intègre.

Pour des raisons que je préfère détailler dans le dernier paragraphe, pour ne pas alourdir cette introduction de rappels, il est naturel d'associer à tout k-schéma intègre X les groupes suivants :

$L^{\Phi}(X)$ est le sous-groupe de $k(X)^*$ formé des fonctions rationnelles $f \in k(X)^*$ telles qu'en tout point P du schéma X, il existe $u \in k(X)^*$ inversible en P, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$, tels que $f = u.g$.

$\tilde{L}^{\Phi}(X)$ est le sous-groupe de $k(X)^*$ formé des fonctions rationnelles $f \in k(X)^*$ telles que, pour tout ensemble fini de points $\{P_1, \ldots, P_m\}$ de X inclus dans un ouvert affine, il existe u dans $k(X)^*$ inversible en chacun des P_i $(i = 1, \ldots, m)$, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$, tels que $f = u.g$.

On a clairement $D_{k(X)}(\Phi) \subset \tilde{L}^{\Phi}(X) \subset L^{\Phi}(X)$. On définit

$$D^{\Phi}(X) = L^{\Phi}(X)/D_{k(X)}(\Phi) \qquad \text{et} \qquad \tilde{D}^{\Phi}(X) = \tilde{L}^{\Phi}(X)/D_{k(X)}(\Phi).$$

Le but du paragraphe 1 est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Soit X une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse de dimension n, et soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ pour la topologie réelle. Les groupes $D^{\Phi_n}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi_n}(X)$ coïncident, et il existe un isomorphisme naturel*

$$D^{\Phi_n}(X) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^s.$$

En dimension 1, cet énoncé permet de retrouver un résultat de GEYER [G 1] (*voir* § 6). Les instruments de la démonstration sont la théorie d'E. ARTIN [A], celle de PFISTER [P 2], et le théorème de Stone-Weierstrass. L'idée d'employer ce dernier est déjà mentionnée par GEYER [G 1], qui ne l'utilisait pas, car il pouvait (étant en dimension 1) suivre WITT [W].

Au paragraphe 2, on établit la fonctorialité contravariante, sur les k-schémas réguliers intègres, des groupes $D^{\Phi}(X)$ et (avec une légère restriction) des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. L'outil est le corollaire 2.1.1, qui généralise plusieurs résultats classiques sur les formes quadratiques, et qui a été établi par une méthode un peu différente par M. KNEBUSCH [K 1].

Au paragraphe 3, on établit la fonctorialité covariante (par k-morphismes finis localement libres), sur les k-schémas intègres, des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. Le « principe de la norme de Knebusch-Scharlau » ([L], chap. 7, § 4-5) est ici fondamental. Il permet également, pour X une k-variété régulière, de définir un accouplement bilinéaire :

$$Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(k)$$

(où $Z_0(X)$ est le groupe des zéro-cyles sur X, et $\tilde{D}^{\Phi}(k) = \tilde{D}^{\Phi}(\operatorname{Spec} k)$). On étudie les valeurs prises par cet accouplement quand le zéro-cycle varie dans une famille algébrique.

Au paragraphe 4, on montre, par des arguments élémentaires, et bien connus, que les homomorphismes (obtenus à partir du morphisme structural par fonctorialité contravariante)

$$D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1) \qquad \text{et} \qquad D^{\Phi}(k) = \tilde{D}^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$$

sont des isomorphismes, et, plus généralement, que $D^{\Phi}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ sont des invariants « homotopiques » des k-schémas intègres. En conjugant ce résultat avec ceux des paragraphes précédents, on montre que, pour X une k-variété projective et lisse, l'accouplement défini ci-dessus passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle, et l'on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME B. — *Soit X une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse. Si deux points de $X(\mathbf{R})$ définissent des zéro-cycles rationnellement équivalents, ils sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$.*

On utilise ces résultats au paragraphe 5 pour montrer de façon purement algébrique la $\mathbf{R}$-variété, décrite dans [CS 2] (§ 5), n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle.

Au paragraphe 6, on montre comment, en dimension 1, le théorème A redonne certains résultats de GEYER [G 1]. On fait par ailleurs le lien entre les groupes $D^{\Phi}(X)$, $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ et certains groupes introduits dans [CS 1]; on compare leurs propriétés, ce qui amène à poser quelques questions.

Le plan de l'article est le suivant :

1. *Composantes connexes réelles.*
2. *Fonctorialité contravariante.*
3. *Fonctorialité covariante; accouplement avec les zéro-cycles.*
4. *Invariance homotopique; application à l'équivalence rationnelle.*
5. *Un exemple.*
6. *Passé et avenir.*

Je remercie J.-J. SANSUC pour de nombreuses discussions pendant la préparation de ce travail, et L. MORET-BAILLY pour ses remarques lors d'un séminaire sur ces questions.

Par rapport à la version initialement soumise à publication (mai 1977), l'article a été remanié essentiellement sur les points suivants : l'introduction

des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, la fonctorialité covariante, l'application à l'équivalence rationnelle et le théorème B sont nouveaux; on a ajouté quelques remarques motivées par le travail de KNEBUSCH [K 3].

Définition. — Etant donnés X un k-schéma intègre, et $f \in L^{\Phi}(X)$ (resp. $\tilde{L}^{\Phi}(X)$), P un point de X (resp. $\{P_1, \ldots, P_m\}$ un ensemble fini de points de X inclus dans un ouvert affine), une égalité $f = u.g$, avec $g \in D_{k(X)}(\Phi)$ et $u \in k(X)^*$ inversible en P (resp. inversible en chaque P_i $(i = 1, \ldots, m)$), sera appelée une *écriture locale* de f en P (resp. en $\{P_1, \ldots, P_m\}$).

1. Composantes connexes réelles

Commençons par des rappels de résultats fondamentaux.

R.1 ([A], Satz 10, et [AS]). — *Soit X une* **R**-*variété. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un ouvert de Zariski non vide Ω de X avec $\Omega(\mathbf{R}) = \emptyset$;*

(ii) $\mathbf{R}(X)$ *n'est pas formellement réel;*

(iii) *tout élément de* $\mathbf{R}(X)$ *est somme de carrés.*

R.2 ([A] Satz 11). — *Soit X une* **R**-*variété, $f \in \mathbf{R}(X)^*$, et X_f l'ouvert où f est inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $\Omega \subset X_f$ un ouvert de Zariski non vide tel que f prenne seulement des valeurs positives sur $\Omega(\mathbf{R})$;*

(ii) *f est une somme de carrés dans* $\mathbf{R}(X)$.

On note $Q(X)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}(X)^*$ formé des sommes de carrés. Les fonctions satisfaisant la condition (i) sont appelées définies positives. Elles forment évidemment un sous-groupe de $\mathbf{R}(X)^*$, lequel, par le théorème ci-dessus, coïncide avec $Q(X)$.

R.3 (PFISTER et TSEN-LANG, *cf.* [L], chap. 11, th. 1.8.). — *Soit X une* **R**-*variété de dimension n. Toute somme de carrés dans* $\mathbf{R}(X)$ *est somme de 2^n carrés.*

Dans tout ce paragraphe, on se donne une **R**-variété projective et lisse X de dimension n. On pose

$$L(X) = L^{\varphi_n}(X),\ \tilde{L}(X) = \tilde{L}^{\varphi_n}(X),\ D(X) = D^{\varphi_n}(X),\ \tilde{D}(X) = \tilde{D}^{\varphi_n}(X).$$

Le théorème **R.3** nous permet d'identifier $D_{\mathbf{R}(X)}(\varphi_n)$ à $Q(X)$.

Démonstration du théorème A

1.1. En utilisant **R.1** et **R.3**, on voit que le théorème A est clair dans le cas où $s = 0$, tous les groupes étant triviaux. Dans la suite, on se place dans le cas $s > 0$. Comme la variété de l'énoncé est *lisse*, ceci est équivalent à la condition : pour tout Ω ouvert de Zariski de X non vide, $\Omega(\mathbf{R})$ est non vide.

1.2. LEMME. — *Soit $f \in L(X)$ et $P \in X(\mathbf{R})$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en P. Le signe de $u(P) \in \mathbf{R}^*$ ne dépend pas du choix de l'écriture locale.*

Démonstration. — En prenant deux écritures locales pour f, on voit qu'il faut montrer que si un élément w de $\mathcal{O}^*_{X,P}$ appartient à $Q(X)$, alors $w(P)$ est positif. Soit donc

$$w = \textstyle\sum_{i=1}^{t} h_i^2 \qquad \text{avec} \quad h_i \in \mathbf{R}(X)^*.$$

Comme X est lisse, le point P est limite sur la variété C^∞ réelle $X(\mathbf{R})$ de points P_j n'appartenant pas aux diviseurs des h_i $(i = 1, \ldots, t)$. Ainsi $w(P) = \lim w(P_j) \geqq 0$, et, comme $w(P)$ est non nul, il est strictement positif.

Remarque. — En utilisant la régularité de l'anneau $\mathcal{O}_{X,P}$ et la proposition 2.1, on peut donner une démonstration purement algébrique de ce lemme.

1.3. Soit $\mu_2 \subset \mathbf{R}^*$ le groupe (± 1). Le lemme 1.2 permet de définir un homomorphisme de $L(X)$ dans le groupe $\mathrm{Appl}(X(\mathbf{R}), \mu_2)$ des applications de $X(\mathbf{R})$ dans μ_2. On définit cet homomorphisme ainsi : soit $f \in L(X)$, et soit $P \in X(\mathbf{R})$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en P. On définit $\langle f, P \rangle =$ signe de $u(P)$. L'application

$$\begin{aligned} \rho : \quad & L(X) \to \mathrm{Appl}(X(\mathbf{R}), \mu_2), \\ & f \mapsto (P \mapsto \langle f, P \rangle) \end{aligned}$$

est clairement un homomorphisme. Soit I l'ensemble (fini) des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ pour la topologie réelle. Je dis que l'application ρ définit un *homomorphisme naturel* :

$$\sigma : \quad D(X) = L(X)/Q(X) \to \mathrm{Appl}(I, \mu_2).$$

Il suffit pour cela de voir :

1.3.1. Si f est dans $Q(X)$, pour tout P dans $X(\mathbf{R})$, on a $\langle f, P \rangle = 1$. Ceci résulte simplement du fait que, pour f dans $Q(X)$, l'égalité $f = 1.f$ est une écriture locale de $f \in L(X)$ en tout point de X.

FACULTÉ DES SCIENCES - BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES - ORSAY

1.3.2. Pour f dans $L(X)$, l'application de $X(\mathbf{R})$ dans μ_2 définie par $P \mapsto \langle f, P \rangle$ est localement constante.

Si P est un point de $X(\mathbf{R})$, et si $f = u.g$ est une écriture locale de f en P, c'est une écriture locale de f en tout point de l'ouvert où u est inversible, soit Ω. Comme l'application

$$\Omega(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*,$$
$$Q \to u(Q)$$

est continue pour la topologie réelle, pour tout point Q dans un voisinage réel de P, $u(Q)$ a le signe de $u(P)$.

1.4. L'HOMOMORPHISME σ EST INJECTIF. — Pour f dans $L(X)$, l'égalité $f = f.1$ est une écriture locale en tout point de X_f. Si donc f a pour image par ρ l'application constante de valeur 1, sur $X_f(\mathbf{R})$, f est positive, et donc d'après $\mathbf{R}.2$ appartient à $Q(X)$.

1.5. LEMME. — *Soit* $\varepsilon \in \mathrm{Appl}(I, \mu_2)$, *et soit* $\{P_1, \ldots, P_m\}$ *un ensemble fini de points de X. Il existe alors* $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ *tel que :*

(i) *le support du diviseur de* ξ *n'a pas de points réels;*

(ii) ξ *est inversible en chacun des* P_i $(i = 1, \ldots, m)$;

(iii) *pour tout M dans* $X(\mathbf{R})$, *on a* $\varepsilon(i(M))\,\xi(M) > 0$, *où l'on note* $M \mapsto i(M)$ *l'application naturelle de* $X(\mathbf{R})$ *dans I.*

(Ce lemme reprend un argument de GEYER ([G 1], p. 96).)

