PHILIPPE CHARPENTIER

Solutions minimales de l'équation $\partial u = f$ *dans la boule et dans le polydisque de* $\mathbb{C}^n$ *. Application à un problème d'interpolation dans le polydisque et étude des zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque*, 1981

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Philippe CHARPENTIER

Sujet de la Thèse : Solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$. Application à un problème d'interpolation dans le polydisque et étude des zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque.

Soutenue le 9 mars 1981 *devant le Jury composé de :*

J.-P. KAHANE, Président
J. COATES
P. MALLIAVIN
H. SKODA
N. Th. VAROPOULOS

INTRODUCTION

Les résultats présentés dans cette thèse proviennent de plusieurs articles dont un écrit en commun avec E. Amar et portent tout d'abord sur les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$, puis sur une application à un problème d'extension dans le polydisque, et, enfin, sur une étude des zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule unité B de $\mathbb{C}^n$. La résolution, avec estimation, de cette équation étant un des outils fondamentaux de l'étude des propriétés des fonctions holomorphes, diverses techniques ont été développées pour construire plus ou moins explicitement des solutions. Deux méthodes ont été essentiellement utilisées.

La première consiste essentiellement à résoudre l'équation $(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})v = f$, où l'opérateur $\bar{\partial}^*$ est l'adjoint de l'opérateur $\bar{\partial}$. Lorsque $\bar{\partial}f = 0$, la résolution de cette équation fournit alors aussitôt la solution minimale dans L^2 de l'équation $\bar{\partial}u = f$, c'est-à-dire celle qui est orthogonale aux fonctions holomorphes (en posant simplement $u = \bar{\partial}^*v$). Divers auteurs, parmi lesquels G. B. Folland et J. J. Kohn [9], G. B. Folland et E. M. Stein [10], P. C. Greiner et E. M. Stein [11], D. H. Phong [24], ont étudié cette méthode.

La seconde méthode consiste à donner une solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$ à l'aide d'une formule intégrale plus ou moins explicite. Cette technique qui est basée sur l'utilisation des formes de Cauchy-Fantappié a été utilisée par un grand nombre d'auteurs (I. Lieb [20], G. M. Henkin [12], [13], [14], N. Kerzman [16], N. Ovrelid [22], R. Range et Y. T. Siu [25], H. Skoda [28], S. A. Dautov et G. M. Henkin [8], N. Th. Varopoulos [31], E. Amar et A. Bonami [2] ...) dans le cadre des domaines strictement pseudoconvexes bornés et a permis d'obtenir les meilleures estimations possibles. Mais ces solutions ne sont pas (même dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$) en rapport avec la solution minimale dans L^2.

Il était alors naturel de se demander si, au moins dans le cas de la boule unité B de $\mathbb{C}^n$, on peut obtenir une formule intégrale explicite donnant la solution minimale dans $L^2(B)$ de l'équation $\bar{\partial}u = f$.

Plus généralement, pour tout nombre réel $k > 0$, soit $d\sigma_{k-1}(z)$ la mesure sur B égale à $(1-|z|^2)^{k-1}\, d\lambda(z)$, $d\lambda$ étant la mesure de Lebesgue. Dans ce chapitre, on donne donc une formule intégrale explicite qui fournit la solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$ qui est orthogonale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ au sous-espace des fonctions holomorphes.

L'idée de la construction du noyau s'inspire du cas du disque unité D du plan complexe : si $f(\zeta)$ est une fonction de classe C^1 dans $\bar{D}$, on montre aisément que la fonction $u_k(z)$ définie pour $z \in D$ par

$$u_k(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_D f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k \frac{d\zeta}{z-\zeta},$$

et la solution de $\bar{\partial}u = f$ dans D qui est orthogonale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ aux fonctions holomorphes. On remarque alors que le noyau $C_k(\zeta, z)$ donnant la fonction u_k s'écrit

$$C_k(\zeta, z) = \psi_k(\zeta, z)\, C_o(\zeta, z),$$

où $\psi_k(\zeta, z) = \left(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k$ et $C_o(\zeta, z) = \dfrac{d\zeta}{z-\zeta}$ est le noyau de Cauchy.

On cherche donc à définir les noyaux $C_k(\zeta, z)$ de la boule de la même manière. Tout d'abord, on définit un noyau de Cauchy $C_o(\zeta, z)$ de la boule en posant :

$$C_o(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{(1-\zeta z)^{n-1}}{\left[|1-\bar{\zeta} z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)\right]^n} \left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j\right] \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i,$$

et on démontre <u>la formule de Cauchy</u>.

THEOREME 1. <u>Soit</u> $u\in C^1(\bar{B})$. <u>Pour tout</u> $z\in B$, <u>on a</u>

$$u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta)\, S(\zeta,z)\, d\lambda(\zeta) + \int_B \bar{\partial}u(\zeta)\wedge C_o(\zeta,z)\ , \tag{1}$$

<u>où</u> $S(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^n}$ <u>est le noyau de Szegö de la boule</u>.

On définit ensuite les noyaux $C_k(\zeta,z)$, $k > 0$, en posant

$$C_k(\zeta,z) = \psi_k(\zeta,z)\, C_o(\zeta,z)\ ,$$

où

$$\psi_k(\zeta,z) = \frac{1}{B(n,k)}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k \left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p}\left(\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2}\right)^p\right],$$

où $B(n,k)$ est la fonction de Bessel $\frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)}$.

Le fait que les noyaux $C_k(\zeta,z)$ donnent les solutions minimales dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ de l'équation $\bar{\partial}u = f$ s'obtient en établissant la formule suivante.

THEOREME 2. <u>Soit</u> $u \in C^1(\bar{B})$. <u>Pour tout</u> $z\in B$, <u>on a</u>

$$u(z) = P_{k-1}u(z) + \int_B \bar{\partial}u(\zeta)\wedge C_k(\zeta,z)\ , \tag{2}$$

<u>où</u> P_{k-1} <u>est le projecteur orthogonal de</u> $L^2(d\sigma_{k-1})$ <u>sur le sous-espace des fonctions holomorphes</u>.

On peut noter que la démarche utilisée pour construire les noyaux $C_k(\zeta,z)$ et qui consiste à construire en premier le noyau de Cauchy est naturelle, car si on fait tendre k vers zéro dans la formule (2),on obtient la formule (1).

Les solutions u_k minimales dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ étant donc données par des noyaux explicites, il est aisé d'obtenir des estimations. Tout d'abord, on montre que ces solutions vérifient les meilleures estimations possibles au bord.

THEOREME 3. Soit f une $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée dans B dont les coefficients ainsi que ceux de la forme $(1-|\zeta|^2)^{-1/2}(f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2)$ sont des mesures bornées. Alors la solution minimale u_k de $\bar\partial u = f$ a des valeurs au bord dans $L^1(\partial B)$.

Cette estimation est identique à celle qu'avaient obtenue (pour une autre solution) H. Skoda [28] et G. M. Henkin [13].

On remarque aussi que les estimations qu'avaient obtenues N. Th. Varopoulos [31] et E. Amar et A. Bonami [2] (pour les solutions de Skoda et Henkin) sont aussi satisfaites par les solutions u_k.

On montre ensuite que les u_k satisfont les meilleures estimations possibles dedans.

THEOREME 4. Soit $0 < \alpha < k$ et soit f une $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée dans B. Si les coefficients des formes $(1-|\zeta|^2)^{\alpha}f(\zeta)$ et $(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}(f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2)$ sont des mesures bornées dans B, alors la solution minimale u_k est dans $L^1(d\sigma_{\alpha-1})$.

Si de plus les coefficients de f sont des fonctions mesurables, alors, pour $1 \le p \le \infty$, on a

$$\|u_k\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1})} \le c\left[\|f\|_{L^p(d\sigma_\alpha)} + \|f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1/2})}\right].$$

Cette dernière estimation était en fait déjà connue : S. V. Dautov et G. M. Henkin [8] ont construit une solution de $\bar\partial u = f$ dans les domaines strictement pseudoconvexes qui vérifie cette estimation. On en déduit alors aisément le théorème 4 car le projecteur P_{k-1} est borné de $L^1(d\sigma_{\alpha-1})$ dans lui-même.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution de l'équation $\bar\partial u = f$ dans le polydisque. A notre connaissance peu de résultats ont été publiés précédemment sur ce sujet. Tout d'abord G. M. Henkin [12] a montré à l'aide d'une formule intégrale que si f est une $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée à coefficients continus sur le polydisque fermé $\overline{D^n}$, il existe une fonction u, continue sur $\overline{D^n}$, telle que $\bar\partial u = f$, et de plus on a $\|u\|_{L^\infty(D^n)} \leq c\|f\|_{L^\infty(D^n)}$ où c est une constante qui ne dépend que de n. P. L. Polyakov [23] a étendu ce résultat aux formes de degré $(0,q)$. En utilisant la formule établie par Henkin, M. Landucci [17] et [18] a montré que la solution minimale dans L^2 vérifie elle aussi l'estimation L^∞.

La formule donnée par Henkin peut être considérée comme la formule de Cauchy de polydisque (analogue de la formule du théorème 1 dans le cas de la boule). Comme elle comporte des intégrations sur les faces du polydisque, on ne peut pas, par exemple, obtenir avec elle des estimations en norme $L^p(D^n)$. Il était donc naturel de chercher à établir des formules donnant les solutions minimales pour obtenir de nouvelles estimations. C'est l'objet du premier paragraphe de ce chapitre, les calculs n'étant faits, pour simplifier, que dans le bidisque D^2 de $\mathbb{C}^2$.

Plus précisément, pour tout $k=(k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $k_1>0$, $k_2>0$, soit $d\sigma_{k-1}$ la mesure sur D^2 égale à $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1} d\lambda(z)$, $d\lambda$ étant la mesure de Lebesgue. Pour toute $(0,1)$-forme f, $\bar\partial$-fermée, de classe C^1 dans $\overline{D^2}$, soit u_k la solution de l'équation $\bar\partial u = f$ qui est orthogonale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ aux fonctions holomorphes. On démontre alors la formule suivante.

THEOREME 5. <u>Soit</u> $f = f_1 d\bar\zeta_1 + f_2 d\bar\zeta_2$ <u>une</u> $(0,1)$-<u>forme</u> $\bar\partial$-<u>fermée de classe</u> C^1 <u>dans</u> $\overline{D^2}$. <u>Alors, pour</u> $(z_1,z_2) \in D^2$, <u>on a</u>

$$u_k(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_D f_1(\zeta_1,z_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\, d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 +$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_D f_2(z_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k}(z_2-\zeta_2)}\, d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\Big\{k_2\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\, d\bar\zeta_2 \; -$$

$$- k_1 \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{|\zeta_1 - z_1|^2}{|\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_1 \Big\} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \,.$$

A l'aide de cette formule explicite, on obtient aisément les estimations suivantes

THEOREME 6. Soit $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ une $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée dont les coefficients sont dans $L^1(D^2)$. Alors, pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour tous $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, il existe une constante C ne dépendant que de p, k_1 et k_2 telle que la solution minimale u_k de $\bar{\partial} u = f$ vérifie

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leq C\Big(\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\Big).$$

La seconde partie de ce chapitre est extraite d'un travail réalisé en commun avec E. Amar, et porte sur les valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ des solutions de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans D^2. Si $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ avec $f_1 \in L^1(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in L^1(\mathbf{T} \times D)$, on définit tout d'abord ce que l'on entend par "f est $\bar{\partial}$-fermée au sens de la formule de Stokes" ce que l'on note $\bar{\partial}_b f = 0$. Puis on définit la notion de "valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ au sens de la formule de Stokes pour les solutions de $\bar{\partial} u = f$ lorsque $\bar{\partial}_b f = 0$", ce que l'on note $\bar{\partial}_b u = f$. On définit enfin les classes $\Lambda^p_{(0,1)}(\partial D^2)$ de formes différentielles $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ de la manière suivante : pour $p \in]1,+\infty[$, $f_1 \in L^1(D \times \mathbf{T})$ (resp. $f_2 \in L^1(\mathbf{T} \times D)$) et sa balayée de Poisson en z_1 (resp. z_2) est dans $L^p(\mathbf{T}^2)$; pour $p = 1$ on demande que la balayée de Poisson en z_1 de f_1, $P_1^* f_1$, soit dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ ainsi que $H_1(H_2 P_1^* f_1)$ où H_i est la transformation de Hilbert dans la variable z_i, et l'analogue (en échangeant 1 et 2) pour f_2.

A l'aide d'un noyau résolvant directement sur $\mathbf{T}^2$ l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ on démontre alors le théorème suivant.

THEOREME 7. Si f est une forme $\bar{\partial}_b$-fermée qui appartient à $\Lambda^p_{(0,1)}(\partial D^2)$ ($p \in [1,+\infty[$), alors il existe $u \in L^p(\mathbf{T}^2)$ telle que $\bar{\partial}_b u = f$.

On peut montrer que pour $p \in]1,+\infty[$ ces estimations sont les meilleures possibles. D'autre part, Bo. Berndtsson m'a signalé que l'on peut voir qu'il n'existe pas de noyau envoyant l'espace des $(0,1)$-formes $\bar{\partial}_b$-fermées $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ telles que $f_1 \in L^1(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in L^1(\mathbf{T} \times D)$ dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ et qui résolve l'équation $\bar{\partial}_b u = f$.

Le chapitre III est extrait, avec quelques modifications, du même travail effectué en commun avec E. Amar. Il traite du problème de l'extension d'une fonction holomorphe définie sur un sous-ensemble analytique complexe du bidisque D^2 en une fonction d'une classe de Hardy de D^2. Ce problème avait déjà été étudié auparavant par plusieurs auteurs : suivant une idée de W. Rudin ([27] p. 53), C. Horowitz et D. Oberlin [15] ont caractérisé la restriction de la classe de Hardy $H^p(D^n)$, $p \in [1,+\infty]$, à la diagonale du polydisque. D'autre part, E. L. Stout [30] a caractérisé les sous-ensembles analytiques X de D^n qui sont des images propres du disque unité D de C par une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{D}$ pour lesquels toute fonction holomorphe et bornée sur X s'étend en une fonction de $H^\infty(D^n)$. D'autres auteurs, tels H. Alexander [1], A. Andreotti et W. Stoll [3], P. S. Chee [6] ont aussi étudié le problème de l'extension des fonctions holomorphes bornées.

Les sous-ensembles analytiques que nous considérons ici sont les suivants : ce sont les ensembles de zéros de fonctions u holomorphes dans D^2, C^1 dans $\overline{D^2}$ et telles que :

a) $\frac{\partial u}{\partial z_1}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial z_2}$) ne s'annule pas sur $(\bar{D} \times \mathbf{T}) \cap \overline{Z(u)}$ (resp. $(\mathbf{T} \times \bar{D}) \cap \overline{Z(u)}$) ;

b) Notons $Z(u) = \left\{z \in D^2 \ ; \ u(z) = 0\right\}$. Si $z^0 \in \overline{Z(u)} \cap \mathbf{T}^2$ il existe un voisinage $v(z^0)$ de z^0 tel que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

α) ou bien $\overline{Z(u)} \cap v(z^0) \cap \partial \overline{D^2}$ est contenu soit dans $\bar{D} \times \mathbf{T}$, soit dans $\mathbf{T} \times \bar{D}$;

β) ou bien $\overline{Z(u)} \cap v(z^0) \cap \mathbf{T}^2 = \left\{z^0\right\}$ avec une condition technique supplémentaire.

Naturellement, la diagonale de D^2 vérifie ces conditions, et il n'est pas difficile de voir que les sous-ensembles analytiques considérés par E. L. Stout vérifient a) et b) s'ils n'ont pas de singularités sur $\overline{\partial D^2}$. Par exemple, l'ensemble $z_1^k = z_2^h + c$, où k et h sont des entiers et c une constante, rentre dans le cadre que nous considérons ici. On notera de plus que nous ne demandons pas à l'ensemble analytique $Z(u)$ d'être défini au voisinage de $\overline{D^2}$.

On définit ensuite pour $p \in [1,+\infty]$ les classes $B_p(Z(u))$ de fonctions holomorphes sur $Z(u)$ de la manière suivante :

- pour $p = \infty$, $B_\infty(Z(u))$ est l'espace des fonctions holomorphes bornées sur $Z(u)$

- pour $1 \leq p < \infty$, $B_p(Z(u))$ est la classe des fonctions holomorphes f sur $Z(u)$ telles que :

1. $|f|^p$ est intégrable pour la mesure euclidienne sur $Z(u)$;

2. Supposons $z^o \in \overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$ et que pour tout voisinage $v(z^o)$, $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o)$ ne soit pas contenu dans $\mathbf{T}^2$. On suppose alors qu'il existe un voisinage $v(z^o)$ tel que la fonction f admette des valeurs au bord sur la courbe $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o)$ et que ces valeurs soient dans L^p de cette courbe.

On démontre alors le théorème d'extension suivant.

THEOREME 8. <u>Soient</u> $p \in [1,+\infty]$ <u>et</u> $f \in B_p(Z(u))$, <u>alors il existe</u> $F \in H^p(D^2)$ <u>telle que</u> $F|_{Z(u)} = f$.

La technique utilisée est une méthode homologique classique employée par A. Cumenge [7] pour résoudre le même problème dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$. Les hypothèses faites sur $Z(u)$ et f permettent de construire au voisinage de chaque point de $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$ des extensions locales de f ayant de bonnes propriétés et le théorème B de H. Cartan donne une extension de f loin du bord de D^2. Par recollement, on obtient une fonction $\tilde{F}$, C^∞ dans D^2, qui étend f et qui a des valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ dans L^p. On considère ensuite la forme différentielle $\omega = \frac{1}{u}\,\bar{\partial}\tilde{F}$ et on montre que $\omega \in \Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. Les résultats de la seconde partie du chapitre II montrent donc qu'il existe $g \in L^1(\mathbf{T}^2)$ telle que $\bar{\partial}_b g = \omega$. On en déduit qu'il existe une fonction $G \in C^\infty(D^2)$ telle que $\widetilde{F} - uG$ soit holomorphe et admette $\widetilde{F} - ug$ pour valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$. Pour conclure, on montre que $ug \in L^p(\mathbf{T}^2)$ en reprenant les démonstrations du chapitre II.

Le dernier chapitre est consacré à une étude des zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque et plus précisément des fonctions de la classe de Nevanlinna

$$N(D^n) = \left\{ f \text{ holomorphes dans } D^n \ ; \ \sup_{r<1} \int_{[0,2\pi]^n} \mathrm{Log}^+ \left| f(re^{i\theta_1}, \ldots, re^{i\theta_n}) \right| d\theta_1 \ldots, d\theta_n < +\infty \right\}.$$

Le but principal de cette étude est d'obtenir une condition nécessaire pour qu'un sous-ensemble analytique X de D^n soit un zéro d'une fonction de la classe $N(D^n)$ qui s'exprime simplement sur le courant θ^X d'intégration sur X (cf. P. Lelong [19]).

Dans cet ordre d'idées, P. S. Chee [4], [5], a montré que si X est l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(D^n)$, alors θ^X vérifie la condition de Blaschke généralisée, c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^1 dt \left\{ \int_{D_t^n} \theta^X_{pp} \right\} < \infty,$$

où D_t^n est le polydisque de rayon t. On voit aisément sur des exemples que cette condition ne peut pas caractériser les zéros des fonctions de $N(D^n)$. En fait, la condition de Blaschke ne caractérise même pas les zéros des fonctions de la classe $N'(D^n)$ définie par

$$N'(D^n) = \left\{ f \text{ holomorphes dans } D^n \ ; \ \sup_{r<1} \int_{[0,2\pi]^n} \log \left| f(re^{i\theta_1}, \ldots, re^{i\theta_n}) \right| d\theta_1 \ldots d\theta_n < +\infty \right\}.$$

Pour avoir une condition meilleure que la condition de Blaschke on a donc été amené à chercher une caractérisation des zéros des fonctions de $N'(D^n)$ portant sur le courant θ^X. Pour cela on a cherché à établir une formule de Jensen.

Il existe déjà dans la littérature diverses formules de Jensen dans le polydisque. Par exemple, en utilisant la formule pour les fonctions d'une variable complexe, on montre facilement une caractérisation des zéros des fonctions de $N'(D^n)$ portant sur l'intersection de l'ensemble analytique avec l'ensemble des $(z_1,\ldots,z_n) \in D^n$ tels que $|z_1| = \ldots = |z_n|$; cette caractérisation a l'inconvénient de ne pas s'exprimer simplement sur le courant ∂^X (voir L. I. Ronkin [26] ou W. Stoll [29]). Par ailleurs, en faisant intervenir une métrique Kählerienne bien adaptée au polydisque, P. Malliavin [21] a établi une autre formule de Jensen.

Pour pouvoir démontrer notre formule de Jensen, on est tout d'abord amené à montrer une propriété des sous-ensembles analytiques de D^n.

Si X est un sous-ensemble analytique complexe de codimension 1 de D^n, notons

$$T(X) = \left\{ t \in]0,1[\,;\, \dim_{\mathbf{R}} X \cap \mathbf{T}^n_t = n-1 \right\},$$

où $\mathbf{T}^n_t = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in D^n \,;\, |z_1| = \ldots = |z_n| = t \right\}$.

On cherche à quelle condition sur X l'ensemble $T(X)$ est discret dans $[0,1[$. Cette propriété n'est évidemment pas toujours vraie : par exemple dans $\mathbf{C}^2$, la variété Y d'équation $z_1 = \lambda z_2$, où $\lambda \in \mathbf{T}$, est telle que $T(Y) =]0,1[$. D'une manière générale, on voit aisément qu'il existe, dans $\mathbf{C}^n$, des polynômes homogènes holomorphes P tels que, si $Z(P)$ est l'ensemble des zéros de P, $T(Z(P)) =]0,1[$. On montre alors le théorème suivant :

THEOREME 9. <u>Soit</u> f <u>une fonction holomorphe dans</u> D^n. <u>Il existe un polynôme homogène holomorphe unique</u> P_f <u>et une fonction</u> g_f <u>holomorphe dans</u> D^n <u>tels que</u> :

a) $f = P_f \, g_f$ <u>dans</u> D^n ;

b) <u>Tout facteur irréductible</u> P <u>de</u> P_f <u>est tel que</u> $T(Z(P)) =]0,1[$, $Z(P)$ <u>étant l'ensemble des zéros de</u> P ;

c) <u>Si</u> $Z(g_f)$ <u>est l'ensemble des zéros de</u> g_f <u>alors</u> $T(Z(g_f))$ <u>est discret dans</u> $[0,1[$.

En utilisant ce résultat, on démontre la formule de Jensen suivante :

THEOREME 10. Soit f une fonction holomorphe dans D^n. Soient $f = P_f g_f$ la décomposition de f donnée par le théorème 9, d_f le degré P_f, X l'ensemble des zéros de g_f, et θ^X le courant positif d'intégration sur X (i.e. $\theta^X = 2i\,\partial\bar\partial \operatorname{Log}|g_f|$). Alors, pour $0 < r_1 < r_2 < 1$, on a :

$$\int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|f(r_2 e^{i\theta_1},\dots,r_2 e^{i\theta_2})|\,d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|f(r_1 e^{i\theta_1},\dots$$

$$\dots, r_1 e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{z}\Big\{\sum_{p=1}^{n}\int_{V_p(t)} \theta^X_{pp}(\zeta)\,d\zeta_p \wedge d\bar\zeta_p \bigwedge_{j\neq p} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\Big\} +$$

$$(2\pi)^n d_f \operatorname{Log}\frac{r_2}{r_1},$$

où $V_p(t) = \{(\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n \;;\; |\zeta_p|<t,\ |\zeta_j| = t,\ 1 \le j \le n,\ j \neq p\}$.

Cette formule donne une nouvelle caractérisation des zéros de $N'(D^n)$ portant sur θ^X, à savoir :

$$\int_0^1 dt\Big\{\sum_{p=1}^{n}\int_{V_p(t)} \theta^X_{pp}(\zeta)\,d\zeta_p \wedge d\bar\zeta_p \bigwedge_{j\neq p}\frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\Big\} < \infty. \tag{3}$$

Dans le cas du bidisque D^2, cette condition s'écrit plus simplement :

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} \theta^X_{11} + \int_{\{|z_2|<z_1|\}} \theta^X_{22} < \infty, \tag{4}$$

ce qui montre en particulier que tout ensemble analytique d'aire finie est un zéro d'une fonction de $N'(D^2)$.

Exemples. Soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite de points du disque unité ouvert du plan complexe, et considérons la sous-variété $X_{(a_i)}$ de D^n définie par :

$$X_{(a_i)} = \bigcup_1^\infty X_i \quad \text{où} \quad X_i = \{(z_1,\dots,z_n)\in D^n \;;\; z_1 + \dots + z_n = n\,a_i\}.$$

Pour $n = 2$, on voit aussitôt que la condition (4) signifie que $X_{(a_i)}$ est d'aire finie. Pour $n \geq 3$, on peut choisir les a_i de sorte que $X_{(a_i)}$ soit d'aire finie mais ne vérifie pas (3).

En utilisant un résultat sur les fonctions d'une variable complexe, on peut montrer que la condition (3) est nécessaire et suffisante pour que $X_{(a_i)}$ soit un zéro d'une fonction de $N(D^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER, H. Extending functions from certain subvarieties of a polydisc. Pacific J. Math. 29 (1969), 485-490.

[2] AMAR, E. et BONAMI, A. Mesures de Carleson d'ordre α et solution au bord de l'équation $\bar{\partial}$. Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 23-48.

[3] ANDREOTTI, A. and STOLL, W. The extension of bounded holomorphic functions from hypersurfaces in a polycylinder. Rice Univ. Studies 56 (1970), 199-222.

[4] CHEE, P. S. The Blaschke condition for bounded holomorphic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 249-263.

[5] ___________ On the generalized Blaschke condition. Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 227-231.

[6] ___________ Zero sets and extensions of bounded holomorphic functions in polydiscs. Proc. Amer. Math. Soc. 60 (1976), 109-115.

[7] CUMENGE, A. Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes. C. R. Acad. Sc. Paris 289 (1979), 385-388.

[8] DAUTOV, S. A. and HENKIN, G. M. Zeros of holomorphic functions of finite order and weighted estimates for solutions of the $\bar{\partial}$-equation. Math. USSR Sb. 35 (1979), 449-459.

[9] FOLLAND, G. B. and KOHN, J. J. The Neumann problem for the Cauchy Riemann complex. Ann. Math. Studies, 75, Princeton Univ. Press, 1972.

[10] FOLLAND, G. B. and STEIN, E. M. Paramatrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex on strongly pseudo-convex boundaries. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974).

[11] GREINER, P. G. and STEIN, E. M. Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem. Math. Notes, Princeton Univ. Press (1977).

[12] HENKIN, G. M. and CHIRKA, E. M. Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables. J. Soviet Math. 5 (1976), 612-687.

[13] HENKIN, G. M. The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds. Russian Math. Surveys 32 (1977).

[14] HENKIN, G. M. H. Lewy's equation and analysis on a pseudoconvex manifold. II. Math. USSR Sb. 31 (1977).

[15] HOROWITZ, C. and OBERLIN, D. Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n. Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), 767-772.

[16] KERZMANN, N. Hölder and L^p estimates for the solution of $\bar{\partial}u = f$ on strongly pseudoconvex domains. Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971).

[17] LANDUCCI, M. On the projection of $L^2(D)$ into $H(D)$. Duke Math. J. 42 (1975), 231-237.

[18] LANDUCCI, M. Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$-problem on the polydisc. Proc. Symp. Pure Math. 30 (1977), 177-180.

[19] LELONG, P. Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, Presses Univ. Montréal, 1968.

[20] LIEB, I. Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der Berschränkten Formen. William Marsh, Rice Univ. Houston, Texas, 56 (1970).

[21] MALLIAVIN, P. Sur la répartition des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans le polydisque. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 313.

[22] OVRELID, M. Integral representation formulas and L^p estimates for the $\bar{\partial}$-equation. Math. Scand. 29 (1971), 137-160.

[23] POLYAKOV, P. L. Banach cohomology of fibre spaces. Uspehi Mat. Nauk 26 (1971), 243-244.

[24] PHONG, D. H. On integral representation for the Neumann operator. Proc. Math. Acad. Sc. USA, 76 (1979), 1554-1558.

[25] RANGE, M. and SIU, Y. T. Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. Math. Ann. 206 (1974), 325-354.

[26] RONKIN, L. I. Introduction to the theory of entire functions of several variables. Trans. Math. Monographs 44 (1974).

[27] RUDIN, W. Function theory in polydiscs. Benjamin, New York, 1969.

[28] SKODA, H. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d" et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 225-299.

[29] STOLL, W. Holomorphic functions of finite order in several complex variable. Reg. conf. series in Math. Amer. Math. Sco. 21 (1974).

[30] STOUT, E. L. Bounded extensions. The case of discs in polydiscs. J. Anal. Math. 28 (1975),, 239.

[31] VAROPOULOS, N. Th. BMO functions and the $\bar{\partial}$-equation. Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.

C'est un plaisir pour moi d'exprimer toute ma gratitude à M. N. Varopoulos qui m'a initié à la recherche mathématique et m'a proposé mes premières directions de travail. Il m'a toujours soutenu et ses conseils tout au long de mes recherches m'ont été précieux.

Je remercie vivement M. H. Skoda de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ma thèse, ainsi que des discussions que j'ai eues avec lui.

Je remercie aussi M. P. Malliavin d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et participer au jury.

M. J.P. Kahane a accepté de présider le jury, et je l'en remercie.

M. J. Coates m'a proposé un très intéressant sujet de seconde thèse. Je lui en suis reconnaissant.

Je tiens aussi à dire que les contacts amicaux et stimulants que j'ai toujours trouvés auprès des membres de l'Equipe d'Analyse Complexe d'Orsay m'ont beaucoup aidé pendant mes recherches.

Mmes Dumas et Parvan m'ont toujours accueilli avec beaucoup de gentillesse. Je les remercie de cet accueil et de la compétence avec laquelle elles ont assuré la frappe de mon manuscrit. Je remercie aussi Mmes Launay et Zielinski pour la part qu'elles ont prise à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I

FORMULE DE CAUCHY ET SOLUTIONS MINIMALES DE L'EQUATION $\bar{\partial}u = f$ DANS LA BOULE DE $\mathbb{C}^n$.

En théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, la résolution de l'équation $\bar{\partial}u = f$, f étant une $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée, joue un rôle fondamental, et plusieurs méthodes ont été mises en oeuvre pour obtenir des solutions avec les meilleures estimations possibles. Parmi toutes les solutions de cette équation, dans un domaine donné, il en est une qui peut être considérée comme canonique, c'est la solution qui est orthogonale aux fonctions holomorphes dans L^2, ou, autrement dit, celle qui a la plus petite norme dans L^2.

Dans ce chapitre, on se propose de donner des formules explicites pour les solutions minimales de cette équation dans la boule unité B de $\mathbb{C}^n$.

Plus précisément, pour tout $k \in \left]0,+\infty\right[$, on considère la mesure B, $d\sigma_{k-1}(z) = (1-|z|^2)^{k-1} d\lambda(z)$, $d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue, et on note T_{k-1} l'opérateur défini sur l'espace des $(0,1)$-formes f, $\bar{\partial}$-fermées, de classe C^1 dans $\bar{B}$, tel que $T_{k-1}(f)$ soit la solution minimale de $\bar{\partial}u = f$ dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ (i.e. la solution orthogonale aux fonctions holomorphes dans $L^2(d\sigma_{k-1})$). On construit alors explicitement un noyau de l'opérateur T_{k-1}.

Comme nous allons le voir, la méthode s'inspire directement du cas du disque unité du plan complexe.

1. LE CAS DU DISQUE UNITE DU PLAN COMPLEXE.

Soit D le disque unité du plan complexe,

$$D = \{z\in\mathbb{C} \ ; \ |z|<1\}.$$

Pour toute fonction $u\in C^1(\bar{D})$, et pour $z\in D$, la formule de Cauchy classique s'écrit

$$(I.1) \qquad u(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) S(e^{i\theta}, z)\, d\theta + \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge C_0(\zeta, z),$$

où $S(e^{i\theta}, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-e^{-i\theta}z}$ est le noyau de Szegö de D et $C_0(\zeta, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{d\zeta}{z-\zeta}$ est le noyau de Cauchy.

Pour tout nombre réel $k > 0$, posons, pour $(\zeta, z) \in \bar{D} \times D$,

$$(I.2) \qquad \psi_k(\zeta, z) = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k \quad \text{et}$$

$$C_k(\zeta, z) = \psi_k(\zeta, z)\, C_0(\zeta, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^k (z-\zeta)}\, d\zeta .$$

Un calcul direct montre aussitôt que pour $\zeta \neq z$, on a

$$\bar{\partial}_\zeta\, C_k(\zeta, z) = \bar{\partial}_\zeta \psi_k(\zeta, z) \wedge C_0(\zeta, z) = \frac{k}{2i\pi} \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{k+1}}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta .$$

Il est bien connu que cette dernière expression est le noyau du projecteur orthogonal P_{k-1} de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur le sous-espace des fonctions holomorphes, $d\sigma_{k-1}(z)$ étant la mesure sur D égale à $(1-|z|^2)^{k-1} d\lambda(z)$, $d\lambda$ étant la mesure de Lebesgue.

Par conséquent, en remarquant que, pour $z\in D$, $\psi_k(z,z) = 1$, il résulte aisément de la formule de Stokes que si u est une fonction de classe C^1 dans $\bar{D}$, pour tout $z\in D$, on a

$$(I.3) \qquad u(z) = P_{k-1} u(z) + \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge C_k(\zeta, z).$$

La formule (I.3) montre la proposition suivante.

PROPOSITION I.1. <u>Soit</u> f <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>dans</u> $\bar{D}$. <u>Pour tout</u>

<u>nombre réel</u> $k > 0$, <u>la fonction</u> $u_k(z)$ <u>définie dans</u> D <u>par</u>

$$u_k(z) = \int_D f(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge C_k(\zeta, z)\ ,$$

<u>est la solution de l'équation</u> $\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f$ <u>qui est orthogonale dans</u> $L^2(d\sigma_{k-1})$ <u>aux fonctions holomorphes</u>.

Les estimations sur les solutions de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f$ que l'on peut obtenir en utilisant les noyaux $C_k(\zeta, z)$ sont les meilleures estimations que l'on puisse obtenir à l'aide d'un noyau.

Considérons par exemple les valeurs au bord sur $\mathbf{T}$ des solutions u_k : notons bC_k la restriction de C_k à $D \times \mathbf{T}$ et bu_k la restriction de u_k à .

