

THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

ROLCI DE ALMEIDA CIPOLATTI

Considérations sur un problème non linéaire : l'équilibre d'un plasma confiné, 1982

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

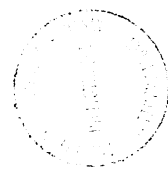
Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3e CYCLE

SPECIALITE : ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

PAR

ROLCI DE ALMEIDA CIPOLATTI



36.808

SUJET : CONSIDERATIONS SUR UN PROBLEME NON LINEAIRE : L'EQUILIBRE D'UN PLASMA
CONFINE.

soutenue le 28 JUIN 1982 devant la Commission d'examen

M. R. TEMAM Président

Mme J. MOSSINO

MM. A. DAMLAMIAN

..... H. BERESTYCKI

*Pour moi, l'objectif dans la vie,
c'est la recherche...*

... de cet objectif.

R.C.

Je voudrais exprimer ma gratitude à :

R. TEMAM, pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. C'est un honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury.

J. MOSSINO, à qui est due toute l'orientation de ce travail. Ses soins et ses conseils m'ont guidé pour le mener à bien.

A. DAMLAMIAN, pour m'avoir aidé si généreusement et pour avoir accepté de participer au Jury.

H. BERESTYCKI, dont les travaux sur le sujet m'ont été très utiles, pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Et tant d'autres amis qui, par leurs encouragements, leur solidarité, m'ont permis de garder le moral toujours assez élevé, condition nécessaire (surtout !) pour la réalisation d'une Thèse.

Je remercie également Madame Le Meur qui a assuré la dactylographie du manuscrit et a réussi à le rendre présentable, ainsi que les membres de l'Imprimerie du Département de Mathématiques qui ont assuré le tirage.

J'exprime finalement ma reconnaissance au Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil, dont le soutien financier a permis la réalisation de la présente Thèse.

S O M M A I R E

<u>INTRODUCTION.</u>	1
<u>CHAPITRE I</u> : Existence, unicité et régularité.	3
§ I.1 : Existence de solutions.	3
§ I.2 : Unicité de solution.	13
§ I.3 : Remarques sur la régularité des solutions.	23
§ I.4 : Exemples.	25
<u>CHAPITRE II</u> : Approximation des solutions.	38
§ II.1 : Une méthode pour l'approximation.	38
§ II.2 : Réduction à la dimension finie.	42
§ II.3 : Une estimation d'erreur.	56
§ II.4 : Approximation par la méthode des éléments finis.	62
<u>CHAPITRE III</u> : Deux inégalités isopérimétriques et Applications.	72
§ III.1 : Une inégalité isopérimétrique et applications.	72
§ III.2 : La deuxième inégalité et applications.	91
<u>BIBLIOGRAPHIE.</u>	101



INTRODUCTION

Dans ce travail nous nous pencherons sur quelques questions concernant le problème suivant, posé dans un ouvert borné et régulier Ω de frontière $\partial\Omega$ de $\mathbb{R}^N$:

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K u & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \phi & \text{sur } \partial\Omega, \theta \in \mathbb{R} \text{ inconnu} \\ \lambda \int P_K(u) \psi = I, \quad I > 0 \text{ donné,} \end{cases}$$

où K est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$, $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ donné et ψ sa relevée harmonique (c.a.d., $-\Delta\psi = 0$ dans Ω et $\psi = \phi$ sur $\partial\Omega$).

Lorsque $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ et $\phi \equiv 1$ sur $\partial\Omega$, nous retrouvons le problème introduit par R. Temam [34] et étudié également par de nombreux auteurs (cf. Berestycki-Brézis [3], J.P. Puel [26], A. Damlamian [7], M. Sermange [28]) :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ & \text{dans } \Omega \\ u = \theta & \text{constante inconnue sur } \partial\Omega \\ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dr = I. \end{cases}$$

Ce dernier a son origine dans les recherches de l'énergie par la fusion magnétique. Plus précisément, c'est un problème mathématique correspondant à une modélisation simplifiée pour l'équilibre d'un plasma confiné à l'intérieur d'une machine Tokamak.

Notre travail s'organise en trois chapitres :

Dans le premier, nous présentons une formulation équivalente de (*) (correspondant à un découplage), pour laquelle on étudie les questions d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Nous donnons aussi quelques exemples qui illustrent les résultats

théoriques. Ces résultats ont été présentés dans [6] et feront l'objet d'une publication ultérieure.

Dans le deuxième, nous étudions l'approximation numérique du problème (sous la deuxième formulation). Nous proposons un algorithme pour le calcul des solutions, le problème étant discrétisé par une méthode d'éléments finis. Une estimation d'erreur pour certaines valeurs de λ est aussi établie.

Le troisième chapitre donne des résultats qualitatifs pour les solutions de deux exemples correspondant à des problèmes à frontières libres. Ce sont des inégalités de type isopérimétrique qui s'inspirent des travaux de J. Mossino [21] et I. Stackgold [32].

CHAPITRE I

EXISTENCE, UNICITE ET REGULARITE

§ I-1. EXISTENCE DE SOLUTIONS.

Etant donné Ω ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, on considère le problème :

Déterminer u défini dans Ω à valeurs réelles tel que

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K(u) & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \phi & \text{sur } \partial\Omega, \theta \in \mathbb{R} \text{ inconnu} \\ \lambda \int P_K(u) \psi = I, & I > 0 \text{ donné,} \end{cases}$$

où P_K est l'opérateur de projection sur un ensemble convexe fermé K de $L^2(\Omega)$, $\lambda \neq 0$ est un paramètre, $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ (ϕ non identiquement nulle) et $\psi \in H^1(\Omega)$ sont données et liées par

$$\begin{cases} -\Delta \psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi/\Gamma = \phi \end{cases}$$

Définissons

$$(1.2) \quad K_\lambda = K \cap \{v \in L^2(\Omega) ; \int v \psi = I/\lambda\}$$

K_λ est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ (éventuellement vide).

Une condition nécessaire pour que (1.1) ait une solution est :

$$(1.3) \quad K_\lambda \neq \emptyset.$$

Une forme affaiblie de (1.3) est

$$(1.3a) \quad \inf_{v \in K} \int v \psi \leq I/\lambda \leq \sup_{v \in K} \int v \psi$$

Nous allons voir que la condition (1.3a) est aussi "presque" suffisante (cf. Théorème I.1).

I-1.1 : Une formulation équivalente.

Pour tout λ satisfaisant (1.3), on considère le problème :
déterminer $(\omega, \theta) \in H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$ tel que

$$(1.4) \quad \begin{cases} -\Delta \omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega & \text{dans } \Omega \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lambda \int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I. \end{cases}$$

Alors nous avons :

LEMME I.1 : (1.1) a une solution $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si

i) (1.3) est satisfaite

ii) (1.4) a une solution $(\omega, \theta) \in H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$

De plus les solutions de (1.1) et (1.4) sont liées par

$$\begin{cases} u = \omega + \theta \psi \\ P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega). \end{cases}$$

Démonstration : Supposons que (1.1) a une solution (u, θ) . Comme

$$\int P_K(u) \psi = I/\lambda$$

nous avons

$$(1.5) \quad P_K(u) \in K_\lambda$$

Soit $\omega = u - \theta \psi$. Alors $\omega \in H^1_0(\Omega)$ et

$$\lambda \int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I.$$

Pour montrer que ω est solution de (1.4) il suffit de montrer que

$$P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega).$$

Or, d'après la définition de projection,

$$(1.6) \quad (u - P_K(u) ; v - P_K(u)) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

$$(1.7) \quad (\omega - P_{K_\lambda}(\omega) ; v - P_{K_\lambda}(\omega)) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Vu (1.5), en substituant $v = P_{K_\lambda}(\omega)$ et $v = P_K(u)$ dans (1.6) et (1.7) respectivement, on obtient :

$$\|P_K(u) - P_{K_\lambda}(\omega)\|_L^2 + \theta \left(\int P_{K_\lambda}(\omega) \psi - \int P_K(u) \psi \right) \leq 0$$

et on conclut

$$P_K(u) = P_{K_\lambda}(\omega).$$

Les mêmes arguments s'appliquent pour la réciproque.

Nous allons traiter maintenant l'existence de solutions pour le problème (1.4).

I-1.2 : Un résultat d'existence.

On fait l'hypothèse :

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v \psi < \sup_{v \in K} \int v \psi = \ell_2$$

En outre, on suppose que K satisfait la condition suivante :

$$(HE) \quad \forall \ell \in]\ell_1, \ell_2[, \{v \in K ; \int v \psi = \ell\} \text{ est borné dans } L^1(\Omega).$$

Posons :

$$\Lambda = \{\lambda \neq 0 ; \ell_1 < I/\lambda < \ell_2\}. \text{ Alors :}$$

THEOREME I-1 : *Le problème (1.4) admet au moins une solution $(\omega, \theta) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Si $I/\lambda > \ell_2$ ou $I/\lambda < \ell_1$, (1.4) n'admet pas de solution.*

Démonstration : Elle utilise de façon essentielle le

LEMME I-2 : Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, la fonction

$$\tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi$$

est lipschitzienne et croissante dans $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tau_u(\theta) = \ell_1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \tau_u(\theta) = \ell_2 .$$

Démonstration du Lemme I-2 :

i) τ_u est lipschitzienne :

$$\begin{aligned} |\tau_u(\theta_1) - \tau_u(\theta_2)| &\leq \|P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq \|\psi\|_{L^2}^2 |\theta_1 - \theta_2| \end{aligned}$$

ii) τ_u est croissante :

$$\begin{aligned} (\theta_1 - \theta_2) (\tau_u(\theta_1) - \tau_u(\theta_2)) &= \int [P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)] (\theta_1 - \theta_2) \psi \\ &= \int [P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi)] [(u+\theta_1\psi) - (u+\theta_2\psi)] \geq 0 \end{aligned}$$

iii) D'après i) et ii), il existe

$$\ell_1' = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tau_u(\theta) \quad \text{et} \quad \ell_2' = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \tau_u(\theta)$$

Soit $v \in K$ et $\theta_n \uparrow +\infty$. Alors

$$\int (u+\theta_n\psi - P_K(u+\theta_n\psi)) (v - P_K(u+\theta_n\psi)) \leq 0 \quad \forall n .$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta_n \int (v - P_K(u+\theta_n\psi)) \psi &\leq - \int [u - P_K(u+\theta_n\psi)] [v - P_K(u+\theta_n\psi)] \\ &\leq \frac{1}{4} \|u+v\|_{L^2}^2 - \int uv < +\infty \end{aligned}$$

Comme

$$\int (v - P_K(u + \theta_n \psi)) \psi \rightarrow \int v \psi - \ell'_2$$

et $\theta_n \uparrow +\infty$ on déduit que

$$\int v \psi \leq \ell'_2 \quad \forall v \in K$$

Donc

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v \psi \leq \ell'_2$$

Comme $v_n = P_K(u + \theta_n \psi)$ satisfait

$$\int v_n \psi \rightarrow \ell'_2$$

on obtient

$$\ell'_2 = \sup_{v \in K} \int v \psi = \ell_2.$$

D'une façon analogue,

$$\ell'_1 = \inf_{v \in K} \int v \psi = \ell_1.$$

L'existence découle alors des Lemmes suivants :

LEMME I-3. On considère le problème d'optimisation suivant

$$\mathcal{P} : \inf \{e(\omega) ; \omega \in H^1_0(\Omega)\}$$

avec $e(\omega) = \frac{1}{2} \int |\nabla \omega|^2 - \lambda \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega$, K_λ étant donné par (1.2).

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, le problème $\mathcal{P}$ admet au moins une solution.

Démonstration : On la fera en trois étapes.

1ère étape : $K_\lambda \neq \emptyset$

C'est une conséquence du Lemme I-2 ; pour $u = 0$, il existe

θ_0 tel que

$$\tau_o(\theta_o) = \int P_K(\theta_o \psi) \psi = I/\lambda$$

Donc $P_K(\theta_o \psi) \in K_\lambda$

2ème étape : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} \int |\nabla \omega|^2 - c \quad \forall \omega \in H_O^1(\Omega).$$

On considère deux cas :

i) $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} e(\omega) &= \frac{1}{2} \int |\nabla \omega|^2 - \lambda \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - \lambda \int \omega P_{K_\lambda} \omega + \frac{\lambda}{2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - \lambda \|\omega\|_{L^p} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^{p^*}} + \frac{\lambda}{2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

pour tout $p, p^*, 1 < p, p^* < +\infty$ tels que $1/p + 1/p^* = 1$.

Soit $p = \frac{2N}{N-2}$; si $N \geq 3$ ou $p > 2$ si $N = 2$. Alors, pour tout $\omega \in H_O^1(\Omega)$

$$\|\omega\|_{L^p} \leq c_1 \|\nabla \omega\|_{L^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} e(\omega) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - c_2 \|\nabla \omega\|_{L^2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^{p^*}} + \frac{\lambda}{2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - \frac{c_2^\alpha}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - \frac{c_2}{2\alpha} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^{p^*}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Si on choisit $\alpha = 1/2c_2$, alors

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 - c_2^2 \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^{p^*}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^2.$$

Soit $s = 2/p$. Alors $0 < s < 1$ et $1-s + s/2 = 1/p^*$, et donc

$$\|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^{p^*}} \leq \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^1}^{1-s} \|P_{K_\lambda} \omega\|_{L^2}^s$$

ce qui entraîne

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - c_2^2 |P_{K_\lambda} \omega|_{L^1}^{2(1-s)} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^{2s} + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2$$

Comme K satisfait (HE), il existe c_3 tel que

$$|P_{K_\lambda} \omega|_{L^1} \leq c_3.$$

Donc

$$e(\omega) \geq \frac{1}{4} |\nabla \omega|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 - c_4 |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^{2s}$$

Comme $0 < s < 1$, il existe c tel que

$$\frac{\lambda}{2} \xi^2 - c_4 \xi^{2s} \geq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

et

$$(1.8) \quad e(\omega) \geq \frac{1}{4} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - c$$

ii) $\lambda < 0$:

Soit $g \in K_\lambda$ fixé. Alors, comme

$$\int (\omega - P_{K_\lambda} \omega) (g - P_{K_\lambda} \omega) \leq 0 \quad \forall \omega$$

on déduit

$$\int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega \geq \frac{1}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 + \int (\omega - P_{K_\lambda} \omega) g$$

Or,

$$e(\omega) = \frac{1}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 + c_1 \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

avec $c_1 = -\lambda > 0$. Donc,

$$\begin{aligned} e(\omega) &\geq \frac{1}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 + c_1 \int (\omega - P_{K_\lambda} \omega) g + \frac{c_1}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - c_1 |\omega|_{L^p} |g|_{L^{p^*}} - c_1 |g|_{L^2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2} + \frac{c_1}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - c_2 |\nabla \omega|_{L^2} |g|_{L^{p^*}} - c_1 |g|_{L^2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2} + \frac{c_1}{2} |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$e(\omega) \geq \frac{1}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - \frac{c_2 \alpha}{2} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - \frac{c_2}{2\alpha} |g|_{L^{p^*}}^2 - \frac{c_1}{2} |g|_{L^2}^2$$

En choisissant $\alpha = 1/2 c_2$ on obtient

$$(1.8a) \quad e(\omega) \geq \frac{1}{4} |\nabla \omega|_{L^2}^2 - c$$

avec

$$c = c_2^2 |g|_{L^{p^*}}^2 - \frac{c_1}{2} |g|_{L^2}^2$$

3ème étape : il existe ω_0 solution de $\mathcal{P}$:

Soit $\{\omega_m\}$ une suite minimisante

$$\omega_m \in H_O^1(\Omega) \text{ et } e(\omega_m) \rightarrow \inf e.$$

D'après (1.8), $\{\omega_m\}$ est borné dans $H_O^1(\Omega)$. Donc il existe une sous-suite (encore notée $\{\omega_m\}$) et $\omega_0 \in H_O^1(\Omega)$ tels que

$$\omega_m \rightharpoonup \omega_0 \text{ dans } H_O^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$\omega_m \rightarrow \omega_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ forte.}$$

Comme

$$\int |\nabla \omega_0|^2 \leq \liminf_m \int |\nabla \omega_m|^2$$

et

$$\int (\omega_0 - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega_0) P_{K_\lambda} \omega_0 = \lim \int (\omega_m - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega_m) P_{K_\lambda} \omega_m$$

on conclut

$$e(\omega_0) \leq \liminf_m e(\omega_m) = \inf e.$$

Donc ω_0 est une solution de $\mathcal{P}$.

LEMME I-4. La fonctionnelle $J : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \int (v - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} v) P_{K_\lambda} v$$

est convexe et Fréchet-différentiable dans $L^2(\Omega)$ avec différentielle

$$J'(v) = P_{K_\lambda} v \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Démonstration : On trouve dans Zarantonello [38] une démonstration de ce lemme (cf. aussi [15]). Nous donnons ici une autre démonstration, inspirée de B. Mercier [18], qui utilise la théorie des sous-gradients.

Considérons la fonctionnelle convexe et s.c.i.

$$j : L^2(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

$$j(v) = \frac{1}{2} \int v^2 + \chi_{K_\lambda}(v)$$

avec χ_{K_λ} la fonction indicatrice de K_λ . La fonctionnelle j^* , polaire de j , est définie par

$$j^*(v^*) = \sup_{v \in L^2} \{ \int v^* v - j(v) \}.$$

Donc

$$j^*(v^*) = \sup_{v \in K_\lambda} \{ \int v^* v - \frac{1}{2} \int v^2 \}.$$

Or le sup est atteint au point $\bar{v}$ si et seulement si

$$v^* \in \bar{v} + \partial \chi_{K_\lambda}(\bar{v}),$$

ce qui équivaut à

$$\bar{v} = P_{K_\lambda}(v^*)$$

Donc

$$j^*(v^*) = \int v^* P_{K_\lambda} v^* - \frac{1}{2} |P_{K_\lambda} v^*|^2 = J(v^*).$$

J étant la polaire d'une fonctionnelle convexe et s.c.i., elle est aussi convexe et s.c.i.. En outre, d'après Ekeland-Temam [9],

$$v^* \in \partial j(\bar{v}) \text{ si et seulement si } \bar{v} \in \partial j^*(v^*),$$

ce qui équivaut à dire, dans notre cas

$$\partial J(v^*) = \{ P_{K_\lambda} v^* \}.$$

Mais dire que la sous-différentielle d'une fonctionnelle convexe et s.c.i. J , à un point v^* , est composée d'un seul élément équi-

vaut à dire que J est, à ce point Gateaux-différentiable. Donc J est G -différentiable dans $L^2(\Omega)$ avec $J' = P_{K_\lambda}$.

De plus, comme P_{K_λ} est un opérateur continu dans $L^2(\Omega)$ on conclut que J est F -différentiable.

Revenons maintenant au théorème I-1.

Si K satisfait (HE) et $\lambda \in \Lambda$, alors, d'après le Lemme I-3, il existe ω_0 solution de

$$\mathcal{P} : \inf_{\omega \in H_0^1(\Omega)} \{e(\omega) = \frac{1}{2} \int |\nabla \omega|^2 - \lambda \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega\}$$

D'après le Lemme I-4, $e(\omega)$ est F -différentiable dans $H_0^1(\Omega)$ avec

$$e'(\omega) = -\Delta \omega - \lambda P_{K_\lambda} \omega$$

Donc

$$\begin{cases} -\Delta \omega_0 = \lambda P_{K_\lambda} \omega_0 \\ \omega_0|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

D'après le Lemme I-2, il existe θ_0 tel que

$$\tau_{\omega_0}(\theta_0) = \int P_K(\omega_0 + \theta_0 \psi) \psi = I/\lambda$$

Donc (ω_0, θ_0) satisfait (1.4).

Les résultats de non existence sont immédiats d'après la condition (1.3).

REMARQUE I-1 : Dans le cas limite, c'est-à-dire, $I/\lambda = \ell_1$ ou $I/\lambda = \ell_2$, il peut ou non y avoir une solution. Voir les exemples au paragraphe I.4.

REMARQUE I-2 : Lorsque K est un cône de sommet en 0 (voir exemple 1, § I-4), θ peut être calculé explicitement en fonction de ω de la manière suivante :

Pour tout $u \in L^2(\Omega)$ nous avons la décomposition

$$u = P_K u + P_{K^\perp} u \text{ (cf. Zarantonello [38])},$$

où $K^\perp$ désigne le cône orthogonal de K , défini par

$$K^\perp = \{v \in L^2(\Omega) ; \int v g \leq 0 \quad \forall g \in K\}$$

Soit $u = \omega + \theta \psi$ solution de (1.1). Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int P_K u P_{K^\perp} u = \int (u - P_K u) P_K u = \int (\omega + \theta \psi - P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega \\ &= \theta I/\lambda + \int (\omega - P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega, \end{aligned}$$

d'où nous obtenons

$$\theta = \frac{\lambda}{I} \int (P_{K_\lambda} \omega - \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

De plus, comme $-\Delta \omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega$ on obtient

$$\theta = \frac{\lambda}{I} \int (P_{K_\lambda} \omega - \omega) P_{K_\lambda} \omega = \frac{2}{I} e(\omega).$$

Il convient de remarquer aussi que, dans ce cas, l'unicité de ω entraîne l'unicité de θ et donc l'unicité de u , solution de (1.4).

§ I-2. UNICITE DE SOLUTION.

I-2.1 : Un lemme préliminaire.

Avant d'établir le résultat d'unicité nous montrons le

LEMME I-5. Les valeurs propres λ_i^* de

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \phi & \text{sur } \partial\Omega, \theta \text{ inconnue} \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi \, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

sont positives. Plus précisément

$$0 \leq \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* < \dots$$

avec

$$(1.10) \quad \lambda_1^* = \inf_{\substack{u \in W \\ u \neq 0}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}, \dots, \lambda_i^* = \inf_{\substack{u \in W \\ \int u u_j = 0 \\ j=1,2,\dots,i-1}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}, \dots$$

où $W = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\partial\Omega} = \theta\phi\}$ et u_j est une fonction propre correspondant à λ_j^* , $j = 1, 2, \dots, i-1$.

De plus nous avons $0 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_1$ avec $\lambda_1^* = 0$ si et seulement si ϕ est constante. Dans ce cas ($\phi \equiv cte$ non nulle)

$$\lambda_1 < \lambda_2^* \leq \lambda_2$$

où λ_1 et λ_2 désignent les deux premières valeurs propres du problème de Dirichlet homogène pour le laplacien.

Démonstration : Soit $L : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ l'opérateur défini par

$$Lf = u$$

avec u l'unique solution de

$$\int \nabla u \cdot \nabla v + \int uv = \int fv \quad \forall v \in W$$

Il est immédiat que u est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta\phi \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi = 0 \end{array} \right.$$

et que L est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact.

Soit donc $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$ les valeurs caractéristiques de L . Alors

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i^* \text{ est valeur propre de (1.10) si et seulement si} \\ \lambda_i^* = \mu_i - 1. \end{array} \right.$$

Si μ_i est valeur caractéristique de L , alors il existe $v \neq 0$ tel que $v = \mu_i Lv$. Donc v satisfait



$$(1.12) \quad \begin{cases} -\Delta v = (\mu_i - 1)v & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \phi = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int |\nabla v|^2 = (\mu_i - 1) \int v^2$$

ce qui entraîne $\mu_i \geq 1$, et, d'après (1.11)

$$\lambda_i^* \geq 0.$$

Or, L étant compact, auto-adjoint et strictement positif (ie, $(Lf; f) > 0 \quad \forall f \neq 0$) toutes ses valeurs propres $1/\mu_i$ sont simples (cf. Dieudonné [8]). Donc $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots$, et

$$0 \leq \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* < \dots$$

Pour montrer (1.10), nous remarquons que $1/\mu_i$ étant la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de L nous avons (cf. [8])

$$(1.13) \quad \begin{cases} 1/\mu_i = \|L\| = \sup_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{(Lf, f)}{|f|_{L^2}^2} = \sup_{\substack{f \in L^2 \\ |f|_{L^2} = 1}} (Lf; f) \\ 1/\mu_i = \sup_{\substack{f \in L^2(\Omega) \\ (f; v_k) = 0}} \frac{(Lf; f)}{|f|_{L^2}^2} \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \end{cases}$$

où v_j est la fonction propre correspondant à $1/\mu_j$.

Montrons que (1.13) nous donne (1.10).

Soit $\sigma = \inf \{ \int |\nabla u|^2 ; u \in W, |u|_{L^2}^2 = 1 \}$. Nous allons montrer que $\sigma = \lambda_1^*$. Soit

$$u_m \in W$$

une suite minimisante. Il existe donc $u_m \in H_O^1(\Omega)$ et $\theta_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_m = \omega_m + \theta_m \psi$$

Comme

$$\int |\nabla u_m|^2 \leq \text{cte}$$

il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int |\nabla \omega_m|^2 \leq \text{cte} \\ |\theta_m|^2 \leq \text{cte}. \end{array} \right.$$

Donc, on peut choisir une sous-suite notée encore u_m telle que

$$\omega_m \longrightarrow \omega \text{ dans } H_O^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$\theta_m \longrightarrow \theta \text{ dans } \mathbb{R}$$

Comme

$$H_O^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte}$$

$$\omega_m \longrightarrow \omega \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ forte,}$$

et donc

$$u_m \longrightarrow u = \omega + \theta\psi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De plus,

$$\int |\nabla u| \leq \liminf_m \left\{ \int |\nabla \omega_m|^2 + \theta_m^2 \int |\nabla \psi|^2 \right\}$$

et comme $|u|_{L^2} = 1$ on déduit

$$\int |\nabla u|^2 = \sigma.$$

En outre, puisque $u \rightarrow \int |\nabla u|^2$ est F-différentiable, on a

$$\int \nabla u \cdot \nabla v = \sigma \int uv \quad \forall v \in W, u \in W$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \sigma u \text{ dans } \Omega \\ u = \theta\phi \text{ sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi = 0 \end{array} \right.$$

ou encore

$$Lu = \frac{1}{1+\sigma} u.$$

Donc, d'après (1.13) (puisque $\int u^2 = 1$)

$$\frac{1}{1+\sigma} = (Lu; u) \leq \sup_{|f|=1} (Lf; f) = ||L|| = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\lambda_1^* + 1}$$

et $\sigma \geq \lambda_1^*$

Pour montrer que $\sigma \leq \lambda_1^*$, il suffit de remarquer que si u_1 est une fonction propre de (1.9) associée à λ_1^* et satisfaisant $\int |u_1|^2 = 1$, on a

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_1} = (Lu_1; u_1) \\ -\Delta u_1 + u_1 = \mu_1 u_1 \\ u_1 = \theta \phi \text{ sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n} \phi = 0 \end{cases}$$

Donc $\sigma \leq \int |\nabla u_1|^2 = \mu_1 - 1 = \lambda_1^*$.

D'une façon tout à fait analogue, nous montrons que

$$\lambda_1^* = \inf_{\substack{\int_{\partial\Omega} u = 0 \\ u \neq 0 \\ u \in W}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} = \inf_{\substack{u \in W \\ |u|_{L^2} = 1 \\ \int u v_j = 0}} \int |\nabla u|^2$$

L'estimation $\lambda_1^* \leq \lambda_1$ est une conséquence directe du fait que

$$H_0^1(\Omega) \subset W$$

D'autre part, si $\phi \equiv \text{cte}$, alors $\lambda_1^* = 0$ est valeur propre de (1.9).

Réciproquement, si $\lambda_1^* = 0$, $\mu_1 = 1$ et il existe $v \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \theta \phi \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \phi = 0 \end{cases}$$

et donc

$$0 = \int (-\Delta v) v = \int |\nabla v|^2 - \theta \int \frac{\partial v}{\partial n} \phi = \int |\nabla v|^2$$

ce qui entraîne $v \equiv \text{cte}$ sur Ω et de même

$$\phi \equiv \text{cte}.$$

Montrons maintenant que si ψ est une constante non nulle, $\lambda_1 < \lambda_2^*$ (ce qui équivaut à montrer que $\mu_2 > \lambda_1 + 1$).

Supposons $1 < \mu_2 \leq \lambda_1 + 1$. D'après (1.12) on obtient :

$$\int (-\Delta v) (v - \theta\psi) = (\mu_2 - 1) \int (v - \theta\psi) v$$

Si on appelle $v_0 = v - \theta\psi$, alors $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \int |\nabla v_0|^2 &= \int (-\Delta v_0) v_0 = (\mu_2 - 1) \int v_0 (v_0 + \theta\psi) \\ &= (\mu_2 - 1) \int v_0^2 + (\mu_2 - 1) \theta\psi \int v_0 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} (\mu_2 - 1) \int v_0 &= (\mu_2 - 1) \int v - (\mu_2 - 1) \theta\psi |\Omega| \\ &= \int -\Delta v - (\mu_2 - 1) \theta\psi |\Omega| \\ &= -(\mu_2 - 1) \theta\psi |\Omega| \end{aligned}$$

(car $\int_{\partial\Omega} \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ si ϕ est une constante).

Donc

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int v_0^2 &\leq \int |\nabla v_0|^2 = (\mu_2 - 1) \int v_0^2 - \theta^2 \psi^2 |\Omega| (\mu_2 - 1) \\ &\leq \lambda_1 \int v_0^2 - \theta^2 \psi^2 (\mu_2 - 1) |\Omega| \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\theta = 0$.

Or, dans ce cas $\mu_2 - 1 = \lambda_1$ et $v = v_0$ est la première fonction propre du problème de Dirichlet, ce qui est impossible car

$$0 = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} = \int -\Delta v = (\mu_2 - 1) \int v$$

Donc $\lambda_1 < \lambda_2^*$.

Montrons maintenant que $\lambda_2^* \leq \lambda_2$: d'après (1.10),

$$\lambda_2^* = \inf_{\substack{u \in W \\ \int u = 0 \\ u \neq 0}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}$$

Donc

$$\int |\nabla u|^2 \geq \lambda_2^* \int u^2 \quad \forall u \in W, \int u = 0.$$

Soient v_1 et v_2 deux fonctions propres correspondant à λ_1 et λ_2 respectivement, et soit

$$\omega = v_2 + t v_1$$

avec $t = - \int v_2 / \int v_1$. Alors

$$\int \omega = 0$$

et nous avons

$$\lambda_2^* \int \omega^2 \leq \int |\nabla \omega|^2$$

Mais

$$\int \omega^2 = t^2 \int v_1^2 + \int v_2^2 \text{ car } \int v_1 v_2 = 0,$$

et

$$\int |\nabla \omega|^2 = t^2 \lambda_1 \int v_1^2 + \lambda_2 \int v_2^2$$

Donc

$$\lambda_2^* t^2 \int v_1^2 + \lambda_2^* \int v_2^2 \leq \lambda_1 t^2 \int v_1^2 + \lambda_2 \int v_2^2$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2^*$ nous concluons

$$\lambda_2^* \leq \lambda_2.$$

On remarque finalement que si $\int v_2 \neq 0$, nous avons $t \neq 0$ et donc

$$\lambda_2^* < \lambda_2.$$

I-2.2. Un théorème d'unicité.

Soit K un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ satisfaisant (HE). On dira que K satisfait la condition (HU) relativement à ψ si

$$(HU) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in L^2(\Omega), \text{ la fonction } \tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi \text{ est strictement} \\ \text{croissante dans }]L_1(u); L_2(u)[= \tau_u^{-1}(] \ell_1, \ell_2[) = \\ \{\theta \in L^2(\Omega) ; \ell_1 < \tau_u(\theta) < \ell_2\} . \end{array} \right.$$

Nous avons

THEOREME I-2 : Si K satisfait les conditions (HE) et (HU) , le problème (1.1) admet une solution unique pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda < \lambda_1$.

En outre, si $\phi \equiv \text{cte} \neq 0$, (1.1) admet une solution unique pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda < \lambda_2^*$

Démonstration : D'après le Lemme I-1, il suffit de démontrer l'unicité de solution pour le problème (1.4).

Le cas $\lambda < 0$ est immédiat d'après la stricte convexité de

$$e(\omega) = \frac{1}{2} \int |\nabla \omega|^2 - \lambda \int (\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega) P_{K_\lambda} \omega$$

Soient (ω_1, θ_1) et (ω_2, θ_2) deux solutions de (1.4) avec $\lambda \in \Lambda$, $0 < \lambda < \lambda_1$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int (\omega_1 - \omega_2)^2 &\leq \int |\nabla \omega_1 - \nabla \omega_2|^2 = \int (-\Delta \omega_1 + \Delta \omega_2) (\omega_1 - \omega_2) = \\ &= \lambda \int (P_{K_\lambda} \omega_1 - P_{K_\lambda} \omega_2) (\omega_1 - \omega_2) \leq \lambda \|P_{K_\lambda} \omega_1 - P_{K_\lambda} \omega_2\|_{L^2} \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda_1 \|\omega_1 - \omega_2\|^2 \leq \lambda \|\omega_1 - \omega_2\|^2$$

ce qui entraîne

$$\omega_1 = \omega_2.$$

D'après la condition (HU), $\theta_1 = \theta_2$ et donc (1.4) a une solution unique.

Supposons maintenant $\phi \equiv \text{cte} \neq 0$ et $\lambda \in \Lambda$ tel que $0 < \lambda < \lambda_2^*$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (1.1). Si on décompose $u_i = v_i + t_i$ dans $W = W_0 \oplus \mathbb{R}$, avec

$$W_0 = \{u \in W ; \int u = 0\}$$

alors, d'après le Lemme I-5

$$(1.14) \quad \begin{cases} \lambda_2^* |v_1 - v_2|_{L^2}^2 \leq |\nabla v_1 - \nabla v_2|_{L^2}^2 = |\nabla u_1 - \nabla u_2|_{L^2}^2 \\ = \int (-\Delta u_1 + \Delta u_2) (v_1 + t_1 - v_2 - t_2) = \int (-\Delta u_1 + \Delta u_2) (v_1 - v_2) + \\ (t_1 - t_2) \int (-\Delta u_1 + \Delta u_2). \end{cases}$$

Comme $\int -\Delta u_i = I/\psi$ et $-\Delta u_i = \lambda P_K u_i$, on obtient d'après (1.14)

$$\lambda_2^* |v_1 - v_2|_{L^2}^2 \leq \lambda \int (P_K u_1 - P_K u_2) (v_1 - v_2)$$

ou encore

$$(1.15) \quad |v_1 - v_2|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{\lambda_2^*} |P_K u_1 - P_K u_2|_{L^2}$$

D'après (1.14) et (1.15)

$$\begin{aligned} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_{L^2}^2 &= \int (-\Delta u_1 + \Delta u_2) (v_1 - v_2) = \lambda \int (P_K u_1 - P_K u_2) (v_1 - v_2) \\ &\leq \lambda |P_K u_1 - P_K u_2| |v_1 - v_2| \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} |P_K u_1 - P_K u_2|^2 \end{aligned}$$

Or, comme

$$\int (P_K u_1 - P_K u_2) (u_1 - u_2) \geq |P_K u_1 - P_K u_2|^2 \quad \forall u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$$

et comme

$$|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 = \lambda \int (P_K u_1 - P_K u_2) (u_1 - u_2),$$

on obtient

$$\lambda |P_K u_1 - P_K u_2|^2 \leq |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} |P_K u_1 - P_K u_2|^2$$

ou encore

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^*}) |P_K u_1 - P_K u_2|^2 \leq 0.$$

Comme par hypothèse $\lambda < \lambda_2^*$, il nous reste

$$P_K u_1 = P_K u_2$$

ce qui entraîne

$$-\Delta u_1 = -\Delta u_2$$

ou

$$-\Delta \omega_1 = -\Delta \omega_2$$

avec $u_i = \omega_i + \theta_i \psi$ et $\omega_i \in H_0^1(\Omega)$.

Donc $\omega_1 = \omega_2$ et de nouveau, d'après HU,

$$u_1 = u_2.$$

REMARQUE I-3. Le problème de l'unicité pour $\lambda < \lambda_2^*$ dans le cas où $\phi \equiv \text{cte}$ est ouvert.

REMARQUE I-4. D'après la remarque I-2, si K est un cône de sommet zéro, l'unicité de ω entraîne l'unicité de θ , même si K ne satisfait pas la condition HU (relativement à ψ).

En fait, on remarque facilement que la condition HU peut être affaiblie puisque $1/\lambda$ n'atteint jamais la valeur zéro. De ce fait, on pourrait poser

$$(HU)_{\text{bis}} \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in L^2(\Omega), \text{ la fonction } \tau_u(\theta) = \int P_K(u + \theta \psi) \psi \text{ est} \\ \text{strictement croissante dans }]L_1(u); L_2(u)[\setminus \{\theta; \tau_u(\theta) = 0\} \\ = \{\theta \in \mathbb{R}; \ell_1 < \tau_u(\theta) < \ell_2 \text{ et } \tau_u(\theta) \neq 0\} \end{array} \right.$$

Et nous avons :

LEMME I-6 : Soit K un cône de sommet zéro. Alors K satisfait

$$(HU)_{\text{bis}}.$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $\theta_1 = \theta_2$.

Supposons donc $\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2) = \ell \neq 0$. Alors

$$\int (P_K(u+\theta_1\psi) - P_K(u+\theta_2\psi))\psi = 0$$

Comme

$(u+\theta_i\psi - P_K(u+\theta_i\psi) ; g - P_K(u+\theta_i\psi)) \leq 0 \quad i = 1, 2$ pour tout $g \in K$ on obtient

$$P_K(u+\theta_1\psi) = P_K(u+\theta_2\psi)$$

Or, K étant un cône de sommet zéro on a

$$\int v P_K v = |P_K v|_{L^2}^2 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Donc

$$\int (u+\theta_i\psi) P_K(u+\theta_i\psi) = |P_K(u+\theta_i\psi)|_{L^2}^2 \quad i=1, 2,$$

ce qui entraîne

$$(\theta_1 - \theta_2)\ell = 0.$$

Comme ℓ est supposé $\neq 0$, il nous reste

$$\theta_1 = \theta_2.$$

§ I-3. REMARQUES SUR LA REGULARITE DES SOLUTIONS.

Il est immédiat d'après (1.4) que

$$\omega \in H_O^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Donc, si u est solution de (1.1) nous avons

$$u \in H_O^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \oplus \mathbb{R}\psi.$$

Si $\phi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, alors $\psi \in H^2(\Omega)$ et

$$u \in H^2(\Omega).$$

Ce résultat ne peut pas être amélioré sans faire des hypothèses de "régularité" sur K . C'est ce que nous allons faire dans la suite. On suppose K satisfaisant l'hypothèse de régularité HR suivante :

$$(HR) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } p, \quad 1 \leq p < +\infty, \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ alors} \\ P_K u \in W^{1,p}(\Omega). \end{array} \right.$$

Dans ce cas, nous avons :

THEOREME I-3 : Soit Ω ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3) (Ω satisfaisant la condition forte de Lipschitz local, cf. Adams [1]) et $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$. Si K satisfait HR et (ω, θ) est une solution de (1.4), alors

$$\omega \in W^{3,q}(\Omega)$$

pour tout q , $1 \leq q \leq 6$ si $N = 3$, $1 \leq q < +\infty$ si $N = 2$, Donc

$$\omega \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$$

pour tout α , $0 \leq \alpha \leq 1/2$ si $N = 3$, $0 \leq \alpha < 1$ si $N = 2$.

Démonstration : Soit (ω, θ) une solution de (1.4). Alors

$\omega \in H^1_O(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Mais $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$ nous donne $\psi \in H^3(\Omega) \subset H^2(\Omega)$. Donc,

$$u = \omega + \theta\psi \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega),$$

et d'après l'hypothèse (HR)

$$P_K u \in H^1(\Omega).$$

D'après le Lemme I-1, $P_{K_\lambda} \omega = P_K u \in H^1(\Omega)$, ce qui entraîne

$$\omega \in H^1_O(\Omega) \cap H^3(\Omega),$$

et de même

$$u \in H^3(\Omega).$$

Comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q , tel que $1 \leq q \leq 6$ si $N = 3$,

$1 \leq q < +\infty$ si $N = 2$, on déduit

$$H^3(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega).$$

De nouveau, d'après l'hypothèse (HR)

$$P_{K_\lambda}(\omega) = P_K u \in W^{1,q}(\Omega)$$

et donc

$$\omega \in W^{3,q}(\Omega).$$

Or, d'après les théorèmes d'immersion de Sobolev (cf. Adams [1])

$$W^{3,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{2,\alpha}(\Omega)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$ si $N = 3$, ou $0 \leq \alpha < 1$ si $N = 2$.

§ I-4. EXEMPLES.

On considère dans ce paragraphe quelques exemples simples qui illustrent les résultats précédents. Pour chacun des exemples, on analyse l'existence de solution dans les cas limites.

Fixons une fois pour toutes $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\phi \neq 0$ et $\psi \in H^1(\Omega)$ la solution de $-\Delta\psi = 0$ dans Ω , $\psi = \phi$ sur $\partial\Omega$.

I-4.1 EXEMPLE 1 : Un modèle simple de la physique des plasmas (avec P_K local).

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$. Alors

THEOREME I-4 : Si $\inf_{\partial\Omega} \phi > 0$, le problème

$$(1.16) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \phi & \text{sur } \partial\Omega, \theta \text{ constante} \\ \lambda \int_{\Omega} u^+ \psi = I > 0 \end{cases}$$

admet une solution dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $0 < \lambda < +\infty$. En outre, la solution est unique si $0 < \lambda < \lambda_1$ ($0 < \lambda < \lambda_2^*$ si $\phi \equiv \text{cte}$).

Démonstration.

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

alors

$$P_K(v) = v^+.$$

Comme $\phi \geq m = \inf_{\partial\Omega} \phi > 0$, nous avons, d'après le principe du maximum

$$\psi \geq m > 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

Donc

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = 0$$

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v\psi = +\infty$$

L'existence de solutions pour $0 < \lambda < +\infty$ et la non-existence pour $\lambda \leq 0$ résultent du Théorème I-1 pourvu que l'hypothèse (HE) soit vérifiée : $\forall \ell > 0$

$$A_\ell = \{v \in K ; \int v\psi = \ell\}$$

est borné dans $L^1(\Omega)$. Or, si $v \in A_\ell$, alors

$$\begin{aligned} \ell &= \int v\psi \geq m \int v \\ \text{Donc} \quad \int |v| &= \int v \leq \ell/m \end{aligned}$$

L'hypothèse (HE) étant vérifiée, le Théorème I-1 s'applique. Ce résultat d'existence est identique à ceux obtenus par R. Temam [35] et Berestycki-Brézis [3] dans le cas $\phi \equiv 1$. L'unicité résulte du Théorème I-2. Il suffit de vérifier l'hypothèse (HU).

Vérifions la.

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega) \text{ et } \tau_u(\theta) = \int (u+\theta\psi)_+ \psi, \text{ alors}$$

$$L_1(u) = \inf \{ \theta ; \tau_u(\theta) > 0 \} = \inf_{\Omega} \text{ess} \left(- \frac{u(x)}{\psi(x)} \right)$$

et

$$L_2(u) = +\infty.$$

L'hypothèse (HU) découle immédiatement du fait que τ_u est convexe et que $\tau_u(\theta) = 0 \quad \forall \theta \leq L_1(u)$.

REMARQUE I-5. On peut montrer (voir R. Temam [35] et J. Puel [26]) avec des arguments différents que le problème (1.16) a une solution unique pour tout $\lambda \in (0, \lambda_2]$ si $\phi \equiv 1$, où λ_2 est la deuxième valeur propre du problème de Dirichlet homogène pour le laplacien. Il convient de remarquer que, d'après le Lemme I-5, $\lambda_2^* \leq \lambda_2$. En outre, G. Schaeffer [27] a montré que, en général, la solution de (1.16) n'est pas unique pour $\lambda > \lambda_2$.

I-4.2 EXEMPLE 2 : Un cas où P_K est opérateur non local.

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) ; |v|_{L^2} \leq 1\}$

Alors on a

THEOREME I-5 : *Le problème*

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \frac{\lambda}{1 + (|u|_{L^2} - 1)_+} u \quad \text{dans } \Omega \\ u = \theta \psi \text{ sur } \partial\Omega, \theta \in \mathbb{R} \text{ inconnu} \\ \frac{\lambda}{1 + (|u|_{L^2} - 1)_+} \int \Omega u \psi = I > 0 \end{array} \right.$$

admet une solution dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si

$$-|\psi|_{L^2} < I/\lambda < |\psi|_{L^2}$$

La solution est unique si $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \lambda_2^*$ si $\phi \equiv \text{cte}$) et

$$|I/\lambda| < |\psi|_{L^2}.$$

Démonstration :

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; |v|_{L^2} \leq 1\}$$

Alors

$$P_K(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v|_{L^2} \leq 1 \\ \frac{v}{|v|_{L^2}} & \text{si } |v|_{L^2} \geq 1 \end{cases} = \frac{1}{1 + (|v|_{L^2} - 1)_+} v$$

D'après le Lemme I-2 :

$$\ell_1 = \inf_{v \in K} \int v \psi = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \int P_K(\theta \psi) \psi = -|\psi|_{L^2}$$

$$\ell_2 = \sup_{v \in K} \int v \psi = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \int P_K(\theta \psi) \psi = |\psi|_{L^2}$$

L'existence de solutions dans $H^1(\Omega)$ pour

$$-|\psi|_{L^2} < I/\lambda < |\psi|_{L^2}$$

est la non existence pour $I/\lambda > |\psi|_{L^2}$ ou $I/\lambda < -|\psi|_{L^2}$ résultent du Théorème I-1 car K étant borné dans $L^2(\Omega)$ satisfait évidemment l'hypothèse (HE).

Nous examinons maintenant le cas limite :

$$(1.18) \quad \frac{I}{\lambda} = |\psi|_{L^2}.$$

(le cas $I/\lambda = -|\psi|_{L^2}$ étant tout à fait analogue). Dans ce cas, nous avons

$$K_\lambda = \{ \psi / |\psi|_{L^2} \}$$

D'après le Lemme I-1, (1.17) équivaut à déterminer (ω, θ) tel que

$$\begin{cases} -\Delta \omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0 \\ \lambda \int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I. \end{cases}$$

Donc, dans le cas limite (1.18) ce problème équivaut à déterminer θ tel que

$$(1.19) \quad \int P_K \left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}} B\psi + \theta \psi \right) \psi = |\psi|_{L^2}^2$$

où B est l'inverse du laplacien ($B = (-\Delta)^{-1}$) avec condition homogène au bord de Ω . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\int P_K \left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}} B\psi + \theta \psi \right) \psi \leq \left| P_K \left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}} B\psi + \theta \psi \right) \right|_{L^2} |\psi|_{L^2} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

l'égalité n'étant atteinte que si

$$P_K \left(\frac{I}{|\psi|_{L^2}} B\psi + \theta \psi \right) = c\psi \quad \text{avec } c = 1/|\psi|_{L^2}.$$

Or, $P_K v$ est proportionnel à v ($P_K v = c(v)v$ avec $c(v) \in \mathbb{R}$). Donc si (1.19) a lieu, on a

$$\frac{I}{|\psi|_{L^2}} B\psi + \theta \psi = c\psi$$

où c est une constante.

De plus $c \neq \theta$ car $B\psi \neq 0$ ($\psi \neq 0$). Donc

$$\psi = B \left(\frac{I}{(c-\theta) |\psi|_{L^2}} \psi \right)$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \psi = \frac{I}{(c-\theta) |\psi|_{L^2}} \psi \quad \text{dans } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

qui est une absurdité, par définition de ψ .

Ainsi il n'existe pas de solution dans les cas limites.

L'unicité est conséquence du Théorème I-2 ; il suffit de vérifier la condition (HU). On a, pour tout $u \in L^2(\Omega)$:

$$\tau_u(\theta) = \int P_K(u+\theta\psi)\psi = \begin{cases} \theta|\psi|_{L^2}^2 + \int u\psi & \text{si } |u+\theta\psi|_{L^2} \leq 1 \\ \frac{\theta|\psi|_{L^2}^2 + \int u\psi}{|u+\theta\psi|_{L^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Or, il est évident que $|u+\theta\psi|_{L^2} \leq 1$ si et seulement si

$$(1.20) \quad \theta^2|\psi|_{L^2}^2 + 2\theta\int u\psi + |u|_{L^2}^2 - 1 \leq 0$$

Deux possibilités se présentent :

$$i) \quad \left(\int u\psi\right)^2 - |\psi|_{L^2}^2(|u|_{L^2}^2 - 1) \leq 0$$

$$ii) \quad \left(\int u\psi\right)^2 - |\psi|_{L^2}^2(|u|_{L^2}^2 - 1) > 0$$

Dans le premier cas nous avons

$$\left(\int u\psi\right)^2 < \left(\int u\psi\right)^2 + |\psi|_{L^2}^2 \leq |u|^2|\psi|^2$$

et

$$|u+\theta\psi| \geq 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\tau_u(\theta) = \frac{\theta|\psi|_{L^2}^2 + \int u\psi}{|u+\theta\psi|} \quad \forall \theta$$

et

$$\frac{d\tau_u}{d\theta} = \frac{|\psi|^2|u|^2 - \left(\int u\psi\right)^2}{|u+\theta\psi|^3} \geq \frac{|\psi|^2}{|u+\theta\psi|^3} > 0$$

Dans ce cas τ_u est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et nous avons

$$L_1(u) = -\infty, \quad L_2(u) = +\infty.$$

Dans le cas ii), il existe $\theta_1 < \theta_2$ tels que

$$\tau_u(\theta) = \begin{cases} \theta |\psi|^2 + \int u\psi & \text{si } \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ \frac{\theta |\psi|^2 + \int u\psi}{\|u+\theta\psi\|_{L^2}^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\frac{d\tau_u}{d\theta} = \begin{cases} |\psi|^2 & \text{si } \theta \in]\theta_1, \theta_2[\\ \frac{|u|^2 |\psi|^2 - (\int u\psi)^2}{\|u+\theta\psi\|_{L^2}^3} & \text{si } \theta < \theta_1 \text{ ou } \theta > \theta_2 \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(\int u\psi)^2 \leq |u|^2 |\psi|^2$$

Si $|\psi|^2 |u|^2 > (\int u\psi)^2$, alors τ_u est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et, de nouveau

$$L_1(u) = -\infty, \quad L_2(u) = +\infty.$$

Par contre, si $|\psi|^2 |u|^2 = (\int u\psi)^2$, alors

$$\tau_u(\theta) = \begin{cases} -|\psi|_{L^2}^2 & \text{si } \theta \leq \theta_1 \\ \theta |\psi|_{L^2}^2 + \int u\psi & \text{si } \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ |\psi|_{L^2}^2 & \text{si } \theta \geq \theta_2 \end{cases}$$

avec, d'après (1.20)

$$L_1(u) = \theta_1 = \frac{-|\psi| - \int u\psi}{|\psi|^2} \quad \text{et} \quad L_2(u) = \theta_2 = \frac{|\psi| - \int u\psi}{|\psi|^2}$$

Donc, dans tous les cas τ_u est strictement croissante dans $]L_1(u), L_2(u)[$, ce qui montre que K satisfait (HU).

I-4.3 EXEMPLE 3 : Un problème à frontière libre avec P_K non local.

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p. et } |v|_{L^2} \leq 1\}$.

THEOREME 1.6 : *Le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \frac{\lambda}{1+(|u^+|_{L^2}^2-1)^+} u^+ \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\lambda}{1+(|u^+|_{L^2}^2-1)^+} \int u^+ \psi = I > 0 \end{array} \right.$$

a une solution dans $H^1(\Omega)$ pour tout $\lambda \neq 0$ tel que

$$-|\psi^-|_{L^2} < \frac{I}{\lambda} < |\psi^+|_{L^2}$$

Il n'en admet pas si $\frac{I}{\lambda} > |\psi^+|_{L^2}$ ou $\frac{I}{\lambda} < -|\psi^-|_{L^2}$.

Démonstration : Montrons d'abord que

$$P_K u = \frac{1}{1+(|u^+|_{L^2}^2-1)^+} u^+$$

Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors $\int (v-v^+)(g-v^+) \leq 0$ pour tout $g \geq 0$. Si $|v^+| \leq 1$, alors $v^+ \in K$ et $v^+ = P_K v$.

Supposons donc $|v^+| \geq 1$ et soit $g \in K$. Alors

$$\begin{aligned} \int \left(v - \frac{v^+}{|v^+|} \right) \left(g - \frac{v^+}{|v^+|} \right) &= \int \left[\left(1 - \frac{1}{|v^+|} \right) v^+ - v^- \right] \left(g - \frac{v^+}{|v^+|} \right) \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{|v^+|} \right) \int v^+ g - \left(1 - \frac{1}{|v^+|} \right) |v^+| \\ &\leq (|v^+|-1)(|g|-1) \leq 0 \quad (\text{car } |g| \leq 1). \end{aligned}$$

Donc

$$P_K v = \begin{cases} v^+ & \text{si } |v^+| \leq 1 \\ \frac{v^+}{|v^+|} & \text{si } |v^+| \geq 1 \end{cases}$$

De plus, d'après le Lemme I-2,

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \inf_{v \in K} \int v \psi = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \int P_K(\theta \psi) \psi = -|\psi^-|_{L^2} \\ \ell_2 &= \sup_{v \in K} \int v \psi = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \int P_K(\theta \psi) \psi = |\psi^+|_{L^2} \end{aligned}$$

Donc, d'après le Théorème I-1 (puisque K étant borné dans $L^2(\Omega)$ satisfait la condition (HE)), il existe une solution pour tout $\lambda \neq 0$ tel que

$$-|\psi^-| < \frac{1}{\lambda} < |\psi^+|.$$

REMARQUE I-6 : Les questions de l'existence de solutions dans les cas limites et l'unicité pour l'exemple 3 sont ouvertes.

I-4.4 EXEMPLE 4 : Un problème à deux frontières libres.

On considère $f, g \in L^2(\Omega)$ avec $f \leq g$ p.p. On fait les hypothèses

$$H_1 : \text{mes} \{x \in \Omega ; f(x) < g(x)\} > 0.$$

$$H_2 : \inf_{\partial\Omega} \text{ess } \phi > 0$$

Soit $K = \{v \in L^2(\Omega) ; f \leq v \leq g \text{ p.p.}\}$. Alors nous avons

THEOREME I-7 : *Le problème*

$$(1.21) \begin{cases} -\Delta u = \lambda [f + (u-f)^+ - (u-g)^+] & \text{dans } \Omega \\ u = \theta \phi & \text{sur } \partial\Omega \\ \lambda \int (f + (u-f)^+ - (u-g)^+) \psi = I > 0 \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $H^1(\Omega)$ pour tout $\lambda \neq 0$ tel que

$$\int f\psi < I/\lambda < \int g\psi$$

et il n'en admet pas si $I/\lambda > \int g\psi$ ou $I/\lambda < \int f\psi$.

Dans les cas limites, si $I/\lambda = \int g\psi$ (resp. $I/\lambda = \int f\psi$) alors il existe une infinité de solutions.

$$u = \lambda Bg + \theta\psi, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. : } u = \lambda Bf + \theta\psi)$$

$$\text{si} \quad \xi_g = \sup \text{ess} (g(x) - \lambda Bg(x)) / \psi(x) < +\infty$$

$$(\text{resp. : } \xi_f = \inf \text{ess} (f(x) - \lambda Bf(x)) / \psi(x) > -\infty)$$

et il n'y a pas de solution si $\xi_g = +\infty$ (resp. $\xi_f = -\infty$).

La solution est unique si $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \lambda_2^*$ si $\phi \equiv \text{cte}$) et $\int f\psi < I/\lambda < \int g\psi$.

Démonstration : D'après les hypothèses H_1 et H_2 ,

$$\lambda_1 = \inf_{v \in K} \int v\psi = \int f\psi < \int g\psi = \sup_{v \in K} \int v\psi = \lambda_2$$

Comme $P_K v = f + (v-f)^+ - (v-g)^+$, l'existence de solution pour (1.21) pour $\lambda_1 < I/\lambda < \lambda_2$ et la non existence pour $I/\lambda < \lambda_1$ et $I/\lambda > \lambda_2$ découlent du Théorème I-1 car K satisfait l'hypothèse (HE).

Voyons maintenant le cas limite.

Supposons $\int g\psi \neq 0$ et $\lambda = I/\int g\psi$. Alors nous avons

$$(1.22) \quad K_\lambda = \{g\}$$

D'après le Lemme I-1, (1.21) équivaut à déterminer (ω, θ) tels que

$$\begin{cases} -\Delta \omega = \lambda P_{K_\lambda} \omega & \text{dans } \Omega \\ \omega = 0 \\ \lambda \int P_{K_\lambda} (\omega + \theta\psi) \psi = I \end{cases}$$

Donc le problème (1.21) dans le cas limite (1.22), équivaut à trouver θ tel que

$$(1.23) \quad \int P_K \left(\frac{I}{\int g\psi} Bg + \theta\psi \right) \psi = \int g\psi$$

Or il est évident que pour θ tel que

$$(1.24) \quad \theta \geq \sup_{x \in \Omega} \text{ess} (g(x) - (I/\int g\psi)Bg(x)) / \psi(x)$$

(1.23) est satisfait. Donc

$$u = \frac{I}{\int g\psi} Bg + \theta\psi$$

est solution pour tout θ satisfaisant (1.24), d'où une infinité de solutions.

Les mêmes arguments s'appliquant pour le cas $\lambda = I/\int f\psi$.

Montrons maintenant l'unicité.

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \sup \{ \theta ; \tau_u(\theta) = \lambda_1 \} \\ &= \sup \{ \theta ; (u+\theta\psi-f)^+ - (u+\theta\psi-g)^+ = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \} \\ &= \inf_{x \in \Omega} \text{ess} (f(x) - u(x)) / \psi(x) \end{aligned}$$

D'une façon analogue nous obtenons

$$L_2(u) = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} (g(x) - u(x)) / \psi(x)$$

Soient θ_1 et $\theta_2 \in]L_1(u), L_2(u)[$ tels que

$$\tau_u(\theta_1) = \tau_u(\theta_2).$$

Alors

$$\int f\psi < \int P_K(u+\theta\psi)\psi = \int P_K(u+\theta_2\psi)\psi < \int g\psi$$

ou encore

$$(1.25) \quad 0 < \int F(\theta_1)\psi = \int F(\theta_2)\psi < \int (g-f)\psi$$

où

$$F(\theta_i) = (u+\theta_i\psi-f)^+ - (u+\theta_2\psi-g)^+ \geq 0 \text{ p.p.}$$

De plus, $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ satisfait la propriété suivante : pour presque tout $x \in \Omega$ on a

i) $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ est croissante

ii) $\theta \mapsto F(\theta)(x)$ est strictement croissante dans

$$\left[\frac{f(x) - u(x)}{\psi(x)} ; \frac{g(x) - u(x)}{\psi(x)} \right]$$

On peut supposer sans perdre la généralité que $\theta_1 \leq \theta_2$. Si $\theta_1 < \theta_2$ alors, d'après i)

$$F(\theta_1)(x) \leq F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Deux possibilités se présentent

1ère possibilité : $F(\theta_1)(x) = F(\theta_2)(x)$ p.p. $x \in \Omega$

Dans ce cas, d'après ii) $\theta_1 \geq L_2(u)$ ou $\theta_2 \leq L_1(u)$, ce qui est impossible d'après le choix de θ_1 et θ_2 .

2e possibilité : $\exists \Omega' \subset \Omega$, $|\Omega'| \neq 0$ tel que

$$F(\theta_1)(x) < F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega'$$

$$F(\theta_1)(x) = F(\theta_2)(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \setminus \Omega'$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} F(\theta_1) \psi &= \int_{\Omega'} F(\theta_1) \psi + \int_{\Omega - \Omega'} F(\theta_1) \psi < \int_{\Omega'} F(\theta_2) \psi + \int_{\Omega - \Omega'} F(\theta_2) \psi \\ &= \int_{\Omega} F(\theta_2) \psi, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec (1.25). Donc $\theta_1 = \theta_2$.

REMARQUE I-7. Dans tous les exemples 1,2,3 le convexe K satisfait l'hypothèse de régularité (HR). De plus, si f et $g \in W^{1,p}$ pour tout p , $1 \leq p < +\infty$, alors le convexe K dans l'exemple 4 satisfait aussi la condition (HR). Donc, si $\phi \in H^{5/2}(\partial\Omega)$ les solutions u dans tous les exemples appartiennent à $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ (cf. Théorème I-3).

REMARQUE I-8. Le problème (1.21) est un problème à deux frontières libres. Par exemple, si

$$f \equiv a < b \equiv g$$

on résoud

$$-\Delta u = \lambda \begin{cases} a & \text{si } u \leq a \\ u & \text{si } a \leq u \leq b \\ b & \text{si } u \geq b \end{cases} \quad \text{dans } \Omega,$$

les régions $\{u \leq a\}$, $\{a \leq u \leq b\}$ et $\{u \geq b\}$ étant inconnues "a priori". Dans ce cas, les deux "frontières libres" sont

$$\{u = a\} \text{ et } \{u = b\}$$

On remarque que l'on a alors

$$\xi_f = \xi_a = \inf_{\Omega} \operatorname{ess} \frac{a - (I/a \int \psi) Ba}{\psi} > -\infty \quad (\text{car } Ba \in L^{\infty}(\Omega))$$

$$(\text{resp. } \xi_g = \xi_b = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} \frac{b - (I/b \int \psi) Bb}{\psi} < +\infty)$$

Pour $I/\lambda = a \int \psi$ ou $I/\psi = b \int \psi$ il y a une infinité de solutions.

CHAPITRE II

APPROXIMATION DES SOLUTIONS

Comme on a vu dans le chapitre précédent, le problème (1.1) peut être résolu en deux étapes, à savoir :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1ère étape : on cherche } \omega \in H_O^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \quad \int \nabla \omega \cdot \nabla v = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) v \quad \forall v \in H_O^1(\Omega) \\ \text{2e étape : } \omega \text{ étant calculé, on cherche } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \quad \int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I/\lambda \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre nous développons une méthode d'approximation des solutions pour la première étape de (2.1), basée sur l'algorithme standard des approximations successives.

§ II.1 UNE METHODE D'APPROXIMATION

Pour $\lambda \in \Lambda$, on considère l'opérateur

$$\begin{aligned} S_\lambda : H_O^1(\Omega) &\longrightarrow H_O^1(\Omega) \\ \omega &\longmapsto S_\lambda \omega \end{aligned}$$

défini par

$$S_\lambda(\omega) = S \text{ solution de}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} -\Delta S = \lambda P_{K_\lambda} \omega & \text{dans } \Omega \\ S|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On définit par récurrence une famille $\{\omega^k\}$ d'éléments de $H_O^1(\Omega)$; on part de $\omega^0 \in H_O^1(\Omega)$, ω^k étant calculé, on définit ω^{k+1} par

$$(2.3) \quad \omega^{k+1} = S_\lambda(\omega^k)$$

Alors nous avons :

THEOREME II-1 : On suppose que K satisfait l'hypothèse (HE) .

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda, \lambda > 0$, la suite $\{\omega^k\}$ définie par (2.3) contient une sous-suite $\{\omega^{k_j}\}_j$ qui converge dans $H^1_0(\Omega)$ vers une solution ω du problème.

Démonstration : Elle résulte du lemme suivant :

LEMME II-1 : Pour tout $\lambda > 0$ tel que $K_\lambda \neq 0$

$$i) \quad e(S_\lambda(\omega)) \leq e(\omega)$$

$$ii) \quad e(S_\lambda(\omega)) = e(\omega) \text{ si et seulement si } S_\lambda(\omega) = \omega$$

$$e(v) = 1/2 \int |\nabla v|^2 - \lambda \int (v - 1/2 P_{K_\lambda} v) P_{K_\lambda} v$$

Démonstration : Pour $\omega \in H^1_0(\Omega)$, dénotons $S = S_\lambda(\omega)$. En multipliant (2.2) par $S - \omega$ on déduit (en posant $a(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$)

$$a(S; S) - a(\omega, S) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) (S - \omega)$$

Donc

$$(2.4) \quad 1/2 a(S, S) - \frac{1}{2} a(\omega, \omega) \leq \lambda \int P_{K_\lambda} \omega (S - \omega)$$

D'après le Lemme 1-4, la fonctionnelle

$$\omega \mapsto \int \left(\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega \right) P_{K_\lambda} \omega$$

étant convexe et F-différentiable, nous avons

$$(2.5) \quad \int P_{K_\lambda} \omega (S - \omega) \leq \int \left(S - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} S \right) P_{K_\lambda} S - \int \left(\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega \right) P_{K_\lambda} \omega$$

Donc, d'après (2.4) (en utilisant $\lambda > 0$)

$$e(S) \leq e(\omega).$$

Pour montrer ii), supposons que

$$e(S) = e(\omega).$$

Alors, d'après (2.4) et (2.5) (puisque $\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} \lambda \int P_{K_\lambda} \omega (S - \omega) &\leq \lambda \int \left(S - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} S \right) P_{K_\lambda} S - \lambda \int \left(\omega - \frac{1}{2} P_{K_\lambda} \omega \right) P_{K_\lambda} \omega \\ &= \frac{1}{2} a(S; S) - \frac{1}{2} a(\omega, \omega) \leq \lambda \int P_{K_\lambda} \omega (S - \omega) \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\frac{1}{2} a(S, S) - \frac{1}{2} a(\omega, \omega) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) (S - \omega)$$

Comme $a(S, v) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) v \quad \forall v \in H_O^1(\Omega)$, on conclut

$$\frac{1}{2} a(S - \omega; S - \omega) = 0,$$

et donc

$$S = \omega.$$

Reprenons maintenant la démonstration du Théorème II-1.

D'après (2.2) et (2.3)

$$(2.6) \quad a(\omega^{k+1}; v) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega^k) v \quad \forall v \in H_O^1(\Omega).$$

Alors, pour $v = \omega^{k+1}$ on a

$$\begin{aligned} ||\omega^{k+1}||^2 &= a(\omega^{k+1}; \omega^{k+1}) = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega^k) \omega^{k+1} \\ &\leq \lambda |\omega^{k+1}|_{L^p} |P_{K_\lambda}(\omega^k)|_{L^{p^*}} \end{aligned}$$

avec $p = 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$ et $p > 2$ si $N = 2$ et p^* le conjugué de p .

D'après le théorème d'immersion de Sobolev

$$|\omega^{k+1}|_{L^p} \leq c_1 ||\omega^{k+1}||$$

Donc

$$||\omega^{k+1}||^2 \leq \lambda c_1 ||\omega^{k+1}|| |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^{p^*}}$$

ou encore

$$||\omega^{k+1}|| \leq \lambda c_1 |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^{p^*}}$$

Soit $S = 2(1 - \frac{1}{p^*}) < 1$. Alors

$$|P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^{p^*}} \leq |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^1}^{1-S} |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^2}^S$$

et d'après (HE) :

$$|P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^{p^*}} \leq c_2 |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^2}^S$$

Donc

$$||\omega^{k+1}|| \leq c_3 |P_{K_\lambda} \omega^k|^s$$

Or, P_{K_λ} étant un opérateur contractant nous avons

$$\left| |P_{K_\lambda} \omega^k|_{L^2} - |P_{K_\lambda} o|_{L^2} \right| \leq |P_{K_\lambda} \omega^k - P_{K_\lambda} o|_{L^2} \leq |\omega^k|_{L^2}$$

d'où on obtient

$$||\omega^{k+1}|| \leq c_3 (|\omega^k|_{L^2} + |P_{K_\lambda} o|)^s$$

Comme $|\omega^k|_{L^2} \leq 1/\lambda_1 ||\omega^k||$, on peut choisir $c_4 > 0$ tel que

$$(2.7) \quad ||\omega^{k+1}|| \leq c_4 (1 + ||\omega^k||)^s$$

Si on dénote $a = \varepsilon^s (||\omega^k|| + 1)^s$ et $b = 1/\varepsilon^s$ avec $\varepsilon > 0$ fixé, alors, d'après l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

c'est-à-dire

$$(||\omega^k|| + 1)^s \leq \frac{1}{p} \varepsilon^{sp} (||\omega^k|| + 1)^{sp} + \frac{1}{p^* \varepsilon^{sp^*}}$$

En choisissant $p = 1/s > 1$ et $p^* = 1/1-s$, on a

$$(||\omega^k|| + 1)^s \leq s\varepsilon (||\omega^k|| + 1) + (1-s)\varepsilon^{-s/1-s}$$

Donc d'après (2.7)

$$\begin{aligned} ||\omega^{k+1}|| &\leq c_4 s \varepsilon ||\omega^k|| + c_4 s \varepsilon + c_4 (1-s) \varepsilon^{-s/1-s} \\ &= c\varepsilon ||\omega^k|| + c'. \end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $c\varepsilon < 1$, on obtient

$$||\omega^{k+1}|| \leq (\varepsilon c)^{k+1} ||\omega^0|| + \frac{c'}{1-c\varepsilon}$$

Donc, $\{\omega^k\}$ étant bornée dans $H_O^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $\{\omega^{k_j}\}$ telle que

$$\begin{aligned} \omega^{k_j} &\rightharpoonup \omega \quad \text{dans } H_O^1(\Omega) \text{ faible} \\ \omega^{k_j} &\rightarrow \omega \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'opérateur P_{K_λ}

$$(2.8) \quad P_{K_\lambda} \omega^{k_j} \rightarrow P_{K_\lambda} \omega \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme $\{\omega^k\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, la suite décroissante $e(\omega^k)$ est minorée, donc convergente :

$$e(\omega^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell$$

Alors

$$e(\omega) \leq \liminf_j e(\omega^{k_j}) = \lim_k e(\omega^k) = \ell$$

et d'après (2.8)

$$\omega^{k_{j+1}} = S_\lambda(\omega^{k_j}) \rightarrow S_\lambda(\omega) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

Donc

$$e(\omega^{k_{j+1}}) \rightarrow e(S_\lambda(\omega)) = \ell \geq e(\omega)$$

Comme $e(S_\lambda(\omega)) \leq e(\omega)$, on déduit

$$\ell = e(\omega) = e(S_\lambda(\omega)).$$

D'après le Lemme II-1, $S_\lambda(\omega) = \omega$ et ω est solution de (2.1)-1ère étape.

§ II-2 : REDUCTION A LA DIMENSION FINIE ; LE PROBLEME DISCRET

II-2.1 : Discrétisation des espaces.

On considère deux familles $\{Y_h\}_h$ et $\{V_h\}_h$ d'espaces vectoriels de dimension finie indexées par h positif et décroissant vers zéro, telles que

$$(2.9) \quad V_h \subset H_0^1(\Omega) \quad , \quad Y_h \subset L^2(\Omega) \quad \forall h$$

$$(2.10) \quad V_h \subset Y_h \quad \forall h$$

(2.11) $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $y \in L^2(\Omega)$), on peut construire $v_h \in V_h$ (resp. $y_h \in Y_h$) tel que $v_h \rightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$ (resp. $y_h \rightarrow y$ dans $L^2(\Omega)$) lorsque $h \rightarrow 0$.

En particulier, nous désignons par ψ_h une suite donnée d'éléments de Y_h telle que

$$\psi_h \rightarrow \psi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

II-2.2 : Discrétisation du convexe.

On considère pour chaque h un ensemble K_h tel que (cf. R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémolière [14])

(2.12) K_h est un ensemble convexe fermé de Y_h (où la topologie de Y_h est, par exemple, celle induite par $L^2(\Omega)$).

(2.13) K_h "approche" K au sens suivant :

i) pour tout $g \in K$, on peut contruire $g_h \in K_h$ tel que

$$g_h \rightarrow g \text{ dans } L^2(\Omega),$$

ii) si $g_h \in K_h$ et $g_h \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$ faible, alors $g \in K$.

Soit

$$(2.14) \quad \ell_{1,h} = \inf_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h, \quad \ell_{2,h} = \sup_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h$$

Alors nous avons :

LEMME II-2 : Sous les hypothèses (2.9) à (2.13) :

$$i) \liminf_h \ell_{2,h} \geq \ell_2 = \sup_{v \in K} \int v \psi$$

$$ii) \limsup_h \ell_{1,h} \leq \ell_1 = \inf_{v \in K} \int v \psi$$

Démonstration : Pour $\varepsilon > 0$, il existe $v^\varepsilon \in K$ tel que

$$\ell_1 \leq \int v^\varepsilon \psi < \ell_1 + \varepsilon$$

Fixons v^ε et soit, d'après (2.13) $v_h^\varepsilon \in K_h$ tel que

$$v_h^\varepsilon \xrightarrow{h \rightarrow 0} v^\varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Comme

$$l_{1,h} = \inf_{v_h \in K_h} \int v_h \psi_h \leq \int v_h^\varepsilon \psi_h$$

nous déduisons

$$\limsup_h l_{1,h} \leq \lim \int v_h^\varepsilon \psi_h = \int v^\varepsilon \psi < l_1 + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire nous obtenons

$$\limsup_h l_{1,h} \leq l_1$$

D'une façon tout à fait analogue nous déduisons

$$\liminf_h l_{2,h} \geq l_2$$

REMARQUE II-1 : Dans le cas particulier où $K_h \subset K$ et $\psi_h \equiv \psi$, pour tout h nous avons

$$l_{1,h} \geq l_1, \quad l_{2,h} \leq l_2$$

Donc $l_1 \leq \liminf_h l_{1,h}$ et $l_2 \geq \limsup_h l_{2,h}$ et d'après le Lemme précédent

$$\lim_h l_{1,h} = l_1, \quad \lim_h l_{2,h} = l_2$$

COROLLAIRE II-1 : Sous les hypothèses (2.9) à (2.13), si $l_1 < l_2$, alors $l_{1,h} < l_{2,h}$ pour tout h suffisamment petit.

II-2.3 : Formulation du problème discret.

Etant donné Y_h, V_h, K_h et ψ_h comme précédemment, on définit

$$(2.15) \quad K_{h,\lambda} = K_h \cap \{v_h \in Y_h ; \int v_h \psi_h = I/\lambda\}$$

qui est un ensemble convexe fermé de Y_h . On dénote P_h l'opérateur de projection sur $K_{h,\lambda}$ (pour le produit scalaire induit par $L^2(\Omega)$).

Alors on pose la problème :

Déterminer $(\omega_h, \theta_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ tel que

$$(2.16) \quad \begin{cases} 1^{\text{ère}} \text{ étape : } \int \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h = \lambda \int P_h(\omega_h) v_h & \forall v_h \in V_h \\ 2^{\text{e}} \text{ étape : } \int P_{K_h}(\omega_h + \theta_h \psi_h) \psi_h = I/\lambda \end{cases}$$

Nous allons traiter maintenant l'existence et l'unicité de solution du problème (2.16).

II-2.4 : Un résultat d'existence.

On suppose K_h satisfaisant la propriété suivante :

$(HE)_h$: pour tout h tel que $\ell_{1,h} < \ell_{2,h}$, et pour tout

$\ell \in]\ell_{1,h}; \ell_{2,h}[$, l'ensemble

$\{v_h \in K_h ; \int v_h \psi_h = \ell\}$ est borné dans Y_h

Soit

$$\Lambda_h = \{\lambda \neq 0 ; \ell_{1,h} < I/\lambda < \ell_{2,h}\}$$

Alors nous avons

THEOREME II-2 : Sous la condition $(HE)_h$, le problème (2.16) admet au moins une solution pour tout $\lambda \in \Lambda_h$. Si $I/\lambda > \ell_{2,h}$ ou $I/\lambda < \ell_{1,h}$ (2.16) n'admet pas de solutions.

Démonstration : Comme dans le Théorème I-1, elle suit des lemmes suivants :

LEMME II-3 : Pour tout $\omega_h \in Y_h$, la fonction

$$\tau_h(\theta) = \int P_{K_h}(\omega_h + \theta \psi_h) \psi_h$$

est lipschitzienne et croissante dans $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tau_h(\theta) = \ell_{1,h}, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \tau_u(\theta) = \ell_{2,h}$$

Démonstration : elle est identique à celle du Lemme I-2.

LEMME II-4 : La fonctionnelle $J_h : Y_h \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J_h(v_h) = \int (v_h - \frac{1}{2} P_h(v_h)) P_h(v_h)$$

est convexe et F-différentiable dans Y_h avec différentielle

$$J' = P_h$$

Démonstration : K_h est un convexe fermé de Y_h . Donc il est fermé dans $L^2(\Omega)$. Considérons la fonctionnelle

$$J : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(v) = \int (v - \frac{1}{2} P_h(v)) P_h(v)$$

Alors d'après le Lemme I-4, J est F-différentiable et convexe dans $L^2(\Omega)$ avec $P_h = J'$.

Comme $J_h = J|_{Y_h}$, il en est de même pour J_h , i.e. J_h est convexe et F-différentiable dans Y_h avec $J'_h = P_h$.

LEMME II-5 : On considère le problème d'optimisation

$$\mathcal{P}_h : \inf \{e_h(\omega_h) ; \omega_h \in V_h\}$$

avec
$$e_h(\omega_h) = \frac{1}{2} \int |\nabla \omega_h|^2 - \lambda \int (\omega_h - \frac{1}{2} P_h \omega_h) P_h \omega_h$$

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda_h$, $\mathcal{P}_h$ admet au moins une solution.

Démonstration : Comme au Lemme I-3, on la fera en trois étapes.

. 1ère étape : $K_{h,\lambda} \neq \emptyset$

C'est une conséquence du Lemme II-3.

. 2e étape : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda 1}{4} \int |\omega_h|^2 - c \quad \forall \omega \in V_h$$

où λ_1 est la première valeur propre du problème de Dirichlet homogène.

$$\begin{aligned} e_h(\omega_h) &= \frac{1}{2} \int |\nabla \omega_h|^2 - \lambda \int \omega_h P_h \omega_h + \frac{\lambda}{2} \int |P_h \omega_h|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int |\nabla \omega_h|^2 - \int |\omega_h| |\lambda P_h \omega_h| + \frac{\lambda}{2} \int |P_h \omega_h|^2 \\ &\geq \frac{\lambda_1}{2} \int |\omega_h|^2 - \frac{\alpha}{2} \int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int |P_h \omega_h|^2 \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = \frac{\lambda_1}{2}$ on a

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4} \int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right) \int |P_h \omega_h|^2$$

Si $\frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right) \geq 0$, alors $e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4} \int |\omega_h|^2$

Si $\frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right) < 0$, on utilise (HE)_h :

Il existe c_1 tel que

$$\int |P_h \omega_h|^2 \leq c_1 \quad \forall \omega_h \in Y_h$$

Donc

$$e_h(\omega_h) \geq \frac{\lambda_1}{4} \int |\omega_h|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right) c_1 \quad \forall \omega_h \in V_h.$$

3e étape. Il existe ω_h solution de $\mathcal{P}_h$

Soit $\{\omega_h^m\}_m$ une suite minimisante :

$$\omega_h^m \in V_h, \quad e_h(\omega_h^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \inf e_h$$

D'après la deuxième étape, $\{\omega_h^m\}$ est bornée dans Y_h . Donc il existe une sous-suite (encore notée ω_h^m) et $\omega_h \in Y_h$ tels que

$$\omega_h^m \rightarrow \omega_h \text{ dans } Y_h$$

Comme $\omega_h^m \in V_h \quad \forall m$, on obtient

$$\omega_h \in V_h.$$

Donc, comme $e_h(\omega_h) = \inf e_h$, ω_h est une solution de $\mathcal{P}_h$.

Revenons maintenant au Théorème II-2 :

K_h satisfait $(HE)_h$ et $\ell_{1,h} < I/\lambda < \ell_{2,h}$; on obtient d'après le Lemme II-5, l'existence d'une solution ω_h de $\mathcal{P}_h$.

D'après le Lemme II-4, ω_h est caractérisée par

$$\int \nabla \omega_h \nabla v_h - \lambda \int P_h(\omega_h) v_h = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

(ce qui est équivalent à dire que

$$-\Delta \omega_h - \lambda P_h \omega_h \in V_h^\perp$$

avec $V_h^\perp$ l'orthogonal de V_h dans $L^2(\Omega)$).

D'après le Lemme II-3, il existe $\theta_h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int P_{K_h}(\omega_h + \theta_h \psi_h) \psi_h = I/\lambda.$$

Quant au résultat de non existence, il est trivial d'après le Lemme II-3.

II-2.5 : Un résultat d'unicité.

On suppose que K_h satisfait la condition $(HU)_h$: pour tout $u_h \in Y_h$, la fonction

$$\tau_h(\theta) = \int P_{K_h}(u_h + \theta \psi_h) \psi_h$$

est strictement croissante dans $]L_1(u_h); L_2(u_h)[$

$$= \{\theta \in \mathbb{R} ; \ell_{1,h} < \tau_h(\theta) < \ell_{2,h}\}$$

Alors nous avons :

THEOREME II-3 : Si K_h satisfait les conditions $(HE)_h$ et $(HU)_h$, le problème (2.16) admet une solution unique pour tout $\lambda \in \Lambda_h, \lambda < \lambda_1$.

En outre, si $\phi_h \equiv \text{cte} \neq 0$, (2.16) admet une solution unique pour tout $\lambda \in \Lambda_h, \lambda < \lambda_2^*$.

Démonstration : Le cas $\lambda < 0$ est immédiat d'après la stricte convexité de e_h .

Supposons donc $\lambda > 0$ et soient

$$(\omega_h^1, \omega_h^1), (\omega_h^2, \omega_h^2) \in V_h \times \mathbb{R}$$

deux solutions de (2.16). Alors nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int |\omega_h^1 - \omega_h^2|^2 &\leq \int |\nabla \omega_h^1 - \nabla \omega_h^2|^2 = \lambda \int (P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2) (\omega_h^1 - \omega_h^2) \\ &\leq \lambda \|P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2\|_{L^2} \|\omega_h^1 - \omega_h^2\|_{L^2} \end{aligned}$$

Donc, si $\lambda < \lambda_1$ nous avons $\omega_h^1 = \omega_h^2$.

Supposons maintenant $0 < \lambda < \lambda_2^*$ et $\phi_h \equiv \text{cte} \neq 0$. Si

$$v_h^i = \omega_h^i + t_i, \quad t_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } \int v_h^i = 0,$$

nous avons, d'après le Lemme I-5 (puisque $P_h(\omega_h^i) \equiv P_K(\omega_h^i + \theta \psi_h)$ dont l'intégrale sur Ω est indépendante de i) :

$$\begin{aligned} \lambda_2^* \|v_h^1 - v_h^2\|_{L^2}^2 &\leq \|\nabla \omega_h^1 - \nabla \omega_h^2\|_{L^2}^2 = \lambda \int (P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2) (\omega_h^1 - \omega_h^2) \\ &= \int (P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2) (v_h^1 - v_h^2) \leq \lambda \|P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2\| \|v_h^1 - v_h^2\| \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_2^* \|v_h^1 - v_h^2\| \leq \lambda \|P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2\|$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla \omega_h^1 - \nabla \omega_h^2\| &\leq \lambda \int (P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2) (v_h^1 - v_h^2) \\ &\leq \lambda \|P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2\| \|v_h^1 - v_h^2\| \leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} \|P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2\|^2 \\ &\leq \frac{\lambda^2}{\lambda_2^*} \int (P_h \omega_h^1 - P_h \omega_h^2) (\omega_h^1 - \omega_h^2) = \frac{\lambda}{\lambda_2^*} \|\nabla \omega_h^1 - \nabla \omega_h^2\|^2, \end{aligned}$$

et

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^*}) \|\nabla \omega_h^1 - \nabla \omega_h^2\|^2 \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$\omega_h^1 = \omega_h^2.$$

D'après la condition (HU) $_h$, $\theta_h^1 = \theta_h^2$.

REMARQUE II-2 : le Théorème est encore valable sous les hypothèses

$$\lambda < \lambda_{1,h} \quad (\text{resp. } \lambda < \lambda_{2,h}^* \text{ si } \phi_h \equiv \text{cte})$$

où

$$\lambda_{1,h} = \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\int |\nabla v_h|^2}{\int v_h^2} \geq \lambda_1$$

$$(\text{resp. } \lambda_{2,h}^* = \inf_{\substack{v_h \in V_h \otimes \mathbb{R} \\ \int v_h = 0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\int |\nabla v_h|^2}{\int v_h^2})$$

II-2.6 : Un résultat de convergence.

Nous nous intéressons maintenant à la convergence des solutions $(\omega_h; \theta_h)$ de (2.16) vers une solution (ω, θ) de (1.4). Pour cela, on suppose que les convexes K_h satisfont la condition suivante :

$$(2.18) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c > 0 \text{ tel que pour tout } h \text{ suffisamment petit,} \\ \text{pour tout } \ell \in]\ell_1, \ell_2[\cap]\ell_{1,h}; \ell_{2,h}[\text{ et pour tout} \\ v_h \in K_h \cap \{v_h \in Y_h ; \int v_h \psi_h = \ell\} \text{ on a} \\ |v_h|_{L^1(\Omega)} \leq c. \end{array} \right.$$

THEOREME II-4 : On suppose K et K_h donnés satisfaisant respectivement (HE) et $(HE)_h$. Alors, sous les hypothèses (2.9) à (2.13) et (2.18), pour tout $\lambda \in \Lambda \cap \Lambda_h$, les problèmes (2.16) admettent des solutions respectives $(\omega_h; \theta_h)$ dont on peut extraire une sous-suite (encore notée $(\omega_h; \theta_h)$) telle que

$$\begin{aligned} \omega_h &\rightarrow \omega && \text{dans } H_O^1(\Omega) \\ \theta_h &\rightarrow \theta && \text{dans } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

avec (ω, θ) satisfaisant (1.4). En outre, si (1.4) admet une solution unique, c'est toute la suite qui converge.

Démonstration : elle résulte essentiellement du lemme suivant :

LEMME II-6. Sous les hypothèses (2.12) et (2.13) , si $\{\omega_h\}$ est une suite d'éléments de $L^2(\Omega)$ telle que $\omega_h \rightarrow \omega$ dans $L^2(\Omega)$, alors

$$P_{K_h}(\omega_h) \rightarrow P_K(\omega) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

En outre, si $\lambda \in \bigcap_h K_h$, alors

$$P_h(\omega_h) \rightarrow P_{K_\lambda}(\omega) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Démonstration : Comme

$$(2.19) \quad |P_{K_h}\omega_h - P_K\omega| \leq |\omega_h - \omega| + |P_{K_h}\omega - P_K\omega|$$

il suffit de démontrer que $P_{K_h}\omega \rightarrow P_K\omega$. Or, d'après (2.13), il existe $v_h \in K_h$ tel que

$$v_h \rightarrow P_K\omega \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Comme

$$|P_{K_h}\omega - \omega| \leq |v_h - \omega| \text{ pour tout } h,$$

on obtient

$$|P_{K_h}\omega| \leq |\omega| + |v_h - \omega| \leq \text{cte.}$$

Donc on peut extraire une sous-suite h' telle que

$$P_{K_{h'}}\omega \rightharpoonup y \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après (2.13), $y \in K$. Mais, par définition de la projection

$$|P_{K_h}\omega - \omega| \leq |g_h - \omega| \quad \forall g_h \in K_h$$

Soit $g \in K$ et $g_h \in K_h$ tel que $g_h \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$. Alors

$$|y - \omega| \leq \liminf |P_{K_{h'}}\omega - \omega| \leq |g - \omega|$$

et nous avons

$$y = P_K\omega$$

Donc

$$P_{K_{h'}}\omega \rightharpoonup P_K\omega \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après l'unicité de $P_K \omega$, c'est toute la suite qui converge. Pour montrer la convergence forte, on considère $g_h \in K_h$ telle que $g_h \rightarrow g \in K$ dans $L^2(\Omega)$. Alors, comme

$$P_{K_h} \omega - \omega \longrightarrow P_K \omega - \omega$$

$$|P_{K_h} \omega - \omega| \leq |g_h - \omega|$$

nous obtenons

$$(2.20) \quad |P_K \omega - \omega| \leq \liminf_h |P_{K_h} \omega - \omega| \leq \limsup_h |P_{K_h} \omega - \omega| \\ \leq \lim |g_h - \omega| = |g - \omega|$$

En particulier, pour $g = P_K \omega$, l'inégalité (2.20) entraîne

$$|P_K \omega - \omega| = \lim |P_{K_h} \omega - \omega|$$

et nous avons

$$P_{K_h} \omega \rightarrow P_K \omega \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Donc

$$(2.21) \quad P_{K_h} \omega_h \rightarrow P_K \omega \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Soit maintenant $\lambda \in \Lambda \cap \Lambda_h$. D'après le Lemme II-3, il existe $\theta_h \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int P_{K_h} (\omega_h + \theta_h \psi_h) \psi_h = I/\lambda$$

Donc, comme dans le Lemme I-1,

$$P_h \omega_h = P_{K_h} (\omega_h + \theta_h \psi_h)$$

Il suffit de montrer donc que

$$(2.22) \quad |\theta_h| \leq M$$

où M est une constante indépendante de h . En effet, si (2.22) a lieu, on peut extraire une sous-suite h' telle que $\theta_{h'} \rightarrow \theta$ dans $\mathbb{R}$ et donc, d'après (2.21) :

$$P_{h_n}(\omega_{h_n}) = P_{K_{h_n}}(\omega_{h_n} + \theta_{h_n} \psi_{h_n}) \rightarrow P_K(\omega + \theta \psi) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et comme

$$\int P_{h_n}(\omega_{h_n}) \psi_{h_n} = I/\lambda$$

on a

$$\int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I/\lambda$$

Donc

$$P_K(\omega + \theta \psi) = P_{K_\lambda}(\omega)$$

et de façon classique, c'est toute la suite qui converge vers $P_{K_\lambda} \omega$.

Montrons donc (2.22). Supposons par contradiction que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe h_n tel que

$$|\theta h_n| \geq n$$

avec

$$\tau_n(\theta h_n) = \int P_{K_{h_n}}(\omega_{h_n} + \theta_{h_n} \psi_{h_n}) \psi_{h_n} = I/\lambda$$

On peut supposer, sans perdre la généralité, que

$$\theta h_n \geq n.$$

Comme $\lambda \in \Lambda$, il existe $\theta^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau_n(\theta^*) = \int P_K(\omega + \theta^* \psi) \psi = I/\lambda$$

En outre, comme

$$\tau_n(\theta^*) = \int P_{K_{h_n}}(\omega_{h_n} + \theta^* \psi_{h_n}) \psi_{h_n} \rightarrow \tau_\omega(\theta^*) = I/\lambda$$

et comme τ_n est croissante dans $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout n suffisamment grand on a

$$0 < I/\lambda - \tau_n(\theta) < \varepsilon$$

pour tout $\theta \in]\theta^*; \theta_{h_n}[\supset]\theta^*; n[$. En faisant tendre n vers l'infini on obtient

$\tau_\omega(\theta) = I/\lambda$ pour tout $\theta \in]\theta^*; \infty[$ ce qui est une absurdité car $I/\lambda < \ell_2$.

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème II.4.

D'après ce théorème, K_h satisfaisant la condition $(HE)_h$ et $\lambda \in \Lambda_h$ entraînent l'existence de $(\omega_h; \theta_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ solution de (2.16). Il s'agit donc de montrer que

$$\omega_h \rightarrow \omega \text{ dans } H_O^1(\Omega)$$

$$\theta_h \rightarrow \theta \text{ dans } \mathbb{R}$$

avec (ω, θ) solution de (1.4). Or

$$\int \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h = \lambda \int P_h(\omega_h) v_h \quad \forall v_h \in V_h$$

Donc

$$||\omega_h||_{H_O^1}^2 \leq \lambda |P_h \omega_h|_{L^{p^*}} |\omega_h|_{L^p}$$

avec $p = \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ ou $p > 2$ si $N = 2$.

Comme

$$|\omega_h|_{L^p} \leq c_1 ||\omega_h||_{H_O^1(\Omega)}$$

on obtient

$$||\omega_h||_{H_O^1(\Omega)} \leq c_2 |P_h \omega_h|_{L^{p^*}}$$

Soit $s = 2(1 - 1/p^*) < 1$. Alors

$$|P_h \omega_h|_{L^{p^*}} \leq |P_h \omega_h|_{L^1}^{1-s} |P_h \omega_h|_{L^2}^s$$

et d'après la condition (2.18) (car $\lambda \in \Lambda$)

$$||\omega_h||_{H_O^1} \leq c_3 |P_h \omega_h|_{L^2}^s \leq c_3 (|\omega_h|_{L^2} + |P_h \omega|_{L^2})^s$$

ou encore

$$||\omega_h||_{H_O^1}^{1/s} \leq c_4 ||\omega_h|| + c_3^{1/s} |P_h \omega|_{L^2}$$

D'après l'inégalité de Young

$$c_4 ||\omega_h|| \leq \frac{||\omega_h||^t}{t} + \frac{c_4^{t^*}}{t^*} \text{ pour tout } 1 < t^*, t < +\infty$$

tels que $1/t + 1/t^* = 1$.

En choisissant $t = 1/s > 1$, on a

$$(1-s) ||\omega_h||^{1/s} \leq c_5 (1 + |P_h \omega|_{L^2})$$

Donc d'après le Lemme II-6 il existe $c > 0$ tel que

$$||\omega_h|| \leq c$$

et on peut extraire une sous-suite (toujours notée ω_h) telle que

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \omega_h &\rightarrow \omega \quad \text{dans } H_O^1(\Omega) \text{ faible} \\ \omega_h &\rightarrow \omega \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

D'après le Lemme II-6

$$(2.24) \quad P_h \omega_h \rightarrow P_{K_\lambda} \omega$$

Montrons que ω satisfait (1.4). Soit $v \in H_O^1(\Omega)$ et $v_h \in V_h$ tel que $v_h \rightarrow v$ dans $H_O^1(\Omega)$. Alors

$$\int \nabla \omega \cdot \nabla v = \lim \int \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h = \lim \int \lambda P_h(\omega_h) v_h = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) v$$

Comme dans la démonstration du Lemme II-6, on peut extraire une sous-suite h' telle que

$$\theta_{h'} \rightarrow \theta \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

avec θ satisfaisant

$$\int P_K(\omega + \theta \psi) \psi = I/\lambda$$

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que $\omega_h \rightarrow \omega$ dans $H_O^1(\Omega)$ fort. Or, .

$$\begin{aligned} ||\omega_h - \omega||^2 &= ||\omega||^2 - 2 \int \nabla \omega_h \cdot \nabla \omega + ||\omega_h||^2 = \\ &= \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) \cdot \omega - 2 \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega) \omega_h + \lambda \int P_h(\omega_h) \omega_h \end{aligned}$$

D'après (2.23) et (2.24)

$$||\omega_h - \omega||^2 \rightarrow 0.$$

REMARQUE II-3 : Un problème largement ouvert est celui de l'estimation d'erreur entre les solutions approchées $(\omega_h; \theta_h)$ de (2.16) et les solutions (ω, θ) de (1.4). Nous présentons maintenant un résultat partiel dans cette direction.

§ II-3. UNE ESTIMATION D'ERREUR.

Dans le § II-3 nous faisons les hypothèses (HE), (HU), $(HE)_h$ et $(HU)_h$, et $\lambda \in \Lambda \cap \Lambda_h$

THEOREME II-5. Pour $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}$ si $\phi_h \equiv \phi = \text{cte}$), les solutions respectives ω et ω_h de (2.1) et (2.16)-1ère étape sont uniques et vérifient

$$(2.25) \quad ||\omega - \omega_h||_{H_0^1} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{ ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h|_{L^2} \}$$

De plus, si K et K_h sont des cônes de sommet zéro, alors θ et θ_h vérifient respectivement (2.21) et (2.11) 2e étape, sont uniques et satisfont

$$(2.26) \quad |\theta - \theta_h| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{ ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h| \}$$

où c dénote des constantes indépendantes de h .

Démonstration. i) Considérons d'abord $0 < \lambda < \lambda_1$. Alors d'après les Théorèmes I-2 et II-3, ω et ω_h satisfaisant (2.1) et (2.16) 1ère étape, sont uniques (indépendamment d'avoir (HU) et $(HU)_h$).

Soit $v_h \in V_h$, alors

$$\begin{aligned}
 (2.27) \quad ||\omega_h - v_h||^2 &= \int |\nabla \omega_h - \nabla v_h|^2 = \int \nabla(\omega - v_h) \cdot \nabla(\omega_h - v_h) - \\
 &- \lambda \int (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h)(\omega_h - v_h)
 \end{aligned}$$

Donc

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| + \lambda |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| ||\omega_h - v_h||$$

ou encore

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h|$$

Mais

$$|P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| \leq |\omega - \omega_h| + |P_h \omega - P_{K_\lambda} \omega|$$

et donc

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\lambda_1} ||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega|$$

Comme

$$||\omega - \omega_h|| \leq ||\omega - v_h|| + ||\omega_h - v_h||$$

on obtient

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) ||\omega - \omega_h|| \leq 2 ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega|$$

De plus

$$\begin{aligned}
 (2.28) \quad |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega| &\leq |P_{K_\lambda} \omega - P_{K_\lambda} v_h| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h| + \\
 &+ |P_h v_h - P_h \omega| \leq 2 ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h|
 \end{aligned}$$

d'où on a

$$(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) ||\omega - \omega_h|| \leq 2(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}) ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1}} |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h|$$

v_h étant arbitraire et $\lambda < \lambda_1$ on conclut

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{ ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h| \}$$

ii) Supposons maintenant $\lambda < 0$ et soit

$\xi > 0$ tel que $\lambda = -\xi$

Alors

$$\begin{aligned} ||\omega_h - v_h||^2 &= \int \nabla(\omega - v_h) \cdot \nabla(\omega_h - v_h) - \xi \int (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h) (v_h - \omega_h) \\ &= \int \nabla(\omega - v_h) \cdot \nabla(\omega_h - v_h) - \xi \int (P_h \omega - P_h \omega_h) (v_h - \omega_h) \\ &\quad - \xi \int (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega) (v_h - \omega_h) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} ||\omega_h - v_h||^2 &\leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| - \xi \int (P_h \omega - P_h \omega_h) (\omega - \omega_h) \\ &\quad - \xi \int (P_h \omega - P_h \omega_h) (v_h - \omega) - \xi \int (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega) (v_h - \omega_h) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \xi |P_h \omega - P_h \omega_h|^2 + ||\omega_h - v_h||^2 &\leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| \\ &+ \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}} |P_h \omega - P_h \omega_h| ||\omega - v_h|| + \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega| ||v_h - \omega_h|| \\ &\leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| + \frac{\xi^2}{2\alpha} |P_h \omega - P_h \omega_h|^2 + \frac{\alpha}{2\lambda_1} ||\omega - v_h||^2 \\ &+ \frac{\xi^2}{2\beta\lambda_1} |P_h \omega - P_{K_\lambda} \omega|^2 + \frac{\beta}{2} ||\omega_h - v_h||^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi(1 - \frac{\xi}{2\alpha}) |P_h \omega - P_h \omega_h|^2 + ||\omega_h - v_h||^2 &\leq \beta ||\omega_h - v_h||^2 \\ &+ (\frac{1}{2\beta} + \frac{\alpha}{2\lambda_1}) ||\omega - v_h||^2 + \frac{\xi^2}{2\beta\lambda_1} |P_h \omega - P_{K_\lambda} \omega|^2 \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = \xi/2 > 0$ et $\beta = 1/2$ par exemple, on obtient

$$1/2 ||\omega_h - v_h||^2 \leq (1 + \frac{\xi}{4\lambda_1}) ||\omega - v_h||^2 + \frac{\xi^2}{\lambda_1} |P_h \omega - P_{K_\lambda} \omega|^2$$

Donc

$$||\omega_h - v_h|| \leq \sqrt{2(1 + \xi/4\lambda_1)} ||\omega - v_h|| + \frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\lambda_1}} |P_h \omega - P_{K_\lambda} \omega|$$

et d'après (2.28)

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{ ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h| \}$$

iii) Soit maintenant $\phi_h \equiv \phi = \text{cte}$ et supposons

$$0 < \lambda < \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}$$

D'après (2.27)

$$||\omega_h - v_h||^2 \leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| - \lambda \left\{ (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h) (\omega_h - v_h) \right\}$$

Considérons

$$\tilde{\omega}_h = \omega_h - \frac{1}{|\Omega|} \int \omega_h$$

et

$$\tilde{v}_h = v_h - \frac{1}{|\Omega|} \int v_h$$

Alors, comme

$$\int P_{K_\lambda} \omega = \int P_h \omega_h = I/\lambda$$

on a

$$\lambda \left\{ (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h) (\omega_h - v_h) \right\} = \lambda \left\{ (P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h) (\tilde{\omega}_h - \tilde{v}_h) \right\}$$

et donc, d'après le Lemme I-5

$$\begin{aligned} ||\omega_h - v_h||^2 &\leq ||\omega - v_h|| ||\omega_h - v_h|| + \\ &+ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1^* \lambda_2^*}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| ||\omega_h - v_h|| \end{aligned}$$

Comme

$$|P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| \leq |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} ||\omega - \omega_h||$$

on obtient

$$||\omega_h - v_h|| \leq ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}} ||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_2^*}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega|$$

ou encore

$$||\omega - \omega_h|| \leq 2 ||\omega - v_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}} ||\omega - \omega_h|| + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_2^*}} |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega|$$

Donc, comme plus haut

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \{ ||\omega - v_h|| + |P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h| \}$$

iv) Toujours sous les hypothèses $\lambda < \lambda_1$ (ou $\lambda < \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}$ si $\phi_h = \phi = \text{cte}$), supposons K et K_h des cônes de sommet 0. Alors d'après la remarque I-1 :

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\lambda}{I} \int (P_{K_\lambda} \omega - \omega) P_{K_\lambda} \omega \\ \theta_h &= \frac{\lambda}{I} \int (P_h \omega_h - \omega_h) P_h \omega_h\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\theta - \theta_h| &= \frac{|\lambda|}{I} \left| |P_{K_\lambda} \omega|_{L^2}^2 - |P_h \omega_h|_{L^2}^2 - \int \omega P_{K_\lambda} \omega + \int \omega_h P_h \omega_h \right| \\ &\leq \frac{|\lambda|}{I} \left(|P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h|_{L^2} \{ |P_{K_\lambda} \omega| + |P_h \omega_h|_{L^2} \} + |P_{K_\lambda} \omega| |\omega - \omega_h| + \right. \\ &\quad \left. + |\omega_h| |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| \right) \\ &\leq \frac{|\lambda|}{I} \left[(2|\omega_h| + |P_{K_\lambda} \omega| + |P_h \omega|) |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| + |P_{K_\lambda} \omega| |\omega - \omega_h| \right]\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}|\theta - \theta_h| &\leq \frac{|\lambda|}{I} \left[(2|\omega_h| + |P_{K_\lambda} \omega| + |P_h \omega|) |P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega_h| \right. \\ &\quad \left. + (2|\omega_h| + 2|P_{K_\lambda} \omega| + |P_h \omega|) |\omega - \omega_h| \right]\end{aligned}$$

D'après le Théorème II-4 et le Lemme II-6, $\{\omega_h\}$ et $\{P_h \omega\}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$.

Donc il existe c tel que

$$|\theta - \theta_h| \leq c(|P_{K_\lambda} \omega - P_h \omega| + |\omega - \omega_h|)$$

et d'après (2.28) et i), ii) et iii) on obtient (2.26).

REMARQUE II-4 : Une estimation du genre (2.26) pour le cas où K et K_h ne sont pas des cônes est un problème ouvert.

REMARQUE II-5 : Les estimations (2.25) et (2.26) du théorème précédent présentent l'inconvénient du terme $|P_{K_\lambda} v_h - P_h v_h|_{L^2}$ qui est compliqué à estimer par rapport à h .

En vue de simplifier ces expressions, on va considérer le problème discret (2.16) sans l'approximation des convexes, à savoir : on suppose $\psi_h \equiv \psi \quad \forall h$. Alors, (2.16) devient : déterminer $(\omega_h; \theta_h) \in V_h \times \mathbb{R}$ tel que.



$$(2.29) \quad \begin{cases} 1^{\text{ère}} \text{ étape} : \int \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h = \lambda \int P_{K_\lambda}(\omega_h) v_h & \forall v_h \in V_h \\ 2^{\text{e}} \text{ étape} : \int P_K(\omega_h + \theta_h \psi) \psi = I/\lambda \end{cases}$$

où P_{K_λ} est l'opérateur de projection sur K_λ défini dans (1.2). Cela correspond (dans la pratique) à modifier la triangulation de Ω à chaque itération ; c'est la méthode introduite et étudiée par M. Sermange [28] pour le cas où $K = \{v \in L^2 ; v \geq 0\}$ et $\psi = \text{cte sur } \Omega$.

Nous avons :

THEOREME II-6 : *Sous les hypothèses du Théorème I-1, le problème (2.29) admet au moins une solution pour tout $\lambda \in \Lambda$*

De plus, sous les hypothèses du Théorème I-2, (2.29) admet une solution unique si $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \lambda_2^$ si $\phi \equiv \phi_h \equiv \text{cte}$).*

La démonstration est tout à fait identique à celle des Théorèmes I-1 et I-2. (cf. aussi Sermange [28]).

THEOREME II-7 : *Pour $\lambda < \lambda_1$ (resp. $\lambda < \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^*}$ si $\phi_h \equiv \phi = \text{cte}$) les solutions respectives ω et ω_h de (2.1) et (2.29)-1ère étape sont uniques et vérifient*

$$||\omega - \omega_h|| \leq c \inf_{v_h \in V_h} ||\omega - v_h||$$

De plus, si K est un cône de sommet 0, alors θ et θ_h vérifiant respectivement (2.1) et (2.29)-2e étape, sont uniques et satisfont

$$|\theta - \theta_h| \leq c \inf_{v_h \in V_h} ||\omega - v_h||$$

où c dénote des constantes indépendantes de h .

Démonstration : Elle est tout à fait analogue à celle du Théorème II-5.

§ 2-4. APPROXIMATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Nous indiquons dans ce paragraphe la construction d'une discrétisation "concrète", où les résultats des paragraphes précédents s'appliquent ; il s'agit de la méthode des éléments finis.

Nous nous bornerons au cas conforme, lorsque Ω est un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on considère pour chaque valeur du paramètre h une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(2.30) $\mathcal{T}_h$ est une triangulation "admissible" au sens suivant :

a) tout élément $T \in \mathcal{T}_h$ est un triangle continu dans $\bar{\Omega}$ de diamètre $h_T \leq h$.

b) si $T, T' \in \mathcal{T}_h$, alors ou bien $T \cap T' = \emptyset$, ou bien $T \cap T' =$ un côté tout entier, ou bien $T \cap T' =$ un sommet.

(2.31) La famille de triangulation $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de $\bar{\Omega}$ est "régulière" au sens suivant :

Il existe $\theta_0 > 0$ tel que, pour chaque h et pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, si $\theta(T)$ désigne le plus petit des angles de T , alors $\theta(T) \geq \theta_0$.

Ceci étant dit, on définit

(2.32) $Y_h =$ ensemble de fonctions v_h continues sur $\bar{\Omega}$ telles que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$
 $v_h|_T =$ fonction affine

(2.33) $V_h = \{v_h \in Y_h ; v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$

Il est clair que Y_h et V_h ainsi définis satisfont les hypothèses (2.9) à (2.11).

Sur Y_h on considère une base de la manière standard, à savoir, on définit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ où M est le nombre de sommets P_i

et ξ_i est la fonction de Y_h telle que

$$(2.34) \quad \xi_i(P_j) = \delta_{ij}.$$

Alors nous avons

THEOREME II-8 : Pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, il existe $c > 0$ indépendant de h tel que

$$\inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h|| \leq ch$$

(cf. Ciarlet [5], théorème 3.2.2.).

II-4.1 : Exemples numériques.

Nous envisageons de résoudre le problème (2.16) en utilisant l'algorithme décrit au § II-1. La difficulté repose sur le calcul de P_h .

Dans la suite, Ω est un ensemble polygonal de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on définit une triangulation $\mathcal{T}_h$ satisfaisant (2.30) et (2.31). On considère les espaces Y_h et V_h comme dans (2.32) et (2.33) et on se donne $\psi_h \in Y_h$ tel que $\psi_h \rightarrow \psi$ dans $L^2(\Omega)$. Si $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$ est la base de Y_h donnée par (2.34), nous avons

$$v_h = \sum_1^M v_i \xi_i, \quad \psi_h = \sum_1^M \psi_i \xi_i$$

Donc

$$\int v_h \psi_h = \sum_{i,j} v_i \psi_j \int \xi_i \xi_j$$

Désignant A la matrice $(a_{ij})_{ij}$ où

$$a_{ij} = \int \xi_i \xi_j$$

alors

$$\int v_h \psi_h = \vec{v} A \vec{\psi}$$

où $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$, $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M) \in \mathbb{R}^M$.

Donc, l'hyperplan (cf. (2.15))

$$\{v_h \in Y_h ; \int v_h \psi_h = I/\lambda\}$$

peut être identifié à l'hyperplan de $\mathbb{R}^M$.

$$(2.35) \quad \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; \vec{v} \wedge \vec{\psi} = I/\lambda\}$$

Voyons maintenant comment on peut approcher le convexe K dans les exemples cités au § I-4.

EXEMPLE 1. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

et on définit

$$K_h = K \cap Y_h = \{v_h \in Y_h : v_h \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega}\}.$$

$$\text{Comme } v_h = \sum v_i \xi_i$$

alors

$$v_h \in K_h \text{ si et seulement si } v_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, M.$$

Donc, on peut identifier K_h au convexe

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; v_i \geq 0, i = 1, \dots, M\}$$

D'après (2.15) et (2.35), $K_{h,\lambda}$ peut être identifié à

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; v_i \geq 0 \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{\psi} = I/\lambda\}.$$

EXEMPLE 2. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p. et } |v|_{L^2} \leq 1\},$$

et on définit

$$K_h = K \cap Y_h = \{v_h \in Y_h ; v_h \geq 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ et } |v_h|_{L^2} \leq 1\}$$

Donc $v_h \in K_h$ si et seulement si

$$v_h = \sum v_i \xi_i \text{ et } v_i \geq 0, \vec{v} \wedge \vec{v} \leq 1.$$

Donc, dans ce cas, le convexe K_h peut être identifié à

$$K_M = \{v \in \mathbb{R}^M ; v_i \geq 0 \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{v} \leq 1\}$$

De même, $K_{h,\lambda}$ s'identifie au convexe

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; v_i \geq 0, \vec{v} \wedge \vec{v} \leq 1, \vec{v} \wedge \vec{\psi} = I/\lambda\}.$$

EXEMPLE 3. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; a \leq v \leq b \text{ p.p. } a < b \in \mathbb{R}\}$$

D'une façon analogue aux cas précédents, nous pouvons identifier K_h et $K_{h,\lambda}$ respectivement à

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; a \leq v_i \leq b\}$$

$$K_{M,\lambda} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; a \leq v_i \leq b \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{\psi} = I/\lambda\} .$$

REMARQUE II-6. Dans les exemples qui précèdent, nous avons

$$K_h \subset K \quad \forall h \quad (\text{cf. Remarque II-1}).$$

Voyons maintenant un exemple où cela n'est pas nécessairement vrai.

EXEMPLE 4. On considère

$$f \in C^0(\bar{\Omega}) , f \geq 0 \text{ sur } \bar{\Omega}$$

et

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; 0 \leq v \leq f \text{ p.p.}\} .$$

Alors on peut définir

$$K_h = \{v_h \in Y_h ; 0 \leq v_h \leq f_h \text{ sur } \bar{\Omega}\}$$

où f_h est l'interpolée de f dans Y_h , ie f_h est la fonction de Y_h telle que

$$f_h(P_i) = f(P_i) ,$$

qui peut être identifié à

$$K_M = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M ; 0 \leq v_i \leq f(P_i)\} .$$

Dans tous les exemples qui précèdent, $K_{h,\lambda}$ a pu être identifié à un convexe $K_{M,\lambda}$ de $\mathbb{R}^M$. Dans ce cas on peut calculer $P_h v_h$ par intermédiaire de $P_{M,\lambda}$, la projection canonique sur $K_{M,\lambda}$.

D'une façon générale, $K_{h,\lambda}$ étant donné, supposons qu'on l'ait identifié à un convexe $K_{M,\lambda}$ de $\mathbb{R}^M$. Alors

LEMME II-7 : Soient $v_h = \sum v_i \xi_i$ et $y_h = \sum y_i \xi_i$ deux fonctions de Y_h . Alors

$$y_h = P_h v_h$$

si et seulement si

$$(2.36) \quad \vec{y} = P_{M,\lambda} (\vec{y} - \mu A \vec{y} + \mu A \vec{v}) \quad \forall \mu > 0$$

avec $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$.

Démonstration :

$g_h \in K_{h,\lambda}$ si et seulement si $g_h = \sum g_i \xi_i$, et

$$\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_M) \in K_{M,\lambda}$$

Donc

$$y_h = \sum y_i \xi_i = P_h v_h \quad \text{si et seulement si}$$

$$y_h \in K_{h,\lambda} \text{ et } |y_h - v_h| \leq |g_h - v_h| \quad \text{pour tout } g_h \in K_{h,\lambda},$$

si et seulement si

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in K_{M,\lambda} \text{ et}$$

$$(\vec{y} - \vec{v}) A (\vec{y} - \vec{v}) \leq (\vec{g} - \vec{v}) A (\vec{g} - \vec{v}) \quad \text{pour tout } g \in K_{M,\lambda}$$

ce qui équivaut à

$$2A(\vec{y} - \vec{v}) + \partial I_{K_{M,\lambda}}(\vec{y}) \ni 0,$$

ou, d'une façon équivalente

$$\vec{y} = P_{K_{M,\lambda}} (\vec{y} - \mu A \vec{y} + \mu A \vec{v}) \quad \mu > 0.$$

L'équation (2.36) nous amène à définir le schéma itératif suivant :

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) on initialise par } \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^M \text{ quelconque} \\ \text{ii) } \vec{y}_k \text{ (} k = 0, 1, 2, \dots \text{) étant donné, on calcule} \\ \vec{y}_{k+1} = P_{K_{M,\lambda}} (\vec{y}_k - \mu A \vec{y}_k + \mu A \vec{v}) \end{array} \right.$$

Alors,

LEMME II-8 : Pour un choix convenable de $\mu > 0$ le schéma (2.37) converge vers l'unique solution de (2.36).

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour un choix convenable de μ , l'opérateur

$$T : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$$

$$\vec{Y} \mapsto T\vec{Y} = P_{K_{M,\lambda}}(\vec{Y} - \mu A\vec{Y} + \mu A\vec{V})$$

est une contraction stricte. Soit

$$0 < \alpha = \inf_{v \neq 0} \frac{\vec{v} A \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\vec{v} A \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \beta$$

Alors

$$\begin{aligned} |T\vec{Y}_1 - T\vec{Y}_2|^2 &= |\vec{Y}_1 - \mu A\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2 + \mu A\vec{Y}_2|^2 = \\ &= |\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2|^2 - 2\mu(A\vec{Y}_1 - A\vec{Y}_2; \vec{Y}_1 - \vec{Y}_2) + \mu^2 |A\vec{Y}_1 - A\vec{Y}_2|^2 \\ &\leq |\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2|^2 - 2\mu\alpha |\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2|^2 + \mu^2 \beta^2 |\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2|^2 \\ &= (1 - 2\mu\alpha + \mu^2 \beta^2) |\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2|^2 \end{aligned}$$

Donc, comme $0 < \alpha \leq \beta$

$$1 - 2\mu\alpha + \mu^2 \beta^2 < 1$$

pour tout $0 < \mu < 2\alpha/\beta$.

REMARQUE II-7 : Si $\alpha < \beta$ le schéma (2.37) converge avec vitesse optimale égale à

$$\sqrt{1 - (\alpha/\beta)^2}.$$

REMARQUE II-8 : Pour la résolution effective du problème (1.1), la formulation (1.4) (ou (2.1)) a l'avantage de ne pas avoir besoin de calculer θ à chaque itération de l'algorithme. Cet avantage est anéanti par le fait que la projection $P_{K_{M,\lambda}}$ est plus difficile à calculer que P_{K_M} en général. Néanmoins, pour l'exemple 1 cette projection $P_{K_{M,\lambda}}$ est très simple à déterminer. En effet, soit

$$(2.38) \quad C = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M; \vec{v} \geq 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{f} = c\} \quad \vec{f} \in \mathbb{R}^M \text{ avec } f_i > 0 \quad \forall i.$$

Nous présentons maintenant un procédé qui permet le calcul exact de la projection sur C par un nombre fini d'opérations très simples.

Soit $H = \{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^M ; \vec{\omega} \cdot \vec{f} = c\}$ avec $c, f_i > 0$. Pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$,

on pose

$$1^\circ. \vec{v}_0 = P_H \vec{y} = y - \frac{(\vec{y} \cdot \vec{f} - c)}{|\vec{f}|^2} \vec{f}$$

2°. $\vec{v}_k \in H$ étant donné $k \geq 0$ on pose

$$(2.39) \quad i) \vec{v}_{k+1/2} = \vec{v}_k^+ \text{ (c.a.d. } v_{k+1/2}^i = \max \{0, v_k^i\})$$

$$ii) \vec{v}_k \text{ défini par } f_k^i = \begin{cases} f^i & \text{si } v_{k+1/2}^i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$iii) \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_{k+1/2} - \frac{\vec{v}_{k+1/2} \cdot \vec{f}_k - c}{|\vec{f}_k|^2} \vec{f}_k$$

Alors nous avons

THEOREME II-9. Si $f_i > 0 \quad \forall i$ et $c > 0$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$

le schéma (2.39) converge vers $P_C y$ après un nombre fini d'itérations.

La démonstration est une conséquence directe des considérations suivantes.

LEMME II-9. Soit H un hyperplan et $K \subset H$ un convexe fermé d'un espace de Hilbert Y . Alors pour tout $y \in Y$ nous avons

$$P_K y = P_K P_H y.$$

Démonstration : en effet, par définition de projection

$$(y - P_K y ; P_K P_H y - P_K y) \leq 0$$

$$(P_H y - P_K P_H y ; P_K y - P_K P_H y) \leq 0$$

ce qui nous donne

$$|P_K P_H y - P_K y|^2 + (y - P_H y ; P_K P_H y - P_K y) \leq 0$$

H étant un hyperplan et $K \subset H$ nous avons

$$(y - P_H y ; P_K P_H y - P_K y) = 0$$

Donc

$$P_K P_H y = P_K y.$$

■

Soit C le convexe donné par (2.38) avec $f_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, M$, $c > 0$. Considérons l'opérateur A défini par

$$(2.40) \quad \begin{cases} A : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M \\ A\vec{v} = \vec{v}^+ - \left(\frac{\vec{v}^+ \cdot \vec{f} - c}{|\vec{f}|^2} \right) \vec{f} \end{cases}$$

où

$$f_i = \begin{cases} f_i & \text{si } v_i > 0 \\ 0 & \text{si } v_i \leq 0 \end{cases}$$

Alors A satisfait les propriétés suivantes :

LEMME II-10.

- i) pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^M$, $A\vec{v} \in H$. De plus, $\vec{v} \in C$ si et seulement si $A\vec{v} = \vec{v}$
- ii) si $v_i \leq 0$ alors $(A\vec{v})_i = 0$
- iii) pour tout $\vec{v} \in H$, $|A\vec{v}| \leq |\vec{v}^+| \leq |\vec{v}|$ et $|A\vec{v}| = |\vec{v}|$ si et seulement si $A\vec{v} = \vec{v} \in C$
- iv) pour tout $\vec{v} \in H$, il existe $k = k(\vec{v}) \in \mathbb{N}$, $k \leq M$, tel que $A^{k+j}\vec{v} = A^k\vec{v}$ pour tout $j \geq 1$.
- v) Pour tout $\vec{v} \in H$, $P_C(\vec{v}) = P_C(A\vec{v})$.

Démonstration : ii) est immédiat d'après la définition de A .

i) soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^M$. Alors

$$A\vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{v}^+ \cdot \vec{f} - \left(\frac{\vec{v}^+ \cdot \vec{f} - c}{|\vec{f}|^2} \right) \vec{f} \cdot \vec{f} = c$$

De plus, si $\vec{v} \in C$, alors $\vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{v}^+ \cdot \vec{f} = c$ et donc $A\vec{v} = \vec{v}$.

Supposons maintenant que $A\vec{v} = \vec{v}$. Alors $\vec{v} \in H$ et

$$c = \vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{v}^+ \cdot \vec{f} - \vec{v}^- \cdot \vec{f},$$

d'où nous obtenons

$$(2.41) \quad \vec{v}^+ \cdot \vec{f} = \vec{v}^- \cdot \vec{f} \geq c.$$

Alors $\vec{v} = \vec{v}^+ - \vec{v}^- = A\vec{v} = \vec{v}^+ - \left(\frac{\vec{v}^+ \cdot \vec{f} - c}{|\vec{f}|^2} \right) \vec{f}$ entraîne

$$v_i^- = \left(\frac{\vec{v}^+ \cdot \vec{f}_i}{|\vec{f}_i|^2} - c \right) f_i \geq 0 \quad \forall i$$

S'il existe i tel que $v_i^- > 0$, alors $f_i = f_i > 0$, ce qui est une absurdité d'après la définition de $\vec{f}$. Donc

$$v_i^- = 0 \quad \forall i$$

ce qui équivaut à $\vec{v} \in C$.

$$\text{iii)} \quad |\vec{A}\vec{v}|^2 = |\vec{v}^+|^2 - \frac{1}{|\vec{f}|^2} \left[(\vec{v}^+ \cdot \vec{f})^2 - c^2 \right] \text{ et d'après (2.41)}$$

$$|\vec{A}\vec{v}|^2 \leq |\vec{v}^+|^2 \leq |\vec{v}|^2$$

De plus, si $|\vec{A}\vec{v}| = |\vec{v}|$ alors

$$\vec{v} = \vec{v}^+$$

ce qui donne $\vec{f} = \vec{f}$ et

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{A}\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 - \frac{1}{|\vec{f}|^2} \left[(\vec{v} \cdot \vec{f})^2 - c^2 \right]$$

ou encore $\vec{v} \cdot \vec{f} = c$. Donc $\vec{v} \in C$, et d'après i)

$$\vec{A}\vec{v} = \vec{v}.$$

iv) Soit $\mathcal{J}(\vec{v}) = \{i ; v_i = 0\}$. D'après ii) nous avons

$$\mathcal{J}(\vec{v}) \subset \mathcal{J}(\vec{A}\vec{v}) \subset \mathcal{J}(\vec{A}^2\vec{v}) \subset \dots$$

Comme

$$\mathcal{J}(\vec{A}^j\vec{v}) \subset \{1, 2, \dots, M\} \quad \forall j,$$

il existe $k = k(\vec{v})$ tel que

$$\mathcal{J}(\vec{A}^k\vec{v}) = \mathcal{J}(\vec{A}^{k+j}\vec{v}) \quad \forall j \geq 1.$$

Donc, d'après ii)

$$(\vec{A}^k\vec{v})_i \geq 0 \quad \forall i$$

et d'après i)

$$\vec{A}^{k+j}\vec{v} = \vec{A}^k\vec{v} \in C \quad \forall j \geq 1.$$

v) Soit $\vec{v} \in H$. Si $\vec{v} \geq 0$, alors $\vec{v} \in C$ et

$$\vec{v} = P_C\vec{v} = P_C(\vec{A}\vec{v})$$

Supposons donc $\vec{v} \notin C$. Soient $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ toutes les coordonnées négatives de $\vec{v}$.

($k < M$ car $\vec{v} \in H = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^M : \vec{v} \cdot \vec{f} = c\}$ et $c, f_i > 0$), et soit

$$H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^M ; x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0\}.$$

Il est évident que

$$P_C \vec{v} = P_{C_1} \vec{v}$$

avec $C_1 = C \cap H_1$. D'après le Lemme II-9

$$P_{C_1} \vec{v} = P_{C_1} P_{H_1} \vec{v},$$

où $P_{H_1} \vec{v} = \vec{v}^+$.

Soit $\vec{f}_{\sim} = P_{H_1} \vec{f}$. Alors, comme

$$C_1 \subset H_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^M ; \vec{x} \vec{f}_{\sim} = c\}$$

nous avons

$$P_{C_1} \vec{v}^+ = P_{C_1} P_{H_1} \vec{v} = P_{C_1} P_{H_2} \vec{v} = P_{C_1} A \vec{v}.$$

Mais d'après ii)

$(A \vec{v})_{ij} = 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$, et donc

$$P_{C_1} A \vec{v} = P_C A \vec{v}.$$

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème II-9 :

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^M$ et soit $\vec{v}_0 = P_H \vec{y}$.

D'après le Lemme II-9

$$P_C \vec{y} = P_C \vec{v}_0.$$

Considérons la suite

$$\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_j, \dots$$

avec

$$\vec{v}_j = A^j \vec{v}_0 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

D'après le Lemme II-10, nous avons

$$P_C \vec{v}_0 = P_C \vec{v}_1 = P_C \vec{v}_2 = \dots$$

et il existe $k = k(\vec{v})$ tel que

$$A^{k+1} \vec{v}_0 = A^k \vec{v}_0 \quad c.$$

Donc

$$P_C \vec{y} = P_C A^k \vec{v}_0 = A^k \vec{v}_0.$$

CHAPITRE III

DEUX INEGALITES ISOPERIMETRIQUES ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous donnons des estimations concernant les solutions u du problème (1.1). Ces estimations sont essentiellement dues à deux inégalités générales :

- . La première est une inégalité de type isopérimétrique. Les résultats obtenus ici sont en majorité des cas particuliers d'un résultat général dû à J. Mossino [21] (communication personnelle, cf. aussi [22]).
- . La deuxième est une inégalité due à L.E. Payne et I. Stackgold [25] et généralisée par J. Mossino [21].

§ III-1. UNE INEGALITE ISOPERIMETRIQUE - APPLICATIONS.

Pour établir notre inégalité, quelques rappels sont nécessaires.

III-1.1. Rappels.

On considère un ensemble mesurable Ω de $\mathbb{R}^N$ et u une fonction mesurable définie dans Ω .

DEFINITION III-1. On appelle "fonction de distribution de u " l'application mesurable μ_u définie par

$$\mu_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\mu_u(t) = \text{mes} \{x ; u(x) > t\}$$

μ_u jouit des propriétés suivantes :

- 1i) μ_u est monotone décroissante ;
- 1ii) μ_u est p.p. différentiable (puisque monotone) ;
- 1iii) μ_u est continue à droite, c'est-à-dire,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mu_u(t) = \mu_u(t_0)$$

DEFINITION III-2. On appelle "réarrangement décroissant de u "

l'application u^* définie par :

$$u^* : [0, |\Omega|] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u^*(s) = \inf \{t \in \mathbb{R} ; \mu_u(t) < s\}$$

$$u^*(0) = \sup_{\Omega} \text{ess } u$$

u^* jouit de propriétés remarquables. En particulier :

2i) u^* est la plus petite fonction décroissante v , telle que $v(\mu_u(t)) \geq t, \forall t$.

2ii) u et u^* ont la même fonction de distribution, c'est-à-dire $\mu_u = \mu_{u^*}$.

$$2iii) \text{ pour tout } p > 0, \int_{\Omega} |u|^p = \int_0^{|\Omega|} |u^*(t)|^p dt$$

$$2iv) \sup \text{ess } u = \sup \text{ess } u^* = u^*(0^+).$$

DEFINITION III-3. On appelle "réarrangement sphérique de u "

l'application $\tilde{u}$ définie par

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{u}(x) = u^*(\alpha_N |x|^N) = \inf \{t ; \mu_u(t) < \alpha_N |x|^N\}$$

$$\text{où } \alpha_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N+2}{2})} \text{ est la mesure de la boule unitaire dans } \mathbb{R}^N.$$

$\tilde{u}$ satisfait

3i) les ensembles de niveau de $\tilde{u}$, ie, $\{x ; \tilde{u}(x) > t\}$ sont des boules concentriques dont la mesure coïncide avec la mesure des ensembles de niveau de u . En particulier

$$\mu_u(t) = \mu_{\tilde{u}}(t) \quad \forall t.$$

$$3ii) \text{ pour tout } p > 0, \int_{\Omega} |u|^p = \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}|^p$$

où $\tilde{\Omega}$ est la boule de rayon $R = \left(\frac{|\Omega|}{\alpha_N}\right)^{1/N}$

$$3iii) \sup_{\tilde{\Omega}} \text{ess } \tilde{u} = \sup_{\Omega} \text{ess } u$$

Une autre propriété importante - et qui nous sera fort utile - est le résultat suivant, dû à Hardy et Littlewood : si u et v sont deux fonctions mesurables définies dans Ω , alors

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} uv \leq \int_0^{|\Omega|} u^* v^* \leq \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u} \tilde{v}$$

En particulier, lorsque $v = \chi_{\Omega'}$ avec Ω' sous-ensemble mesurable de Ω , on peut conclure :

$$v^* = \chi_{(0, |\Omega'|)} \quad \text{et} \quad \tilde{v} = \chi_{\tilde{\Omega}'}$$

Donc (3.1) nous donne

$$(3.2) \quad \int_{\Omega'} u \leq \int_0^{|\Omega'|} u^*(s) ds = \int_{\tilde{\Omega}'} \tilde{u}$$

De plus, si Ω est une boule de rayon L et de centre x_0 et $u(x) = g(|x-x_0|)$ avec g continue et strictement décroissante dans $[0, L)$, alors $\tilde{u}(x) = u(x)$ p.p. et

$$(3.3) \quad \int_{\Omega'} u(x) = \int_0^{|\Omega'|} u^*(s) ds = \int_{\tilde{\Omega}'} \tilde{u}(x)$$

pour toute Ω' boule de centre x_0 et rayon $R \leq L$.

En effet, si g est strictement décroissante dans $[0, L)$ elle y est inversible. Soit donc $x \in \Omega$ tel que

$$t = u(x) = g(|x-x_0|).$$

Par définition nous avons

$$\tilde{u}(x) = u^*(\alpha_N |x-x_0|^N) = u^*(\mu_u(t)) = t.$$

§ III-1.2 La première inégalité.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir notre première inégalité. C'est le résultat suivant (dû à J. Mossino).

THEOREME III-1. Soit Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, et

soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors, pour presque tout $t \in]A, B[$ avec

$$A = \max \left\{ \inf_{\Omega} \text{ess } u, \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u \right\}$$

$$B = \sup_{\Omega} \text{ess } u$$

nous avons

$$(3.4) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \left(\int_{u>t} -\Delta u \right) (-\mu'_u(t))$$

où $\int_{u>t}$ désigne l'intégrale sur $\{x ; u(x) > t\}$

De plus, l'inégalité (3.4) devient une égalité si

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } c = \{x \in \Omega ; A < u(x) \leq B\} \text{ est une couronne à symétrie} \\ \text{sphérique (limitée par des sphères de rayon } 0 \leq R_A \leq R_B \text{).} \\ \text{ii) Comme fonction du rayon } r, u \text{ est strictement décroissante} \\ \text{et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ dans } [R_A, R_B]. \end{array} \right.$$

Démonstration : c'est une conséquence des lemmes suivants :

LEMME III-1 : Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors, pour presque tout $t \in]A, B[$

(A et B donnés dans le Théorème III-1) nous avons

$$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| = P_{\Omega}(\{x ; u(x) > t\})$$

$P_{\Omega}(E)$ désignant le périmètre (au sens de De Giorgi) de E dans Ω , c'est-à-dire :

$$P_{\Omega}(E) = \sup \left\{ \int_E \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} ; \phi_i \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega), \max_{\Omega} \phi_i^2(x) \leq 1 \right\}$$

Démonstration : D'après Fleming et Rischel [10], pour $u \in H^1(\Omega)$

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} |\nabla u| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Omega}(\{x ; u(x) > s\}) ds.$$

Pour $t \in]A, B[$ fixé, soit

$$u' = (u-t)^+ + t$$

Alors $u' \in H^1(\Omega)$ et d'après (3.6)

$$\int_{\Omega} |\nabla u'| = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Omega}(\{x ; u'(x) > s\}) ds$$

Mais si $s < t$, alors $\{x ; u'(x) > s\} = \Omega$ et donc

$$P_{\Omega}(\{x ; u'(x) > s\}) = 0$$

Si $s \geq t$, alors $\{x ; u'(x) > s\} = \{x ; u(x) > s\}$ et donc

$$P_{\Omega}(\{x ; u'(x) > s\}) = P_{\Omega}(\{x ; u(x) > s\})$$

Donc

$$\int_{u>t} |\nabla u| = \int_{\Omega} |\nabla u'| = \int_{-t}^{+\infty} P_{\Omega}(\{x ; u(x) > s\}) ds$$

d'où

$$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| = P_{\Omega}(\{x ; u(x) > t\}) \text{ p.p.}$$

LEMME III-2. Si $u \in H^2(\Omega)$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} \Delta u$$

pour presque tout $t \in]A, B[$.

Démonstration : Soit $f = -\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\int -\Delta u \psi = \int f \psi \quad \forall \psi \in L^2(\Omega).$$

Considérons $\psi = (u-t)^+ + t$ avec $t \in]A, B[$. Alors $\psi \in H^1(\Omega)$ et nous avons

$$\int_{\Omega} -\Delta u \psi = \int_{u>t} f(u-t) + t \int_{\Omega} f$$

De plus,

$$\int_{\Omega} -\Delta u \psi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi = \int_{u>t} |\nabla u|^2 - t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$$

Donc

$$\int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} f(u-t)$$

Il suffit de démontrer donc que

$$\frac{d}{dt} \int_{u>t} f(u-t) = - \int_{u>t} f.$$

Or, pour tout $h > 0$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{1}{h} \left[\int_{u>t+h} f(u-t-h) - \int_{u>t} f(u-t) \right] &= \frac{1}{h} \left[- \int_{u>t+h} fh - \int_{t<u \leq t+h} f(u-t) \right] \\ &= - \int_{u>t+h} f - \frac{1}{h} \int_{t<u \leq t+h} f(u-t) \end{aligned}$$

On veut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[- \int_{u>t+h} f - \frac{1}{h} \int_{t<u \leq t+h} f(u-t) \right] = - \int_{u>t} f$$

Soit $H_h = f \chi_{\{x; u(x) > t+h\}}$ et $H_0 = f \chi_{\{x; u(x) > t\}}$

H_h et H_0 sont mesurables, $H_h \rightarrow H_0$ p.p. et $|H_h(x)| \leq |f(x)|$ p.p..

Donc, d'après le théorème de Lebesgue

$$\int H_h \rightarrow \int H_0$$

c'est-à-dire

$$\int_{u>t+h} f \rightarrow \int_{u>t} f$$

De plus

$$\left| \frac{1}{h} \int_{t<u \leq t+h} f(u-t) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{t<u \leq t+h} |f| |u-t| \leq \int_{t<u \leq t+h} |f|$$

et de nouveau d'après le théorème de Lebesgue (puisque

$H_h = |f| \chi_{\{x; t < u \leq t+h\}} \rightarrow 0$ p.p.), nous avons

$$\frac{1}{h} \int_{t<u \leq t+h} f(u-t) \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & -\frac{1}{h} \left[\int_{u>t-h} f(u-t+h) - \int_{u>t} f(u-t) \right] = -\frac{1}{h} \left[\int_{u>t-h} fh + \int_{t-h<u\leq t} f(u-t) \right] \\ & = - \int_{u>t-h} f - \frac{1}{h} \int_{t-h<u\leq t} f(u-t) \end{aligned}$$

Les raisonnements précédents nous donnent :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{u>t-h} f = \int_{u \geq t} f$$

et

$$\left| \frac{1}{h} \int_{t-h<u\leq t} f(u-t) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{t-h<u\leq t} |f| |u-t| \leq \int_{t-h<u\leq t} |f|$$

Donc, pour tout t tel que $\text{mes} \{x; u(x) = t\} = 0$, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{h} \left[\int_{u>t-h} f(u-t+h) - \int_{u>t} f(u-t) \right] = - \int_{u>t} f$$

i) et ii) sont équivalents à

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{u>t+h} |\nabla u|^2 - \int_{u>t} |\nabla u|^2 \right] = \int_{u>t} \Delta u$$

pourvu que $\text{mes} \{x; u(x) = t\} = 0$.

Comme $\{t \in]A, B[; \text{mes} \{x; u(x) = t\} = 0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u|^2 = \int_{u>t} \Delta u \quad \text{pour presque tout } t \in]A, B[.$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème III-1.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(3.7) \quad \left(\frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} |\nabla u| \right)^2 \leq \left(\frac{1}{h} \int_{t<u\leq t+h} |\nabla u|^2 \right) \frac{1}{h} [\mu_u(t) - \mu_u(t+h)]$$

D'après les lemmes précédents et la propriété 1ii) nous avons

$$(3.8) \quad P(\{x; u(x) > t\})^2 \leq \left(\int_{u>t} -\Delta u \right) (-\mu'_u(t))$$

D'après l'inégalité isopérimétrique de De Giorgi

$$(3.9) \quad P(\{x; u(x) > t\}) \geq N \alpha_N^{1/N} \mu_u^{1-1/N}(t)$$

(l'égalité étant atteinte si u a la symétrie sphérique et décroît le long du rayon).

Donc (3.8) et (3.9) entraînent (3.4).

Pour finir la démonstration, il suffit de démontrer que l'égalité est atteinte dans (3.4). Pour ce faire, supposons (3.5).

Alors, pour tout $t \in]A, B[$

$$\mu_u(t) = \text{mes} \{x; u(x) > t\} = r^N(t) \alpha_N$$

où $r(t)$ désigne le rayon de la boule

$$\{x; u(x) > t\} \subset \{x; u(x) > A\}.$$

Donc

$$(3.10) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) = N^2 \alpha_N^2 r(t)^{2N-2}$$

De plus

$$\mu'_u(t) = N \alpha_N r(t)^{N-1} r'(t) \quad \text{p.p. } t$$

et

$$(3.11) \quad \int_{u>t} -\Delta u = - \int_{u=t} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = - u'(r(t)) \int_{u=t} d\Gamma$$

$$= N \alpha_N r(t)^{N-1} u'(r(t))$$

Donc

$$\left(\int_{u>t} -\Delta u \right) (-\mu'_u(t)) = N^2 \alpha_N^2 r^{2N-2}(t) \frac{d}{dt} u(r(t)) \quad \text{p.p.}$$

Comme u est strictement décroissante (par rapport à r),

$$\text{mes} \{x; u(x) = t\} = 0 \quad \forall t$$

et

$$u(r(t)) = t$$

Donc

$$\frac{d}{dt} (u(r(t))) = 1$$

et nous avons l'égalité dans (3.4).

III-1.3 Applications.

Nous envisageons maintenant l'application du Théorème III-1 aux solutions des problèmes du type (1.1). Comme dans le Théorème III-1, nous supposons $N \geq 2$.

K étant toujours un convexe fermé de $L^2(\Omega)$, on considère u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda P_K u \\ u = \theta \phi \\ \lambda \int P_K(u) \psi = I \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et d'après le Théorème III-1

$$(3.13) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \lambda \int_{u>t} P_K u (-\mu'_u(t))$$

pour presque tout t tel que

$$(3.14) \quad t \in (\max(\inf_{\Omega} \text{ess } u, \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u) ; \sup_{\Omega} \text{ess } u)$$

En particulier, si $\psi \equiv 1$ (3.13) et (3.14) deviennent :

$$(3.15) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(t) \leq \lambda \int_{u>t} P_K u (-\mu'_u(t)) \quad \text{p.p. } t > \theta$$

L'inéquation (3.15) nous permettra d'obtenir quelques informations sur les exemples traités au chapitre I, §I-4.

EXEMPLE 1. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; a \leq v \leq b \text{ p.p. avec } 0 \leq a < b\}$$

Soit u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda [a + (u-a)^+ - (u-b)^+] & \text{dans } \Omega \\ u = \theta & \text{sur } \partial\Omega \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I \end{cases}$$

où la première équation est prise au sens des distributions. Nous avons remarqué (cf. ch. I, §I-3) que $u \in C^2(\Omega)$. Alors

THEOREME III-2 :

i) Si $\theta \leq a \leq \max_{\overline{\Omega}} u$ alors

$$(3.16) \quad \theta \geq \begin{cases} a - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \left[|u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1} \right] - \frac{\lambda a}{2N\alpha_N^{2/N}} \left[|\Omega|^{\frac{2}{N}} - |u>a|^{\frac{2}{N}} \right] & \text{si } N > 2, \\ a - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{4\pi} \log \frac{|\Omega|}{|u>a|} - \frac{\lambda a}{4\pi} \left[|\Omega| - |u>a| \right] & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

où $|u>a| = \text{mes} \{x; u(x) > a\} = \mu_u(a)$ (avec la convention $0x^\infty = 0$ si $a = \max_{\overline{\Omega}} u$).

ii) Si $\theta \leq b < \max_{\overline{\Omega}} u$ alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq b + \frac{\lambda b}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>b|^{2/N}$$

Ces inégalités deviennent des égalités lorsque Ω est une boule.

Démonstration :

i) Si $\theta < a$, alors pour $\theta \leq \xi \leq a$

$$\begin{aligned} \lambda \int_{u>\xi} p_K u &= \lambda \int_{\Omega} p_K u - \lambda \int_{u \leq \xi} p_K u = I - \lambda a \int_{u \leq \xi} dx \\ &= I - \lambda a (|\Omega| - \mu_u(\xi)) \end{aligned}$$

Donc, d'après (3.15)

$$N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(\xi) \leq (I - \lambda a |\Omega|) (-\mu_u'(\xi)) + \lambda a \mu_u(\xi) (-\mu_u'(\xi))$$

Comme nécessairement $I - \lambda a |\Omega| \geq 0$ (d'après la condition nécessaire d'existence) et comme $\lambda a \geq 0$ (puisque $a \geq 0$ entraîne $\lambda > 0$), on obtient :

$$\int_{\theta}^a d\xi \leq - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^{|u>a|} s^{2/N-2} ds - \frac{\lambda a}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^{|u>a|} s^{2/N-1} ds$$

d'où (il faut remarquer que $-\mu'_u(\xi) d\xi \leq d(-\mu_u(\xi))$)

$$a - \theta \leq - \frac{(1-\lambda a|\Omega|)N}{N^{2\alpha_N} 2^{2/N} (2-N)} \{ |u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1} \} - \\ - \frac{\lambda a}{N^{2\alpha_N} 2^{2/N}} \left(\frac{N}{2}\right) \{ |u>a|^{\frac{2}{N}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}} \} \quad \text{si } N > 2$$

ou encore

$$\theta \geq a - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{N(N-2)\alpha_N 2^{2/N}} \{ |u>a|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1} \} - \frac{\lambda a}{2N\alpha_N 2^{2/N}} \{ |\Omega|^{\frac{2}{N}} - |u>a|^{\frac{2}{N}} \} \\ \text{si } N > 2$$

ou

$$a - \theta \leq - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{4\pi} \{ \log |u>a| - \log |\Omega| \} - \frac{\lambda a}{4\pi} \{ |u>a| - |\Omega| \} \\ \text{si } N = 2$$

ce qui nous donne

$$\theta \geq a - \frac{1-\lambda a|\Omega|}{4\pi} \log \frac{|\Omega|}{|u>a|} - \frac{\lambda a}{4\pi} \{ |\Omega| - |u>a| \}$$

ii) Supposons maintenant $\theta \leq b < \max_{\overline{\Omega}} u$. Alors pour

$$b \leq \xi \leq \max_{\overline{\Omega}} u$$

$$\lambda \int_{u>\xi} p_K u = \lambda b \mu_u(\xi)$$

Dans ce cas, (3.15) s'écrit

$$N^{2\alpha_N} 2^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(\xi) \leq \lambda b \mu_u(\xi) (-\mu'_u(\xi))$$

Donc

$$\int_b^{\max u} d\xi \leq \frac{\lambda b}{N^{2\alpha_N} 2^{2/N}} \int_b^{\max u} \mu_u^{2/N-1}(\xi) (-\mu'_u(\xi)) d\xi$$

ce qui nous donne

$$\max_{\Omega} u \leq b + \frac{\lambda b}{2N\alpha_N 2^{2/N}} |u>b|^{2/N}$$

Lorsque Ω est une boule, la solution u vérifie la condition (3.5) ; c'est une conséquence du principe du maximum et d'un résultat de Gidas-Ni-Nirenberg [12] (cf. aussi P.L. Lions [17]). De plus d'après la régularité de u dans ce cas, nous avons

$$d(-\mu_u(\xi)) = -\mu'_u(\xi)d\xi.$$

Donc, toutes les inégalités précédentes deviennent des égalités.

REMARQUE III-2. Lorsque $a \equiv 0$, (3.16) se simplifie et devient :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} &\text{si } \theta \leq a < \max_{\overline{\Omega}} u \\ &\theta \geq \begin{cases} -\frac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \{ |u>0|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1} \} & \text{si } N > 2 \\ -\frac{I}{4\pi} \log \frac{|\Omega|}{|u>0|} & \text{si } N = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On voit facilement que les expressions (3.17) sont encore valables si u est une solution de (3.14) avec :

- i) $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$
- ii) $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ et } |v|_{L^2} \leq 1\}.$

En fait, l'inégalité (3.17) est valable pour toute solution de problèmes du type

$$\begin{cases} -\Delta u = \begin{cases} \lambda f(x,u) & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u = \theta & \text{sur } \partial\Omega \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I \end{cases}$$

(avec $f(x, \cdot) \geq 0$ p.p. $x \in \Omega$), lorsque $\theta \leq 0$ (cf. Mossino-Temam [24]).

EXEMPLE 3. On considère

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ et } |v|_{L^2} \leq 1\}$$

Si u est solution de

$$(3.18) \quad \begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{1 + (|u^+|_{L^2} - 1)^+} u^+ & \text{dans } \Omega \\ u = \theta & \text{sur } \partial\Omega \\ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I > 0 \end{cases}$$

Nous remarquons que $\max_{\bar{\Omega}} u > 0$ et même

$$\max_{\bar{\Omega}} u \geq \frac{I}{\lambda |\Omega|} > 0$$

puisque $I/\lambda = \int P_K u \leq \max_{\bar{\Omega}} u |\Omega|$

Nous avons :

THEOREME III-3 : On suppose $\theta \leq 0$. Alors

$$i) \quad \theta \geq \begin{cases} - \frac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \{ |u>0|^{\frac{2}{N}-1} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-1} \} & \text{si } N > 2 \\ \frac{I}{4\pi} \log \frac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

(cette inégalité étant isopérimétrique)

$$ii) \quad \theta \geq \begin{cases} - \frac{2\lambda}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \{ |u>0|^{\frac{4-N}{2N}} - |\Omega|^{\frac{4-N}{2N}} \} & \text{si } N \geq 2 \\ \frac{\lambda}{8\sqrt{2}\pi} \log \frac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

$$iii) \quad \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{2}{N}} \geq 1$$

En outre, on a, soit $|u^+|_{L^2} \leq 1$, soit

$$1 < |u^+|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{2}{N}}$$

$$\text{iv)} \quad \max_{\Omega} u \geq \frac{2N\alpha_N^{2/N}}{\lambda} \frac{\theta}{(|u>0|^{2/N} - |\Omega|^{2/N})}$$

Dans le cas $N = 2$ ou 3 on a encore

$$\text{v)} \quad \max_{\Omega} u \leq \begin{cases} \frac{2\lambda}{N(4-N)\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{\frac{4-N}{2N}} & \text{si } \theta \leq 0 \\ \frac{2\lambda}{N(4-N)\alpha_N^{2/N}} |\Omega|^{\frac{4-N}{2N}} + \theta & \text{si } \theta \geq 0 \end{cases}$$

Les inégalités ii) à v) ne sont pas isopérimétriques.

Démonstration : La partie i) est identique à celle du théorème précédent (cf. remarque III-3).

On suppose $\theta \leq 0$. Alors, d'après (3.15)

$$(3.19) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(\xi) \leq \lambda \int_{u>\xi} P_K u (-\mu'_u(\xi)) \quad \text{p.p. } \xi > \theta$$

Puisque $|P_K u|_{L^2} \leq 1$ on obtient, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(3.20) \quad 1 \leq \frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \mu_u^{2/N-3/2}(\xi) (-\mu'_u(\xi)) \quad \text{p.p. } \xi > \theta$$

Si on intègre (3.20) de θ à 0 (puisque $\max u \geq \frac{1}{\lambda|\Omega|} > 0$),

$$\begin{aligned} -\theta &\leq -\frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^{|u>0|} s^{2/N-3/2} ds \\ &= \begin{cases} -\frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N} (\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} \{ |u>0|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}} \} & \text{si } N \neq 4 \\ \frac{\lambda}{16\sqrt{\alpha_4}} \log \frac{|\Omega|}{|u>0|} & \text{si } N = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\alpha_N = \frac{\Pi^{N/2}}{\Gamma(1 + N/2)}$ on obtient (ii)

Si on intègre (3.20) de 0 à $\max_{\bar{\Omega}} u$, alors pour $N < 4$:

$$0 \leq \max_{\bar{\Omega}} u \leq \frac{-\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \int_{|u>0|}^0 s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} ds = \frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N} (\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} |u>0|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}$$

Si $\theta \geq 0$, on intègre (3.20) de θ à $\max_{\bar{\Omega}} u$ pour avoir

$$\max_{\bar{\Omega}} u - \theta \leq - \frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \int_{|\Omega|}^0 s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} ds = \frac{\lambda}{N^2 \alpha_N^{2/N} (\frac{2}{N}-\frac{1}{2})} |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}$$

d'où l'expression dans (v).

Pour démontrer (iii) et (iv), on considère (3.19). Alors, d'après (3.18) :

$$(3.21) \quad N^2 \alpha_N^{2/N} \mu_u^{2-2/N}(\xi) \leq \lambda c(u) \int_{u>\xi} u^+ (-\mu'_u(\xi))$$

avec $c(u) = 1$ si $|u^+|_{L^2} \leq 1$ et $c(u) = 1/|u^+|$ sinon.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(3.22) \quad 1 \leq \frac{\lambda c(u)}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \max u \mu_u^{2/N-1}(\xi) (-\mu'_u(\xi))$$

On intègre (3.22) de θ à 0 pour avoir

$$-\theta \leq - \frac{\lambda c(u)}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \max u \int_{|\Omega|}^{|u>0|} s^{2/N-1} ds$$

Comme $c(u) \leq 1$ on obtient (iv)

Si on intègre (3.22) de 0 à $\max_{\bar{\Omega}} u$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\max_{\bar{\Omega}} u} d\xi &\leq \frac{\lambda c(u)}{N^2 \alpha_N^{2/N}} \max_{\bar{\Omega}} u \int_{|u>0|} s^{2/N-1} ds \\ &= \frac{\lambda c(u)}{2N \alpha_N^{2/N}} \max_{\bar{\Omega}} u |u>0|^{2/N} \end{aligned}$$

Donc

$$1 \leq \frac{\lambda c(u)}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \leq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N}$$

d'où, soit

$$|u^+|_{L^2} \leq 1 \leq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N}$$

soit

$$1 < |u^+|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N}.$$

COROLLAIRE III-1. Pour λ assez petit il n'y a pas de frontière

libre dans le problème (3.18). Plus précisément, si

$$\lambda < 2N \left(\frac{\alpha_N}{|\Omega|} \right)^{2/N}$$

alors $\theta > 0$.

Démonstration. D'après le Théorème III-3, iii), si $\theta \leq 0$,

$$\frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \geq 1$$

ou encore

$$\lambda \geq 2N \left(\frac{\alpha_N}{|u>0|} \right)^{2/N} \geq 2N \left(\frac{\alpha_N}{|\Omega|} \right)^{2/N}$$

Dans le cas $N = 2$, on a d'autres informations concernant le problème (3.18), à savoir :

THEOREME III-4. On suppose toujours $\theta \leq 0$. Si $N = 2$, alors

$$i) \text{ Si } \lambda \geq \frac{I^2}{4\pi} \text{ on a } |u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\pi\lambda} \right)^{1/2} \leq 1$$

$$ii) \text{ Si } \lambda < \frac{I^2}{4\pi} \text{ on a :}$$

$$\text{soit } |u^+|_{L^2} \leq 1 \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

$$\text{soit } 1 < |u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

Par conséquent :

$$\text{iii)} \quad \text{Si } \lambda \geq \frac{I^2}{4\pi} \quad \text{alors} \quad \max_{\Omega} u \leq \frac{\sqrt{\lambda} I}{3\pi\sqrt{\pi}} |u>0|^{1/2}$$

$$\text{iv)} \quad \text{Si } \lambda < \frac{I^2}{4\pi} \quad \text{alors} \quad \max_{\Omega} u \leq \frac{I^2}{8\pi^2} |u>0|^{1/2}$$

Démonstration. Lorsque $N = 2$ l'inéquation (3.21) prend la forme

$$(3.23) \quad 4\pi\mu_u(\xi) \leq \lambda c(u) \int_{u>\xi} u^+(-u'_u(\xi)) \quad \text{p.p. } \xi \geq \theta$$

Donc, si $\theta \leq 0$, pour $0 \leq \xi \leq \max_{\Omega} u$, on a d'après (3.2)

$$(3.24) \quad 4\pi\mu_u(\xi) \leq \lambda c(u) \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s) ds \right) (-\mu'_u(\xi))$$

Si on multiplie les deux côtés de (3.24) par $2\xi(>0)$ et on intègre de 0 à ∞ , on obtient :

$$\begin{aligned} 8\pi \int_0^\infty \xi \mu_u(\xi) d\xi &\leq 2\lambda c(u) \int_0^\infty \xi \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s) ds \right) (-\mu'_u(\xi)) d\xi \\ &\leq \lambda c(u) \int_0^\infty 2u^*(\mu_u(\xi)) \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s) ds \right) (-\mu'_u(\xi)) d\xi \\ &= -\lambda c(u) \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^{\mu_u(\xi)} u^*(s) ds \right)^2 d\xi \leq \lambda c(u) \left(\int_0^{\mu_u(0)} u^*(s) ds \right)^2 \\ &= \lambda c(u) \left(\int_{u>0} u \right)^2 = \frac{\lambda}{c(u)} \left(\int_{P_K} u \right)^2 = \frac{I^2}{\lambda c(u)} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\infty 2\xi \mu_u(\xi) d\xi \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda c(u)}$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2\xi \mu_u(\xi) d\xi &= \int_0^\infty 2\xi \left(\int_{\Omega} \chi_{\{u>\xi\}} dx \right) d\xi = \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty 2\xi \chi_{\{u>\xi\}} d\xi \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^{u(x)} 2\xi d\xi \right) = |u^+|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Donc

$$|u^+|_{L^2}^2 \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda c(u)}$$

ou encore

$$c(u) |u^+|_{L^2}^2 \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

Si $|u^+|_{L^2} \leq 1$, alors $c(u) = 1$ et

$$|u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\pi\lambda}\right)^{1/2}$$

Si $|u^+|_{L^2} > 1$, alors $c(u) = \frac{1}{|u^+|_{L^2}}$ et

$$|u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

Donc, si $\lambda \geq I^2/4\pi$, alors

$$|u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\pi\lambda}\right)^{1/2} \leq 1$$

Par contre, si $\lambda < I^2/4\pi$, alors :

$$\text{soit } |u^+|_{L^2} \leq 1 < \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

$$\text{soit } 1 < |u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\pi\lambda}$$

On revient à l'inéquation (3.23). Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, comme $c(u) \leq 1$,

$$4\pi\mu_u(\xi) \leq \lambda |u^+|_{L^2} \mu_u^{1/2}(\xi) (-\mu'_u(\xi))$$

ou

$$1 \leq \frac{\lambda |u^+|_{L^2}}{4\pi} \mu_u^{-1/2}(\xi) (-\mu'_u(\xi))$$

Donc, si $\theta \leq 0$, par intégration de 0 à $\max_{\overline{\Omega}} u$:

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \frac{\lambda |u^+|_{L^2}}{4\pi} \int_0^{|u>0|} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{\lambda |u^+|_{L^2}}{2\pi} |u>0|^{1/2}$$

Si $\lambda \geq \frac{I^2}{4\pi}$ alors d'après i)

$$|u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\pi\lambda}\right)^{1/2}$$

et

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \frac{\sqrt{\lambda} I}{4\pi\sqrt{\pi}} |u>0|^{1/2}$$

Si $\lambda < \frac{I^2}{4\pi}$ alors d'après ii)

$$\lambda |u^+|_{L^2} \leq \frac{I^2}{4\pi}$$

et nous avons

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \frac{I^2}{8\pi^2} |u>0|^{1/2}.$$

Nous pouvons dire que le problème (3.18) est local si $|u^+|_{L^2} \leq 1$, le deuxième membre de la 1ère équation (3.18) se réduisant à λu^+ . Comme conséquence immédiate du Théorème III-4, nous avons

COROLLAIRE III-2. Dans le cas $N = 2$, une condition nécessaire pour que le problème (3.18) soit non local est

$$\lambda < \frac{I^2}{4\pi}$$

REMARQUE III-3. Pour l'exemple

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

nous avons

$$P_K u = u^+.$$

Donc la plupart des raisonnements précédents sont valables ; il suffit de considérer $c(u) \equiv 1$ dans (3.21). Plus précisément :

EXEMPLE 3 : Soit

$$K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p.}\}$$

Si u est solution de

$$(3.25) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ & \text{dans } \Omega \\ u = \theta & \text{sur } \partial\Omega \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I \end{cases}$$

THEOREME III-5. On suppose $\theta \leq 0$. Alors

$$i) \quad \theta \geq \begin{cases} -\frac{I}{N(N-2)\alpha_N^{2/N}} \{ |u>0|^{2/N-1} - |\Omega|^{2/N-1} \} & \text{si } N > 2 \\ \frac{I}{4\pi} \log \frac{|u>0|}{|\Omega|} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

$$ii) \quad \frac{\lambda}{2N\alpha_N^{2/N}} |u>0|^{2/N} \geq 1$$

$$iii) \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \frac{2N\alpha_N^{2/N}}{\lambda} \frac{\theta}{(|u>0|^{2/N} - |\Omega|^{2/N})}$$

De plus, si $N = 2$ alors

$$iv) \quad |u^+|_{L^2} \leq \left(\frac{I^2}{4\pi\lambda} \right)^{1/2}$$

$$v) \quad \max_{\Omega} u \leq \frac{I\sqrt{\lambda}}{4\pi\sqrt{\pi}} |u>0|^{1/2}$$

Seules les inégalités i) et iv) sont isopérimétriques.

§ III-2. LA DEUXIEME INEGALITE - APPLICATIONS.

Nous passons maintenant à la deuxième inégalité ; elle nous permettra d'obtenir des estimations ponctuelles pour $\forall u$, avec u solution des problèmes du type (1.1).

Les applications qu'on envisage ici sont inspirées des travaux de I. Stackgold [32] et J. Mossino [21]. Elles sont les conséquences directes d'une inégalité générale due à L.E. Payne et I. Stackgold [25] (cf. aussi R. Sperb [30]) et généralisée par J. Mossino dans [21].

Pour ce faire, on considère Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\varepsilon}$ et u solution de :

$$(3.26) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = \text{cte} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction continue positive ($f(u) \neq 0$). On fait l'hypothèse :

$$(3.27) \quad u \in W^{3,q}(\Omega) \quad q > N \geq 2$$

Or, d'après le théorème d'immersion de Sobolev nous avons

$$u \in C^{2,\nu}(\bar{\Omega}) \quad \text{avec } 0 < \nu \leq 1 - N/q$$

Alors

THEOREME III-6. Pour tout $x \in \bar{\Omega}$

$$(3.28) \quad 1/2 |\nabla u(x)|^2 \leq \int_{u(x)}^{\max u} (\alpha + f(s)) ds$$

$$\text{où } \alpha = \max \{0, (N-1) \max_{\partial\Omega} k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)\}$$

$k(x)$ étant la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au point x ($k(x) \geq 0$ si Ω est convexe).

Démonstration. On considère pour tout $x \in \Omega$

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 - \int_{u(x)}^{\max u} f(s) ds + \alpha u(x)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à choisir convenablement. Alors, d'après la régularité de u et f

$$J \in C^1(\bar{\Omega}).$$

En différenciant J par rapport à x_i on obtient

$$(3.29) \quad \frac{\partial J}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

et d'après (3.26)

$$(3.30) \quad \frac{\partial J}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Vu les hypothèses (3.27), toutes les dérivées dans le second membre de (3.30) sont dans $H^1(\Omega)$. De plus, d'après l'hypothèse (3.27) on peut différencier (3.30) au sens faible (cf. Gilbert-Trudinger (théor. 7.4) [13]).

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i^2} &= \sum_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 + \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i^2} - \sum_j \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2 \partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &\quad - \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

et

$$(3.31) \quad \Delta J = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 + (\alpha - \Delta u) \Delta u.$$

Si on dénote g le deuxième membre de (3.31), alors

$$g \in C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$$

De plus, si $x \in \partial\Omega$, alors

$$J(x) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right|^2 - \int_c^{\max u} f(s) ds + \alpha c \in C^0(\partial\Omega)$$

Donc, (cf. D. Gilbert-N.S. Trudinger [13], Théorème 6.13)

$$J \in C^{2,\nu}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Considérons $P \in \overline{\Omega}$ tel que $J(P) = \max_{x \in \overline{\Omega}} J(x)$

Deux possibilités se présentent :

. Soit $P \in \partial\Omega$, soit $P \in \Omega$.

On va montrer que, pour un choix convenable de α , P ne peut pas appartenir à $\partial\Omega$. Pour cela, vu la régularité de $\partial\Omega$, on introduit un système de coordonnées normales dans un voisinage de $\partial\Omega$. Alors pour chaque $x \in \partial\Omega$ nous avons

$$J(x) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right|^2 - \int_C^{\max u} f(s) ds + \alpha c$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial n}(x) = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + f(u) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}$$

ou encore

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + f(u) + \alpha \right]$$

Mais, par rapport à ce système de coordonnées, l'équation (3.26) (restreinte à $\partial\Omega$) prend la forme

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - (n-1)k \frac{\partial u}{\partial n} = f(u)$$

pour tout $x \in \partial\Omega$ (avec k la courbure moyenne de $\partial\Omega$ au point x).

Donc

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \left[\alpha - (N-1)k \frac{\partial u}{\partial n} \right] \quad \forall x \in \partial\Omega$$

D'après le principe du maximum fort (cf. D. Gilbert-Trudinger [13])

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

En choisissant $\alpha > (N-1) \max_{x \in \partial\Omega} k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)$ on obtient

$$\frac{\partial J}{\partial n}(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

Donc, pour ce choix de α nous avons nécessairement $P \in \Omega$.

Mais là aussi deux cas sont possibles : soit $|\nabla u(P)| \neq 0$, soit $|\nabla u(P)| = 0$. On va montrer aussi que pour un choix convenable de α , $|\nabla u(P)| \neq 0$ est impossible.

Si $|\nabla u(P)| \neq 0$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < |\nabla u(P)|$$

et on définit

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega ; |\nabla u(x)| > \varepsilon\}$$

qui est un sous-ensemble ouvert de Ω contenant P . D'après (3.29)

$$\begin{aligned} \sum_i \left[\frac{\partial J}{\partial x_i} - (\alpha + f(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]^2 &= \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right]^2 \\ &\leq |\nabla u|^2 \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \end{aligned}$$

Donc, d'après (3.31), pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Delta J &\geq \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{|\nabla u|^2} \sum_i (\alpha + f(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i (\alpha + f(u))^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + (\alpha - \Delta u) \Delta u \\ &= \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_i \omega_i \frac{\partial J}{\partial x_i} + (\alpha + f(u))^2 - (\alpha + f(u))f(u) \end{aligned}$$

avec $\omega_i = \frac{2}{|\nabla u|^2} (\alpha + f(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ qui est borné dans Ω_ε .

Donc,

$$(3.32) \quad \Delta J + \sum_i \omega_i \frac{\partial J}{\partial x_i} \geq \alpha(\alpha + f(u)) \geq \alpha^2 > 0 \quad \text{si } \alpha > 0.$$

Or, si $P \in \Omega_\varepsilon$ est un point de maximum pour J , alors

$$\frac{\partial J}{\partial x_i}(P) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\Delta J(P) \leq 0.$$

ce qui est impossible d'après (3.32).

Il ne nous reste donc que la dernière possibilité :

$|\nabla u(P)| = 0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} J(P) &= - \int_{u(P)}^{\max u} f(s) ds + \alpha u(P) \\ &= \max \left\{ \alpha u(P') - \int_{u(P')}^{\max} f(s) ds ; P' \in \Omega \text{ et } \nabla u(P') = 0 \right\} \end{aligned}$$

Comme $f \geq 0$, en choisissant $\alpha \geq 0$, la fonction

$$t \mapsto \alpha t - \int_t^{\max u} f(s) ds$$

est croissante et

$$J(P) = \alpha \max u.$$

Donc

$$J(x) \leq \alpha \max u \quad \forall x \in \Omega$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \leq \int_{u(x)}^{\max u} [\alpha + f(s)] ds$$

REMARQUE III-4. L'inégalité (3.28) devient une égalité dans le cas $N = 1$; dans ce cas, pour $\alpha = 0$

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{du}{dx} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + f(u) \right] = 0.$$

COROLLAIRE III-3. On considère u solution du problème (3.14)

avec $N = 2$ ou 3 . Alors, si $\alpha = \max\{0, (n-1) \max_{\partial\Omega} k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)\}$

i) Pour $K = \{v \in L^2(\Omega) ; a \leq v \leq b \text{ p.p.}\}$ avec $0 \leq a < b$, on a

$$\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \leq (\alpha + \lambda a) (\max u - u(x)) +$$

$$\frac{\lambda}{2} \{ (u(x) - b)_+^2 - (u(x) - a)_+^2 - \frac{\lambda}{2} \{ (\max u - b)_+^2 - (\max u - a)_+^2 \}$$

ii) Pour $K = \{v \in L^2(\Omega) ; v \geq 0 \text{ p.p. et } |v|_{L^2} \leq 1\}$ on a :

$$\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \leq \alpha (\max u - u(x)) + \frac{\lambda}{2 [1 + (|u^+|_{L^2} - 1)^+]} \{(\max u)^2 - u(x)^+\}^2$$

III-2.1. Applications.

Dans la suite, Ω est un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\epsilon}$. On considère :

$$(3.33) \quad K = \{v \in L^2(\Omega) ; 0 \leq v \leq b\} \quad , \quad b > 0.$$

On suppose u solution de (3.14) avec K donné par (3.33).

1. Estimations pour la distance entre les frontières libres.

THEOREME III-7. Soit $P \in \Omega$ tel que $u(P) = \max u = M$. Alors nous avons :

1) Si $\theta \leq 0 \leq M \leq b$ (il existe une frontière libre : $\{u=0\}$)

$$i) \quad d(\{u=0\}, \partial\Omega) \geq \frac{-\theta}{\sqrt{\lambda}M}$$

$$ii) \quad d(P, \{u=0\}) \geq \frac{\Pi}{2\sqrt{\lambda}}$$

2) Si $\theta \leq 0 < b \leq M$: (il existe deux frontières libres : $\{u=0\}$ et $\{u=b\}$).

$$i) \quad d(\{u=0\}, \partial\Omega) \geq \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}b(2M-b)}$$

$$ii) \quad d(\{u=b\}, \{u=0\}) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}}$$

$$iii) \quad d(P, \{u=b\}) \geq \sqrt{\frac{2(M-b)}{\lambda b}}$$

3) $0 \leq \theta \leq M \leq b$ (il n'existe pas de frontière libre).

$$d(P, \partial\Omega) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\Pi}{2} - \arcsin \frac{\theta}{M} \right)$$

4) $0 \leq \theta \leq b \leq M$ (une frontière libre : $\{u=b\}$).

$$d(\{u=b\}; \partial\Omega) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}} - \arcsin \frac{\theta}{\sqrt{b(2M-b)}} \right)$$

5) $0 < b \leq \theta < M$ (pas de frontière libre).

$$d(P; \partial\Omega) \geq \sqrt{\frac{2(M-\theta)}{\lambda b}}$$

Toutes ces inégalités deviennent des égalités lorsque $N = 1$.

Démonstration : D'après le Corollaire III-3 :

$$(3.34) \quad \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \leq \frac{\lambda}{2} ((u(x)-b)_+^2 - u(x)_+^2) - \frac{\lambda}{2} ((M-b)_+^2 - M^2).$$

Il suffit de montrer un des cas ; les autres découlent du même procédé. Montrons par exemple 2ii).

Si $x \in \{0 \leq u \leq b\}$, alors (3.34) nous donne

$$\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \leq \frac{\lambda}{2} \{2Mb - b^2 - u(x)^2\}$$

Donc

$$|\nabla u| \leq \sqrt{\lambda} \sqrt{c^2 - u^2}$$

avec

$$c = \sqrt{b(2M-b)}$$

Soit $B \in \{u=b\}$ et $A \in \{u=0\}$. Alors, le segment qui joint B à A a pour équation paramétrique

$$t \longmapsto t\vec{v} + B$$

avec

$$\vec{v} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}$$

et donc

$$\frac{du}{dt} \leq \left| \frac{du}{dt} \right| \leq |\nabla u| \leq \sqrt{\lambda} \sqrt{c^2 - u^2}$$

ce qui donne

$$\int_0^b \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \leq \sqrt{\lambda} d(B, A)$$

Donc

$$(3.35) \quad d(B, A) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}}$$

Comme le membre droit de (3.35) ne dépend pas du choix des points A et B, nous avons

$$d(\{u=b\}, \{u=0\}) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{2M-b}}$$

2. Une condition suffisante pour l'existence de la frontière libre $\{u=b\}$.

THEOREME III-8. Pour b assez petit, la frontière libre $\{u=b\}$

existe pour λ bien choisi. Plus précisément, pour

$$b < I \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|^2}$$

$$\text{si } \frac{I}{b|\Omega|} \leq \lambda < \frac{I^2}{b^2|\partial\Omega|^2} \quad \text{alors } M = \max_{\bar{\Omega}} u > b$$

Démonstration : Si $M \leq b$, d'après (3.34), pour $x \in \partial\Omega$, on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \leq \lambda (M^2 - (\theta_+)^2) \leq \lambda M^2$$

Donc

$$I^2 = \left(\int \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \leq \lambda M^2 |\partial\Omega|^2$$

ce qui équivaut à

$$M \geq \frac{I}{\sqrt{\lambda} |\partial\Omega|}$$

Donc, si $M \leq b$, alors $\frac{I}{\sqrt{\lambda} |\partial\Omega|} \leq M \leq b$.

Mais alors, si

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda} |\partial\Omega|} > b$$

nous avons $M > b$, pourvu que λ satisfasse la condition nécessaire d'existence, à savoir

$$\frac{I}{\lambda} \leq b |\Omega|$$

Or, comme $b < \frac{I |\Omega|}{|\partial \Omega|^2}$ on peut toujours choisir

$$\frac{I}{b |\Omega|} \leq \lambda < \frac{I^2}{b^2 |\partial \Omega|^2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | ADAMS, R.A.,
Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975
- | 2 | BERESTYCKI, H.,
Thèse, Université de Paris VI, 1980.
- | 3 | BERESTYCKI, H., BREZIS, H.,
On a free boundary problem arising in plasma physics,
Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 4, 1980, 415-436.
- | 4 | BERESTYCKI, H., BREZIS, H.,
Sur certains problèmes de frontière libre, Comptes Rendus
Ac. Sci. Paris, 283, A, 1976, 1091-1093.
- | 5 | CIARLET, P.G.,
"The finit Element Method for Elliptic Problems", North-
Holland, Amsterdam, 1978.
- | 6 | CIPOLATTI, R.,
Sur un problème de valeur propre non linéaire, Comptes
Rendus Ac. Sci. Paris, 239, I, 1981, 455-458.
- | 7 | DAMLAMIAN, A.,
Application de la dualité non convexe à un problème non
linéaire à frontière libre (équation d'un plasma confiné),
Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 286, A, 1978, 153-155.
- | 8 | DIEUDONNE, J.,
"Eléments d'Analyse", tome 1, Paris, Gauthier-Villars, 1968.
- | 9 | EKELAND, I., TEMAM, R.,
"Analyse Convexe et Problèmes Variationnels", Dunod,
Gauthier-Villars, 1974.

- |10| FLEMING, W., RISHEL, R.,
An integral formula for total gradient variations, Arch.
Math., 11, 1960, 218-222.

- |11| GALLOUET, T.,
Quelques remarques sur une équation apparaissant en phy-
sique des plasmas, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 286, A,
1978, 739-741.

- |12| GIDAS, B., NI, W., NIREMBERG, L.,
Symmetry and related properties via the maximum principle,
Comm. Math. Phys., 68, 1979, 209-243.

- |13| GILBARD, D., TRUDINGER, N.S.,
"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order",
Springer Verlag, 1979.

- |14| GLOWINSKI, R., LION, J.L., TREMOLIERE, R.,
"Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", vol.
1 et 2, Dunod-Bordas, 1976.

- |15| KUČERA, M., NEČAS, J., SUČEK, J.,
The eigenvalue problem for variational inequalities and a
new version of the Ljusternik-Schrivellmann theory, Non-
linear Analysis, Acad. Press, 1978.

- |16| LAMINIE, J.,
Détermination numérique de la configuration d'équilibre du
plasma d'un tokamak, Thèse de 3e Cycle, Université Paris-Sud
1977.

- |17| LIONS, P.L.,
Two geometrical properties of solutions of semilinear
problems, Applicable Analysis, 1981, vol. 12, 267-272.

- |18| MERCIER, B.,
Inéquations variationnelles en mécanique, Publications
Mathématiques d'Orsay, 1980.



- | 19 | MOSSINO, J.,
Some nonlinear problems involving a free boundary in plasma physics, J. of Diff. Eq., vol. 34, n° 1, 1979.
Cf. aussi Thèse, Université de Paris XI, 1977.
- | 20 | MOSSINO, J.,
Estimations a priori et réarrangements dans un problème de la physique des plasmas, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 288, A, 1979, 263-266.
- | 21 | MOSSINO, J.,
A priori estimates for a model of Grad-Mercier type in plasma confinement, à paraître dans Applicable Analysis, 1982.
- | 22 | MOSSINO, J.,
Inégalités isopérimétriques dans les E.D.P. elliptiques et applications en physique, Publications Mathématiques d'Orsay à paraître, 1982.
- | 23 | MOSSINO, J., TEMAM, R.,
Directional derivatives of the non decreasing rearrangement mapping and applications to a queer differential equation in plasma physics (à paraître).
- | 24 | MOSSINO, J., TEMAM, R.,
Free boundary problems in plasma physics - review of results and new developments (à paraître).
- | 25 | PAYNE, L.E., STACKGOLD,
On the mean value of the fundamental mode in the fixed membrane problem, Appl. Analysis, 3, 1973, 295-303.
- | 26 | PUEL, J.,
A free boundary nonlinear eigenvalue problem, Proc. of the Int. Symposium on Cont. Mech. and P.D.E., G.M. de la Penha and L.A. Medeiros ed., Rio de Janeiro, 1978.

- | 27 | SCHAEFFER, G.,
Non uniqueness in the equilibrium shape of a confined plasma, Comm. in P.D.E., 2(6), 1977, 587-600.
- | 28 | SERMANGE, M.,
Une méthode numérique en bifurcation-application à un problème à frontière libre de la physique des plasmas, Appl. Math. Opt., 5, 1979, 127-151.
- | 29 | SERMANGE, M.,

Non convex methods for computing free boundary equilibria of axially symmetric plasmas, Rapport INRIA, n° 108, 1981.
- | 30 | SPERB, R.,
"Maximum Principles and their Applications", Math. in Sci. and Eng. Series, vol. 157, Acad. Press, 1981.
- | 31 | SPRUCK, J.,
Convexity properties of the free boundary in a simple plasma model (à paraître).
- | 32 | STACKGOLD, I.,
Gradient bounds for plasma confinements, Math. Meth. in Appl. Sci., 2, 1980, 68-72.
- | 33 | TALENTI, G.,
Elliptic equations and rearrangements, Ann. della Scuola Norm. Sup. de Pisa, série 4, n° 3, 1976, 697-718.
- | 34 | TEMAM, R.,
A nonlinear eigenvalue problem - the shape at equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal., 60, 1976, p.51
- | 35 | TEMAM, R.,
Remarks on a free boundary value problem in plasma physics, Comm. in P.D.E., 2, 1977, p. 563.

- | 36 | TEMAM, R.,
Monotone rearrangement of a function and Grad-Mercier equation of a plasma physics, Proc. of Int. Conf. on Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications, Rome, May 1978.

- | 37 | TEMAM, R.,
Numerical problems in plasma physics, Numerical Meth. for P.D.E., Proc. of an Advanced Seminar conducted by the Math. Research Center, Univ. Wisconsin, ed. by S.V. Porter, Acad. Press, 1979.

- | 38 | ZARANTONELLO, E.H.,
Projections on convex sets in Hilbert spaces and spectral theory - Contributions to Nonlinear Functional Analysis (E.H. Zarantonello ed.), Acad. Press, New-York, 1971.