Démonstration. — Quitte à spécialiser les points P_i, on peut supposer que ce sont des points fermés. Soit $X \subsetneq \mathbf{P}^r_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées homogènes $(T_0, \ldots, T_r)$ un $\mathbf{R}$-plongement projectif de X. Choisissons des réels strictement positifs α_j $(j = 0, \ldots, r)$ tels que, pour tout i $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum \alpha_j T_j^2$ soit non nul en P_i. Soit $X \subsetneq \mathbf{P}^N_{\mathbf{R}}\left(\text{avec } N = \binom{r+2}{2} - 1\right)$ le plongement de Veronèse donné par les $Y_{jk} = T_j T_k$, et soit H l'hyperplan de $\mathbf{P}^N_{\mathbf{R}}$ défini par $\sum_j \alpha_j Y_{jj}$. Soit $\mathbf{A}^N$ l'ouvert complémentaire de cet hyperplan, et soit Y la sous-variété fermée de $\mathbf{A}^N$ définie par $X \cap \mathbf{A}^N$. Le choix des α_j implique que tous les points P_i sont dans Y, et que $Y(\mathbf{R})$ coïncide avec l'espace topologique compact $X(\mathbf{R})$. On dispose d'un homomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$\theta : \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N] \to \mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$$

induit par $Y \subsetneq \mathbf{A}^N$, où l'on note $\mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ les applications continues de $Y(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$. L'image de θ est une algèbre qui contient les constantes

et sépare les points : il est clair, en effet, que $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ sépare les points de $\mathbf{R}^N$. Comme $Y(\mathbf{R})$ est compact, on est dans les conditions d'application du théorème de Stone-Weierstrass (BOURBAKI [B 1], chap. 10, § 4, n° 2). La fonction

$$X(\mathbf{R}) \to \mathbf{R},$$
$$M \mapsto \varepsilon(i(M))$$

est continue. Comme l'image de θ est dense dans $\mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$, on peut trouver $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ tel que l'on ait

$$\forall M \in X(\mathbf{R}), \quad |P(M) - \varepsilon(i(M))| < 1/4.$$

De plus, quitte à ajouter à P une constante réelle de valeur absolue plus petite que 1/4, on obtient $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ tel que $P(P_i) \neq 0$ pour tout i, et,

$$\forall M \in X(\mathbf{R}), \quad |P(M) - \varepsilon(i(M))| < 1/2.$$

La fonction rationnelle $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$, définie comme l'image de $P \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dans $\mathbf{R}(Y) = \mathbf{R}(X)$, satisfait à toutes les conditions de l'énoncé : tout point du support du diviseur de ξ est, soit un point de $X \cap H$ qui n'a pas de points réels, les α_j ayant été choisis tous strictement positifs, soit un point de Y où P s'annule, et ce ne peut être non plus un point réel, car l'inégalité ci-dessus implique que P ne s'annule pas sur $Y(\mathbf{R})$. Elle implique également la partie (iii) de l'énoncé, et la partie (ii) résulte de $P(P_i) \neq 0$ pour tout i.

1.6. On dit que $f \in \mathbf{R}(X)^*$ est *définie* si l'application de $X_f(\mathbf{R})$ dans μ_2 définie par $P \mapsto$ (signe de $f(P)$) est constante sur les fibres de l'application composée :

$$X_f(\mathbf{R}) \subsetneq X(\mathbf{R}) \xrightarrow{i} I.$$

(Notons que dans cette définition, on peut remplacer X_f par un ouvert de Zariski non vide quelconque inclus dans X_f. Cela résulte de ce que, X étant lisse, pour tout ouvert de Zariski non vide Ω, les points de $\Omega(\mathbf{R})$ sont denses dans chaque composante connexe de $X(\mathbf{R})$.)

Les fonctions définies forment un sous-groupe de $\mathbf{R}(X)^*$.

1.6.1. PROPOSITION. — *Les groupes $L(X)$ et $\tilde{L}(X)$ coïncident avec le groupe des fonctions définies.*

Démonstration. — Par définition, $\tilde{L}(X)$ est inclus dans $L(X)$. Le fait que toute fonction de $L(X)$ est définie résulte de 1.3.2, par le même

argument que celui utilisé en 1.4 : sur X_f, $f = f.1$ est une écriture locale de f en tout point. Il suffit donc de montrer que toute fonction définie est dans $\tilde{L}(X)$.

Soit $f \in \mathbf{R}(X)^*$ une fonction définie, et soit $\{P_1, \ldots, P_m\}$ un ensemble fini de points de X. Comme f est définie, on peut définir $\varepsilon \in \mathrm{Appl}(I, \mu_2)$ comme l'application qui satisfait :

$$\forall P \in X_f(\mathbf{R}), \quad \text{signe de } f(P) = \varepsilon(i(P)).$$

(Par la même remarque que ci-dessus, ε est uniquement définie : l'application composée $X_f(\mathbf{R}) \subsetneq X(\mathbf{R}) \to I$ est surjective.)

Soit alors $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ associé à ε et à $\{P_1, \ldots, P_m\}$ comme en 1.5. La fonction $\xi^{-1}f$ est, par 1.5 (iii), définie positive. Ainsi, d'après $\mathbf{R}$.2, elle appartient à $Q(X)$, et $f = \xi.(\xi^{-1}f)$ est une écriture locale de f en $\{P_1, \ldots, P_m\}$.

1.7. Fin de la démonstration du théorème A. — Il résulte de 1.6.1. que les groupes $\tilde{D}(X)$ et $D(X)$ coïncident. Montrons que σ est surjectif, ce qui terminera la démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Appl}(I, \mu_2)$. D'après 1.5 ., il existe $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ avec $X(\mathbf{R}) \subset X_f$ et telle que

$$\forall P \in X(\mathbf{R}), \quad \text{signe de } \xi(P) = \varepsilon(i(P)).$$

Ainsi, ξ est définie; donc, d'après 1.6.1, ξ est dans $L(X)$. Il est clair que l'image de ξ par ρ est $\varepsilon \circ i$, et donc ε est l'image par σ de la classe de ξ dans $D(X)$.

1.8. *Remarque.* – Les parties 1.1 à 1.4 de la démonstration ci-dessus utilisent uniquement le fait que X est une $\mathbf{R}$-variété lisse. Ainsi, pour $X/\mathbf{R}$ une variété lisse quelconque de dimension n, si l'on désigne par s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ (nombre qui est fini, comme l'a montré Whitney), on a une injection :

$$\sigma : \quad D^{\varphi_n}(X) \subsetneq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^s,$$

ce qui implique en particulier que $D^{\varphi_n}(X)$ est un groupe fini.

Dans le cas $n = 1$, Knebusch, reprenant d'autres arguments de Geyer [G 1], a montré que la flèche σ est un isomorphisme : ceci résulte de [K 2] (2.12), modulo une traduction facile (du type de 6.1.1 ci-après). Comme le montre le contre-exemple suivant, ceci ne s'étend pas au cas $n > 1$. Il est cependant vraisemblable que σ soit un isomorphisme pour $X/\mathbf{R}$, *propre* et lisse, quelconque.

1.8.1. *Un contre-exemple.* — Soit $E \subsetneq \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x, y]$ la courbe d'équation :

$$y^2 - x(x-1)(x+1) = 0,$$

et soit X l'ouvert complémentaire de E dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. L'espace topologique $X(\mathbf{R})$ a trois composantes connexes, limitées par les deux branches Γ_1 et Γ_2 de $E(\mathbf{R})$ (voir *fig.* 1). Etant donné un élément f de $L(X)$, il est commode de décrire son image dans Appl (I, μ_2) par un dessin : par exemple, la figure 2 correspond à l'élément $f = y^2 - (x^3 - x)$ de $L(X)$.

ASSERTION. — *La figure* 3 *ne correspond pas à un élément de l'image de* σ.

Démonstration. — Soit $g \in L(X)$ ayant une image par σ représentée par la figure 3. Quitte à multiplier g par une puissance paire de f, ce qui ne change pas la figure associée, on peut supposer que l'on est dans l'un des cas suivants :

1° $\operatorname{div}(g) = D$ avec $\operatorname{supp}(D) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{div}(f))$ fini

2° $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(f) + D$ avec $\operatorname{supp}(D) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{div}(f))$ fini,

où la notation $\operatorname{supp}(D)$ indique le support d'un diviseur de Cartier D sur $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

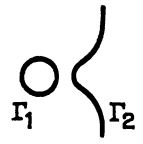

Fig. 1

Fig. 2

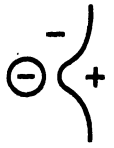

Fig. 3

Fig. 4

Dans le premier cas, la fonction g est inversible en tous les points de Γ_2 sauf un nombre fini. Elle ne peut donc pas changer de signe au passage de Γ_2. Dans le second cas, la fonction $(g/f) \in L(X)$ aurait une image par ρ de figure associée, la figure 4, mais comme elle est inversible en tous les points de Γ_1 sauf un nombre fini, elle ne peut pas changer de signe au passage de Γ_1.

2. Fonctorialité contravariante

Dans le cas d'une forme homogène de degré 2, la proposition suivante est voisine du corollaire 2.3 de [K 1].

2.1. PROPOSITION. — *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local régulier, d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *de corps des fractions* K *et de corps résiduel* k. *Soit* Φ *dans*

$A[x_1, \ldots, x_s]$ une forme homogène à coefficients dans A telle que la forme $\tilde{\Phi}$ dans $k[x_1, \ldots, x_s]$ déduite de Φ par l'homomorphisme naturel

$$A \to A/\mathfrak{m},$$
$$x \mapsto \tilde{x}$$

ne représente pas zéro non trivialement sur k. On a :

(i) *Φ ne représente pas zéro sur K.*

(ii) *Si f est dans A^*, et si f est représenté par Φ sur K, alors $\tilde{f} \in k^*$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur k.*

Démonstration. — Si la dimension de A est nulle, les deux assertions sont claires, car alors $A = k$. On va démontrer les deux parties de l'énoncé par récurrence sur la dimension de A. Pour $(A, \mathfrak{m})$ comme dans l'énoncé, avec A de dimension strictement positive, soit $t \in \mathfrak{m}$ un paramètre régulier. Soit $y \mapsto \bar{y}$ le passage au quotient $A \to A/At = B$. L'anneau B est un anneau local régulier de dimension $(\dim A - 1)$, d'idéal maximal $\mathfrak{n} = \overline{\mathfrak{m}}$, de corps résiduel k. Soit L son corps des fractions. C'est aussi le corps des restes de l'anneau de valuation discrète $A_{(t)}$ (le localisé de A en l'idéal premier $(t) = At$), de corps des fractions K.

Démonstration de (i). — Supposons l'assertion démontrée pour $\dim A < n$, et soit A de dimension n. Soient $(t, B, \mathfrak{n}, L)$ comme ci-dessus. Si Φ représente zéro non trivialement sur K, on peut trouver $(y_1, \ldots, y_s)$ dans $(A_{(t)})^s$ satisfaisant :

$$\Phi(y_1, \ldots, y_s) = 0,$$
$$\inf_j v_t(y_j) = 0,$$

où v_t désigne la valuation de $A_{(t)}$. Par réduction modulo t dans $A_{(t)}$, on obtient une représentation non triviale de zéro par $\bar{\Phi}$ dans L. Mais ceci contredit l'hypothèse de récurrence, qui s'applique à $(B, \mathfrak{n}, \bar{\Phi})$.

Démonstration de (ii). — Supposons l'assertion démontrée pour $\dim A < n$, et soit A de dimension n. Soient $(t, B, \mathfrak{n}, L)$ comme ci-dessus. Par hypothèse, il existe des y_j $(j = 1, \ldots, s)$ dans K tels que

$$f = \Phi(y_1, \ldots, y_s).$$

Soit $u = \inf_j v_t(y_j)$, et soient $z_j = t^{-u} y_j \in A_{(t)}$. Notant r le degré de Φ, on a

$$f = t^{ru} \Phi(z_1, \ldots, z_s)$$
$$\inf_j v_t(z_j) = 0.$$

Si la valuation en t de $\Phi(z_1, \ldots, z_s)$, qui est clairement positive ou nulle, n'était pas nulle, par réduction modulo t, on obtiendrait une représentation non triviale de zéro par $\bar{\Phi}$ dans L. Mais ceci contredirait la partie déjà démontrée de la proposition, qui s'applique à $(B, \mathfrak{n}, \bar{\Phi})$. Ainsi cette valuation est nulle. Comme c'est aussi le cas de celle de f, qui est dans A^*, on conclut de l'égalité ci-dessus que u est nul. On a donc :

$$f = \Phi(y_1, \ldots, y_s),$$
$$\inf_j v_t(y_j) = 0.$$

Par passage au corps résiduel de $A_{(t)}$, on obtient, dans L,

$$\bar{f} = \bar{\Phi}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s).$$

Ceci est une représentation de $\bar{f} \in B^*$ dans le corps des fractions de B, qui est de dimension $(n-1)$, par $\bar{\Phi}$. Appliquant à cette situation l'hypothèse de récurrence, qui vaut pour $(\bar{f}, B, \bar{\Phi})$, on obtient que l'image de $\bar{f}$ dans $B/\mathfrak{n} = k$ est représentée par la forme image de $\bar{\Phi}$ par l'application $B \to B/\mathfrak{n}$. Mais le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/At = B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k = A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\sim} & B/\mathfrak{n} \end{array}$$

étant clairement commutatif, ceci dit que $\tilde{f}$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur k.