De l'identité, valable pour $z \in \mathbf{T}$,

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{\bar{z}(1-|\zeta|^2)}{|1-\bar{\zeta} z|^2} - \frac{\bar{\zeta}}{1-\bar{\zeta} z}\ ,$$

on déduit

$$bC_k(\zeta, z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right)^k \frac{\bar{z}(1-|\zeta|^2)}{|1-\bar{\zeta} z|^2} - \frac{1}{2i\pi} \frac{\bar{\zeta}(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta} z)^{k+1}}\ .$$

Une estimation immédiate de cette dernière expression fournit alors le résultat suivant:

PROPOSITION I.2. <u>Pour tout</u> $k > 0$, <u>il existe une constante</u> C <u>ne dépendant que de</u> k <u>telle que pour toute</u> $f \in C^1(\bar{D})$, <u>la solution minimale</u> u_k de $\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f$ <u>vérifie l'estimation</u>

$$\|bu_k\|_{L^1(\mathbf{T})} \leq C \|f\|_{L^1(D)}\ .$$

En calculant directement sur l'expression donnée en (I.2) des noyaux $C_k(\zeta, z)$, on obtient aisément des estimations à poids pour les solutions u_k :

PROPOSITION I.3. <u>Pour tout</u> $k > 0$ <u>et tout réel</u> α, $0 < \alpha < k$, <u>il existe une constante</u> C <u>ne dépendant que de</u> k <u>et de</u> α <u>telle que pour toute</u> $f \in C^1(\bar{D})$, <u>la solution minimale</u> u_k <u>de</u> $\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f$ <u>vérifie l'estimation</u>

$$\|(1-|z|^2)^{\alpha-1}u_k(z)\|_{L^1(D)} \leq \|(1-|z|^2)^{\alpha} f(z)\|_{L^1(D)}.$$

Comme l'ont montré S. V. Dautov et G. M. Henkin dans [5] l'estimation de la proposition I.3 peut être utilisée pour caractériser les zéros des fonctions des classes $N_\alpha(D)$, $\alpha > -1$, définies par

$$N_\alpha(D) = \left\{ f \text{ holomorphes dans } D \; ; \int_D (1-|z|^2)^\alpha \log^+ |f(z)| \, d\lambda(z) < +\infty \right\}.$$

En effet, la formule de Jensen montre aussitôt que si $(a_i)_{i\geq 1}$ est la suite des zéros d'une fonction appartenant à $N_\alpha(D)$, on a $\sum_1^\infty (1-|a_i|^2)^{\alpha+2} < +\infty$. Autrement dit si $\theta(z)$ désigne la mesure sur D égale à $\sum_1^\infty \delta_{a_i}(z)$, $\delta_{a_i}(z)$ étant la mesure de Diract au point a_i, la mesure $(1-|z|^2)^{\alpha+2}\theta(z)$ est de masse totale finie. En résolvant alors l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \theta$ à l'aide, d'une part de l'homotopie de Poincaré et d'autre part de la proposition I.3, on conclut qu'il existe une solution de cette équation qui vérifie $\|(1-|z|^2)^\alpha u(z)\|_{L^1(D)} \leq C\|(1-|z|^2)^{\alpha+2}\theta(z)\|_{L^1(D)}$.

De cette estimation on déduit aisément (cf. [5] ou [9]) que les zéros des fonctions des classes $N_\alpha(D)$ sont caractérisés par la condition $\sum_1^\infty (1-|a_i|^2)^{\alpha+2} < \infty$.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons généraliser à la boule unité de $\mathbb{C}^n$ les résultats sur les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial} u = f$ que nous venons de rappeler dans le cas du disque unité de $\mathbb{C}$.

En premier lieu, nous allons construire le noyau de Cauchy de la boule de manière à généraliser la formule (I.1).

Puis nous définirons les fonctions ψ_k et les noyaux C_k de la boule comme dans (I.2), ce qui nous permettra de généraliser la formule (I.3).

Nous montrerons ensuite que, comme dans le cas du disque, les solutions minimales u_k de la boule fournissent les meilleures estimations possibles (par un noyau) pour les solutions de $\bar{\partial} u = f$, c'est-à-dire les estimations analogues de celles des propositions I.2 et I.3 ci-dessus.

2. LE NOYAU DE CAUCHY DE LA BOULE.

Précisons tout d'abord une notation que nous utiliserons constamment par la suite : pour tous ξ de η dans $\mathbb{C}^n$, nous notons

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

de sorte que la boule unité B de $\mathbb{C}^n$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n$ tels que $z\bar{z} < 1$.

Nous allons définir le noyau de Cauchy de B en utilisant les formes de Cauchy-Fantapié. Nous reprenons les notations et la terminologie utilisée par H. Skoda dans [9] : soit μ la forme de Cauchy-Leray,

$$\mu = \left[\xi(\zeta-z)\right]^{-n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \xi_i(\bigwedge_{j\neq i} d\xi_j) \bigwedge_{i=1}^{n} d(\zeta_i-z_i).$$

Pour toute section s du fibré de Cauchy-Leray, on a donc

$$s^*\mu = \left[s(\zeta,z)(\zeta-z)\right]^{-n} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} s^i(\zeta,z)(\bigwedge_{j\neq i} ds^j(\zeta,z)) \bigwedge_{i=1}^{n} d(\zeta_i-z_i).$$

Soit alors $s_o(\zeta,z)$ l'application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ définie vectoriellement par

$$s_o(\zeta,z) = \bar{\zeta}(1-\zeta\bar{z}) - \bar{z}(1-|\zeta|^2).$$

Un calcul immédiat montre que

$$s_o(\zeta,z)(\zeta-z) = D(\zeta,z) = |1-\bar{\zeta}z|^2 - (1-|\zeta|^2)(1-|z|^2),$$

et que

$$D(\zeta,z) = (1-|\zeta|^2)|\zeta-z|^2 + |\bar{\zeta}(\zeta-z)|^2 = (1-|z|^2)|\zeta-z|^2 + |\bar{z}(\zeta-z)|^2.$$

Par conséquent $s_o(\zeta,z)$ est une section du fibré de Cauchy-Leray (i. e. $s_o(\zeta,z)(\zeta-z)$ ne s'annule qu'en $\zeta = z$, $(\zeta , z) \in B \times B$) et de plus si on a soit $|\zeta| \leq r < 1$ soit $|z| \leq r < 1$, alors

(I.4) $$D(\zeta,z) \geq (1-r^2)|\zeta-z|^2.$$

Nous définissons alors le noyau de Cauchy $K_o(\zeta,z)$ de B en posant

(I.5) $$K_o(\zeta,z) = s_o^* \mu(\zeta , z).$$

Pour tous entiers p et q, $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, nous notons $K_o^{p,q}$ la composante de degré $(n-p , n-q)$ en ζ (et par conséquent de degré $(p , q-1)$ en z) du noyau K_o.

Les propriétés fondamentales des noyaux $K_o^{p,q}$ sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION I.4.

1. $\bar{\partial}_\zeta(K_o^{p,1}(\zeta,z)) = 0$; <u>pour</u> $q \geq 2$, $\bar{\partial}_\zeta(K_o^{p,q}(\zeta,z)) = -\bar{\partial}_z(K_o^{p,q-1}(\zeta,z))$.

2. <u>Pour</u> $q \geq 2$, on a $K_o^{p,q}(\zeta,z) = 0$ <u>lorsque</u> $z \in B$ <u>et</u> $|\zeta| = 1$.

3. <u>Pour</u> $(\zeta,z) \in \bar{B} \times \bar{B}$, <u>on a</u>

$$K_o^{0,1}(\zeta,z) = \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j\right] \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i .$$

<u>De plus lorsque</u> $(\zeta,z) \in \partial B \times B$ <u>si on identifie le noyau</u> $K_o^{0,1}(\zeta,z)$ <u>à une fonction de</u> ζ <u>et</u> z <u>que multiplie la mesure de Lebesgue</u> $d\lambda(\zeta)$ <u>sur</u> ∂B, <u>on a</u>

$$K_o^{0,1}(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} S(\zeta,z)\, d\lambda(\zeta),$$

<u>où</u> $S(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-\bar{\zeta} z)^n}$ <u>est le noyau de Szegö de la boule</u>.

4. <u>Pour tout</u> $z \in B$ <u>et pour toute forme de degré</u> $(p , q-1)$ u, <u>de classe</u> C^1 <u>dans un voisinage de</u> z, <u>on a</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} u(\zeta)\ K_o^{p,q}(\zeta,z) = c_{n,p,q}\, u(z)\ ,$$

<u>où</u> $B_\varepsilon(z)$ <u>désigne la boule de centre</u> z <u>et de rayon</u> ε, <u>et</u> $c_{n,p,q}$ <u>est une constante numérique</u>.

Le 1. exprime le fait que les formes de Cauchy-Fantapié sont fermées.

Le 2. se voit par un calcul direct : si $|\zeta| = 1$, on a,

$$s_o^i(\zeta,z) \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial(s_o^j(\zeta,z)) = \bar\zeta_i(1-\zeta\bar z) \bigwedge_{j\neq i} \left[(1-\zeta\bar z)\, d\bar\zeta_j + \bar z_j \bar\partial(|\zeta|^2) - \bar\zeta_j\, \bar\partial_z(\zeta\,\bar z)\right].$$

Le résultat cherché est donc évident si $q \geq 3$. Pour $q = 2$, il suffit de remarquer que la composante de degré $(0,1)$ en z de $(-1)^{i-1} s_o^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial(s_o^j(\zeta,z))$ est égale à :

$$(1-\zeta\bar z)\left\{\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+1}\, \bar\zeta_i \bar\zeta_j\, \bar\partial_z(\zeta\,\bar z) \bigwedge_{k\neq i,j} \left[(1-\zeta\bar z)\, d\bar\zeta_k + \bar z_k\, \bar\partial(|\zeta|^2)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{i+j}\, \bar\zeta_i\, \bar\zeta_j\, \bar\partial_z(\zeta\,\bar z) \bigwedge_{k\neq i,j} \left[(1-\zeta\bar z) d\bar\zeta_k + \bar z_k\, \bar\partial(|\zeta|^2)\right]\right\},$$

d'où l'annulation après sommation sur i.

Compte tenu du fait que $s_o(\zeta,z)(\zeta-z) = D(\zeta,z)$, pour voir le 3. il faut calculer le numérateur de $K_o^{0,1}$, c'est-à-dire $\Sigma\,(-1)^{i-1}\, s_o^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta\, s_o^j$:

$$\bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta\, s_o^j = \bigwedge_{j\neq i} \left[(1-\zeta\bar z)\, d\bar\zeta_j + \bar z_j\, \bar\partial|\zeta|^2\right] =$$

$$= (1-\zeta\bar z)^{n-1} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j + (1-\zeta\bar z)^{n-2} \left\{\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1}\, \bar z_j \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell + \right.$$

$$\left. \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j\, \bar z_j\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right\}.$$

$$s_o^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta\, s_o^j = \left[\bar\zeta_i(1-\zeta\bar z) - \bar z_i(1-|\zeta|^2)\right](1-\zeta\bar z)^{n-1} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j +$$

$$+ (1-\zeta\bar z)^{n-2}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1}\, (\bar\zeta_i \bar z_j(1-\zeta\bar z) - \bar z_i \bar z_j(1-|\zeta|^2))\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j\, (\bar\zeta_i\, \bar z_j(1-\zeta\bar z) - \bar z_i\, \bar z_j(1-|\zeta|^2))\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right\}.$$

Par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} s^i \bigwedge_{j\neq i} \bar{\partial}_\zeta s^j =$$

$$= (1-\zeta\bar{z})^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\bar{\zeta}_i(1-\zeta\bar{z}) - \bar{z}_i(1-|\zeta|^2) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\bar{\zeta}_j \bar{z}_i - \bar{\zeta}_i \bar{z}_j)\, \bar{\partial}|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar{\zeta}_\ell \right\}.$$

On obtient alors la formule cherchée en remarquant que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j =$$

(I.6)

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\bar{\zeta}_i(1-\zeta\bar{z}) - \bar{z}_i(1-|\zeta|^2)) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\bar{\zeta}_j \bar{z}_i - \bar{\zeta}_i \bar{z}_j)\bar{\partial}|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar{\zeta}_\ell .$$

La valeur de $K_o^{0,1}(\zeta,z)$ lorsque $|\zeta| = 1$ se déduit aisément de la formule explicite donnant $K_o^{0,1}$.

La démonstration de la quatrième partie de la proposition est classique : elle se fait en utilisant une homotopie entre s_o et la section de Martinelli-Bochner $s_b(\zeta,z) = \bar{\zeta} - \bar{z}$: soit $F(\zeta,z,t) = ts_o + (1-t)\, s_b$, et appliquons la formule de Stokes à $\mu(\zeta) \wedge F^*\mu$ sur $\partial B_\varepsilon \times [0,1]$:

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_o^* \mu - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_b^* \mu = \int_{\partial B_\varepsilon \times [0,1]} \bar{\partial} u \wedge F^* \mu .$$

En remarquant que les composantes de $F(\zeta,z,t)$ ainsi que celles de $\frac{\partial}{\partial t} F(\zeta,z,t)$ sont majorées par $C|\zeta - z|$, on conclut que les coefficients du numérateur de $F^*\mu$ sont majorés par $C|\zeta - z|^2$ et, en utilisant (I.4), on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon \times [0,1]} \bar{\partial} u \wedge F^* \mu = 0.$$

La conclusion résulte donc de la formule classique (cf. [8]) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_b^* \mu = c_{n,p,q}\, u(z).$$

THEOREME I.1. 1. Soit q un entier ≥ 2. Pour toute forme $u(\zeta)$ de degré $(p,q-1)$ et de classe C^1 dans $\bar{B}$, on a, pour $z \in B$:

$$c_{n,p,q}\, u(z) = -\int_B \bar\partial u(\zeta)\wedge K_0^{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q}\bar\partial_z\Big(\int_B u(\zeta)\wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z)\Big).$$

2. Pour toute forme de degré $(p,0)$ $u(\zeta)$ de classe C^1 dans $\bar B$, on a, pour $z\in B$:

$$c_{n,p,1}\, u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta)\wedge K_0^{p,1}(\zeta,z) - \int_B \bar\partial u(\zeta)\wedge K_0^{p,1}(\zeta,z)\ ,$$

et la forme $z \longrightarrow \int_{\partial B} u(\zeta)\wedge K_0^{p,1}(\zeta,z)$ est à coefficients holomorphes dans B.

En particulier, si u est une fonction:

3. Formule de Cauchy. Soit u une fonction de classe C^1 dans $\bar B$. Pour tout $z\in B$, on a

$$\text{(I.7)}\qquad u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta)\, S(\zeta,z)\, d\lambda(\zeta) - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_B \bar\partial u(\zeta)\wedge \frac{(1-\zeta\bar z)^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\,\omega(\zeta,z)\ ,$$

où $S(\zeta,z) = \dfrac{(n-1)!}{2\pi^n}\dfrac{1}{(1-\bar\zeta z)^n}$ est le noyau de Szegö de la boule, $d\lambda(\zeta)$ la mesure de Lebesgue sur ∂B, et $\omega(\zeta,z) = \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(\bar\zeta_i - \bar z_i)\bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j\right]\bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i$.

Supposons tout d'abord $q\geq 2$. Soit $v(z)$ une forme de degré $(n-p\ ,\ n-q+1)$, de classe C^1 et à support compact dans B. Appliquons la formule de Stokes à $u(\zeta)\wedge K_0(\zeta,z)\wedge v(z)$ sur $B\times B\setminus U_\varepsilon$ où $U_\varepsilon = \{(\zeta,z)\in B\times B\ ;\ |\zeta-z|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$: compte tenu du 1. et du 2. de la proposition I.4 , il vient,

$$-\int_{\partial U_\varepsilon} u(\zeta)\wedge K_0^{p,q}(\zeta,z)\wedge v(z) = \int_{B\times B\setminus U_\varepsilon} \bar\partial u(\zeta)\wedge K_0^{p,q}(\zeta,z)\wedge v(z)$$
$$+ (-1)^{p+q}\int_{B\times B\setminus U_\varepsilon} u(\zeta)\wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z)\wedge\bar\partial v(z).$$

Puisque $v(z)$ est à support compact dans B, dans les deux intégrales du membre de droite, on peut majorer les noyaux $K_0^{p,q}$ et $K_0^{p,q-1}$ lorsque ζ est au voisinage z (en utilisant (I.4)) par $\dfrac{C}{|\zeta-z|^{2n-1}}$. Par suite, en utilisant le 4. de la Proposition I.4, il vient, en faisant tendre ε vers zéro,

$$-c_{n,p,q}\int_B u(z)\wedge v(z) = \int_{B\times B} \bar\partial u(\zeta)\wedge K_0^{p,q}(\zeta,z)\wedge v(z) + (-1)^{p+q}\int_{B\times B} u(\zeta)\wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$\wedge\,\bar\partial v(z),$$

ce qui donne la formule cherchée.

Supposons maintenant $q = 1$. On applique alors la formule de Stokes à $u(\zeta)\wedge K_o^{p,1}(\zeta,z)$ sur $B \setminus B_\varepsilon(z)$ où $B_\varepsilon(z)$ est une boule centrée en z et de rayon $\varepsilon > 0$. En utilisant le 1. de la Proposition I.4, il vient

$$\int_{\partial B} u(\zeta)\wedge K_o^{p,1}(\zeta,z) - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta)\wedge K_o^{p,1}(\zeta,z) = \int_{B\setminus B_\varepsilon} \bar{\partial}\, u(\zeta)\wedge K_o^{p,1}(\zeta,z).$$

Comme précédemment, on obtient la formule cherchée en faisant tendre ε vers zéro. Le fait que la forme $z \longrightarrow \int_{\partial B} u(\zeta)\wedge K_o^{p,1}(\zeta,z)$ est à coefficients holomorphes dans B est une conséquence du 3. de la Proposition I.4 . Enfin la formule de Cauchy résulte du 3. de la Proposition I.4.

REMARQUE. La section s_o du fibré de Cauchy-Leray que nous considérons ici est étroitement liée à la section s_h construite par H. Skoda dans [9]. En effet, pour tout $(\zeta,z) \in B \times \partial B$, on a

$$s_o(\zeta,z) = (1-\zeta\bar{z})\, s_h(\zeta,z) ,$$

et, par suite, lorsque $z \in \partial B$, les composantes de degré $(n,n-1)$ en ζ de $s_o^*\mu$ et $s_h^*\mu$ sont les mêmes. Notons toutefois que $s_h^*\mu$ n'est pas le noyau que construit finalement H. Skoda, car il retire à $s_h^*\mu$ une forme dont les coefficients sont holomorphes en z. Ceci sera précisé au § 3 (formule (I.15)).

3. FORMULES EXPLICITES POUR LES SOLUTIONS MINIMALES DE L'EQUATION $\bar{\partial} u = f$ DANS LA BOULE.

$d\lambda(z)$ désignant la mesure de Lebesgue dans C^n normalisée de sorte que $d\lambda(B) = 1$, pour tout réel $k > 0$, nous désignerons par $d\sigma_{k-1}(z)$ la mesure sur B $(1-|z|^2)^{k-1}\, d\lambda(z)$.

$H(B)$ désignant l'espace des fonctions holomorphes dans B, soit P_{k-1} le projecteur orthogonal de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur $H(B)\cap L^2(d\sigma_{k-1})$.

Soit $\mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ l'espace des formes différentielles f de degré $(0,1)$ à coefficients de classe C^1 dans $\bar{B}$ et telles que $\bar{\partial} f = 0$. Soit H un opérateur linéaire de $\mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ dans $C^1(\bar{B})$ tel que pour toute $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ on a $\bar{\partial}(H(f)) = f$ (cf. [6]), et posons

$$T_{k-1} = H - P_{k-1} \circ H.$$

T_{k-1} est donc l'opérateur qui à toute forme $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ fait correspondre la solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$ qui est orthogonale aux fonctions holomorphes dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, ou encore celle qui a la plus petite norme dans $L^2(d\sigma_{k-1})$.

Dans ce paragraphe, nous allons écrire explicitement les noyaux des opérateurs T_{k-1}. Comme nous l'avons dit dans le paragraphe 1 ces noyaux s'écrivent de manière analogue à ceux du cas $n = 1$: on va multiplier le noyau de Cauchy défini dans le paragraphe précédent par une fonction convenable $\psi_k(\zeta, z)$ qui vérifiera entre autres $\psi_k(z,z) = 1$ et $\psi_k(\zeta, z) = 0$ pour $(\zeta, z) \in \partial B \times B$.

Posons tout d'abord

$$C_o(\zeta, z) = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} K_o^{0,1}(\zeta, z). \tag{I.8}$$

Pour tout nombre complexe $k \neq 0$, tel que $\operatorname{Re} k \geq 0$, nous définissons la fonction $\psi_k(\zeta, z)$ par

$$\psi_k(\zeta, z) = \frac{1}{B(n,k)} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right)^k \left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p} \left(\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta} z|^2}\right)^p\right], \tag{I.9}$$

où C_{n-1}^p est le coefficient binomial $\dfrac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$, et, $B(n,k)$ la fonction de Bessel $B(n,k) = \dfrac{\Gamma(n)\,\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)}$.

Nous définissons alors le noyau $C_k(\zeta, z)$ par

$$C_k(\zeta, z) = \psi_k(\zeta, z)\, C_o(\zeta, z). \tag{I.10}$$

On peut remarquer que, compte-tenu de la formule classique

$$B(n, k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p}, \tag{I.11}$$

la limite, lorsque k tend vers zéro de $C_k(\zeta,z)$ est égale à $C_o(\zeta,z)$.

On a alors le théorème suivant.

THEOREME I.2. Soit f une forme différentielle de degré $(0,1)$, $\bar\partial$-fermée et de classe C^1 dans $\bar B$.

i) Pour tout nombre complexe k, $\operatorname{Re} k \geq 0$, la fonction $u_k(z)$, $z\in B$, définie

$$u_k(z) = \int_B f(\zeta)\wedge C_k(\zeta,z)\ ,$$

où $C_k(\zeta,z)$ est le noyau défini par (I.8), (I.9) et (I.10) est une solution de l'équation $\bar\partial u = f$.

ii) De plus, si k est un réel strictement positif, on a, pour tout $z\in B$,

$$T_{k-1}(f)(z) = u_k(z).$$

Lorsque $k = 0$, le fait que $\bar\partial u_o = f$ résulte de la formule de Cauchy du théorème I.1.

Pour faire la démonstration, nous allons tout d'abord supposer $\operatorname{Re} k > 0$.

LEMME. Pour $\operatorname{Re} k > 0$ et $\zeta \neq z$, on a

$$\text{(I.12)}\qquad \bar\partial_\zeta C_k(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{B(n,k)} \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} \bigwedge_{i=1}^{n} d\bar\zeta_i \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i\ .$$

Pour simplifier l'écriture, posons $C_{n,k} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \dfrac{1}{B(n,k)}$. D'après le 1. de la Proposition I.4 et la définition de $C_k(\zeta,z)$, on a

$$\bar\partial_\zeta C_k(\zeta,z) = \bar\partial_\zeta \psi_k(\zeta,z)\wedge C_o(\zeta,z).$$

Or,

$$\psi_k(\zeta,z) = \frac{1}{B(n,k)} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{k+p} \left(\frac{1-|z|^2}{1-\zeta\bar z}\right)^p ,$$

et par suite,

$$\bar\partial_\zeta C_k(\zeta,z) = -C_{n,k}\left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p (-1)^p \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{k+p-1} \left(\frac{1-|z|^2}{1-\zeta\bar z}\right)^p\right] \bar\partial_\zeta \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)\wedge C_o(\zeta,z) =$$

$$= - c_{n,k}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{k-1} \frac{D^{n-1}(\zeta,z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{2n-2}}\ \bar{\partial}_\zeta\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)\wedge C_o(\zeta,z).$$

Comme, en vertu du 3. de la Proposition I.4, on a

$$\bar{\partial}_\zeta\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)\wedge C_o(\zeta,z) = - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\zeta_i(1-\bar{\zeta}z) - z_i(1-|\zeta|^2)\right]d\bar{\zeta}_i}{(1-\bar{\zeta}z)^2} \wedge \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i =$$

$$= - \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^2\, D^{n-1}(\zeta,z)} \bigwedge_{i=1}^{n} d\bar{\zeta}_i \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i ,$$

la formule du lemme en découle aussitôt.

Démontrons maintenant le théorème I.2 pour $\operatorname{Re} k > 0$: soit $u(\zeta)$ une fonction de classe C^1 dans $\bar{B}$ et soit $B_\varepsilon(z)$ une boule centrée en z et de rayon $\varepsilon > 0$. Appliquons la formule de Stokes à $u(\zeta)\, C_k(\zeta,z)$ sur $B \setminus B_\varepsilon$: puisque $\operatorname{Re} k > 0$, on a $C_k(\zeta,z) = 0$ lorsque $|\zeta| = 1$, et, compte tenu du lemme, il vient :

$$\text{(I.13)}\quad \int_{B\setminus B_\varepsilon} \bar{\partial}u(\zeta)\wedge C_k(\zeta,z) = - c_{n,k}\int_{B\setminus B_\varepsilon} u(\zeta)\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}} \bigwedge_1^n d\bar{\zeta}_i \bigwedge_1^n d\zeta_i - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta)\, C_k(\zeta,z).$$

Remarquons maintenant que, d'après (I.11), lorsque $\varepsilon \to 0$ la fonction $\psi_k(\zeta,z)$ converge vers 1 uniformément par rapport à $\zeta \in \partial B_\varepsilon$, et le 4. de la Proposition I.4 entraine que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta)\, C_k(\zeta,z) = -u(z).$$

En utilisant (I.4) en faisant tendre ε vers zéro, on déduit donc de (I.13) que

$$\text{(I.14)}\quad \int_B \bar{\partial}u(\zeta)\wedge C_k(\zeta,z) = u(z) - c_{n,k}\int_B u(\zeta)\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}} \bigwedge_{i=1}^n d\bar{\zeta}_i \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i .$$

Ceci montre la première partie du théorème I.2 pour $\operatorname{Re} k > 0$ ainsi que la deuxième partie en tenant compte de la formule (cf. [7]).

$$P_{k-1}(u)(z) = \frac{1}{n\,B(n,k)}\int_B u(\zeta)\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}}\, d\lambda(\zeta).$$

REMARQUE. Cette dernière formule est d'ailleurs une conséquence immédiate de la formule (I.14). En effet, si $h(\zeta)$ est une fonction holomorphe de classe C^1 dans $\overline{\mathbf{B}}$, d'après (I.14) on a

$$\frac{1}{n\,B(n,k)}\int_B h(\zeta)\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}}\,d\lambda(\zeta) = h(z).$$

Par suite $$\frac{1}{nB(n,k)}\int_{B\times B} u(\zeta)\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}}\,\overline{h(z)}\,d\lambda(\zeta)\,d\sigma_{k-1}(z) =$$

$$= \int_B u(\zeta)\overline{\left\{\frac{1}{nB(n,k)}\int_B \frac{(1-|z|^2)^{k-1}}{(1-\zeta\bar{z})^{n+k}}\,h(z)\,d\lambda(z)\right\}}\,d\sigma_{k-1}(\zeta)$$

$$= \int_B u(\zeta)\,\overline{h(\zeta)}\,d\sigma_{k-1}(\zeta)\ ,$$

et la conclusion en découle aussitôt.

Il nous reste maintenant à démontrer la première partie du théorème I.2 lorsque $\mathrm{Re}\,k = 0$. Posons $k = i\beta$ et soit $\alpha > 0$. La première partie de la démonstration montre que $u_{\alpha+i\beta}$ est une solution de $\bar{\partial}u = f$. Pour voir que $u_{i\beta}$ est aussi une solution de $\bar{\partial}u = f$ il suffit de voir que, lorsque α tend vers zéro, la fonction $u_{\alpha+i\beta}$ converge vers $u_{i\beta}$ uniformément par rapport à $z \in B_r = \{|z| < r\}$, $r < 1$. Or si on remarque que pour tous $\zeta, z \in B$, tout $\alpha > 0$ et tout $p \geq 0$, $\left|\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+p+i\beta}\right| \leq C$, C étant une constante absolue, et que, pour tout $r_o < 1$, la fonction $\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha}$ converge vers 1 lorsque α tend vers zéro, uniformément par rapport à ζ et z dans B_{r_o}, en écrivant

$$u_{i\beta}(z) - u_{\alpha+i\beta}(z) = \int_{B_{r_o}} u(\zeta)\left[C_{i\beta}(\zeta,z) - C_{\alpha+i\beta}(\zeta,z)\right] + \int_{B\setminus B_{r_o}} u(\zeta)\left[C_{i\beta}(\zeta,z) - C_{\alpha+i\beta}(\zeta,z)\right],$$

à l'aide de majorations évidentes des noyaux (résultant de (I.4)), on conclut immédiatement à la convergence uniforme de $u_{\alpha+i\beta}$ vers $u_{i\beta}$, ce qui achève de démontrer le théorème I.2.

Dans le paragraphe suivant nous donnerons, outre des estimations des noyaux

$C_k(\zeta, z)$, des estimations des valeurs au bord des solutions u_k du théorème I.2.

Rappelons tout d'abord la terminologie utilisée par H. Skoda dans [9] : étant donné une $(0,1)$-forme f, $\bar\partial$-fermée, dont les coefficients sont des mesures bornées dans B, nous dirons qu'une fonction $u \in L^1(\partial B)$ est une solution de l'équation $\bar\partial_b u = f$, si pour toute forme φ de degré $(n,n-1)$, de classe C^1 dans $\bar B$, $\bar\partial$-fermée, on a

$$\int_{\partial B} u(\zeta)\,\varphi(\zeta) = \int_B f(\zeta) \wedge \varphi(\zeta).$$

Des estimations faciles des noyaux $C_k(\zeta, z)$ (voir § suivant) montrent que si $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar B)$ alors la fonction $u_k(z)$ du théorème I.2 est définie pour tout $z \in \bar B$, et de plus u_k est continue dans $\bar B$. Il en résulte alors aussitôt que, si on note $b\,u_k(z)$ la restriction de $u_k(z)$ à $z \in \partial B$, $\bar\partial_b\, bu_k = f$ au sens défini ci-dessus.

Dans le paragraphe 3, nous noterons $b\,C_k(\zeta, z)$ la restriction de $C_k(\zeta, z)$ à $(\zeta, z) \in B \times \partial B$, de sorte que

$$b\,u_k(z) = \int_B f(\zeta) \wedge b\,C_k(\zeta, z)\ ,$$

et nous donnerons des estimations des noyaux $b\,C_k$.

4. ESTIMATIONS DES SOLUTIONS MINIMALES DANS LA BOULE.

Commençons tout d'abord par les noyaux $b\,C_k(\zeta, z)$.

De la formule du 3. de la Proposition I.4, et des formules (I.6), (I.9) et (I.10), on déduit que les noyaux $b\,C_k(\zeta, z)$ s'écrivent :

$$b\,C_k(\zeta, z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{k\,B(n,k)} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^k \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\bar z_i (1-|\zeta|^2)}{(1-\bar\zeta z)^n (1-\zeta\bar z)} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j \ -$$

$$- \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}(\bar\zeta_j \bar z_i - \bar\zeta_i \bar z_j)}{(1-\bar\zeta z)^n (1-\zeta\bar z)} \bar\partial |\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell \Bigg\} \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i \ -$$

(I.15)

$$- (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{k\,B(n,k)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\bar\zeta_i (1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i \ =$$

$$(\mathrm{I}.15) \quad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{k\,B(n,k)} \left[\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} \right)^k H(\zeta,z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\bar{\zeta}_i (1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta} z)^{n+k}} \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i \right].$$

Dans cette dernière expression, le noyau $H(\zeta,z)$ est exactement celui construit par H. Skoda.

Des calculs aisés montrent qu'il existe une constante C ne dépendant pas de $\zeta \in E$ telle que

$$\int_{\partial B} \frac{d\lambda(z)}{|1-\bar{\zeta} z|^{n+1}} \leq \frac{C}{1-|\zeta|^2}, \quad \text{et,} \quad \int_{\partial B} \frac{|\zeta - z|}{|1-\bar{\zeta} z|^{n+1}} d\lambda(z) \leq \frac{C}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}},$$

$d\lambda(z)$ désignant la mesure de Lebesgue sur ∂B.

De plus, pour $\operatorname{Re} k > 0$ il existe une constante C'_k ne dépendant que de k telle que

$$(\mathrm{I}.16) \qquad \left| \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta} z)^{n+k}} \right| \leq C'_k \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}}{|1-\bar{\zeta} z|^{n+\operatorname{Re} k}},$$

et par suite il existe une constante C_k ne dépendant pas de $\zeta \in B$ telle que

$$\int_{\partial B} \left| \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta} z)^{n+k}} \right| d\lambda(z) \leq C_k.$$

On en conclut l'existence d'une autre constante C_k ne dépendant pas de $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ telle que (avec les notations de la fin du paragraphe précédent)

$$\|bu_k(z)\|_{L^1(\partial B)} \leq C_k \left\{ \|f\|_{L^1(B)} + \left\| \frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial} |\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \right\|_{L^1(B)} \right\},$$

où $\|f\|_{L^1(B)}$ (resp. $\left\| \frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial} |\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}} \right\|_{L^1(B)}$) est le maximum des normes dans $L^1(B)$ des coefficients de f (resp. de $\frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial} |\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$).

Par un procédé de régularisation (cf. [9]) on en déduit le théorème suivant.

THEOREME I.3. <u>Soit</u> f <u>une</u> $(0,1)$-<u>forme</u> $\bar{\partial}$-<u>fermée dont les coefficients ainsi que ceux de la forme</u> $\frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial} |\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ <u>sont des mesures bornées dans</u> B. <u>Alors pour tout</u>

<u>nombre complexe</u> k, $\mathrm{Re}\, k > 0$, <u>la fonction</u> $bu_k(z)$ <u>définie pour presque tout</u> $z \in \partial B$ <u>par</u>

$$bu_k(z) = \int_B f(\zeta)\ b\, C_k(\zeta, z)\,, \tag{I.17}$$

<u>est une solution de l'équation</u> $\bar{\partial}_b u = f$ <u>qui est dans</u> $L^1(\partial B)$.

REMARQUES. 1. En lisant le travail de E. Amar et A. Bonami [1], on s'aperçoit aisément que les estimations en norme $L^p(\partial B)$, et Lipschitz que ces auteurs obtiennent pour la solution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ donnée par le noyau construit par H. Skoda, sont valables pour les solutions $b\, u_k$, $\mathrm{Re}\, k > 0$:

a) Pour $p \in \left]1, +\infty\right[$, soit $W^p(B)$ l'espace des mesures bornées μ sur B qui s'écrivent $\mu = h\nu$, où ν est une mesure de Carleson dans B (cf. [1]) et $h \in L^p(\nu)$. Alors si les coefficients de f et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont dans $W^p(B)$, il en résulte que la solution bu_k de l'équation $\bar{\partial} u = f$ donnée par (I.17) est dans $L^p(\partial B)$.

b) L'estimation obtenue par N. Varopoulos dans [10] est aussi vraie pour les bu_k : si les coefficients de $f(\zeta)$ et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont des mesures de Carleson alors $bu_k \in BMO$.

c) Si les coefficients de f et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont des mesures de Carleson d'ordre $\alpha > 1$, alors la fonction bu_k est dans l'espace de Lipschitz $\Gamma^\beta(\partial B)$ avec $\beta = 2n(\alpha - 1)$ (voir [1] pour les notations et la terminologie).

2. La formule (I.15) pour $k = 0$ donne

$$bC_o = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} H(\zeta, z) - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{(1-\bar{\zeta} z)^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \bar{\zeta}_i \bigwedge_{j \neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i.$$

Comme $\dfrac{1}{(1-\bar{\zeta} z)^n}$ est le noyau de Szegö de la boule, il en résulte que le noyau bC_o vérifie lui aussi les estimations a), b) et c) de ci-dessus (voir [1]).

Nous allons maintenant donner des estimations des noyaux $C_k(\zeta, z)$, $k \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, k > 0$.

En utilisant la formule du 3. de la proposition I.4 ainsi que les formules (I.6), (I.8) et (I.10), on peut écrire explicitement les noyaux $C_k(\zeta,z)$ sous la forme suivante :

$$C_k(\zeta,z) = C_k^1(\zeta,z) + C_k^2(\zeta,z)\ , \tag{I.17}$$

où les noyaux C_k^1 et C_k^2 sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} C_k^1 &= c_n\psi_k(\zeta,z)\,\frac{(1-\zeta\bar z)^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\left[\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}(\bar\zeta_i(1-\zeta\bar z)-\bar z_i(1-|\zeta|^2))\bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j\right]\bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i\ ,\\ C_k^2 &= c_n\psi_k(\zeta,z)\,\frac{(1-\zeta\bar z)^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\left[\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\bar\zeta_j\bar z_i - \bar\zeta_i\bar z_j)\bar\partial|\zeta|^2\bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right]\bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i\ ,\end{aligned}\tag{I.18}$$

où $C_n = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}$ et $\psi_k(\zeta,z)$ est donnée par (I.9).

LEMME I.1. 1. <u>Pour tout</u> $1\le i\le n$, <u>tous</u> $1\le i<j\le n$, <u>et tout réel</u> α, $0<\alpha<\operatorname{Re} k$, <u>il existe une constante</u> $C>0$ <u>qui ne dépend que de</u> n, α <u>et</u> k <u>telle que</u> :

$$\int_B|\psi_k(\zeta,z)|\,\frac{|1-\bar\zeta z|^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\,|\bar\zeta_i(1-\zeta\bar z)-\bar z_i(1-|\zeta|^2)|\,(1-|z|^2)^{\alpha-1}d\lambda(z)\le C(1-|\zeta|^2)^{\alpha},\ \underline{\text{et}}\ ,$$

$$\int_B|\psi_k(\zeta,z)|\,\frac{|1-\bar\zeta z|^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\,|\zeta_jz_i-\zeta_iz_j|\,(1-|z|^2)^{\alpha-1}d\lambda(z)\le C(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}\ ,$$

<u>où</u> $d\lambda$ <u>désigne la mesure de Lebesgue dans</u> B.

2. <u>Il existe une constante</u> $C>0$ <u>ne dépendant que de</u> n <u>telle que, si</u> $L(\zeta,z)$ <u>est un coefficient quelconque du noyau de Cauchy</u> $C_o(\zeta,z)$, <u>alors</u>,

$$\int_B|L(\zeta,z)|\,d\lambda(\zeta)\le C,\ \ \underline{\text{pour tout}}\ \ z\in B,\ \ \underline{\text{et}}$$

$$\int_B|L(\zeta,z)|\,d\lambda(z)\le C,\ \ \underline{\text{pour tout}}\ \ \zeta\in B.$$

Pour simplifier l'écriture, nous ne faisons les calculs que dans $\mathbb{C}^2$.

Démonstrons tout d'abord le 1). Dans tout ce qui suit, C désignera toujours une constante qui ne dépend que de n, α et k. Puisque la fonction

$(\zeta,z)\longrightarrow\dfrac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar\zeta z|^2}$ est bornée dans $B\times B$, de la formule explicite (I.9) donnant ψ_k, on déduit (comme pour (I.1)),

(I.19)
$$|\psi_k(\zeta,z)| \leq C\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta} z|}\right)^{\mathrm{Re}\,k}.$$

On est donc ramené à montrer les deux majorations suivantes :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,|\bar{\zeta}_1(1-\zeta\bar{z})-\bar{z}_1(1-|\zeta|^2)|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[|1-\bar{\zeta}z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C\,(1-|\zeta|^2)^{\alpha},$$

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,|\zeta_1 z_2-\zeta_2 z_1|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[|1-\bar{\zeta}z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C\,(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}.$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} z_1' = \dfrac{\bar{\zeta}_1 z_1 + \bar{\zeta}_2 z_2}{|\zeta|} \\[2ex] z_2' = \dfrac{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}{|\zeta|} \end{cases}$$

on se ramène aussitôt aux deux intégrales suivantes :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left[\,||\zeta|-z_1|+(1-|\zeta|^2)|z_2|\,\right]}{|1-|\zeta|z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[\,||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C\,(1-|\zeta|^2)^{\alpha},$$

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,|z_2|}{|1-|\zeta|z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[\,||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C\,(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}.$$

Il faut donc établir la majoration suivante :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}(1-|z|^2)^{\alpha-1}}{|1-|\zeta|z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[\,||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)\right]^{3/2}}\,d\lambda(z) \leq C.$$

En intégrant tout d'abord par rapport à z_2 on se ramène aux deux majorations suivantes :

$$\int\!\!\int_{\mathcal{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}(1-|z_1|^2)^{\alpha}}{|1-|\zeta| z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}} \left[\int_0^{1/2} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha-1}\rho\, d\rho}{\left[||\zeta|-z_1|^2+\rho^2(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)\right]^{3/2}}\right] d\lambda(z_1) \leq C,$$

(I.20)

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}(1-|z_1|^2)^{\alpha}}{|1-|\zeta| z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}\left[||\zeta|-z_1|^2+(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)\right]^{3/2}}\, d\lambda(z_1) \leq C$$

En intégrant par rapport à ρ, la première majoration de (I.20) se ramène à la suivante :

(I.21)
$$\int_{\mathcal{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}(1-|z_1|^2)^{\alpha}}{|1-|\zeta| z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}\,||\zeta|-z_1|\left[||\zeta|-z_1|^2+(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)\right]}\, d\lambda(z_1) \leq C$$

Comme de plus cette dernière majoration entraîne la seconde inégalité de (I.20) on est ramené à montrer simplement (I.21).

Pour cela posons $v = 1-|\zeta|^2$. En intégrant en polaires, (I.21) devient :

$$\int_{\substack{u\in[0,1]\\ v\in[0,1]}} \frac{v^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}\, u^{\alpha}}{(u+v+\theta)^{\mathrm{Re}\,k-1}(|u-v|+\theta)\left[(|u-v|+\theta)^2+uv\right]}\, du\, d\theta \leq C.$$

En posant $u = vx$ et $\theta = vy$, on obtient :

$$\int_{[0,+\infty]^2} \frac{x^{\alpha}}{(x+1+y)^{\mathrm{Re}\,k-1}(|x-1|+y)\left[(|x-1|+y)^2+x\right]}\, dx\, dy \leq C$$

La seule singularité apparaissant dans cette intégrale est au point $x = 1$, $y = 0$. Comme la fonction à intégrer est, au voisinage de ce point, majorée par $\frac{C}{|x-1|+y}$, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale lorsque l'on restreint le domaine d'intégration à l'ensemble $\mathrm{Max}(x,y) \geq A$, où A est un réel fixé assez grand. Or sur ce ce domaine, la fonction à intégrer est majorée par $C\,\frac{x^{\alpha}}{(x+y)^{\mathrm{Re}\,k+2}}$, par conséquent la convergence de l'intégrale résulte du fait que $\alpha < \mathrm{Re}\,k$.

Montrons maintenant la deuxième partie du Lemme I.1 : puisque les coefficients de $C_o(\zeta,z)$ sont, en module, symétriques en ζ et z, il suffit de voir que

$$\int_B \frac{|1-\bar{\zeta}z|\,|\zeta_1-z_1|}{\left[|1-\bar{\zeta}z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C. \tag{I.22}$$

On fait alors le même changement de variables que précédemment, et on est ramené à montrer la finitude des deux intégrales suivantes :

$$\int_B \frac{|1-|\zeta|z_1|\,\big||\zeta|-z_1\big|}{\left[\big||\zeta|-z_1\big|^2+(1-|\zeta|^2)|z_2|^2\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C\,, \qquad \text{et}$$

$$\int_B \frac{|1-|\zeta|z_1|\;|z_2|}{\left[\big||\zeta|-z_1\big|^2+(1-|\zeta|^2)|z_2|^2\right]^2}\,d\lambda(z) \leq C.$$

Comme dans le calcul précédent, on intègre tout d'abord par rapport à la variable z_2, puis on intègre en polaires dans la variable z_1. Une fois le deuxième changement de variables effectué, on se ramène à voir que :

$$\text{(I.23)}\qquad \begin{aligned} &v\int_{[0,1/v]^2} \frac{(x+1+y)\,x}{(|x-1|+y)\left[(|x-1|+y)^2+x\right]}\,dx\,dy \leq C, \text{ et},\\ &\sqrt{v}\int_{[0,1/v]^2} (x+1+y)\,x^{3/2}\left\{\int_0^1 \frac{\rho^2\,d\rho}{\left[(|x-1|+y)^2+x\rho^2\right]^2}\right\}dx\,dy \leq C, \end{aligned}$$

où $v = 1-|\zeta|^2 \in \,]0,1]$.

Considérons tout d'abord la première intégrale de (I.23) : comme pour les intégrales de (I.20) la singularité $x = 1$, $y = 0$ est intégrable, et il suffit de considérer le domaine d'intégration $(x,y) \in \left\{A \leq \operatorname{Max}(x,y) \leq \frac{1}{v}\right\}$. Sur ce domaine, la fonction à intégrer est majorée par

$$C\,\frac{x}{(x+y)^2}\,,$$

et on est ainsi ramené à voir que

$$v\int_{\{A\leq \mathrm{Max}(x,y)\leq \frac{1}{v}\}}\frac{x\,dx\,dy}{(x+y)^2}\leq C\;,$$

ce qui est un calcul immédiat.

Pour la seconde intégrale de (1.23) on remarque tout d'abord que

$$\int_0^1 \frac{\rho^2\,d\rho}{[(|x-1|+y)^2+x\rho^2]^2}\leq \frac{C}{(|x-1|+y)\,[(|x-1|+y)^2+x]^{3/2}}\;,$$

et pour les mêmes raisons que précédemment, on se ramène à voir que

$$\sqrt{v}\int_{\{A\leq \mathrm{Max}(x,y)\leq \frac{1}{v}\}}\frac{x^{3/2}\,dx\,dy}{(x+y)^3}\leq C\;,$$

ce qui est aussi immédiat.

De ce lemme on déduit aisément des estimations en norme L^1 pour les solutions minimales de l'équation $\bar\partial u = f$: soit $\alpha > 0$, et soit f une $(0,1)$-forme $\bar\partial$-fermée telle que les coefficients des formes $(1-|\zeta|^2)^{\alpha} f(\zeta)$ et $(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}(f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2)$ soient des mesures bornées dans B. Il résulte alors du lemme I.1 et des formules (I.17) et (I.18) que, si $\mathrm{Re}\,k > \alpha$, la fonction

$$u_k(z)=\int_B f(\zeta)\wedge C_k(\zeta,z)\;,$$

est telle que $(1-|z|^2)^{\alpha-1}u_k(z)\in L^1(B)$, et, par un procédé de régularisation, on déduit aisément du Theorème I.2 que $\bar\partial\, u_k = f$.

De plus, se rappelant que $d\sigma_r(\xi)$ la mesure sur B, $(1-|\xi|^2)^r d\lambda(\xi)$, $r>-1$, $d\lambda(\xi)$ la mesure de Lebesgue, il résulte aussitôt du Lemme I.1 et de l'inégalité de Hölder que si les coefficients de $f(\zeta)$ sont dans $L^p(d\sigma_\alpha(\zeta))$ et ceux de $f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2$ dans $L^p(d\sigma_{\alpha-1/2}(\zeta))$, alors $u_k(z)\in L^p(d\sigma_{\alpha-1}(z))$ pour $\mathrm{Re}\,k>\alpha$, et $1<p<\infty$.

THEOREME I.4. <u>Soit</u> $k\in\mathbb{C}$ <u>tel que</u> $\mathrm{Re}\,k > 0$, <u>et soit</u> α <u>un réel tel que</u> $0<\alpha<\mathrm{Re}\,k$, <u>et soit</u> f <u>une</u> $(0,1)$-<u>forme</u> $\bar\partial$-<u>fermée définie dans</u> B.

1. <u>Si les coefficients des formes</u> $(1-|\zeta|^2)^{\alpha}f(\zeta)$ <u>et</u> $(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}(f(\zeta)\wedge\bar\partial|\zeta|^2)$ <u>sont des mesures bornées dans</u> B, <u>alors la fonction</u> u_k <u>définie pour presque tout</u> $z\in B$ <u>par</u>

$$u_k(z) = \int_B f(\zeta)\wedge C_k(\zeta, z) ,$$

<u>est une solution de l'équation</u> $\bar{\partial}u = f$ <u>qui est dans</u> $L^1(d\sigma_{\alpha-1}(z))$.

2. <u>De plus, si les coefficients de</u> f <u>sont des fonctions mesurables, pour</u> $1 \le p < \infty$, <u>on a</u>

$$\|u_k\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1})} \le C\left(\|f\|_{L^p(d\sigma_\alpha)} + \|f(\zeta)\wedge\bar{\partial}|\zeta|^2\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1/2}(\zeta))}\right),$$

<u>où</u> C <u>est une constante qui ne dépend que de</u> k , α <u>et</u> n.

REMARQUES.

1. Les estimations du Théorème I.4 ne sont pas nouvelles : dans [5], Š. A. Dautov et G. M. Henkin ont obtenu une solution de $\bar{\partial}u = f$ dans les domaines strictement pseudo- convexes qui vérifie la même estimation. On en déduit aisément que les solutions minimales dans la boule vérifient les estimations du Théorème I.4 car le projecteur P_{k-1} envoie $L^p(d\sigma_{\alpha-1})$ pour $1 \le p < \infty$ et $0 < \alpha < k$.

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir les estimations du Théorème I.4 pour les solutions de $\bar{\partial}u = f$ dans les domaines strictement pseudoconvexes en utilisant simplement la résolution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ donnée par H. Skoda [9] ; on procède de la manière suivante : soit $\mathscr{D} = \{z\in\mathbf{C}^n / \rho(z) < 0\}$ un domaine strictement pseudoconvexe borné, ρ étant strictement plurisousharmonique de classe C^2 ; pour tout entier $k \ge 1$, on considère dans $\mathbf{C}^{n+k}$ le domaine strictement pseudoconvexe borné

$$\mathscr{D}_k = \{(\zeta, \xi)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^k \ ; \ \rho(\zeta) + \sum_{i=1}^{k}|\xi_i|^2 < 0\}.$$

Soit f une (p,q)-forme $\bar{\partial}$-fermée de classe C^1 dans $\bar{\mathscr{D}}$, et soit $H(\zeta, \xi, z, w)$ le noyau de Skoda pour le domaine $\mathscr{D}_k$. Si on considère $f(\zeta)$ comme une forme de classe C^1 dans $\bar{\mathscr{D}}_k$ qui ne dépend pas de $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, alors pour tout $(z,w)\in\partial\mathscr{D}_k$, la fonction

$$\tilde{v}_k(z,w) = \int_{\mathscr{D}_k} f(\zeta)\wedge H(\zeta, \xi, z, w)$$

est une solution de $\bar{\partial}_b u = f$. Or, on sait (cf. [9]) que cette fonction se prolonge dans

$\mathcal{D}_k$ en une solution de $\bar{\partial} u = f$. Par conséquent, $\tilde{v}_k(z,w)$ est holomorphe en w dans la boule $|w|^2 < -\rho(z)$, et, pour $z \in \mathcal{D}$, $\tilde{v}_k(z,0)$ est une solution de $\bar{\partial} u = f$. Ainsi, si on pose

$$H_k(\zeta,z) = C \int_{\{|\zeta|^2 < -\rho(\zeta)\}} d\lambda(\xi) \{-\rho(z)\}^{-k+1/2} \left\{ \int_{\{|w|^2 = -\rho(z)\}} H(\zeta,\xi,z,w)\, d\sigma(w) \right\} ,$$

où $d\sigma(w)$ est la mesure euclidienne sur la sphère $\{|w|^2 = -\rho(z)\}$ et $d\lambda(\xi)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^k$, alors la fonction

$$v_k(z) = \int_{\mathcal{D}_k} f(\zeta) \wedge H_k(\zeta,z), \quad z \in \mathcal{D},$$

est une solution de $\bar{\partial} u = f$.

On peut alors montrer que $v_k(z)$ vérifie les estimations du théorème I.4 pour $\alpha < k+1$. Plus précisément, pour $0 < \alpha < k+1$, on a

$$\|(-\rho(z))^{\alpha-1} v_k(z)\|_{L^1(\mathcal{D})} \leq C \left\{ \|(-\rho(\zeta))^{\alpha} f(\zeta)\|_{L^1(\mathcal{D})} + \|(-\rho(\zeta))^{\alpha-1/2} (f(\zeta) \wedge \bar{\partial}\rho(\zeta))\|_{L^1(\mathcal{D})} \right\} .$$

Pour $\alpha = k$ cette inégalité n'est autre que celle de Skoda pour le noyau $H(\zeta,\xi,z,w)$.

2. En faisant intervenir des espaces de mesures bien adaptés, on peut, comme pour les noyaux $b\,C_k$, améliorer les estimations L^p du théorème I.4 et obtenir des conditions Lipschitz pour les u_k.

3. Les noyaux bC_k ont été considérés indépendamment par Bo Berndson dans [2].

Références

[1] AMAR, E. et BONAMI, A. Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar{\partial}$. Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 23-48.

[2] BERNDTSSOM, Bo Integral formulas and zeros of bounded holomorphic functions in the unit ball. Preprint.

[3] CHARPENTIER, Ph. Solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque. C.R.A.S. 289 (1979), 743-745.

[4] CHARPENTIER, Ph. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$. A paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[5] DAUTOV, S. A. and HENKIN, G. M. Zeros of holomorphic functions of finite order and weighted estimates for solutions of the $\bar{\partial}$-equation. Math. USSR Sb. 35 (1979), 449-459.

[6] GREINER, P. G. and STEIN, E. M. Estimates for the $\bar{\partial}$-Neuman problem. Math. notes, Princeton Univ. Press (1977).

[7] KOLASKI, C. J. A new look at a theorem of Forelli and Rudin. Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 495-499.

[8] OVRELID, M. Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$-equation. Math. Scand. 29 (1971), 137-160.

[9] SKODA, H. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 225-299.

[10] VAROPOULOS, N. BMO functions and the $\bar{\partial}$-equation. Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.

Chapitre II

SOLUTIONS MINIMALES ET RESOLUTION AU BORD SUR $\mathbf{T}^2$ DE L'EQUATION $\bar{\partial}u = f$ DANS LE POLYDISQUE.

Ce chapitre traite de la résolution de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$, et, pour simplifier les notations, on ne considère que le cas du bidisque

$$D^2 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \ ; \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1\right\}.$$

La première est consacrée au même problème que le chapitre précédent : donner des formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans D^2. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une note aux Comptes-Rendus [2] et seront publiés dans [3].

La seconde partie, qui est extraite d'un travail réalisé en commun avec E. Amar [1], étudie les valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ des solutions de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans le bidisque. Les estimations en norme $L^p(\mathbf{T}^2)$, $1 < p < \infty$, que nous obtenons ici sont les meilleures possibles : on ne peut pas espérer obtenir des estimations dans $L^p(\mathbf{T}^2)$ pour les solutions de $\bar{\partial}u = f$ uniquement avec des estimations sur f dans D^2 comme le montre l'exemple suivant :

Considérons la $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée

$$\omega = f(z_1)\, d\bar{z}_2 \ ,$$

où f est holomorphe, et supposons qu'il existe une solution u de $\bar{\partial}u = f$ qui soit dans $L^p(\mathbf{T}^2)$. Alors $u(z_1, z_2) - \bar{z}_2 f(z_1)$ est une fonction holomorphe dans D^2, et, par suite,

$$0 = \int_{\mathbf{T}} \left[u(z_1, z_2) - \bar{z}_2 f(z_1)\right] dz_2 = \int_{\mathbf{T}} u(z_1, z_2) dz_2 - 2i\pi f(z_1) \ ,$$

ce qui donne, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbf{T}} |f(z_1)|^p \, d\lambda(z_1) \leq \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{\mathbf{T}^2} |u|^p \, d\lambda(z_1)\, d\lambda(z_2).$$

Par conséquent f doit être dans $H^p(\mathbf{T})$ ce qui entraîne que ω doit avoir des valeurs au bord sur $\mathbf{T} \times D$ qui sont dans L^p. On peut remarquer de plus que si l'on voulait seulement $u \in L^p(\partial D^2)$ le même raisonnement montre qu'il faudrait encore $f \in H^p(\mathbf{T})$.

Pour l'estimation $L^1(\mathbf{T}^2)$, Bo. Berndtsson m'a signalé que l'on peut montrer qu'il n'existe pas de noyaux qui envoie l'espace des formes $\bar{\partial}$-fermées $f = f_1\, d\bar{\zeta}_1 + f_2\, d\bar{\zeta}_2$ telles que $f_1 \in L^1(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in L^1(\mathbf{T} \times D)$ dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ et qui résolve l'équation $\bar{\partial} u = f$.

1. SOLUTIONS MINIMALES DE L'EQUATION $\bar{\partial} u = f$ DANS LE POLYDISQUE

Pour simplifier l'écriture et les calculs, nous nous contentons de considérer le cas du bidisque de $\mathbb{C}^2$,

$$D^2 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| < 1 \right\}.$$

Pour tout $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, k_1 et k_2 étant strictement positifs, nous notons $d\sigma_{k-1}$ la mesure sur D^2, $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1} \, d\lambda(z_1,z_2)$, où $d\lambda(z_1,z_2)$ est la mesure de Lebesgue.

Soit P_{k-1} la projection orthogonale de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur $H(D^2) \cap L^2(d\sigma_{k-1})$, $H(D^2)$ étant l'espace des fonctions holomorphes dans D^2. Il est évident que le noyau de P_{k-1} est le produit des noyaux des projecteurs à une variable correspondant à k_1-1 et à k_2-1, c'est-à-dire :

$$k_1 k_2 \frac{(1-|\zeta_1|^1)^{k_1-1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}} \, .$$

Pour toute $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée f de classe C^1 dans $\overline{D^2}$, soit $T_{k-1}(f)$ la solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans D^2 qui est orthogonale, dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, aux fonctions holomorphes. Autrement dit, si $u \in L^2(d\sigma_{k-1})$ est une solution de $\bar{\partial} u = f$, on pose

$$T_{k-1}(f) = u - P_{k-1}(u).$$

Comme dans le cas de la boule, nous allons donner une formule explicite pour les solutions $T_{k-1}(f)$:

THEOREME II.1. <u>Soit</u> $f(\zeta) = f_1(\zeta)\, d\bar{\zeta}_1 + f_2(\zeta)\, d\bar{\zeta}_2$ <u>une</u> $(0,1)$-<u>forme de classe</u> C^∞ <u>dans</u> $\overline{D^2}$, $\bar{\partial}$-<u>fermée</u>. <u>Pour tout</u> $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$, k_1 <u>et</u> k_2 <u>étant de parties réelles strictement positives, considérons la fonction</u> $u_k(z_1,z_2)$ <u>définie dans</u> D^2 <u>par</u> :

$$u_k(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_D f_1(\zeta_1, z_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} \, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 + \frac{1}{2i\pi} \int_D f_2(z_1, \zeta_2) \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \, d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{D^2} f(\zeta) \wedge \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2} \right)^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\, d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\, d\bar{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\Big\{k_2\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2 -$$

$$-\,k_1\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\Big\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Alors :

a) u_k est une solution de $\bar\partial u = f$ dans D^2 ;

b) De plus, si k_1 et k_2 sont des réels strictement positifs, on a

$$u_k = T_{k-1}(f).$$

La démonstration de ce théorème se fait naturellement par applications successives de la formule de Stokes. Soit $u(\zeta_1,\zeta_2)$ une fonction de classe C^2 dans $\overline{D^2}$, et considérons tout d'abord la forme différentielle

$$\text{(II.1)}\qquad \frac{1}{k_2}\,u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Soit $U_\varepsilon(z_2) = D\times D_\varepsilon(z_2) = \{(\zeta_1,\zeta_2)\in D^2\ ;\ |\zeta_1|<1 \text{ et } |\zeta_2-z_2|<\varepsilon\}$, et appliquons la formule de Stokes à la forme (II.1) sur le domaine $D^2\setminus U_\varepsilon(z_2)$: puisque d'une part cette forme est nulle pour $|\zeta_2|=1$ et, d'autre part, est de degré $(1,1)$ en ζ_1, il vient :

$$-\int_{D\times\partial D_\varepsilon(z_2)} \frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{k_2}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 =$$

$$\text{(II.2)}\qquad =\int_{D^2\setminus U_\varepsilon(z_2)} \frac{1}{k_2}\,\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 +$$

$$+\int_{D^2\setminus U_\varepsilon(z_2)} u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Comme $\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}$ tend vers 1 uniformément par rapport à $\zeta_2\in\partial D_\varepsilon(z)$ lorsque ε tend vers zéro, en passant à la limite pour $\varepsilon\to 0$ dans (II.2), il vient :

$$\frac{2i\pi}{k_2}\int_D u(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 =$$

$$\text{(II.3)}\quad = \frac{1}{k_2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 +$$

$$+\int_{D^2} u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Les formules donnant les solutions minimales dans le disque unité du plan complexe permettent de transformer le premier membre de (II.3) de la manière suivante.

$$\frac{2i\pi}{k_2}\int_D u(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 = \frac{(2i\pi)^2}{k_1\,k_2}u(z_1,z_2)$$

$$-\frac{2i\pi}{k_1k_2}\int_D \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 .$$

Il vient donc :

$$\text{(II.4)}\quad\begin{cases} u(z_1,z_2) - \dfrac{k_1\,k_2}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2} u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2 = \\[2ex] = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_D \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 + \\[2ex] + \dfrac{k_1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 . \end{cases}$$

Pour démontrer le théorème II.1, il suffit donc de voir que le second membre de (II.4) est égal à $u_k(z_1,z_2)$ (avec $f_1 = \dfrac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}$ et $f_2 = \dfrac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}$).

Pour cela considérons la forme différentielle

$$\text{(II.5)}\qquad \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Soit $U_\varepsilon(z_1) = D_\varepsilon(z_1)\times D = \{(\zeta_1,\zeta_2)\in D^2\ ;\ |\zeta_1-z_1|<\varepsilon \text{ et } |\zeta_2|<1\}$, et appliquons la formule de Stokes à la forme (II.5) sur le domaine $D^2\setminus(U_\varepsilon(z_1)\cup U_\varepsilon(z_2))$: puisque cette forme est d'une part nulle lorsque $|\zeta_1|=1$ ou $|\zeta_2|=1$, et, d'autre part, de degré $(1,1)$ en ζ_2, il vient :

$$\frac{k_1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2\setminus(U_\varepsilon(z_1)\cup U_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2=$$

$$=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial D_\varepsilon(z_1)\times(D\setminus D_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2+$$

$$+\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2\setminus(U_\varepsilon(z_1)\cup U_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar\zeta_1\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient donc :

$$\frac{k_1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2=$$

(II.6)
$$=\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(z_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2+$$

$$+\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar\zeta_1\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}.$$

Nous allons encore transformer la dernière intégrale de (II.6),

(II.7)
$$I=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar\zeta_1\partial\bar\zeta_2}\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{1}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}=\frac{\bar z_1-\bar\zeta_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}+\frac{\bar z_2-\bar\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2},$$

on peut écrire,

$I=I_1+I_2$, avec,

(II.8)
$$I_1=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar\zeta_1\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar z_1-\bar\zeta_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

$$I_2=\frac{-1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar\zeta_1\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar z_2-\bar\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2}d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.$$

La formule de Stokes appliquée à la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\Big(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\Big)^{k_1}\Big(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\Big)^{k_2}\frac{\bar{z}_1-\bar{\zeta}_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\,,$$

sur le domaine $D^2\setminus U_\varepsilon(z_2)$, donne, en faisant tendre ε vers zéro :

$$\text{(II.9)}\quad\begin{cases} I_1=\dfrac{-1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1}\Big[\Big(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\Big)^{k_1}\Big(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\Big)^{k_2}\frac{\bar{z}_1-\bar{\zeta}_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}\Big]d\bar{\zeta}_1\wedge d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2=\\[2ex] =\dfrac{1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar{\zeta}_2\wedge\Big\{k_1\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}d\bar{\zeta}_1\Big\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2+\\[2ex] +\dfrac{1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar{\zeta}_2\wedge\Big(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\Big)^{k_1}\Big(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\Big)^{k_2}\frac{\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2}{|\zeta-z|^4}\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\end{cases}$$

Le même transformation pour I_2 donne :

$$\text{(II.10)}\quad\begin{cases} I_2=\dfrac{-1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar{\zeta}_1\wedge\Big\{k_2\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}d\bar{\zeta}_2\Big\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2-\\[2ex] -\dfrac{1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar{\zeta}_1\wedge\Big(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\Big)^{k_1}\Big(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\Big)^{k_2}\frac{\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1}{|\zeta-z|^4}\,d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.\end{cases}$$

Le fait que le second membre de (II.4) est égal à $u_k(z_1,z_2)$ s'obtient en regroupant (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) et (II.10). Ceci achève de démontrer le théorème II.1.

Nous allons maintenant donner des estimations sur les solutions $u_k(z_1,z_2)$.

LEMME II.1.

(i) <u>Pour $\mathrm{Re}\,k_1\ge 0$ et $\mathrm{Re}\,k_2>0$ (resp. $\mathrm{Re}\,k_2\ge 0$ et $\mathrm{Re}\,k_1>0$), on a</u>

$$\int_{D^2}\left|\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\right|d\lambda(\zeta)\le C$$

$$\Big(\underline{\text{resp.}}\ \int_{D^2}\left|\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\right|d\lambda(\zeta)\le C\ \Big).$$

(ii) <u>Pour $\mathrm{Re}\,k_1\ge 0$ et $\mathrm{Re}\,k_2\ge 1$ (resp. $\mathrm{Re}\,k_2\ge 0$ et $\mathrm{Re}\,k_1\ge 1$), on a</u>

$$\int_{D^2}\left|\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\right|d\lambda(z)\le C$$

$$\Big(\underline{\text{resp.}}\ \int_{D^2}\left|\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\right|d\lambda(z)\le C\ \Big).$$

(iii) Pour $\operatorname{Re} k_1 \geq 0$ et $0 < \operatorname{Re} k_2 < 1$ (resp. $\operatorname{Re} k_2 \geq 0$ et $0 < \operatorname{Re} k_1 < 1$) on a

$$\int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}} \frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(z) \leq C(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2-1}$$

$$\left(\text{resp. } \int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(z) \leq C(1-|\zeta_1|^2)^{\operatorname{Re} k_1-1}\right).$$

Dans cet énoncé, C désigne toujours une constante qui ne dépend que de k_1 et k_2.

Notons tout d'abord que, puisque $\operatorname{Re} k_1 \geq 0$, on a

$$\left| \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{k_1} \right| \leq C ,$$

et par conséquent, l'intégrale du (i) du lemme est majorée par l'intégrale suivante :

$$I_1 = C \int_{\{|\zeta_2|<1\}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2-1} |\zeta_2-z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{\operatorname{Re} k_2+1}} \left[\int_{\{|\zeta_1|<1\}} \frac{d\lambda(\zeta_1)}{|z_1-\zeta_1| \, |\zeta-z|^2} \right] d\lambda(\zeta_2).$$

Un calcul immédiat montre que l'intégrale entre crochets de I_1 est majorée par

$$\frac{C}{|\zeta_2-z_2|} ,$$

et par suite pour voir le (i) on est amené à voir que :

$$\int_{\{|\zeta_2|<1\}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2-1} |\zeta_2-z_2|}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{\operatorname{Re} k_2+1}} d\lambda(\zeta_2) \leq C.$$

En posant $u_2 = 1-|z_2|^2$ et $v_2 = 1-|\zeta_2|^2$ et en intégrant en polaires, on ramène cette dernière intégrale à

$$\int_{[0,1]^2} \frac{v_2^{\operatorname{Re} k_2-1}(|v_2-u_2|+\theta_2)}{(v_2+u_2+\theta_2)^{\operatorname{Re} k_2+1}} dv_2 \, d\theta_2 \leq C ,$$

et en posant $v_2 = x_2 u_2$, $\theta_2 = y_2 u_2$, il vient :

$$u_2 \int_{[0,\frac{1}{u_2}]^2} \frac{x_2^{\operatorname{Re} k_2-1}(|x_2-1|+y_2)}{(x_2+1+y_2)^{\operatorname{Re} k_2+1}} \leq C ,$$

et, cette dernière majoration se voit aussitôt en intégrant en polaires.

Pour voir les majorations du (ii) et du (iii) du lemme, en intégrant tout d'abord par rapport à z_1, il suffit de voir que d'une part, lorsque $\text{Re } k_2 \geq 1$, on a

$$\int_{\{|z_2|<1\}} \frac{|\zeta_2 - z_2|}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^2} d\lambda(z_2) \leq C ,$$

et d'autre part que, lorsque $0 < \text{Re } k_2 < 1$, on a

$$\int_{\{|z_2|<1\}} \frac{|\zeta_2 - z_2|}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{\text{Re } k_2+1}} d\lambda(z_2) \leq C.$$

Ces deux dernières majorations étant évidentes, le lemme II.1 est démontré.

Les noyaux apparaissant dans les trois premières intégrales donnant u_k étant majorés respectivement par $\dfrac{1}{|z_1-\zeta_1|}$, $\dfrac{1}{|z_2-\zeta_2|}$ et $\dfrac{1}{|\zeta - z|^3}$, on déduit aussitôt du Lemme II.1 que, si $\text{Re } k_1 \geq 1$ et $\text{Re } k_2 \geq 1$, pour $p \in [1,+\infty]$, il existe une constante C qui ne dépend que de p, $\text{Re } k_1$ et $\text{Re } k_2$ telle que

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leq C\left\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\right\}.$$

Par un procédé de régularisation, on déduit donc du Theorème II.1 que si f_1 et f_2 sont dans $L^1(D^2)$ alors u_k est une solution de $\bar{\partial} u = f$ qui vérifie l'estimation de ci-dessus.

Dans le cas où $\text{Re } k_1$ et $\text{Re } k_2$ ne sont pas tous deux supérieurs à 1 on a une estimation plus faible en utilisant le (iii) du Lemme II.1 :

THEOREME II.2. 1. <u>Supposons</u> $\text{Min}(\text{Re } k_1, \text{Re } k_2) \geq 1$. <u>Soit</u> $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ <u>une</u> $(0,1)$-<u>forme</u> $\bar{\partial}$<u>-fermée dont les coefficients sont dans</u> $L^1(D^2)$. <u>Alors la fonction</u> $u_k(z_1,z_2)$ <u>du théorème II.1 est une solution de</u> $\bar{\partial} u = f$ <u>qui est dans</u> $L^1(D^2)$. <u>De plus,</u> <u>si</u> $p \in [1,+\infty]$, <u>il existe une constante</u> C <u>qui ne dépend que de</u> p, $\text{Re } k_1$ <u>et</u> $\text{Re } k_2$ <u>telle que</u>

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leq C \left\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\right\}.$$

2. Supposons $\mathrm{Re}\, k_1 \geq 1$ et $0 < \mathrm{Re}\, k_2 < 1$ (resp. $0 < \mathrm{Re}\, k_1 < 1$ et $\mathrm{Re}\, k_2 \geq 1$). Soit $f = f_1\, d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ une $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée telle que $(1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\, k_2 - 1} f_1(\zeta_1,\zeta_2)$ et $f_2(\zeta_1,\zeta_2)$ (resp. $f_1(\zeta_1,\zeta_2)$ et $(1-|\zeta_1|^2)^{\mathrm{Re}\, k_1 - 1} f_2(\zeta_1,\zeta_2)$ soient dans $L^1(D^2)$. Alors la fonction $u_k(z_1,z_2)$ du théorème II.1 est une solution de $\bar{\partial} u = f$ qui est dans $L^1(D^2)$. De plus, si $p \in [1,+\infty]$, il existe une constante C qui ne dépend que de p, $\mathrm{Re}\, k_1$ et $\mathrm{Re}\, k_2$ telle que

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leq C\left\{\|f_1\|_{L^p((1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\, k_2 - 1} d\lambda(\zeta))} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\right\}$$

$$(\text{resp. } \|u_k\|_{L^p(D^2)} \leq C\left\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p((1-|\zeta_1|^2)^{\mathrm{Re}\, k_1 - 1} d\lambda(\zeta))}\right\}).$$

3. Supposons $0 < \mathrm{Re}\, k_1 < 1$ et $0 < \mathrm{Re}\, k_2 < 1$. Soit $f = f_1 d\bar{\zeta}_1 + f_2 d\bar{\zeta}_2$ une $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée telle que $(1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\, k_2 - 1} f_1(\zeta_1,\zeta_2)$ et $(1-|\zeta_1|^2)^{\mathrm{Re}\, k_2 - 1} f_2(\zeta_1,\zeta_2)$ soient dans $L^1(D^2)$. Alors la fonction $u_k(z_1,z_2)$ du théorème II.1 est une solution de $\bar{\partial} u = f$ qui est dans $L^1(D^2)$. De plus si $p \in [1,+\infty]$, il existe une constante C qui ne dépend que de p, $\mathrm{Re}\, k_1$ et $\mathrm{Re}\, k_2$ telle que

$$\|u_k\|_{L^p(d^2)} \leq C\left\{\|f_1\|_{L^p((1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\, k_2 - 1} d\lambda(\zeta))} + \|f_2\|_{L^p((1-|\zeta_1|^2)^{\mathrm{Re}\, k_1 - 1} d\lambda(\zeta))}\right\}.$$

REMARQUES. 1. Dans [5] G. M. Henkin avait obtenu une estimation L^∞ pour une solution de $\bar{\partial} u = f$ dans le polydisque. En utilisant cette solution M. Landucci a montré dans [6] que la solution minimale (i.e. $k_1 = k_2 = 1$ avec nos notations) dans L^2 vérifie aussi l'estimation L^∞. En fait le théorème II.2 ci-dessus montre en particulier que cette solution minimale vérifie les estimations L^p pour $1 \leq p \leq \infty$. Dans [7] le même auteur a donné une estimation sur les dérivées de la solution minimale dans $L^2(D^2)$.