2.1.1. Corollaire. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, soit Φ une forme quadratique définie sur k non singulière. Soit A un anneau local régulier contenant k, de corps des fractions K, et de corps résiduel $\varkappa$. Si $f \in A^*$ est représenté par Φ dans K, alors l'image $\tilde{f}$ de f dans $\varkappa$ est représentée par Φ sur $\varkappa$.*

Démonstration. — Dans le cas où Φ est anisotrope sur $\varkappa$, c'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1. Si Φ est isotrope sur $\varkappa$, comme $\Phi/\varkappa$ est une forme quadratique non singulière isotrope, elle représente tout élément de $\varkappa$, par un argument bien connu.

Remarques.

2.1.2. Dans le corollaire, on peut remplacer Φ par une forme quadratique définie sur A, non singulière. On obtient alors que $\tilde{f}$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur $\varkappa$. L'énoncé obtenu, qui généralise un théorème de Cassels-Pfister

([L], chap. IX, 1.5.), est en fait un cas particulier d'un résultat de KNEBUSCH sur les formes quadratiques, obtenu avec des méthodes à la Witt. Indiquons brièvement comment l'on peut tirer les résultats ci-dessus de [K 1].

Dans le cas où 2 est dans A^*, le corollaire 2.1.1, sous la forme généralisée indiquée à l'instant et la proposition 2.1 pour Φ forme quadratique, sont des cas particuliers de [K 1] (corollary 2.3 (i)) (on utilise $\tilde{\Phi}$ anisotrope $\Rightarrow$ $\tilde{\Phi}$ non singulière $\Rightarrow$ Φ non singulière; avec les notations de [K 1], on prend $N = (A^s, \Phi)$ et, pour M, le plan hyperbolique, puis l'espace quadratique de dimension 1 défini par f).

Dans le cas où $2 \in \mathfrak{m}$, on peut obtenir 2.1 (ii) pour Φ forme quadratique en utilisant [K 1] (corollary 2.10).

2.1.3. On ne peut pas, dans les hypothèses de 2.1, ou de 2.1.1, remplacer « A régulier » par « A normal ». Je reproduis ici un contre-exemple de [CS 4] : soit $k = \mathbf{R}$, et soit A l'anneau local au point (0, 0, 0) de la $\mathbf{R}$-variété définie dans $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ par l'équation

$$x^2+y^2+z^2 = x^3.$$

Dans le corps des fractions de A (qui est normal, par le critère de Serre), on a l'égalité

$$-1+x = (y/x)^2+(z/x)^2,$$

et le membre de gauche est un élément de A^* qui est représenté par la forme $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2+x_2^2$ dans le corps des fractions de A. Mais sa valeur au point fermé est (-1), qui n'est pas une somme de carrés dans $\mathbf{R}$.

2.1.4. Sous les hypothèses de 2.1, on peut se demander si f est représenté par Φ sur A. On sait peu de choses sur ce genre de problèmes.

2.1.4.1. La réponse est oui si la dimension de A est au plus 1 (cela résulte de la démonstration).

2.1.4.2. Pour $2 \in A^*$, et Φ forme quadratique non singulière de dimension inférieure ou égale à 3, on peut montrer que la réponse est affirmative.

2.1.4.3. C'est également le cas quand on prend pour Φ la forme norme d'une extension finie étale de A, sans même supposer que $\tilde{\Phi}$ ne représente pas zéro (*cf.* [CS 4]).

2.1.4.4. Dans le cas où A est l'anneau local d'un point réel de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$, il résulte d'un théorème de A. PRESTEL qu'un élément f de A^*, qui est somme de carrés dans le corps des fractions de A, est somme de carrés dans A,

c'est-à-dire que le 17e problème de Hilbert, sous la forme locale convenable, a une réponse affirmative (*cf.* [CL], p. 403). Mais on ne sait pas contrôler le nombre de carrés.

2.1.4.5. Dans le cas global, on sait (contre-exemples de HILBERT, MOTZKIN, *cf.* [CL]) qu'il existe des polynomes de $\mathbf{R}[x, y]$ qui sont sommes de carrés dans $\mathbf{R}(x, y)$ sans l'être dans $\mathbf{R}[x, y]$. Signalons par opposition le résultat facile suivant, qui illustre le principe général que les normes ont des propriétés un peu meilleures que les formes quadratiques multiplicatives (*cf.* 6.1, 6.2) :

soit K/k une extension galoisienne finie, et soit $P \in k[x, y]$ représenté par la norme $N_{K/k}$ dans $k(x, y)$. Alors P est représenté par $N_{K/k}$ dans $k[x, y]$.

Conventions. — Jusqu'à la fin du paragraphe 4, on se fixe un corps k de caractéristique différente de 2, une forme quadratique Φ définie sur k, non singulière et multiplicative. On supposera de plus Φ anisotrope sur k; dans le cas isotrope, tous les résultats sont valables, mais tous les groupes considérés sont triviaux. Les notations sont celles de l'introduction. On dira qu'un schéma est *de type semi-local* si tout ensemble fini de points est inclus dans un ouvert affine (exemple : schémas quasi projectifs sur un corps).

2.2. FONCTORIALITÉ CONTRAVARIANTE DES GROUPES $D^{\Phi}(X)$ ET $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. — Le premier cas est facile, et est seulement indiqué pour pouvoir s'y rapporter par la suite.

2.2.1. PROPOSITION. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un k-morphisme dominant de k-schémas intègres* (*resp. avec Y de type semi-local*). *Le plongement* $k(Y) \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} k(X)$, *défini par* φ, *induit un homomorphisme*

$$\varphi^* : \quad D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$$
$$(\text{resp. } \varphi^* : \quad \tilde{D}^{\Phi}(Y) \to \tilde{D}^{\Phi}(X))$$

et ceci de façon fonctorielle sur la catégorie dont les objets sont les k-schémas intègres (resp. *et de type semi-local*), *et dont les morphismes sont les k-morphismes dominants de k-schémas.*

La preuve est laissée au lecteur.

2.2.2. PROPOSITION. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un k-morphisme de k-schémas intègres, avec Y régulier* (resp. *et de type semi-local*). *Il existe un*

homomorphisme naturel

$$\varphi^* : \quad D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$$
$$(\text{resp. } \varphi^* : \quad \tilde{D}^{\Phi}(Y) \to \tilde{D}^{\Phi}(X))$$

qui coïncide avec celui défini en 2.2.1, *dans le cas où* φ *est dominant et qui fait de* $D^{\Phi}(X)$ (resp. $\tilde{D}^{\Phi}(X)$) *un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas intègres réguliers* (resp. *et de type semi-local*), *avec comme morphismes les k-morphismes de k-schémas, dans la catégorie des groupes abéliens.*

On se contentera d'établir la proposition pour D^{Φ}. Seul le point (*d*) de la démonstration nécessite une modification, évidente, pour $\tilde{D}^{\Phi}$. La flèche φ^* sur $\tilde{D}^{\Phi}(Y)$ est induite par celle sur $D^{\Phi}(Y)$.

Démonstration.

(*a*) *Définition de* φ^*. — Soit ξ le point générique de X, et soit $\eta \in Y$ l'image de ξ dans Y. Soit $f \in L^{\Phi}(Y)$ un représentant d'un élément α de $D^{\Phi}(Y)$, et soit $f = u.g$ une écriture locale de f en η. Soit β la classe dans $k(X)^*/D_{k(X)}(\Phi)$ de l'image de u par l'application composée

$$\mathcal{O}^*_{Y,\eta} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^*.$$

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,\eta} \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathcal{O}_{X,\xi} \simeq k(\xi) \simeq k(X) \\ & k(\eta) \arrow[ur, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

où θ est le passage au corps résiduel dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,\eta}$, et où χ est le plongement $k(\eta) \subsetneq k(\xi)$ provenant de l'homomorphisme (local) d'anneaux locaux φ^*.

(*b*) *L'élément* β *ne dépend pas du choix de l'écriture locale de* f *en* η. — En effet, si $f = v.h$ est une autre écriture locale, on a

$$u/v \in \mathcal{O}^*_{Y,\eta} \cap D_{k(Y)}(\Phi).$$

Comme $\mathcal{O}_{Y,\eta}$ est un anneau local régulier, le corollaire 2.1.1 montre que l'image de u/v dans $k(\eta)$, par l'application θ, est dans $D_{k(\eta)}(\Phi)$. Ainsi son image par φ^* dans $k(X) \simeq k(\xi)$, qui est $\chi \circ \theta\,(u/v)$, est dans $D_{k(X)}(\Phi)$.

(*c*) *L'élément* β *ne dépend pas du choix du représentant* f *de* α. — Si en effet f_1 est un autre représentant, on a $f_1 = fh$, avec $h \in D_{k(Y)}(\Phi)$. Donc, si $f = u.g$ est une écriture locale de f en η, on a, pour f_1, l'écriture locale $f_1 = u.(gh)$ en η, et comme seul u est utilisé dans la définition ci-dessus, l'assertion est claire.

(*d*) *L'élément* β *appartient à* $D^{\Phi}(X)$. — Soit f comme ci-dessus un représentant de α, soit P un point de X, et soit $Q = \varphi(P)$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en Q. C'est aussi une écriture locale en η, puisque Q est une spécialisation de η. Le diagramme d'homomorphismes suivant est commutatif, où les flèches sont les flèches évidentes :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^*_{Y,\eta} \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^* \\ \mathcal{O}^*_{Y,Q} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathcal{O}^*_{X,P} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Ainsi $\varphi^*(u)$, qui est un représentant de la classe de β, est inversible en P.

On posera $\beta = \varphi^*(\alpha)$.

(*e*) Le fait que l'application $\varphi^* : D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$ ainsi définie est un homomorphisme est trivial, ainsi que le fait qu'elle coïncide avec celle de 2.2.1, quand cette dernière est définie.

(*f*) *Vérification de la fonctorialité.* — On va montrer que si X, Y, Z sont des k-schémas intègres, avec Y et Z réguliers, et si $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ sont des k-morphismes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & D^{\Phi}(Y) \arrow[dr, "\varphi^*"] & \\ D^{\Phi}(Z) \arrow[ur, "\psi^*"] \arrow[rr, "(\psi\circ\varphi)^*"] & & D^{\Phi}(X) \end{tikzcd}$$

avec les flèches définies ci-dessus est commutatif.

Soit ξ le point générique de X, soit $P = \varphi(\xi)$, et soit

$$Q = \psi(P) = (\psi \circ \varphi)(P).$$

Soit α dans $D^{\Phi}(Z)$. Pour calculer $(\psi \circ \varphi)^*(\alpha)$, on prend un représentant f de α dans $L^{\Phi}(Z)$ et une écriture locale $f = u.g$ de f en Q; on obtient $(\psi \circ \varphi)^*(\alpha)$ comme la classe dans $k(X)^*/D_{k(X)}(\Phi)$ de l'image de u par l'application composée :

$$\mathcal{O}^*_{Z,Q} \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{O}^*_{Y,P} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^*.$$

Par ailleurs, u étant inversible en Q est inversible en l'image par ψ du point générique de Y, et donc $\psi^*(u) \in \mathcal{O}^*_{Y,P} \subset k(Y)^*$ est un représentant de $\psi^*(\alpha) \in D^\Phi(Y)$, représentant qui est inversible en $P = \varphi(\xi)$. Ainsi, $\varphi^*(\psi^*(u))$ est un représentant de $\varphi^*(\psi^*(\alpha))$ dans $L^\Phi(X)$, et l'on a

$$\varphi^*(\psi^*(\alpha)) = (\psi \circ \varphi)^*(\alpha).$$

2.2.3. COROLLAIRE. — *Pour tout k-schéma intègre régulier X, on a un accouplement linéaire à droite*

$$X(k) \times D^\Phi(X) \to D^\Phi(\operatorname{Spec} k) = k^*/D_k(\Phi),$$

et cet accouplement est fonctoriel, i. e. *si* $\varphi : X \to Y$ *est un k-morphisme de tels schémas, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
X(k) \times D^\Phi(X) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& D^\Phi(k) \\
Y(k) \times D^\Phi(Y) \arrow[ur] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

où l'on note $D^\Phi(k) = D^\Phi(\operatorname{Spec} k)$.