2. Comme nous l'avons vu dans l'introduction et dans la première partie de ce

travail, si l'on fait tendre k vers zéro dans la formule de représentation donnant la solution minimale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, on trouve la formule de Cauchy. Il est raisonnable de se demander ce qui se passe dans le cas du bidisque lorsque l'on fait tendre k_1 et k_2 vers zéro dans la formule (qui résulte de (II.4), (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) et (II.10):

$$u(z_1,z_2)=\frac{k_1k_2}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2\ +$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1+\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(z_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2\ +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\bar\partial u(\zeta_1,\zeta_2)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\ +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,k_2\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\ -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,k_1\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\,.$$

On se convainc aisément que, en faisant tendre k_1 et k_2 vers zéro, cette formule donne :

$$u(z_1,z_2)=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\ +$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\,\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1}{z_1-\zeta_1}+\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(z_1,\zeta_2)\,\frac{d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2}{z_2-\zeta_2}\ +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\bar\partial u(\zeta_1,\zeta_2)\wedge\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\ -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{D\times\mathbb{T}}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{\bar\zeta_2-\bar z_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\ -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}\times D}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\,.$$

Il est raisonnable d'appeler formule de Cauchy du bidisque cette dernière formule puisque la seule intégrale où apparait u est l'intégrale de Cauchy de $u(\zeta_1, \zeta_2)$. On notera d'ailleurs que c'est cette formule qu'avait utilisé Henkin pour obtenir une estimation L^∞ sur les solutions de $\bar{\partial} u = f$ dans D^2 [5].

2. VALEURS AU BORD SUR LE TORE POUR LES SOLUTIONS DE L'EQUATION $\bar{\partial} u = f$ DANS LE BIDISQUE.

Soit

$$D^2 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1| < 1 \ ; \ |z_2| < 1 \right\},$$

le bidisque de $\mathbb{C}^2$. On note $\partial D^2 = D \times \mathbf{T} \cup \mathbf{T} \times D$ le bord de D^2. Dans tout ce qui suit, D^2 est muni de l'orientation canonique de $\mathbb{C}^2$ et ∂D^2 est muni de l'orientation déduite de celle de D^2. Autrement dit, pour toute forme différentielle φ, on a

$$\int_{D \times \mathbf{T}} \varphi + \int_{\mathbf{T} \times D} \varphi = \int_{D^2} d\varphi .$$

D'autre part, $\mathbf{T}^2 = \left\{ (z_1, z_2) \ ; \ |z_1| = |z_2| = 1 \right\}$ est orienté comme bord de $D \times \mathbf{T}$, ce qui entraîne que le bord de $\mathbf{T} \times D$ est $-\mathbf{T}^2$.

Pour tout réel $p \in [1, +\infty]$, nous notons $L^p_{(0,1)}(\partial D^2)$ (resp. $L^p_{(0,1)}(D^2)$) l'espace des formes différentielles complexes de type $(0,1)$, $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$, telles que $f_1 \in L^p(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in L^p(\mathbf{T} \times D)$ (resp. $f_1 \in L^p(D^2)$ et $f_2 \in L^p(D^2)$).

Nous dirons qu'une forme $f \in L^1_{(0,1)}(D^2)$ admet la forme $\tilde{f} \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ pour valeurs au bord sur ∂D^2 au sens de la formule de Stokes, si, pour toute fonction φ de classe C^1 au voisinage de $\overline{D^2}$, on a

(II.11) $$\int_{\partial D^2} \tilde{f} \wedge \varphi = - \int_{D^2} f \wedge \bar{\partial} \varphi + \int_{D^2} \bar{\partial} f \wedge \varphi .$$

DEFINITION II.1. Soit $f \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. On dira que f est tangentiellement $\bar\partial$-fermée, et on écrira $\bar\partial_b f = 0$, si, pour toute fonction φ holomorphe au voisinage de $\overline{D^2}$, on a

$$\int_{D\times\mathbf{T}} f_1\, d\bar z_1 \wedge \varphi\, dz_1 \wedge dz_2 + \int_{\mathbf{T}\times D} f_2 d\bar z_2 \wedge \varphi\, dz_1 \wedge dz_2 = 0.$$

Soit $f \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ telle que $\bar\partial_b f = 0$. On dira qu'une forme $\tilde f \in L^1_{(0,1)}(D^2)$ telle que $\bar\partial f = 0$, est un prolongement de f dans D^2 au sens de la formule de Stokes si, pour toute fonction φ de classe C^1 au voisinage de $\overline{D^2}$, on a

$$\int_{\partial D^2} f \wedge \varphi dz_1 \wedge dz_2 = - \int_{D^2} \tilde f \wedge \bar\partial\varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2. \tag{II.12}$$

DEFINITION II.2. Soit $f \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. Nous dirons qu'une fonction $u \in L^1(\mathbf{T}^2)$ est solution tangentielle sur $\mathbf{T}^2$ de l'équation $\bar\partial u = f$, et nous écrirons $\bar\partial_b u = f$, si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(II.13)

(i) Pour ~~tout~~ presque tout $\zeta_2 \in \mathbf{T}$, et toute fonction $\varphi(z_1)$ holomorphe au voisinage de $\bar D$, on a

$$\int_{\mathbf{T}} u(z_1,\zeta_2)\, \varphi(z_1)\, dz_1 = \int_D f_1(z_1,\zeta_2)\, \varphi(z_1)\, d\bar z_1 \wedge dz_2 \;;$$

(ii) Pour presque tout $\zeta_1 \in \mathbf{T}$, et toute fonction $\psi(z_2)$ holomorphe au voisinage de $\bar D$, on a

$$\int_{\mathbf{T}} u(\zeta_1,z_2)\, \psi(z_2)\, dz_2 = \int_D f_2(\zeta_1,z_2)\, \psi(z_2)\, d\bar z_2 \wedge dz_2.$$

Remarques. 1. Si $f \in L^1_{(0,1)}(D^2)$ admet $\tilde f \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ pour valeurs au bord au sens de (I.1), et si $\bar\partial f = 0$, alors $\bar\partial_b \tilde f = 0$.

2. Soit $f \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. Si il existe $u \in L^1(\mathbf{T}^2)$ telle que $\bar\partial_b u = f$, alors $\bar\partial_b f = 0$.

L'équation $\bar\partial_b u = f$ de la définitionII.2, et l'équation $\bar\partial u = f$ dans D^2 sont reliés par la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. Soit $f \in L^1_{(0,1)}(D^2)$ une forme $\bar\partial$-fermée admettant des valeurs au bord $\tilde{f} \in L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ au sens de (II.11). Supposons qu'il existe $u \in L^1(\mathbf{T}^2)$ telle que $\bar\partial_b u = \tilde{f}$. Alors il existe $U \in L^1(D^2)$ telle que $\bar\partial U = f$ et, de plus, pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 de classe C^2 dans un voisinage de $\overline{D^2}$, en posant $\varphi = \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar z_1} d\bar z_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar z_2} d\bar z_2$, on a :

$$\text{(II.14)}\quad \begin{aligned}&\int_{D^2} U\,\bar\partial\varphi\wedge dz_1\wedge dz_2 + \int_{D^2} f\wedge\varphi\wedge dz_1\wedge dz_2 + \int_{D\times\mathbf{T}} \tilde f\wedge\psi_1\wedge dz_1\wedge dz_2 + \\ &\int_{\mathbf{T}\times D} \tilde f\wedge\psi_2\wedge dz_1\wedge dz_2 = \int_{\mathbf{T}^2} u(\psi_1-\psi_2)\,dz_1\wedge dz_2.\end{aligned}$$

La démonstration de cette proposition est standard. On définit tout d'abord une fonction $\tilde U$ sur ∂D^2 de la manière suivante :

pour presque tout $(z_1,z_2) \in D\times\mathbf{T}$, on pose :

$$\tilde U(z_1,z_2) = -\frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\tilde f_1(\zeta_1,z_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{T}} \frac{u(\zeta_1,z_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1 .$$

De même, pour presque tout $(z_1,z_2) \in \mathbf{T}\times D$:

$$\tilde U(z_1,z_2) = \frac{-1}{2i\pi}\int_D \frac{\tilde f_2(z_1,\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2 + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{T}} \frac{u(z_1,\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\zeta_2 .$$

Il est clair que $\tilde U \in L^1(\partial D^2)$. De plus, si ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de classe C^1 au voisinage de $\overline{D^2}$, compte tenu des orientations respectives de $D\times\mathbf{T}$, $\mathbf{T}\times D$ et $\mathbf{T}^2$, il résulte de la formule de Green pour les fonctions d'une variable complexe et des deux conditions de (II.13) que l'on a les deux relations suivantes :

$$\text{(II.15)}\quad \int_{D\times\mathbf{T}} \tilde U\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\bar z_1}\, d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2 + \int_{D\times\mathbf{T}} \tilde f_1 d\bar z_1\wedge\psi_1 dz_1\wedge dz_2 = \int_{\mathbf{T}^2} u\,\psi_1\, dz_1\wedge dz_2 \;;$$

$$\text{(II.16)}\quad \int_{\mathbf{T}\times D} \tilde U\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\bar z_2}\, d\bar z_2\wedge dz_1\wedge dz_2 + \int_{\mathbf{T}\times D} \tilde f_2\, d\bar z_2\wedge\psi_2\, dz_1\wedge dz_2 = -\int_{\mathbf{T}^2} u\,\psi_2\, dz_1\wedge dz_2 .$$

Si φ est une forme de type $(0,1)$ et de classe C^2 au voisinage de $\overline{D^2}$, $\bar\partial$-fermée, on peut écrire $\varphi = \bar\partial\psi$ où ψ est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{D^2}$, et, en appliquant (II.15) et (II.16) à $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ on obtient, en additionnant les deux relations :

$$\int_{\partial(D^2)} \widetilde{U}\, \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 = - \int_{\partial(D^2)} \widetilde{f} \wedge \psi\, dz_1 \wedge dz_2 .$$

Compte tenu de la relation (II.11) reliant f et $\widetilde{f}$, cela donne :

$$\int_{\partial(D^2)} \widetilde{U}\, \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 = \int_{D^2} f \wedge \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 .$$

En d'autres termes, si on note $f^{\#}$ le prolongement par 0 de f à $\mathbb{C}^2$ et par $[\partial D^2]_{(0,1)}$ le composante de bidegré $(0,1)$ du courant d'intégration sur ∂D^2, on a :

$$\bar{\partial}\left[f^{\#} - [\partial D^2]_{(0,1)} \widetilde{U}\right] = 0. \tag{II.17}$$

Pour tout $(z_1,z_2) \in D^2$, on pose alors :

$$U(z_1,z_2) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{D^2} f(\zeta) \wedge K(\zeta,z) - \int_{\partial D^2} \widetilde{U}(\zeta)\, K(\zeta,z)\right\},$$

où $K(\zeta,z)$ est le noyau de Martinelli-Bochner. Compte tenu de la propriété fondamentale de $K(\zeta,z)$ (voir par exemple [8]), (II.17) entraîne que pour toute forme φ de type $(0,1)$ et de classe C^1 dans un voisinage de $\overline{D^2}$ on a :

$$\int_{D^2} U\, \bar{\partial} \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D^2} f \wedge \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 = \int_{\partial D^2} \widetilde{U}\, \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 . \tag{II.18}$$

Il est clair que $U \in L^1(D^2)$, et, la relation (II.14) résulte aussitôt de (II.18), (II.16) et (II.15).

Nous allons maintenant résoudre l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ avec les estimations qui nous seront utiles dans les paragraphes suivants.

Pour cela il nous faut préciser quelques notations.

Nous noterons C_1 (resp. C_2) l'opérateur défini sur $L^1(\mathbf{T}^2)$ de la manière suivante : si $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, on définit $C_1 f$ (resp. $C_2 f$) par ses coefficients de Fourier en posant : (C_1 n'est autre que l'opérateur de Cauchy au bord)

$$\widehat{C_1 f}(n_1,n_2) = \begin{cases} \hat{f}(n_1,n_2) & \text{si } n_1 \leq 0 \text{ et } n_2 \in \mathbf{Z}, \\ 0 & \text{si } n_1 > 0 \text{ et } n_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

(resp. $$\widehat{C_2 f}(n_1,n_2) = \begin{cases} \hat{f}(n_1,n_2) & \text{si } n_2 \leq 0 \text{ et } n_1 \in \mathbf{Z}, \\ 0 & \text{si } n_2 > 0 \text{ et } n_1 \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Par conséquent, l'opérateur $C_1 C_2$ se définit par :

$$\widehat{C_1 C_2 f}(n_1,n_2) = \begin{cases} \hat{f}(n_1,n_2) & \text{si } n_1 \leq 0 \text{ et } n_2 \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la suite nous serons amenés à utiliser les propriétés suivantes :

LEMME II.2. <u>Soit</u> $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$. <u>Si</u> $C_1 f \in L^1(\mathbf{T}^2)$ <u>(resp.</u> $C_2 f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, <u>resp.</u> $C_1C_2 f \in L^1(\mathbf{T}^2)$ <u>et si, pour tout</u> $r < 1$ <u>et presque tout</u> $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$, <u>on pose</u>

$$C_1^r f(\zeta_1,\zeta_2) = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta_1},\zeta_2)\,\zeta_1}{\zeta_1 - re^{i\theta_1}}\, d\theta_1 ,$$

<u>(resp.</u> $$C_2^r f(\zeta_1,\zeta_2) = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta_1,e^{i\theta_2})\,\zeta_2}{\zeta_2 - re^{i\theta_2}}\, d\theta_2 ,$$

<u>resp.</u> $$(C_1C_2)^r f(\zeta_1,\zeta_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\,\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1-re^{i\theta_1})(\zeta_2-re^{i\theta_2})}\, d\theta_1\, d\theta_2) ,$$

<u>alors la suite</u> $C_1^r f$ <u>(resp.</u> $C_2^r f$, <u>resp.</u> $(C_1C_2)^r f$) <u>converge, lorsque</u> $r \longrightarrow 1$, <u>vers</u> $C_1 f$ <u>(resp.</u> $C_2 f$, <u>resp.</u> $C_1C_2 f$) <u>dans</u> $L^1(\mathbf{T}^2)$.

En effet, en calculant les coefficients de Fourier de $C_1^r f$, on voit aussitôt que

$$C_1^r f(e^{i\theta_1},\zeta_2) = \int_0^{2\pi} C_1 f(e^{i\varphi},\zeta_2)\, \frac{1 - r^2}{1-2r\cos(\theta_1-\varphi)+r^2}\, d\varphi .$$

Puisque $C_1 f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, la convergence dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ en résulte immédiatement. Les autres convergences se voient de la même manière.

Pour toute fonction $f \in L^1(D \times \mathbf{T})$ (resp. $g \in L^1(\mathbf{T} \times D)$), nous noterons $P_1^* f$ (resp. $P_2^* g$) la fonction de $L^1(\mathbf{T}^2)$ définie pour presque tout $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$ par :

$$P_1^* f(\zeta_1,\zeta_2) = \int_D f(z_1,\zeta_2)\, \frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{\zeta}_1 z_1|^2}\, d\lambda(z_1)$$

(resp. $P_2^* g(\zeta_1,\zeta_2) = \int_D g(\zeta_1,z_2) \frac{1-|z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^2} d\lambda(z_2)$).

Nous définissons maintenant des sous-espaces de $L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ adaptés à la résolution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ que nous allons donner :

1. Soit $p \in]1,+\infty[$. Soit $\Lambda^p(D \times \mathbf{T})$ (resp. $\Lambda^p(\mathbf{T} \times D)$) l'espace des fonctions $f \in L^1(D \times \mathbf{T})$ (resp. $g \in L^1(\mathbf{T} \times D)$) telles que la fonction $P_1^* f$ (resp. $P_2^* g$) appartienne à $L^p(\mathbf{T}^2)$. Nous notons alors $\Lambda^p_{(0,1)}(\partial D^2)$ l'espace des formes différentielles $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ appartenant à $L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ telles que $f_1 \in \Lambda^p(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in \Lambda^p(\mathbf{T} \times D)$. Cet espace est muni de la norme naturelle

$$\|f\|_{\Lambda^p_{(0,1)}(\partial D^2)} = \|f_1\|_{L^1(D\times\mathbf{T})} + \|f_2\|_{L^1(\mathbf{T}\times D)} + \|P_1^* f_1\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} + \|P_2^* f_2\|_{L^p(\mathbf{T}^2)}.$$

2. Soit $\Lambda^1(D \times \mathbf{T})$ (resp. $\Lambda^1(\mathbf{T}\times D)$) l'espace des fonctions $f \in L^1(D\times\mathbf{T})$ (resp. $g \in L^1(\mathbf{T}\times D)$) telles que les fonctions $C_1 P_1^* f$ et $C_1 C_2 P_1^* f$ (resp. $C_2 P_2^* g$ et $C_1 C_2 P_2^* g$) soient dans $L^1(\mathbf{T}^2)$. On note alors $\Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ l'espace des formes différentielles $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ appartenant à $L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ telles que $f_1 \in \Lambda^1(D \times \mathbf{T})$ et $f_2 \in \Lambda^1(\mathbf{T} \times D)$. Cet espace est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)} = {} & \|f_1\|_{L^1(D\times\mathbf{T})} + \|f_2\|_{L^1(\mathbf{T}\times D)} + \\ & + \|P_1^* f_1\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} + \|P_2^* f_2\|_{L^2(\mathbf{T}^2)} + \\ & + \|C_1 P_1^* f_1\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} + \|C_2 P_2^* f_2\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} + \\ & + \|C_1 C_2 P_1^* f_1\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} + \|C_1 C_2 P_2^* f_2\|_{L^1(\mathbf{T}^2)}. \end{aligned}$$

THEOREME II.3. <u>Il existe un opérateur linéaire</u> T <u>de</u> $\Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ <u>dans</u> $L^1(\mathbf{T}^2)$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

1. <u>Pour toute forme</u> $f \in \Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ <u>telle que</u> $\bar{\partial}_b f = 0$, <u>on a</u>

$$\bar{\partial}_b(Tf) = f,$$

au sens des définitions II.1 et II.2.

2. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p_{(0,1)}(\partial D^2)} .$$

3. Soit $f \in L^\infty_{(0,1)}(\partial D^2)$ telle que $\bar{\partial}_b f = 0$. Si il existe $\tilde{f} \in L^\infty_{(0,1)}(D^2), \bar{\partial}\tilde{f} = 0$, qui prolonge f dans D^2 au sens de (II.12), alors

$$\|Tf\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \leq C_\infty (\|f\|_{L^\infty_{(0,1)}(\partial D^2)} + \|\tilde{f}\|_{L^\infty_{(0,1)}(D^2)}) ,$$

où C_∞ est une constante qui ne dépend pas de f.

La partie 3 de ce théorème est due à G. M. Henkin [5].

Nous allons déduire ce théorème de la proposition suivante :

PROPOSITION II.2. Il existe des opérateurs linéaires A_1, B_1 (resp. A_2, B_2) de $\Lambda^1(D \times \mathbf{T})$ (resp. $\Lambda^1(\mathbf{T} \times D)$) dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\|A_1 f\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p(D \times \mathbf{T})} \quad \text{et} \quad \|B_1 f\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p(D \times \mathbf{T})} ,$$

$$(\text{resp. } \|A_2 g\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|g\|_{\Lambda^p(\mathbf{T} \times D)} \quad \text{et} \quad \|B_2 g\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|g\|_{\Lambda^p(\mathbf{T} \times D)}) .$$

(ii) Pour presque tous $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{T}$, toutes fonctions φ et ψ holomorphes au voisinage de $\bar{D}$, et toutes fonctions $f \in \Lambda^1(D \times \mathbf{T})$ et $g \in \Lambda^1(\mathbf{T} \times D)$, on a les relations suivantes :

$$\text{(II.19)} \quad \int_{\mathbf{T}} (A_1 f)(z_1, \zeta_2) \varphi(z_1) dz_1 = 2i\pi \int_D f(z_1, \zeta_2) \varphi(z_1)\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \ ;$$

$$\text{(II.20)} \quad \int_{\mathbf{T}} (A_2 g)(\zeta_1, z_2) \psi(z_2)\, dz_2 = 2i\pi \int_D g(\zeta_1, z_2) \psi(z_2)\, d\bar{z}_2 \wedge dz_2 \ ;$$

(II.21) $\int_{\mathbf{T}} (B_2 g)(z_1, \zeta_2)\, \varphi(z_1)\, dz_1 = 2i\pi \int_{\mathbf{T}} (A_2 g)(z_1, \zeta_2)\, \varphi(z_1)\, dz_1$;

(II.22) $\int_{\mathbf{T}} (B_1 f)(\zeta_1, z_2)\, \psi(z_2)\, dz_2 = 2i\pi \int_{\mathbf{T}} (A_1 f)(\zeta_1, z_2)\, \psi(z_2)\, dz_2$.

(iii) Soit $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2 \in \Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. Si $\bar{\partial}_b f = 0$, on a

$$B_1 f_1 = B_2 f_2 .$$

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons les relations suivantes :

LEMME II.3. <u>Soit</u> $f \in \Lambda^1(D \times \mathbf{T})$. <u>Pour tout réel positif</u> $r < 1$ <u>et presque tout</u> $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{T}^2$, <u>on a</u> :

(II.23) $$\int_D f(z_1, \zeta_2) \frac{d\lambda(z_1)}{\zeta_1 - rz_1} = \bar{\zeta}_1 (C_1^r (P_1^* f))(\zeta_1, \zeta_2) \ ;$$

(II.24) $$\int_{D \times \mathbf{T}} f(z_1, z_2) \frac{d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} = \frac{-2}{r} \bar{\zeta}_1 \Big[(C_1 C_2)^r (P_1^* f)(\zeta_1, \zeta_2) - \int_0^{2\pi} C_1^r (P_1^* f)(\zeta_1, e^{i\theta_2}) d\theta_2 \Big] .$$

On vérifie aisément ces formules en calculant les coefficients de Fourier de chaque membre de chacune des égalités.

On a évidemment un énoncé analogue pour les fonctions de $\Lambda^1(\mathbf{T} \times \mathbf{D})$.

On utilise maintenant le théorème suivant.

THEOREME II.4. <u>Soit</u> $f \in \Lambda^p(D \times \mathbf{T})$. <u>Pour</u> $r < 1$ <u>et presque tous</u> $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{T}$, <u>posons</u>

$$f_1^r(\zeta_1, \zeta_2) = \int_D f(z_1, \zeta_2) \frac{d\lambda(z_1)}{\zeta_1 - rz_1} ,$$

$$f_2^r(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{D \times \mathbf{T}} f(z_1, z_2) \frac{d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} .$$

<u>Alors</u>

$$\sup_{i=1,2} \sup_{r<1} \|f_i^r\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p(D \times \mathbf{T})} .$$

Pour $p = 1$ ceci résulte aussitôt des lemmes II.3 et II.4 et de la définition de $\Lambda^1(D \times \mathbf{T})$. Pour $p > 1$, on utilise le fait que les opérateurs C_1 et C_1C_2 envoient $L^p(\mathbf{T}^2)$ dans $L^p(\mathbf{T}^2)$, car C_i, $i = 1, 2$, est une intégrale singulière sur $\mathbf{T}$ [4], le lemme II.3 et la démonstration du lemme II.2.

On a naturellement un énoncé analogue pour les fonctions de $\Lambda^p(\mathbf{T} \times D)$.

Démontrons maintenant la proposition II.2. Soit $f \in \Lambda^1(D \times \mathbf{T})$. Pour $r < 1$, posons

$$A_1^r f(\zeta_1, \zeta_2) = \int_D f(z_1, \zeta_2) \frac{d\bar{z}_1 \wedge dz_1}{\zeta_1 - rz_1},$$

$$B_1^r f(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{D \times \mathbf{T}} f(z_1, z_2) \frac{d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)}.$$

D'après le théorème II.4, pour $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\|A_1^r f\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p(D \times \mathbf{T})} \quad \text{et} \quad \|B_1^r f\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{\Lambda^p(D \times \mathbf{T})}$$

D'autre part, il résulte de la formule de Cauchy que si ψ et φ sont des fonctions analytiques au voisinage de $\overline{D}$, on a

$$\text{(II.25)} \quad \int_{\mathbf{T}} A_1^r f(z_1,\zeta_2)\,\varphi(z_1)\,dz_1 = 2i\pi \int_D f(z_1,\zeta_2)\,\varphi(rz_1)\,d\bar{z}_1 \wedge dz_1,$$

$$\text{(II.26)} \quad \int_{\mathbf{T}} B_1^r f(\zeta_1,z_2)\,\psi(z_2)\,dz_2 = 2i\pi \int_{\mathbf{T}} A_1^r f(\zeta_1,z_2)\,\psi(rz_2)\,dz_2.$$

Les lemmes II.2 et II.3 montrent que, lorsque $r \longrightarrow 1$, les suites $r \longrightarrow A_1^r f$ et $r \longrightarrow B_1^r f$ sont des suites de Cauchy dans $L^1(\mathbf{T}^2)$, ce qui permet de définir les opérateurs A_1 et B_1 en posant, pour toute $f \in \Lambda^1(D \times \mathbf{T})$,

$$A_1 f = \lim_{r\to 1} A_1^r f \qquad \text{et} \qquad B_1 f = \lim_{r\to 1} B_1^r f.$$

De plus, on peut passer à la limite lorsque $r \longrightarrow 1$ dans les formules (II.25) et (II.26) ce qui donne les relations (II.19) et (II.22).

De la même manière, on définit les opérateurs A_2 et B_2 en posant pour toute fonction $g \in \Lambda^1(\mathbf{T} \times D)$ et presque tout $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$:

$$A_2 g(\zeta_1,\zeta_2) = \lim_{r\to 1} \int_D g(\zeta_1,z_2)\,\frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_2}{\zeta_2 - rz_2}\;,$$

$$B_2 g(\zeta_1,\zeta_2) = \lim_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}\times D} g(z_1,z_2)\,\frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)}.$$

Reste à voir la condition (iii) de la proposition : comme la fonction

$$(z_1,z_2) \longrightarrow \frac{1}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)}$$

est holomorphe au voisinage de $\overline{D^2}$, si $\bar{\partial}_b f = 0$, par définition, on a

$$\int_{D\times\mathbf{T}} f_1(z_1,z_2)\,\frac{d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} = - \int_{\mathbf{T}\times D} f_2(z_1,z_2)\,\frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} =$$

$$= \int_{\mathbf{T}\times D} f_2(z_1,z_2)\,\frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_2 \wedge dz_1}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)}.$$

En passant à la limite quand $r \longrightarrow 1$, il vient $B_1 f_1 = B_2 f_2$.

Démontrons maintenant le théorème II.3. On définit l'opérateur T sur $\Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ en posant pour toute forme $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$,

$$Tf = \frac{1}{2i\pi} A_1 f_1 + \frac{1}{2i\pi} A_2 f_2 + \frac{1}{4\pi^2} B_2 f_2. \tag{II.27}$$

La condition 2 du théorème résulte donc de la condition (i) de la proposition II.2. De plus, si $\bar{\partial}_b f = 0$, le (iii) de la proposition II.2 montre que l'on a

$$Tf = \frac{1}{2i\pi} A_1 f_1 + \frac{1}{2i\pi} A_2 f_2 + \frac{1}{4\pi^2} B_1 f_1. \tag{II.28}$$

En utilisant (II.27), les relations (II.19) et (II.21) montrent que la première des conditions de (II.13) est satisfaite. En utilisant (II.28), (II.20) et (II.22) on voit que la deuxième l'est aussi ce qui montre le 1. du théorème.

La démonstration du 3. du théorème (II.3) est essentiellement la même que celle utilisée par G. M. Henkin dans [5] pour résoudre l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans le polydisque avec une estimation uniforme.

Il est bien clair que si $f \in L^\infty_{(0,1)}(\partial D^2)$, on a

$$\|A_1 f_1\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \leq C_\infty \|f_1\|_{L^\infty(D\times\mathbf{T})} \quad \text{et} \quad \|A_2 f_2\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \leq C_\infty \|f_2\|_{L^\infty(\mathbf{T}\times D)}.$$

Par contre, il n'est pas vrai en général que $B_2 f_2 \in L^\infty(\mathbf{T}^2)$. Plaçons nous sous les hypothèses du 3. du théorème. De l'identité,

$$\frac{1}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} = \frac{\bar{\zeta}_1 - r\bar{z}_1}{(\zeta_2 - rz_2)|\zeta - rz|^2} + \frac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2},$$

avec $|\zeta - rz|^2 = |\zeta_1 - rz_1|^2 + |\zeta_2 - rz_2|^2$, on déduit,

$$B_2^r f_2 = \int_{\mathbf{T}\times D} f_2(z_1,z_2) \frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{(\zeta_1 - rz_1)(\zeta_2 - rz_2)} = \int_{\mathbf{T}\times D} f_2(z_1,z_2) \frac{\bar{\zeta}_1 - r\bar{z}_1}{(\zeta_2 - rz_2)|\zeta - rz|^2} d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \; +$$

$$+ \int_{\mathbf{T}\times D} f_2(z_1,z_2) \frac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2} d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \times \tag{II.29}$$

$$= I_1 + I_2.$$

Comme la fonction $(z_1,z_2) \longrightarrow \dfrac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2}$ est de classe C^1 au voisinage de $\overline{D^2}$, l'hypothèse faite sur f entraîne que :

$$\int_{\partial D^2} f \wedge \frac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2}\, dz_1 \wedge dz_2 = - \int_{D^2} \tilde{f} \wedge \bar{\partial}_z \left(\frac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2} \right) \wedge dz_1 \wedge dz_2 .$$

Comme $\bar{\partial}_z \left(\dfrac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2} \right) = r \dfrac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{|\zeta - rz|^4} d\bar{z}_1 - r \dfrac{\bar{\zeta}_1 - r\bar{z}_1}{|\zeta - rz|^2} d\bar{z}_2$, il vient finalement :

$$B_2^r f_2 = I_1 -$$

$$- \int_{D \times \mathbf{T}} f_1(z_1,z_2) \frac{\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2}{(\zeta_1 - rz_1)|\zeta - rz|^2}\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D^2} r \frac{(\bar{\zeta}_1 - r\bar{z}_1)\tilde{f}_1 + (\bar{\zeta}_2 - r\bar{z}_2)\tilde{f}_2}{|\zeta - rz|^4}\, d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2 .$$

Comme le premier membre de (II.29) converge dans $L^1(\mathbf{T}^2)$ vers $B_2 f_2$ quand $r \to 1$, et comme la fonction $(z_1,z_2) \longrightarrow \dfrac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_2}{(\zeta_1 - z_1)|\zeta - z|^2}$ est intégrable sur $D \times \mathbf{T}$, il vient pour presque tout $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$:

$$B_2 f_2(\zeta_1,\zeta_2) = - \int_{D \times \mathbf{T}} f_1(z_1,z_2) \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{(\zeta_1 - z_1)|\zeta - z|^2}\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge dz_2 +$$

$$\int_{\mathbf{T} \times D} f_2(z_1,z_2) \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{(\zeta_2 - z_2)|\zeta - z|^2}\, d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2 +$$

$$+ 4 \int_{D^2} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)\tilde{f}_1(z_1,z_2) + (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)\tilde{f}_2(z_1,z_2)}{|\zeta - z|^4}\, d\lambda(z_1)\, d\lambda(z_2).$$

Ainsi, $\|B_2 f_2\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \leq C_\infty (\|f_1\|_{L^\infty(D \times \mathbf{T})} + \|\tilde{f}\|_{L^\infty_{(0,1)}(D^2)})$.

<u>Remarque</u>. Clairement on peut affaiblir l'hypothèse sur $\tilde{f}$: en effet, il suffit que le noyau de Bochner Martinelli envoie $\tilde{f}$ dans L^∞ ce qui a lieu si $\tilde{f} \in L^p(D^2)$ avec $p > 4$.

References

[1] AMAR, E. et CHARPENTIER, Ph. Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes définies sur une sous-variété du bidisque. A paraitre au Bull. Sci. Math.

[2] CHARPENTIER, Ph. Solutions minimales de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque. C.R.A.S. 289 (1979), 743-745.

[3] CHARPENTIER, Ph. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$. A paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[4] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972).

[5] HENKIN, G. M. and CHIRKA, E. M. Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables (chap. VII). J. Soviet Math. 5 (1976), 612-687.

[6] LANDUCCI, M. On the projection of $L^2(D)$ into $H(D)$. Duke Math. J. 42 (1975), 231-237.

[7] LANDUCCI, M. Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$-problem in the polydisk. Proc. Symp. Pure Math. 30 (1977), 177-180.

[8] SKODA, H. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 225-299.

Chapitre III

EXTENSIONS DANS LES CLASSES DE HARDY DE FONCTIONS HOLOMORPHES DEFINIES SUR UNE SOUS-VARIETE DU BIDISQUE.

Ce chapitre est extrait, avec une légère modification, d'un travail réalisé en commun avec E. Amar [2].

Soit u une fonction holomorphe dans le bidisque unité de $\mathbb{C}^2$, et notons $Z(u)$ l'ensemble de ses zéros dans D^2. On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions sur u et sur une fonction f holomorphe sur $Z(u)$ existe-t-il une fonction F holomorphe dans D^2, appartenant à la classe de Hardy $H^p(D^2)$ telle que $F|_{Z(u)} = f$?

Cette question a précédemment été étudiée par E. L. Stout [9] (voir aussi les références citées dans cet article) et C. Horowitz et D. Oberlin [8].

Dans le cas du bidisque, les résultats obtenus ici contiennent strictement ceux de [8] et [9] lorsque $Z(u)$ n'a pas de singularité sur le bord de D^2.

La méthode de construction des extensions que nous employons est complètement analogue à celle utilisée par A. Cumenge [4] pour résoudre le même problème dans le cadre des domaines strictement pseudoconvexes bornés de $\mathbb{C}^n$.

1. ENONCE DU THEOREME.

Rappelons tout d'abord que pour tout $p \in [1,+\infty]$, on appelle classe de Hardy $H^p(D^2)$ du bidisque, la classe formée par les fonctions holomorphes f dans D^2 telles que

$$\sup_{r<1} \int_{[0,2\pi]^2} |f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})|^p d\theta_1 d\theta_2 < \infty,$$

si $p < \infty$ et $f \in L^\infty(D^2)$ si $p = +\infty$.

Soit $u \in C^1(\overline{D}^2)$ une fonction holomorphe dans D^2, et notons

$$Z(u) = \{(z_1,z_2) \in D^2 \ ; \ u(z_1,z_2) = 0\}.$$

Dans ce chapitre, nous allons donc donner une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe sur $Z(u)$ soit la restriction d'une fonction d'une classe $H^p(D^2)$.

Pour obtenir ce résultat, il nous faut faire un certain nombre de restrictions sur l'ensemble analytique $Z(u)$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons donc que les conditions suivantes sont satisfaites :

(III.1) Il existe un voisinage $v(\overline{\partial D^2})$ de $\overline{\partial D^2}$ dans $\mathbf{C}^2$ tel qu'en tout point $z \in Z(u) \cap v(\overline{\partial D^2})$, la fonction u engendre l'idéal des germes des fonctions holomorphes au voisinage de z qui s'annulent sur $Z(u)$.

Cette condition est une conséquence d'une condition plus forte que nous imposons :

(III.2) a) $\dfrac{\partial u}{\partial z_1}$ ne s'annule pas sur $\overline{Z(u)} \cap (\overline{D} \times \mathbf{T})$;

b) $\dfrac{\partial u}{\partial z_2}$ ne s'annule pas sur $\overline{Z(u)} \cap (\mathbf{T} \times \overline{D})$.

Les autres conditions que nous imposons sur $Z(u)$ sont des conditions géométriques sur le bord de $Z(u)$:

(III.3) Si $\mathbf{z}^o = (z_1^o, z_2^o)$ est un point de $\overline{Z(u)} \cap \mathbf{T}^2$, on suppose qu'il existe un voisinage $v(\mathbf{z}^o)$ tel que l'une des trois conditions suivantes soit satisfaite :

a) $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(\mathbf{z}^o) \subset \overline{D} \times \mathbf{T}$;

b) $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(\mathbf{z}^o) \subset \mathbf{T} \times \overline{D}$;

c) $\overline{Z(u)} \cap \mathbf{T}^2 \cap v(z^o) = \{z^o\}$; plus précisément, il existe une fonction φ de classe C^1 au voisinage de z_2^o vérifiant les conditions suivantes :

α) φ est holomorphe dans $\{|z_2|<1\} \cap \{|\varphi(z_2)|<1\}$ au voisinage de z_2^o, et $\frac{\partial \varphi}{\partial z_2}(z_2^o) \neq 0$;

β) $z_1 = \varphi(z_2)$ est une équation de $Z(u)$ dans $v(z^o) \cap D^2$;

γ) ou bien φ est holomorphe dans $\{|z_2|<1\}$ au voisinage de z_2^o ou bien φ^{-1} est holomorphe dans $\{|z_1|<1\}$ au voisinage de z_1^o

δ) la courbe C^1 formée des points z_2 tels que $|\varphi(z_2)| = 1$ a une tangente au point z_2^o distincte de la tangente à $\mathbf{T}$ en ce point.

Définissons maintenant les espaces de fonctions holomorphes sur $Z(u)$ pour lesquels nous aurons une extension dans une classe de Hardy du bidisque :

(III.4) On note $B_\infty(Z(u))$ l'espace des fonctions holomorphes bornées sur $Z(u)$.

(III.5) Pour $1 \leq p < \infty$, on note $B_p(Z(u))$ l'espace des fonctions holomorphes sur $Z(u)$ qui vérifient les conditions suivantes :

(III.5.1) $|f|^p$ est intégrable pour la mesure euclidienne sur $Z(u)$

(III.5.2) Soit $z^o = (z_1^o, z_2^o) \in \partial D^2 \cap \overline{Z(u)}$. Supposons par exemple $z^o \in D \times \mathbf{T}$. D'après (III.2), il existe un voisinage $v(z^o)$ de z^o que l'on peut supposer de la forme $D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}$ où $D_{z_1^o}$ et $D_{z_2^o}$ sont des disques centrés respectivement en z_1^o et z_2^o, et une fonction φ holomorphe dans $D_{z_2^o} \cap D$ et C^1 dans $D_{z_2^o} \cap \overline{D}$ telle que dans $(D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}) \cap \overline{D}^2$, $\overline{Z(u)}$ ait une équation de la forme

$$z_1 = \varphi(z_2) \quad , \quad z_2 \in D_{z_2^o} \cap \overline{D}.$$

De plus, pourvu que $D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}$ soit assez petit on peut supposer que

$$\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap (D_{z_1^o} \times D_{z_2^o})$$

soit contenu dans $D \times \mathbf{T}$ et ait pour équation

$$z_1 = \varphi(e^{i\theta_2}) \quad , \quad e^{i\theta_2} \in D_{z_2^o} .$$

On suppose alors que pour tout $r < 1$, voisin de 1, la fonction

$$\theta_2 \longrightarrow f(\varphi(re^{i\theta_2}), re^{i\theta_2})$$

est dans $L^p(\{\theta_2 \ ; \ re^{i\theta_2} \in D_{z_2^o}\})$ et que sa norme y est majorée indépendamment de r.

Dans le cas où $z^o \in \mathbf{T} \times D$, on fait naturellement la même hypothèse en échangeant les rôles de z_1 et z_2.

(III.5.3) Soit $z^o = (z_1^o, z_2^o) \in \overline{Z(u)} \cap \mathbf{T}^2$ vérifiant l'une des deux premières conditions de (III.3) et tel que pour tout voisinage $v(z^o)$ de z^o on ait $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o) \not\subset \mathbf{T}^2$. Supposons par exemple qu'il existe un voisinage $v(z^o)$ de z^o tel que $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o) \subset \overline{D} \times \mathbf{T}$. D'après (III.2), on a alors la même représentation pour $\overline{Z(u)}$ dans $v(z^o) \cap \overline{D^2}$ qu'en (III.5.2). On suppose alors qu'il existe un voisinage $v_1(z^o) = D_{z_1^o} \times D_{z_2^o} \subset v(z^o)$ tel que, dans ce voisinage, la fonction f satisfasse la même condition que celle demandée en (III.5.2).

Dans le cas où $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o) \subset \mathbf{T} \times \overline{D}$ on fait naturellement la même hypothèse en échangeant les rôles de z_1 et z_2.

(III.5.4) Soit enfin $z^o = (z_1^o, z_2^o) \in \overline{Z(u)} \cap \mathbf{T}^2$ un point du bord de $Z(u)$ vérifiant la troisième condition de (III.3). En reprenant les mêmes notations qu'en (III.3) c), si φ est définie dans un voisinage $v(z_2^o)$ de z_2^o, on suppose qu'il existe un voisinage $v_1(z^o) = D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}$, $D_{z_2^o} \subset v(z_2^o)$ tel que, pour $r < 1$, r voisin de 1, les fonctions

$$\theta_2 \longrightarrow f(\varphi(re^{i\theta_2}), re^{i\theta_2}) \quad \text{et} \quad \theta_1 \longrightarrow f(re^{i\theta_1}, \varphi^{-1}(re^{i\theta_1}))$$

sont dans $L^p(\{\theta_2 \ ; \ (\varphi(re^{i\theta_2}), re^{i\theta_2}) \in D^2 \cap v_1(z^o)\})$ et dans $L^p(\{\theta_1 \ ; \ (re^{i\theta_1}, \varphi^{-1}(re^{i\theta_1})) \in D^2 \cap v_1(z^o)\})$ respectivement, et que leur normes y sont majorées indépendamment de r.

REMARQUES. 1. Dans la situation décrite en (III.5.2) (ainsi qu'en (III.5.3)), l'hypothèse faite sur f entraîne que si Ω_2 est un domaine à bord C^∞ contenu dans $D_{z_2^o} \cap D$ et contenant l'intersection de D avec un disque fermé centré en z_2^o et contenu dans $D_{z_2^o}$ alors la fonction $z_2 \longrightarrow f(\varphi(z_2),z_2))$ est dans la classe de Hardy $H^p(\Omega_2)$ (ceci se déduit aisément de propriétés classiques des noyaux de Poisson). En particulier, pour presque tout θ_2 tel que $e^{i\theta_2} \in D_{z_2^o}$, la limite

$$f(\varphi(e^{i\theta_2}),e^{i\theta_2}) = \lim_{r\to 1} f(\varphi(re^{i\theta_2}), re^{i\theta_2})$$

existe, et $\theta_2 \longrightarrow f(\varphi(e^{i\theta_2}),e^{i\theta_2})$ est dans $L^p(\{\theta_2 ; e^{i\theta_2} \in D'_{z_2^o}\})$ où $D'_{z_2^o}$ est un disque fermé contenu dans $D_{z_2^o}$.

2. Dans la situation décrite en (III.5.4), des arguments similaires et des propriétés classiques des transformations conformes (cf. [6] chap. X) montrent que si Ω_2 est un domaine de classe C^1 sauf au point z_2^o contenu dans l'ensemble des $z_2 \in D_{z_2^o}$ tels que $|z_2| < 1$ et $|\varphi(z_2)| < 1$ et contenant l'ensemble des z_2 appartenant à un disque fermé centré en z_2^o et contenu dans $D_{z_2^o}$ tels que $|z_2| < 1$ et $|\varphi(z_2)| < 1$, alors la fonction $z_2 \longrightarrow f(\varphi(z_2),z_2)$ est dans la classe de Hardy $H^p(\Omega_2)$ (cf. par exemple [5] ou [6]) et a donc des limites au bord non tangentielles presque partout sur $\partial\Omega_2$ qui sont dans $L^p(\partial\Omega_2)$. Naturellement, on a une propriété analogue pour la fonction $z_1 \longrightarrow f(z_1,\varphi^{-1}(z_1))$.

Dans ces conditions nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME III.1. Soient $p \in [1,+\infty]$ et $f \in B_p(Z(u))$. Alors il existe $F \in H^p(D^2)$ telle que $F|_{Z(u)} = f$.

REMARQUES. 1. Il est facile de voir que les conditions (III.4), (III.5.1) et (III.5.2) sont nécessaires pour avoir l'extension $F \in H^p(D^2)$ de f. Mais par contre les conditions (III.5.3) et (III.5.4) ne le sont pas.

2. On peut remarquer que lorsque $p \in]1,+\infty]$, il n'est pas nécessaire d'imposer à $Z(u)$ la condition (III.3) c) δ) pour avoir une extension de f dans $H^p(D^2)$ (voir la remarque précédant le lemme III.2).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la démonstration de ce théorème va se faire en deux étapes : tout d'abord, au paragraphe 2, nous allons construire au voisinage de chaque point de $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$ une extension locale de f qui vérifiera de bonnes estimations ; ensuite, au paragraphe 3, nous globaliserons ces extensions en résolvant un problème de Cousin.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ca chapitre, f désigne une fonction appartenant à une des classes $B_p(Z(u))$, $p \in [1,+\infty]$, fixée une fois pour toutes.

2. LES EXTENSIONS LOCALES DE f.

Soit $z^o = (z_1^o, z_2^o)$ un point de $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$. Nous distinguons quatre cas :

1. $\underline{\underline{z^o \in \partial D^2}}$.

Supposons par exemple $z^o \in D \times \mathbf{T}$. On est donc dans la situation décrite en (III.5.2). En reprenant les mêmes notations, on prend comme extension de f dans $(D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}) \cap D^2$ la fonction holomorphe

$$F(z_1, z_2) = f(\varphi(z_2), z_2).$$

Dans le cas où $z^o \in \mathbf{T} \times D$, on prend naturellement la même extension en échangeant les rôles de z_1 et de z_2.

2. $\underline{\underline{z^o \in \mathbf{T}^2 \text{ est un point du type (III.3) a) ou b) et pour tout voisinage } v(z^o) \text{ de } z^o, \text{ on a } \overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z_o) \not\subset \mathbf{T}^2}}$.

On est donc dans la situation décrite en (III.5.3) et par conséquent on peut prendre la même extension que dans le cas précédent.

3. $\underline{\underline{z^o \in \mathbf{T}^2 \text{ et il existe un voisinage } v(z_o^o) \text{ de } z^o \text{ tel que } \overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2} \cap v(z^o) \subset \mathbf{T}^2}}$.

L'hypothèse (III.2) faite sur u entraîne qu'il existe alors un voisinage $D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}$ de z^o, contenu dans $v(z^o)$ et un difféomorphisme de classe $C^1 \varphi$

de $D_{z_2^o}$ dans $D_{z_1^o}$ tel que $\varphi(D_{z_2^o} \cap D) \subset D_{z_1^o} \cap D$, $\varphi(D_{z_2^o} \cap \complement\overline{D}) \subset D_{z_1^o} \cap \complement\overline{D}$, $\varphi\,|_{D_{z_2^o} \cap D}$ est holomorphe, et, dans $D_{z_1^o} \times D_{z_2^o} \cap \overline{D^2}$, $\overline{Z(u)}$ a pour équation $z_1 = \varphi(z_2)$.

Supposons tout d'abord $p = +\infty$: comme dans les cas précédents, on prend comme extension F de f dans $D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}$ la fonction

$$F(z_1,z_2) = f(\varphi(z_2),z_2) \quad , \quad (z_1,z_2) \in D_{z_1^o} \times D_{z_2^o} .$$

Supposons maintenant $1 \leq p < \infty$. Soit $D'_{z_2^o}$ un disque ouvert de centre z_2^o relativement compact dans $D_{z_2^o}$, et soit Ω_2 un domaine à bord C^∞ tel que $D'_{z_2^o} \cap D \subset \Omega_2 \subset D_{z_2^o} \cap D$. Soit ψ_2 la transforme conforme qui envoie D sur Ω_2.

On notera que $\Omega_2 = \varphi(\Omega_1)$ est un domaine à bord C^1 contenu dans $D_{z_1^o} \cap D$ et tel qu'il existe un disque ouvert $D'_{z_1^o}$ centré en z_1^o tel que $D'_{z_1^o} \cap D \subset \Omega_1$.

L'hypothèse (III.5.1) faite sur f, et les propriétés classiques des transformations conformes (cf. [6]) entrainent que la fonction

$$g(\zeta) = f(\varphi \circ \psi_2(\zeta),\psi_2(\zeta)), \quad \zeta \in D$$

est dans le classe $A^p(D)$ (i. e. g est dans $L^p(D)$). Il en résulte alors (voir par exemple [10]) que la fonction

$$G(\xi_1,\xi_2) = \frac{3}{\pi}\int_D \frac{(1-|\xi|^2)^2 g(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}\xi_1)^2(1-\bar{\zeta}\xi_2)^2}\, d\lambda(\zeta)$$

est dans la classe de Hardy $H^p(D^2)$ et que pour tout $\xi \in D$, on a $G(\xi,\xi) = g(\xi)$. Soit alors $D''_{z_i^o}$ $(i = 1,2)$ un disque ouvert centré en z_i^o relativement compact dans $D'_{z_i^o}$. On prend alors comme extension de f dans $D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o} \cap D^2$ la fonction $F(z_1,z_2)$ définie par

$$F(z_1,z_2) = G(\psi_2^{-1} \circ \varphi^{-1}(z_1),\psi_2^{-1}(z_2)).$$

Il est tout d'abord clair d'après ce qui précède que si $(\varphi(z_2),z_2) \in D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o} \cap D^2$ on a bien $F(\varphi(z_2),z_2) = f(\varphi(z_2),z_2)$ ce qui montre que F est bien une extension de f dans $D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o} \cap D^2$.

D'autre part, pour tout $r < 1$, soit C_r^i $(i = 1,2)$ l'intersection du cercle $\{|z_i|=r\}$ avec le disque $D''_{z_i^o}$, et soient $\gamma_r^1 = \psi_2^{-1} \circ \varphi^{-1}(C_r^1)$ et $\gamma_r^2 = \psi_2^{-1}(C_r^2)$. Les régularités de φ et de ψ_2 montrent que la mesure d'intégration sur la courbe γ_r^i $(i = 1,2)$ est une mesure de Carleson dans D dont la norme est majorée indépendamment de r. La dualité entre $H^p(D)$ et les mesures de Carleson entraîne alors qu'il existe une constante C indépendante de r telle que

$$\int_{\gamma_r^1 \times \gamma_r^2} |G(\xi_1,\xi_2)|^p \, d\lambda(\xi_1) d\lambda(\xi_2) \leq c \|G\|_{H^p(D^2)}.$$

Par suite, en utilisant à nouveau les régularités de φ et de ψ_2, on en déduit qu'il existe une constante C indépendante de $r < 1$ telle que

$$\int_{\mathbf{T}_r^2 \cap (D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o})} |F(z_1,z_2)|^p \, d\lambda(z_1) d\lambda(z_2) \leq C ,$$

$\mathbf{T}_r^2$ désignant le tore de rayon r. On notera de plus que $F(z_1,z_2)$ admet des valeurs au bord non tangentielles presque partout sur $\mathbf{T}^2 \cap (D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o})$ et que ces valeurs sont dans $L^p(\mathbf{T}^2 \cap (D''_{z_1^o} \times D''_{z_2^o}))$.

Compte tenu des hypothèses faites sur $Z(u)$, il ne nous reste plus qu'un seul cas à envisager.

4. <u>z^o est un point de $\mathbf{T}^2$ vérifiant les conditions de (III.3) c).</u>

Reprenons les notations de (III.3) c) et supposons par exemple que φ^{-1} est holomorphe dans $\{|z_1| < 1\}$ au voisinage de z_1^o, ce qui signifie que φ est holomorphe dans $\{|\varphi(z_2)|<1\}$ au voisinage de z_1^o. Notons $v(z_2^o)$ un voisinage de z_2^o où φ est définie avec toutes les propriétés de (III.3) c), et soit $D_{z_2^o}$ un disque ouvert centré en z_2^o relativement compact dans $v(z_2^o)$. Soit Ω_1 (resp. Ω_2) un domaine à frontière de classe C^1 tel que $D_{z_2^o} \cap D \subset \Omega_1 \subset v(z_2^o) \cap D$ (resp. $D_{z_2^o} \cap \{|\varphi(z_2)|<1\} \subset \Omega_2 \subset v(z_2^o) \cap \{|\varphi(z_2)|<1\}$). On suppose de plus que $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ est réduit à deux points, à savoir le point z_2^o et un autre point que l'on note z_2^1. Ainsi $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est un domaine (simplement connexe) dont la frontière est formée de deux arcs de classe C^1 d'extrémités z_2^o et z_1^o et on peut de plus supposer (d'après l'hypothèse (III.3) c) δ) que ces deux arcs ne sont pas tangents aux points z_2^o et z_2^1.

Remarquons maintenant que, compte tenu de l'hypothèse (III.5.4) faite sur f au voisinage de z^o, des considérations semblables à celles faites dans la remarque précédant l'énoncé du théorème III.1 montrent que la fonction $g(\zeta) = f(\varphi(\zeta),\zeta)$ est dans le classe de Hardy $H^p(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ (cf. [5] ou [6]).

Pour montrer l'existence d'une extension locale de f dans un voisinage de z^o nous utilisons alors le lemme suivant.

LEMME III.1. Soit $p \in [1,+\infty]$. Pour toute fonction g appartenant à la classe de Hardy $H^p(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ il existe deux fonctions g_1 et g_2 appartenant respectivement aux classes de Hardy $H^p(\Omega_1)$ et $H^p(\Omega_2)$ telles que, pour $\zeta \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, on a

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) - g_2(\zeta).$$

REMARQUE. Dans le cas où $p = \infty$ et où Ω_1 et Ω_2 sont deux disques, ce lemme est dû à Poliakov, et une démonstration en a été donnée par E. Amar dans [1]. La démonstration que nous allons donner ici pour le cas $p = \infty$ est directement inspirée de celle donnée par E. Amar.

Démontrons maintenant ce lemme. Notons $\gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ et $\gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ les deux arcs de calsse C^1 formant le bord de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ et dont les extrémités sont z_2^o et z_2^1.

Supposons tout d'abord $1 < p < \infty$. Comme $g \in H^p(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, on sait (voir par ex. [5] ou [6]) que g admet des valeurs au bord non tangentielles presque partout sur $\gamma_1 \cup \gamma_2$ (que nous notons encore g) et que pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ on a la formule de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Pour tout $z \in \Omega_1$ (resp. Ω_2) posons alors

$$g_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left(\text{resp.} \quad g_2(z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right).$$

Il résulte alors du théorème de A. Calderón sur la transformée de Cauchy sur des courbes de classe C^1 [3], que $g_i \in H^p(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, et on a clairement $g(z) = g_1(z) - g_2(z)$ pour $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ce qui montre le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que $p = \infty$. Soit $\alpha \in]0, 1[$, et considérons la fonction holomorphe dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$,

$$h^\alpha(\zeta) = (\zeta - z_2^0)^\alpha (\zeta - z_2^1)^\alpha.$$

Comme, pour $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, la fonction $\zeta \longrightarrow g(\zeta) \dfrac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)}$ est dans la classe $H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, et qu'elle est égale à $g(z)$ pour $\zeta = z$, on a, comme précédemment, la formule de Cauchy,

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} g(\zeta) \frac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Pour tout $z \in \Omega_1$ (resp. Ω_2), posons alors

$$g_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} g(\zeta) \frac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \left(\text{resp.} \quad g_2(z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} g(\zeta) \frac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right).$$

Comme on a clairement $g(z) = g_1(z) - g_2(z)$ pour $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, il suffit de voir que $g_i \in L^\infty(\Omega_i)$, $i = 1,2$. Montrons par exemple que $g_2 \in L^\infty(\Omega_2)$: soit $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ telle que $\varphi = 1$ sur $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ et $\varphi = 0$ sur $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. Par application de la formule de Stokes et des passages à la limite standards, il vient, pour $z \in \Omega_2$:

$$g_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \varphi(\zeta) g(\zeta) \frac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, g(\zeta) \frac{h^\alpha(z)}{h^\alpha(\zeta)} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} + \varphi(z)\, g(z).$$

Puisque, par hypothèse, $\varphi(z)\, g(z) \in L^\infty(\Omega_2)$, il suffit de voir qu'il existe une constante C ne dépendant pas de $z \in \Omega_2$ telle que

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right| \frac{d\lambda(\zeta)}{|h^\alpha(\zeta)|\,|\zeta - z|} \leq \frac{C}{|h^\alpha(z)|},$$

ce qui s'obtient très aisément par un calcul direct.

Supposons enfin $p = 1$. En reprenant les mêmes notations que ci-dessus, pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, la fonction $\zeta \longrightarrow g(\zeta)\dfrac{h^\alpha(\zeta)}{h^\alpha(z)}$ étant dans la classe $H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ et étant égale à $g(z)$ en $\zeta = z$, on a encore une fois la formule de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} g(\zeta)\frac{h^\alpha(\zeta)}{h^\alpha(z)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Pour $z \in \Omega_1$ (resp. Ω_2), nous prenons

$$g_1(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(\zeta)\frac{h^\alpha(\zeta)}{h^\alpha(z)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (\text{resp. } g_2(z) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} g(\zeta)\frac{h^\alpha(\zeta)}{h^\alpha(z)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}).$$

Comme précédemment, on a $g(z) = g_1(z) - g_2(z)$ pour $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, et il suffit de voir que $g_i \in H^1(\Omega_i)$, $i = 1,2$. Montrons par exemple que $g_2 \in H^1(\Omega_2)$. Pour cela soit C_n une suite de courbes simples régulières dont la longueur est uniformément majorée, qui tend, quand $n \to \infty$, vers le bord de Ω_2. Il nous faut voir (cf. [5] ou [6]) que

$$\sup_n \int_{C_n} |g_2(z)|\, d\sigma(z) < +\infty.$$

Soit Δ une courbe simple de classe C^∞, contenue dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ d'extrémités z_2^o et z_2^1 dont les demi-tangentes en ces points font des angles strictement positifs avec les demi-tangentes aux courbes γ_1 et γ_2 en ces mêmes points (hypothèse (III.3) d) δ)). Δ coupe Ω_2 en deux domaines Ω_2^1 et Ω_2^2 dont les frontières respectives sont $\Delta \cup (\partial\Omega_2 \setminus \gamma_2)$ et $\Delta \cup \gamma_2$. De plus on peut supposer que, pour tout n, $C_n^1 = C_n \cap \Omega_2^1$ et $C_n^2 = C_n \cap \Omega_2^2$ sont deux courbes (connexes) régulières qui tendent, quand $n \to \infty$, respectivement vers $\partial\Omega_2 \setminus \gamma_2$ et γ_2.

En tenant compte de l'hypothèse faite sur les demi-tangentes à Δ et à γ_2 aux points z_2^o et z_2^1, un calcul direct montre très facilement que, pour $\zeta \in \gamma_2$ et pour tout n, il existe une constante C ne dépendant pas de ζ ni de n telle que

$$\int_{C_n^1} \frac{d\sigma(z)}{|h^\alpha(z)|\,|\zeta - z|} \leq \frac{C}{|h^\alpha(\zeta)|},$$

ce qui montre que

$$\int_{C_n^1} |g_2(z)| \leq C \int_{\gamma_2} |g(\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq C\|g\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

Supposons maintenant que $z \in C_n^2$. En appliquant la formule de Stokes, un passage à la limite standard montre que

$$g_2(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(\zeta)\frac{h^\alpha(\zeta)}{h^\alpha(z)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} - g(z).$$

Le fait que $g \in H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ entraîne aussitôt

$$\sup_n \int_{C_n^2} |g(z)| d\sigma(z) \leq C\|g\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)}.$$

D'autre part, comme ci-dessus, en tenant compte de l'hypothèse faite sur les demi-tangentes à Δ et à γ_1 aux points z_2^o et z_1^o, un calcul direct montre que, pour $\zeta \in \gamma_1$, et pour tout n, il existe une constante C ne dépendant ni de ζ, ni de n, telle que

$$\int_{C_n^2} \frac{d\sigma(z)}{|h^\alpha(z)||\zeta - z|} \leq \frac{C}{|h^\alpha(\zeta)|},$$

ce qui montre

$$\int_{C_n^2} |g_2(z)| d\sigma(z) \leq C \int_{\gamma_1} |G(\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq C\|g\|_{H^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)},$$

et achève de montrer que $g_2 \in H^1(\Omega_2)$, et, par la même occasion de démontrer le lemme (III.1).

Revenons-en maintenant à la construction de l'extension locale de f dans le dernier cas. Comme $g(\zeta) = f(\varphi(\zeta), \zeta) \in H^p(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, nous pouvons appliquer le lemme III.2 : il existe $g_i \in H^p(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, telles que dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ on a $g = g_1 - g_2$.

Soit $D_{z_2^o}$ (resp. $D_{z_1^o}$) un disque ouvert centré en z_2^o (resp. z_1^o) tel que $D_{z_2^o} \cap D \subset \Omega_1$ (resp. $D_{z_1^o} \cap D \subset \varphi(\Omega_2)$). Pour tout $(z_1, z_2) \in (D_{z_1^o} \times D_{z_2^o}) \cap D^2$, posons

$$F_1(z_1, z_2) = g_1(z_2) \quad , \quad F_2(z_1, z_2) = g_2(\varphi^{-1}(z_1)), \text{ et,}$$

$$F(z_1, z_2) = F_1(z_1, z_2) - F_2(z_1, z_2).$$

Comme φ^{-1} est supposée holomorphe dans $D_{z_1^o} \cap D$ (hypothèse (III.3) c) γ)), F

est bien holomorphe dans $D_{z_1^0} \times D_{z_2^0}$ et, si $(\varphi(z_2), z_2) \in D_{z_1^0} \times D_{z_2^0}$, on a

$$F(\varphi(z_2), z_2) = g_1(z_2) - g_2(\varphi^{-1}(\varphi(z_2))) = g_1(z_2) - g_2(z_2) = f(\varphi(z_2), z_2),$$

ce qui signifie que F est une extension de f.

Enfin, si $p = \infty$, on a $F \in L^\infty((D_{z_1^0} \times D_{z_2^0}) \cap D^2)$ et si $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\sup_{r<1} \int_{T_r^2 \cap (D_{z_1^0} \times D_{z_2^0})} |F(z_1, z_2)|^p \, d\lambda(z_1)\, d\lambda(z_2) < +\infty,$$

comme conséquences immédiates des propriétés de g_1 et g_2.

REMARQUE. La démonstration du lemme III.1 dans le cas $1 < p < \infty$ n'utilise clairement pas l'hypothèse (III.3) c) δ), et on peut voir que la démonstration du cas $p = +\infty$ reste aussi valable si on ne fait pas cette hypothèse. Par conséquent, lorsque $p \in]1, +\infty]$ on peut construire une bonne extension de f au voisinage de z^0 même lorsque l'hypothèse (III.3) c) δ) n'est pas satisfaite. La construction de l'extension globale qui suit, montre alors que la conclusion du théorème III.1 est encore valable dans ce cas (remarque suivant l'énoncé du théorème III.1).

Nous pouvons résumer tout ceci dans le lemme suivant.

LEMME III.2. Pour tout $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \overline{Z(u)} \cap \partial D^2$, il existe un voisinage $v(z^0) = D_{z_1^0} \times D_{z_2^0}$ de z^0, et dans $v(z^0) \cap D^2$ une fonction holomorphe $F(z_1, z_2)$ telle que $F(z_1, z_2)|_{Z(u) \cap v(z^0)} = f$ et satisfaisant de plus les estimations suivantes :

1. Si $f \in B_\infty(Z(u))$, alors $\|F\|_{L^\infty(v(z^0) \cap D^2)} \leq C \|f\|_{L^\infty(Z(u))}$.

2. Si $f \in B_p(Z(u))$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}_r^2 \cap v(z^0)} |F(z_1, z_2)|^p \, d\lambda(z_1)\, d\lambda(z_2) < +\infty.$$

3. $F(z_1, z_2)$ admet des valeurs au bord presque partout sur $T^2 \cap v(z^0)$ qui sont dans $L^p(\mathbf{T}^2 \cap v(z^0))$ $(p \in [1, +\infty])$.

4. $F(z_1,z_2)$ <u>admet des valeurs au bord presque partout sur</u> $\partial D^2 \cap v(z^o) = ((D \times \mathbf{T}) \cap v(z^o)) \cup ((\mathbf{T} \times D) \cap v(z^o))$, et si on note encore $F(z_1,z_2)$ ces valeurs au bord, la fonction $\frac{F(z_1,z_2)}{u(z_1,z_2)}$ est dans $L^1((D \times \mathbf{T}) \cap v(z^o))$ et dans $L^1((\mathbf{T} \times D) \cap v(z^o))$.

Pour voir le 4. de ce lemme, nous utilisons le lemme suivant.

LEMME III.3. <u>Soit</u> $h(z_1,z_2)$ <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>sur</u> $\bar{D} \times \mathbf{T}$ <u>telle que pour tout</u> $z_2 \in \mathbf{T}$ <u>la fonction</u> $z_1 \longrightarrow h(z_1,z_2)$ <u>soit holomorphe dans</u> D. <u>Supposons que pour tout point</u> $z^o = (z_1^o, z_2^o) \in \bar{D} \times \mathbf{T}$ <u>tel que</u> $h(z^o) = 0$ <u>on ait</u> $\frac{\partial h}{\partial z_1}(z^o) \neq 0$. <u>Alors la mesure</u> $\frac{d\lambda(z_1)}{|h(z_1,z_2)|}$ <u>est une mesure de Carleson dans</u> D <u>dont la norme est majorée indépendamment de</u> $z_2 \in \mathbf{T}$.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de voir que pour tout $z_2^o \in \mathbf{T}$ il existe $\eta > 0$ tel que pour $|z_2 - z_2^o| < \eta$, $z_2 \in \mathbf{T}$, la norme de Carleson de la mesure $\frac{d\lambda(z_1)}{|h(z_1,z_2)|}$ est majorée indépendamment de z_2. Soit donc $z_2^o \in \mathbf{T}$ fixé. On peut naturellement supposer que h est la restriction à $\bar{D} \times \mathbf{T}$ d'une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{C}^2$. Soit $K = \left\{(z_1,z_2) \in \bar{D} \times \mathbf{T} \ ; \ h(z_1,z_2) = 0\right\}$. L'hypothèse faite sur h entraîne qu'il existe un voisinage $v(K)$ de K dans $\mathbb{C}^2$ tel que

(III.6) $$\inf_{(z_1,z_2) \in v(K)} \left| \frac{\partial h}{\partial z_1}(z_1,z_2) \right| = C_1 > 0.$$

Soit D_2^2 le bidisque de $\mathbb{C}^2$ de rayon 2. Comme h est C^1 dans $\mathbb{C}^2$, il existe

$\delta_o > 0$ tel que, pour $|(z_1,z_2) - (z_1',z_2')| < \delta_o$, $(z_1,z_2) \in D_2^2$, $(z_1',z_2') \in D_2^2$, on a

$$\text{(III.7)} \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial h}{\partial z_1}(z_1,z_2) - \frac{\partial h}{\partial z_1}(z_1' , z_2')\right| < \frac{C_1}{8} \\ &\left|\frac{\partial h}{\partial \bar z_1}(z_1,z_2) - \frac{\partial h}{\partial \bar z_1}(z_1',z_2')\right| < \frac{C_1}{8} . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque pour tout $z_2 \in \mathbf{T}$ la fonction $z_1 \longrightarrow h(z_1,z_2)$ est holomorphe dans D, il existe un voisinage $v(\bar D \times \mathbf{T})$ de $\bar D \times \mathbf{T}$ dans $\mathbb{C}^2$ tel que,

$$\text{(III.8)} \qquad \sup_{(z_1,z_2) \in v(\bar D \times \mathbf{T})} \left|\frac{\partial h}{\partial \bar z_1}(z_1,z_2)\right| < \frac{C_1}{4} .$$

Si la fonction $z_1 \longrightarrow h(z_1,z_2^o)$ ne s'annule pas dans $\bar D$, l'existence de $\eta > 0$ est évidente puisque $\dfrac{1}{h(z_1,z_2)}$ est bornée dans un voisinage de $\bar D \times \{z_2^o\}$. Supposons donc que

$$K(z_2^o) = \{z_1 \in \bar D \ ; \ h(z_1,z_2^o) = 0\} \neq \emptyset .$$

Remarquons que $K(z_2^o)$ est un ensemble fini : en effet, si $z_1^o \in K(z_1^o)$ il résulte de (III.6), (III.7) et du théorème des accroissements finis que pour $|z_1 - z_1^o| < \delta_o$ (on peut supposer $\delta_o < 1$, ce qui entraîne $(z_1,z_2^o) \in D_2^2$), on a

$$|h(z_1,z_2^o)| \geq \frac{3C_1}{4} |z_1 - z_1^o| \ ;$$

par suite aucun élément de $K(z_2^o)$ distinct de z_1^o n'est contenu dans $\{|z_1 - z_1^o| < \delta_o\} \cap \bar D$, ce qui montre bien que $K(z_2^o)$ est fini.

Soient z_1^i, $1 \leq i \leq k$ les éléments de $K(z_2^o)$. Posons

$$C_2 = \inf_{\operatorname{dist}(z_1, K(z_2^o)) \geq \delta_o/2,\, z_1 \in \bar D} |h(z_1,z_2^o)| .$$

On a donc $C_2 > 0$, et il existe $\eta_o > 0$ tel que pour $|z_2 - z_2^o| < \eta_o$ on a

$$\text{(III.9)} \qquad \inf_{\operatorname{dist}(z_1, K(z_2^o)) \geq \delta_o/2,\, z_1 \in \bar D} |h(z_1,z_2)| \geq \frac{C_1}{2} > 0.$$

Compte tenu des hypothèses faites sur h, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe $\eta_1 > 0$ et k fonctions $h_i(z_2)$ de classe C^1 dans $|z_2 - z_2^o| < \eta_1$ et qui satisfont les conditions suivantes pour tout i, $1 \leq i \leq k$, et tout z_2 tel que $|z_2 - z_2^o| < \eta_1$:

$$h(h_i(z_2), z_2) = 0, \quad h_i(z_2^o) = z_1^i \;;$$

$$(h_i(z_2), z_2) \in v(K) \cap v(\bar{D} \times \mathbf{T}) \cap D_2^2 \;;$$

$$|h_i(z_2) - z_1^i| < \delta_o/2.$$

Alors, d'après (III.6), (III.7) et (III.8), le théorème des accroissements finis montre que, pour chaque i, pour $|z_1 - h_i(z_2)| < \delta_o$, on a

$$\text{(III.10)} \qquad |h(z_1, z_2)| \geq \frac{C_1}{2} |z_1 - h_i(z_2)| .$$

D'autre part, comme l'ensemble $\{z_1 \in \bar{D} \;;\; |z_1 - h_i(z_2)| \geq \delta_o \,,\; 1 \leq i \leq k\}$ est contenu dans $\{z_1 \in \bar{D} \;;\; \mathrm{dist}(z_1, K(z_2^o)) \geq \delta_o/2\}$ il résulte de (III.9) que pour $|z_2 - z_2^o| < \min(\eta_o, \eta_1)$, on a :

$$\text{(III.11)} \qquad \inf_{\{z_1 \in \bar{D};\; |z_1 - h_i(z_2)| \geq \delta_o/2,\, 1 \leq i \leq k\}} |h(z_1, z_2)| \geq \frac{C_2}{2} .$$

Ainsi, en prenant $\eta = \min(\eta_o, \eta_1)$, les relations (III.10) et (III.11) sont toutes deux satisfaites. Si on remarque alors que (III.10) implique que pour $i \neq j$ on a $|h_i(z_2) - h_j(z_2)| \geq \delta_o$, un calcul élémentaire montre aussitôt que la norme de Carleson de $\dfrac{d\lambda(z_1)}{|h(z_1, z_2)|}$ est majorée par $\dfrac{2}{C_2} + \dfrac{C}{C_1}$, où C est une constante ne dépendant que de δ_o.