Le même énoncé vaut pour $\tilde{D}^\Phi$, *en se limitant aux schémas de type semi-local.*

C'est clair. Notons l'égalité $\tilde{D}^\Phi(\operatorname{Spec} k) = D^\Phi(\operatorname{Spec} k)$. Nous noterons uniformément ce groupe $D^\Phi(k)$ dans la suite.

3. Fonctorialité covariante; accouplement avec les zéro-cycles

3.1. PROPOSITION. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un k-morphisme fini localement libre de k-schémas intègres. Il existe une application naturelle* $\varphi_* : \tilde{D}^\Phi(X) \to \tilde{D}^\Phi(Y)$ *qui est fonctorielle pour de tels morphismes.*

(Notons que, pour des schémas noethériens, l'hypothèse sur φ équivaut à φ fini et plat.)

Construction. — Soit α dans $\tilde{D}^\Phi(X)$, et soit $f \in \tilde{L}^\Phi(X)$ un représentant de α. On définit $\varphi_*(\alpha)$ comme la classe dans $\tilde{D}^\Phi(Y)$ de l'élément $f_1 = N_{k(X)/k(Y)}(f) \in k(Y)^*$. Il faut vérifier que cet élément est dans $\tilde{L}^\Phi(Y)$, et que sa classe, dans $k(Y)^*/D_{k(Y)}(\Phi)$, ne dépend pas du choix du représentant f de α. Ici nous avons recours au « principe de la norme »

de Knebusch-Scharlau (comme Φ est multiplicative, il résulte de [L] (X, 1.7.), que les énoncés [L] (VII, 4.3 et 5.1) coïncident) : un autre représentant f' de α diffère de f par multiplication par un élément de $D_{k(X)}(\Phi)$, et donc, d'après le principe de la norme, leurs normes de $k(X)$ à $k(Y)$ diffèrent d'un élément de $D_{k(Y)}(\Phi)$.

Montrons que f_1 appartient à $\tilde{L}^{\Phi}(Y)$. Soit $\{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble fini de points de Y contenus dans un ouvert affine. Soit $\{Q_1, \ldots, Q_m'\}$ l'ensemble (fini) des points de X dont l'image par φ est l'un des P_i. Les points Q_j sont dans l'ouvert affine (φ est fini) image réciproque de celui contenant les P_i. Comme f est dans $\tilde{L}^{\Phi}(X)$, on peut écrire, dans $k(X)^*$, $f = u.g$, avec u inversible en chaque Q_j, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$. On a

$$f_1 = N_{k(X)/k(Y)}(f) = N_{k(X)/k(Y)}(u).N_{k(X)/k(Y)}(g).$$

Le dernier facteur est, d'après le principe de la norme, dans $D_{k(Y)}(\Phi)$. Il suffit de voir que le premier facteur est une fonction inversible en chacun des P_i. La fonction u est inversible sur un ouvert Ω contenant tous les Q_j. Soit F le fermé complémentaire de Ω. L'image de F par φ est un fermé (φ est fini) qui ne contient aucun des points P_i (φ est surjectif). Soit V l'ouvert complémentaire de $\varphi(F)$. Sur l'image réciproque de V par φ, la fonction u est inversible. Comme les P_i sont inclus dans un ouvert affine, quitte à rapetisser V, on peut le supposer de la forme Spec A (contenant tous les P_i), et φ de la forme Spec $B \xrightarrow{\varphi}$ Spec A, avec B libre sur A, et $u \in B^*$. On a alors :

$$N_{k(X)/k(Y)}(u) = N_{B/A}(u) \in A^*,$$

et cet élément de $k(Y)^*$ est donc inversible en chaque P_i.

La fonctorialité est laissée au lecteur (transitivité de la norme).

3.1.1. *Remarque.* — C'est ici que l'introduction des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, en place de $D^{\Phi}(X)$, se révèle particulièrement utile (*cf.* 6.3.1.). Je ne sais pas si on a l'analogue de la proposition 3.1 pour les groupes $D^{\Phi}(X)$, le problème étant que, pour $\varphi : X \to Y$ morphisme fini, il peut y avoir plusieurs points de X au-dessus d'un point de Y. Il est cependant un cas où cela ne pose pas de problème : celui d'une extension finie de corps, et c'est ce qui permet d'obtenir l'énoncé 3.2.1, tant avec D^{Φ} qu'avec $\tilde{D}^{\Phi}$.

3.2. Accouplement avec les zéro-cycles. — Étant donné X un k-schéma de type fini, on note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles de X, i. e. le groupe libre sur les points fermés de X. Etant donné un k-morphisme

$\varphi : X \to Y$ de tels k-schémas, on définit l'homomorphisme

$$\varphi_* : \quad Z_0(X) \to Z_0(Y)$$

comme l'application qui au zéro-cycle défini par un point fermé P de X associe le zéro-cycle $[k(P) : k(\varphi(P))]\, \varphi(P)$, où $\varphi(P)$ est le point fermé de Y, image de P, et où le coefficient est le degré du corps résiduel de X en P sur le corps résiduel de Y en $\varphi(P)$ (corps qui sont des extensions finies de k).

3.2.1. PROPOSITION. — *Soit X un k-schéma intègre, régulier et de type fini. On a un accouplement bilinéaire :*

$$Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$
$$(\text{resp. } Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k))$$

et cet accouplement est fonctoriel, i. e. *si $\varphi : X \to Y$ est un k-morphisme de tels schémas* (resp. *de tels schémas de type semi-local*), *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr] & \\
Z_0(Y) \times D^{\Phi}(Y) \arrow[u, "\varphi^*"'] \arrow[r] & D^{\Phi}(k)
\end{tikzcd}$$

resp.

$$\begin{tikzcd}
Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr] & \\
Z_0(Y) \times \tilde{D}^{\Phi}(Y) \arrow[u, "\varphi^*"'] \arrow[r] & D^{\Phi}(k)
\end{tikzcd}$$

Ces accouplements sont compatibles avec ceux définis en 2.2.3 (*tout k-point définissant un zéro-cycle*).

Démonstration. — Soit P un point fermé de X, soit $i_P : \operatorname{Spec} k(P) \hookrightarrow X$ la k-immersion fermée correspondante, et soit $p_P : \operatorname{Spec} k(P) \to \operatorname{Spec} k$ déduit de la flèche structurale; l'extension $k(P)/k$ est finie, et, comme on l'a noté en 3.1.1, il n'y a pas de difficulté à définir

$$\begin{tikzcd}
p_{P*} : \quad D^{\Phi}(k(P)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & D^{\Phi}(k) \arrow[d, equal] \\
\tilde{D}^{\Phi}(k(P)) \arrow[r] & \tilde{D}^{\Phi}(k)
\end{tikzcd}$$

(c'est exactement le principe de la norme). Pour α dans $D^{\Phi}(X)$, on définit $\langle P, \alpha \rangle = p_{P*} \circ i_P^* (\alpha)$. Comme p_{P*} et i_P^* sont des homomorphismes de groupes, la bilinéarité de l'accouplement

$$Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

ainsi défini est claire. Le résultat pour $\tilde{D}^{\Phi}$ se déduit de celui pour D^{Φ}. Ainsi $\langle P, \alpha \rangle$ est obtenu de la façon suivante : on prend un représentant u de α dans $L^{\Phi}(X)$, inversible en P, et on définit $\langle P, \alpha \rangle$ comme la classe dans $k^*/D_k(\Phi)$ de la norme (de $k(P)$ à k) de $u(P) \in k(P)^*$. On établit facilement la fonctorialité à partir de cette description explicite et de la formule

$$N_{L/k}(x) = (N_{K/k}(x))^{[L:K]}$$

pour $L/K/k$ extensions finies et x dans K. La compatibilité avec 2.2.3 est claire.

3.3. Rappels sur les familles de zéro-cycles. — (Il n'y a pas de difficulté à vérifier que les définitions ici données coïncident avec les définitions usuelles en théorie des cycles.)

Etant donnés un corps k, et A une k-algèbre commutative de dimension finie, on définit, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, l'entier $n_{\mathfrak{p}} = (\dim_k A_{\mathfrak{p}})/(\dim_k A/\mathfrak{p})$. Pour A comme ci-dessus, et g dans A, on a la formule

$$\det_{A/k}(g) = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} (N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(g(\mathfrak{p})))^{n_{\mathfrak{p}}},$$

où $\varkappa(\mathfrak{p})$ est le corps $A/\mathfrak{p}$, et $g(\mathfrak{p})$ l'image de g dans $A/\mathfrak{p}$.

Pour établir cette égalité, on écrit A comme un produit d'algèbres locales, et on utilise Bourbaki ([B 2], chap. 8, § 12, n° 2, prop. 6).

Etant donnés A comme ci-dessus, et $i : \operatorname{Spec} A \subsetneq X$ une k-immersion fermée de Spec A dans un k-schéma X, on appelle zéro-cycle sur X, associé à cette immersion, le zéro-cycle $\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} n_{\mathfrak{p}}\, i(\mathfrak{p})$.

Soit X un k-schéma. Une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par un k-schéma T est la donnée d'une k-immersion fermée $j : Z \subsetneq X \times_k T$ telle que la flèche composée $p_T \circ j : Z \to T$ soit un k-morphisme fini localement libre. A tout k-point de T, on associe un zéro-cycle $\rho(P)$ de X de la façon suivante : par passage à Spec k *via* le morphisme Spec $k \to T$ définissant le point P, la flèche de T-schémas j définit une k-immersion fermée Spec $A \subsetneq X$, avec A, k-algèbre finie. On définit $\rho(P)$ comme le zéro-cycle associé à cette immersion.

3.4. PROPOSITION. — *Soient X, T, Z des k-schémas de type fini intègres, avec T régulier, X régulier et de type semi-local, et $j : Z \subsetneq X \times_k T$ une k-immersion fermée définissant une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par T. Notons $p : Z \to T$ le k-morphisme fini localement libre induit par la projection sur T, et $q : Z \to X$ le k-morphisme induit par la projection sur X. Pour P dans $T(k)$ et α dans $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, on a la formule*

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, p_* q^* \alpha \rangle,$$

où l'accouplement à valeurs dans $D^{\Phi}(k)$ est celui défini en 3.2.1.

Démonstration. — Soit $\operatorname{Spec} A$ le k-schéma fini fibre de p en P, et soit $i : \operatorname{Spec} A \subsetneq X$ la k-immersion fermée définie par j. Comme X est de type semi-local, les points $i(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$), qui sont en nombre fini, sont dans un ouvert affine de X. On peut donc choisir $f \in k(X)^*$, un représentant de α qui soit inversible en chaque $i(\mathfrak{p})$.

(*a*) *Calcul de* $\langle \rho(P), \alpha \rangle$. — Par définition (3.2.1), on a

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad \langle \rho(P), \alpha \rangle &= \langle \textstyle\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} n_{\mathfrak{p}}\, i(\mathfrak{p}), \alpha \rangle \\ &= \textstyle\prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} (N_{\varkappa(i(\mathfrak{p}))/k}(f(i(\mathfrak{p}))))^{n_{\mathfrak{p}}}, \end{aligned}$$

où l'on désigne, pour $P \in X$ et $f \in \mathcal{O}_{X,P}$, par $\varkappa(P)$ le corps résiduel en P et par $f(P)$ l'image de f dans ce corps résiduel.