Démontrons maintenant le 4. du lemme III.2. Par construction, $F(z_1, z_2)$ admet clairement des valeurs au bord sur $\partial D^2 \cap v(z^o)$. Montrons par exemple que $\dfrac{F(z_1, z_2)}{u(z_1, z_2)}$ est dans $L^1(D \times \mathbf{T}) \cap v(z^o))$. Considérons tout d'abord les cas 1) et 2) de la construction de l'extension locale. Si $F(z_1, z_2)$ ne dépend pas de z_1, le résultat est clair, car, d'après le lemme III.3, $\dfrac{d\lambda(z_1)}{|u(z_1,z_2)|}$ est une mesure bornée dans D dont la norme est majorée indépendamment de $z_2 \in T$. Supposons donc que $F(z_1,z_2) = F(z_1)$ ne dépend que de z_1. Soit $D'_{z_1^o}$ un disque de centre z_1^o relativement compact dans $D_{z_1^o}$ et soit Ω_1 un domaine à bord C^∞ tel que $D'_{z_1^o} \cap D \subset \Omega_1 \subset D_{z_1^o} \cap D$.

Des considérations similaires à celles faites dans la remarque précédant le théorème III.1 montrent que $F(z_1)$ appartient à la classe de Hardy $H^1(\Omega_1)$.

Si ψ est la transformation conforme qui envoie D sur Ω_1, il résulte du lemme III.3 et des hypothèses faites sur u que $\dfrac{d\lambda(z)}{|u(\psi(z),z_2)|}$ est une mesure de Carleson dans D dont la norme est majorée par une constante indépendante de $z_2 \in \mathbf{T}$. Par conséquent, on a

$$\int_{\Omega_1} \frac{|F(z_1)|}{|u(z_1,z_2)|} d\lambda(z_1) \leq C \int_{\partial\Omega_1} |F(z_1)| d\lambda(z_1),$$

où C ne dépend pas de $z_2 \in \mathbf{T}$, ce qui montre bien que $\dfrac{F(z_1,z_2)}{u(z_1,z_2)} \in L^1((D \times \mathbf{T}) \cap v(z^o))$.

Le cas 4. de l'extension locale se traite exactement de la même manière puisque dans ce cas F s'écrit comme la différence d'une fonction qui ne dépend que de z_2 et d'une fonction qui ne dépend que de z_1 et que ces deux fonctions vérifient de bonnes estimations.

Enfin le cas 3. de l'extension locale se traite lui aussi de la même manière : il suffit de remarquer que si Ω_1 est un domaine C^∞ comme ci-dessus, alors pour presque tout $z_2 \in \mathbf{T} \cap D_{z_2^o}$, la fonction $z_1 \longrightarrow F(z_1,z_2)$ est dans $H^1(\Omega_1)$ et sa norme $\|F(.,z_2)\|_{H^1(\Omega_1)}$ est, comme fonction de z_2, dans $L^1(\mathbf{T} \cap D_{z_2^o})$, et d'appliquer ensuite le raisonnement précédent.

3. L'EXTENSION GLOBALE.

D'après le lemme III.2, il existe un recouvrement fini de $\overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$ par des ouverts O^i, $2 \leq i \leq p$ centrés en des points $z^i \in \overline{Z(u)} \cap \overline{\partial D^2}$ et tels que $\overline{O^i}$ soit contenu dans un voisinage $v(z^i)$ pour lequel il existe dans $v(z^i) \cap D^2$ une extension F_i de f comme il est dit dans le lemme III.2

Soit de plus O^1 un voisinage de $\overline{\partial D^2} \setminus \bigcup_{i=2}^{p} O^i$ ne rencontrant pas $\overline{Z(u)}$, et soit O^0 un voisinage pseudoconvexe de $D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{p} O^i$ relativement compact dans D^2. On prolonge f dans O^0 par la fonction F_0 donnée par le théorème de Cartan B (voir par exemple [7]) et dans O^1, on prend $F_1 = 0$.

Pour construire l'extension globale F de f dans D^2, nous allons résoudre un problème de Cousin associé aux F_i. Soit ψ_i une partition de l'unité au voisinage de $\overline{D^2}$ de classe C^∞ et associée aux ouverts O^i. Pour tous i,j tels $O^i \cap O^j \cap D^2 \neq \emptyset$ on pose $g_{ij} = F_i - F_j$ et, pour tout i et tout $z \in O^i \cap D^2$, on pose

$$h_i(z) = \sum_{j=0}^{p} g_{ij}(z)\, \psi_j(z).$$

Remarquons alors que d'une part on a $g_{ij}(z) = 0$ pour $z \in Z(u) \cap (O^i \cap O^j)$ et d'autre part que $g_{ik} - g_{jk} = g_{ij}$ dans $O^i \cap O^j \cap O^k \cap D^2$, ce qui entraîne que dans $O^i \cap O^j \cap D^2$, on a $F_i - h_i = F_j - h_j$, de sorte que les fonctions $F_i - h_i$ définissent une fonction $\tilde{F}$ dans D^2 telle que $\tilde{F}\big|_{Z(u)} = f$. De plus, d'après le lemme III.2, $\tilde{F}$ admet des valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ dans $L^p(\mathbf{T}^2)$. Evidemment $\tilde{F}$ n'est pas holomorphe dans D^2 et il faut donc la modifier. Pour cela, soit $\omega = \bar{\partial}\tilde{F}$, de sorte que pour tout i et tout $z \in O^i \cap D^2$, on a

$$\omega(z) = \sum_{j=0}^{p} g_{ij}(z)\, \bar{\partial}\, \psi_j(z).$$

L'hypothèse (III.1) faite sur u entraîne que les fonctions $\dfrac{g_{ij}(z)}{u(z)}$ sont holomorphes dans $O^i \cap O^j \cap D^2$ et par suite, la forme différentielle

$$\omega' = \frac{\omega}{u},$$

est à coefficients C^∞ dans D^2. Nous allons maintenant montrer que ω' admet, au sens de (II.11) des valeurs au bord sur ∂D^2 qui sont dans $\Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$.

Soient $i,j \in \{2,3,\dots,p\}$, $i \neq j$, tels que $O^i \cap O^j \neq \emptyset$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe concernant l'extension locale, la fonction F_i (resp. F_j) est définie dans un ouvert (contenant $\overline{O^i} \cap D^2$) de la forme $\Omega^i_1 \times \Omega^i_2$ (resp. $\Omega^j_1 \times \Omega^j_2$) où les Ω^k_ℓ sont des domaines à bords C^∞ tels que si χ^k_ℓ est la transformation conforme qui envoie D sur Ω^k_ℓ, les fonctions $F_k \circ (\chi^k_1, \chi^k_2)$ sont dans la classe de Hardy $H^p(D^2)$. De plus, la démonstration du 4. du lemme III.2 montre que

$$\sup_{r<1} \left\| \frac{F_k \quad (\chi^k_1, \chi^k_2)}{u \quad (\chi^k_1, \chi^k_2)} \right\|_{L^1(D\times \mathbf{T}_r)} < \infty, \qquad k = i,j.$$

Quitte à modifier les domaines Ω^k_ℓ, nous pouvons supposer que $\Omega^{ij}_\ell = \Omega^i_\ell \cap \Omega^j_\ell$, $\ell = 1, 2$, est un domaine à bord C^∞ tel que $\Omega^{ij}_1 \times \Omega^{ij}_2 \supset \overline{O^i} \cap \overline{O^j} \cap D^2$. Alors la fonction $H_{ij} = \dfrac{F_i - F_j}{u}$ est holomorphe dans $\Omega^{ij}_1 \times \Omega^{ij}_2$ et, si χ^{ij}_ℓ, $\ell = 1, 2$, est la transformation conforme qui envoie D sur Ω^{ij}_ℓ, la fonction $K_{ij} = H_{ij} \circ (\chi^{ij}_1, \chi^{ij}_2)$ est holomorphe dans D^2 et vérifie

$$\sup_{r<1} \|K_{ij}\|_{L^1(D\times \mathbf{T}_r)} < +\infty.$$

De plus pour tout $\zeta_1 \in D$ et presque tout $\zeta_2 \in \mathbf{T}$, la limite

$$K_{ij}(\zeta_1, \zeta_2) = \lim_{r\to 1} K_{ij}(\zeta_1, r\zeta_2)$$

existe et $K_{ij}(\zeta_1, \zeta_2) \in L^1(D\times \mathbf{T})$. Il est alors classique de montrer que, lorsque $r \to 1$, la suite $r \longrightarrow K_{ij}(r\zeta_1, r\zeta_2)$ converge, dans $L^1(D\times \mathbf{T})$ vers $K_{ij}(\zeta_1, \zeta_2)$.

En utilisant la forme explicite de $\omega' = \omega'_1\, d\bar z_1 + \omega'_2\, d\bar z_2$, on conclut alors que, lorsque $r \longrightarrow 1$, la suite de fonctions $r \longrightarrow \omega'_1(rz)$, $z \in D\times \mathbf{T}$ converge dans $L^1(D\times \mathbf{T})$ vers une fonction que nous noterons encore ω'_1.

De la même manière, on voit que $r \longrightarrow \omega'_2(rz)$, $z \in \mathbf{T}\times D$, converge, lorsque

$r \longrightarrow 1$, dans $L^1(\mathbf{T} \times D)$ vers une fonction notée encore ω'_2.

En particulier, la forme ω' admet au sens de (II.11) des valeurs au bord dans $L^1_{(0,1)}(\partial D^2)$. Si on remarque de plus que les dérivations en $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ n'agissent sur les coefficients de ω' que par l'intermédiaire des fonctions ψ_j de la partition de l'unité on voit que $\omega' \in \Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$ en utilisant le théorème suivant :

THEOREME III.2. Soit φ une fonction de classe C^3 dans D^2 vérifiant les conditions suivantes :

a) Lorsque $r \longrightarrow 1$, la fonction $\varphi(rz_1, rz_2)$ converge dans $L^1(D \times \mathbf{T})$ vers une fonction $\varphi(z_1,z_2)$ telle que, pour presque tout $z_2 \in \mathbf{T}$, la fonction $z_1 \to \varphi(z_1,z_2)$ est de classe C^1 dans D.

b) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_1}$ est dans $L^1(D \times \mathbf{T})$

c) $\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2^2}$ est dans $L^1(D^2)$.

Alors φ appartient à $\Lambda^1(D \times \mathbf{T})$.

On a évidemment un énoncé analogue lorsque φ admet des valeurs au bord sur $\mathbf{T} \times D$.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons la formule suivante :

LEMME III.4. Soit $\psi(z)$ une fonction de classe C^1 dans $\bar{D}$. Alors pour tout $\zeta \in \mathbf{T}$, on a pour tout $r < 1$:

$$\text{(III.12)} \quad \int_{D_r} \frac{z\psi(z)}{\zeta - z}\, d\bar{z} \wedge dz = \int_{D_r} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}\zeta|^2}\, d\bar{z} \wedge dz - \int_{T_r} \psi(z)\, \bar{\zeta}\, \frac{1 - |z|^2}{1 - z\bar{\zeta}}\, dz .$$

(III.12) est simplement la formule de Stokes appliquée à la forme différentielle

$$\psi(z)(\bar{\zeta}-\bar{z})\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\zeta|^2}\,dz=\psi(z)\,\bar{\zeta}\,\frac{1-|z|^2}{1-z\bar{\zeta}}\,dz.$$

Soient $s_1<1$ et $s_2<1$ et posons $\varphi_{s_1,s_2}(z)=\varphi(s_1z)-\varphi(s_2z)$, $z\in D^2$. Par applications successives de la formule (III.12), il vient, pour tout $(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbf{T}^2$:

$$\int_{D_r\times\mathbf{T}_r}\frac{z_1z_2\,\varphi_{s_1s_2}(z_1,z_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\,d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge dz_2=\int_{D_r^2}z_1z_2\,\frac{\partial\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_2}\,\frac{d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge d\bar{z}_2\wedge dz_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}=$$

$$=\int_{D_r}\frac{z_1}{\zeta_1-z_1}\left\{\int_{D_r}\frac{\partial^2\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_2^2}(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\frac{1-|z_2|^2}{|1-\bar{z}_2\zeta_2|^2}\,d\bar{z}_2\wedge dz_2-\int_{\mathbf{T}_r}\frac{\partial\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_2}\,\bar{\zeta}_2\,\frac{1-|z_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\,dz_2\right\}d\bar{z}_1\wedge dz_1=$$

$$=\int_{D_r^2}\frac{\partial^3\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_1\partial\bar{z}_2^2}(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z}_1\zeta_1|^2}\,\frac{1-|z_2|^2}{|1-\bar{z}_2\zeta_2|^2}\,d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge d\bar{z}_2\wedge dz_2\;-$$

$$-\int_{\mathbf{T}_r}\bar{\zeta}_1\,\frac{1-|z_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\left\{\int_{D_r}\frac{\partial^2\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_2^2}(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\frac{1-|z_2|^2}{|1-\bar{z}_2\zeta_2|^2}\,d\bar{z}_2\wedge dz_2\right\}dz_1\;-$$

$$-\int_{\mathbf{T}_r}\bar{\zeta}_2\,\frac{1-|z_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\left\{\int_{D_r}\frac{\partial^2\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_1\,\partial\bar{z}_2}(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z}_1\zeta_1|^2}\,d\bar{z}_1\wedge dz_1\right\}dz_2\;+$$

$$+\int_{\mathbf{T}_r}\bar{\zeta}_1\,\frac{1-|z_1|^2}{1-z_1\bar{\zeta}_1}\left\{\int_{\mathbf{T}_r}\frac{\partial\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_2}\,\bar{\zeta}_2\,\frac{1-|z_2|^2}{1-z_2\bar{\zeta}_2}\,dz_2\right\}dz_1.$$

Comme φ_{s_1,s_2} est de classe C^3 au voisinage de $\overline{D^2}$, il résulte aussitôt du théorème de convergence dominée de Lebesgue que, lorsque $r\longrightarrow 1$, les trois dernières intégrales de ci-dessus tendent vers zéro. Il vient donc pour tout $(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbf{T}^2$ et tous $s_1<1$, $s_2<1$:

$$\lim_{\substack{r\to1\\ r<1}}\int_{D_r\times\mathbf{T}_r}\frac{z_1z_2\varphi_{s_1,s_2}(z_1,z_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\,d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge dz_2=$$

(III.13)
$$=\int_{D^2}\frac{\partial^3\varphi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_1\,\partial\bar{z}_2^2}(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z}_1\zeta_1|^2}\,\frac{1-|z_2|^2}{|1-\bar{z}_2\zeta_2|^2}\,d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge d\bar{z}_2\wedge dz_2.$$

De la même manière, en posant $\psi_{s_1,s_2}(z_1,z_2) = \varphi(s_1z_1,z_2) - \varphi(s_2z_1,z_2)$, $s_1 < 1$, $s_2 < 1$, $(z_1,z_2) \in D \times \mathbf{T}$, on déduit du lemme (III.4) que pour presque tout $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$, on a :

$$\text{(III.14)} \quad \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \int_{D_r} \frac{z_1\psi_{s_1,s_2}}{\zeta_1 - z_1}\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 = \int_D \left(\frac{\partial\psi_{s_1,s_2}}{\partial\bar{z}_1}(z_1,\zeta_2)\right)(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z}_1\zeta_1|^2}\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1.$$

Nous utilisons maintenant le lemme suivant (avec les notations du § 2 du chap. II) :

LEMME III.5. <u>Soit</u> h <u>une fonction de classe</u> C^1 <u>sur</u> $\bar{D}^2$. <u>Alors pour presque tout</u> $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbf{T}^2$ <u>on a</u> :

$$\text{(III.15)} \quad \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \int_{D_r\times[0,2\pi]} \frac{h(z_1,re^{i\theta_2})}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-re^{i\theta_2})}\, d\lambda(z_1)\, d\theta_2 = \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2(C_2C_1(P_1^* h))(\zeta_1,\zeta_2)$$

$$\text{(III.16} \quad \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \int_{D_r} \frac{h(z_1-\zeta_2)}{\zeta_1-z_1}\, d\lambda(z_1) = \bar{\zeta}_1(C_1\, P_1^*\, h)(\zeta_1,\zeta_2).$$

Montrons par exemple la formule (III.15) : pour tout $r < 1$ et tout $z_2 \in \bar{D}$, posons

$$\nu_r(\zeta_1,z_2) = \int_{D_r} \frac{\zeta_1\, h(z_1,z_2)}{\zeta_1-z_1}\, d\lambda(z_1),$$

$$\mu_r(\zeta_1,z_2) = \int_{D_r} h(z_1,z_2)\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z}_1\zeta_1|^2}\, d\lambda(z_1).$$

En calculant les coefficients de Fourier de ν_r et μ_r, on voit aussitôt que $\nu_r = C_1\mu_r$ et par suite

$$\int_{D_r\times[0,2\pi]} \frac{\zeta_1\zeta_2\, h(z_1,re^{i\theta_2})}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-\zeta_2-re^{i\theta_2})}\, d\lambda(z_1)d\theta_2 = \int_{[0,2\pi]} \frac{\zeta_1C_1\nu_r(\zeta_1,re^{i\theta_2})}{\zeta_2-re^{i\theta_2}}\, d\theta_2.$$

Il est alors facile de voir que le membre de droite de cette dernière égalité converge, lorsque $r \to 1$, presque partout vers $(C_2C_1P_1^*h)(\zeta_1,\zeta_2)$.

Il résulte alors aussitôt de (III.13), (III.15) et (III.14), (III.16) qu'il existe deux constantes a_1 et a_2 indépendantes de s_1 et s_2 telles que

$$\|C_2C_1P_1^* \varphi_{s_1,s_2}\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} \leq a_1 \left\| \frac{\partial^3 \varphi_{s_1,s_2}}{\partial \bar{z}_1 \, \partial \bar{z}_2^2} \right\|_{L^1(D^2)} \quad \text{et}$$

$$\|C_1P_1^* \psi_{s_1,s_2}\|_{L^1(\mathbf{T}^2)} \leq a_2 \left\| \frac{\partial \psi_{s_1,s_2}}{\partial \bar{z}_1} \right\|_{L^1(D \times \mathbf{T})} .$$

Les hypothèses faites sur la fonction φ montrent alors que, si on pose, pour tout $s < 1$, $\varphi_s(z) = \varphi(sz)$ pour $z \in D^2$ et $\psi_s(z_1,z_2) = \varphi(sz_1,z_2)$ pour $(z_1,z_2) \in D \times \mathbf{T}$, les suites $s \longrightarrow C_2C_1P_1^*\varphi_s$ et $s \longrightarrow C_1P_1^* \psi_s$ sont des suites de Cauchy dans $L^1(\mathbf{T}^2)$. Comme de plus les coefficients de Fourier de $C_2C_1P_1^* \varphi_s$ (resp. $C_1P_1^* \psi_s$) convergent, lorsque $s \longrightarrow 1$, vers les coefficients de Fourier de $C_2C_1P_1^* \varphi$ (resp. $C_1P_1^* \varphi$), le théorème III.2 est démontré.

Poursuivons maintenant la démonstration du théorème III.1. Puisque $\omega' \in \Lambda^1_{(0,1)}(\partial D^2)$, le théorème II.3 nous assure qu'il existe $v \in L^1(\mathbf{T}^2)$ telle que $\bar{\partial}_b v = \omega'$. Soit alors $V \in L^1(D^2) \cap C^\infty(D^2)$ la solution de l'équation $\bar{\partial} V = \omega'$ donnée par la proposition II.1 Puisque $\bar{\partial}(uV) = u\,\bar{\partial} V = u\omega' = \omega$, la formule (II.14) avec les mêmes notations pour ψ_1, ψ_2 et φ) donne :

$$\int_{D^2} u\, V\, \bar{\partial} \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D^2} \omega \wedge \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D\times\mathbf{T}} \omega \wedge \psi_1 dz_1 \wedge dz_2 +$$
$$\int_{\mathbf{T}\times D} \omega \wedge \psi_2\, dz_1 \wedge dz_2 = \int_{\mathbf{T}^2} uv(\psi_1 - \psi_2)\, dz_1 \wedge dz_2 .$$

Mais comme $\bar{\partial}\tilde{F} = \omega$, on a également :

$$\int_{D^2} \tilde{F}\, \bar{\partial} \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D^2} \omega \wedge \varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 + \int_{D\times\mathbf{T}} \omega \wedge \psi_1\, dz_1 \wedge dz_2 + \int_{\mathbf{T}\times D} \omega \wedge \psi_2 dz_1 \wedge dz_2 =$$
$$\int_{\mathbf{T}^2} \tilde{F}(\psi_1 - \psi_2)\, dz_1 \wedge dz_2 .$$

En posant $F = \tilde{F} - uV$, on obtient une fonction holomorphe dans D^2 telle que

$F|_{Z(u)} = f$ et qui vérifie (avec les notations de la proposition II.1) :

$$\int_{D^2} F\, \bar{\partial}\varphi \wedge dz_1 \wedge dz_2 = \int_{\mathbf{T}^2} (\tilde{F} - uv)(\psi_1 - \psi_2)\, dz_1 \wedge dz_2. \tag{III.17}$$

Remarquons alors qu'il résulte de (III.17) appliquée à des fonctions ψ_1 et ψ_2 particulières que, pour presque tous $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{T}$ et toutes fonctions $\chi(\zeta_1)$ et $\eta(\zeta_2)$ holomorphes au voisinage de $\bar{D}$, on a les relations :

$$\int_{\mathbf{T}} (\tilde{F} - uv)(\zeta_1, \zeta_2)\, \chi(\zeta_1)\, d\zeta_1 = 0$$

$$\int_{\mathbf{T}} (\tilde{F} - uv)(\zeta_1, \zeta_2)\, \eta(\zeta_2)\, d\zeta_2 = 0.$$

Il en résulte que l'intégrale de Poisson

$$U(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{T}^2} (\tilde{F} - uv)(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \frac{1 - |z_1|^2}{|1 - \bar{z}_1 e^{i\theta_1}|^2} \frac{1 - |z_2|^2}{|1 - \bar{z}_2 e^{i\theta_2}|^2}\, d\theta_1\, d\theta_2,$$

définit une fonction holomorphe dans D^2, U, qui est dans l'espace de Hardy $H^1(D^2)$ (puisque $\tilde{F} - uv \in L^1(\mathbf{T}^2)$), et qui, pour toute fonction φ de classe C^∞ au voisinage de $\overline{D^2}$ vérifie (d'après (III.17)) :

$$\int_{D^2} F\, \varphi\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge dz_2 = \int_{D^2} U\, \varphi\, d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge dz_2.$$

Autrement dit, on a $F = U$ dans D^2 et par conséquent, F est une extension de f qui est dans $H^1(D^2)$ et qui a pour valeurs au bord sur $\mathbf{T}^2$ la fonction $\tilde{F} - uv$.

Pour conclure la démonstration du théorème III.1, il suffit donc de montrer que $uv \in L^p(\mathbf{T}^2)$.

Si $p = 1$, il n'y a rien à montrer puisque $v \in L^1(\mathbf{T}^2)$. Si $p > 1$, nous allons montrer, en reprenant la démonstration du théorème II.3 que $uv \in L^p(\mathbf{T}^2)$. La fonction v est donnée explicitement pour presque tous $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{T}^2$ par :

$$v(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{2i\pi}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_D \omega_1'(z_1,\zeta_2)\frac{d\lambda(z_1)}{\zeta_1-rz_1}+\frac{1}{2i\pi}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_D \omega_2'(\zeta_1,z_2)\frac{d\lambda(z_2)}{\zeta_2-rz_2}+$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_{D\times\mathbf{T}} \omega_1'(z_1,z_2)\frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2}{(\zeta_1-r\bar z_1)(\zeta_2-rz_2)}.$$

On a donc :

$$u(\zeta_1,\zeta_2)\,v(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{2i\pi}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_D \omega_1(z_1,\zeta_2)\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{u(z_1,\zeta_2)(\zeta_1-rz_1)}\,d\lambda(z_1)+$$

(III.18)
$$+\frac{1}{2i\pi}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_D \omega_2(\zeta_1,z_2)\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{u(\zeta_1,z_2)(\zeta_2-rz_2)}\,d\lambda(z_2)+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\int_{D\times\mathbf{T}} \omega_1(z_1,z_2)\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{u(z_1,z_2)(\zeta_1-rz_1)(\zeta_2-rz_2)}\,d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2.$$

Nous allons montrer que chacune des trois intégrales de (III.18) est, en norme $L^p(\mathbf{T}^2)$ majorée indépendamment de r.

1. Considérons tout d'abord la fonction

$$\alpha_1^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_D \omega_1(z_1,\zeta_2)\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{u(z_1,\zeta_2)(\zeta_1-rz_1)}\,d\lambda(z_1).$$

Comme $u\in C_1(\overline{D^2})$, il existe une fonction continue $h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)$, $(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbf{T}^2$, $z_1\in\bar D$ telle que

(III.19)
$$u(\zeta_1,\zeta_2)-u(z_1,\zeta_2)=(\zeta_1-z_1)\,h(\zeta_1,z_1,\zeta_2).$$

On a donc :

$$\alpha_1^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_D \omega_1(z_1,\zeta_2)\,h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)\frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\,\frac{d\lambda(z_1)}{u(z_1,\zeta_2)}+$$

(III.20)
$$+\int_D \omega_1(z_1,\zeta_2)\frac{d\lambda(z_1)}{\zeta_1-rz_1}.$$

Si $p=\infty$, on a $\omega_1(z_1,\zeta_2)\in L^\infty(D\times\mathbf{T})$ et la deuxième intégrale de (III.20) est clairement majorée en norme $L^\infty(\mathbf{T}^2)$ indépendamment de r. Pour $p<\infty$, la majoration de cette même intégrale résulte du fait que $\omega_1\in L^p(D\times\mathbf{T})\subset\Lambda^p(D\times\mathbf{T})$ et du théorème II.4.

Pour voir la majoration de la première intégrale de (III.20) on remarque que la mesure $|h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)|\left|\frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\right|\frac{d\lambda(z_1)}{\sqrt{|u(z_1,\zeta_2)|}}$ est majorée par $c\,\frac{d\lambda(z_1)}{\sqrt{|u(z_1,\zeta_2)|}}$ et la démonstration du 4. du lemme III.2 montre alors que

$$\int_D|\omega_1(z_1,\zeta_2)|\frac{d\lambda(z_1)}{\sqrt{|u(z_1,\zeta_2)|}}\le C'\int_{\mathbf{T}}|\omega_1(\zeta_1,\zeta_2)|\,d\lambda(\zeta_1).$$

La majoration cherchée résulte alors de l'inégalité de Hölder.

2. La deuxième intégrale de (III.18) se traite de la même manière.

3. Montrons enfin que la fonction

$$\alpha_3^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_{D\times\mathbf{T}}\omega_1(z_1,z_2)\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{u(z_1,z_2)(\zeta_1-rz_1)(\zeta_2-rz_2)}\,d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2\ ,$$

est majorée, en norme $L^p(\mathbf{T}^2)$, indépendamment de r.

Comme $u\in C^1(\overline{D^2})$, il existe une fonction continue $k(z_1,z_2,\zeta_2)$, $(z_1\ z_2)\in\overline{D^2}$, $\zeta_2\in\mathbf{T}$ telle que

$$u(z_1,\zeta_2)=u(z_1,z_2)+(\zeta_2-z_2)\,k(z_1,z_2,\zeta_2). \tag{III.21}$$

Combiné avec (III.19), il vient

$$u(\zeta_1,\zeta_2)=u(z_1,z_2)+(\zeta_1-z_1)\,h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)+(\zeta_2-z_2)\,k(z_1,z_2,\zeta_2).$$

Par suite,

$$\alpha_3^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_{D\times\mathbf{T}}\omega_1(z_1,z_2)\frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2}{(\zeta_1-rz_1)(\zeta_2-rz_2)}+$$

$$+\int_{D\times\mathbf{T}}\omega_1(z_1,z_2)\,h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)\frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\,\frac{1}{\zeta_2-rz_2}\,\frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2}{u(z_1,z_2)}+ \tag{III.22}$$

../..

$$+\int_{D\times\mathbf{T}} \omega_1(z_1,z_2)\, k(z_1,z_2,\zeta_2)\, \frac{\zeta_2-z_2}{\zeta_2-rz_2}\, \frac{1}{\zeta_1-rz_1}\, \frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2}{u(z_1,z_2)}\,.$$

Appelons I_1^r, I_2^r et I_3^r les trois intégrales de (III.22), et majorons les séparément.

Si $p<\infty$, la majoration de I_1^r résulte du fait que $\omega_1\in L^p(D\times\mathbf{T})\subset \Lambda^p(D\times\mathbf{T})$ et du théorème II.4. Si $p=\infty$, on remarque que, lorsque $s\longrightarrow 1$, la suite $s\longrightarrow \omega_1(sz_1\,,\,sz_2)$ converge dans $L^1(D\times\mathbf{T})$ et, la formule de Stokes appliquée à la variable z_2 donne alors :

$$I_1^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_{D^2} \frac{\partial\omega_1}{\partial\bar z_2}(z_1,z_2)\, \frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge d\bar z_2\wedge dz_2}{(\zeta_1-rz_1)(\zeta_2-rz_2)}\,.$$

Comme $\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\bar z_2}\in L^\infty(D^2)$, la majoration de I_1^r devient évidente.

Majorons maintenant I_2^r pour $p<\infty$: les mêmes arguments que ceux utilisés pour la majoration de la première intégrale de (III.20) montrent que :

$$\left|\int_D \omega_1(z_1,z_2)\, h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)\, \frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\, \frac{d\lambda(z_1)}{u(z_1,z_2)}\right| \le C\int_{\mathbf{T}} |\omega_1(z_1,z_2)|\, d\lambda(z_1).$$

L'inégalité de Hölder montre que le second membre de cette inégalité est dans $L^p(\mathbf{T})$ par rapport à la variable z_2 et la majoration résulte donc du théorème II.4.

Supposons maintenant $p=\infty$. Soit $r_o<1$ fixé, et posons $Q_{r_o}=\{z_2\in D\ ;\ |z_2|>r_o\}$. La formule de Stokes appliquée à la variable z_2 donne :

$$I_2^r(\zeta_1,\zeta_2)=\int_{D\times Q_{r_o}} \frac{\partial\omega_1}{\partial\bar z_2}(z_1,z_2)\, h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)\, \frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\, \frac{1}{\zeta_2-rz_2}\, \frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge d\bar z_2\wedge dz_2}{u(z_1,z_2)} +$$

$$+\int_{D\times\mathbf{T}_{r_o}} \omega_1(z_1,z_2)\, h(\zeta_1,z_1,\zeta_2)\, \frac{\zeta_1-z_1}{\zeta_1-rz_1}\, \frac{1}{\zeta_2-rz_2}\, \frac{d\bar z_1\wedge dz_1\wedge dz_2}{u(z_1,z_2)}\,.$$

Remarquons alors qu'il résulte du lemme II.3 que la mesure $\dfrac{d\lambda(z_1)}{|u(z_1,z_2)|}$ est une mesure bornée dans D dont la norme est majorée par une constante qui ne dépend pas de

$z_2 \in \overline{Q_{r_o}}$. La majoration de I_2^r résulte donc du fait que $\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}_2} \in L^\infty(D^2)$ et du fait que $r_o < 1$ entraîne $\left|\frac{1}{\zeta_2 - rz_2}\right| \leq \frac{1}{1-r_o} < \infty$ pour $z_2 \in \mathbf{T}_{r_o}$.

Majorons enfin I_3^r. Il résulte de (III.21) que $k(z_1, z_2, \zeta_2)$ est holomorphe par rapport à $(z_1, z_2) \in D^2$ et continue dans $\overline{D^2}$. Comme $\bar{\partial}_b \omega = 0$ [définition II.1] un passage à la limite évident montre que

$$I_3^r(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{\mathbf{T} \times D} \omega_2(z_1, z_2)\, k(z_1, z_2, \zeta_2) \frac{\zeta_2 - z_2}{\zeta_2 - rz_2} \frac{1}{\zeta_1 - rz_1} \frac{d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{u(z_1, z_2)} .$$

La majoration de I_3^r se fait alors clairement de la même manière que celle de I_2^r.

La démonstration du théorème III.1 est ainsi achevée.

Références

[1] AMAR, E. Quelques résultats concernant les solutions du $\bar{\partial}_b$ dans L^∞. Applications à des théorèmes de Hardy et Poliakov. Preprint (Orsay).

[2] AMAR, E. et CHARPENTIER, Ph. Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes définies sur une sous-variété du bidisque. A paraître au Bull. Sci. Math.

[3] CALDERON, A. P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 74 (1977), 1324-1327.

[4] CUMENGE, A. Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes. C.R.A.S. 289 (1979), 385-388.

[5] DUREN, P. L. Theory of H^p spaces. Academic Press, New York, 1970.

[6] GOLUZIN, G. M. Geometric theory of functions of a complex variable. Trans. Math. Monographs 26 (1969).

[7] HÖRMANDER, L. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand 1966.

[8] HOROWITZ, C. and OBERLIN, D. Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n. Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), 767-772.

[9] STOUT, E. L. Bounded extensions. The case of discs in polydiscs. J. Anal. Math. 28 (1975), p. 239.

[10] SAMOJAN, F. A. Embedding theorems and a characterization of traces in spaces $H^p(U^n)$, $0 < p < \infty$. Math. USSR Sb. 35 (5) (1979), 709-725.

Chapitre IV

SUR LA FORMULE DE JENSEN ET LES ZEROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE POLYDISQUE.

Dans [9] P. Lelong a introduit la notion de courant positif fermé θ^X associé à un sous-ensemble analytique complexe X de dimension pure $n-1$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Un des principaux intérêts de cette notion est que, pour des ouverts Ω convenables, la construction d'une fonction holomorphe f dans Ω telle que $X = f^{-1}(0)$ se ramène à la résolution de l'équation $\partial\bar{\partial}u = \theta^X$.

Ici, nous nous intéressons au polydisque D^n de $\mathbb{C}^n$ et plus particulièrement aux zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna classique de D^n :

$$N(D^n) = \left\{ f \text{ holomorphes dans } D^n \ ; \ \sup_{r<1} \int_{[0,2\pi]^n} \log^+ \left| f(re^{i\theta_1}, \dots, re^{i\theta_n}) \right| d\theta_1 \dots d\theta_n < +\infty \right\}.$$

Le principal but de ce chapitre est de donner une condition nécessaire pour qu'un sous-ensemble analytique de D^n soit un zéro d'une fonction de $N(D^n)$ qui porte sur le courant θ^X, et qui soit suffisamment fine pour être susceptible d'être suffisante.

Dans [4] et [5] P. S. Chee a montré que l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(D^n)$ vérifie la condition de Blaschke, c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^1 dt \left\{ \int_{D_t^n} \theta_{pp}^X \right\} < \infty,$$

où D_t^n est le polydisque de rayon t. Il est facile de voir que cette condition ne caractérise pas les zéros de $N(D^n)$ (cf. § 3). En fait, les travaux de P. S. Chee montrent que la condition de Blaschke est satisfaite par les zéros des fonctions de la classe $N_1(D^n) = \left\{f \text{ holomorphes dans } D^n \; ; \; \sup_{r<1} \int_{\partial(D_r^n)} \log^+ |f(z)| \, d\lambda(z) < \infty \right\}$,

et cette classe est strictement plus vaste que $N(D^n)$ (voir § 3).

Pour obtenir une meilleure condition, nous avons cherché à l'établir comme conséquence d'une formule de Jensen. Il existe dans la littérature plusieurs formules de ce type dans le polydisque (voir par exemple Ronkin [12], p. 236, Stoll [13], p. 53, Malliavin [10]), mais les conditions que l'on en déduit sur les zéros des fonctions de $N(D^n)$ ne s'expriment pas simplement sur le courant θ^X.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [3].

I. UNE PROPRIETE DES SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES COMPLEXES DE CODIMENSION 1 DU POLYDISQUE DE $\mathbb{C}^n$.

Soit X un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure $n-1$ de D^n, c'est-à-dire l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe définie dans D^n. Le but de ce paragraphe est d'étudier la dimension des ensembles analytiques réels

$$X_t = X \cap \mathbb{T}_t^n, \ t \in]0,1[.$$

Il est clair que la dimension de X_t est inférieure ou égale à $n-1$: sinon, toute fonction holomorphe f telle que $X = Z(f)$ serait nulle sur un ouvert de $\mathbb{T}_t^n$, et, par conséquent, serait identiquement nulle. Pour $n = 1$, l'ensemble des $t \in]0,1[$ tels que $\dim_{\mathbb{R}} X_t = n-1$ est évidemment discret dans $[0,1[$. Nous allons voir à quelle condition sur X cette propriété reste vraie pour $n \geq 2$.

On voit immédiatement qu'il existe des polynômes homogènes holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ qui ne vérifient pas cette propriété : par exemple, dans $\mathbb{C}^2$, la variété Y d'équation $z_1 = \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, est telle que $\dim_{\mathbb{R}} Y_t = 1$ pour tout $t > 0$. Nous allons montrer (théorème 1) que, en général, les seuls sous-ensembles analytiques irréductibles du polydisque qui ne vérifient pas la propriété évidente du cas $n = 1$, sont des ensembles de zéros de polynômes homogènes.

Précisons tout d'abord deux notions que nous serons amenés à utiliser par la suite :

$\mathbb{R}^{2n}$ étant identifié à $\mathbb{C}^n$, soit J l'opérateur canonique de la structure presque complexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (i.e. la multiplication par i). On dit qu'une sous-variété

V d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ est totalement réelle si, pour tout $z \in V$, le plan tangent $T_V(z)$ à V au point z est tel que $T_V(z) \cap J T_V(z) = \{0\}$. Il est bien clair que si X est un ensemble analytique complexe au voisinage d'un point z^o de $\mathbb{C}^n$ tel que, dans tout voisinage de z^o, X contienne une variété totalement réelle de dimension (réelle) $n-1$, alors, le germe de X au voisinage de z^o est de dimension (complexe) $n-1$.

La seconde notion que nous rappelons ici est celle d'ensemble analytique homogène : nous dirons qu'un sous-ensemble analytique complexe H d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est homogène, si, pour tout $z \in H$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, on a $(D_z \cap \Omega) \subset H$, D_z désignant la droite complexe passant par z et l'origine, c'est-à-dire $D_z = \left\{z = (\zeta z_1, \ldots, \zeta z_n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ \zeta \in \mathbb{C}\right\}$. Nous aurons à utiliser la propriété suivante :

LEMME IV.1. <u>Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine. Tout sous-ensemble analytique complexe homogène H de Ω, de dimension pure $n-1$, est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène holomorphe</u>.

En effet, comme l'origine appartient à Ω, H est en fait un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^n$, et est donc l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe entière f. Pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus H$, la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ne s'annule qu'en $\lambda = 0$; si $n(z)$ est la multiplicité de l'unique zéro de cette fonction, il est clair que $z \mapsto n(z)$ est une fonction continue dans $\mathbb{C}^n \setminus H$. Comme cet ouvert est connexe, on en déduit que $n(z)$ est constant ; soit n_o sa valeur. Soit $f = \sum_{n=n_1}^{\infty} P_n$ le développement en série de f, les P_n étant des polynômes homogènes holomorphes, P_{n_1} n'étant pas identiquement nul. Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^n$, on a

$$f(\lambda z) = \lambda^{n_1}(P_{n_1}(z) + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \lambda^{n-n_1} P_n(z)) = \lambda^{n_1} h_z(\lambda).$$

Par conséquent, on a $n_1 \leq n_o$. Si on avait $n_1 < n_o$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n \setminus H$, on aurait $h_z(0) = 0$, c'est-à-dire $P_{n_1}(z) = 0$, ce qui est contraire à la définition de n_1. Ainsi $n_1 = n_o$, et $h_z(\lambda)$ ne s'annule pas pour $z \in \mathbb{C}^n \setminus H$, ce qui implique $Z(P_{n_1}) \subset H$. Comme l'inclusion inverse est évidente, H est l'ensemble des zéros du polynôme homogène P_{n_1}.

Notons enfin qu'il résulte aussitôt de ce lemme que si P est un polynôme homogène holomorphe, toute composante irréductible du germe de $Z(P)$ au voisinage de l'origine est de la forme $Z(Q)$ où Q est un des polynômes homogènes de la décomposition de P en polynômes irréductibles.

Nous allons maintenant démontrer un résultat local duquel nous déduirons aisément le principal résultat de ce paragraphe :

PROPOSITION IV.1. <u>Soit</u> $z^o = (z_1^o, \dots, z_n^o)$ <u>un point de</u> $\mathbb{T}_{t_o}^n$, <u>et soit</u> v <u>un voisinage ouvert de ce point dans</u> $\mathbb{C}^n$. <u>Soit</u> X <u>un sous-ensemble analytique complexe de pure dimension</u> $n-1$ <u>de</u> v. <u>Supposons qu'il existe une suite</u> (t_k) <u>de réels strictement positifs, distincts de</u> t_o, <u>qui converge vers</u> t_o, <u>telle que, pour tout voisinage</u> $\omega \subset v$ <u>de</u> z^o <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>il existe un entier</u> K <u>tel que, pour tout</u> $k \geq K$, <u>on ait</u>

$$\dim_{\mathbb{R}}(X \cap \mathbb{T}_{t_k}^n \cap \omega) = n-1.$$

<u>Alors, il existe un ensemble analytique complexe homogène</u> H <u>de dimension pure</u> $n-1$, <u>défini dans un voisinage</u> $\omega_1 \subset v$ <u>de</u> z^o <u>tel que :</u>

(i) <u>pour tout voisinage de</u> z^o, $\omega \subset \omega_1$, <u>et tout</u> t <u>voisin de</u> t_o,

$$\dim_{\mathbb{R}}(H \cap \mathbb{T}_t^n \cap \omega) = n-1 \,;$$

(ii) H <u>est contenu dans</u> X.

<u>De plus</u> :

1°) <u>Si</u> $t_o = 0$, <u>on peut prendre pour</u> H <u>l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène holomorphe irréductible</u>.

2°) <u>Si</u> $n=2$, <u>il existe</u> $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ <u>tel que l'on puisse prendre pour</u> H <u>la variété des zéros du polynôme</u> $P(z_1,z_2) = z_1 - \lambda z_2$.

<u>Remarque</u>. Pour $n \geq 3$ et $t_o \neq 0$, on ne peut pas espérer pouvoir toujours prendre pour H l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène. Par exemple, au voisinage du point $(ie^i, i, 1) \in \mathbb{T}^3$ dans $\mathbb{C}^3$, la variété d'équation $z_1 = z_2 \exp\left(\frac{1+z_2/z_3}{1-z_2/z_3}\right)$ vérifie toutes les hypothèses de la proposition, mais ne contient évidemment pas les zéros d'un polynôme homogène.

Nous allons faire la démonstration de la proposition IV.1 en deux étapes : en premier lieu, nous allons démontrer (sous les hypothèses de la proposition) l'assertion 2°) pour $t_o \neq 0$, puis nous démontrerons l'existence de H vérifiant (i) et (ii) (sans hypothèses sur t_o).

Nous pouvons tout de suite remarquer que les assertions supplémentaires 1°) et 2°) en résulteront aussitôt : d'une part le 1°) résulte de la deuxième étape et du lemme IV.1, et d'autre part, le 2°) pour $t_o = 0$ est une conséquence du 1°) et de la première étape : si H est l'ensemble des zéros du polynôme homogène P, H vérifiant (i), le résultat de la première étape s'applique à H en un point de $H \cap \mathbb{T}^2$ au voisinage duquel $H \cap \mathbb{T}^2$ est une variété de dimension réelle 1, et comme P est irréductible, on a $P(z_1,z_2) = z_1 - \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbb{T}$.

Première étape : $n = 2$, $t_o \neq 0$.

Il suffit naturellement de faire la démonstration lorsque X est défini dans v par une équation $h(z_1, z_2) = 0$, où h est une fonction holomorphe dans v, irréductible au voisinage de z^o. Alors h est régulière en z_1 au point z^o, et, d'après le théorème de préparation de Weierstrass, nous sommes ramenés au cas où $v = D_1 \times D_2$, D_1 et D_2 étant deux disques centrés respectivement en z_1^o et z_2^o, et h un polynôme de Weierstrass irréductible en z_1, c'est-à-dire

$$h(z_1,z_2) = P(z_1,z_2) = (z_1-z_1^o)^p + (z_1- z_1^o)^{p-1} a_1(z_2-z_2^o) + \ldots + a_p(z_2-z_2^o),$$

où les a_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine telles que $a_i(0) = 0$. Supposons maintenant que l'on a, par exemple, $t_k < t_o$ pour tout k. Comme P est irréductible, l'ensemble des zéros commun de P et de P'_{z_1} est un ensemble analytique de dimension zéro, donc vide ou formé des points isolés. Par suite, quitte à réduire D_2 si nécessaire, pour $z_2 \neq z_2^o$, $z_2 \in D_2$, le polynôme $z_1 \to P(z_1,z_2)$ a p racines distinctes dans D_1. Par conséquent, il existe p fonctions holomorphes $r_i(z_2)$, $1 \leq i \leq p$, définies et continues dans $D_2 \cap \{ |z_2| \leq t_o \}$, et à valeurs dans D_1, telles que, $r_i(z_2^o) = z_1^o$ pour tout i, et, pour tout $(z_1,z_2) \in D_1 \times (D_2 \cap \{ |z_2| \leq t_o \})$,

$$P(z_1,z_2) = \prod_{i=1}^{p} (z_1 - r_i(z_2)).$$

L'hypothèse faite sur X entraîne alors qu'il existe un indice i_o et une suite (t_{k_ℓ}) extraite de la suite (t_k) tels que, si on pose $g_{i_o}(z_1,z_2) = z_1 - r_{i_o}(z_2)$, on a $\dim_{\mathbb{R}}(Z(g_{i_o}) \cap \mathbb{T}^2_{t_{k_\ell}}) = 1$, pour tout ℓ, $Z(g_{i_o})$ désignant l'ensemble des zéros de g_{i_o} dans $D_1 \times (D_2 \cap \{ |z_2| < t_o \})$. Il en résulte que, pour tout indice ℓ et pour tout $z_2 \in \mathbb{T}_{t_{k_\ell}} \cap D_2$, on a $|r_{i_o}(z_2)| = |z_2|$. En appliquant alors le principe de symétrie de Schwartz à la fonction $r_{i_o}(z_2)$ par rapport à chacune des courbes $\mathbb{T}_{t_{k_\ell}} \cap D_2$, on conclut que cette fonction est en fait holomorphe au voisinage de z_2^o et vérifie $|r_{i_o}(z_2)| = |z_2|$ dans tout ce voisinage. Comme $r_{i_o}(z_2^o) = z_1^o$, on a $r_{i_o}(z_2) = \lambda z_2$, avec $\lambda = {z_1^o}/{z_2^o} \in \mathbb{T}$, ce qui entraîne que la variété d'équation $z_1 = \lambda z_2$ est contenue dans $X \cap (D_1 \times D_2)$, et achève la démonstration de cette première étape.

Deuxième étape : existence de H.

Soit B_p une suite de boules ouvertes centrées en z^o, contenues dans v, et formant un système fondamental de voisinages de z^o, et soit f une fonction holomorphe dans B_o telle que $X \cap B_o = \{z \in B_o \ ; \ f(z) = 0\}$. Montrons tout d'abord que :

(IV.1) Pour tout entier p, il existe une variété $W_p \subset \mathbb{T}^n$, de dimension réelle n-1 telle que :

a) il existe $\lambda_p > 0$ tel que la variété $\lambda_p W_p = \{(\lambda_p z_1, \dots, \lambda_p z_n) \ ; \ (z_1, \dots, z_n) \in W_p\}$ soit contenue dans B_p ;

b) pour tout $z \in W_p$, la droite complexe D_z passant par z et l'origine est telle que $D_z \cap B_o \subset X$.

Considérons le sous-ensemble analytique réel V de B_o défini par :

$$V = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in B_o \ ; \ f(z) = 0 \text{ et } |z_1| = \dots = |z_i| = \dots = |z_n|\}.$$

Par hypothèse, pour tout p, et tout $k \geq K_p$, on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap \mathbb{T}^n_{t_k} \cap B_p) = n-1$. Ceci entraîne que le germe V_o de V au voisinage de z_o est de dimension réelle n :

En effet, dans le cas contraire, on aurait $\dim_{\mathbb{R}} V_o = n-1$. L'ensemble des points singuliers de V dans un voisinage de z^o serait alors de dimension topologique strictement inférieure à n-1 (c.f. [2], lemme 3.3, p. 120) ; et, par suite, pour tout p et tout k assez grand, $V \cap \mathbb{T}^n_{t_k} \cap B_p$ contiendrait un point au voisinage duquel V serait une variété de dimension réelle $n-1$ contenue dans $\mathbb{T}^n_{t_k}$. D'après un théorème de F. Bruhat et H. Cartan (c.f. [11], prop. 9, p. 97), dans un voisinage de z^o, l'ensemble des points de V au voisinage desquels V est une variété de dimension n-1 est une réunion finie de variétés analytiques connexes. On en conclut donc que V contiendrait une variété analytique connexe de dimension n-1 A, telle que, pour une sous-suite (t_{k_ℓ}) de la suite (t_k), $A \cap \mathbb{T}^n_{t_{k_\ell}}$ contiendrait un point au voisinage duquel A serait contenue dans $\mathbb{T}^n_{t_{k_\ell}}$. Mais cela est évidemment impossible, car, l'ensemble des points de A au voisinage desquels A est contenue dans $\mathbb{T}^n_{t_{k_\ell}}$ est à la fois ouvert et fermé dans A.

L'ensemble des points de V, dans un voisinage de z^o, au voisinage desquels V est une variété de dimension réelle n étant dense dans V, pour tout p, il existe donc $z^1 = (t_1 e^{i\theta^1_1}, \ldots, t_1 e^{i\theta^1_n}) \in V \cap B_p$, $t_1 \neq 0$, et v_1 un voisinage de z^1 contenu dans B_p, $(0,\ldots,0) \notin v_1$, tel que $V \cap v_1$ soit une variété de dimension réelle n. En d'autres termes, dans un voisinage $\tilde{v}_1$ du point $x_1 = (t_1, \theta^1_1, \ldots, \theta^1_n)$ dans $]0,1[\times \mathbf{R}^n$, l'ensemble des zéros de la fonction

$$(t, \theta_1, \ldots, \theta_n) \mapsto f(te^{i\theta_1}, \ldots, te^{i\theta_n}),$$

est une variété $\tilde{V}$ de dimension n. Comme pour tout $u \in]0,1[$, on doit avoir $\dim_{\mathbb{R}}(\tilde{V} \cap \{t = u\}) \leq n-1$, il existe $x_2 = (t_2, \theta^2_1, \ldots, \theta^2_n) \in \tilde{v}_1 \cap \tilde{V}$, tel que, en x_2 le plan tangent à $\tilde{V}$ ne soit pas contenu dans le plan $\{t = t_2\}$. Par conséquent, il existe un indice i_o tel que, dans un voisinage $\tilde{v}_2 \subset \tilde{v}_1$ de x_2, l'hypersurface $\tilde{V}$ admet une équation de la forme

(IV.2) $$\theta_{i_o} = g(t, \theta_1, \ldots, \hat{\theta}_{i_o}, \ldots, \theta_n),$$

où g est analytique réelle dans un voisinage de $(t_2, \theta_1, \ldots, \hat{\theta}_{i_o}, \ldots, \theta_n)$ (la notation $\hat{}$ signifie que la variable correspondante est supprimée). Posons alors $\widetilde{W}_p = \widetilde{V} \cap \{t = t_2\} \cap \widetilde{v}_2$. Il est clair que $\widetilde{W}_p$ est une sous-variété analytique réelle de dimension réelle $n-1$ du plan $\{t = t_2\}$, et montrons que

$$W_p = \{(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \in \mathbb{T}^n \; ; \; (t_2, \theta_1, \ldots, \theta_n) \in \widetilde{W}_p\},$$

vérifie les conditions de (IV.1).

Par construction, W_p vérifie la condition a) ; démontrons qu'elle vérifie aussi b) :

Soit $z = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \in W_p$, et posons $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n) = (t_2 e^{i\theta_1}, \ldots, t_2 e^{i\theta_n})$. Soit h la fonction holomorphe définie dans un voisinage du point $(1,1)$ de $\mathbb{C}^2$ par :

$$h(\zeta, \xi) = f(\zeta \widetilde{z}_1, \ldots, \zeta \widetilde{z}_{i_o-1}, \xi \widetilde{z}_{i_o}, \zeta \widetilde{z}_{i_o+1}, \ldots, \zeta \widetilde{z}_n).$$

Il résulte de la forme (IV.2) de l'équation de $\widetilde{V}$ au voisinage de $(t_2, \theta_1, \ldots, \theta_n) \in \widetilde{W}_p$ que l'ensemble analytique $Z(h) = \{(\zeta, \xi) \; ; \; h(\zeta, \xi) = 0\}$ vérifie, au voisinage de $(1,1)$ toutes les hypothèses de la proposition IV.1 dans le cas $n = 2$, $t_o = 1$. La première étape de la démonstration montre donc que la fonction

$$\zeta \mapsto f(\zeta \widetilde{z}_1, \ldots, \zeta \widetilde{z}_n),$$

est nulle là où elle est définie, ce qui achève de démontrer (IV.1).

L'existence de H en résulte alors aisément. Nous pouvons supposer $\bar{B}_1 \subset B_o$, et il existe donc $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $|1-\zeta| < \epsilon$, et tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B_1$, on a $\zeta z = (\zeta z_1, \ldots, \zeta z_n) \in B_o$.

Soit alors

$$\Omega = \{(\zeta, z) \in \mathbb{C}^{n+1} \; ; \; \zeta \in \mathbb{C}, \; |1-\zeta| < \epsilon, \; z \in B_1\}.$$

Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, et la fonction $h(\zeta, z) = f(\zeta z_1, \ldots, \zeta z_n)$ est holomorphe dans Ω. On définit alors une suite (f_ℓ) de fonctions holomorphes dans B_1 par

$$f_o = f,\ f_\ell(z) = \frac{\partial^\ell h}{\partial \zeta^\ell}(1,z),\ z \in B_1,\ \ell \geq 1.$$

Soit X_ℓ l'ensemble des zéros de f_ℓ dans B_1. D'après (IV.1), pour tous p et ℓ, on a $\lambda_p W_p \subset X_\ell$. Posons $Y_\ell = \bigcap_{j \leq \ell} Y_j$. L'anneau des germes des fonctions holomorphes au voisinage d'un point étant noethérien, et la suite Y_ℓ décroissante, il existe ℓ_o et ω_1 voisinage de z^o tels que, pour $\ell \geq \ell_o$ on a $Y_\ell \cap \omega_1 = Y_{\ell_o} \cap \omega_1$. Il existe donc p_o tel que pour $p \geq p_o$, on a $\lambda_p W_p \subset Y_{\ell_o}$. Comme les W_p sont des variétés totalement réelles de dimension réelle $n-1$, le germe de Y_{ℓ_o} au voisinage de z^o est de dimension complexe $n-1$. D'autre part, pour tout $z \in Y_{\ell_o}$, la fonction $\zeta \mapsto h(\zeta, z)$ est identiquement nulle, ce qui signifie que Y_{ℓ_o} est homogène et contenu dans X. Il suffit donc de prendre pour H une composante irréductible de Y_{ℓ_o} au voisinage de z^o, de dimension $n-1$, et qui contienne un ouvert de chacune des variétés d'une sous-suite de la suite $\lambda_p W_p$. Ceci achève la démonstration de la proposition IV.1.

De la proposition IV.1,nous allons déduire facilement le principal résultat de ce paragraphe.

Introduisons une nouvelle notation : X étant un sous-ensemble analytique complexe de codimension 1 du polydisque, avec les notations du début du paragraphe, nous définissons l'ensemble $T(X) \subset [0,1[$ par :

$$T(X) = \{ t \in]0,1[\ ;\ \dim_{\mathbb{R}} X_t = n-1 \}.$$

On a alors le théorème suivant :

THEOREME IV.1. <u>Soit</u> f <u>une fonction holomorphe dans</u> D^n, <u>non identiquement nulle</u>. <u>Il existe un polynôme homogène holomorphe</u> P_f <u>unique (à une constante multiplicative près)</u>, <u>et il existe une fonction</u> g_f <u>holomorphe dans</u> D^n <u>tels que</u> :

(i) <u>tout facteur irréductible</u> P <u>de</u> P_f <u>est tel que</u> $T(Z(P)) =]0,1[$;

(ii) $f = P_f g_f$ <u>dans</u> D^n ;

(iii) $T(Z(g_f))$ <u>est discret dans</u> $[0,1[$.

Si $f(0) \neq 0$, nous prenons $P_f = 1$, $g_f = f$. Si $f(0) = 0$, soient $X_1,\dots,X_p$ les composantes irréductibles du germes de $Z(f)$ au voisinage de l'origine qui sont des germes d'ensembles de zéros de polynômes homogènes holomorphes irréductibles P_i, $1 \leq i \leq p$, tels que $T(Z(P_i)) =]0,1[$, et posons $H = \bigcup_{i=1}^{p} Z(P_i)$. Pour chaque i on a $Z(P_i) \subset Z(f)$ et, par suite, f/P_i est une fonction holomorphe dans D^n. Il existe donc un polynôme homogène holomorphe P_f unique (à une constante multiplicative près) tel que $H = Z(P_f)$, et $g_f = f/P_f$ est une fonction holomorphe dans D^n telle que $Z(g_f)$ ne contienne pas l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène holomorphe irréductible P tel que $T(Z(P)) =]0,1[$.

Pour démontrer le théorème IV.1, il suffit donc de voir que si X est un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure $n-1$ de D^n tel que $T(X)$ n'est pas discret dans $[0,1[$, alors il existe un polynôme homogène holomorphe irréductible P tel que $T(Z(P)) =]0,1[$ et $Z(P) \subset X$. Supposons donc que $T(X)$ a un point d'accumulation $t_o \in [0,1[$. Si $t_o = 0$, la conclusion résulte aussitôt de la proposition IV.1. Supposons $t_o \neq 0$. Par compacité, il existe $z^o \in \mathbb{T}^n_{t_o}$ tel que, au voisinage de z^o, X vérifie les hypothèses de la proposition 1. Il existe donc une sous-variété W de $\mathbb{T}^n$, de dimension réelle $n-1$, telle que le cône $C_W = \left\{(\zeta z_1,\dots,\zeta z_n) \in D^n ; \zeta \in D, (z_1,\dots,z_n) \in W\right\}$ soit contenu dans X. Soit f une fonction holomorphe dans D^n telle que $X = Z(f)$, et soit $f = \sum_{q \geq q_o} P_q$ le développement en série de f, les P_q étant des polynômes homogènes de degré q (on a évidemment $q_o \geq 1$). Pour tout q, on a donc $C_W \subset Z(P_q)$. D'après la remarque suivant le lemme IV.1, il existe un polynôme homogène holomorphe P, facteur irréductible de P_{q_o} tel que d'une part le germe de $Z(P)$ au voisinage de l'origine est une composante irréductible du germe de $Z(P_{q_o})$, et d'autre part, $Z(P)$ contient un cône C_{W_1}, où W_1 est un ouvert de W. Pour tout $q \geq q_o$, on a alors $C_{W_1} \subset Z(P) \cap Z(P_q)$, et comme W_1 est une variété totalement réelle de dimension réelle $n-1$, la dimension complexe du germe de $Z(P) \cap Z(P_q)$ au voisinage de l'origine est égale à $n-1$. Comme $Z(P)$ est irréductible au voisinage de l'origine, ceci entraîne $Z(P) \subset Z(P_q)$ pour tout q. Par suite $(Z(P) \cap D^n) \subset X$, et, comme $C_{W_1} \subset Z(P)$, on a $T(Z(P)) =]0,1[$, ce qui prouve le théorème IV.1.

II. LA FORMULE DE JENSEN POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE POLYDISQUE.

Dans ce paragraphe nous utiliserons constamment la notation ^ déjà utilisée dans la démonstration de la proposition 1. Rappelons qu'elle signifie que la variable correspondante est supprimée.

Dans la suite de cet article, nous serons amenés à utiliser la propriété bien connue suivante : pour toute fonction holomorphe f dans D^n, l'intégrale

$$\int_{[0,2\pi]} \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \dots d\theta_n ,$$

est une fonction croissante de chaque r_i. C'est une conséquence immédiate des propriétés de sous-harmonicité de $\log |f|$.

Soit f une fonction holomorphe dans D^n, non identiquement nulle, et soit $f = P_f g_f$, la factorisation de f donnée par le théorème IV.1. Pour tout $t \in]0,1[$, chaque indice p, et presque tout $(\theta_1, \dots, \hat{\theta}_p, \dots, \theta_n) \in [0,2\pi]^{n-1}$, la fonction holomorphe

$$\text{(IV.3)} \qquad z_p \mapsto g_f(te^{i\theta_1}, \dots, te^{i\theta_{p-1}}, z_p, te^{i\theta_{p+1}}, \dots, te^{i\theta_n}),$$

n'est pas identiquement nulle. Notons $n_p(f,t,\theta_1,\dots,\hat{\theta}_p,\dots,\theta_n)$ le nombre de ses zéros dans le disque $D_t = \{z_p \in \mathbb{C} ; |z_p| < t\}$, comptés avec leurs multiplicités. Soit d_f le degré de P_f. Avec ces notations on a la formule suivante :

THEOREME IV.2 (Formule de Jensen). Soit f une fonction holomorphe dans le polydisque D^n, non identiquement nulle, et soient $0 < r_1 < r_2 < 1$. Alors :

$$\text{(IV.4)} \qquad \begin{aligned} &\int_{[0,2\pi]^n} \log |f(r_2 e^{i\theta_1}, \dots, r_2 e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \log |f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_1 e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \dots d\theta_n \\ &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \left\{ \sum_{p=1}^{n} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} n_p(f,t,\theta_1,\dots,\hat{\theta}_p,\dots,\theta_n) \, d\theta_1 \dots \widehat{d\theta_p} \dots d\theta_n \right\} + (2\pi)^n d_f \log \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la factorisation $f = P_f g_f$, la formule (IV.4) s'écrit :

$$\int_{[0,2\pi]^n} \log|g_f(r_2 e^{i\theta_1},\dots,r_2 e^{i\theta_n})|d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \log|g_f(r_1 e^{i\theta_1},\dots,r_1 e^{i\theta_n})|d\theta_1\dots d\theta_n \tag{IV.5}$$
$$= 2\pi\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t}\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{[0,2\pi]^{n-1}} n_p(f,t,\theta_1,\dots,\hat{\theta}_p,\dots,\theta_n)d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n\right.$$

Cette dernière formule va être une conséquence du lemme suivant :

LEMME IV.2. Soient $0 < r_1 < r_2 < 1$, et soit φ une fonction de classe C^2 au voisinage de $\overline{D^n_{r_2}}$. Alors :

$$\int_{[0,2\pi]^n} \varphi(r_2 e^{i\theta_1},\dots,r_2 e^{i\theta_n})d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \varphi(r_1 e^{i\theta_1},\dots,r_1 e^{i\theta_n})d\theta_1\dots d\theta_n \tag{IV.6}$$
$$= \frac{2}{i}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t}\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{[0,2\pi]^{n-1}}\left[\int_{D_t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_p\partial\bar{z}_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})d\bar{z}_p\wedge dz_p\right]d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n\right\}.$$

Démontrons ce lemme : en dérivant la fonction

$$t \mapsto \lambda(t) = \int_{[0,2\pi]^n} \varphi(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})d\theta_1\dots d\theta_n,$$

il vient,

$$\lambda'(t) = \frac{1}{it}\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{[0,2\pi]^{n-1}}\left[\int_{\mathbb{T}_t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})dz_p\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})d\bar{z}_p\right)\right]d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n\right\}.$$

En appliquant la formule de Stokes par rapport à z_p, on obtient :

$$\lambda'(t) = \frac{2}{i}\frac{1}{t}\sum_{p=1}^{n}\int_{[0,2\pi]^n}\left[\int_{D_t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_p\partial\bar{z}_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})d\bar{z}_p\wedge dz_p\right]d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n.$$

On obtient donc (IV.6) en intégrant par rapport à t.

Démontrons maintenant la formule (IV.5). Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, positive, nulle hors de $\bar{D} = \{|\zeta|\le 1\}$, ne dépendant que de $|\zeta|$, et d'intégrale égale à 1. Pour $\varepsilon>0$ petit, posons

$$\varphi_\varepsilon(z_1,\dots,z_n) = \int_{\mathbb{C}^n}\log|g_f(z_1-\varepsilon\zeta_1,\dots,z_n-\varepsilon\zeta_n)|\prod_{j=1}^{n}\chi(\zeta_j)d\lambda(\zeta_1,\dots,\zeta_n),$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue. $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctions pluri-sous-harmoniques dans $D^n_{1-\varepsilon}$ de classe C^∞, qui converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\mathrm{Log}\,|f|$, en décroissant avec ε (cf. [8], p. 45). Appliquons (IV.6) aux fonctions φ_ε : il est clair que le premier membre de (3) (avec $\varphi=\varphi_\varepsilon$) converge vers le premier membre de (IV.5) quand $\varepsilon \to 0$; montrons que, pour tout indice p,

$$\text{(IV.7)}\quad \begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t}\Big\{\int_{[0,2\pi]^{n-1}}\Big[\int_{D_t}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_p\partial\bar z_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})d\bar z_p\wedge dz_p\Big]d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n\Big\}=\\ =2i\pi\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t}\Big\{\int_{[0,2\pi]^{n-1}}n_p(f,t,\theta_1,\dots,\theta_p,\dots,\theta_n)d\theta_1\dots\widehat{d\theta_p}\dots d\theta_n\Big\}.\end{aligned}$$

Soit $0<t\le r_2$, $t\notin T(Z(g_f))$. Par définition de $T(Z(g_f))$, pour presque tout $(\theta_1,\dots,\hat\theta_p,\dots,\theta_n)\in[0,2\pi]^{n-1}$, la fonction (IV.3) n'a pas de zéro sur le cercle $|z_p|=t$. Alors, pour ces valeurs de $(\theta_1,\dots,\hat\theta_p,\dots,\theta_n)$ on a :

$$\text{(IV.8)}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_t}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_p\partial\bar z_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})\,d\bar z_p\ dz_p=i\pi n_p(f,t,\theta_1,\dots,\hat\theta_p,\dots,\theta_n).$$

En effet, pour tout $(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)\in D^{n-1}$, considérons la fonction

$$\text{(IV.9)}\qquad z_p\longrightarrow g_f(z_1,\dots,z_p,\dots,z_n).$$

L'hypothèse faite sur $(\theta_1,\dots,\hat\theta_p,\dots,\theta_n)$ entraîne qu'il existe $\varepsilon_o>0$ tel que, si on note $B_{\varepsilon_o}(\theta_j)=\{\zeta_j\in\mathbb{C}\ ;\ |te^{i\theta_j}-\zeta_j|<\varepsilon_o\}$, $j\neq p$, pour tout $(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)\in\prod_{j\neq p}B_{\varepsilon_o}(\theta_j)$, la fonction (IV.9) n'a pas de zéros dans l'anneau $t-\varepsilon_o<|z_p|<t+\varepsilon_o$. Par suite les zéros de cette fonction dans le disque D_t sont tous contenus dans $D_{t-\varepsilon_o}$ et leur nombre (avec leurs multiplicités) est indépendant de $(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)\in\prod_{j\neq p}B_{\varepsilon_o}(\theta_j)$ et est donc égal à $n_p=n_p(f,t,\theta_1,\dots,\hat\theta_p,\dots,\theta_n)$. On en conclut alors aisément qu'il existe n_p fonctions mesurables (on a en fait mieux mais ceci nous suffit) $z_p^k(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)$ de $\prod_{j\neq p}B_{\varepsilon_o}(\theta_j)$, dans $D_{t-\varepsilon_o}$, $1\le k\le n_p$, telles que pour presque tout $(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)$ les nombres complexes $z_p^k(z_1,\dots,\hat z_p,\dots,z_n)$ sont exactement les n_p zéros dans D_t de la fonction (IV.9). D'autre part, on a :

$$\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_p\partial\bar z_p}(te^{i\theta_1},\dots,z_p,\dots,te^{i\theta_n})=\int_{\mathbb{C}^n}\mathrm{Log}\,|g_f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)|\prod_{j\neq p}\chi\Big(\frac{te^{i\theta_j}-\zeta_j}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\zeta_p\partial\bar\zeta_p}\Big(\chi\Big(\frac{z_p-\zeta_p}{\varepsilon}\Big)\Big)\,d\lambda(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{\substack{\Pi B_{\varepsilon_o}(\theta_j) \\ j\neq p}} \prod_{j\neq p} \chi\left(\frac{te^{i\theta_j} - \zeta_j}{\varepsilon}\right) \left\{ \int_{\mathbb{C}} \operatorname{Log} \left| g_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \ldots, \zeta_n) \right| \frac{\partial^2}{\partial \zeta_p \partial \bar{\zeta}_p} \left(\chi\left(\frac{z_p - \zeta_p}{\varepsilon}\right)\right) d\bar{\zeta}_p \wedge d\zeta_p \right\}$$
$$d\lambda(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots \zeta_n).$$

Si $\varepsilon < \varepsilon_o$ et si $z_p \in D_t$, le support de la fonction $\zeta_p \longrightarrow \chi\left(\frac{z_p - \zeta_p}{\varepsilon}\right)$ est contenu dans le disque $D_{t+\varepsilon_o}$, et un calcul classique pour les fonctions d'une variable complexe montre que pour presque tout $(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n) \in \prod_{j\neq p} B_{\varepsilon_o}(\theta_j)$,

$$\int_{\mathbb{C}} \operatorname{Log} \left| g_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \ldots, \zeta_n) \right| \frac{\partial^2}{\partial \zeta_p \partial \bar{\zeta}_p} \left(\chi\left(\frac{z_p - \zeta_p}{\varepsilon}\right)\right) d\bar{\zeta}_p \wedge d\zeta_p =$$

$$= i\pi \sum_{k=1}^{n_p} \chi\left(\frac{z_p - z_p^k(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n)}{\varepsilon}\right).$$

Comme $z_p^k(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n) \in D_{t-\varepsilon_o}$, le support de la fonction

$$z_p \longrightarrow \chi\left(\frac{z_p - z_p^k(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n)}{\varepsilon}\right)$$

est contenu dans le disque D_t dès que $\varepsilon < \varepsilon_o$. Par suite, pour $\varepsilon < \varepsilon_o$ et presque tout $(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n) \in \prod_{j\neq p} B_{\varepsilon_o}(\theta_j)$ on a :

$$\frac{1}{2i} \int_{D_t} \left\{ \int_{\mathbb{C}} \operatorname{Log} \left| g_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \ldots, \zeta_n) \right| \frac{\partial^2}{\partial \zeta_p \partial \bar{\zeta}_p} \left(\chi\left(\frac{z_p - \zeta_p}{\varepsilon}\right)\right) d\bar{\zeta}_p \wedge d\zeta_p \right\} d\bar{z}_p \wedge dz_p =$$

$$= i\pi \, n_p(f, t, \theta_1, \ldots, \hat{\theta}_p, \ldots, \theta_n).$$

En utilisant le théorème de Fubini, on conclut que pour $\varepsilon < \varepsilon_o$, on a

$$\int_{D_t} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_p \partial \bar{z}_p} (te^{i\theta_1}, \ldots, z_p, \ldots, te^{i\theta_n}) \, d\bar{z}_p \wedge dz_p = i\pi n_p(f, t, \theta_1, \ldots, \hat{\theta}_p, \ldots, \theta_n),$$

ce qui montre (IV.8).

Pour conclure, montrons que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour déduire (IV.7) de (IV.8) :

Soit $r_2 < t_1 < 1$, et soit $(z_1, \ldots, \hat{z}_p, \ldots, z_n) \in D^{n-1}$. Si la fonction (IV.9) n'est pas identiquement nulle, notons $n_p(t_1, z_1, \ldots, \hat{z}_p, \ldots, z_n)$ le nombre de ses zéros comptés avec leurs multiplicités dans le disque D_{t_1}. Si elle est identiquement nulle, posons $n_p(t_1, z_1, \ldots, \hat{z}_p, \ldots, z_n) = 0$. Alors il est clair que la valeur absolue de l'intégrale de (IV.8) est majorée (pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, ε_o ne dépendant que de t_1) par

$$\pi \int_{\mathbb{C}^n} n_p(t_1, te^{i\theta_1} - \varepsilon\zeta_1, \ldots, \hat{z}_p, \ldots, te^{i\theta_n} - \varepsilon\zeta_n) \prod_{j\neq p} \chi(\zeta_j)\, d\lambda(\zeta_1, \ldots, \hat{\zeta}_p, \ldots, \zeta_n).$$

La conclusion cherchée résulte donc du théorème IV.1 et du lemme suivant :

LEMME IV.3. _Soit_ h _une fonction holomorphe dans le polydisque_ D^n. _Notons_ $(z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ _les points de_ $\mathbb{C}^n$. _Pour tout_ $z' \in D^{n-1}$, _considérons la fonction holomorphe_

$$h_{z'}(z_1) = h(z_1, z').$$

Soit $t < 1$. _Si_ $h_{z'}$ _n'est pas identiquement nulle, soit_ $n(t,z')$ _le nombre de ses zéros, comptés avec leurs multiplicités dans le disque_ $D_t = \{|z_1| < t\}$. _Si_ $h_{z'} \equiv 0$, _posons_ $n(t,z') = 0$. _Alors, pour tout_ $t_o < 1$, _on a_ :

$$\sup_{z' \in D_{t_o}^{n-1}} n(t,z') < +\infty .$$

Soit $t_1 < 1$ fixé, et montrons ce lemme pour $t \leq t_1$. Quitte à factoriser h si nécessaire, nous pouvons supposer dans cette démonstration que $Z(h)$ ne contient pas de variétés de la forme $\{z_1^o\} \times D^{n-1}$ avec $|z_1^o| \leq t_1$.

Pour tout $t \leq t_1$, considérons alors le sous-ensemble analytique réel $X(t)$ de D^n défini par

$$X(t) = Z(h) \cap \{(z_1, z') \in D^n \ ; \ |z_1| = t\}.$$

Remarquons tout d'abord que $\dim_{\mathbb{R}}(X(t)) \leq 2n-3$:

En effet, dans le cas contraire, on aurait $\dim_{\mathbb{R}}(X(t)) = 2n-2$, et il existerait donc un point $z^o = (z_1^o, z'^o) \in D^n$, $|z_1^o| = t$, au voisinage duquel $Z(h)$ serait une variété analytique complexe contenue dans l'ensemble $\{|z_1| = t\}$ (car $X(t)$ ne peut être contenu dans l'ensemble des points singuliers de $Z(h)$ puisque ce dernier est un ensemble analytique complexe de dimension complexe inférieure ou égale à $n-2$, c.f. [6] ou [10]). Alors, si $z_{i_o} = k(z_1, \ldots, \hat{z}_{i_o}, \ldots, z_n)$ est une équation de $Z(h)$ au voisinage de z^o, il en résulte aussitôt que l'on doit avoir $i_o = 1$ et

$k(z_2,\dots,z_n)$ = constante, ce qui implique que la variété $\{z_1^o\} \times D^{n-1}$ est contenue dans $Z(h)$, et contredit l'hypothèse.

Soit maintenant $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ la projection canonique $P(z_1,z') = z'$. Considérons P comme une application de l'espace analytique réel $Y(t) = \{(z_1,z') \in D^n \,;\, |z_1| = t\}$ dans D^{n-1} de sorte que P devient une application analytique réelle propre. Alors l'image $P(X(t))$ de $X(t)$ par P est un sous-ensemble sous-analytique de D^{n-1} (c.f. [7]). D'après un résultat de H. Hironaka ([7], prop. (3.6), p. 472), $D^{n-1} \setminus P(X(t))$ a localement un nombre fini de composantes connexes.

Ainsi $D_{t_o}^{n-1} \setminus P(X(t))$ est un ouvert partout dense dans $D_{t_o}^{n-1}$ qui n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et comme la fonction $z' \mapsto n(t,z')$ est constante sur chacune de ces composantes, on a, pour $t < t_1$,

$$n(t) = \sup_{z' \in D_{t_o}^{n-1} \setminus P(X(t))} n(t,z') < +\infty .$$

De plus, ce sup est atteint en un point $z' \in D_{t_o}^{n-1} \setminus P(X(t))$, et, pour $t' \geq t$, $t' \leq t_1$, il existe z_1' dans un voisinage de z' tel que $n(t,z') = n(t,z_1')$ et $z_1' \in D_{t_o}^{n-1} \setminus P(X(t'))$, ce qui montre que la fonction $t \mapsto n(t)$ est croissante.

Pour conclure, il nous suffit de voir que si $z' \in P(X(t))$ est tel que $h_{z'}$ n'est pas identiquement nulle, alors on a $n(t,z') \leq n(t)$: mais ceci est évident, car, pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $n(t,z') = n(t-\epsilon,z')$, et $z' \in D_{t_o}^{n-1} \setminus P(X(t-\epsilon))$; par conséquent, $n(t,z') \leq n(t-\epsilon) \leq n(t)$.

Remarque. En appliquant la formule de Jensen pour les fonctions d'une variable complexe, on peut voir directement que le premier membre de (IV.8) est majoré par une fonction intégrable de $(t,\theta_1,\dots,\hat{\theta}_p,\dots,\theta_n)$, indépendante de ϵ, ce qui permet d'obtenir

(IV.7) sans utiliser le lemme IV.3.

La formule (IV.4) donne aussitôt une formule de Jensen-Poisson pour les fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{D^n}$:

Soit f une telle fonction, $f \neq 0$, et considérons le courant positif (c.f. [9], chap. VII)

$$\Theta^f = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \Theta^f_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k = 2i\, \partial\bar{\partial} \log |f|.$$

Si $f(0) \neq 0$, la formule de Jensen, pour $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$, s'écrit :

$$\text{(IV.10)} \quad \begin{aligned} &\int_{[0,2\pi]^n} \log |f(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})|\, d\theta_1 \ldots d\theta_n - (2\pi)^n \log |f(0)| \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \Big\{ \sum_{p=1}^n \int_{V_p(t,0)} \Theta^f_{pp}(\zeta) d\zeta_p \wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j \neq p} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j} \Big\}, \end{aligned}$$

où $V_p(t,0) = \Big\{ (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n \; ; \; |\zeta_p| < t, \; |\zeta_j| = t, \; 1 \leq j \leq n, \; j \neq p \Big\}$.

Si $z = (z_1,\ldots,z_n) \in D^n \setminus Z(f)$, en appliquant (IV.10) à la fonction $f \circ \varphi_z$, où $\varphi_z = (\varphi_{z_1},\ldots,\varphi_{z_n})$ est la transformation conforme de D^n définie par $\varphi_{z_j}(\zeta_j) = \dfrac{z_j - \zeta_j}{1 - \bar{z}_j \zeta_j}$, on obtient, après un changement de variables, la proposition suivante :

PROPOSITION IV.2.(<u>Formule de Jensen-Poisson</u>). <u>Soit</u> f <u>une fonction holomorphe au voisinage de</u> $\overline{D^n}$, <u>non identiquement nulle, et soit</u> $z = (z_1,\ldots,z_n) \in D^n \setminus Z(f)$. <u>Alors</u> :

$$\text{(IV.11)} \quad \begin{aligned} &\int_{[0,2\pi]^n} \log |f(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})|\, P_z(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}) d\theta_1 \ldots d\theta_n - (2\pi)^n \log |f(z)| \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \Big\{ \sum_{p=1}^n \int_{V_p(t,z)} \Theta^f_{pp}(\zeta) d\zeta_p \wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j \neq p} \frac{(|z_j|^2 - 1)}{(1 - \bar{z}_j \zeta_j)(z_j - \zeta_j)} d\zeta_j \Big\}, \end{aligned}$$

<u>où</u> $V_p(t,z)$ <u>est la sous-variété de</u> D^n <u>définie par</u>

$$V_p(t,z) = \Big\{ (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in D^n \; ; \; \Big| \frac{z_p - \zeta_p}{1 - \bar{z}_p \zeta_p} \Big| < t, \; \Big| \frac{z_j - \zeta_j}{1 - \bar{z}_j \zeta_j} \Big| = t \;\; \underline{\text{pour}} \;\; 1 \leq j \leq n, \; j \neq p \Big\},$$

<u>et</u> $P_z(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})$ <u>désigne le noyau de Poisson classique du polydisque</u>.

<u>Remarque</u>. La formule (IV.11) reste vraie si $f(z) = 0$ et si $Z(f)$ ne contient pas l'image par la transformation conforme φ_z de l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène irréductible P tel que $T(Z(P)) =]0,1[$, les deux membres de (IV.11) étant alors égaux à $+\infty$. Notons que s'il n'en est pas ainsi, la formule peut être fausse :

par exemple, dans D^2, si on prend $f(z_1,z_2)=z_1-z_2$, la formule (IV.10) est évidemment fausse, le deuxième membre étant nul.

III. APPLICATION AUX ZEROS DES FONCTIONS DE CLASSE NEVANLINNA.

Soit f une fonction holomorphe dans D^n, $f\not\equiv 0$. En utilisant les notations de la fin du paragraphe précédent, il résulte du théorème IV.2 que si f est dans la classe de Nevanlinna $N(D^n)$, l'ensemble des zéros de f vérifie la condition suivante :

$$\text{(IV.12)} \qquad \int_0^1 dt\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{V_p(t,0)} \Theta^f_{pp}(\zeta)\,d\zeta_p\wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j\neq p}\frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\right\}<+\infty .$$

Il n'est pas difficile de voir que si $Z(f)$ vérifie (IV.12) alors il vérifie aussi la condition de Blaschke généralisée. Nous allons montrer que cette dernière condition est en fait satisfaite par toute fonction de la classe $N_1(D^n)$ que nous avons définie dans l'introduction.

Soit $f\in N_1(D^n)$, et, de la même manière que pour la démonstration de la formule de Jensen, considérons une famille φ_ϵ, $\epsilon>0$, de fonctions pluri-sous-harmoniques de classe C^∞ qui converge vers $\log|f|$ en décroissant, et, pour $t<1$ (et ϵ assez petit), posons

$$\lambda_\epsilon(t)=\int_{\partial(D^n_t)}\varphi_\epsilon(z)\,d\lambda(z)$$
$$=\sum_{p=1}^{n}\int_{[0,t]^{n-1}} u_1du_1\ldots\widehat{u_pdu_p}\ldots u_ndu_n\left\{\int_{[0,2\pi]^{n-1}} d\theta_1\ldots\widehat{d\theta_p}\ldots d\theta_n\left[\int_0^{2\pi}\varphi_\epsilon(u_1e^{i\theta_1},\ldots,u_{p-1}e^{i\theta_{p-1}},te^{i\theta_p},\right.\right.$$
$$\left.\left. u_{p+1}e^{i\theta_{p+1}},\ldots u_ne^{i\theta_n})\,d\theta_p\right]\right\}.$$

Par un calcul direct semblable à celui du lemme IV.2, on obtient :

$$\lambda'_\epsilon(t)=\frac{4}{t}\sum_{p=1}^{n}\int_{D^n_t}\frac{\partial^2\varphi_\epsilon}{\partial z_p\partial\bar{z}_p}(z)\,d\lambda(z)+2t\sum_{1\leq j<k\leq n}\int_{\Delta_{jk}(t)}\varphi_\epsilon(z)\,d\lambda(z),$$

où $\Delta_{jk}(t)=\left\{(z_1,\ldots,z_n)\in D^n\ ;\ |z_j|=|z_k|=t,\ |z_q|<t, \text{ pour } q\neq i,j\right\}$. Comme $\varphi_\epsilon\geq\log|f|$, les propriétés de sous-harmonicité de $\log|f|$ rappelés au début du paragraphe II impliquent que, pour $t\geq 1/2$ (et ϵ assez petit), et tous j et k, on a

$$\int_{\Delta_{jk}(t)} \varphi_\epsilon(z)d\lambda(z) \geq \int_{\Delta_{jk}(1/2)} \log|f(z)|d\lambda(z).$$

En intégrant par rapport à t la formule donnant $\lambda'_\epsilon(t)$, et en utilisant la minoration ci-dessus, on conclut qu'il existe une constante finie C, telle que, pour $\frac{1}{2} < r < 1$, et ϵ suffisamment petit, on a :

$$\int_{1/2}^{r} dt\left[\sum_{p=1}^{n}\int_{D_t^n} \frac{\partial^2\varphi_\epsilon}{\partial z_p \partial \bar{z}_p}(z)d\lambda(z)\right] \leq C+8\int_{\partial(D_r^n)} \varphi_\epsilon(z)d\lambda(z).$$

En utilisant le lemme de Fatou et un raisonnement similaire à celui fait pour la démonstration de la formule de Jensen, des propriétés bien connues de la mesure d'aire $d\sigma_X$ sur $X = Z(f)$ (c.f. [9], chap. VII), on conclut, en faisant tendre ϵ vers zéro, que :

$$\int_{1/2}^{r} dt\left[\int_{D_t^n\cap X} d\sigma_X\right] \leq C + 8\int_{\partial(D_r^n)} \log^+|f(z)|d\lambda(z).$$

En tenant compte du fait que l'aire de $D_{1/2}^n \cap X$ est finie (ce qui résulte d'ailleurs immédiatement du lemme IV.3), on a donc montré le proposition suivante :

PROPOSITION IV.3. a) <u>L'ensemble des zéros d'une fonction de la classe de Nevanlinna</u> $N(D^n)$ <u>vérifie la condition</u> (3,1).

b) <u>L'ensemble</u> X <u>des zéros d'une fonction de la classe</u> $N_1(D^n)$ <u>vérifie la condition de Blaschke, c'est-à-dire</u> :

$$\int_0^1 dt\left[\int_{D_t^n\cap X} d\sigma_X\right] < +\infty.$$

COROLLAIRE IV.3.1. <u>Il existe une fonction</u> $f \in N_1(D^n)$ <u>telle que</u> $X = Z(f)$ <u>soit une variété analytique qui n'est pas l'ensemble des zéros d'une fonction de</u> $N(D^n)$. <u>Autrement dit, la classe des ensembles de zéros des fonctions de</u> $N(D^n)$ <u>est strictement plus petite que la classe des ensembles de zéros de fonctions de</u> $N_1(D^n)$.

En effet, soit (a_i) une suite de points du disque unité ouvert du plan complexe telle que $\lim\limits_{i\to\infty} |a_i| = 1$, et soit $X_{(a_i)}$ la sous-variété analytique complexe de D^n définie par :

$$X_{(a_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ où } X_i = \{(z_1,\dots,z_n)\in D^n \ ; \ z_1+z_2=2a_i\},$$

chaque point de X_i étant affecté de la multiplicité 1. Calculons à quelle condition sur les (a_i), la variété $X_{(a_i)}$ vérifie (IV.12) :

Remarquons tout d'abord que $X_{(a_i)} = Y_{(a_i)} \times D^{n-2}$, où $Y_{(a_i)} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ est la sous-variété de D^2 définie par $Y_i = \{(z_1,z_2)\in D^2 \ ; \ z_1+z_2 = 2a_i\}$, $i\in\mathbb{N}$. On voit alors aussitôt que $X_{(a_i)}$ vérifie la condition (IV.12) si et seulement si $Y_{(a_i)}$ la vérifie aussi. Comme $Y_{(a_i)}$ est symétrique en z_1 et z_2 (et que l'aire d'un ensemble analytique complexe est égale à la somme des aires de ses projections sur les sous-espaces de coordonnées), elle vérifie (IV.12) si et seulement si elle est d'aire finie. Comme l'aire de Y_i est équivalente à $(1-|a_i|)^{3/2}$, on conclut donc que la variété $X_{(a_i)}$ vérifie la condition (IV.12) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-|a_i|)^{3/2} < +\infty.$$

L'existence de la fonction f du corollaire est alors une conséquence d'un résultat de M. Tsuij ([14], voir aussi W. Stoll [13] et E. Beller [1]) :

il existe une fonction analytique dans la disque unité du plan complexe g, telle que, d'une part, $\log^+|g|$ est intégrable dans le disque unité, et, d'autre part, si (α_i) est la suite des zéros de g, on a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-|\alpha_i|)^{3/2} = +\infty$. Le calcul fait ci-dessus montre donc que $X_{(\alpha_i)}$ ne peut être l'ensemble des zéros d'une fonctions de $N(D^n)$, mais c'est la variété des zéros de la fonction $f(z_1,\dots,z_n)=g((z_1+z_2)/2)$ qui est évidemment dans $N_1(D^n)$.

Pour $n=2$, il est clair que tout ensemble analytique d'aire finie vérifie la condition (IV.12). Pour $n \geq 3$, ceci est en général faux :

COROLLAIRE IV.3.2. Pour $n \geq 3$, il existe dans D^n des variétés analytiques de dimension pure $n-1$ d'aires finies qui ne vérifient pas la condition (IV.12), et, qui, par conséquent, ne sont pas des ensembles de zéros de fonctions de $N(D^n)$.

Nous faisons les calculs dans D^3. L'exemple choisi, est semblable à celui du corollaire 1 : soit (a_i) une suite de nombres réels positifs strictement plus petits que 1 telle que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 1$, et soit X la sous-variété de D^3 définie par :

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ où } X_i = \{(z_1,z_2,z_3) \in D^3 \ ; \ z_1+z_2+z_3 = 3a_i\},$$

chaque point de X_i étant affecté de la multiplicité 1.

Majorons tout d'abord l'aire A de X. Paramétrisons X_i par :

$$\begin{cases} z_1 = a_i+\zeta_1 \\ z_2 = a_i+\zeta_2 - \zeta_1 , \\ z_3 = a_i - \zeta_2 \end{cases}$$

(ζ_1,ζ_2) appartenant donc à l'ouvert Ω_i de $\mathbb{C}^2$ défini par :

$$\Omega_i = \{(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |a_i-\zeta_2| < 1, \ |a_i+\zeta_1| < 1 \text{ et } |a_i+\zeta_2-\zeta_1| < 1\}.$$

Soit $\Omega_i^2 = \{\zeta_2 \in \mathbb{C} \ ; \ |\zeta_2+2a_i| < 2$ et $|a_i-\zeta_2| < 1\}$. Alors, si $\zeta_2 \in \mathbb{C}$, l'ensemble des $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ tels que $(\zeta_1,\zeta_2) \in \Omega_i$ est non vide si et seulement si $\zeta_2 \in \Omega_i^2$, et, dans ce cas, cet ensemble est égal à $\Omega_i^1 = \{\zeta_1 \in \mathbb{C} \ ; \ |\zeta_1+a_i| < 1$ et $|a_i+\zeta_2-\zeta_1| < 1\}$.

Comme l'aire de $\Omega_i^1 =$ est majorée par $C_1\left(1 - \frac{|2a_i+\zeta_2|}{2}\right)^{3/2}$, l'aire A_i de X_i est majorée par

$$A_i \leq C_2 \int_{\Omega_i^2} (2-|2a_i+\zeta_2|)^{3/2} d\lambda(\zeta_2) = C_2 \int_{\{|\xi|<2\}\cap\{|\xi-3a_i|<1\}} (2-|\xi|)^{3/2} d\lambda(\xi)$$

$$\leq C_3(1-a_i)^3.$$

Par suite, il existe une constante absolue C telle que

$$\text{(IV.13)} \qquad A \leq C \sum_{i=1}^{\infty} (1-a_i)^3.$$

Minorons maintenant la condition (IV.12). Pour $(\theta_2,\theta_3) \in [0,2\pi]^2$, soit $n_i(t,\theta_2,\theta_3)$ le nombre de zéros de la fonction $z_1 \mapsto z_1 + te^{i\theta_2} + te^{i\theta_3} - 3a_i$ dans le disque D_t.

Compte tenu des symétries de X_i, il suffit de minorer l'intégrale $\int_0^1 dt\left\{\int_{[0,2\pi]^2} n_i(t,\theta_2,\theta_3)d\theta_2 d\theta_3\right.$. Remarquons d'abord que $|z_2| = t$, $|z_1| < t$ et $z_1+z_2+z_3 = 3a_i$ entraînent $|3a_i - z_3| < 2t$, ce qui, avec $|z_3| = t$, donne $3a_i < 3t$. Ainsi pour $t < a_i$ on a $n_i(t,\theta_2,\theta_3) \neq 0$, et est alors égal à 1, si et seulement si d'une part $\cos\theta_2 \geq \cos\theta_2(t) = 1-(t-a_i)\dfrac{3t+9a_i}{6a_i t}$ et, d'autre part, si θ_3 appartient à un arc dont la longueur est supérieure à $C_1(3t^2-9a_i^2+6a_i t\cos\theta_2)^{1/2}$. Par suite,

$$\int_{[0,2\pi]^2} n_i(t,\theta_2,\theta_3)d\theta_2 d\theta_3 \geq C_1 \int_0^{\theta_2(t)} (3t^2-9a_i^2+6a_i t\cos\theta_2)^{1/2} d\theta_2$$

$$\geq C_2 \int_{\cos\theta_2(t)}^1 (3t^2-9a_i^2+6a_i tu)^{1/2} du$$

$$\geq C_3(t-a_i)^{3/2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 dt\left\{\int_{[0,2\pi]^2} n_i(t,\theta_2,\theta_3)d\theta_2 d\theta_3\right\} \geq C_3 \int_{a_i}^1 (t-a_i)^{3/2} dt$$

$$= C_3(1-a_i)^{5/2}.$$

Finalement, pour que X satisfasse la condition (IV.12), il est nécessaire que :

$$\text{(IV.14)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (1-a_i)^{5/2} < +\infty.$$

La comparaison de (IV.13) et (IV.14) donne le corollaire IV.3.2.

<u>Remarque</u>. En reprenant les notations des deux corollaires précédents, si a_i, $i \geq 1$, est une suite de points du disque unité ouvert du plan complexe, telle que $\lim_{i\to\infty} |a_i| = 1$, soit $X^n_{(a_i)}$ la sous-variété de D^n définie par

$$X^n_{(a_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^n_i \,, \quad \text{avec} \quad X^n_i = \left\{(z_1,\dots,z_n) \in D^n \;;\; \sum_{k=1}^{n} z_k = n\, a_i\right\}.$$

Les calculs faits ci-dessus montrent que $X^2_{(a_i)}$ (resp. $X^3_{(a_i)}$) vérifie la condition (IV.12) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-|a_i|^2)^{3/2} < \infty \quad (\text{resp.} \ \sum_{i=1}^{\infty} (1-|a_i|^2)^{5/2} < +\infty).$$

En utilisant alors la caractérisation des zéros des classes $N_\alpha(D)$ rappelée au paragraphe 1 du chapitre I, on voit que si $\sum_{1}^{\infty} (1-|a_i|^2)^{3/2} < +\infty$ (resp. $\sum_{1}^{\infty} (1-|a_i|^2)^{5/2} < +\infty$), il existe $g^2 \in N_{-1/2}(D)$ (resp. $g^3 \in N_{1/2}(D)$) telle que l'ensemble des zéros de g^2 (resp. g^3) soit l'ensemble des a_i, $i \geq 1$.

Un calcul direct montre alors que la fonction

$$f^2(z_1,z_2) = g^2\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \quad (\text{resp.} \ f^3(z_1,z_2,z_3) = g^3\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

est dans la classe de Nevanlinna $N(D^2)$ (resp. $N(D^3)$), et par suite, $X^2_{(a_i)}$ (resp. $X^3_{(a_i)}$ est un zéro d'une fonction de la classe de Nevanlinna de D^2 (resp. D^3).

D'une manière générale, par des calculs similaires, on peut voir que la variété analytique $X^n_{(a_i)}$ est un zéro d'une fonction de la classe de Nevanlinna de D^n si et seulement si elle vérifie la condition (IV.12).

Nous terminons ce chapitre en donnant une proposition qui est une conséquence directe de la formule de Jensen :

PROPOSITION IV.4. <u>Soit</u> f <u>une fonction holomorphe dans</u> D^n, <u>non identiquement nulle</u>, <u>et soit</u> $\Theta^f = \sum \Theta^f_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k = 2i\partial\bar{\partial} \log|f|$, <u>le courant positif associé à</u> f. <u>Si l'ensemble des zéros de</u> f <u>vérifie la condition</u> (IV.12), il existe une fonction n-<u>sous-harmonique</u> $u \leq 0$, <u>définie dans</u> D^n <u>telle que</u> :

(i) $$\lim_{r\to 1} \int_{[0,2\pi]^n} |u(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n = 0$$

(ii) <u>pour</u> $1 \leq p \leq n$, $$\frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \bar{z}_p} = \Theta^f_{pp}.$$

Pour $s < 1$, et pour tout $z \in D^n$, posons,

$$u_s(z) = \frac{-1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(se^{i\theta_1},\dots,se^{i\theta_n})| P_z(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}) d\theta_1\dots d\theta_n + \log|f(sz)|,$$

où $P_z(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})$ est le noyau de Poisson. On a clairement $u_s(z) \leq 0$.

Remarquons tout d'abord que :

(IV.15) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r(\epsilon) < 1$ tel que, pour $r(\epsilon) \leq r < 1$, et pour tout $s \geq 1/2$, on a
$$\int_{[0,2\pi]^n} |u_s(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n \leq \epsilon.$$

En effet, en appliquant la formule de Jensen (2,1) il vient

$$\int_{[0,2\pi]^n} |u_s(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n$$
$$= \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(se^{i\theta_1},\dots,se^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(rse^{i\theta_1},\dots,rse^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n$$
$$= \int_{rs}^{s} \frac{dt}{t}\left\{\sum_{p=1}^{n} \int_{V_p(t,0)} \Theta^f_{pp}(\zeta) d\zeta_p \wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j\neq p} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\right\} + (2\pi)^n d_f \log\frac{1}{r}$$
$$\leq \int_{r/2}^{1} \frac{dt}{t}\left\{\sum_{p=1}^{n} \int_{V_p(t,0)} \Theta^f_{pp}(\zeta) d\zeta_p \wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j\neq p} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\right\} + (2\pi)^n d_f \log\frac{1}{r}.$$

(IV.15) résulte donc aussitôt de l'hypothèse (IV.12) faite sur Θ^f.

Montrons maintenant que :

(IV.16) $$\sup_{1/2\leq s<1} \int_{D^n} |u_s(z)|\, d\lambda(z) < \infty .$$

Pour cela nous utilisons le lemme suivant :

LEMME IV.4. <u>Soit</u> g <u>une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>et s'annulant à l'origine avec une multiplicité égale à</u> μ_o. <u>Alors</u>,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{Log} t} \int_{[0,2\pi]^n} \log |g(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n = (2\pi)^n \mu_o$$

La démonstration de ce lemme est très simple : soit $D^n_{t_o}$ un polydisque dans lequel la série de Taylor de g, $g = \sum_{\mu\geq\mu_o} P_\mu$, les P_μ étant des polynômes homogènes de degré μ, est normalement convergente. Pour $t<t_o$ et $\theta \in [0,2\pi]$, on a :

$$g(te^{i(\theta_1+\theta)},\dots,te^{i(\theta_n+\theta)}) = (te^{i\theta})^{\mu_o}\left[P_{\mu_o}(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}) + \sum_{\mu>\mu_o} (te^{i\theta})^{\mu-\mu_o} P_\mu(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})\right].$$

Si on note $n(s,\theta_1,\dots,\theta_n)$ le nombre de zéros dans le disque $|\zeta|<s$ de la fonction holomorphe

$$\zeta \longrightarrow P_{\mu_o}(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}) + \sum_{\mu>\mu_o} \zeta^{\mu-\mu_o} P_\mu(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}),$$

la formule de Jensen pour les fonctions d'une variable complexe donne :

$$\int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|g(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n = (2\pi)^n \mu_o \operatorname{Log} t + \int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|P_{\mu_o}(e^{i\theta_1},\dots\dots, e^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n + \int_{[0,2\pi]^n}\int_0^t \frac{n(s,\theta_1,\dots,\theta_n)}{s}\, ds\, d\theta_1\dots d\theta_n .$$

Or pour presque tout $(\theta_1,\dots,\theta_n)$, on a $n(s,\theta_1,\dots,\theta_n) = 0$ pour s assez voisin de zéro et par suite la fonction $t \longrightarrow \int_0^t \frac{n(s,\theta_1,\dots,\theta_n)}{s}\, ds$ converge vers zéro en décroissant lorsque $t \longrightarrow 0$. Il en résulte donc que :

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|g(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n - (2\pi)^n \mu_o \operatorname{Log} t\right] = \int_{[0,2\pi]^n} \operatorname{Log}|P_{\mu_o}(e^{i\theta_1},\dots\dots,e^{i\theta_n})|\, d\theta_1\dots d\theta_n,$$

ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant (IV.16). On a :

$$\int_{D^n} |u_s(z)|\,d\lambda(z) = -\int_{]0,1[^n} u_1 du_1 \dots u_n du_n \left\{ \int_{[0,2\pi]^n} u_s(u_1 e^{i\theta_1},\dots,u_n e^{i\theta_n})\,d\theta_1\dots d\theta_n \right\}$$

$$= \int_{]0,1[^n} u_1 du_1 \dots u_n du_n \left\{ \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(se^{i\theta_1},\dots,se^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n\right.$$

$$\left. - \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(su_1 e^{i\theta_1},\dots,su_n e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right\}.$$

D'après le lemme (IV.4), il existe deux constantes positives $C < +\infty$ et $0 < \delta < 1/2$ telles que, pour $0 < t < \delta$, on a,

$$\left| \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right| \le C \log \frac{1}{t}.$$

En utilisant alors la formule (IV.4) et les propriétés de sous-harmonicité de $\log|f|$ rappelés au début du paragraphe II, l'hypothèse faite sur l'ensemble des zéros de f permet d'écrire la majoration suivante :

$$\int_{D^n} |u_s(z)|\,d\lambda(z) \le$$

$$\le \int_{\{\inf_i u_i > \delta\}} u_1 du_1 \dots u_n du_n \left[\int_{[0,2\pi]^n} \log|f(se^{i\theta_1},\dots,se^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(s\delta e^{i\theta_1},\dots,s\delta e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right]$$

$$+ \int_{\{\inf_i u_i \le \delta\}} u_1 du_1 \dots u_n du_n \left[\int_{[0,2\pi]^n} \log|f(se^{i\theta_1},\dots,se^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n - \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(\tfrac{1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\tfrac{1}{2}e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right]$$

$$+ \left| \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(\tfrac{1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\tfrac{1}{2}e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right|$$

$$+ \int_{\{\inf_i u_i \le \delta\}} u_1 du_1 \dots u_n du_n \left| \int_{[0,2\pi]^n} \log|f((\inf_i u_i)e^{i\theta_1},\dots,(\inf_i u_i)e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right|$$

$$\le \frac{\pi}{2^{n-2}} \int_{\delta/2}^{1} \frac{dt}{t} \left\{ \sum_{p=1}^{n} \int_{V_p(t,0)} \Theta^f_{pp}(\zeta)\,d\zeta_p \wedge d\bar{\zeta}_p \bigwedge_{j\neq p} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j} \right\} + 2\pi^n d_f \log \frac{2}{\delta}$$

$$+ \left| \int_{[0,2\pi]^n} \log|f(\tfrac{1}{2} e^{i\theta_1},\dots,\tfrac{1}{2}e^{i\theta_n})|\,d\theta_1\dots d\theta_n \right| + C \int_{]0,1[^n} \log\left(\frac{1}{\inf_i u_i}\right) du_1\dots du_n$$

$$= C_1 + C_2 + C_3,$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes qui ne dépendent pas de s. D'où (IV.16).

Achevons maintenant la démonstration de la proposition IV.4. De (IV.16) il résulte qu'il existe une suite s_k tendant vers 1 telle que u_{s_k} converge faiblement vers u dans le bidual de $L^1(D^n)$. En particulier, u_{s_k} converge vers u dans l'espace $\mathcal{D}'(D^n)$ des distributions sur D^n. Remarquons maintenant que, pour tout $s < 1$, tout indice p, et toute $\psi \in C_o^\infty(D^n)$, on a, au sens des distributions,

$$< \frac{\partial^2 u_s}{\partial z_p \partial \bar{z}_p}, \psi > = < \Theta^f_{pp}, \frac{1}{s^{2n-2}} \psi(\frac{z}{s}) >,$$

ce qui montre que, quand s tend vers 1, $\frac{\partial^2 u_s}{\partial z_p \partial \bar{z}_p}$ converge vers Θ^f_{pp} dans $\mathcal{D}'(D^n)$. Par conséquent, u est une fonction n-sous-harmonique dans D^n qui vérifie la condition (ii) de la proposition. D'autre part pour tout $z \notin Z(f)$, il existe un voisinage de z dans lequel (pour s_k suffisamment voisin de 1), les fonctions u_{s_k} et u sont n-harmoniques ; la convergence faible de u_{s_k} vers u et la propriété de la moyenne pour les fonctions n-harmoniques, entraînent donc que $u_{s_k}(z)$ converge vers $u(z)$. Ceci étant vrai pour tout $z \notin Z(f)$, la condition (i) de la proposition résulte de (IV.15).

REFERENCES

[1] BELLER, E.- Zeros of A^p functions and related classes of analitics functions. Israel Journal of Math., vol. 22, n° 1, 1975, p. 68-80.

[2] BRUHAT, F.- Représentations induites des groupes de Lie. Bul. Soc. Math. France, t. 84, 1956, p. 97-205.

[3] CHARPENTIER, Ph. Sur la formule de Jensen et les zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque. Math. Ann. 249 (1979), 27-46.

[4] CHEE, P.S.- The Blaschke condition for bounded holomorphic functions. Trans. of the Amer. Math. Soc., t. 148, 1970, p. 249-263.

[5] CHEE, P.S.- On the generalized Blaschke condition. Trans. of the Amer. Math. Soc., t. 152, 1970, p. 227-231.

[6] GUNNING, C.R. and ROSSI, H.- Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, 1965.

[7] HIRONAKA, H. Subanalitic sets. Number theory algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Y. Akizuki, kinokuniya, Tokyo, 1973, p. 453-493.

[8] HORMANDER, L.- An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand 1967.

[9] LELONG, P.- Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, les presses de l'Université de Montréal, 1968 (Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1967, n° 28).

[10] MALLIAVIN, P.- Sur la répartition des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans le polydisque. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 313.

[11] NARASIMAHN, R.- Introduction to the theory of analytic spaces. Lecture note in Math. , no. 25 (1966).

[12] RONKIN, L. I. Introduction to the theory of entire functions of several variables. Transl. Math. Monographs 44 (1974).

[13] STOLL, W. Holomorphic functions of finite order in several complex variables. Reg. Conf. series in Math. Amer. Math. Soc. 21 (1974).

[14] TSUIJ, M. Canonical product for a meromorphic function in a unit circle. J. Math. Soc. Japan 8 (1956), p. 7.