(*b*) *Calcul de* $\langle P, p_* q^* \alpha \rangle$. — Par des arguments analogues à ceux utilisés dans 3.1, et par la définition de p_* et q^* sur $\tilde{D}^{\Phi}(.)$, on peut décrire un représentant de $p_* q^* \alpha$ dans $k(T)^*$ inversible en P de la façon suivante : il existe des anneaux A_1, A_2, B définissant des ouverts affines respectivement de T, Z, X, tels que le diagramme suivant de k-morphismes soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Spec} B \\
\operatorname{Spec} A \arrow[r, hook, "t"] \arrow[urr, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} A_2 \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[r, "q"] \arrow[d] & X \arrow[u, phantom, "\cap"] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r, hook, "p"] & \operatorname{Spec} A_1 \arrow[r, hook] & T &
\end{tikzcd}$$

où les $\square$ indiquent des produits fibrés, et où A_2 est libre sur A_1, et f appartient à B^*. Notons λ^*, t^*, i^* les comorphismes de λ, t, i. L'élément $q^*(\alpha)$ de $\tilde{D}^{\Phi}(Z)$ est représenté sur $\operatorname{Spec} A_2$ par l'élément inversible $g = \lambda^*(f)$.

Par définition de p_*, l'élément $p_* q^* (\alpha)$ est représenté sur Spec A_1 par l'élément inversible $h = N_{A_2/A_1}(g) \in A_1^*$. Comme la norme est définie par le déterminant, c'est une propriété évidente que l'on a, dans k^*,

$$h(P) = N_{A/k}(t^*(g))$$

soit encore, puisque $t^*(g) = t^*(\lambda^*(f)) = i^*(f)$,

$$h(P) = N_{A/k}(i^*(f)).$$

D'après 3.3., on a donc :

$$h(P) = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} (N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(i^*(f)(\mathfrak{p})))^{n_{\mathfrak{p}}}. \tag{3.2}$$

Comme i est une k-immersion fermée, elle induit, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, un isomorphisme de k-algèbres :

$$i^* : \ \varkappa(i(\mathfrak{p})) \xrightarrow{\sim} \varkappa(\mathfrak{p}),$$

qui à la classe de f en $i(\mathfrak{p})$ fait correspondre la classe de $i^*(f)$ en $\mathfrak{p}$. Ceci implique, pour tout $\mathfrak{p}$ dans Spec A, l'égalité

$$N_{\varkappa(i(\mathfrak{p}))/k}(f(i(\mathfrak{p}))) = N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(i^*(f)(\mathfrak{p})) \tag{3.3}$$

Comme, d'après 3.2.1, la classe de $h(P)$ dans $D^{\Phi}(k)$ est $\langle P, p_* q^* \alpha \rangle$, la comparaison de (3.1), (3.2) et (3.3) donne l'égalité annoncée.

4. Invariance homotopique; application à l'équivalence rationnelle

Dans ce paragraphe, on établit l'invariance « homotopique » des groupes $D^{\Phi}(X)$. Le résultat général est 4.1.4, les cas particuliers, démontrés en 4.1.1, puis 4.1.3, sont des ingrédients de la démonstration. Les résultats analogues valent pour $\tilde{D}^{\Phi}(X)$; ils sont rassemblés en 4.2.1. Joints à 3.4, ils donnent le théorème 4.3. Ce dernier permet de déduire le théorème B du théorème A.

4.1.1. Proposition. — *L'homomorphisme* $D^{\Phi}(k) \xrightarrow{p^*} D^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$ *déduit du morphisme structural* $p : \mathbf{A}_k^1 \to \operatorname{Spec} k$ *via* 2.2.1 (*ou* 2.2.2) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On note $\mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$, de corps des fractions $k(T)$. Si $\alpha \in k^*$ appartient à $D_{k(T)}(\Phi)$, il appartient à $D_k(\Phi)$: c'est un cas particulier trivial de 2.1.1. Ainsi p^* est injectif. Dire que p^* est surjectif, c'est

dire que si $f \in k(T)^*$ admet en tout point de $\mathbf{A}_k^1$ une écriture locale, alors f s'écrit $f = \alpha g$, avec $\alpha \in k^*$ et $g \in D_{k(T)}(\Phi)$. Pour démontrer cela, quitte à multiplier par un carré dans $k(T)$, on peut supposer que f est dans $k[T]$, et qu'il est produit :

$$f = \alpha \prod_{i=1}^{m} P_i \tag{4.1}$$

de $\alpha \in k^*$ et de polynômes unitaires irréductibles distincts de 1 et distincts deux à deux. Montrons qu'aucun P_i ne vérifie que Φ est anisotrope sur le corps $k[T]/P_i$. Ceci résulte du lemme plus général suivant, qu'il suffit d'appliquer à la localisation de $\mathbf{A}_k^1$ au point fermé défini par un tel P_i.

4.1.1.1. Lemme. — *Soit A un anneau de valuation discrète contenant k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel l, de corps des fractions K. Si $f \in K^*$ admet une écriture locale en $\mathfrak{m}$, et si Φ est anisotrope sur l, alors la valuation de f est paire.*

Démonstration. — Soit $f = u\,\Phi(y_1, \ldots, y_s)$ avec u dans A^* et y_j $(j = 1, \ldots, s)$ dans K, et soit $n = \inf_j v(y_j)$, où v désigne la valuation de A.

Posons $z_j = t^{-n} y_j$, où t désigne une uniformisante de $\mathfrak{m}$. On a alors :

$$f = ut^{2n}\Phi(z_1, \ldots, z_s)$$

avec $\inf_j v(z_j) = 0$. Ainsi $\Phi(z_1, \ldots, z_s)$, qui est dans A, a une image non nulle dans l (puisque Φ est anisotrope sur l) et est donc inversible, ce qui, au vu de l'égalité ci-dessus, achève la démonstration.

Ainsi, dans la décomposition (4.1), tous les polynômes P_i sont tels que la forme Φ est isotrope sur le corps $k[T]/P_i$. Pour terminer la démonstration de 4.1.1, il suffit de démontrer la proposition suivante, qui est une généralisation immédiate du lemme de [P 2] (p. 234). On pourrait la déduire de [L] (X, 2.9), mais une démonstration directe s'impose.

4.1.1.2. Proposition. — *Si $P \in k[T]$ est un polynôme unitaire irréductible différent de 1 tel que Φ soit isotrope sur le corps $K = k[T]/P$, P appartient à $D_{k(T)}(\Phi)$.*

Démonstration. (Rappelons, conventions précédant 2.2, que Φ est toujours supposée anisotrope sur k; la proposition vaut sans cette condition, mais elle est triviale dans le cas isotrope). — Si P est de degré 1, il n'y a rien à démontrer, car Φ est anisotrope. Supposons l'assertion démontrée pour les polynômes de degré strictement plus petit que $n > 1$, et soit P

de degré n satisfaisant l'hypothèse de l'énoncé (s'il n'y a pas de tel polynôme, il n'y a rien à démontrer!). Soit $K = k[T]/P$, et soit $(a_1, \ldots, a_s) \in K^s$ une solution non triviale de

$$\Phi(a_1, \ldots, a_s) = 0.$$

Soit $A_i (i = 1, \ldots, s)$ un polynôme de $k[T]$ de degré strictement plus petit que n, et d'image a_i dans $k[T]/P$. De l'égalité ci-dessus on tire une égalité :

$$\Phi(A_1, \ldots, A_s) = QP, \tag{4.2}$$

où $Q \in k[T]$ est non nul, car les A_i ne sont pas tous nuls, et Φ, étant anisotrope sur k, l'est aussi sur $k(T)$ (cas particulier de 2.1). Ecrivons

$$Q = \beta \prod_{j=1}^{m} Q_j^{n_j},$$

avec $\beta \in k^*$, avec m entier positif ou nul (nul pour $Q \in k^*$), avec les Q_j polynômes unitaires ($\neq 1$) irréductibles deux à deux distincts, et les n_j entiers strictement positifs. Quitte à diviser chaque membre de l'égalité (4.2) par une puissance convenable de chaque Q_j, on peut supposer que, pour tout $j \in [1, m]$, il existe $i \in [1, s]$ tel que Q_j ne divise pas A_i. L'égalité (4.2) montre alors que Φ est isotrope sur le corps $k[T]/Q_j$, pour $j = 1, \ldots, m$. Par ailleurs, le membre de gauche de (4.2) est de degré au plus $(2n-2)$, et P étant de degré n, on obtient que Q, et donc chaque Q_j, est de degré strictement plus petit que n; l'hypothèse de récurrence montre alors que chaque Q_j est dans $D_{k(T)}(\Phi)$, et Φ étant multiplicative, on déduit de (4.2) que P s'écrit comme le produit d'un élément γ de k^* et d'un élément de $D_{k(T)}(\Phi)$. Posant $U = 1/T$, et raisonnant dans le localisé de $k[U]$ en $U = 0$, on tire, par un argument de valuation facile, du fait que P est unitaire que γ appartient à $D_k(\Phi)$. Utilisant encore une fois le caractère multiplicatif de Φ, on conclut que P est dans $D_{k(T)}(\Phi)$.

4.1.1.3. *Remarque.* — Comme me l'a signalé SANSUC, à qui je dois les références à la littérature, on peut, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration qui précède, ainsi que le théorème de ARTIN-CASSELS-PFISTER ([A], Satz 7, [L], IX, 1.3.), établir le théorème suivant (facilement déductible de [L], X, 2.9., mais la démonstration ainsi obtenue est plus élémentaire).

THÉORÈME. — *Pour Φ comme précédemment, et $f \in k[T]$, il y a équivalence entre :*

(i) *f est représenté par Φ dans $k(T)$;*

(ii) *f est représenté par Φ dans $k[T]$;*

(iii) *le coefficient dominant de f est représenté par Φ dans k, et pour chaque facteur irréductible P de f de multiplicité impaire, Φ est isotrope sur $k[T]/P$.*

4.1.2. LEMME. — *Soient X et Y deux k-schémas intègres, $\eta = \operatorname{Spec} k(Y)$ le point générique de Y, et $\pi : X \to Y$ un k-morphisme. Notons $p : X_\eta \to \eta$ la fibre générique de π. Supposons que l'on a :*

(a) localement pour la topologie de Zariski sur Y, π admet une section.

(b) la fibre générique X_η (qui est donc non vide) est régulière, et l'application $p^* : D^\Phi(k(\eta)) \to D^\Phi(X_\eta)$ est un isomorphisme.

Alors la flèche (2.2.1) $\pi^* : D^\Phi(Y) \to D^\Phi(X)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons $i : \eta \to Y$ l'inclusion du point générique de Y dans Y; du produit fibré

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \eta \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

on tire le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D^\Phi(Y) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, hook, "i^*"'] & D^\Phi(X) \arrow[d, hook, "j^*"'] \\ D^\Phi(k(\eta)) \arrow[r, "p^*", "\sim"'] & D^\Phi(X_\eta) \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

où i^* et j^* sont injectifs, car $i^* : k(Y) \to k(\eta)$ et $j^* : k(X) \to k(X_\eta)$ sont des isomorphismes. Ainsi π^* est injectif, et de plus, pour α dans $D^\Phi(X)$, on peut choisir un représentant f dans $L^\Phi(X) \subset k(X)^* \simeq k(X_\eta)^*$ qui soit de la forme $f = p^*(g)$ avec g dans $k(\eta)^*$. Montrons que la classe de g dans $D^\Phi(k(\eta))$ est dans l'image de $i^* : D^\Phi(Y) \to D^\Phi(k(\eta))$, ce qui, vu (4.3), achèvera de montrer que π^* est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que, pour f et g comme ci-dessus, g appartient à $L^\Phi(Y)$. Soit $P \in Y$, et soit U un ouvert de Y contenant P et tel que $\pi_U : X_U \to U$ admette une section, soit s. Soit $Q = s(P)$. On a le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,Q} \arrow[r, hook] \arrow[d, "s^*"'] & \mathcal{O}_{X,s(\eta)} = \mathcal{O}_{X_\eta,s(\eta)} \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "s^*"'] \arrow[dr, "s^*"'] & k(s(\eta)) \\ \mathcal{O}_{Y,P} \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{Y,\eta} \arrow[r, "q_2", "\sim"'] & k(\eta) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

où les flèches q_1 et q_2 sont les flèches de passage au corps résiduel. Soit $f = u.h$ une écriture locale de $f \in L^{\Phi}(X)$ en $Q \in X$. Comme f est de la forme $p^*(g)$ avec $g \in k(\eta)^*$, et que u appartient à $\mathcal{O}^*_{X,Q}$, donc à $\mathcal{O}^*_{X,s(\eta)}$, on a

$$h = fu^{-1} \in \mathcal{O}^*_{X_\eta, s(\eta)} \cap D_{k(X_\eta)}(\Phi).$$

Comme X_η est régulier (en $s(\eta)$), il résulte alors de 2.1.1 que l'on a

$$q_1(f)\, q_1(u)^{-1} \in D_{k(s(\eta))}(\Phi).$$

Vu (4.4), cela implique :

$$s^*(f)\, s^*(u)^{-1} = h_1 \in D_{k(\eta)}(\Phi),$$

et donc

$$g = s^*(p^*(g)) = s^*(f) = s^*(u).h_1$$

fournit une écriture locale de g en P, puisque $s^*(u)$ appartient à $\mathcal{O}^*_{Y,P}$, u appartenant à $\mathcal{O}^*_{X,Q}$.

4.1.3. COROLLAIRE. — *Pour n un entier naturel quelconque, les flèches déduites des morphismes structuraux :*

(i) $D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{A}^n_k)$;

(ii) $D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{P}^n_k)$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — En utilisant des projections $\mathbf{A}^n_k \to \mathbf{A}^{n-1}_k$, on obtient (i) par récurrence à partir de 4.1.1 et 4.1.2. Connaissant (i), pour obtenir (ii), il suffit d'observer que le diagramme commutatif de k-morphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^n_k \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & \mathbf{P}^n_k \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

où les flèches vers $\operatorname{Spec} k$ sont les morphismes structuraux, et où i est une identification de $\mathbf{A}^n_k$ à un ouvert de $\mathbf{P}^n_k$, donne le diagramme commutatif d'homomorphismes de groupes (fonctorialité 2.2.1) :

$$\begin{tikzcd} D^{\Phi}(\mathbf{P}^n_k) \arrow[rr, hook, "i^*"] & & D^{\Phi}(\mathbf{A}^n_k) \\ & D^{\Phi}(k) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où i^* est injectif car i est birationnel.

4.1.4. THÉORÈME. — *Soit X un k-schéma intègre, et $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang fini sur X. Soit $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ l'espace total du fibré et soit $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ le fibré projectif associé. Les homomorphismes :*

(i) $D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$;

(ii) $D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$

déduits, via 2.2.1, *des morphismes structuraux des fibrés sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Il résulte de 4.1.3 que les couples $(\mathbf{V}(\mathscr{E}), X)$ et $(\mathbf{P}(\mathscr{E}), X)$ satisfont les hypothèses de 4.1.2.

4.1.5. COROLLAIRE. — *Soit X un k-schéma intègre, régulier et propre sur k. L'accouplement* 2.2.3 *:*

$$X(k) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

définit un accouplement

$$X(k)/R \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k).$$

Démonstration. — Rappelons que, pour X un k-schéma, $X(k)/R$ désigne le quotient de $X(k)$ par la R-équivalence, qui est la relation d'équivalence sur $X(k)$ engendrée par la relation élémentaire : A et B dans $X(k)$ sont liés s'il existe un k-morphisme $\theta : \Omega \to X$, où Ω est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}^1_k$, tel que A et B sont dans l'image par θ de $\Omega(k)$; cette notion a été introduite par MANIN (*cf.* [M], chap. II, § 14).

Pour X propre sur k, on peut remplacer Ω par $\mathbf{P}^1_k$, et l'assertion résulte de l'isomorphisme $D^{\Phi}(k) \xrightarrow{\sim} D^{\Phi}(\mathbf{P}^1_k)$ et de la fonctorialité (2.2.3) de l'accouplement $X(k) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$ sur les k-schémas intègres réguliers.

On notera que la démonstration utilise uniquement 2.2.2 et 4.1.1.

4.2. PROPOSITION. — *Les homomorphismes $D^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}^1_k)$ et $D^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{P}^1_k)$, déduits, via* 2.2.1 *ou* 2.2.2, *des morphismes structuraux sont des isomorphismes. Plus généralement, étant donné un k-schéma intègre X de type semi-local et un fibré vectoriel de rang fini $\mathscr{E}$ sur X, les homomorphismes déduits, via* 2.2.1, *des morphismes structuraux des fibrés :*

$$\tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$$
$$\tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — L'assertion sur $\mathbf{A}_k^1$ résulte de l'inclusion

$$\tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1) \subset D^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$$

et de 4.1.1. Celle sur $\mathbf{P}_k^1$ s'obtient de même (*cf.* l'argument en 4.1.3).

Pour les fibrés, on remarque qu'un fibré vectoriel est « semi-localement » trivial, et on démontre facilement l'analogue pour $\tilde{D}^{\Phi}$ du lemme 4.1.2, où l'on prend X et Y de type semi-local, et où l'on suppose que π admet une section au voisinage de tout ensemble fini de points de X.

4.3. THÉORÈME. — *Soit X une k-variété projective et lisse. L'accouplement* 3.2.1

$$Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle.

Démonstration. — Soit Z un k-schéma intègre, et $j : Z \subsetneq X \times_k \mathbf{P}_k^1$ une k-immersion fermée définissant (3.3) une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par $\mathbf{P}_k^1$. Soient P et Q des points de $\mathbf{P}_k^1(k)$, et $\alpha \in \tilde{D}^{\Phi}(X)$. Par définition de l'équivalence rationnelle, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, dans une telle situation, on a :

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle \rho(Q), \alpha \rangle,$$

où ρ est défini comme en 3.3.

D'après 3.4, dont nous reprenons les notations, on a

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, p_* q^* \alpha \rangle,$$
$$\langle \rho(Q), \alpha \rangle = \langle Q, p_* q^* \alpha \rangle.$$

D'après 4.2, il existe $\gamma \in D^{\Phi}(k)$ tel que $\gamma = p_* q^* \alpha$, et on a donc :

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, \gamma \rangle = \gamma = \langle Q, \gamma \rangle = \langle \rho(Q), \alpha \rangle.$$

THÉORÈME *B.* — *Soit X une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse. Si deux points P et Q de $X(\mathbf{R})$ définissent des zéro-cycles rationnellement équivalents, ils sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$.*

Démonstration. — Supposons P et Q non dans la même composante. D'après le théorème A (et sa démonstration), il existe $\alpha \in \tilde{D}^{\Phi_n}(X)$, avec n la dimension de X, tels que $\langle P, \alpha \rangle = 1$ et $\langle Q, \alpha \rangle = -1$. Le théorème 4.3 implique alors que P et Q ne sont pas rationnellement équivalents.

4.4. *Remarques.*

4.4.1. Pour X comme dans le théorème B, il est clair que deux points de $X(\mathbf{R})$ qui sont R-équivalents sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$: $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ est connexe, et l'image par une application continue d'un connexe est connexe. Mais, pour des points simplement rationnellement équivalents je ne sais pas s'il existe une démonstration du théorème B évitant le long détour des formes quadratiques multiplicatives et du théorème de Stone-Weierstrass.

4.4.2. Je ne sais pas si dans le théorème 4.3, on peut remplacer $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ par $D^{\Phi}(X)$; la question se pose déjà en 3.4 et en 3.1 (*cf.* 3.1.1).

4.4.3. Etant donnée une extension galoisienne K/k de corps, et X une k-variété propre et lisse, il résulte de Hilbert 90 que l'application $A^1(X) \to A^1(X_K)$ des classes (pour l'équivalence rationnelle) de cycles de codimension 1 sur X dans les classes sur X_K est injective. On peut se demander s'il en est de même des applications naturelles $A^n(X) \to A^n(X_K)$ en codimension n plus grande que 1. Comme me l'a signalé CORAY, SWINNERTON-DYER a répondu par la négative à cette question, en établissant le résultat suivant (non publié) :

Soit X une k-surface cubique (projective et lisse) possédant une droite définie sur k. La relation d'équivalence sur $X(k)$ induite par l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles de X coïncide avec la R-équivalence.

Ainsi, pour X une $\mathbf{R}$-surface cubique telle que $X(\mathbf{R})$ ait deux composantes connexes, l'application $A^2(X) \to A^2(X_{\mathbf{C}})$ n'est pas injective : une telle surface possède une droite réelle (27 est impair), deux points de $X(\mathbf{R})$, qui sont dans des composantes connexes différentes, ne sont pas R-équivalents, et deux points de $X_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ sont rationnellement équivalents sur $X_{\mathbf{C}}$, car ils sont même R-équivalents ($X_{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}$-rationnelle).

On voit que notre théorème B permet de généraliser cet exemple : si X est une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse telle que $X_{\mathbf{C}}$ soit $\mathbf{C}$-rationnelle et que $X(\mathbf{R})$ ait au moins deux composantes connexes réelles, l'application naturelle $A^{\dim X}(X) \to A^{\dim X}(X_{\mathbf{C}})$ n'est pas injective. On en trouvera un exemple dans le paragraphe 5; les surfaces de Châtelet généralisées décrites en détail dans [CS 4], et qui sont reprises d'ISKOVSKIH [I], fournissent d'autres exemples.

5. Un exemple

5.1. Dans [CS 2] (*voir*, pour plus de détails, [CS 4]), SANSUC et l'auteur ont donné un exemple de $\mathbf{R}$-variété X, projective et lisse $\mathbf{R}$-unirationnelle,

telle que $X_{\mathbf{C}}$ soit $\mathbf{C}$-rationnelle et que $\operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}$ soit isomorphe comme Gal $(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-module au module $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (avec action triviale de Galois) et telle que pourtant (*cf.* [CS 1], prop. 5) X ne soit pas $\mathbf{R}$-rationnelle. L'invariant utilisé est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ dont il est facile de montrer (*cf.* [CS 4]) qu'il est égal à 1 pour une $\mathbf{R}$-variété lisse complète $\mathbf{R}$-rationnelle. Dans l'exemple considéré, ce nombre est égal à 2, ce qui permet de conclure. Une autre façon de montrer que X n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle, également indiquée dans [CS 2], est de remarquer que $X(\mathbf{R})$ n'étant pas connexe, $X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément (*cf.* 4.4.1). Or il a été démontré dans [CS 3] (§ 4, prop. 10), de façon purement algébrique (*via* HIRONAKA), que, pour k un corps de caractéristique zéro, l'ensemble $Z(k)/R$ est un invariant k-birationnel des k-variétés Z lisses complètes, et est donc réduit à un élément si X est k-rationnel. Dans ce paragraphe, on utilise les méthodes des paragraphes 2 à 4 pour montrer de façon purement algébrique que, pour la $\mathbf{R}$-variété X, l'ensemble $X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément : l'avantage de cette façon de démontrer que X n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle est qu'on utilise uniquement les deux propriétés suivantes de $\mathbf{R}$: c'est un corps de caractéristique zéro, et il existe sur ce corps une forme quadratique multiplicative (non singulière) Φ telle que $D^{\Phi}(\mathbf{R})$ soit non nul.

5.2. PROPOSITION. — *Soit φ_2 la forme quadratique définie dans l'introduction, et soit X la $\mathbf{R}$-variété discutée ci-dessus (et dont on va rappeler la définition). Il existe $\alpha \in D^{\varphi_2}(X)$ et deux points A et B de $X(\mathbf{R})$ tels que, dans $D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) \simeq (\pm 1)$, on ait*

$$\langle A, \alpha \rangle \neq \langle B, \alpha \rangle,$$

où l'accouplement est celui défini en 2.2.3.

5.2.1. COROLLAIRE. — *$X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de 4.1.5.

5.2.2. *Description de X.* — Soient $e_1 < e_2 < e_3$ trois nombres réels. On définit X_1 comme la sous-variété de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(x, y, z, t; \lambda)$ d'équation :

$$x^2+y^2+z^2 = (\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3)t^2,$$

et on définit X_2 comme la sous-variété de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(X, Y, Z, T; \mu)$ d'équation

$$X^2+Y^2+Z^2 = \mu(1-e_1\mu)(1-e_2\mu)(1-e_3\mu)T^2.$$

On définit X comme la sous-variété fermée de $Z = \mathbf{P}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1})$, donnée par le recollement :

$$X_1 - \{\lambda = 0\} \xrightarrow{\sim} X_2 - \{\mu = 0\}$$
$$(x, y, z, t; \lambda) \mapsto (\lambda^{-2} x, \lambda^{-2} y, \lambda^{-2} z, t; 1/\lambda).$$

On note $\pi : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ la restriction à X de la flèche structurale $Z \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$.

5.2.3. *Démonstration de la proposition* 5.2.

Assertion. — La fonction rationnelle $(\lambda - e_2) \in \mathbf{R}\,(X)^*$ est dans $L^{\varphi_2}(X)$. Notons $\Omega_i \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ l'ouvert complémentaire de $\{\lambda = e_i\} \cup \{1/\lambda = \mu = 0\}$. Sur l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_2)$, la fonction $(\lambda - e_2)$ est inversible et admet donc une écriture locale

$$\lambda - e_2 = (\lambda - e_2).1. \tag{5.1}$$

Sur l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_1 \cap \Omega_3)$, qui contient la fibre de π au-dessus de $\{\lambda = e_2\}$, on a l'égalité

$$\lambda - e_2 = \frac{1}{(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)} \times ((x/t)^2 + (y/t)^2 + (z/t)^2)$$

qui est clairement une écriture locale en tout point de l'ouvert considéré. Par ailleurs, de l'identification $(\lambda - e_2) = (1 - e_2\,\mu)/\mu$ et de l'équation de X_2, on tire l'égalité

$$\lambda - e_2 = \frac{1}{(1 - e_1\,\mu)(1 - e_3\,\mu)} \times (\mu^{-2}((X/T)^2 + (Y/T)^2 + (Z/T)^2)),$$

qui est une écriture locale pour $(\lambda - e_2)$ sur l'ouvert complémentaire de $\{\lambda = e_1, e_3\}$. Comme les ouverts considérés recouvrent X, l'assertion est démontrée.

Soit alors α la classe de $(\lambda - e_2)$ dans $D^{\varphi_2}(X)$. Soit A (resp. B) le point de coordonnées $(x, y, z, t; \lambda) = (0, 0, 0, 1; e_1)$ (resp. $(0, 0, 0, 1; e_3)$). De l'écriture locale (5.1), on tire :

$$\langle A, \alpha \rangle = \text{classe de } (e_1 - e_2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^*/D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*+},$$
$$\langle B, \alpha \rangle = \text{classe de } (e_3 - e_2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^*/D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*+}$$

et donc le premier est dans la classe de (-1), et le second dans la classe de $(+1)$, qui est différente.

5.3. *Remarques.* — On a un diagramme commutatif d'homomorphismes évidents :

$$\begin{tikzcd}
D^{\varphi_1}(X) \arrow[r] & D^{\varphi_2}(X) \arrow[r] & D^{\varphi_3}(X) \\
D^{\varphi_1}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_1"'] \arrow[r, "\sim"] & D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_2"'] \arrow[r, "\sim"] & D^{\varphi_3}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_3"'] \\
 & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait [CS 2] que le Gal (C/R)-module Pic $X_{\mathbf{C}}$ est de permutation, et ceci implique (*cf.* 6.1.2 et 6.1.3) que i_1 est un isomorphisme. De la non-trivialité des accouplements :

$$X(\mathbf{R}) \times D^{\varphi_2}(X) \to D^{\varphi_2}(\mathbf{R}),$$
$$X(\mathbf{R}) \times D^{\varphi_3}(X) \to D^{\varphi_3}(\mathbf{R})$$

(cette dernière se montrant par le même argument qu'en 5.2.3) résulte que ni i_2 ni i_3 ne sont des isomorphismes. Par ailleurs, $X(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes. Comme X est projective, il résulte du théorème A que l'on a

$$D^{\varphi_3}(X) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2.$$

Comment calculer $D^{\varphi_2}(X)$?

Posons (avec a et b dans $\mathbf{R}$) :

$$(e_2-e_1)+(e_3-e_1) = a^2,$$
$$(e_2-e_1)\times(e_3-e_1) = b^2.$$

De l'égalité dans $\mathbf{R}(X)$:

$$(\lambda-e_1) = \frac{(\lambda-e_1)^2+b^2}{a^2+(1/(\lambda-e_1)^2)\left[(x/t)^2+(y/t)^2+(z/t)^2\right]}$$

résulte que $(\lambda-e_1)$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbf{R}(X)$. L'équation de X_1 montre alors que $(\lambda-e_3)$ est dans $L^{\varphi_2}(X)$ (ce qu'on aurait d'ailleurs pu voir par la même méthode que pour $(\lambda-e_2)$), et que sa classe dans $D^{\varphi_2}(X)$ est l'inverse de (i. e. égale à!) celle de $(\lambda-e_2)$. On ne trouve donc pas ainsi d'autre élément évident de $D^{\varphi_2}(X)$. Mais je ne vois pas de façon de montrer que $D^{\varphi_2}(X)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^2$: je ne sais même pas si c'est un groupe fini.

6. Passé et avenir

On fixe dans ce paragraphe un corps k de caractéristique zéro (pour simplifier), une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, et on note $\mathscr{G}$ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. On note $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine des k-schémas formée des k-variétés, et $\mathscr{D}$ celle formée des k-variétés lisses. Etant donné X dans $\mathscr{C}$, et K une extension de k, on note $X_K = X \times_k K$, et on note $K(X)$ le corps des fractions de X_K. De plus, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Pour Z un schéma noethérien, on note $\operatorname{Div} Z$ le groupe des diviseurs (de Cartier) sur Z.

6.1. Intersection de la théorie des groupes $D^S(X)$ et $D^\Phi(X)$; le théorème de Geyer. — Soit S un k-tore, $\hat{S}$ son groupe des caractères. A toute variété X de $\mathscr{C}$, on associe le groupe :

$$D^S(X) = \operatorname{Ker}\left[H^1(\mathscr{G}, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{S}, \bar{k}(X)^*)) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{G}, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{S}, \operatorname{Div} \bar{X}))\right].$$

Ces groupes, qui généralisent des groupes introduits par Manin et liés au groupe de Brauer ([M], chap. VI, 1.3.), ont été introduits par Sansuc et l'auteur [CS 1], et étudiés dans [CS 4], auquel je renvoie pour des définitions équivalentes.

Dans le cas où K/k est une extension finie de corps, et où l'on prend pour S le k-tore noyau de la norme $R_{K/k}\, G_m \xrightarrow{N} G_{m/k}$, on obtient :

$$D^S(X) = D_K(X) = \operatorname{Ker}\left[k(X)^*/NK(X)^* \to \operatorname{Div} X/N \operatorname{Div} X_K\right],$$

où N désigne la norme de K à k. Ce cas particulier avait été étudié par l'auteur, particulièrement pour K/k galoisien, ce qui donnait une théorie dont le parallélisme avec celle de Manin ([M], chap. VI) est expliqué dans [CS 1] et [CS 4]. Ce cas a aussi servi de modèle pour la théorie développée dans les paragraphes 2 à 4, comme l'expliquent les énoncés 6.1.1 et 6.1.2 ci-après.

Introduisons le groupe :

$$D'_K(X) = \left\{ f \in k(X)^*,\ \forall P \in X,\ \begin{Bmatrix} \exists u \in \mathcal{O}^*_{X,P} \\ \exists g \in K(X)^* \end{Bmatrix},\ f = u.N(g) \right\} \Big/ NK(X)^*.$$

En utilisant le fait qu'un faisceau inversible sur X_K peut être trivialisé par l'image réciproque (*via* $X_K \to X$) d'un recouvrement ouvert (Zariski) de X (ce qui résulte du fait qu'un faisceau inversible sur un anneau semi-local est libre), on obtient un homomorphisme, évidemment injectif :

$$\rho : \quad D_K(X) \to D'_K(X).$$

6.1.1. PROPOSITION. — *Si X est lisse sur k, la flèche ρ est un isomorphisme, et les deux groupes coïncident encore avec le groupe :*

$$\left.\begin{cases} f \in k(X)^*, \forall \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathrm{U} \text{ ouvert affine de } X, \\ \exists u \in k(X)^* \text{ inversible en chaque } P_i, \\ \exists g \in K(X)^*, f = u.N(g) \end{cases}\right\} \Big/ NK(X)^*.$$

Démonstration. — Le même argument que ci-dessus montre que ρ se factorise à travers le groupe défini dans l'énoncé. Il suffit donc de montrer que ρ est un isomorphisme. Cela résulte par application au diviseur de f du lemme suivant, qui vaut d'ailleurs pour un morphisme fini localement libre de schémas réguliers :

LEMME. — *Soit X/k un k-schéma lisse, et K/k une extension finie de corps. Soit $\pi : X_K \to X$ la projection naturelle. Soit D un diviseur sur X. S'il existe un recouvrement de X par des ouverts (Zariski) U tels que la restriction de D à U soit la norme d'un diviseur sur U_K, alors D est, globalement, la norme d'un diviseur sur X_K.*

Démonstration. — Comme X et X_K sont réguliers, les diviseurs de Cartier s'identifient aux diviseurs de Weil sur ces schémas. Soit :

$$D = \textstyle\sum_{x \in X^{(1)}} n_x x \tag{6.1}$$

la décomposition de D suivant les points de codimension 1 de X. Soit U un ouvert contenant l'un des x apparaissant dans (6.1) avec un coefficient non nul, mais ne contenant aucun des autres, et tel que, sur U, la restriction de D soit la norme d'un diviseur Δ sur U_K. Ecrivons :

$$\Delta = \textstyle\sum_{y \in U_K^{(1)}} m_y y.$$

On obtient donc :

$$n_x x = N_{K/k}\left(\textstyle\sum_{y \in X_K^{(1)};\, \pi(y) = x} m_y y\right). \tag{6.2}$$

Comme ceci vaut pour tous les x apparaissant dans (6.1) avec un coefficient non nul, il suffit d'ajouter les différentes égalités (6.2), et l'assertion est démontrée. (Le point essentiel est qu'un diviseur *de Weil* sur un ouvert d'un schéma « est » un diviseur de Weil sur tout le schéma.)

6.1.2. COROLLAIRE. — *Soit $K = k(\sqrt{a})$ une extension quadratique, et soit X une k-variété lisse. Le groupe $D_K(X)$ coïncide avec les groupes $D^{\Phi_a}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi_a}(X)$ définis par la forme quadratique multiplicative*

$$\Phi_a(x, y) = x^2 - ay^2.$$

C'est ce corollaire, ainsi que les bonnes propriétés des groupes $D^S(X)$, qui justifie l'introduction *a priori* des groupes $D^\Phi(X)$ et $\tilde{D}^\Phi(X)$, pour Φ forme quadratique multiplicative quelconque.

6.1.3. LEMME. — *Pour K/k une extension galoisienne finie (de corps) de groupe de Galois G, et X une k-variété lisse complète ayant un k-point, on a une suite exacte scindée :*

$$1 \to k^*/NK^* \to D_K(X) \to H^{-1}(G, \operatorname{Pic} X_K) \to 1.$$

C'est facile, et bien connu (*voir* [CS 4]); le cas particulier, où $k = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$ et X est une courbe, est déjà dans [G 1], et l'argument général est le même.

6.1.4. THÉORÈME (GEYER). — *Soit $X/\mathbf{R}$ une courbe lisse projective et géométriquement intègre, avec $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. On a un isomorphisme*

$$H^{-1}(\operatorname{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}), \operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{s-1}.$$

Démonstration. — On prend $k = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$ dans 6.1.2 et 6.1.3, et on applique le théorème A.

En fait, GEYER démontre plus; en particulier, il étudie le cas $X(\mathbf{R}) = \emptyset$. Je renvoie à son article, où le lecteur trouvera expliqué le lien entre ce théorème et les travaux classiques de WEICHOLD, HARNACK, WITT.

6.2. COMPARAISON DES PROPRIÉTÉS DES GROUPES $D^S(X)$, $D^\Phi(X)$ ET $\tilde{D}^\Phi(X)$. — Pour X variant dans $\mathscr{D}$ (X lisse), on dispose de plusieurs groupes abéliens $F(X)$ associés. Dans le diagramme suivant, Φ varie parmi les k-formes quadratiques non singulières multiplicatives, et S varie parmi les k-tores. Pour a dans k^*, Φ_a est la forme quadratique introduite en 6.1.2. Les flèches signifient que la théorie d'un groupe se spécialise en la théorie du groupe but :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{D}^\Phi(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & D^\Phi(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & D^S(X) \arrow[dl] \\
\tilde{D}^{\varphi_n/\mathbf{R}}(X) & D^{\varphi_n/\mathbf{R}}(X) & \tilde{D}^{\Phi_a}(X) = D^{\Phi_a}(X) &
\end{tikzcd}$$

Voici une liste des propriétés connues des groupes $F(X)$; les assertions concernant D^Φ et $\tilde{D}^\Phi$ sont dans cet article, celles concernant D^S sont dans [CS 1] et [CS 4] (*cf.* déjà [CS 3], § 3 et 4).

(*a*) Fonctorialité contravariante pour D^S, D^Φ, et, en se limitant aux variétés de type semi-local, pour $\tilde{D}^\Phi$.

(*b*) $F(k) = F(\mathbf{A}_k^n) = F(\mathbf{P}_k^n)$ pour $F = D^S, D^\Phi, \tilde{D}^\Phi$.

(*c*) Accouplement bilinéaire

$$Z_0(X) \times F(X) \to F(k),$$

qui, pour X/k propre, induit un accouplement :

$$X(k)/R \times F(X) \to F(k)$$

pour $F = D^S$, D^Φ, $\tilde{D}^\Phi$, et qui, pour X/k projectif, induit un accouplement

$$A_0(X) \times F(X) \to F(k)$$

(où $A_0(X)$ est le groupe des classes de zéro-cycles sur X pour l'équivalence rationnelle) pour $F = D^S$, $\tilde{D}^\Phi$.

(*d*) Pour X variant parmi les variétés de $\mathscr{D}$ qui sont complètes, $D^S(X)$ est un invariant k-birationnel.

Pour $k = \mathbf{R}$, et X variant parmi les variétés de $\mathscr{D}$ projectives de dimension n, le groupe $\tilde{D}^{\varphi_n}(X) = D^{\varphi_n}(X)$ est un invariant $\mathbf{R}$-birationnel : ceci résulte du théorème A et de l'invariance $\mathbf{R}$-birationnelle du nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$, pour X complète et lisse.

(*e*) Il n'y a pas lieu d'introduire de variante semi-locale de D^S (*voir* par exemple 6.1.1). Il y a coïncidence entre $\tilde{D}^\Phi(X)$ et $D^\Phi(X)$ dans les cas : $\Phi = \Phi_a$; $k = \mathbf{R}$, $\Phi = \varphi_n$, $X/\mathbf{R}$ projective de dimension n.

(*f*) Pour X dans $\mathscr{D}$, X complète, telle que $X(k)$ soit non vide, si $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est un $\mathscr{G}$-module de permutation, les groupes $D^S(X)$ sont réduits à $D^S(k)$ (*cf.* par exemple 6.1.3), mais l'analogue n'est pas vrai pour les groupes $\tilde{D}^\Phi(X)$ ou $D^\Phi(X)$, comme le montre l'exemple du paragraphe 5.

6.3. Questions.

6.3.1. *Question semi-locale.* — Pour X dans $\mathscr{C}$ (ou même dans $\mathscr{D}$), y a-t-il coïncidence entre les groupes $\tilde{D}^\Phi(X)$ et $D^\Phi(X)$? En d'autres termes, si une fonction de $k(X)^*$ admet une écriture locale en tout point de X (par rapport à une forme multiplicative donnée Φ), si l'on se donne un ensemble fini de points de X inclus dans un ouvert affine, existe-t-il une écriture locale pour la fonction simultanément en chacun des points?

On observera qu'un problème analogue se présente dans la théorie de KNEBUSCH ([K 3], chap. III, § 8).

6.3.2. *Invariance birationnelle.* — Au vu de 6.2 (*d*), il est tentant de conjecturer que les groupes $D^{\Phi}(X)$ sont des invariants k-birationnels des variétés de $\mathscr{D}$ qui sont complètes. Ceci fournirait une autre démonstration algébrique de la non **R**-rationalité de la **R**-variété du paragraphe 5 (noter cependant que pour montrer qu'un groupe $D^{\Phi}(X)$ n'est pas réduit à $D^{\Phi}(k)$, la seule méthode générale dont pour l'instant on dispose, mais c'est seulement une condition suffisante, est de montrer que l'accouplement (X complet)

$$X(k)/R \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

est non trivial). Il semble déjà non évident d'établir, pour Φ forme quadratique multiplicative quelconque, l'invariance de $D^{\Phi}(X)$ dans l'éclatement en un point rationnel d'une k-surface propre et lisse. Une question voisine est la suivante.

Question. — Soit A un anneau local régulier de dimension $\geqslant 2$, contenant k, et d'idéal $\mathfrak{m}$. Soit f un élément du corps des fractions de A admettant une écriture locale en tout point de $\operatorname{Spec} A - \mathfrak{m}$. En admet-il une aussi en $\mathfrak{m}$?

6.3.3. *Problèmes sur les réels.* — Soit X variant parmi les **R**-variétés lisses complètes avec $X(\mathbf{R})$ non vide. On dispose de groupes $D^{\varphi_i}(X)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n = \dim X$ (ceux pour $i \geqslant \dim X$ sont tous égaux (*cf.* § 1, **R**.3) et d'homomorphismes évidents :

$$\theta_i : \quad D^{\varphi_i}(X) \to D^{\varphi_{i+1}}(X)$$

(*a*) Il résulte de 6.1.2, 6.1.3 et de la finitude de $H^1(\mathbf{R}, A)$ pour une **R**-variété abélienne A que le groupe $D^{\varphi_1}(X)$ est fini. Il résulte de 1.8 que le groupe $D^{\varphi_n}(X)$ est fini. Qu'en est-il des groupes intermédiaires (*cf.* 5.3)?

(*b*) En général, les θ_i ne sont ni injectifs ni surjectifs. Cependant, dans le cas $n = 1$, il résulte de [K 2] (§ 2, prop. 2.4), modulo une traduction du type 6.1, que θ_0 est surjectif. Les quelques exemples dont nous disposons (*cf.* § 5, et les exemples discutés dans [CS 4]) suggèrent la question suivante.

Question. — L'application θ_{n-1} est-elle surjective?

(*c*) Pour k réellement clos quelconque, le même argument qu'en (*a*) (*cf.* [G 2], et [K 2] (2.8)) montre que $D^{\varphi_1}(X)$ est fini. Ceci a été utilisé

par KNEBUSCH [K 2] pour étudier les « composantes connexes » des courbes définies sur de tels corps. Pour X/k de dimension n, $D^{\varphi_n}(X)$ est-il fini?

6.3.4. Pour X variant dans $\mathscr{C}$, on dispose d'un homomorphisme *surjectif* :

$$\lambda : \quad H^1_{et}(X, S) \to D^S(X)$$

et, pour X dans $\mathscr{D}$, l'accouplement naturel

$$X(k) \times H^1_{et}(X, S) \to H^1_{et}(k, S) \simeq D^S(k),$$

qui à un point et à un torseur associe la fibre du torseur en ce point, ne dépend que de l'image de la classe du torseur par λ, et c'est ainsi qu'on obtient l'accouplement 6.2 (c).

Cette situation permet de manipuler $D^S(X)$ avec souplesse : le point est que le groupe $H^1_{et}(X, S)$ est un foncteur contravariant en X pour X variant dans la catégorie des k-schémas (et pas seulement dans $\mathscr{D}$).

Dans le cas des groupes D^Φ, avec Φ forme quadratique multiplicative quelconque, on ne peut sans doute rien espérer de semblable. Cependant, dans le cas de la forme notée $\langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle$, c'est-à-dire :

$$\varphi_{a,b}(x, y, z, t) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$$

qui est la norme réduite de l'algèbre de quaternions $A = ((a, b)/k)$, que l'on supposera non décomposée sur k, en utilisant la suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to SL(A) \to GL(A) \xrightarrow{Nred} G_{m/k} \to 1$$

et le fait que

$$H^1_{Zar}(X, GL(A)) \simeq H^1_{et}(X, GL(A)),$$

on obtient une application d'*ensembles*

$$H^1_{et}(X, SL(A)) \to D^{\varphi_{a,b}}(X).$$

Mais je ne sais même pas si cette application est *surjective*, faute de disposer dans ce cas d'un analogue de 6.1.1.

6.3.5. La remarque (f) de 6.2, ainsi que ce qui précède, suggère une question générale : quel est le lien entre les groupes $D^\Phi(X)$ et les sous-variétés de X de codimension > 1, et les fibrés vectoriels sur X de rang

plus grand que 1? Quel est le lien entre les groupes $D^{\Phi}(X)$ et le groupe de Witt $W(X)$ défini par KNEBUSCH dans [K 3]? Dans le cas $k = \mathbf{R}$, X projective et lisse de dimension n, et $\Phi = \varphi_n$, une réponse à cette question permettrait peut-être, *via* le théorème A, de résoudre le problème 16 de [K 4] (p. 369) : les signatures sur $W(X)$ associées à deux composantes connexes différentes de $X(\mathbf{R})$ sont-elles différentes?

6.3.6. La dernière question est motivée par la théorie de la « descente », la description des torseurs universels ([CS 1,2, 4]) sur les surfaces de Châtelet et l'analogie entre les équations de ces surfaces et celle de la variété X_1 du paragraphe 5 (qui a d'ailleurs été trouvée ainsi).

Question. — La variété de $\mathbf{A}^7_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(x, y, z, \lambda, u, v, w, t)$ d'équation

$$x^2+y^2+z^2 = (\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3),$$
$$\lambda-e_2 = u^2+v^2+w^2+t^2,$$

avec $e_1 < e_2 < e_3$ est-elle $\mathbf{R}$-rationnelle?

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARTIN (E.). — Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg*, t. 5, 1927, p. 100-115.

[AS] ARTIN (E.) und SCHREIER (O.). — Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg*, t. 5, 1927, p. 85-99.

[B1] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 5 à 10. Nouvelle édition. — Paris, Hermann, 1974.

[B2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*. Chap. 8. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).

[CL] CHOI (M.-D.) and LAM (T.-Y.). — An old question of Hilbert, "*Conference on quadratic forms* [1976. Kingston]", p. 385-405. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[CS1] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Torseurs sous des groupes de type multiplicatif, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, série A, p. 1113-1116.

[CS2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 284, 1977, série A, p. 967-970.

[CS3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — La R-équivalence sur les tores, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 10, 1977, p. 175-230.

[CS4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — *La première descente sur les variétés rationnelles* (en préparation).

[G1] GEYER (W. D.). — Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichold über reelle algebraische Funktionenkörper, "*Algebraische Zahlentheorie* [1964. Oberwolfach]", p. 83-98. — Mannheim, Bibliographisches Institut, 1966 (*Berichte aus dem mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach*, 2).

[G2] GEYER (W. D.). — Dualität bei abelschen Varietäten über reell abgeschlossenen Körpern, *J. fürreine und angew. Math.*, t. 293/294, 1977, p. 62-66.

[I] ISKOVSKIH (V. A.). — Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles [en russe], *Mat. Sbornik*, t. 74, 1967, p. 608-638; et [en anglais] *Math. of the USSR-Sbornik*, t. 3, 1967, p. 563-587.

[K1] KNEBUSCH (M.). — Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 24, 1973, p. 279-299.

[K2] KNEBUSCH (M.). — On algebraic curves over real closed fields, *Math. Z.*, t. 150, 1976, p. 49-70; et t. 151, 1976, p. 189-205.

[K3] KNEBUSCH (M.). — Symmetric bilinear forms over algebraic varieties, *Conference on quadratic forms* [1976. Kingston], p. 103-283. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[K4] KNEBUSCH (M.). — Some open problems, *Conference on quadratic forms* [1976. Kingston], p. 361-370. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[L] LAM (T.-Y.). — *The algebraic theory of quadratic forms.* — Reading, Benjamin, 1973 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[M] MANIN (Yu. I.). — *Formes cubiques, algèbre, géométrie et arithmétique* [en russe]. — Moskva, 1972; et *Cubic forms, algebra, geometry and arithmetic.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1974 (*North. Holland mathematical Library*, 4).

[P1] PFISTER (A.). — Multiplikative quadratische Formen, *Arch. der Math.*, t. 16, 1965, p. 363-370.

[P2] PFISTER (A.). — Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.*, t. 4, 1967, p. 229-237.

[W] WITT (E.). — Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate, Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, *J. fürreine und angew. Math.*, t. 171, 1934, p. 4-11.

(Texte reçu le 4 mai 1977.)

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE,
Mathématiques, Bât. 425,
Université de Paris-Sud,
Campus universitaire,
91405 Orsay.

FACULTÉ DES SCIENCES ORSAY BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES