

THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

FRANCIS BONAION

Structures géométriques sur les variétés de dimension 3 et applications, 1985

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Francis BONAHO

Sujet de la Thèse :

Structures géométriques sur les variétés de dimension 3 et applications

Soutenue le 17 décembre 1985 devant le Jury composé de :

J. CERF, Président
F. LAUDENBACH
B. MORIN
L. SIEBENMANN
D. SULLIVAN
R. TEMAM
W. THURSTON

English title : Geometric structures on 3-manifolds and applications.

Abstract.

This thesis consists of three distinct parts.

In the first part, the cobordism group of surface diffeomorphisms is computed. We use for this purpose geometric methods, in particular various characteristic splittings of 3-manifolds into pieces equipped with geometric structures. This computation, together with other geometric methods, is also applied to a problem of knot cobordism.

The second part is devoted to elliptic structures, i.e. Riemannian metrics of constant curvature $+1$, on 3-dimensional lens spaces. We show that these elliptic structures are all isotopic. This amounts to computing the group of isotopy classes of diffeomorphisms of any given lens space.

In the third part, we study the behaviour at infinity of hyperbolic manifolds whose fundamental group is finitely generated and, say, does not split as a free product. In particular, we show that these manifolds are "geometrically tame" in the sense introduced by Thurston. A corollary is that these hyperbolic manifolds satisfy the Ahlfors conjecture on the measure of their limit set.

Key-words : surface diffeomorphisms, cobordism,
fibred knot,
lens spaces, diffeotopy,
hyperbolic (geometry), limit set.

Cela fait exactement dix ans que je participe aux activités de l'équipe des topologues d'Orsay. Je me dois de souligner le soutien chaleureux que j'ai toujours trouvé auprès d'eux et de leur exprimer toute ma reconnaissance. Une majeure partie de ces remerciements va bien sûr à mon "père mathématique" Larry Siebenmann qui a su, en une longue collaboration, faire de moi un mathématicien, me communiquer sa passion de la topologie, me soutenir dans les moments difficiles... et mettre parfois un peu d'imprévu dans ma vie. Je dois aussi distinguer dans mes remerciements Jean-Pierre Otal, pour l'appui qu'il m'a fourni sur la troisième partie de cette thèse, et Bernadette Barbichon qui a tapé et retapé les manuscrits de ce texte avec la patience et la compétence que nous lui connaissons tous. Je remercie également les membres de mon jury qui m'ont fait l'amitié d'accepter cette tâche.

A mes deux jumeaux topologiques,

Michèle Audin et Michel Boileau.

INTRODUCTION

Outre l'itinéraire personnel d'un mathématicien, cette thèse reflète assez bien l'évolution qui s'est produite ces dix dernières années dans l'étude des variétés de petites dimensions. En effet, à la suite de la petite révolution qu'ont constitué les travaux de W. Thurston et sous l'impulsion de celui-ci, l'étude de celles-ci est de plus en plus passée par la considération de structures géométriques sur ces variétés. Ceci a eu pour effet, à la fois de fournir de nouveaux outils pour résoudre de vieux problèmes, et d'ouvrir de nouveaux horizons vers un monde mathématique neuf. Les trois parties de cette thèse illustrent trois approches successives de cette interaction entre topologie "molle" et topologie "rigide".

En effet, les topologues "classiques" ont d'abord commencé à utiliser ces idées géométriques comme de simples outils pour attaquer des problèmes anciens. Dans cet esprit, la combinaison du théorème d'hyperbolisation de Thurston avec le théorème de rigidité de Mostow s'est avérée particulièrement efficace, notamment en théorie des noeuds (voir par exemple $[BS_3]$). Ici, dans la première partie, nous appliquons ces techniques géométriques au calcul du groupe de cobordisme des difféomorphismes de surfaces et à un problème de cobordisme de noeuds.

La deuxième partie procède de l'approche inverse, qui consiste à utiliser de vieilles techniques pour démontrer des résultats sur les structures géométriques. Par des méthodes initialement développées dans les années cinquante, on y montre en effet que la structure elliptique des espaces lenticulaires (de dimension 3) est unique à isotopie près.

La troisième partie se déroule entièrement dans le monde développé par Thurston, à l'intersection de la topologie, de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques. Il s'agit de bien comprendre le comportement à l'infini des variétés hyperboliques de dimension 3. L'étude de ce comportement à l'infini joue en effet un rôle fondamental dans la preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston, et notre intérêt initial était motivé par la volonté de comprendre enfin la preuve de ce résultat, que nous avons comme beaucoup de gens utilisé sans

scrupule pendant de longues années sans en avoir jamais vu une démonstration (encore inexistante sous forme écrite à ce jour) ! Nous démontrons dans cette troisième partie l'une des conjectures émises par Thurston sur ce sujet, que l'on discutera plus loin de manière un peu plus détaillée.

Avant d'aller plus loin, il est peut-être temps de préciser de quoi l'on parle et de définir ce qu'est une structure géométrique. Une géométrie est la donnée d'une variété X et d'un groupe de difféomorphismes G agissant transitivement sur X de sorte que le stabilisateur d'un point (quelconque) soit compact. Une structure géométrique de type (G, X) sur une variété M est un atlas différentiable qui modèle M sur des ouverts de X , dont les changements de cartes sont des restrictions d'éléments de G , et qui est maximal pour ces propriétés. Si l'on choisit une métrique G -invariante sur X , celle-ci induit une métrique sur toute variété M munie d'une structure géométrique de type (G, X) . Cette structure géométrique est complète si la métrique ainsi définie sur M est complète ; cette propriété est indépendante de la métrique G -invariante choisie sur X . Quand X est simplement connexe, une structure géométrique sur M est complète si et seulement si elle est isomorphe à X/Γ , muni de la structure géométrique évidente, pour un certain sous-groupe Γ de G agissant librement et proprement discontinûment sur X . On pourra consulter [Th₂], [Th₃], [Sco] pour plus de détails.

Les trois géométries les plus simples sont les géométries elliptique, euclidienne et hyperbolique, dont les modèles X sont respectivement la sphère S^n , l'espace euclidien E^n et l'espace hyperbolique H^n , et dont les groupes structuraux G sont les groupes d'isométrie correspondants. En dimension 3, Thurston a montré qu'il n'y a essentiellement que 5 autres géométries "maximales", ce qui fait 8 au total. Parmi celles-ci, c'est incontestablement la géométrie hyperbolique qui est la plus riche, car les 7 autres ne peuvent apparaître que sur des variétés de type très restreint (voir [Sco] par exemple) et aisément classifiables. L'une des contributions majeures de Thurston a été un résultat d'existence de telles structures géométriques : Toute variété compacte de dimension 3 qui est indécomposable en somme connexe et satisfait une certaine condition technique (conjecturellement superflue, et toujours satisfaite par les variétés à bord) admet une décomposition naturelle, unique à isotopie près, en morceaux admettant chacun une structure géométrique complète. De plus, les structures géométriques que l'on peut ainsi mettre sur chacun des morceaux sont aisément classifiables à isotopie près (voir par exemple [BS₂]), à condition

du moins de réclamer que les structures hyperboliques soient géométriquement finies (voir [Th₃]), ce que l'on peut toujours faire.

PREMIERE PARTIE. Cobordisme de difféomorphismes de surfaces et de noeuds fibrés.

Cette partie est formée des deux articles [Bo₃] et [Bo₄], respectivement parus aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure et aux Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society en 1983.

On considère les paires (F, f) où F est une surface fermée orientée et où f est un difféomorphisme de F ne respectant pas forcément l'orientation. On dit que deux tels difféomorphismes (F_1, f_1) et (F_2, f_2) sont cobordants s'il existe une variété compacte orientée M de dimension 3 et un difféomorphisme $\hat{f}$ de M tels que $\partial M = F_1 \amalg (-F_2)$ et $\hat{f}|_{\partial M} = f_1 \amalg f_2$. Les classes de cobordismes ainsi définies forment un groupe noté Δ_2 , où la loi de groupe est définie par l'union disjointe $\amalg$. Le premier article est consacré à la détermination de ce groupe Δ_2 .

Si l'on remplace le mot "surface" par "variété de dimension n " dans la définition ci-dessus, on définit de même un groupe de cobordisme Δ_n de difféomorphismes de variétés de dimension n . Ce groupe a été calculé pour $n \geq 4$ par M. Kreck ([Kr₁], [Kr₂]) et pour $n = 3$ par M. Melvin ([Me]), en termes de groupes de cobordisme classique et d'un certain groupe de Witt. Comme presque toujours en petite dimension, les méthodes utilisées s'effondrent complètement pour le cas $n = 2$. Il a donc fallu se tourner vers des techniques plus spécifiques, et notre article est un petit "festival" illustrant à peu près toutes les techniques disponibles en dimension 3, en particulier : Une version renforcée (due à M. Scharlemann) de l'unicité des décompositions en somme connexe, les sous-variétés fibrées caractéristiques de K. Johansson ([Jo]), W. Jaco et P. Shalen ([JS]), une autre sous-variété caractéristique développée pour les besoins de l'article, le théorème d'hyperbolisation de Thurston et le théorème de rigidité de Mostow, la théorie de Nielsen-Thurston des difféomorphismes de surfaces (voir [Th₁], [FLP]), etc ...

Le deuxième article est consacré à un problème de cobordisme de noeuds. Un noeud K dans $S^3 = \partial B^4$ est dit rubanné s'il est le bord d'un disque D plongé dans B^4 de sorte que la restriction à D de la fonction rayon de B^4 n'admette

aucun maximum local. Pour un noeud fibré K , A. Casson et C. Mc A. Gordon ont relié le problème de savoir si K est rubanné ou non à une propriété de cobordisme de son difféomorphisme de monodromie ([CG]). Habituellement, les problèmes de cobordisme de noeuds sont traités avec des outils algébriques et ce théorème de Casson-Gordon n'apporte rien dans ce contexte. Nous avons voulu montrer sur un exemple comment, en pratique, on peut effectivement utiliser ce résultat pour montrer qu'un noeud fibré n'est pas rubanné, si on le combine avec les résultats de l'article précédent et d'autres méthodes géométriques, notamment la théorie des difféomorphismes pseudo-Anosov de Thurston ([Th₁], [FLP]).

DEUXIEME PARTIE. Unicité des structures elliptiques sur les espaces lenticulaires.

Les espaces lenticulaires sont les exemples les plus simples de variétés de dimension 3 admettant une structure elliptique ou, ce qui est équivalent, une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante $+1$. Nous démontrons ici que cette structure elliptique est unique à isotopie près.

En fait, le problème se ramène aisément à celui de la classification à isotopie près des difféomorphismes d'un espace lenticulaire donnée. L'essentiel de cette partie est donc constitué de l'article [Bo₅], paru à Topology en 1983, qui détermine justement ces classes d'isotopie de difféomorphismes.

La difficulté technique provient du fait que les espaces lenticulaires ne font pas partie des variétés dites "suffisamment grandes" ou "de Haken" pour lesquelles on sait que deux difféomorphismes sont isotopes dès qu'ils sont homotopes. L'idée de la démonstration consiste à montrer qu'à isotopie près l'espace lenticulaire $L(p,q)$ possède un unique scindement de Heegaard de genre 1, c'est-à-dire un tore séparant $L(p,q)$ en deux tores solides. Ce dernier résultat a été ultérieurement généralisé aux scindements de Heegaard de genre g quelconque dans un travail commun avec J.-P. Otal ([BO₁], [BO₂]). Les techniques que nous avons utilisées (pour $g = 1$) sont largement inspirées de l'article [Sch] de H. Schubert sur les noeuds à deux ponts, paru en 1956.

TROISIEME PARTIE. Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3.

On s'intéresse dans cette partie aux variétés hyperboliques de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini. L'exemple le plus simple est formé des variétés dites "géométriquement finies", qui sont obtenues par recollement des faces d'un polyèdre convexe fini de $\mathbb{H}^3$. Ces variétés géométriquement finies étant aujourd'hui relativement bien maîtrisées, on veut mieux comprendre les autres.

Etudiant, sous une certaine condition homotopique, les variétés hyperboliques de dimension 3 qui sont des limites de variétés géométriquement finies, Thurston a montré que celles-ci ont un certain comportement caractéristique à l'infini et a qualifié les variétés possédant ce comportement de "géométriquement sages". Tous les exemples connus étant de ce type, il a conjecturé que toute variété hyperbolique de dimension 3 satisfaisant cette condition homotopique est géométriquement sage. (La condition homotopique est par exemple réalisée si le groupe fondamental de la variété est indécomposable en produit libre.)

Cette troisième partie est consacrée à la démonstration de cette conjecture. Un corollaire est par exemple que toute variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini et indécomposable en produit libre satisfait la conjecture d'Ahlfors sur la mesure de son ensemble limite, laquelle peut être énoncée de la manière suivante : Imaginons un observateur situé dans une telle variété, tournant la tête dans tous les sens et voyant ainsi une infinité d'images de lui-même ; alors, ou bien ces images sont denses sur la sphère visuelle de l'observateur, ou bien leur adhérence y est de mesure nulle. Cette conjecture d'Ahlfors joue un rôle central dans la théorie des déformations quasi-conformes des groupes kleinéens, et c'est ainsi le premier cas où elle est démontrée avec des hypothèses purement algébriques (et non géométriques).

Une version légèrement remaniée [Bo₆] de cette troisième partie doit paraître à Annals of Mathematics.

[Bo₁] F. BONAHO, Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimension 3, Thèse de 3e cycle, Orsay, 1979.

[Bo₂] F. BONAHO, Cobordisme des difféomorphismes de surfaces, C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 765-767.

[Bo₃] F. BONAHO, Cobordism of automorphisms of surfaces, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 16 (1983), 237-270.

- [Bo₄] F. BONAHOE, Ribbon fibred knots, cobordism of surface diffeomorphisms and pseudo-Anosov diffeomorphisms, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 235-251 .
- [Bo₅] F. BONAHOE, Difféotopies des espaces lenticulaires, Topology 22 (1983), 305-314.
- [Bo₆] F. BONAHOE, Bouts des variétés hyperboliques de dimension trois, à paraître à Annals of Mathematics.
- [BO₁] F. BONAHOE, J.-P. OTAL, Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires, C.R. Acad. Sc. Paris 294 (1982), 585-587.
- [BO₂] F. BONAHOE, J.-P. OTAL, Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 16 (1983), 451-466.
- [BS₁] F. BONAHOE, L.C. SIEBENMANN, The classification of Seifert fibered 3-orbifolds, dans Low Dimensional Topology, (R. Fenn ed.), L.M.S. series n° 95, Cambridge University Press, 1985.
- [BS₂] F. BONAHOE, L.C. SIEBENMANN, Seifert 3-orbifolds and their role as natural crystalline parts of arbitrary compact irreducible 3-orbifolds, Prépublication IHES et Orsay, 1983 (voir également [BS₁]).
- [BS₃] F. BONAHOE, L.C. SIEBENMANN, New geometric splittings of classical knots and links, volume en préparation, à paraître à Cambridge University Press.
- [CG] A. CASSON, C. McA. GORDON, A loop theorem for duality spaces and fibred ribbon knots, Invent. Math. 74 (1983), 119-137.
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque n° 66-67, 1979.
- [JS] W. JACO, P. SHALEN, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Memoirs A.M.S. n° 220, 1979.
- [Jo] K. JOHANNSON, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Springer Lecture Notes n° 761, 1979.
- [Kr₁] M. KRECK, Cobordism of odd dimensional diffeomorphisms, Topology 15 (1976), 353-361.
- [Kr₂] M. KRECK, Bordism of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 759-761.
- [Me] P. MELVIN, Bordism of diffeomorphisms, Topology 18 (1979), 173-175.
- [Sch] H. SCHUBERT, Knoten mit zwei Brüchen, Math. Zeit. 65 (1956), 133-170.
- [Sco] P. SCOTT, The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401-487.

- [Th₁] W.P. THURSTON, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, I, note non publiée, 1976.
- [Th₂] W.P. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Notes de cours, Université de Princeton, 1976-79.
- [Th₃] W.P. THURSTON, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-381.

TABLE DES MATIERES

	Page
INTRODUCTION.....	1
TABLE DES MATIERES.....	8
PREMIERE PARTIE. <u>Cobordisme de difféomorphismes de surfaces</u> <u>et de noeuds fibrés</u>	9
- Cobordisme d'automorphismes de surfaces.....	10
- Noeuds fibrés rubannés, cobordisme de difféomorphismes de surfaces et difféomorphismes pseudo-Anosov.....	44
DEUXIEME PARTIE. <u>Unicité des structures elliptiques sur les</u> <u>espaces lenticulaires</u>	61
- Difféotopies des espaces lenticulaires.....	65
TROISIEME PARTIE. <u>Bouts des variétés hyperboliques de</u> <u>dimension 3</u>	75
- Types géométriques des bouts de variétés hyperboliques.....	82
- Géodésiques allant à l'infini.....	113
- Le lemme du nombre d'intersection.....	122
- Courants géodésiques sur les surfaces.....	130
- Rétrécissement des laminations mesurées.....	147
- Preuve du théorème principal.....	176

PREMIERE PARTIE

COBORDISME

DE DIFFEOMORPHISMES DE SURFACES

ET DE NOEUDS FIBRES

COBORDISM OF AUTOMORPHISMS OF SURFACES

BY FRANCIS BONAHO

Topology is rich in problems whose solutions differ dramatically in high and low dimensions. One of them is the cobordism of automorphisms of manifolds : The cobordism group of orientation-preserving diffeomorphisms of closed oriented smooth n -manifolds has been computed for $n \geq 4$ by M. Kreck ([Kr₁], [Kr₂]), and P. Melvin [Me] proved that his results extend to the case where $n = 3$. When $n = 2$, Kreck's invariants are still defined, but they are known ([Ca], [JJ]) to be insufficient to determine this cobordism group. We study here this last case and compute the cobordism group of diffeomorphisms of surfaces.

More precisely, in a "geometric" category CAT (= TOP, PL, DIFF, ...), let us consider CAT-automorphisms $f: F^n \rightarrow F^n$ of closed oriented n -dimensional CAT-manifolds; we do not require f to be orientation-preserving and abbreviate the notation $f: F^n \rightarrow F^n$ into (F^n, f) . Two such automorphisms (F_1^n, f_1) and (F_2^n, f_2) are *cobordant* when there exists a CAT-automorphism $(M^{n+1}, \hat{f})$ of a compact oriented $(n+1)$ -dimensional manifold with $\partial M^{n+1} = F_1^n \amalg (-F_2^n)$ and $\partial \hat{f} = f_1 \amalg f_2$. The cobordism classes so defined form a group $\Delta_n(\text{CAT})$, where the group law is induced by disjoint sum $\amalg$. The group $\Delta_n(\text{CAT})$ contains a natural subgroup $\Delta_{n+}(\text{CAT})$, consisting of those cobordism classes that are represented by orientation-preserving automorphisms.

In [Kr₁] and [Kr₂], M. Kreck computes $\Delta_{n+}(\text{DIFF})$, for $n \geq 4$, in terms of ordinary cobordism groups of oriented manifolds and, when n is even, of the Witt group $W_\varepsilon(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$ of isometries of free finite-dimensional $\mathbb{Z}$ -modules equipped with an ε -symmetric unimodular bilinear form, where $\varepsilon = (-1)^{1/2 n}$. P. Melvin proved [Me] that the same formulas remain valid when $n = 3$, where $\Delta_{3+}(\text{DIFF}) = 0$. For $n = 2$, there subsists from Kreck's invariants an epimorphism $\Delta_{2+}(\text{DIFF}) \rightarrow W_{-1}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, defined by considering for every automorphism (F^2, f) the induced automorphism f_* of $H_1(F)$, equipped with the intersection pairing; but A. Casson [Ca], K. Johansson and Dennis Johnson [JJ] have independently shown that this morphism is not injective.

Omitting any reference to any category since smoothing theory and the Hauptvermutung in dimensions 2 and 3 show that $\Delta_2(\text{TOP}) \cong \Delta_2(\text{PL}) \cong \Delta_2(\text{DIFF})$, we extend here some partial results of M. Scharlemann [Sc] and prove :

THEOREM :

$$\Delta_2 \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty, \quad \Delta_{2+} \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2)^\infty,$$

(where A' denotes the direct sum of countably many copies of A ; the group $\Delta_n(\text{PL})$ has clearly at most countably many elements).

As a consequence, every element of Δ_2 , with Kreck's invariants of order 4 has infinite order in Δ_2 .

In fact, we obtain some more information on the structure of Δ_2 . Let Δ_2^p denote the group of periodic (PL or DIFF) automorphisms of surfaces modulo cobordism by periodic automorphisms of 3-manifolds. We introduce in paragraph 6 a certain set $\mathcal{A}$ of automorphisms of surfaces, defined modulo isotopy and oriented conjugacy (the strongest equivalence relation that can reasonably be considered for the study of cobordism), for which the following holds.

THEOREM. — *The canonical map $\Delta_2^p \times \mathcal{A} \rightarrow \Delta_2$ is bijective, and is an isomorphism for a suitable group structure on $\mathcal{A}$.*

The group structure of $\mathcal{A}$ is simple enough to be easily analyzed (§ 7) and the group Δ_2^p is completely determined by considerations on the fixed point set of the periodic automorphisms (§ 8). Both groups turn out to be isomorphic to $\mathbb{Z}' \oplus (\mathbb{Z}/2)'$, whence the computation of Δ_2 follows.

The proofs are geometric and differ completely from those in higher dimensions (in particular, there is no intervention of Kreck's invariants). The basic idea consists in modifying any null-cobordism to get a new one in a simple form (§ 5). For this purpose, we use a few tools provided by the theory of the geometric splittings of Haken 3-manifolds, namely Thurston's hyperbolization theorem, the characteristic fibered submanifold of Johansson-Jaco-Shalen (*see* § 3) and another (simpler) characteristic submanifold whose theory is developed in paragraph 2.

The results in this paper were announced in [Bo] (with a few mistakes in the algebraic computations). At the same time, A. Edmonds and J. Ewing informed us that they had obtained similar results by slightly different methods, using in particular the G-signature theorem instead of hyperbolic geometry to prove the injectivity of the map $\Delta_2^p \rightarrow \Delta_2$ [EE].

Most of this work was carried out while I was visiting Princeton University; I would like to thank here all the members of the Department of Mathematics and especially W. P. Thurston, for their kind hospitality. I am also very indebted to L. Siebenmann for his contribution by numerous advices to the improvement of the results, the proofs and the manuscript. Lastly, I would like to thank R. Penner for carefully reading a first version of this paper.

0. Main definitions and conventions

We shall work exclusively in the category PL (= piecewise linear). Nevertheless, the proofs could easily be translated to the categories DIFF (= differentiable C^1) or TOP (= topological); in this last case, however, periodic maps should be assumed to have a tame fixed point set.

All manifolds will be compact and orientable. This rule admits a unique exception, almost always explicitly specified when needed, for non-orientable compact surfaces occurring as bases of fibrations or quotient spaces of finite group actions on (orientable) surfaces.

An exponent often indicates the dimension of the manifolds considered. But let the reader be warned that, except for this extra information on the dimension, no difference has to be made between the notations M^n and M . However, this exponent is never omitted for traditional notations of some classical manifolds, such as the 2-sphere S^2 , the 2-torus T^2 , the projective plane $\mathbb{RP}^2$, the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$, etc.

When the opposite is not explicitly specified, every submanifold $N \subset M$ of positive codimension is assumed to be *properly embedded*, i.e. such that $N \cap \partial M = \partial N$. For a codimension 0 submanifold, it is required that its frontier $\delta N = \partial N - \partial M$ be a codimension 1 properly embedded submanifold of M .

A 1-submanifold C^1 of a surface F^2 is *essential* when, for every base point, the homomorphisms $\pi_1(C) \rightarrow \pi_1(F)$ and $\pi_1(C, \partial C) \rightarrow \pi_1(F, \partial F)$ are injective. Equivalently, C is essential when there does not exist any disc $D^2 \subset F$ with $\delta D = \partial D - \partial F$ a component of C (with or without boundary).

A *compression disc* for $F^2 \subset M^3$ is a disc $D^2 \subset M^3$ with $D \cap F = \partial D$; note that D is not properly embedded in M . Such a compression disc is *effective* when ∂D is essential in F .

A surface $F^2 \subset M^3$ is *incompressible* when:

- (1) F admits no effective compression disc.
- (2) No component of F is a sphere bounding a ball.

Similarly, a *∂ -compression disc* for $F^2 \subset M^3$ is a disc $D^2 \subset M^3$, not properly embedded, such that $D \cap F$ is an arc contained in ∂D and $\partial D - F = D \cap \partial M$. Again, D is *effective* when $D \cap F$ is essential in F .

A surface $F^2 \subset M^3$ is *boundary incompressible*, or *∂ -incompressible*, when :

- (1) F does not admit any effective ∂ -compression disc.
- (2) No component of F is a boundary parallel disc, i.e. there does not exist any ball $B^3 \subset M^3$ with δB a disc component of F^2 .

The surface $F^2 \subset M^3$ is *essential* when it is both incompressible and ∂ -incompressible.

Two closed surfaces F^2 and $G^2 \subset M^3$ are *parallel* when they are disjoint and separated by a collar $\cong F \times I$. This definition extends straightforwardly when F or G consists of components of ∂M .

The manifold M^3 is *irreducible* when it does not contain any incompressible sphere, i.e. when every sphere $\Sigma^2 \subset M^3$ bounds a ball in M^3 . It is *boundary-irreducible* or *∂ -irreducible* when ∂M is incompressible (extending the definition of incompressibility to boundary surfaces), i.e. when no component of M is a ball and there does not exist any disc $D^2 \subset M^3$ with ∂D essential in ∂M .

Lastly, we often make use of the following construction: Given a codimension 1 submanifold $N^n \subset M^{n+1}$, compactify $M - N$ by adjunction of a copy of the normal S^0 -bundle of N in M , with the obvious topology. The new compact manifold so constructed is said to be obtained by *splitting M along N* , or by *cutting M open along N* .

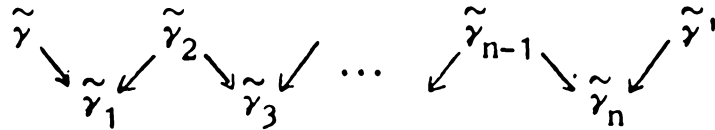
1. $\Delta_n(\text{CAT})$ as a graded group

The key result of this paper will be Theorem 6.1, where we shall obtain a natural splitting of Δ_n by geometric methods that are peculiar to the dimension considered. However, easy connectivity considerations already provide a decomposition of $\Delta_n(\text{CAT})$ into a direct sum of "smaller" cobordism groups. This section is devoted to this last decomposition. The corresponding results will have no effect on the geometrical part of our study of Δ_2 , and will not be used until we resume algebraic computations in paragraphs 7-8.

For notational convenience, we agree to omit any explicit reference to a category CAT (assuming a choice fixed for the whole section) and will henceforth abbreviate $\Delta_n(\text{CAT})$ by Δ_n .

Consider an automorphism f of an oriented manifold F^n . To characterize the action of f on the components of F , we construct a weighted graph $\tilde{\gamma}(F, f)$ in the following way: The vertices of $\tilde{\gamma}(F, f)$ correspond to the components of F ; an oriented edge joins the vertex associated to F_1 to the vertex associated to $f(F_1)$ and this edge is weighted by the symbol $+$ or $-$ according as $f|_{F_1}$ preserves or reverses the orientations induced by F . Note that each component of $\tilde{\gamma}(F, f)$ is homeomorphic to S^1 as a topological space and is coherently oriented by the orientations of its edges; call such a graph (homeomorphic to S^1 , coherently oriented and with a weight $+$ or $-$ on each edge) a *weighted closed chain*.

If there exists an automorphism $(M^{n+1}, \hat{f})$ such that $F^n \subset \partial M^{n+1}$ and $f = \hat{f}|_F$, the natural map $\tilde{\gamma}(F, f) \rightarrow \tilde{\gamma}(M, \hat{f})$ is, above its image, a covering map respecting the orientations and the weights of the edges. It is therefore natural to identify two weighted closed chains $\tilde{\gamma}_1$ and $\tilde{\gamma}_2$ when there exists a covering map $\tilde{\gamma}_1 \rightarrow \tilde{\gamma}_2$ respecting the orientations and weights of the edges; let Γ denote the quotient of the set of weighted closed chains by the equivalence relation generated by these identifications, i.e. the equivalence relation defined by the property that $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}'$ when they are joined by a sequence of weighted closed chains and covering maps (respecting weights and orientations) such as:



Every automorphism (F^n, f) naturally splits into $\coprod_{i=1}^r (F_i^n, f_i)$, where each component of $\tilde{\gamma}(F_i^n, f_i)$ is in the class $\gamma \in \Gamma$. For every $\gamma \in \Gamma$, let $\Delta_{n,\gamma}$ be the subgroup of those cobordism classes in Δ_n that are represented by automorphisms (F^n, f) where every component of $\tilde{\gamma}(F, f)$ is in $\gamma \in \Gamma$. The definitions are designed so that, for the natural map:

THEOREM 1.1:

$$\Delta_n \cong \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \Delta_{n,\gamma}. \quad \square$$

Call a weighted closed chain *primitive* when it is not a covering (respecting weights and orientations) of another chain. For instance, $- \begin{array}{c} \text{---} \end{array} +$ is primitive, and $+ \begin{array}{c} \text{---} \end{array} +$ is not

since it is a covering of $\begin{array}{c} \text{---} \end{array}$

LEMMA 1.2. — *Each class in Γ contains a unique primitive weighted closed chain.*

It will often be convenient to identify an element of Γ with a primitive weighted closed chain.

Proof of Lemma 1.2. — It is sufficient to prove that every weighted closed chain $\tilde{\gamma}$ is the covering of a unique primitive weighted closed chain γ . But such a γ is naturally identified with the quotient of $\tilde{\gamma}$ by its (cyclic) symmetry group. $\square$

The two simplest (primitive) weighted closed chains are $\begin{array}{c} \text{---} \end{array} +$ and $\begin{array}{c} \text{---} \end{array} -$, respectively denoted by $+$ and $-$. Note that f preserves (resp. reverses) the orientation of F precisely when $\tilde{\gamma}(F, f) \in + \in \Gamma$ (resp. $\tilde{\gamma}(F, f) \in - \in \Gamma$), and that these notations are compatible with the definition of Δ_n in the introduction.

If $\gamma \in \Gamma$ is considered as a primitive weighted closed chain, let $v(\gamma)$ denote its number of vertices and let its signature $\sigma(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ be the number of its edges that are weighted by $-$ (mod 2).

Choose a vertex r of γ and consider an automorphism (F^n, f) such that each component of $\tilde{\gamma}(F^n, f)$ is in the class $\gamma \in \Gamma$. There exists a covering $\tilde{\gamma}(F^n, f) \rightarrow \gamma$, which induces a projection from F to the 0-skeleton of γ ; let G^n be the inverse image of r by this projection and let g be $f^{v(\gamma)}|_{G^n}$. Then, up to (oriented) conjugacy, F splits into the disjoint union of $v(\gamma)$ copies of G , suitably oriented, where f sends the i -th copy to the $(i+1)$ -th copy by the identity ($1 \leq i < v(\gamma)$), and the last copy to the first one by g . Moreover, the orientations of the copies of G are determined by the weights of the edges of γ and g is orientation-preserving (resp. -reversing) if $\sigma(\gamma)=0$ (resp. 1). Conversely, such a (G^n, g) , with g orientation-preserving or -reversing according as $\sigma(\gamma)=0$ or 1, is associated to a unique (F^n, f) , up to oriented conjugacy, where each component of $\tilde{\gamma}(F^n, f)$ is in $\gamma \in \Gamma$.

This proves :

THEOREM 1.3. — *The group $\Delta_{n\gamma}$ is isomorphic to Δ_{n+} when $\sigma(\gamma)=0$ and to Δ_{n-} when $\sigma(\gamma)=1$. $\square$*

Remark. — For a different choice of r in the above construction, the isomorphism $\Delta_{n\gamma} \cong \Delta_{n+}$ or Δ_{n-} is just changed by composition with $X \mapsto \pm X$. When $\sigma(\gamma)=1$, this isomorphism is even quite canonical since the orientation-reversing automorphism g realizes a conjugacy between (G, g) and $(-G, g)$.

By Theorem 1.1 and 1.3, Δ_n is the direct sum of infinitely many copies of Δ_{n+} and Δ_{n-} . If we want to enumerate all these copies, or equivalently the elements of Γ , it is useful to know for every m the number $c_+(m)$ [resp. $c_-(m)$] of primitive weighted closed chains γ for which $v(\gamma)=m$ and $\sigma(\gamma)=0$ (resp. 1). Let $c(m)$ be $c_+(m) + c_-(m)$.

LEMMA 1.4. — *The numbers $c(m)$ and $c_-(m)$ are respectively determined by the induction relations :*

$$\sum_{d|m} dc(d) = 2^m,$$

$$\sum_{d|l} 2^k dc_-(2^k d) = 2^{m-1}, \text{ where } m = 2^k l \text{ with } l \text{ odd.}$$

Proof. — Just note that $mc(m)$ [resp. $mc_-(m)$] is the number of maps $\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{+, -\}$ without any period (resp. and with signature 1). $\square$

Applying the Möbius inversion formula (see for instance [HW], § 16) to the expressions of 1.4, we can get explicit formulas for $c(m)$ and $c_-(m)$. Recall that the Möbius function $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ is defined by the property that $\mu(m) = 0$ when m is a multiple of a square and $\mu(p_1 p_2 \dots p_r) = (-1)^r$ when the primes $p_1, p_2, \dots, p_r$ are distinct ($\mu(1) = (-1)^0 = 1$).

COROLLARY 1.5.

$$c(m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d) 2^{m/d},$$

$$c_-(m) = \frac{1}{2m} \sum_{d|l} \mu(d) 2^{m/d}, \text{ where } m = 2^k l \text{ with } l \text{ odd.} \quad \square$$

PROPOSITION 1.6. — *If (F^n, f) represents $X \in \Delta_n$, the minimum number of components of F is*

$$\bigoplus_{p_\gamma(X) \neq 0} v(\gamma), \text{ where } p_\gamma : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n\gamma} \text{ is the projection defined by Theorem 1.1.}$$

Proof. — The automorphism (F, f) naturally splits into $\bigsqcup_{\gamma} (F_\gamma, f_\gamma)$, where each component of $\tilde{\gamma}(F_\gamma, f_\gamma)$ is in the class $\gamma \in \Gamma$. Now, the number of components of F_γ is a multiple of $v(\gamma)$ and is non-zero when $p_\gamma(X) \neq 0$. The above expression consequently provides a lower bound for the number of components of F .

To check that this lower bound is actually a minimum, assume, without loss of generality, that $F_\gamma = \emptyset$ when $p_\gamma(X) = 0$. If $F_\gamma \neq \emptyset$, consider (G_γ, g_γ) associated to (F_γ, f_γ) as in the proof of 1.3 and select in G_γ a finite number of disjoint pairs of points $\{x'_i, x''_i\}$ such that, after isotopy, g_γ acts on these pairs by permutation (another property will be required for these pairs later).

Let N^{n+1} be the manifold obtained from $G_\gamma^n \times I$ by glueing a 1-handle along each pair $\{x'_i, x''_i\} \times \{1\}$. The automorphism $g_\gamma \times I$ of $G_\gamma \times I$ extends to an automorphism $\hat{g}_\gamma$ of N^{n+1} (here we use the fact that g_γ preserves or reverses the orientation of G_γ). Identifying (G_γ, g_γ) with $(-G_\gamma \times \{0\}, \hat{g}_\gamma|_{G_\gamma \times \{0\}})$, let G'_γ be $\partial N_\gamma - G_\gamma$ and g'_γ be $\hat{g}_\gamma|_{G'_\gamma}$. By construction, (G'_γ, g'_γ) is cobordant to (G_γ, g_γ) .

Let (F'_γ, f'_γ) , with the property that each component of $\tilde{\gamma}(F'_\gamma, f'_\gamma)$ is in $\gamma \in \Gamma$, be associated to (G'_γ, g'_γ) as in the proof of 1.3. By 1.1, (F'_γ, f'_γ) is cobordant to (F_γ, f_γ) . Moreover, for a good choice of the pairs $\{x'_i, x''_i\}$, G'_γ is connected and F'_γ consequently has exactly $v(\gamma)$ components.

When $p_\gamma(X)=0$, define F'_γ to be $\emptyset$. We have now constructed an automorphism $(F', f') = \coprod_\gamma (F'_\gamma, f'_\gamma)$ representing X such that the number of components of (F'_γ, f'_γ) is 0 if $p_\gamma(X)=0$ and $v(\gamma)$ otherwise. This ends the proof. $\square$

2. The characteristic compression body

Let a *compression body* be any 3-manifold V^3 , together with a partition $\partial V = \hat{c}_e V \sqcup \hat{c}_i V$ of the components of its boundary into an "exterior" and "interior" part, such that no component of the interior part $\hat{c}_i V$ is a sphere and the triad $(V; \hat{c}_e V, \hat{c}_i V)$ admits a handle decomposition with only handles of index 2 and 3. When F^2 is a closed surface, a *compression body for F* is, by definition, a compression body V for which $\hat{c}_e V = F$.

Compression bodies occur naturally in the following fundamental example: In an irreducible manifold M^3 , let $D^2 \subset M$ be a collection of disjoint compression discs for ∂M . If V is the union of a regular neighborhood U of $D \cup \partial M$ and of all the components of $\overline{M - U}$ that are balls, then V is a compression body for ∂M ; indeed, $(V; \partial M, \partial V - \partial M)$ clearly admits the required handle decomposition, and no component of $\partial V - \partial M$ is a sphere by irreducibility of M . This is the example that justifies the terminology for the exterior and interior boundaries $\hat{c}_e V$ and $\hat{c}_i V$.

Note that a handlebody (i. e. a "pretzel") is just a connected compression body with empty interior boundary. As a matter of fact, the behaviour of compression bodies is very similar to that of handlebodies, in that sense that many properties of handlebodies extend naturally to compression bodies (see Appendix B).

THEOREM 2.1. — *Let M^3 be irreducible. There exists a compression body $V^3 \subset M$ for ∂M , unique up to isotopy, such that $M - V$ is $\hat{c}$ -irreducible (and irreducible).*

Remarks. — (1) From the uniqueness of V , it follows that every automorphism of M preserves V after isotopy. For this reason, in later sections, we shall call V the *characteristic compression body for ∂M in M* , or simply the *characteristic compression body of M* (recall that, in a group, for instance, a subgroup is characteristic when it is preserved by every automorphism of the group).

(2) Theorem 2.1 does not assert that the decomposition of $(V; \partial M, \partial V)$ into 2- and 3-handles is unique up to isotopy, or that one such decomposition is preserved by every automorphism of M . As a matter of fact, these properties notoriously fail when $M = V$ is a handlebody.

(3) The manifold $\overline{M - V}$ is obviously irreducible since M is irreducible and every component of V contains a component of ∂M .

To clarify the notion of characteristic compression body, we give some equivalent definitions before proving Theorem 2.1.

PROPOSITION 2.2. — *Let M^3 be irreducible and let $V^3 \subset M$ be a compression body for ∂M . The following conditions are equivalent :*

- (a) $M - V$ is $\hat{c}$ -irreducible.
- (b) The frontier δV is incompressible in M .
- (c) Every surface in M that consists of discs can be isotoped inside V .
- (d) Every compression body $V' \subset M$ for ∂M can be isotoped inside V (i. e. V is “universal”).

Proof of (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). — We delay the proof of (d) $\Rightarrow$ (b) until the end of that of Theorem 2.1.

The equivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) follows from the fact that $\delta V = \hat{c}_i V$ is incompressible in V , which is easy to check [for every base point, the map $\pi_1(\hat{c}_i V) \rightarrow \pi_1(V)$ is injective].

To prove (b) $\Rightarrow$ (c), suppose δV incompressible and let D be a surface in M whose components are discs. After isotopy, we can assume that the intersection of D and δV is transverse, and that the number of components of $D \cap \delta V$ cannot be reduced by any such isotopy. If $D \cap \delta V = \emptyset$, then $D \subset V$ (since $\partial D \subset \partial M \subset V$) and the conclusion sought holds. Otherwise, there exists an innermost disc $D' \subset D$ such that $D' \cap \delta V = \partial D'$. The curve $\partial D'$ bounds a disc D'' in the incompressible surface δV , and the sphere $D' \cup D''$ bounds a ball B^3 in the irreducible manifold M . But we should then be able to define, by “crushing” B , an isotopy of D that decreases the number of components of $D \cap \delta V$, which would contradict our hypothesis. The case $D \cap \delta V \neq \emptyset$ cannot therefore occur, and this ends the proof of (b) $\Rightarrow$ (c).

Any surface D in M whose components are discs is contained in a compression body $V' \subset M$ for ∂M (see the fundamental example at the beginning of this section). It follows that (d) $\Rightarrow$ (c).

To show that (c) $\Rightarrow$ (d), consider a compression body $V' \subset M$ for ∂M and assume V satisfies (c). There exists disjoint balls B_i inside V' and a disjoint union D of discs in V' such that $\partial D \subset \partial M$ and $\overline{V' - (\bigcup_i B_i)}$ is a regular neighborhood of $D \cup \partial M$. For some decomposition of $(V'; \partial M, \delta V')$ into handles of index 2 and 3, let the B_i 's be the 3-handles and D consist of the cores of the 2-handles (extended to ∂M). By (c), D can be isotoped inside V and, after isotopy, $\overline{V' - (\bigcup_i B_i)}$ can therefore be assumed to be contained inside V . In particular, each sphere ∂B_i is now in V . From the irreducibility of V (which we immediately prove in Lemma 2.3 below) follows that the B_i 's lie in V . Consequently $V' \subset V$. $\square$

LEMMA 2.3. — *Let V be a compression body. Then V is irreducible and every closed connected incompressible surface F in V is parallel to a component of $\hat{c}_i V$.*

Proof of Lemma 2.3. — There exists a surface D in V , with $\partial D \subset \partial M$, which consists of discs and splits V into a manifold $\tilde{V}$ isomorphic to the disjoint union of $\hat{c}_i V \times I$ and of some balls (the components of D are the cores of the 2-handles for a decomposition of V into handles of index 2 and 3). By definition of compression bodies, no component of $\hat{c}_i V$ is a sphere and $\tilde{V}$ is therefore irreducible (consider its universal covering). The proposition (1.8) of [Wa₁] then implies that V is irreducible.

If F is a closed connected incompressible surface in V , it can be, as in the proof of $(a) \Rightarrow (c)$ in Proposition 2.2, isotoped so that $F \cap D = \emptyset$ (since V is irreducible). Let F still denote its image in $\tilde{V}$. By the classification of incompressible surfaces in $\partial_i V \times I$ ([Wa₂], Proposition 3.1), F is parallel to a component of $\partial_i V$ in $\tilde{V}$, and therefore in V . $\square$

Proof of Theorem 2.1. — To establish the existence of a compression body $V \subset M$ for ∂M with $M - V$ ∂ -irreducible, begin with any compression body $V_0 \subset M$ for ∂M (for instance, the union of a regular neighborhood of ∂M and of the components of M that are balls). If $M - V_0$ is not ∂ -irreducible, there exists a disc D properly embedded in $M - V_0$ such that ∂D does not bound any disc in ∂V_0 . Let then V'_1 be a regular neighborhood of $V_0 \cup D$ in M , and let V_1 be the union of V'_1 and of all the components of $M - V'_1$ that are balls. The triad $(V_1; \partial M, \partial V_1)$ has clearly a handle decomposition with only handles of index 2 and 3, and no component of ∂V_1 is a sphere (recall that M is irreducible); V_1 is therefore a compression body for ∂M . By the same token, we can define a sequence $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ of compression bodies for ∂M which stops only when we reach a compression body V_n for ∂M with $M - V_n$ ∂ -irreducible (and irreducible).

Remark that ∂V_{i+1} is “simpler” than ∂V_i in some sense. To make this precise, we use a well-known *complexity* of a closed orientable surface F , namely the ∞ -tuple:

$$c(F) = (\dots, c_g(F), \dots, c_1(F), c_0(F)) \in \mathbb{N}^\infty,$$

where $c_g(F)$ is the number of components of genus g of F . The complexity $c(F)$ characterizes the topological type of F . Note that, when F is connected, $c(F)$ is just the genus of F for the canonical injection of $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^\infty$. We order the complexities by lexicographic order (from left to right). When the two surfaces F and F' are connected, $c(F) < c(F')$ just means that F has smaller genus than F' .

Now, in the above situation, $c(\partial_i V) < c(\partial_c V)$.

Since the set of complexities (= the set of finite $\mathbb{N}$ -valued sequences) is well-ordered, the sequence (V_i) must needs stop, and there exists therefore some n for which $M - V_n$ is ∂ -irreducible (and irreducible).

To prove the uniqueness, consider two compression bodies V and $V' \subset M$ for ∂M with $M - V$ and $M - V'$ ∂ -irreducible. By condition (d) of Proposition 2.2 [we have proved that $(a) \Rightarrow (d)$], we may assume that $V' \subset \text{int } V$. The surface $\partial V'$ is incompressible in M [since we have proved $(a) \Rightarrow (b)$ in Proposition 2.2], and therefore in V ; by Lemma 2.3, each of its components is consequently parallel to a component of $\partial_i V = \partial V$ in V . It follows then from a connectivity argument that $\bar{V} - V' \cong \partial V \times I \cong \partial V' \times I$; the compression bodies V and V' are then isotopic. $\square$

Proof of Proposition 2.2 (end). — We only need to prove that $(d) \Rightarrow (b)$. Consider V satisfying condition (d). We know that there exists in M a characteristic compression body V' for ∂M which, by condition (d), we can assume contained in $\text{int } V$. We have now two compression bodies V and $V' \subset M$ for ∂M , with $V' \subset \text{int } V$ and $\partial V'$ incompressible in M (and V). Noting that this is exactly the situation we encountered in the proof of the uniqueness of

V' , the same argument as above shows that V and V' are isotopic. In particular, δV is isotopic to the incompressible surface $\delta V'$, which ends the proof. $\square$

3. Essential annuli and tori

We saw in the last section that there exists in an irreducible manifold M^3 a compact codimension 0 submanifold which “engulfs” by isotopy all the discs in M . A similar engulfing phenomenon occurs for essential tori and annuli, and involves the characteristic submanifold defined by K. Johannson [Jo], W. Jaco and P. Shalen [JS].

PROPOSITION 3.1. — *Let M^3 be irreducible and ∂ -irreducible. Then there exists a submanifold W^3 , unique up to isotopy and called the characteristic fibered submanifold, for which the following conditions hold.*

- (1) *Every component W_1 of W can be equipped with, either a Seifert fibration for which $W_1 \cap \partial M$ is vertical, or an I-bundle structure over a surface (possibly non-orientable or with boundary) for which $W_1 \cap \partial M$ is the total space of the corresponding ∂I -bundle; moreover, the pair $(W_1, W_1 \cap \partial M)$ is never isomorphic to $(T^2 \times I, T^2 \times \{0\})$.*
- (2) *The frontier δW is essential and none of its components is parallel to a component of ∂M .*
- (3) *For every component M_0 of $M - W$, the union $W \cup M_0$ does not satisfy (1).*
- (4) *Every submanifold W' satisfying (1) and (2) can be isotoped inside W . $\square$*

PROPOSITION 3.2. — *With the data of Proposition 3.1, the characteristic fibered submanifold W satisfies also:*

- (5) *Every essential annulus or torus which is not parallel to a boundary component can be isotoped inside W .*
- (6) *Each component of $\overline{M - W}$ which does not meet $\partial(\delta W)$ and is different from $T^2 \times I$ is atoroidal and anannular.*
- (7) *Every automorphism of M preserves W up to isotopy. $\square$*

Remarks. — (a) For property (6), recall a manifold is anannular if it contains no essential annulus and is atoroidal if every incompressible torus in it is parallel to a boundary component.

(b) Our characteristic fibered submanifold is, for convenience, slightly different from the characteristic submanifold in [Jo] or [JS]: To recover the latter, add to the former regular neighborhoods of the components of ∂M that are tori.

Our interest in trying to confine in some submanifold all the essential discs, tori or annuli of M^3 is motivated by the following corollary of Thurston’s Hyperbolization Theorem [Th₃] and of Mostow’s Rigidity Theorem ([Mo], [Pr]).

PROPOSITION 3.3 (Thurston). — *Let M^3 be irreducible, ∂ -irreducible, atoroidal and anannular. If, furthermore, each component of M contains an essential surface (which is always satisfied by components with non-empty boundary), then every automorphism g of M is isotopic to a periodic automorphism.*

Proof of Proposition 3.3. — Let $\hat{c}_1 M$ denote the union of the boundary components of M which are tori. Under the hypotheses of the proposition, Thurston's Theorem asserts that $(M - \hat{c}_1 M)$ admits a complete hyperbolic structure with finite volume and totally geodesic boundary. Consider then the double $\tilde{M}$ obtained by glueing two copies of M along $(\hat{c}M - \hat{c}_1 M)$. The hyperbolic structure on $(M - \hat{c}_1 M)$ defines then a complete hyperbolic structure with finite volume on $(\tilde{M} - \hat{c}_1 \tilde{M})$, for which the exchange involution τ is an isometry.

Identify M with one "half" of $\tilde{M}$. The automorphism g lifts to an automorphism $\tilde{g}$ of $\tilde{M}$ which commutes with τ and coincides with g on $M \subset \tilde{M}$. By Mostow's Theorem, $\tilde{g}$ is homotopic to a (unique) automorphism $\tilde{g}'$ that is isometric on $(\tilde{M} - \hat{c}_1 \tilde{M})$. The automorphism $\tilde{g}'$ is periodic (the group of isometries of a complete finite volume hyperbolic manifold is finite) and commutes with τ (by uniqueness in Mostow's Theorem). It defines therefore a periodic automorphism g' of M . Moreover, $\tilde{g}$ and $\tilde{g}'$ induce the same outer automorphism on $\pi_1(M) \subset \pi_1(\tilde{M})$ and, by ([Wa₂], §7), g and g' are therefore isotopic. $\square$

4. Two lemmas on periodic maps

PROPOSITION 4.1. — *Let V be a compression body and g be an automorphism of V which is periodic on $\hat{c}_e V$. Then g can be deformed to a periodic automorphism by an isotopy fixing $\hat{c}_e V$.*

Proof. — Recall that the complexity of a closed orientable surface F is the $\mathbb{N}$ -tuple:

$$c(F) = (\dots, c_g(F), \dots, c_2(F), c_1(F), c_0(F)) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},$$

where $c_g(F)$ is the number of components of genus g of F , and that the complexities are ordered by lexicographic order. It is easy to check that $c(\hat{c}_i V) \leq c(\hat{c}_e V)$. We will prove Proposition 4.1 by induction on $c(V) = c(\hat{c}_e V) - c(\hat{c}_i V)$, which measures the "difference" between $\hat{c}_e V$ and $\hat{c}_i V$. Note that $c(V)$ belongs to the subset of the elements of $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ that are $\geq (\dots, 0, 0)$ for lexicographic order (from left to right) and that the induction is possible since this set, albeit much larger than $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, is nevertheless well-ordered for lexicographic order.

If $c(\hat{c}_e V) = c(\hat{c}_i V)$, then V is isomorphic to $\hat{c}_i V \times I$, where $\hat{c}_i V$ corresponds to $\hat{c}_i V \times \{0\}$ by this isomorphism. By ([Wa₂], Lemma 3.5), g can be deformed to $(g|_{\hat{c}_i V} \times \{1\}) \times \text{Id}_I$ by an isotopy fixing $\hat{c}_e V \cong \hat{c}_i V \times \{1\}$, whence the property follows.

In fact, this argument also holds (by a classical result on balls) when $c(V) \in \mathbb{N}^{(0)} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. In this case, indeed, V is isomorphic to the disjoint union of $\hat{c}_i V \times I$ and of $c_0(\hat{c}_e V)$ balls.

Assume now Proposition 4.1 proved for every compression body V' such that $c(V') < c(V)$. The crucial step in the induction is the following.

LEMMA 4.2. — *Under the hypotheses of Proposition 4.1 and if $c(V) \notin \mathbb{N}^{(0)}$, i. e. if V requires at least one 2-handle in a handle decomposition of $(V; \hat{c}_e V, \hat{c}_i V)$, then there exists a simple closed connected curve C in $\hat{c}_e V$ which bounds a disc in V but not in $\hat{c}_e V$ and such that, for each n , either $g^n(C) = C$ or $g^n(C) \cap C = \emptyset$.*

We assume Lemma 4.2 for the while and go on with the proof of Proposition 4.1. Let D be a system of disjoint discs in V whose boundary is $\bigcup_n g^n(C)$. By the usual intersection reduction methods, D is unique up to isotopy fixing $\partial_c V$. The automorphism g can therefore be deformed, by an isotopy fixing $\partial_c V$, so that $g(D) = D$ and $g|D$ is periodic. Let then $\tilde{V}$ be the manifold obtained by cutting V open along D and $\tilde{g}$ be the automorphism of $\tilde{V}$ induced by g . The manifold $\tilde{V}$ is still a compression body (see Corollary B.3 in Appendix B), $c(\partial_i \tilde{V}) = c(\partial_i V)$ and $c(\partial_c \tilde{V}) < c(\partial_c V)$. Apply then the induction hypothesis to $\tilde{g}$ and glue back together the deformation of $\tilde{g}$ so obtained to conclude the proof of Proposition 4.1, granting Lemma 4.2. $\square$

Proof of Lemma 4.2. — It is here useful to leave the PL category and equip V with a smooth structure for which g is a diffeomorphism (after isotopy fixing $\partial_c V$). To do this carefully, begin with deforming g so that it is periodic on a neighborhood U of $\partial_c V$, then equip U with a smooth structure for which the restriction $g|U$ is a diffeomorphism (smooth first a neighborhood of the fixed points of the non-trivial iterates of $g|U$, and lift afterwards an appropriate smoothing of U/g), extend to V the smooth structure on U and, lastly, compose g with a small PL isotopy fixing a neighborhood of $\partial_c V$. Note that the existence of a smooth rather than PL curve C satisfying the conditions of Lemma 4.2 provides a PL curve with the same properties, by lifting to $\partial_c V$ a small perturbation of $(\bigcup_n g^n(C))/g$ in $(\partial_c V)/g$.

There exists on $\partial_c V$ a Riemannian metric of locally constant curvature $+1$, 0 or -1 for which the restriction of g is an isometry (see for instance [Th₂], Proposition 13.3.6; [the idea consists in choosing a suitable singular metric on the quotient $(\partial_c V)/g$). For this metric, each component $\partial_0 V$ of $\partial_c V$ can be isometrically identified with the quotient of S^2 , $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{H}^2$ by some discrete group of isometries isomorphic to $\pi_1(\partial_0 V)$. If $\partial_0 V$ is not a sphere, the number of closed geodesics in $\partial_0 V$ with length smaller than K is finite for every constant $K > 0$ [otherwise, using a fundamental domain, one easily checks that $\pi_1(\partial_0 V)$ would not be discrete as a subgroup of isometries of $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{H}^2$]. There exists therefore a simple closed geodesic C in $\partial_c V$ which is length-minimizing among all the simple curves bounding a disc in V but not in $\partial_c V$ [such curves exist because $c(V) \notin \mathbb{N}^{(0)}$]. We are going to show that C satisfies the desired condition.

Since g is an isometry on $\partial_c V$, the curve $g^n(C)$ is, for every n , a geodesic with same length as C ; in particular, either $g^n(C) = C$ or the intersection of C and $g^n(C)$ is transverse. Considering n such that $g^n(C) \neq C$, we want to prove that C does not meet $g^n(C)$. By hypothesis, C bounds a disc D in V and $g^n(C)$ bounds $D' = g^n(D)$. By a slight perturbation of D' [after which perhaps $D' \neq g^n(D)$], the intersection of D and D' can be assumed to be transverse.

Suppose in quest of a contradiction that C meets $g^n(C)$. There exists then an arc k component of $D \cap D'$ which splits D into two half-discs D_1 and D_2 and D' into D'_1 and D'_2 . Without loss of generality, we can assume the length of $\partial D_1 = k$ minimum among all the possible choices for k , D_1 , D_2 ; in particular, this implies that D_1 meets no arc component of $D \cap D'$ different from k , and that the length $l(\partial D_1 - k)$ is not greater than $l(\partial D_2 - k)$, and therefore than $1/2 l(\partial D)$. Consider then the two singular discs $D_1 \cup D'_1$ and

$D_1 \cup D_2'$. By the above remarks, their boundaries are simple closed curves (with two corners) and:

$$l(\hat{c}(D_1 \cup D_1')) + l(\hat{c}(D_1 \cup D_2')) = 2l(\hat{c}D_1 - k) + l(\hat{c}D') \leq l(\hat{c}D) + l(\hat{c}D') \leq 2l(C),$$

which implies that the length of one of them, say $D_1 \cup D_1'$, is at most $l(C)$. By considering its lifting to the universal covering of the component of $\hat{c}_c V$ that contains it, $\hat{c}(D_1 \cup D_1')$ cannot bound any disc in $\hat{c}_c V$ (otherwise, two distinct geodesics of $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{H}^2$ would meet in at least two points); also, Dehn's lemma implies that $\hat{c}(D_1 \cup D_1')$ bounds a non-singular disc in V . But, by rounding the two corners of $\hat{c}(D_1 \cup D_1')$, one could then construct a smooth simple closed curve, bounding a disc in V but not in $\hat{c}_c V$, that is shorter than $\hat{c}(D_1 \cup D_1')$, and therefore than C . This would contradict the definition of C and shows therefore that $C \cap g^n(C) = \emptyset$ if $g^n(C) \neq C$. $\square$

PROPOSITION 4.3. — *Let F be a closed connected surface, possibly non-orientable, different from S^2 and $\mathbb{RP}^2$, and let $F \tilde{\times} I$ denote the orientation I -bundle over F . If g is an automorphism of the manifold $F \tilde{\times} I$ that is periodic on the boundary, then one of the two following assertions holds (possibly both).*

- (a) *There exists a periodic automorphism g' of $F \tilde{\times} I$ which coincides with g on the boundary.*
- (b) *F is a torus or a Klein bottle and, for every n and each boundary component preserved by g^n , the restriction of g^n to this torus is a translation (perhaps the identity).*

Remarks. — (1) In (b), we mean by translation of a torus any automorphism that lifts to a translation of $\mathbb{R}^2$ for some identification of this torus with $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

(2) In (a), one could moreover show that g' is isotopic to g by an isotopy fixing the boundary.

Proof. — Assume first that F is orientable ($F \tilde{\times} I = F \times I$), that its genus is at least 2 and that g does not exchange the two boundary components. Let g_0 (resp. g_1) denote the automorphism of F defined by the restriction of g to $F \times \{0\}$ (resp. $F \times \{1\}$), for the standard identifications. To prove (a), it is sufficient to show that g_0 is conjugated to g_1 by an automorphism isotopic to the identity. For this, equip F with a (smooth) conformal structure m_0 (resp. m_1) for which g_0 (resp. g_1) is conformal (by averaging some metric). Teichmüller theory ([Te₁], [Te₂]) asserts then that every homeomorphism f of F , considered as a mapping from the Riemann surface (F, m_0) to (F, m_1) , is topologically isotopic to a unique homeomorphism φ_f with constant dilatation (which measures at each point the distortion between the two conformal structures m_0 and $\varphi_f^* m_1$). Since m_0 (resp. m_1) is preserved by g_0 (resp. g_1) and since g_0 and g_1 are homotopic (and therefore isotopic), it follows from the uniqueness of the Teichmüller mappings that:

$$\varphi_{\text{Id}} g_0 = \varphi_{g_0} = \varphi_{g_1} = g_1 \varphi_{\text{Id}}.$$

The homeomorphism φ_{Id} realizes therefore a conjugacy from g_0 to g_1 , and is isotopic to the identity. By a small perturbation of φ_{Id} (consider the quotient spaces F/g_0 and F/g_1), we can lastly find a PL automorphism with the same properties. (I am indebted to L. Siebenmann for this short proof.)

If F is a torus and still g does not exchange the boundary components, it is easy to classify, up to conjugacy by isotopies, all the periodic automorphisms of F (consider the quotient space, or more precisely the quotient "orbifold", in the sense of [Th₂], § 13.3). Since g_0 and g_1 are homotopic, it then turns out that they are conjugate by an isotopy, unless they are both homotopic to the identity, in which case (b) holds. This ends the proof in this case.

Consider now the case where F is not orientable. Identifying F with the section $F \times \{1/2\} \subset F \times I$, we can deform g by an isotopy fixing the boundary so that $g(F) = F$ ([Wa₂], Lemma 3.5; only the case where the base of the I -bundle is orientable is explicitly stated there, but the non-orientable case is similar). Then, g defines outer automorphisms of the groups below which preserve (up to inner automorphisms) the exact sequence:

$$0 \rightarrow \pi_1(F \times \partial I) \rightarrow \pi_1(F \times I) \cong \pi_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

Since g is periodic on $F \times \partial I$, it follows that the outer automorphism of $\pi_1(F)$ defined by $g_{\#}$ has finite order. By Nielsen's Theorem [Ni₂], $g_{\#}$ is then isotopic to a periodic map and we can therefore isotop g so that it preserves $F \times [1/4, 3/4]$ and that its restriction there is periodic. To end the proof, it is then sufficient to apply the study of the orientable case to $F \times (I -]1/4, 3/4[) \cong (F \times \partial I) \times I$.

The proof is similar when g exchanges the boundary components of $F \times I$ (F is then orientable). By [Wa₂], Lemma 3.5, we can assume that $g(F) = F$ where F is identified with $F \times \{1/2\}$. As above, g can be made periodic on $F \times [1/4, 3/4]$ and we end the proof by applying the previous case to $F \times [0, 1/4]$ and $F \times [1/4, 3/4]$. $\square$

5. Splitting of cobordisms

The principal tool for our analysis of Δ_2 is Proposition 5.1 below. This section is devoted to its proof.

PROPOSITION 5.1. — *If (F^2, f) is null-cobordant, it bounds an automorphism $(M^3, \hat{f})$ where M splits into three pieces V^3 , M_1^3 and M_p^3 , preserved by $\hat{f}$, such that:*

- (1) V is a compression body for ∂M and $\overline{M - V} = M_1 \cup M_p$.
- (2) M_1 is an I -bundle over a closed, possibly non-orientable, surface.
- (3) The restriction of $\hat{f}$ to M_p is periodic.

Remark. — In Proposition 5.1, there does not in general exist any handle decomposition of V that is preserved by $\hat{f}$. For instance A. Fathi and F. Laudenbach [FL] have constructed an automorphism $(F, f) = \hat{c}(V, \hat{f})$ where f is pseudo-Anosov and V is a handlebody; if $\hat{f}$ preserved any handle decomposition of V , the automorphism f would be reducible and could not be pseudo-Anosov.

To prove Proposition 5.1, we need some preliminary results.

LEMMA 5.2. — *If (F^2, f) is null-cobordant, it bounds an automorphism $(M^3, \hat{f})$ with M irreducible.*

Proof. — See Appendix A. $\square$

Say that (F_1^2, f_1) compresses to (F_2^2, f_2) if $(F_1, f_1) \sqcup (-F_2, f_2)$ bounds an automorphism $(V^3, \hat{f})$ such that V is a compression body for F_1 (i. e. $\partial_- V = F_1$ and $\partial_+ V = -F_2$). Note that if (F_1, f_1) compresses to (F_2, f_2) and (F_2, f_2) compresses to (F_3, f_3) , then (F_1, f_1) compresses to (F_3, f_3) .

LEMMA 5.3. — *If (F_1^2, f_1) is null-cobordant, it compresses to an automorphism (F_2^2, f_2) bounding some $(M_2^3, \hat{f}_2)$ where M_2 is irreducible and $\hat{c}$ -irreducible.*

Proof. — By Lemma 5.2, (F_1, f_1) bounds $(M_1^3, \hat{f}_1)$ with M_1 irreducible. Consider then the characteristic compression body V of M_1 (cf. §2), which we can assume preserved by $\hat{f}_1$ (Theorem 2.1) and take $(F_2, f_2) = (-\partial V, \hat{f}_1|_{\partial V})$. $\square$

Recall that an automorphism (F^2, f) is *reducible* when there exists an essential 1-submanifold C^1 such that $f(C) \simeq C$ up to isotopy.

LEMMA 5.4. — *Any automorphism (F_1^2, f_1) compresses to an automorphism (F_2^2, f_2) with f_2 irreducible.*

Proof. — If f_1 is reducible, it preserves after isotopy an essential submanifold C^1 of F^1 . Let (F_2, f_2) be constructed from (F_1, f_1) by performing a 2-surgery along each component of C and deleting the spherical components of the surface so obtained. Then (F_1, f_1) clearly compresses to (F_2, f_2) . If f_2 is not irreducible, perform the same trick until an irreducible automorphism is reached (this process must stop since the complexities of the surfaces). $\square$

Proof of Proposition 5.1. — Using alternatively Lemmas 5.3 and 5.4, define a sequence of automorphisms (F_i^2, f_i) where $(F_1, f_1) = (F, f)$ and:

- (1) for every i , (F_i, f_i) compresses to (F_{i+1}, f_{i+1}) ;
- (2) for every $k \geq 1$, f_{2k+1} is irreducible and (F_{2k}, f_{2k}) bounds some $(M_{2k+1}^3, \hat{f}_{2k+1})$ with M_{2k+1} irreducible and $\hat{c}$ -irreducible.

Since these compressions reduce the complexities of the surfaces, the “compression cobordism” between (F_i, f_i) and (F_{i+1}, f_{i+1}) consists, for i sufficiently large, of an automorphism of a product compression body $V_i \cong F_i \times I$, where F_i corresponds to $F_i \times \{0\}$ and F_{i+1} to $F_i \times \{1\}$. By [Wa₂], Lemma 3.5, f_i and f_{i+1} are then isotopic for the above identification $F_i \cong F_{i+1}$. There exists consequently an automorphism (F', f') and, for every i sufficiently large, an oriented isomorphism $h_i : F_i \rightarrow F'$ such that f_i is isotopic to $h_i^{-1} f' h_i$ [in other words, the sequence (F_i, f_i) “stabilizes” to (F', f') up to conjugacy and isotopy]. By construction, f' is irreducible and (F', f') bounds an automorphism $(M', \hat{f}')$ where M' is irreducible and $\hat{c}$ -irreducible.

Since (F, f) compresses to (F', f') , it is now sufficient to show that (F', f') bounds after isotopy some $(M_1 \sqcup M_p, \hat{f}'')$ where M_1 is an I-bundle and $\hat{f}''$ is periodic on M_p .

Consider the characteristic fibered submanifold W of M' and isotop $\hat{f}'$ so that $\hat{f}'(W) = W$ (Proposition 3.1; recall M' is irreducible and $\hat{c}$ -irreducible). The irreducibility of f' implies the following properties.

CLAIM 5.5. — *The surface ∂W is closed; equivalently, $W \cap \partial M'$ consists of components of $\partial M'$. Moreover, every component of W that meets $\partial M'$ is a component of M' and admits an I-bundle structure over a closed surface.*

Proof of 5.5. The closed 1-submanifold $\hat{c}(\delta W)$ of $F' = \hat{c}M'$ is essential and preserved by f' . Since f' is irreducible, it must be empty. This proves the first statement.

By definition and since $\hat{c}(\delta W) = \emptyset$, every component W_1 of W is either an I-bundle over a closed surface, in which case it is a component of M' , or a Seifert manifold. If W_1 is not such an I-bundle, it is a Seifert manifold with non-empty boundary and different from $S^1 \times D^2$ and $T^2 \times I$ [recall that $(W_1, W_1 \cap \hat{c}M)$ is by definition of W never isomorphic to $(T^2 \times I, T^2 \times \{0\})$]. $[Wa_1]$ implies then that $\hat{f}'$ can be isotoped in order to preserve the Seifert fibration on $\bigcup_n (\hat{f}')^n(W_1)$. Then W_1 cannot meet $\hat{c}M'$: Otherwise, f' would preserve the essential 1-submanifold $\bigcup_n (\hat{f}')^n(C)$ of F' , where C is a fiber in $W_1 \cap \hat{c}M$. $\square$

Let M_1 consists of all the components of M' that are I-bundles over closed surfaces, and let M'' be $M' - M_1$. Note that, by Claim 5.5, $W \cap \hat{c}M' = \emptyset$ and $W \cap M''$ consists only of Seifert manifolds. We are now going to modify dramatically M'' [and $(M', \hat{f}')$] so that $\hat{f}'$ be periodic on M'' .

We may of course assume that no component of M' is closed. By Propositions 3.2(6) and 3.3, $\hat{f}'$ can be isotoped so that it is periodic on the components of $M'' - W$ that are not isomorphic to $T^2 \times I$.

Consider a component W_1 of $W \cap M''$ that is isomorphic to $T^2 \times I$. By condition (3) of Proposition 3.1, no component of $M'' - W$ meeting W_1 is isomorphic to $T^2 \times I$. Consequently, $\hat{f}'$ is periodic on $\bigcup_n (\hat{f}')^n(\hat{c}W_1)$. Now, by Proposition 4.3, $\hat{f}'$ can be assumed to be periodic on $\bigcup_n (\hat{f}')^n(W_1)$, except possibly in the case where, for every m , $(\hat{f}')^m$ is a translation on each (torus) component of $\bigcup_n (\hat{f}')^n(\hat{c}W_1)$ it preserves.

Apply the above process to each component of $W \cap M''$ that is isomorphic to $T^2 \times I$. Let then M_p'' denote the part of M'' where we have so far been able to make $\hat{f}'$ periodic: It is the union of all the components of $M'' - W$ that are not isomorphic to $T^2 \times I$, and of some components of $W \cap M''$ isomorphic to $T^2 \times I$.

For every component W_2 of $M'' - M_p''$ that is a component of W , $\hat{f}'$ preserves up to isotopy the Seifert fibration of $\bigcup_n (\hat{f}')^n(W_2)$ $[Wa_1]$. If G is a boundary component of $\hat{c}W_2$ and if $(\hat{f}')^n$ respects G , then $(\hat{f}')^n$ necessarily preserves a non-trivial isotopy class of simple closed curves in G (consider the fiber). By definition of M_p'' , the same property holds for the other kind of components of $\delta M_p''$. The automorphism $(\delta M_p'', \hat{f}'|_{\delta M_p''})$ consequently bounds some $(V_p, \hat{f}_p)$ where V_p consists of solid tori and $\hat{f}_p$ is periodic (use the classification of periodic automorphisms of T^2 , or an equivariant surgery argument). Consider now the manifold M_p obtained by replacing $M'' - M_p''$ by $(-V_p)$ in M'' , and let $\hat{f}_p$ be the periodic automorphism $(\hat{f}'|_{M_p''}) \cup \hat{f}_p$ of M_p . The automorphism (F', f') then bounds $(M_1 \sqcup M_p, (\hat{f}'|_{M_1}) \sqcup \hat{f}_p)$, where M_1 is an I-bundle and $\hat{f}_p$ is periodic. This ends the proof of Proposition 5.1.

Remark. — In the statement of Proposition 5.1, we did not require that M be irreducible and that V be its characteristic compression body, or, equivalently, that M_p be irreducible and $\hat{c}$ -irreducible (and this is in general false for M and V provided by the above proof). Using the Equivariant Sphere Theorem and Loop Theorem [MY], and some cutting and pasting argument, it is nevertheless possible to add this extra condition to the conclusions of Proposition 5.1, but this is of no use for the following.

6. The canonical decomposition of Δ_2

For our purposes, it is natural to identify two automorphisms (F_1^2, f_1) and (F_2^2, f_2) when there exists an oriented isomorphism $h: F_1 \rightarrow F_2$ such that hf_1h^{-1} is isotopic to f_2 ; we shall then say that (F_1, f_1) and (F_2, f_2) are *equivalent by conjugacy and isotopy*. Let $\mathcal{F}$ be the set of such equivalence classes of automorphisms of surfaces. We often denote simply by (F, f) the class in $\mathcal{F}$ of the automorphism (F, f) .

In view of the applications to cobordism, an interesting subset of $\mathcal{F}$ is $\mathcal{F}_0$, that consists of the classes of automorphisms which cannot be written as $(F, f) \amalg (-F, f) \amalg (F', f')$, with F non-empty. There is an obvious retraction $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0$ defined by removing all the pairs $(F, f) \amalg (-F, f)$; it transforms the monoid law $\amalg$ on $\mathcal{F}$ into a group law $\bar{\amalg}$ on $\mathcal{F}_0$ and factors the canonical map $\mathcal{F} \rightarrow \Delta_2$ through a group homomorphism $\mathcal{F}_0 \rightarrow \Delta_2$.

Define on $\mathcal{F}$ the following relation $<$, which is a slight extension of the compression cobordism of paragraph 3: $(F, f) < (F', f')$ when $(-F, f) \amalg (F', f')$ bounds some $(M^3, \hat{f})$, where M^3 is the disjoint union of a compression body V and of an I-bundle W over a closed (possibly non-orientable) surface, such that $F = -\hat{c}_1 V$ and $F' = \hat{c} W \amalg \hat{c}_2 V$. Note that $<$ is proper by [Wa₂], Lemma 3.5.

For any $X \in \Delta_2$, let (F^X, f^X) be an automorphism representing the cobordism class X , with the property that its class in $\mathcal{F}$ is minimal for $<$; for instance, choose (F^X, f^X) so that the complexity of F^X is minimum among all automorphisms representing X .

The automorphism f^X is clearly irreducible. A result of J. Nielsen ([Ni₁], [Ni₂]), expressed with a terminology issued from [Th₁], asserts then that (F^X, f^X) splits after isotopy into $(F_p^X, f_p^X) \amalg (F_A^X, f_A^X)$, where f_p^X is periodic and f_A^X is pseudo-Anosov. Here, an automorphism (F^2, f) is (homotopically) *pseudo-Anosov* when, for every $n \neq 0$ and every essential 1-submanifold C of F , $f^n(C)$ is never isotopic to C ; equivalently, (F^2, f) is pseudo-Anosov in this sense if and only if it is topologically isotopic to a pseudo-Anosov homeomorphism in the geometric sense of [Th₁].

Let $\mathcal{A}$ be the set of those elements of $\mathcal{F}$ which may occur as the class of such a (F_A^X, f_A^X) , i.e. the elements of $\mathcal{F}$ that are represented by pseudo-Anosov automorphisms and are minimal for $<$. It is clearly a subgroup of $\mathcal{F}_0$ [note that if (F, f) and $(F', f') \in \mathcal{F}$ are minimal for $<$, both belong to $\mathcal{F}_0$ and $(F, f) \bar{\amalg} (F', f')$ is minimal for $<$].

Also, recall from the introduction that Δ_2^p is the *periodic cobordism group*, which consists of periodic automorphisms of oriented surfaces modulo cobordism by periodic automorphisms of 3-manifolds.

THEOREM 6.1. — *The rule $X \rightarrow ((F_p^\lambda, f_p^\lambda), (F_\lambda^\lambda, f_\lambda^\lambda))$ induces a group isomorphism $\Delta_2 \cong \Delta_2^p \oplus \mathcal{A}$, whose inverse is the obvious homomorphism.*

Remark. — Theorem 6.1 asserts in particular that $(F_\lambda^\lambda, f_\lambda^\lambda)$ is well-defined up to conjugacy and isotopy. If we had required f_λ^λ to be a geometric pseudo-Anosov homeomorphism (in the sense of [Th₁]), $(F_\lambda^\lambda, f_\lambda^\lambda)$ would even be unique up to mere (topological) conjugacy (two geometric pseudo-Anosov homeomorphisms of the same surface that are isotopic are conjugate).

Proof of 6.1. — To prove that the map $\Delta_2 \rightarrow \Delta_2^p \oplus \mathcal{A}$ is well-defined, consider another automorphism $(G^\lambda, g^\lambda) = (G_p^\lambda, g_p^\lambda) \sqcup (G_\lambda^\lambda, g_\lambda^\lambda)$ that represents X and is minimal for $<$ (where g_p^λ is periodic and g_λ^λ is pseudo-Anosov). By definition, $(F^\lambda, f^\lambda) \sqcup (-G^\lambda, g^\lambda)$ bounds some $(M^3, \hat{f})$. By Proposition 5.1, this null-cobordism can be chosen so that M splits into three pieces V , M_1 and M_p , preserved by $\hat{f}$, where V is a compression body for ∂M , M_1 is an I-bundle and $\hat{f}|_{M_p}$ is periodic.

Since both (F^λ, f^λ) and (G^λ, g^λ) are minimal for $<$, the compression body V is just a regular neighborhood of ∂M in M . Let M'_1 (resp. M'_p) denote the union of M_1 (resp. M_p) and of the adjacent components of V .

Since no pseudo-Anosov surface automorphism is homotopic to a periodic one, $\partial M'_p \subset F_p^\lambda \cup G_p^\lambda$ and $\hat{f}$ is consequently periodic on the boundary of the product I-bundle $\overline{M'_p - M_p}$. By Proposition 4.3, $\hat{f}$ can therefore be assumed to be periodic on $M'_p = (M'_p - M_p) \cup M_p$ [case (b) of Proposition 4.3 cannot occur since (F^λ, f^λ) and (G^λ, g^λ) are minimal for $<$]. This provides a partition $M = M'_1 \sqcup M'_p$ of the components of M such that M'_1 is an I-bundle and $\hat{f}|_{M'_p}$ is periodic.

No component of M'_1 can have its boundary completely contained in F^λ or G^λ : Otherwise, (F^λ, f^λ) or (G^λ, g^λ) would not be minimal for $<$. From this fact, it follows for homotopy theoretic reasons that each component of M'_1 joins, either a component of F_λ^λ to a component of G_λ^λ , or a component of F_p^λ to a component of G_p^λ .

Let M''_1 consist of the components of M'_1 that meet F_λ^λ (or G_λ^λ), and let M''_p be $M - M''_1$. Note that $\partial M''_1 = F_\lambda^\lambda \cup G_\lambda^\lambda$ and $\partial M''_p = F_p^\lambda \cup G_p^\lambda$.

The manifold M''_1 is a product I-bundle. By [Wa₂], Lemma 3.5, $\hat{f}$ can be isotoped on M''_1 so that it preserves the projection $M''_1 \rightarrow I$. It follows that $(F_\lambda^\lambda, f_\lambda^\lambda)$ and $(G_\lambda^\lambda, g_\lambda^\lambda)$ are equivalent by conjugacy and isotopy, i.e. represent the same element of $\mathcal{A}$.

Applying Proposition 4.3 to the I-bundle $M_1 - M''_1$, $\hat{f}$ can be modified to be periodic on $M'_p = M'_p \cup (M_1 - M''_1)$ [again, case (b) of Proposition 4.3 cannot occur by minimality of (F^λ, f^λ) and (G^λ, g^λ)]. Hence $(F_p^\lambda, f_p^\lambda)$ and $(G_p^\lambda, g_p^\lambda)$ are periodic cobordant.

This ends the proof that the rule $X \rightarrow ((F_p^\lambda, f_p^\lambda), (F_\lambda^\lambda, f_\lambda^\lambda))$ induces a map $\varphi : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2^p \oplus \mathcal{A}$. The map φ is clearly a group homomorphism since, if (F, f) and $(F', f') \in \mathcal{F}_0$ are minimal for $<$, so is $(F, f) \sqcup (F', f')$.

Let $\psi : \Delta_2^p \oplus \mathcal{A} \rightarrow \Delta_2$ be the obvious group homomorphism. By definition of φ , $\psi\varphi = \text{Id}$ and φ is therefore injective.

To prove that φ is surjective, we need to show that, for every automorphism $(F_p, f_p) \sqcup (F_\lambda, f_\lambda)$ where f_p is periodic and the class of (F_λ, f_λ) in $\mathcal{F}$ is contained in $\mathcal{A}$, (F_p, f_p) is periodic

cobordant to a periodic automorphism (F'_p, f'_p) such that $(F'_p, f'_p) \amalg (F_A, f_A)$ is minimal for $<$. By some homotopy theoretic remarks and the usual compatibility of $\tilde{\Pi}$ with minimality, this last property is equivalent to the fact that (F'_p, f'_p) is minimal for $<$.

The proof of Theorem 6.1 is therefore achieved by Lemma 6.2 below.

LEMMA 6.2. — *Every periodic automorphism (F^2, f) is periodic cobordant to a periodic automorphism whose class in $\mathcal{F}$ is minimal for $<$.*

Proof of 6.2. — If (F^2, f) is not minimal for $<$, there exists by definition an automorphism $(M^3, \hat{f})$ and a partition $M = V \amalg W$ of the components of M such that:

- (1) V is a compression body;
- (2) W is an I-bundle over a closed surface;
- (3) $F = \partial_e V \cup \partial W$ and $f = \hat{f}|_F$;
- (4) $M \not\cong F \times I$.

We would like $\hat{f}$ to be periodic. Apply Proposition 4.3 to each component of W (and to the first iterate of $\hat{f}$ that preserves it). When we get in case (b) of Proposition 4.3, replace the considered component of W (and its images by $\hat{f}$) by one or two solid tori and add them to V . Eventually, only case (a) holds and $\hat{f}$ can be assumed to be periodic on W . By Proposition 4.1, $\hat{f}$ can also be isotoped so that it is periodic on V , and therefore on M .

Let now F_1 be $-(\partial M - F)$ and let f_1 be $\hat{f}|_{F_1}$. The periodic automorphisms (F, f) and (F_1, f_1) are periodic cobordant and $(F_1, f_1) < (F, f)$. If (F_1, f_1) is minimal for $<$, the property is proved. Otherwise, iterate this process and define a sequence (F_i, f_i) of periodic automorphisms periodic cobordant to (F, f) such that :

$$\dots (F_{i+1}, f_{i+1}) < (F_i, f_i) < \dots < (F_1, f_1) < (F, f).$$

Considering the complexities of the surface F_i , this sequence must needs stop, which happens when we reach a (F_i, f_i) that is minimal for $<$.

This ends the proof of Lemma 6.2, and therefore of Theorem 6.1. $\square$

An important remark for the following sections is that the proof of 6.1 is natural with respect to the graded group structure of Δ_2 defined in paragraph 1. Consequently, for the obvious definitions of $\mathcal{A}_\gamma$ and $\Delta_{2,\gamma}^p$:

PROPOSITION 6.3. — *For each $\gamma \in \Gamma$, $\Delta_{2,\gamma} \cong \Delta_{2,\gamma}^p \oplus \mathcal{A}_\gamma$.* $\square$

7. The group $\mathcal{A}$

Let $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ consist of the classes of automorphisms (F, f) where f acts transitively on the set of the components of F [or, equivalently, (F, f) cannot be decomposed into $(F', f') \amalg (F'', f'')$ in a non trivial way]. If $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ is the involution $(F, f) \rightarrow (-F, f)$, let $\mathcal{B}$ denote the fixed point set of α in $\mathcal{A}_0$ and choose a subset $\mathcal{C}$ such that $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B} \amalg \mathcal{C} \amalg \alpha(\mathcal{C})$. Every element (F, f) of $\mathcal{A}$ can be written as a disjoint sum of elements of $\mathcal{A}_0$, and this

decomposition is unique: if $a \in \mathcal{A}_0$, let $n_a(F, f) \in \mathbb{N}$ denote the number of times a appears in this decomposition. From the definition of the group $\mathcal{A}$, it is then clear that:

PROPOSITION 7.1. — *The map $\mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ defined by:*

$$(F, f) \mapsto ((n_b(F, f))_{b \in \mathcal{A}}, (n_c(F, f) - n_{c^*}(F, f))_{c \in \mathcal{A}}),$$

is a group isomorphism. $\square$

Let $\mathcal{F}_+$ (resp. $\mathcal{F}_-$) be the subset of the elements (F, f) of $\mathcal{F}$ where f preserves (resp. reverses) the orientation of $\mathcal{F}$, and define $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} \cap \mathcal{F}_+$, $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} \cap \mathcal{F}_+$, etc.

PROPOSITION 7.2. — *The sets $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{B}_-$ are infinite, and $\mathcal{C}_-$ is empty.*

COROLLARY 7.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &\cong \mathbb{Z}^x \oplus (\mathbb{Z}/2)^{\alpha}, & \mathcal{A}_- &\cong (\mathbb{Z}/2)^x, \\ \mathcal{A} &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_{\gamma} \cong \mathbb{Z}^x \oplus (\mathbb{Z}/2)^{\alpha}. & \square \end{aligned}$$

Proof of Proposition 7.2. — The set $\mathcal{C}_-$ is empty since $(F, f) = (-F, f)$ in $\mathcal{F}$ whenever f is orientation-reversing. To prove that $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{C}_+$ and $\mathcal{B}_-$ are infinite, it will be sufficient to exhibit an infinite number of elements of each among (pseudo-)Anosov automorphisms of the torus T^2 . Note that such automorphisms always belong to $\mathcal{A}$ by uniqueness of meridian discs in solid tori and of the “neck” of Klein bottles. Since there are, up to conjugacy and isotopy, infinitely many orientation-reversing Anosov automorphisms of T^2 , the set $\mathcal{B}_-$ is infinite.

The elements of $\mathcal{F}$ corresponding to orientation-preserving automorphisms of T^2 are in 1-1 correspondence with the conjugacy classes of $SL_2(\mathbb{Z})$ [by considering $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$]. It is a pleasant exercise to show that each such conjugacy class is classified by the data of a number $\epsilon \in \mathbb{Z}/2$ and of a sequence $(a_1 a_2 \dots a_n)$, defined up to cyclic permutation, of rational integers with the following property: Either all the a_i 's are non-null and a_i and a_{i+1} have opposite signs (including a_n and $a_{n+1} = a_1$), or the sequence is (0) , (± 1) or $(0a)$. To check this property, associate to each such data the conjugacy class of:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

and use some arguments on developments in continued fractions (compare with [BS], § 12). Moreover, the conjugacy classes of $SL_2(\mathbb{Z})$ represented by Anosov automorphisms are those whose classifying sequence is different from (0) , (± 1) and $(0a)$, and the involution defined by conjugacy with an element of $GL_2(\mathbb{Z})$ of determinant -1 is translated in these data by keeping $\epsilon \in \mathbb{Z}/2$ unchanged and replacing each $a_i \in \mathbb{Z}$ by $-a_i$. With this description, it is clear that Anosov automorphisms of T^2 define infinite subsets of $\mathcal{B}_+$ and $\mathcal{C}_+$ (see also [Sc], § 3). $\square$

8. The periodic cobordism group Δ_2^p

This section is devoted to the computation of Δ_2^p , and thus completes the computation of Δ_2 .

Consider a periodic automorphism f of a closed oriented surface F^2 . To each point $x \in F$ can be attached an element $r(f, x)$ of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in the following way: If n is the smallest positive integer for which f^n preserves both x and the orientation of F near x , then f^n is locally conjugate to a rotation of angle $2\pi r(f, x)$ around x (the orientation is determined by that of F). Let $\text{Fix}_+ f$ denote the (finite) set of points where $r(f, x) \neq 0$.

PROPOSITION 8.1. — *If f is periodic, (F^2, f) is periodic null-cobordant [i. e. the class of (F, f) in Δ_2^p is 0] if and only if $\text{Fix}_+ f$ admits a partition into pairs $\{x_i, x'_i\}$ such that:*

- (1) $r(f, x_i) + r(f, x'_i) = 0$ for every i .
- (2) For every i , $f(\{x_i, x'_i\}) = \{x_j, x'_j\}$ for some j .
- (3) f preserves the orientation of F near x_i if and only if it preserves it near x'_i .

Remark. — Since $r(f, f(x))$ is equal to $r(f, x)$ or to $-r(f, x)$ according as f preserves or reverses the orientation of f near x , the last condition is only relevant when $r(f, x_i) = r(f, x'_i) = 1/2$ [otherwise, (3) follows from (1) and (2)]. It is also void if f is orientation-preserving or -reversing, which, by paragraph 1, we could assume as well.

Proof. — If (F^2, f) bounds $(M^3, \hat{f})$, where f and $\hat{f}$ are both periodic, consider the set $\text{Fix}_+ \hat{f}$ of the points x in M such that, for some n , $\hat{f}^n$ fixes x and is a nontrivial rotation near x . It is a 1-submanifold of M , preserved by $\hat{f}$, with boundary $\text{Fix}_+ f$. Moreover, if x_i and x'_i are the two boundary points of a component k_i of $\text{Fix}_+ \hat{f}$, $r(f, x_i) + r(f, x'_i) = 0$. We then get the partition of $\text{Fix}_+ f$ sought by letting k_i range over all the arc components of $\text{Fix}_+ \hat{f}$.

Conversely, if such a partition exists, choose a small disc d_i (resp. d'_i) around each x_i (resp. x'_i), such that all these discs are disjoint and their union is preserved by f . Let then V be the manifold obtained from $F \times I$ by glueing a 1-handle along each pair $\{d_i \times \{1\}, d'_i \times \{1\}\}$; it is a compression body with interior boundary $\hat{\partial}_i V = F \times \{0\}$ and exterior boundary $\partial_e V = \partial V - \hat{\partial}_i V$. The automorphism $f \times \text{Id}_I$ of $F \times I$ extends to a periodic automorphism $\hat{f}$ of V . Then, (F, f) can be identified with $(\hat{\partial}_i V, \hat{f}|_{\hat{\partial}_i V})$ and $(F', f') = (-\partial_e V, \hat{f}|_{\partial_e V})$ is such that $\text{Fix}_+ f' = \emptyset$. To complete the proof, it is now sufficient to apply Lemma 8.2 below to (F', f') . $\square$

LEMMA 8.2. — *If f is periodic and $\text{Fix}_+ f = \emptyset$, then (F^2, f) bounds a periodic automorphism of a disjoint union of handlebodies.*

Proof. — We prove 8.2 by induction on the complexity of F . Assume the lemma proved for every surface of lower complexity than F and consider the quotient space F/f ; it is a surface, possibly non-orientable and/or with boundary if f does not preserve the orientation of F . We may of course assume F/f connected.

Consider first the case where the surface F/f is closed and $\dim H_1(F/f; \mathbb{Q}) \geq 2$. The projection $p: F \rightarrow F/f$ is a covering map and this cyclic regular covering is defined by some morphism $\rho: H_1(F/f; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/n$. By the condition on $H_1(F/f; \mathbb{Q})$ there exists an

indivisible class x in $H_1(F/f; \mathbb{Z})$ such that $\rho(x)=0$. Since x is indivisible, it can be represented by a simple closed curve $\tilde{C}$ in F/f [MP]. The inverse image of $\tilde{C}$ in F is a closed 1-submanifold C , which is essential since its components are non-separating. Then, construct a manifold V from $F \times I$ by glueing a 2-handle along each component of $C \times \{1\}$. For a suitable construction of V , the automorphism $f \times \text{Id}_I$ of $F \times I$ extends to a periodic automorphism $\hat{f}$ of V . Since C is essential, $F' = \partial V - (F \times \{0\})$ has smaller complexity than F . Moreover, because $\rho(x)=0$, each component of C preserved by some f^m is in fact fixed by f^m ; it follows that $\text{Fix}_+ f' = \emptyset$, where $f' = \hat{f}|_{F'}$. By induction hypothesis, (F', f') bounds a periodic automorphism $\hat{f}'$ of a disjoint union V' of handlebodies. If F is identified with $F \times \{0\} \subset \partial V$, (F, f) then bounds $(V \cup (-V'), \hat{f} \cup \hat{f}')$ and each component of $V \cup V'$ is clearly a handlebody.

When F/f has non-empty boundary and is not a disc, there exists a properly embedded arc k in F/f that is non-separating. Let C denote the inverse image of k in F ; this is a closed essential 1-submanifold, preserved by F . Let then (F', f') be constructed as above from (F, f) and C . For each component C_1 of C and each f^m preserving C_1 , $f^m|_{C_1}$ is either the identity or a reflection; it follows that $\text{Fix}_+ f' = \emptyset$. Then, apply the induction hypothesis to (F', f') to get the required property for (F, f) .

To start the induction, we now only need to study the cases where F/f is a disc, a sphere, a projective plane or a Klein bottle. In the first three cases, F consists of spheres and f therefore extends to a periodic automorphism of disjoint balls. For the last case, note that F consists of tori; then surger (F, f) along the inverse image C of an essential curve in F/f to get a periodic automorphism (F', f') of a disjoint union of spheres; since (F', f') bounds a periodic automorphism of disjoint balls, it follows that (F, f) bounds a periodic automorphism of disjoint solid tori. $\square$

The group Δ_2^p naturally splits into $\bigoplus_n \Delta_2^p(n)$, where $\Delta_2^p(n)$ is the subgroup of periodic cobordism classes of automorphisms (F, f) with f periodic of period n . As in paragraph 1, $\Delta_2^p(n)$ itself splits into $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \Delta_{2\gamma}^p(n)$; note that $\Delta_{2\gamma}^p(n) \neq 0$ only if $v(\gamma)$ divides n , and that $\Delta_{2\gamma}^p(n) \cong \Delta_{2+}^p(n/v(\gamma))$ or $\Delta_{2-}^p(n/v(\gamma))$ according as $\sigma(\gamma)=0$ or 1.

PROPOSITION 8.3:

$$\begin{aligned} \Delta_{2+}^p(n) &\cong \mathbb{Z}^{[1/2(n-1)]}, \\ \Delta_{2-}^p(4k+2) &= 0, \\ \Delta_{2-}^p(4k) &\cong (\mathbb{Z}/2)^{[1/2(k-1)]} (=0 \text{ if } k \leq 2) \end{aligned}$$

(here $[\]$ means “integral part”).

COROLLARY 8.4:

$$\Delta_2^p(n) = \mathbb{Z}^K \oplus (\mathbb{Z}/2)^L,$$

with:

$$K = \sum_{m|n} c_+(m) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \right]$$

and

$$L = \sum_{4m \equiv n} c_+(m) \left[\frac{1}{2} \binom{n}{4m} - 1 \right],$$

where $c_+(m)$ and $c_-(m)$ are determined by Corollary 1.5. $\square$

COROLLARY 8.5. — For every $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} \Delta_{2,\gamma} &\cong \mathbb{Z}' \oplus (\mathbb{Z}/2)' & \text{and} & \quad \Delta_{2,\gamma}^p \cong \mathbb{Z}'' & \text{if } \sigma(\gamma) = 0, \\ \Delta_{2,\gamma} &\cong (\mathbb{Z}/2)' & \text{and} & \quad \Delta_{2,\gamma}^p \cong (\mathbb{Z}/2)' & \text{if } \sigma(\gamma) = 1, \\ \Delta_2 &\cong \mathbb{Z}'' \oplus (\mathbb{Z}/2)' & \text{and} & \quad \Delta_2^p \cong \mathbb{Z}'' \oplus (\mathbb{Z}/2)'. \end{aligned} \quad \square$$

Proof of Proposition 8.3. — Consider (F^2, f) , where f preserves the orientation of F and is periodic of period n . The projection $p : F \rightarrow F/f$ is a cyclic branched covering and (F, f) is consequently determined up to oriented conjugacy by the closed oriented surface F/f , the ramification points $\tilde{x}_i$ in F/f and the representation $\rho : H_1(F/f - \bigcup_i \{\tilde{x}_i\}) \rightarrow \mathbb{Z}/n$ defined by the property that $\rho([p\gamma]) = m$ for every path γ in $F - p^{-1}(\bigcup_i \{\tilde{x}_i\})$ joining some x to $f^m(x)$. Note that the rotation numbers $r(f, x)$ can be easily recovered from ρ : For the natural embedding $\mathbb{Z}/n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $r(f, x) = \rho([\partial\tilde{d}])$ where $\tilde{d}$ is a small disc around $\tilde{x} = p(x)$ in F/f , oriented by the orientation of F . Moreover, the number of points of the orbit of x is determined by $r(f, x)$ (together with the period n). Since f is orientation-preserving, $r(f, x)$ depends only on $\tilde{x} = p(x)$ and will also be denoted by $r(f, \tilde{x})$.

Let $\mathcal{F}^p_+(n)$ denote the set of (oriented) conjugacy classes of automorphisms (F^2, f) , where f preserves the orientation of F and is periodic of period n . If $C(n) = (\mathbb{Z}/n) - \{0\}$, consider the map $\varphi : \mathcal{F}^p_+(n) \rightarrow \mathbb{N}^{C(n)}$ that “counts” for each $c \in C(n)$ the number $v_c(f)$ of orbits $\tilde{x} \in F/f$ with $r(f, \tilde{x}) = c$. If $\tilde{d}_i$ is a small disc in F/f around each orbit $\tilde{x}_i$ with $r(f, \tilde{x}_i) \neq 0$, then $\sum_i [\partial\tilde{d}_i] = 0$ in $H_1(F/f - \bigcup_i \{\tilde{x}_i\})$, and the image of φ is therefore contained in the subset of the elements $v \in \mathbb{N}^{C(n)}$ that satisfy the condition:

$$(\star) \quad \sum_{c \in C(n)} v_c c = 0 \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Conversely, every $v \in \mathbb{N}^{C(n)}$ satisfying $(\star)$ can easily be realized by some $(F, f) \in \mathcal{F}^p_+(n)$ (construct a suitable cyclic branched covering over S^2).

Choose now $A \subset C(n)$ such that $C(n) = A \sqcup (-A)$ or $A \sqcup (-A) \sqcup \{1/2\}$ according as n is odd or even. If $\text{Fix}_+ f$ admits a partition into pairs $\{x_i, x'_i\}$ as in Proposition 8.1, note that x_i and x'_i belong to the same orbit if and only if $r(f, x_i) = r(f, x'_i) = 1/2$, $n = 4k$ and $x'_i = f^k(x_i)$ [recall $r(f, f(x)) = r(f, x)$ since f is orientation-preserving]. It consequently follows from Proposition 8.1 that the map ψ , defined by:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}^p_+ &\rightarrow \mathbb{Z}^A & \text{if } n \neq 2[4], \\ (F, f) &\mapsto (v_a(f))_{a \in A} \end{aligned}$$

or:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}_+^p &\rightarrow \mathbb{Z}^A \oplus \mathbb{Z}/2 \quad \text{if } n=2[4], \\ (F, f) &\mapsto ((v_a(f) - v_{-a}(f))_{a \in A}, \overline{v_{1/2}(f)}). \end{aligned}$$

induces a monomorphism $\Delta_{2+}^p(n) \rightarrow \mathbb{Z}^A$ or $\mathbb{Z}^A \oplus (\mathbb{Z}/2)$. By the characterization of the image of φ , the image of ψ is easily seen to be isomorphic to $\mathbb{Z}^{\text{card } A}$. Since $\text{card } A = [1/2(n-1)]$ (and not $[1/2 n] - 1$ as written in [Bo]!), the first statement of Proposition 8.3 follows.

If (F^2, f) is an orientation-reversing automorphism of period $2n$, the map $p : F \rightarrow F/f$ is a cyclic branched covering above $\text{int}(F/f)$. As in the previous case, (F, f) is determined up to oriented conjugacy by the surface F/f (possibly non-orientable and/or with boundary), the ramification points $\tilde{x}_i \in \text{int } F/f$ of the restriction of p above $\text{int}(F/f)$ and some representation $\rho : H_1(F/f - \bigcup_i \{\tilde{x}_i\}) \rightarrow \mathbb{Z}/2n$ [note that there is no ambiguity for the orientation of F , since f realizes a conjugacy between (F, f) and $(-F, f)$]. As before, $r(f, x) = \rho([\partial \tilde{d}])$ where $\tilde{d}$ is a small disc around $p(x)$ in $\text{int}(F, f)$ oriented by the orientation of F near x [and $r(f, x) = 0$ if $p(x) \in \partial(F/f)$].

Since $r(f, f^m(x)) = (-1)^m r(f, x)$ for every x and m , every orbit of order $4k+2$ in $\text{Fix}_+ f$ admits a partition into pairs $\{x_i, f^{2k+1}(x_i)\}$ such that $r(f, x_i) + r(f^{2k+1}(x_i)) = 0$. By Proposition 8.1, the class of (F, f) in $\Delta_{2-}^p(2n)$ can therefore be represented by an automorphism (F', f') such that the order of every orbit in $\text{Fix}_+ f'$ is a multiple of 4. When n is odd, $\text{Fix}_+ f'$ must then be empty and, consequently, $\Delta_{2-}^p(4k+2) = 0$ for every k .

Now, consider the case where $n = 2k$. By the same argument as above, we can cancel every orbit where $r(f', x) = 1/2$ [because $(1/2) + (1/2) = 0$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$] and can therefore assume that $r(f', x)$ is never $1/2$. Since the order of each orbit is a multiple of 4, each $r(f', x)$ is contained in $\mathbb{Z}/k \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Let B be the set of pairs $\{\beta, -\beta\}$ in $\mathbb{Z}/k$ with $\beta \neq 0, 1/2$. Proposition 8.1 shows that the map $\Phi : \Delta_{2-}^p(4k) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^B$, which counts modulo 2 the number of orbits representing each element of B [for $r(f, \cdot)$], is well-defined and is a monomorphism (no orbit in $\text{Fix}_+ f'$ is "self-cancelable").

We claim that Φ is surjective; since $\text{card } B = [1/2(k-1)]$, this will achieve the computation of $\Delta_{2-}^p(4k)$. We just need to construct, for any integer l with $0 < l < (1/2)k$, an orientation-reversing automorphism (F^2, f) of period $4k$ such that $r(f, x) = \pm l/k$ if x belongs to one specific orbit and $r(f, x) \notin (\mathbb{Z}/k - \{0, 1/2\})$ otherwise. For this purpose, choose in the sphere S^2 $(2l+1)$ distinct points $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2l}$ and let $p : F^2 \rightarrow S^2$ be the $4k$ -fold cyclic branched covering associated to the morphism $\rho : H_1(S^2 - \bigcup_i \{\tilde{x}_i\}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ defined by the property that, if $\tilde{d}_i$ is a small disc around $\tilde{x}_i$, $\rho([\partial \tilde{d}_0]) = l/k$ and $\rho([\partial \tilde{d}_i]) = -1/2k$ if $i \neq 0$. The surface F^2 has exactly two components, and consequently admits an orientation for which the covering translation f is orientation-reversing. Now, $\text{Fix}_+ f$ consists of the orbit $p^{-1}(\tilde{x}_0)$ where $r(f, \cdot) = \pm(l/k)$ and of the orbits $p^{-1}(\tilde{x}_i)$, with $i \neq 0$, where $r(f, \cdot) = \pm 1/2k$. The automorphism (F, f) therefore satisfies the desired properties.

This ends the proof of Proposition 8.3. $\square$

We end this section by an exercise which provides a sufficient condition for a periodic automorphism to be null-cobordant. In fact, this result generalizes to the property that the restriction $\Delta_2^n \rightarrow W_{-1}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ of Kreck's homomorphism (see the introduction) is injective [EF].

PROPOSITION 8.6. — *If f is a periodic automorphism of F^2 such that $X \cdot f_*(X) = 0$ for every $X \in H_1(F)$, then (F, f) is null-cobordant.*

Moreover, (F, f) bounds a periodic automorphism of a disjoint union of handlebodies.

Remark. — If f preserves (resp. reverses) the orientation of F , the condition that $X \cdot f_*(X) = 0$ for every $X \in H_1(F)$ is equivalent to the property that $(f_*)^2 = \text{Id}$ (resp. $-\text{Id}$).

Proof of 8.6. — The property is proven by induction on the complexity of F ; the result is clear when F consists of spheres, which starts the induction.

When at least one component of F is not a sphere, we claim that there exists an essential curve C in F such that, for every m , either $C \cap f^m(C) = \emptyset$ or $f^m(C) = C$. As in 8.2, the existence of such a curve achieves the proof by application of the induction hypothesis to the automorphism (F', f') obtained by (equivariantly) surgering (F, f) along $\bigcup_n f^n(C)$.

The proof of the existence of C is very close to that of Lemma 3.2 and we just sketch it. Equip F with a smooth structure and a Riemannian metric for which f is an isometric diffeomorphism, and let C' be a simple closed geodesic that is length-minimizing among all essential curves in F . An argument similar to that used in Lemma 3.2 then shows that, for every m , either $C' \cap f^m(C') = \emptyset$ or $f^m(C') = C'$ [hint: Otherwise, select a shortest arc k in C' that joins two intersection points in $C' \cap f^m(C')$ of opposite signs; k exists since $[C'] \cdot f_*^m([C']) = 0$; one can then construct an essential curve that is shorter than C' by adding a component of $C' - f^m(C')$ to k and rounding the corners, which provides a contradiction]. The PL curve C is then obtained from the smooth curve C' by lifting a suitable small isotopy in F/f .

This ends the proof of Proposition 8.6. $\square$

9. Cobordism and handlebodies

In the preceding sections, we obtained the algebraic structure of Δ_2 . But, for a practical determination of the map $\mathcal{F} \rightarrow \Delta_2$, the following problem has still no general solution known.

(P) Given an automorphism of surface (for instance presented as a product of Dehn twists), decide whether it is null-cobordant or not.

As an approach to Problem (P), the following weaker problem is easier to handle.

(P') Given an automorphism of a connected surface, decide whether it bounds an automorphism of a handlebody or not.

For instance, in [JJ], K. Johansson and D. Johnson exhibit an automorphism of a surface of genus 2 which induces the identity on the homology and does not extend to any

handlebody (they show that any manifold obtained by perturbing with this automorphism a genus 2 Heegaard decomposition of S^3 is a homology sphere of Rohlin invariant 1). Moreover, they prove that the cobordism class of this automorphism is then non-trivial (see Corollary 9.4 below).

It may therefore be of some interest to give some relations between these "handlebody null-cobordisms" and the usual null-cobordisms. This is what we are going to do in this section.

The following easy corollary of Proposition 8.1 and Lemma 8.2 shows that Problem (P) and Problem (P') are equivalent for an orientation-preserving periodic automorphism of a connected surface.

PROPOSITION 9.1. — *If an orientation-preserving periodic automorphism (F^2, f) of a connected surface is null-cobordant, it extends to a periodic automorphism of a handlebody.*

Proof. — By Proposition 8.1 and with the notation of §8, the set $\{\tilde{x} \in F/f; r(f, \tilde{x}) \neq 0, 1/2\}$ admits a partition into pairs $\{\tilde{x}_i, \tilde{x}'_i\}$, $i=1, \dots, n$, with $r(f, \tilde{x}_i) + r(f, \tilde{x}'_i) = 0$ for every i . Let $D = D_{1/2} \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ be a collection of disjoint discs in F/f such that:

- (a) $(\text{Fix}_+ f)/f \subset \text{int } D$;
- (b) $D_{1/2} \cap (\text{Fix}_+ f)/f = \{\tilde{x} \in F/f; r(f, \tilde{x}) = 1/2\}$;
- (c) $D_i \cap (\text{Fix}_+ f)/f = \{\tilde{x}_i, \tilde{x}'_i\}$ for every $i=1, \dots, n$.

If $p : F \rightarrow F/f$ denotes the natural projection, consider the periodic automorphism (F', f') constructed from (F, f) by performing an equivariant 2-surgery along the 1-manifold $p^{-1}(\partial D)$. It splits into $(F'_0, f'_0) \sqcup (F'_{1/2}, f'_{1/2}) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^n (F'_i, f'_i) \right)$ where, for $i=1/2, 1, \dots, n$, F'_i consists of the components of F' that meet $p^{-1}(\text{int } D_i)$.

Let $\rho : H_1(F/f - (\text{Fix}_+ f)/f) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ be the morphism classifying the cyclic branched covering $F \rightarrow F/f$. From the relation between ρ and the $r(f, x)$'s (see §8), it follows that $\rho(\partial D_i) = 0$ for every $i=1/2, 1, \dots, n$ [note that there is an even number of $\tilde{x} \in F/f$ with $r(f, \tilde{x}) = 1/2$]. Consequently, $\text{Fix}_+ f'_0 = \emptyset$, $(f'_{1/2})^m$ is for every m an orientation-preserving involution on each component of $F'_{1/2}$ it preserves and, for every $i=1, \dots, n$, F'_i consists of spheres. Using Lemma 8.2 and Proposition 8.6, it follows that (F', f') bounds a periodic automorphism of disjoint handlebodies (and balls). Since (F, f) compresses to (F', f') by a periodic automorphism of a compression body, this ends the proof. $\square$

An easy argument, by consideration of the induced automorphism of $H_1(T^2)$ (i.e. Kreck's invariant), shows that an automorphism of the torus T^2 is null-cobordant if and only if it extends to a solid torus. A similar property holds for automorphisms of the surface of genus 2:

PROPOSITION 9.2. — *If an automorphism (F^2, f) of a connected surface of genus 2 is null-cobordant, either it is reducible or it extends to an automorphism of a handlebody.*

Remark. — If f is reducible, it compresses to an automorphism of one or two tori. Using Propositions 5.1 and 8.1, it can be shown that an orientation-preserving automorphism of a disjoint union of tori that is null-cobordant extends to a disjoint union of solid tori and of

copies of $T^2 \times I$ (but the situation is more complex for some orientation-reversing periodic automorphisms of two tori). Together with 9.2, this implies that a null-cobordant orientation-preserving automorphism of the surface of genus 2 extends, either to a handlebody, or to a manifold obtained by glueing a 1-handle over $T^2 \times I$ (with one attaching disc on each component of $T^2 \times \partial I$).

Proof of 9.2. — The null-cobordant automorphism (F^2, f) bounds some $(M^3, \hat{f})$ where M^3 splits into three parts V , M_1 and M_p as in Proposition 5.1.

If $V = M$, then f extends to a handlebody and the property is proved.

If $V \neq M$ but V is nevertheless non-trivial (i. e. $V \not\cong \partial M \times I$), $(V; \partial M, \delta V)$ admits a handle decomposition with exactly one 2-handle. Now, Proposition B.1 in Appendix B proves that the core of the 2-handle (extended to ∂M) do not depend on the handle decomposition, up to isotopy. Consequently, it is preserved by $\hat{f}$ up to isotopy, and f is therefore reducible.

If V is trivial then, after isotopy, either $\hat{f}$ is periodic on M , or M is an I-bundle over the non-orientable connected surface G^2 of Euler characteristic -1 and $\hat{f}$ preserves the fibration (by [Wa₂], Lemma 3.5, extended to I-bundles with non-orientable base).

If f is periodic and orientation-preserving, apply Proposition 9.1.

If f is periodic and orientation-reversing, it is easy to see that f is reducible (lift a suitable curve in F/f).

If M is an I-bundle over G^2 and $\hat{f}$ is fiber-preserving, $\hat{f}$ induces some automorphism g of G . The automorphism g is reducible, since it is well-known that the curve splitting G into a punctured torus is unique up to isotopy. Consequently, f is reducible. $\square$

COROLLARY 9.3 [JJ]. — *Let f be an automorphism of a connected surface F of genus 2 such that $X \cdot f_*(X) = 0$ for every $X \in H_1(F)$ [or equivalently $(f_*)^2 = \text{Id}$ or $-\text{Id}$ according as f preserves or reverses the orientation of F]. Then (F, f) is null-cobordant if and only if f extends to an automorphism of a handlebody,*

Proof. — Proposition 9.3 shows that, if (F, f) is null-cobordant, it compresses to some (F', f') where F' consists of tori (with possibly $F' = \emptyset$).

One readily checks that $X' \cdot f'_*(X') = 0$ for every $X' \in H_1(F')$, whence it follows easily that f' is reducible and extends to an automorphism of solid tori. This ends the proof. $\square$

Given a reducible surface automorphism, there is a natural way to surger it and obtain a new automorphism of a “smaller” surface. We consider now the inverse construction: For any automorphism (F^2, f) , choose a collection of disjoint discs partitioned into pairs $\{D_i, D'_i\}$, $i = 1, \dots, n$. If f is isotoped so that it sends each pair $\{D_i, D'_i\}$ onto a pair $\pm \{D_j, D'_j\}$ (possibly $i = j$), f extends to an automorphism f' of the surface F' obtained by 1-surgeries along the pairs $\{D_i, D'_i\}$. We shall then say that (F', f') is a *stabilization of order n* of (F, f) .

If the D_i 's are fixed, there are still many possible stabilizations of (F, f) . For instance, the isotopy classes of stabilizations of the identity constructed by use of the D_i 's form a subgroup of $\pi_0(\text{Aut } F')$, a semi-direct product of $\mathbb{Z}^n$ (the Dehn twists along the surgery handles) and of some braid group.

THEOREM 9.4. — *For a given surface F^2 , there exists a constant $K(F)$ such that every null-cobordant automorphism (F, f) admits a stabilization of order $\leq K(F)$ which bounds an automorphism of a disjoint union of handlebodies.*

For instance, one can take $K(F) = 2s(F)$, where $s(F)$ is the sum of the genera of the components of F .

Remark. — $2s(F)$ is not the optimum value for $K(F)$. For each surface, the proof of 9.4 provides a lower possible value for $K(F)$, but this value does not seem to admit a "nice" expression in a general formula. Moreover, even the value provided by the proof is not optimum.

Proof. — If (F, f) is null-cobordant, it bounds, by Proposition 5.1, an automorphism $(M^3, \hat{f})$ where M splits into three pieces V , M_1 and M_p , each preserved by $\hat{f}$, such that:

- (1) V is a compression body for $F = \partial M$ and $M - V = M_1 \cup M_p$.
- (2) M_1 is an I-bundle over a closed, possibly non-orientable, surface and $\hat{f}|_{M_1}$ is fiber-preserving (apply [Wa₂], Lemma 3.5).
- (3) $\hat{f}|_{M_p}$ is periodic.

In each component of M_1 , choose a fiber of the I-bundle and let U_1 be a regular neighborhood in M_1 of the union of these fibers. After isotopy, $\hat{f}$ can be assumed to preserve U_1 . Note that $\overline{M_1 - U_1}$ consists of handlebodies.

In M_p , consider the 1-submanifold $\text{Fix}_+(\hat{f}|_{M_p})$ of the points where an iterate of $\hat{f}$ is locally a non-trivial rotation (see §8). Let U_p be a regular neighborhood in M_p of the union of the arc components of $\text{Fix}_+(\hat{f}|_{M_p})$, preserved by $\hat{f}$. Now $\text{Fix}_+(\hat{f}|_{\partial(\overline{M_p - U_p})}) = \emptyset$ and, by Lemma 8.2, $\hat{f}|_{\partial(\overline{M_p - U_p})}$ therefore extends to a periodic automorphism of a disjoint union of handlebodies. Changing if necessary M by replacing $\overline{M_p - U_p}$ by these handlebodies, we can henceforth assume that $\overline{M_p - U_p}$ consists of handlebodies.

Let V' consist of the components of V that are not handlebodies (i. e. that are not components of M). A result proved in Appendix B (Lemma B.4) asserts that, after an isotopy of $\hat{f}|_V$ fixing $\partial_i V$, V' admits a presentation as $(\partial_i V \times I) \cup \{1\text{-handles}\}$, where:

- (1) $\partial_i V$ corresponds to $\partial_i V \times \{0\}$.
- (2) The 1-handles are attached on $\partial_i V \times \{1\}$ and avoid the discs $((U_1 \cup U_p) \cap \partial_i V) \times \{1\}$.
- (3) $\hat{f}$ preserves $U_V = ((U_1 \cup U_p) \cap \partial_i V) \times I$.

Now, if $U = U_1 \cup U_p \cup U_V$, the automorphism $\hat{f}|_{\partial(\overline{M - U})}$ is a stabilization of f and it bounds $\hat{f}|_{\overline{M - U}}$. By construction, $M - U$ consists of handlebodies since it is obtained by glueing 1-handles on $(V - V') \amalg (\overline{M_1 - U_1}) \amalg (\overline{M_p - U_p})$, that consists itself of handlebodies. The stabilization $\hat{f}|_{\partial(\overline{M - U})}$ is therefore of the required type.

To end the proof, we just need to prove that the order of this stabilization is bounded by $2s(F)$. This order is the sum of the number of components of M_1 and of $1/2 \text{ card}(\text{Fix}_+(\hat{f}|_{\partial M_p}))$. An easy computation on the Euler characteristic shows that:

$$\text{card}(\text{Fix}_+(\hat{f}|_{\partial M_p})) \leq 4s(\partial M_p),$$

whence the result follows [remark that $s(F) \geq s(\partial_i V)$]. $\square$

APPENDIX A. — Essential spheres in 3-manifolds (following M. Scharlemann)

This appendix is devoted to the proof of Lemma 5.2, which we recall below. We follow here the (unpublished) exposition of M. Scharlemann in a talk given at Orsay in 1979.

LEMMA 5.2. — *If $(F^2; f)$ is null-cobordant, it bounds an automorphism $(M^3, \hat{f})$ with M irreducible.*

Proof. — Consider an arbitrary null-cobordism $(M^3, \hat{f})$ for $(F^2; f)$. Without loss of generality, we may assume M connected.

Let Σ^2 be a collection of disjoint spheres in M that realizes a decomposition of M into a connected sum of prime manifolds ([Kn], [Mi]). Let $M_0, M_1, \dots, M_n$ be the components of the manifold obtained by splitting M along Σ , and let $\hat{M}_i$ be constructed from M_i by glueing a ball along every component of ∂M_i that is a "face" of Σ . The surface Σ and the indices can be chosen so that:

- (1) Every $\hat{M}_i$ is a prime manifold (i. e. every separating sphere bounds a ball in $\hat{M}_i$).
- (2) Every component of Σ is separating.
- (3) $\hat{M}_0 \cong S^3$.
- (4) For every $i \neq 0$, $\hat{M}_i \not\cong S^3$ and ∂M_i contains exactly one face of Σ , corresponding to the

component Σ_i (it then follows from (2) that $\Sigma = \bigcup_{i \neq 0} \Sigma_i$).

A classical result of Kneser (see [Mi]) asserts that the $\hat{M}_i$'s do not depend of Σ . This can be slightly improved by the following statement.

LEMMA A.1. — *If Σ and Σ' are two collections of spheres in M^3 that satisfy the above properties (1) to (4), there exists an automorphism $\hat{g}$ of M^3 fixing ∂M such that $\hat{g}(\Sigma) = \Sigma'$.*

Lemma A.1 achieves the proof of 5.2: Let $\hat{g}$ be provided by application of Lemma A.1 to $\Sigma' = \hat{f}(\Sigma)$. If M' denotes the disjoint union of the $\hat{M}_i$'s that are not isomorphic to $S^1 \times S^2$, the automorphism $\hat{g}^{-1} \hat{f}$ of M preserves Σ and therefore induces an automorphism $\hat{f}'$ of M' . The manifold M' is irreducible (recall that every prime connected 3-manifold is either irreducible or isomorphic to $S^1 \times S^2$), and $(F, f) = \partial(M', \hat{f}')$ since $\hat{g}|_{\partial M} = \text{Id}$. This ends the proof of Lemma 5.2, granting Lemma A.1. $\square$

Proof of Lemma A.1. — Let $M'_0, M'_1, \dots, M'_p$ denote the components of the manifold obtained by splitting M along Σ' , where the indexing is coherent with conditions (1) to (4).

Consider first the case where $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$. By condition (1), every separating sphere in M'_i , $i \neq 0$, either bounds a ball or is parallel to the component of $\partial M'_i$ that is a face of Σ' . Considering the (M_i) 's and (M'_j) 's as submanifolds of M , we may therefore assume, after an isotopy of Σ fixing ∂M , that $\Sigma \subset M'_0$. By a symmetric argument, for every $i \neq 0$, M_i contains exactly one component of Σ' and this component is parallel to Σ_i in M_i . It follows that Σ and Σ' are isotopic by an isotopy fixing ∂M .

Consider now the general case. We may assume that Σ and Σ' meet transversally and that the number of components of $\Sigma \cap \Sigma'$ cannot be reduced by any isotopy of Σ fixing ∂M . A standard argument then shows that, for every $i \neq 0$, no component of $\Sigma' \cap M_i$ is a disc (otherwise, one could reduce $\Sigma \cap \Sigma'$ by "crushing" some ball whose boundary is the union of a disc in Σ' and a disc in Σ_i).

If $\Sigma \cap \Sigma' \neq \emptyset$, at least one component of $\Sigma' \cap M_0$ is a disc D (by the above remark), with boundary in the component Σ_i of Σ . Let then $\Sigma_i^\#$ be the surface (two spheres) obtained from Σ_i by performing an embedded 2-surgery along D . There exists a simple arc k that joins the two components of $\Sigma_i^\#$, with $k \cap \Sigma' = \emptyset$ and $k \cap \Sigma = \partial D$: Indeed, the component of $\Sigma' \cap M_i$ that is adjacent to D is not a disc; construct k by a slight translation of an arc in this component that joins ∂D to a different component of $\Sigma' \cap \Sigma_i$ (Fig. 1). Let then Σ_i^* be the sphere obtained from $\Sigma_i^\#$ by an embedded 1-surgery along k , and let Σ^* be $(\Sigma - \Sigma_i) \cup \Sigma_i^*$ (Fig. 2).

By construction, $\Sigma^* \cap \Sigma' = (\Sigma \cap \Sigma') - \partial D$. We claim that there exists an automorphism $\hat{g}^*$ of M , fixing ∂M , such that $\hat{g}^*(\Sigma) = \Sigma^*$. Let D' be a disc bounding ∂D in Σ_i and let k' be a simple arc contained in M_0 , joining the point $\partial k - D'$ to a point in D and whose interior avoids Σ (but possibly $\Sigma' \cap \text{int } k' \neq \emptyset$) (Fig. 1). To describe $\hat{g}^*$, it is convenient to consider the manifold $M^\#$ constructed by splitting M along the sphere $D \cup D'$ and by glueing a ball B^3 on the boundary of the manifold so obtained, along the "side" of $D \cup D'$ that meets k and k' . In $M^\#$, there exists an isotopy that translates B along $k \cup k'$ in the direction $k' - k$ and joins the identity to some automorphism $\hat{g}^\#$, where $\hat{g}^\#$ fixes B and the complement of a small neighborhood of $B \cup k \cup k'$. Since $\hat{g}^\#$ fixes $\partial(M^\# - \text{int } B)$, it induces an automorphism $\hat{g}^*$ of M , for which $\hat{g}^*(\Sigma)$ is easily seen to be isotopic to Σ^* by an isotopy fixing ∂M (see Fig. 2); note that, unlike $\hat{g}^\#$, $\hat{g}^*$ is in general definitely not isotopic to the identity.

Iterating this process, we obtain an automorphism $\hat{g}$ fixing ∂M such that $\hat{g}(\Sigma) \cap \Sigma' = \emptyset$. The study of the case where $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$ then shows that $\hat{g}$ can lastly be deformed by an isotopy fixing ∂M so that $\hat{g}(\Sigma) = \Sigma'$. $\square$

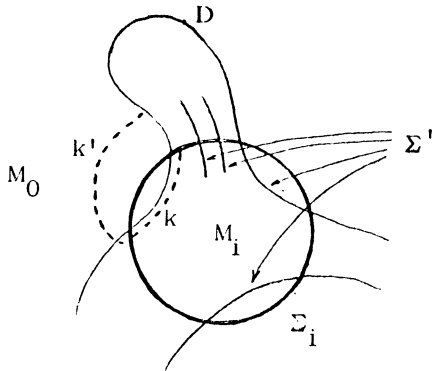


Fig. 1

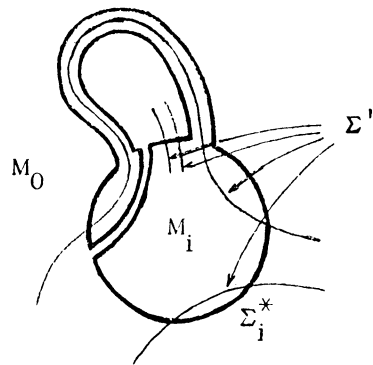


Fig. 2

APPENDIX B. — Compression bodies

The aim of this appendix is to extend to compression bodies some well-known properties of handlebodies (see [Z]). These results were needed in paragraph 4 and paragraph 9.

For a compression body V , consider the set $\mathcal{D}$ of all surfaces D in V with the following properties:

- (1) D consists of discs with boundary in $\partial_e V$ and splits V into a ∂ -irreducible manifold.
- (2) Property (1) fails if we remove one component from D .

The set $\mathcal{D}$ contains at least one element D_0 (with possibly $D_0 = \emptyset$): Indeed, consider a decomposition of $(V; \partial_e V, \partial_i V)$ into handles of index 2 and 3. The union of the cores of the 2-handles (extended to $\partial_e V$) satisfies (1); remove then as many components as necessary from this surface.

Given an element of $\mathcal{D}$, there is a natural construction, related to classical “handle sliding” for handle decompositions, that provides many other elements of $\mathcal{D}$: Let d_1 and d_2 be two distinct components of $D \in \mathcal{D}$ and let k be a simple arc in $\partial_e V$ that joins a side of d_1 to itself and whose interior meets (transversally) ∂D in exactly one point contained in ∂d_2 (see Fig. 3). Consider then a regular neighborhood U of $k \cup d_1$; its frontier ∂U consists of a disc and of an annulus A . By definition, a *sliding of d_2 over d_1 along k* is any automorphism t of V that is isotopic to a Dehn twist along A . Up to isotopy, $t(D - d_2) = D - d_2$ and $t(d_2)$ is as in Figure 3 (the two cases occur according to the direction of the Dehn twist). Note that $t(D)$ depends only on one “half” k' of k ; we shall say that $t(D)$ is obtained from D by sliding d_2 over d_1 along k' . Note that t^{-1} is a sliding of $t(d_2)$ over d_1 .

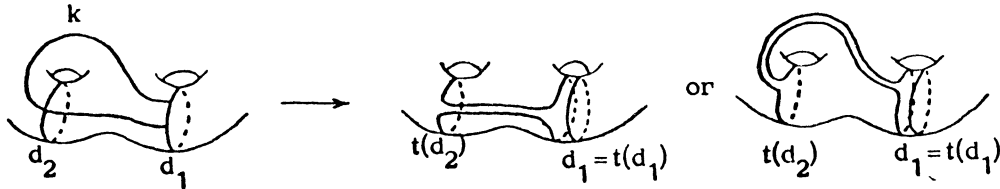


Fig. 3

PROPOSITION B.1. — *Any two elements of $\mathcal{D}$ are related by a succession of slidings (and isotopies).*

Proof. — Consider D_0 and $D_1 \in \mathcal{D}$ and isotop D_1 so that its intersection with D_0 is transverse and has minimum number of components (among all isotopies of D_1). A standard argument then shows that no component of $D_0 \cap D_1$ is closed [see for instance the proof of (b) $\Rightarrow$ (c) in Proposition 2.2].

We now want to decrease $D_0 \cap D_1$ by performing a succession of slidings on D_1 . For this purpose, assume $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ and consider the manifold $\tilde{V}_1$ constructed by cutting V open along D_1 . Let $\tilde{D}_0 \subset \tilde{V}_1$ be the surface obtained by splitting D_0 along $D_0 \cap D_1$. Since D_0 consists of discs and no component of $D_0 \cap D_1$ is closed, a component $\tilde{d}_0$ of $\tilde{D}_0$ is a disc that

meets in exactly one arc the union of the faces of D_1 on $\partial\tilde{V}_1$. Let d_1^+ be the face of D_1 that meets $\tilde{d}_0$, d_1^- be the corresponding component of D_1 and d_1^- be the other face of d_1 on $\partial\tilde{V}_1$. By definition of $\mathcal{L}$, $\tilde{V}_1$ is ∂ -irreducible and $\partial\tilde{d}_0$ consequently bounds a disc $\tilde{d}_0'$ in $\partial\tilde{V}_1$.

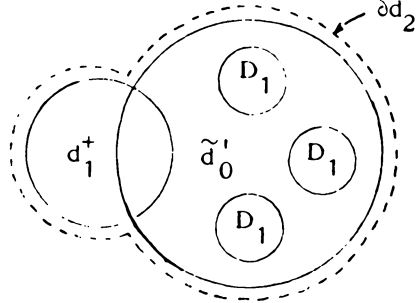


Fig. 4

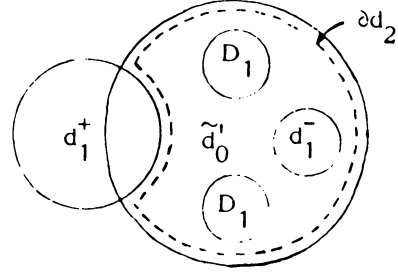


Fig. 5

If $\tilde{d}_0'$ does not contain d_1^- , let d_2 be the disc constructed by "pushing" the interior of $d_1^+ \cup \tilde{d}_0'$ inside $\tilde{V}_1$ and slightly moving its boundary so that $d_1^+ \cap \partial d_2 = \emptyset$ (Fig. 4). Considering d_2 as a (properly embedded) disc in V , let D_2 denote $(D_1 - d_1) \cup d_2$. One checks easily that D_2 is obtained from D_1 by a succession of slidings of d_1 over the other components of D_1 that have at least one face in $\tilde{d}_0'$.

If $\tilde{d}_0'$ contains d_1^- , let d_2 be constructed from $\tilde{d}_0' - d_1^-$ by pushing its interior inside $\tilde{V}_1$ and slightly moving its boundary so that $d_1^- \cap \partial d_2 = \emptyset$ (Fig. 5). Again $D_2 = (D_1 - d_1) \cup d_2$ is obtained from D_1 by a succession of slidings of d_1 over the other components of D_1 with at least one face in $\tilde{d}_0'$ (but now, the slidings occur "on the d_1^- -side").

In both cases, $D_0 \cap D_2$ has less components than $D_0 \cap D_1$. By iterating this process, we eventually reach a surface $D_n \in \mathcal{L}$, related to D_1 by a sequence of slidings, such that $D_n \cap D_0 = \emptyset$. Let $\tilde{V}_n$ be obtained by cutting V open along D_n . If d_0 is a component of D_0 , ∂d_0 bounds a disc d_0' in $\partial\tilde{V}_n$ ($\tilde{V}_n$ is ∂ -irreducible).

There exists a component d_n of D_n with exactly one face in d_0' : Otherwise, d_0 would separate the component of V that contains it into two components, one of which is a handlebody (use the irreducibility of V), and D_0 would not satisfy the minimality condition (2) in the definition of $\mathcal{L}$. Now, the surface $D_{n+1} = (D_n - d_n) \cup d_0$ is obtained from D_n by sliding d_n over the other components of D_n with at least one face in d_0' .

By iterating this process, we eventually reach $D_p \subset D_0$. By minimality of D_0 [= condition (2) in the definition of $\mathcal{L}$], it follows that, in fact, $D_p = D_0$. This ends the proof. $\square$

COROLLARY B. 2. — *If D_0 and $D_1 \in \mathcal{L}$, then $D_1 = u_n u_{n-1} \dots u_1 (D_0)$ where, for every i , u_i is a sliding of a component of D_0 over another one.*

Proof. — Proposition B. 1 asserts that $D_1 = t_n t_{n-1} \dots t_1 (D_0)$ where, for every i , t_i is a sliding of a component of $t_{i-1} \dots t_1 (D_0)$ over another one. Note that, if $\varphi = t_{n-1} t_{n-2} \dots t_1$, then $t_n' = \varphi^{-1} t_n \varphi$ is a sliding of a component of D_0 over another one. Since $t_n t_{n-1} \dots t_1 = \varphi t_n'$, the result then follows by induction on n . $\square$

COROLLARY B.3. — *In a compression body V , let D consist of discs with $\partial D \subset \partial_e V$. Then the manifold $\tilde{V}$ obtained by cutting V open along D is a compression body with interior boundary corresponding to $\partial_i V$.*

Proof. — Choose a handle decomposition of $(V; \partial_e V, \partial_i V)$ into handles of index 2 and 3 with minimum number of handles, and consider the union D_0 of the cores of the 2-handles (extended to $\partial_e V$). Then $\tilde{V}_0$, obtained by cutting V open along D_0 , is isomorphic to the disjoint union of $(\partial_i V) \times I$ and of some balls. Moreover, it is easy to check that $D_0 \in \mathcal{L}$.

When $D \in \mathcal{L}$, Proposition B.1 shows that $\tilde{V} \cong \tilde{V}_0$, which proves B.3 in this case.

In the general case, D is contained in a surface D' which consists of discs and splits V into a ∂ -irreducible manifold. Let $D'' \in \mathcal{L}$ be constructed by removing from D' as many components as necessary, and let V' (resp. V'') denote the manifold obtained by splitting V along D' (resp. D''). Since $V'' \cong \tilde{V}_0$ is irreducible and ∂ -irreducible, V' is isomorphic to the disjoint union of $\tilde{V}_0$ and of some balls, and therefore to the disjoint union of $(\partial_i V) \times I$ and of balls. It follows that $\tilde{V}$, obtained from V' by glueing 1-handles on $\partial \tilde{V}' - \partial_i V$, is a compression body. $\square$

In §9, we needed the following technical result.

LEMMA B.4. — *Let V be a compression body, Δ be a finite collection of disjoint discs in $\partial_i V$ and g be an automorphism of V preserving $\partial_i V$ and Δ . Assume that no component of V is a handlebody (just to lighten the notation) and choose a presentation of V as $(\partial_i V \times I) \cup \{1\text{-handles}\}$, where $\partial_i V$ is identified with $\partial_i V \times \{0\}$ and the 1-handles are attached on $(\partial_i V - \Delta) \times \{1\}$.*

Then, g can be deformed, by an isotopy fixing $\partial_i V$, to an automorphism g' such that $g'(\Delta \times I) = \Delta \times I$.

Proof. — First of all, note that V admits such a handle decomposition: Indeed, by definition of compression bodies and since no component of V is a handlebody, the triad $(V; \partial_e V, \partial_i V)$ admits a decomposition into 2-handles (the 3-handles can easily be cancelled.) Consider then the dual decomposition.

Let D consist of the co-cores of the 1-handles of this decomposition. Clearly $D \in \mathcal{L}$.

By Corollary B.2, g can be deformed, by an isotopy fixing $\partial_i V$, to $\psi\phi$ where $\psi(D) = D$ and the support of ϕ is contained in a regular neighborhood of the union of D and of a 1-subcomplex of $\partial_e V$. In particular, we may assume that the support of ϕ avoids $\Delta \times I \subset V$. Now, ψ can be isotoped relatively to $\partial_i V$ so that $\psi(\Delta \times I) = \Delta \times I$ (first, make it preserve the 1-handles, and then the strata $\partial_i V \times \{t\}$ by use of [Wa₂], Lemma 3.5). This ends the proof of Lemma B.4. $\square$

REFERENCES

- [Bo] F. BONAHO, *Cobordisme des difféomorphismes de surfaces* (C. R. Acad. Sc., Paris, T. 290, série A, 1980, pp. 765-767).
- [BS] F. BONAHO and L. C. SIEBENMANN, *New Geometric Splittings for Knots and Links*, to appear.
- [Ca] A. CASSON, *Cobordism Invariants of Automorphisms of Surfaces*, Handwritten Notes, Orsay, 1979.
- [EE] A. EDMONDS and J. EWING, *Remarks on the Cobordism Group of Surface Diffeomorphisms* (Math. Ann., Vol. 259, 1982, pp. 497-504).

- [FL] A. FATHI and F. LAUDENBACH, *Difféomorphismes pseudo-Anosov et décompositions de Heegaard* (C. R. Acad. Sci. Paris. T. 291, série A. 1980, pp. 423-425).
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH and V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces* (Astérisque, n° 66-67, 1979).
- [HW] G. HARDY and E. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1938.
- [JS] W. JACO and P. SHALEN, *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds* (Memoirs A.M.S., n° 220, 1979).
- [Jo] J. JOHANNSON, *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries* (Springer Lecture Notes, n° 761, 1979).
- [JJ] J. JOHANNSON and D. JOHNSON, *Non-Bounding Surface Diffeomorphisms which Act Trivially on the Homology*, preprint, 1980.
- [Kn] H. KNESER, *Geschlossen Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten* (Jber. Deutsch. Math. Verein., Vol. 38, 1929, pp. 248-260).
- [Kr₁] M. KRECK, *Cobordism of Odd Dimensional Diffeomorphisms* (Topology, vol. 15, 1976, pp. 353-361).
- [Kr₂] M. KRECK, *Bordism of Diffeomorphisms* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 82, 1976, pp. 759-761).
- [LM] S. LOPEZ DE MEDRANO, *Cobordism of Diffeomorphisms of $(k-1)$ -Connected $2k$ -Manifolds*, Second Conference on Compact Transformations Groups, 217-227, Amherst, Springer, 1972.
- [MP] W. MEEKS and J. PATRUSKY, *Representing Homology Classes by Embedded Circles on a Compact Surface* (Illinois J. Math., Vol. 22, 1978, pp. 262-269).
- [MY] W. MEEKS and S.-T. YAU, *Topology of Three Dimensional Manifolds and the Embedding Problems in Minimal Surface Theory* (Ann. Math., Vol. 112, 1980, pp. 441-484).
- [Me] P. MELVIN, *Bordism of Diffeomorphisms* (Topology, Vol. 18, 1979, pp. 173-175).
- [Mi] J. MILNOR, *A Unique Decomposition Theorem for 3-Manifolds* (Amer. J. Math., 84, 1962, pp. 1-7).
- [Mo] G. MOSTOW, *Quasiconformal Mappings in n -Space and the Rigidity of Hyperbolic Space Forms*, Publ. Math. Inst. des Hautes Études Scient., Paris, Vol. 34, 1968, pp. 53-104.
- [Ni₁] J. NIELSEN, *Untersuchung zur Topologie der Geschlossenen Zweiseitigen, Flächen I, II and III*, Acta Mathematica, Vol. 50, 1927; Vol. 53, 1929, and Vol. 58, 1931.
- [Ni₂] J. NIELSEN, *Abbildungsklassen endlicher Ordnung* (Acta Math., Vol. 75, 1942, pp. 23-115).
- [Pr] G. PRASAD, *Strong rigidity of $\mathbb{Q}$ -rank 1 lattices* (Invent. Math., Vol. 21, 1973, pp. 255-286).
- [Sc] M. SCHARLEMANN, *The Subgroup of Δ_2 Generated by Automorphisms of Tori* (Math. Ann., Vol. 251, 1980, pp. 263-268).
- [Te₁] O. TEICHMÜLLER, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale* (Abh. Preuss. Akad. Wiss., Vol. 22, 1939, pp. 187).
- [Te₂] O. TEICHMÜLLER, *Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Vol. 4, 1943, pp. 42.
- [Th₁] W. THURSTON, *On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces I*, preprint, Princeton University, 1976; for a complete account, see [FLP].
- [Th₂] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds* (Mimeographed Notes, Princeton University, 1976-1979).
- [Th₃] W. THURSTON, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds*, preprint, Princeton University, 1980.
- [Wa₁] F. WALDHAUSEN, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I and II* (Inventiones Math., Vol. 3, 1967, pp. 308-333 and Vol. 4, 1967, pp. 87-117).
- [Wa₂] F. WALDHAUSEN, *On Irreducible Manifolds Which are Sufficiently Large* (Ann. Math., Vol. 87, 1968, pp. 56-88).
- [Wi] H. WINKELNKEMPER, *On equators of Manifolds and the Actions of θ^n* (Thesis, Princeton University, 1970).
- [Z] H. ZIESCHANG, *Über einfache Kurven auf Vollbrezeln* (Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, Vol. 25, 1962, pp. 231-250).

Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1983), **94**, 235

Printed in Great Britain

Ribbon fibred knots, cobordism of surface diffeomorphisms, and pseudo-Anosov diffeomorphisms

For a long time, the main activity in knot theory, we would even say the only one for the problems related to knot cobordism, has been focused onto the development and the analysis of various algebraic invariants. The present paper intends to illustrate some geometric techniques, and to advertise a recent theorem of Casson and Gordon (8) which provides a necessary condition for a fibred classical knot to be ribbon (see definition below) in terms of a cobordism property of its monodromy. We want to show how this last result, combined with some previous work of ours on the cobordism of surface diffeomorphisms (4) (see also (10)) and Thurston's theory of pseudo-Anosov diffeomorphisms (28), (12), can effectively be used to show that a knot is not ribbon. More precisely we construct, using these techniques, a family of genus 2 fibred knots K_i , $i \in \mathbb{N}$, in S^3 with the following properties:

- (a) The isomorphism $f_{i*}: H_1(F_i) \rightarrow H_1(F_i)$ induced by the monodromy of K_i on the 1-dimensional homology of the fibre does not depend on i , up to conjugacy.
- (b) If $i \neq j$, the connected sum $K_i \# (-K_j)$ is not a ribbon knot. In particular, the K_i 's are pairwise distinct.

Condition (a) implies that the Alexander modules of the K_i 's, equipped with Blanchfield duality (see for instance (3), (21)), are pairwise isometric. In particular, the K_i 's cannot be distinguished by any of the classical invariants that are extracted from this module, such as the Alexander polynomial, various signatures, etc.

In condition (b), $-K_j$ is obtained from K_j by reversing the orientation of the knot and of the ambient space. Also, recall that a knot in S^3 is *ribbon* when it is obtained from the unlink with $(k+1)$ components by embedded surgery along k arcs (the ribbons) joining these components. The main interest of this definition resides in the immediate property that a ribbon knot is slice (i.e. null-cobordant) and in the experimental fact that, so far, every slice knot known is ribbon. Supported by this last evidence, a celebrated conjecture asks whether 'slice' is equivalent to 'ribbon'. An affirmative answer to this conjecture would imply that the knots K_i are pairwise not cobordant. In any case, the $K_i \# (-K_j)$'s provide candidates to support or disprove it.

The theorem (8) of Casson and Gordon we referred to asserts that, if a fibred knot K is ribbon, its monodromy extends to a diffeomorphism of a (3-dimensional) handlebody; by definition, a diffeomorphism f of a compact orientable surface F extends to a diffeomorphism v of a handlebody V (i.e. a 'pretzel', obtained by gluing 1-handles over the boundary of a 3-ball) if F is contained in ∂V , if each component of $\partial V - F$ is an open disc and if v coincides with f on F . The proof of this theorem is based on a very nice generalization of the loop theorem to 3-dimensional duality spaces, occurring here

as the infinite cyclic covering of the complement of a slicing disc in B^4 , equipped with Milnor duality (21). Conversely, if the monodromy of the fibred knot K extends to a diffeomorphism of a handlebody, an easy mapping torus construction shows that K bounds an embedded disc in a homotopy 4-ball with boundary S^3 (homeomorphic to the standard ball B^4 by (13)).

It is a bit disappointing to note that this striking result, partly relating cobordism of knots and cobordism of surface diffeomorphisms, does not yield any new algebraic invariant. Indeed, the main obstructions known for a knot to be ribbon involve, on one hand, an obstruction with values in some Witt group arising from elementary considerations on the Alexander module (see (20)), on the other hand, some sharper invariants, already developed by Casson and Gordon ((6), (7), (14)) which are based on computations of twisted signatures in branched coverings and whose determination is in general rather hard to work out. For the problem of extending a surface diffeomorphism to a diffeomorphism of a handlebody, there exists similarly homological obstructions in a Witt group (19) and some Casson–Gordon invariants (5) (for sake of completeness, we should also quote the invariants developed in (17), related to the Rohlin invariant of homology 3-spheres, but these do not apply to monodromies of fibred knots). Unfortunately, in each case, the obstruction associated to a fibred knot turns out to coincide with the corresponding obstruction associated to its monodromy, and (8) therefore does not yield anything new on this side. As a matter of fact, (8) partly originated from this observation.

In the case we are considering $K_i \# (-K_j)$ has the same Alexander module (equipped with Blanchfield duality) as the ribbon knot $K_0 \# (-K_0)$, and the homological obstruction for $K_i \# (-K_j)$ to be ribbon therefore vanishes. (We however do not know what the Casson–Gordon invariants are.) It is therefore of interest to turn to other methods, namely our geometric ones.

The rough lines of the construction of the knots K_i with the properties announced are the following. We start with a fibred knot K_0 whose fibre F_0 contains a simple closed curve C that separates F_0 and is unknotted in S^3 . The K_i 's are then obtained from K_0 by Stallings twists (see § 1) along C . This construction provides in particular a preferred identification between the fibres F_i and F_0 , for which the monodromy f_i of K_i corresponds to $T_C^i f_0$, where T_C is the Dehn twist along C ; the condition (a) announced immediately follows from this property since C separates F_0 . To show that $K_i \# (-K_j)$ is never ribbon when $i \neq j$, we begin by using (8) and (4) to reduce in § 3 this problem to the following: If $\hat{F}_k$ is the closed surface obtained by gluing a disc along the boundary of F_k and if the diffeomorphism $\hat{f}_k: \hat{F}_k \rightarrow \hat{F}_k$ extends f_k , then $\hat{f}_i$ is never isotopic to a conjugate of $\hat{f}_j$ when $i \neq j$. Lastly, this last statement is proved in § 5 by comparing the stretching factors of pseudo-Anosov diffeomorphisms respectively isotopic to $\hat{f}_i$ and $\hat{f}_j$. This last step involves the techniques of 'train tracks' developed by Thurston, whose theory (mainly unpublished) is sketched in § 4.

Showing that the K_i 's are pairwise distinct only requires the computation of the above stretching factors, and depends in no way on (8) or (4). This method has been independently used by Birman and Kidwell (2). Also, our examples are included in a larger class of distinct fibred knots which have since been shown by Morton (22) to represent infinitely many times the Alexander module of every fibred knot. The method used by Morton to distinguish these knots relies on Thurston's hyperbolic

Dehn surgery (and is unfortunately not explicit). As noted at the end of the present paper, Morton’s knots can be used to construct many other families of fibred knots with the above properties (a) and (b).

1. Stallings twists

In (27), Stallings describes a construction, which we will henceforth call a *Stallings twist*, that provides a new fibred knot from the data of another fibred knot and of a curve enjoying certain properties. The importance of this operation has been particularly emphasized by Harer, who proved in (15) that any two fibred knots are related by a sequence of Stallings twists, of plumbings of trefoil knots (in the sense of Murasugi; see (23), (27), (15)) and of the inverse operations. Let us briefly describe this construction.

Let K be an oriented fibred knot in S^3 , with monodromy $f: F \rightarrow F$. By convention, f fixes the boundary of the oriented surface F . Considering the pinched mapping torus $M(f) = (F \times I)/\sim$ where the equivalence relation $\sim$ is defined by

$$(x, t) \sim (x', t') \Leftrightarrow \begin{cases} \text{either } t' - t \in \mathbb{Z} \text{ and } x' = f^{t'-t}(x), \\ \text{or } x = x' \in \partial F, \end{cases}$$

there exists by definition an orientation-preserving diffeomorphism $\varphi: S^3 \rightarrow M(f)$ which maps K onto the binding $(\partial F \times I)/\sim$ of the natural open book decomposition of $M(f)$, respecting the orientations if $(\partial F \times I)/\sim$ is oriented as the boundary of $F \times 0$ in $M(f)$. Recall from (26) that the fibre $\varphi^{-1}(F \times *)$ is unique up to isotopy of S^3 fixing K , while the monodromy f is well-defined up to oriented conjugacy and isotopy fixing the boundary.

If T_C denotes the right-handed Dehn twist along the curve C in F and in $n \in \mathbb{Z}$, the pinched mapping torus $M(T_C^n f)$ is easily seen to be obtained from $M(f)$ by removing a small closed tubular neighbourhood V of $C = C \times \epsilon \subset F \times \epsilon$, with $\epsilon \in]0, 1[$, and by gluing at the same place a new solid torus W . Moreover, the meridian of W then corresponds in $H_1(\partial V) = H_1(\partial W)$ to $\mu + n\lambda_F$, where μ is a meridian of V and where λ_F is the longitude of V represented by one of the two components of $(F \times \epsilon) \cap \partial V$, oriented so that $\mu \cdot \lambda_F = +1$ on the oriented boundary of V (see (27), (15), or compare with (25), p. 276). In other words, $M(T_C^n f)$ is obtained from $S^3 = M(f)$ by a surgery along C killing $(1 + nl)\mu + n\lambda$ in $H_1(\partial V)$, where λ is the standard longitude of the curve C in S^3 (generating the kernel of $H_1(\partial V) \rightarrow H_1(S^3 - V)$ and oriented so that $\mu \cdot \lambda = +1$) and where l is the local linking number of $F = F \times \epsilon$ around C , i.e. $\lambda_F = \lambda + l\mu$.

If, in the above situation, C is moreover unknotted in S^3 and $1 + nl = \pm 1$, then $M(T_C^n f)$ consequently turns out to be diffeomorphic to S^3 (by extension of n full twists along a meridian disc of the solid torus $S^3 - V$; see (18), (25) § 9. Such an orientation-preserving diffeomorphism $M(T_C^n f) \rightarrow S^3$ provides a new open-book decomposition of S^3 , whose binding K' is a new (oriented) fibred knot in S^3 with monodromy $T_C^n f$. We shall then say that K' is obtained by performing on K a *Stallings twist of order n along C* . In the cases we are interested in, l will always be 0 so that the condition $1 + nl = \pm 1$ is automatically satisfied.

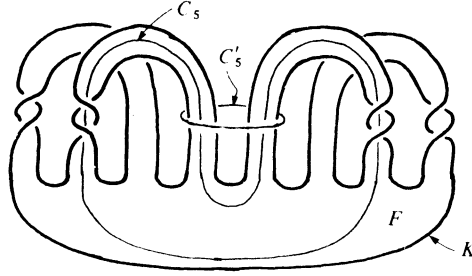


Fig. 2.1

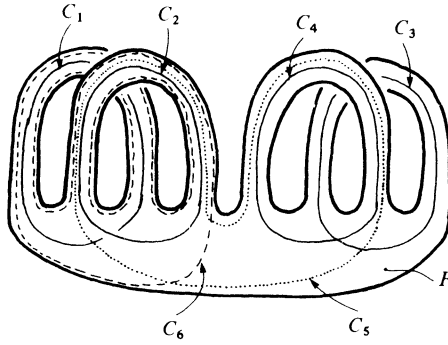


Fig. 2.2

2. Construction of the K_i 's

Our construction of the K_i 's provides a good illustration of § 1. We start with the knot K represented in Fig. 2.1. It is the connected sum of a right-handed trefoil and of a figure 8 knot, and it is therefore fibred with fibre the surface F shown. For the obvious identification of F with the surface of Fig. 2.2, the monodromy f of K can be written as $T_4 T_3 T_2^{-1} T_1$, where T_k denotes the right-handed Dehn twist along the curve C_k .

Let C_5 be the curve represented on Fig. 2.1, drawn on the fibre F . It is clearly unknotted in S^3 , and the local linking number of F around C_5 is null. We can consequently perform on K a Stallings twist of order 1 along C_5 and so get a new fibred knot K_0 . The knot K_0 and its fibre F_0 are the respective images of K and F by surgery of type $+1$ along the curve $C_5 \times \epsilon \subset F \times \epsilon \subset M(f) = S^3$ (killing $\mu + \lambda$, where μ and λ are respectively a meridian and a longitude of $C_5 \times \epsilon$ in S^3). Noting that $C_5 \times \epsilon$ is isotopic in $S^3 - F$ to the curve C'_5 represented on Fig. 2.1, K_0 and F_0 are therefore the knot and surface of Fig. 2.3 (obtained from K and F by performing a right-handed full twist along a disc bounding C'_5). Moreover, for the natural identification of F_0 with F , the monodromy f_0 of K_0 is $T_5 T_4 T_3 T_2^{-1} T_1$ (where T_k still denotes the right-handed Dehn twist along the curve C_k of Fig. 2.2).

Fig. 2.3 reveals on the fibre F_0 a curve C_6 which is unknotted in S^3 and bounds a punctured torus (hatched on the picture) in F_0 . The linking of F_0 around C_6 is null (this is automatic since C_6 is null-homologous in F_0) and we can thus define for each $i \in \mathbb{Z}$ the knot K_i obtained by performing on K_0 a Stallings twist of order i along C_6 . It is a fibred knot whose fibre F_i is naturally identified with F_0 and therefore with F ,

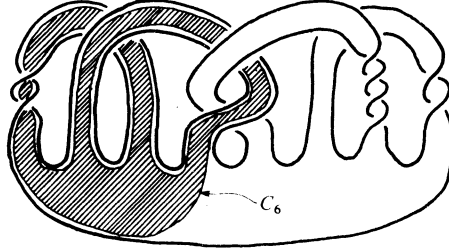


Fig. 2.3

and whose monodromy is $f_i = T_6^i T_5 T_4 T_3 T_2^{-1} T_1$. We leave it as an exercise for the reader to draw for himself a picture representing the knot K_i in S^3 and its fibre (hint: Push C_6 off F_0 , then unknot it in S^3 and lastly perform twists along a disc bounding C_6).

3. Cobordism of surface diffeomorphisms

We recall in this section a few results on the cobordism of surface diffeomorphisms, and apply them to the case we are interested in, namely to the monodromies of the fibred knots constructed in §2.

A diffeomorphism g of a closed oriented surface G (not necessarily connected) is *null-cobordant* if there exists an oriented compact 3-manifold V and a diffeomorphism v of V such that $G = \partial V$ and v coincides with g on G . More generally, two diffeomorphisms of closed oriented surfaces $g_1: G_1 \rightarrow G_1$ and $g_2: G_2 \rightarrow G_2$ are *cobordant* if the diffeomorphism $g_1 \amalg (-g_2)$ is null-cobordant in the above sense, where $-g_2: -G_2 \rightarrow -G_2$ is obtained from g_2 by reversing the orientation of G_2 . The cobordism classes so defined form a group Δ_2 , the group law being induced by the disjoint union $\amalg$.

There are two important cases where a given diffeomorphism g of an oriented closed surface G is cobordant to a diffeomorphism of a surface that is 'simpler' than G . They involve the situation where there exists an oriented 3-manifold V and a diffeomorphism v of V such that G is contained in ∂V , $g = v|_G$ and V is of one of the following two types.

(A) The triad $(V; G, \partial V - G)$ admits a handle decomposition with only handles of index 2 and 3, no component of $\partial V - G$ is a sphere and V is not diffeomorphic to $G \times I$. The manifold V is thus a handlebody when $\partial V = G$ and what we would call a 'hollow handlebody' otherwise.

(B) The manifold V admits an I -bundle structure over a closed, possibly non-orientable, surface and V is not diffeomorphic to $G \times I$.

In these two cases, g is cobordant to the restriction of v to the surface $\partial V - G$, equipped with the orientation opposite to that induced by the orientation of V . This surface is obtained from G by surgeries of index 2 and 3 in case (A), and by removing a few components of G in case (B). Intuitively, $\partial V - G$ is thus simpler than G .

The fundamental result of (4) (see also (10)), which subsequently leads to the computation of the group Δ_2 , is the following.

LEMMA 3.1. *Every orientation-preserving diffeomorphism g of a non-empty surface G that is null-cobordant admits a reduction of type (A) or (B) above. |*

Let us come back now to the fibred knots K_i , with monodromies $f_i: F_i \rightarrow F_i$, constructed in §2. It will be convenient to introduce the following notation: If g is a

diffeomorphism of a compact surface G and if g fixes the boundary ∂G , let $\hat{G}$ denote the ‘capped off surface’ obtained by gluing a disc along each component of ∂G , and let $\hat{g}$ denote the diffeomorphism of $\hat{G}$ extending g by the identity outside of G .

We want to show that, if $i \neq j$, the fibred knot $K_i \# (-K_j)$ is not ribbon. By (8), it is sufficient to prove that its monodromy does not extend to a diffeomorphism of a handlebody. The knot $K_i \# (-K_j)$ is a fibred knot with fibre $F_{ij} = F_i \#_{\partial} (-F_j)$, where $\#_{\partial}$ denotes the boundary connected sum, and its monodromy is the diffeomorphism $f_{ij} = f_i \#_{\partial} (-f_j)$ of F_{ij} . We are in fact going to show that $\hat{f}_{ij}$ is not null-cobordant.

The closed surface $\hat{F}_{ij}$ is the connected sum of $\hat{F}_i$ and $-\hat{F}_j$, and $\hat{f}_{ij}$ can be written as $\hat{f}_i \# (-\hat{f}_j)$. Gluing a 2-handle along the connected summing curve in $\hat{F}_{ij} = \hat{F}_i \# (-\hat{F}_j)$, one easily exhibits a reduction of type (A) which provides a cobordism between $\hat{f}_{ij}$ and the diffeomorphism $\hat{f}_i \amalg (-\hat{f}_j)$ of $F_i \amalg (-F_j)$. Therefore, $K_i \# (-K_j)$ can be ribbon only when $\hat{f}_i$ and $\hat{f}_j$ are cobordant.

LEMMA 3.2. *Let $g: G \rightarrow G$ and $g': G' \rightarrow G'$ be two diffeomorphisms of closed oriented genus 2 surfaces. If g and g' are cobordant, then (at least) one of the following three properties holds.*

- (α) g extends to a diffeomorphism of a handlebody.
- (β) There exists a homotopically non-trivial curve C in G that is preserved by g up to isotopy (homotopically non-trivial means that $\pi_1(C) \rightarrow \pi_1(G)$ is injective).
- (γ) g is isotopic to a conjugate of g' , i.e. there exists an oriented diffeomorphism $h: G \rightarrow G'$ such that g' is isotopic to hgh^{-1} .

Proof. If g and g' are cobordant, Lemma 3.1 asserts that $g \amalg (-g')$ admits a reduction of type (A) or (B). After, if necessary, a further application of Lemma 3.1 to the diffeomorphism provided by this reduction, it follows easily that either g itself admits a reduction of type (A) or (B), or the following property (B') holds.

(B') $g \amalg (-g')$ extends to a diffeomorphism v of a 3-manifold V bounding $G \amalg (-G')$ and diffeomorphic to $G \times I$.

Since G has genus 2, the case where g admits a reduction of type (A) or (B) splits into three cases, namely:

- (A') g extends to a diffeomorphism of a handlebody.
- (A'') g extends to a diffeomorphism v of a hollow handlebody V , whose boundary consists of G and of 1 or 2 tori, and such that the triad $(V; G, \partial V - G)$ admits a handle decomposition with exactly 1 handle of index 2.
- (B'') g extends to a diffeomorphism v of a 3-manifold V bounding G and admitting an I -fibration over the non-orientable surface $T^2 \# \mathbb{RP}^2$.

Thus, one of the four above properties (A'), (A''), (B') and (B'') holds. We will show that (A'') $\Rightarrow$ (β), (B'') $\Rightarrow$ (β) and (B') $\Rightarrow$ (γ), which will prove Lemma 3.2 as property (A') is exactly (α).

When (A'') holds, an easy cutting and pasting argument shows that the boundary C of the core of the handle of index 2 is, up to isotopy, the unique simple closed curve that is null-homotopic in V but not in ∂V (see for instance (4), appendix B). It follows that $g(C) = v(C)$ is isotopic to C . Thus (β) holds.

In case (B''), v is isotopic to a diffeomorphism respecting the I -fibration ((16), proposition 26.3). As every diffeomorphism of $T^2 \# \mathbb{RP}^2$ respects the core C' of $\mathbb{RP}^2$

up to isotopy (9), it follows that g maps the curve C' of F lifting C to an isotopic curve. Therefore, (β) again holds.

Lastly, in case (B'), v is again isotopic to a diffeomorphism of $V \cong F \times I$ respecting each stratum $F \times *$ ((30), lemma 3.5), whence it follows that g is isotopic to a conjugate of g' , i.e. that (γ) holds. $\blacksquare$

LEMMA 3.3. *The capped-off monodromy $\hat{f}_i$ is not null-cobordant.*

Proof. If $\hat{f}_i$ extended to a diffeomorphism of a 3-manifold V , the kernel of $H_1(\hat{F}_i) \rightarrow H_1(V)$ would provide a rank 2 subspace of $H_1(\hat{F}_i)$ invariant by the automorphism $\hat{f}_{i*}$ induced by $\hat{f}_i$ on the homology. In particular, the characteristic polynomial $P(t)$ would be reducible.

On the other hand, this polynomial is

$$P(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1.$$

As expected from the fact that $P(t)$ is also the Alexander polynomial of the K_i 's, $P(t^{-1}) = t^4 P(t)$. Using this symmetry, an elementary computation shows that $P(t)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$, which proves the lemma. $\blacksquare$

Combining Lemmas 3.2 and 3.3, it follows that, if $K_i \# (-K_j)$ is ribbon, then either $\hat{f}_i$ respects up to isotopy a homotopically non-trivial curve in $\hat{F}_i$ or $\hat{f}_i$ is isotopic to a conjugate of $\hat{f}_j$. We will prove in § 5 that the first alternative is impossible while the second one occurs only when $i = j$. (As a matter of fact, we could already prove that $\hat{f}_i$ respects no isotopy class of curves by elementary homological considerations, as in Lemma 3.3).

4. Train tracks

We review in this section a few results, which we shall use in § 5 and are unfortunately unpublished, in the theory of surface diffeomorphisms developed by Thurston. These mainly involve the so-called 'train tracks' on surfaces. We shall assume the reader more or less familiar with the basic facts of the theory (see (28), (12)) and the proofs will in general be only sketched. For sake of simplicity, all surfaces will be closed and orientable.



Fig. 4.1



Fig. 4.2

Recall that a *measured foliation* on a closed surface F is a foliation $\mathfrak{F}$ with only isolated singularities of type 'saddle with $k \geq 3$ prongs' (see Fig. 4.1), equipped moreover with an invariant transverse measure μ which defines a notion of length for the arcs transverse to the foliation. Two such foliations are said to be *transverse* when they have the same singular points, are transverse in the usual sense outside of these points, and meet as indicated on Fig. 4.2 (for a saddle with 3 prongs) at the singularities.

A *pseudo-Anosov diffeomorphism* of the surface F is a homeomorphism f for which there exists two transverse measured foliations $(\mathfrak{F}^u, \mu^u)$ and $(\mathfrak{F}^s, \mu^s)$ and a real number $\lambda > 1$ such that:

$$f(\mathfrak{F}^u, \mu^u) = (\mathfrak{F}^u, \lambda\mu^u),$$

and

$$f(\mathfrak{F}^s, \mu^s) = (\mathfrak{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s),$$

where $(\mathfrak{F}, \lambda\mu)$ represents the foliation $\mathfrak{F}$ equipped with the transverse measure obtained by multiplication of μ by λ . Such a homeomorphism is necessarily diffeomorphic outside of the singularities of the two foliations, but is not a diffeomorphism of the whole surface. The number λ is, by definition, the *stretching factor* of f .

The main result of (28) is the following.

THEOREM 4.1. *Given a diffeomorphism f of a closed surface F , at least one of the following three properties holds:*

(i) *f respects up to isotopy a (non empty) collection of disjoint homotopically non-trivial simple closed curves.*

(ii) *f is isotopic to a periodic diffeomorphism f' .*

(iii) *f is topologically isotopic to a pseudo-Anosov diffeomorphism f' .*

Moreover, the case (iii) excludes the two other ones and the pseudo-Anosov diffeomorphism f' is then unique up to conjugation by a diffeomorphism isotopic to the identity.

In case (i), f is said to be *reducible*.

In addition to this theoretical statement, Thurston has also developed some techniques enabling one to determine in practice which conclusion (i), (ii) or (iii) holds for a given diffeomorphism and, in case (iii), to compute the stretching factor of the corresponding pseudo-Anosov diffeomorphism. The application of this method requires intuition and it is therefore by no means algorithmic (even if there is some hope that it may become so one day, see (24)). In practice, however, it turns out to be extremely efficient. This section is devoted to the exposition of these techniques.

A *train track*† (see (29), § 8) on a surface F is a graph τ embedded in F such that, for each vertex v on τ , all edges of τ ending at v are tangent to a single line (as at a switch of a railway), with at least one edge in each direction of this line. The complement $F - \tau$ thus arises with ‘horns’ and it is moreover required in the definition that no component of $F - \tau$ be a disc with less than 3 horns, nor an annulus with smooth boundary. An example is provided by Fig. 4-3.

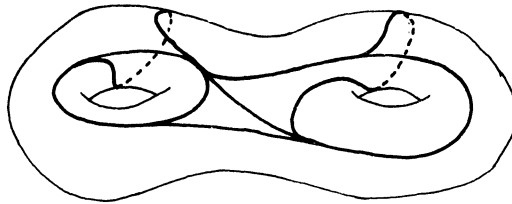


Fig. 4-3

Assume we are given, for each edge of a train track τ , a non-negative real weight with the property that, at each switch, the sum of the weights of the ‘entering edges’ is equal to the sum of the weights of the ‘exiting edges’. A measured foliation of F is associated to these data by the following process: Thicken each edge of τ into a band,

† The reader should be aware that in the United States of America railway lines are called ‘train tracks’, points are called ‘switches’ and sleepers are referred to as ‘ties’. (This note was of course suggested by the referee; as a Frenchman, the author is not competent enough!)

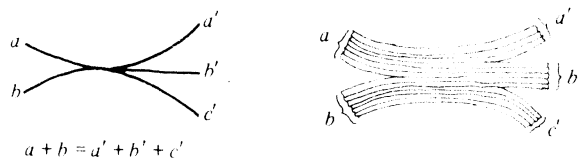


Fig. 4.4

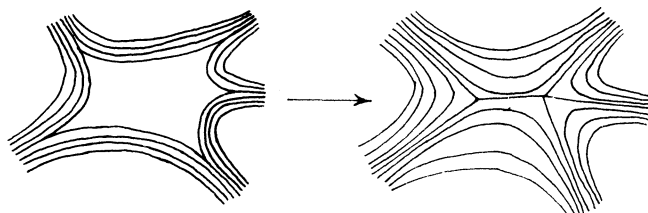


Fig. 4.5

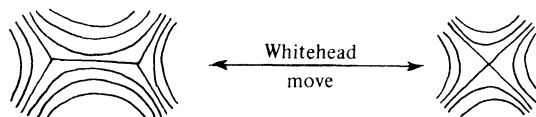


Fig. 4.6

foliate this band by leaves parallel to the edge, and equip it with a transverse measure so that the width of the band is exactly the weight attached to the edge. Owing to the incidence relations between the weights, these foliations and transverse measures fit together at the switches as indicated on Fig. 4.4, so as to provide a measured foliation on some neighbourhood V of τ . One then constructs from this foliation of V a measured foliation $(\mathfrak{F}, \mu)$ of the whole surface F by collapsing $F - V$ onto one of its spines, keeping the end points of the horns fixed. This operation, introducing singularities of the foliation, is identical to the ‘élargissement’ described in (12) § 5 and is illustrated in Fig. 4.5 for a component of $F - V$ that is a disc with 5 horns. As for the ‘élargissement’, the measured foliation so constructed is only defined up to isotopy and Whitehead moves (see (12)); these last moves are illustrated by Fig. 4.6.

When the weights are integers, there is also a similar construction associating to these data a collection of simple closed curves (see (29), § 8). It consists in taking x parallel copies of each edge with weight $x \in \mathbb{N}$ and gluing these together at the switches in the natural way, using the incidence relations between the weights. When collections of disjoint closed curves are interpreted as measured foliations (see (12), § 5), this construction is easily seen to coincide with the former one.

We shall say that a measured foliation (or a collection of simple closed curves) is *carried* by a train track τ if it is associated by the above construction to a collection of weights satisfying the incidence relations at the switches.

PROPOSITION 4.2. *If two measured foliations carried by the same train track τ are equivalent by isotopy and Whitehead moves, then they are associated to the same weighting of the edges of τ .*

Proof (sketch). We restrict attention to the case of two connected curves C and C'

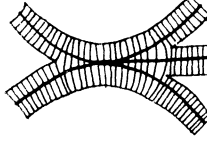


Fig. 4.7

carried by τ , as this is the only case we will really need (in the proof of Theorem 4.3 below). The general case is similar, but requires considering lifts to the universal covering of the surface; a detailed exposition of this proof can be found in (31).

Let an *adapted neighbourhood* of τ be any neighbourhood V of the type represented on Fig. 4.7, equipped with some foliation transverse to τ (the foliation by the ties of the railway!). By construction, C and C' are contained in V and transverse to this foliation by the ties. If C and C' are isotopic, a component of $F - (C \cup C')$ is either a disc $\bowtie$ providing an elementary isotopy between an arc in C and an arc in C' , or an annulus separating C from C' (see (11) for instance). Using the fact that no component of $F - V$ is either a disc with less than 3 horns or an annulus with smooth boundary, an Euler characteristic argument shows that such a disc or annulus is necessarily contained in V and foliated in standard fashion. If it is a disc, use it to reduce $C \cap C'$ by an isotopy of C respecting the foliation of V (so that C remains carried by τ and corresponds to the same weighting) and iterate the process. When C and C' are lastly disjoint and separated by an annulus foliated in standard fashion, these two curves cut each tie of V in the same number of points, and thus correspond to the same weights. $\square$

Let $\mathfrak{MF}(\tau)$ denote the space of measured foliations carried by the train track τ , defined up to isotopy and Whitehead moves. Proposition 4.2 provides, by evaluation of the weights, a parametrization of $\mathfrak{MF}(\tau)$ by a certain subspace E of $\mathbb{R}_+^n$ defined by a family of linear relations. Indeed, one can take one coordinate of $\mathbb{R}_+^n$ for each edge of τ , and E is then defined by all the incidence relations (one for each switch of τ). When some of these relations are of type $x_i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j$ with $\alpha_{ij} \geq 0$, it is often more convenient to forget some of these coordinates in order to get, by evaluation of the weights on n' edges, a new parametrization of $\mathfrak{MF}(\tau)$ by a linear subspace E' of $\mathbb{R}_+^{n'}$ (with n' smaller than the total number of edges of τ).

A train track τ' is said to be *carried* by another train track τ when, after isotopy, τ' is contained in an adapted neighbourhood V of τ and is transverse to the foliation of V by the ties. If τ' is carried by τ , one readily checks that every measured foliation carried by τ' is also carried by τ (up to isotopy and Whitehead moves). We are mainly interested in the case where we have a diffeomorphism f of F and a train track τ such that $f(\tau)$ is carried by τ . The train track τ is then said to be *invariant by f* (this rather incorrect terminology meaning that the set $\mathfrak{MF}(\tau)$ of measured foliations carried by τ is invariant by f).

Suppose we are given a train track τ invariant by the diffeomorphism f and a parametrization of $\mathfrak{MF}(\tau)$ by a linear subspace E of $\mathbb{R}_+^n$, defined by evaluation of the weights on a collection of n edges of τ . The diffeomorphism f induces a map of $\mathfrak{MF}(\tau) \cong E$ into itself. We claim that this map extends to a linear map $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, described by a certain matrix A with non-negative integer entries. To check this, begin by isotoping $f(\tau)$ inside an adapted neighbourhood of τ so that each switch of $f(\tau)$ be on the same

tie as a switch of τ (and $f(\tau)$ remains transverse to the ties). Define then the matrix $B = (b_{ij})$ by the property that the image by f of the j th edge of τ runs b_{ij} times through the i th edge of τ . When the parametrization $\mathbb{M}\mathfrak{F}(\tau) \rightarrow E \subset \mathbb{R}_+^n$ is defined by evaluation of the weights of all edges of τ , one readily checks that $A = B$ fits. In the general case, a suitable A is easily obtained from B by change of coordinates.

The matrix A is by no means canonical. It contains however a huge amount of information on the behaviour of f , as indicated by the following.

THEOREM 4.3. *Let f be a diffeomorphism of the closed surface F admitting an invariant train track τ such that each component of $F - \tau$ is a disc with three horns. For a parametrization of $\mathbb{M}\mathfrak{F}(\tau)$ by a linear subspace E of $\mathbb{R}_+^n$, let A be a matrix with non-negative integer entries describing the action of f on $\mathbb{M}\mathfrak{F}(\tau) \cong E$.*

Then, f is topologically isotopic to a pseudo-Anosov diffeomorphism f' if and only if $AX \neq X$ for every non-trivial $X \in E$. If so, moreover, the stretching factor λ of f' is the unique eigenvalue of A that admits an eigenvector X_λ in E , and the stable foliation $(\mathfrak{F}^s, \mu^s)$ is carried by τ and corresponds to $X_\lambda \in E \cong \mathbb{M}\mathfrak{F}(\tau)$.

Proof. Assume first that $AX \neq X$ for every $X \in E - 0$. The Perron-Frobenius theory of matrices with non-negative entries asserts that the number

$$\lambda = \sup \{ \nu; \exists Y \in E, AY \geq \nu Y \}$$

is an eigenvalue of A corresponding to an eigenvector $X_\lambda \in E$ (see for instance (1); $AY \geq \nu Y$ means that each entry of AY is greater than or equal to the corresponding entry of νY). Let $(\mathfrak{F}, \mu)$ be the measured foliation carried by τ that is associated to X_λ . By construction, $f(\mathfrak{F}, \mu)$ is equivalent to $(\mathfrak{F}, \lambda\mu)$ by isotopy and Whitehead moves.

We claim that the foliation $\mathfrak{F}$ contains no leaf cycle, i.e. no simple closed curve that is a union of leaves (running possibly through the singularities). Indeed, the boundary of the surface obtained by cutting F open along the union of all leaf cycles of $\mathfrak{F}$ would provide otherwise a collection C of disjoint homotopically non-trivial simple closed curves that is preserved by f up to isotopy (compare with (12), § 9). Moreover, the hypothesis that $F - \tau$ consists of discs with three horns ensures that C is carried by τ , and thus corresponds to some vector $X \in E$. Since $f(C)$ is isotopic to C , we would then have $AX = X$, contradicting our hypothesis.

Since all entries of A are non-negative integers, an easy argument shows that $\lambda \geq 1$, and therefore $\lambda > 1$ as $\lambda = 1$ is excluded by hypothesis. Thus, we have found a measured foliation $(\mathfrak{F}, \mu)$ without leaf cycle and a number $\lambda > 1$ such that $f(\mathfrak{F}, \mu)$ is equivalent to $(\mathfrak{F}, \lambda\mu)$ by isotopy and Whitehead moves. Now, it is proven in (12) § 9 that f is then topologically isotopic to a pseudo-Anosov diffeomorphism with stretching factor λ and stable measured foliation equivalent to $(\mathfrak{F}, \mu)$.

This completes the proof that f is topologically isotopic to a pseudo-Anosov diffeomorphism when $AX \neq X$ for every $X \in E - 0$.

Conversely, if A fixes some $X \in E - 0$, then f respects up to isotopy and Whitehead moves the measured foliation $(\mathfrak{F}, \mu)$ associated to X . If $\mathfrak{F}$ contains leaf cycles, we have already seen that this provides a collection of disjoint simple closed curves C carried by τ that is preserved by f up to isotopy, and f is therefore reducible; note that this situation is detected on A by the existence of a vector $Y \in E$ with integer coefficients such that $AY = Y$. If $\mathfrak{F}$ has no leaf cycle, then it is proven in (12) § 9 that f is isotopic to a periodic diffeomorphism; note that A is then periodic. $\square$

Given a diffeomorphism f of a surface F and a train track τ invariant by f , we are now equipped to decide whether f is (topologically) isotopic to a pseudo-Anosov diffeomorphism or not and, if so, to determine the corresponding stretching factor. Indeed, Theorem 4.3 solves this problem when all components of $F - \tau$ are discs with three horns.

When a component of $F - \tau$ is not planar, the boundary of the surface obtained by cutting F open along τ provides a collection of disjoint homotopically non-trivial simple closed curves respected by f up to isotopy and f is therefore reducible. Lastly, when the components of $F - \tau$ are discs with possibly more than three horns, one can show that there is a well-defined action of f on the set of components and horns of $F - \tau$; replacing f by a suitable iterate (which does not modify the problem), we can assume that this action is trivial. Then f leaves invariant every train track τ' obtained by adding to τ extra edges consisting of 'diagonals' of $F - \tau$. In particular, if τ' is maximal, so that $F - \tau'$ consists of discs with three horns, we are again ready to apply Theorem 4.3 and conclude.

The main trouble is in fact to find a train track that is invariant by a given diffeomorphism f . There does not seem to be any convenient effective algorithm known for doing so. However, here is an empirical method that works very often: Take any curve and iterate it a few times. When the picture is complicated enough so as to 'look like a train track', this train track is very likely to be invariant by f . With a little intuition (or luck), this method turns out to be very efficient, in particular in genus 2 where the existence of symmetries greatly simplifies the pictures (see § 5).

5. Computation of stretching factors

Let us return now to the knots K_i constructed in § 2. With the notation of § 3, we want to prove that the capped-off monodromies $\hat{f}_i$ are irreducible and pairwise distinct up to conjugacy and isotopy. For this, we are going to show that the $\hat{f}_i$'s are topologically isotopic to pseudo-Anosov diffeomorphisms whose stretching factors λ_i are pairwise distinct. Indeed, Theorem 4.1 asserts that λ_i is an invariant of the conjugacy and isotopy class of $\hat{f}_i$.

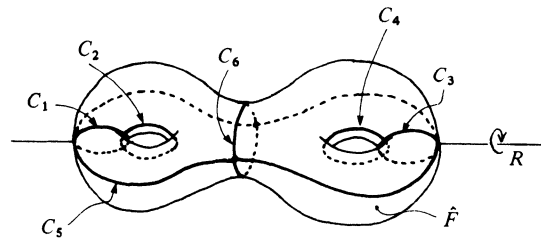


Fig. 5.1

By construction, each surface $\hat{F}_i$ comes equipped with a preferred identification with $\hat{F}$, for which $\hat{f}_i$ is (isotopic to) $T_6^i T_5 T_4 T_3 T_2^{-1} T_1$, where T_k denotes the right-handed Dehn twist along the curve C_k shown on Fig. 5.1.

In general, drawing curves on a genus g surface very quickly becomes illegible above a certain level of complexity. However, we enjoy in this case a favourable circumstance, namely that each T_k commutes (after isotopy) with the so-called

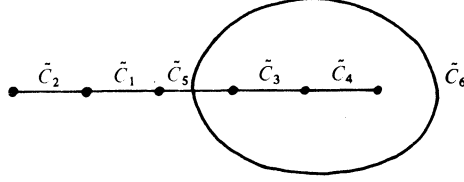


Fig. 5.2

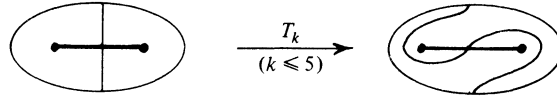


Fig. 5.3

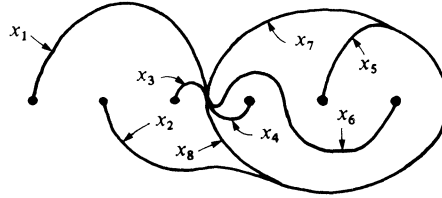


Fig. 5.4

hyperelliptic involution R represented on Fig. 5.1 (this property is in fact satisfied by any diffeomorphism of the genus 2 surface $\hat{F}$). It is then convenient to consider the quotient $\tilde{F} = \hat{F}/R$, which is a sphere with 6 distinguished points corresponding to the fixed points of R . Thus, when $\tilde{F}$ is represented by the union of the sheet of paper $\mathbb{R}^2$ and of a point ∞ at infinity, the images $\tilde{C}_k$ of the curves C_k are those indicated on Fig. 5.2.

The diffeomorphism $\tilde{T}_k$ of $\tilde{F}$ induced by T_k is the square of the right-handed Dehn twist along the curve $\tilde{C}_6$ if $k = 6$, and is the half-twist around the arc $\tilde{C}_k$ represented on Fig. 5.3 if $k \leq 5$.

The object $\tilde{\tau} \subset \tilde{F}$ represented on Fig. 5.4 lifts in $\hat{F}$ to a train track τ respected by R , having 12 edges and 6 switches, and splitting $\hat{F}$ into 4 discs with three horns. For a measured foliation carried by τ , one can deduce from the incidence relations at the switches that the corresponding weighting of the edges is R -equivariant, i.e. that every edge carries the same weight as its image by R (this also results from the property that R respects each curve of $\hat{F}$ up to isotopy). One can therefore consider that these weights are attached to the edges of $\tilde{\tau}$, and $\mathcal{MF}(\tau)$ is thus parametrized by the coordinates $x_k \in \mathbb{R}^+$, with $k = 1, \dots, 8$, corresponding to the edges of $\tilde{\tau}$ as indicated on Fig. 5.4, and bound by the relations:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_7 &= x_4 + x_6 + x_8, \\ x_2 + x_8 &= x_5 + x_7. \end{aligned}$$

We want to show that the train track τ is invariant by $\hat{f}_i$ when $i \geq 1$. First note that the image of τ by $\hat{f}_0 = T_5 T_4 T_3 T_2^{-1} T_1$ is (up to isotopy) the train track respected by R whose projection on $\tilde{F}$ is represented on Fig. 5.5.

Now, if $i \geq 1$, the image of τ by $\hat{f}_i = T_6^i \hat{f}_0$ is clearly carried by the R -equivariant object τ_1 whose projection on $\tilde{F}$ is represented on Fig. 5.6. In the sense defined in § 4, τ_1 is not a train track because a few components of $\hat{F} - \tau_1$ are discs with 2 horns.

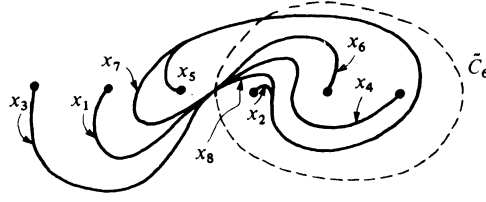


Fig. 5.5

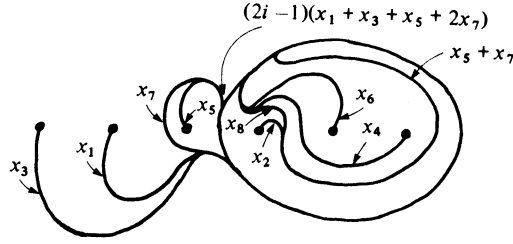


Fig. 5.6

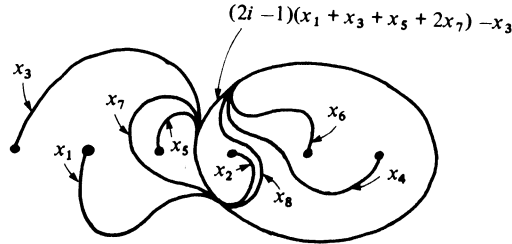


Fig. 5.7

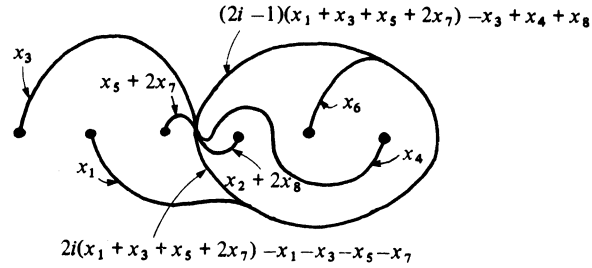


Fig. 5.8

Such an object will be called a pseudo train track. Except for those using Proposition 4.2, most of the notions defined in § 4 keep a sense for pseudo train tracks. In particular, $\hat{f}_i$ maps the measured foliation carried by τ and associated to the weights x_k , $k = 1, \dots, 8$, to the measured foliation associated to the edge weighting indicated on Fig. 5.6.

Two edges of $\hat{f}_i(\tau)$ can moreover be ‘unwrapped’, one of them passing through ∞ in the sphere $\tilde{F} = \mathbb{R}^2 \cup \infty$, which shows that $\hat{f}_i(\tau)$ is carried by the pseudo train track τ_2 of Fig. 5.7, with the coordinates indicated.

Note that the situation  in $\tilde{F}$ lifts to  in $\hat{F}$, which is carried by the lift of $\bullet$ —. Consequently, the pseudo train track τ_2 is carried by the train track of Fig. 5.8, namely τ . Thus, $\hat{f}_i(\tau)$ is carried by τ when $i \geq 1$, and $\hat{f}_i$ maps the measured

foliation associated to the x_k 's to the measured foliation whose coordinates are those indicated on Fig. 5·8.

For the coordinates x_k , the action of f on $\mathfrak{MF}(\tau)$ is therefore described by the matrix:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i-1 & 0 & 2i-2 & 1 & 2i-1 & 0 & 4i-2 & 1 \\ 2i-1 & 0 & 2i-1 & 0 & 2i-1 & 0 & 4i-1 & 0 \end{bmatrix}$$

One readily checks that all coefficients of A_i^q are non-constant polynomials in $(i-1)$ with non-negative integer coefficients (of course, there is no need to perform explicit computations!). In particular, $A_i X \neq X$ for every non-trivial vector with non-negative coefficients. By Theorem 4·3, $\hat{f}_i$ is therefore topologically isotopic when $i \geq 1$ to a pseudo-Anosov diffeomorphism whose stretching factor satisfies $\lambda_i^q = \sup\{\nu; \exists X \in E, A_i^q X \geq \nu X\}$, where E is the subspace of $\mathbb{R}_+^8$ defined by the incidence relations at the switches of τ . As the entries of A_i^q are strictly increasing functions of i , it follows from the above relation that the λ_i 's are also strictly increasing. In particular, the stretching factors λ_i are pairwise distinct.

We have therefore shown that, for $i \geq 1$, $\hat{f}_i$ is irreducible and is not isotopic to a conjugate of $\hat{f}_j$ if $i \neq j \geq 1$. It therefore follows from § 3 that, if $i, j \geq 1$, the knot $K_i \# (-K_j)$ is ribbon only when $i = j$.

This completes the proof that the knots K_i , $i \geq 1$ have the properties (a) and (b) stated in the introduction.

As a conclusion, we would like to note that we only used the following properties of the knot K_0 we started with:

- (i) The fibre of K_0 has genus 2 and contains a separating simple closed curve C that is unknotted in S^3 .
- (ii) The capped-off monodromy $\hat{f}_0$ of K_0 does not extend to a diffeomorphism of a handlebody.
- (iii) There is a train track τ that is invariant by all $T_C^i \hat{f}_0$ for i sufficiently large (here $i \geq 1$). Moreover, if the matrix A_i describes the action of $T_C^i \hat{f}_0$ on $\mathfrak{MF}(\tau)$ as in §§ 4–5, the entries of A_i^n are strictly increasing positive functions of i for some n .

The examples constructed by Morton in (22) provide many fibred knots satisfying condition (i) (our original example was actually inspired by fig. 5 of (15)). Condition (ii) is, for instance, automatically satisfied when the Alexander polynomial of the knot is irreducible (see Lemma 3·3). Lastly, it is an experimental fact that condition (iii) holds and can be effectively checked for 'most' data of a diffeomorphism $\hat{f}_0$ of a genus 2 closed surface and of a homotopically non-trivial curve C on this surface, mainly because of the simplification of diagrams provided by the canonicity of the hyperelliptic involution of genus 2 closed surfaces.

It follows that the content of the present paper can be extended to a wide class of genus 2 fibred knots. On the other hand, dealing with higher genus fibred knots is in

general more difficult, mainly because the checking of condition (iii) is then harder to work out.

Most of this work was performed in the course of a stay at the University of Geneva and under the stimulating influence of the local topologists, in particular Claude Weber, Quach Thi Cam Van and Daniel Lines. I want here to thank them warmly for their kind hospitality. I am also very grateful to W. Thurston who patiently taught me the techniques of train tracks in many informal conversations.

Added in proof: Andrew Casson points out that there is a gap in Theorem 4.3 and that its hypotheses must be strengthened to avoid counterexamples. In the proof, the mistake occurs in the claim that, for a measured foliation $\mathfrak{F}$ carried by the train track τ , the hypothesis that $F - \tau$ consists of discs with three horns ensures that each leaf cycle C of $\mathfrak{F}$ is also carried by τ ; in fact, this property only holds under the extra assumption that $\mathfrak{F}$ corresponds to a system of *non-null* weights of the edges of τ . Consequently, it is necessary (and sufficient) to add to the hypotheses of Theorem 4.3 the following condition:

(*) *There is no proper subset S of $\{1, \dots, n\}$ such that $E \cap \mathbb{R}_+^S$ is non-trivial and invariant by A (for the natural inclusion $\mathbb{R}_+^S \subset \mathbb{R}_+^n$). In other words, f admits no smaller invariant train track obtained by removing a few edges from τ .*

As (*) immediately holds when all entries of some power A^k of A are positive, this modification of Theorem 4.3 has no effect on §5 and on the main result of the paper. (However, the general comments at the end of §4 should be modified.)

REFERENCES

- (1) BERMAN, A. and PLEMMONS, R. J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences* (Academic Press, 1979).
- (2) BIRMAN, J. S. and KIDWELL, M. (to appear).
- (3) BLANCHFIELD, R. C. Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory. *Ann. of Math.* **65** (1957), 340–356.
- (4) BONAHO, F., Cobordism of automorphisms of surfaces. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **16** (1983), 1–34.
- (5) CASSON, A. Cobordism invariants of automorphisms of surfaces. (Handwritten notes, Orsay, 1979.)
- (6) CASSON, A. and GORDON, C. McA. Cobordism of classical knots. (Preprint, Orsay, 1975.)
- (7) CASSON, A. and GORDON, C. McA. On slice knots in dimension three. *Proc. Sympos. Pure Math.* **32**, part II (1978), 39–53.
- (8) CASSON, A. and GORDON, C. McA. A loop theorem for duality spaces and fibred ribbon knots. (Preprint, 1982.)
- (9) CHILLINGWORTH, D. R. J. A finite set of generators for the homotopy group of a non-orientable surface. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **65** (1969), 409–430.
- (10) EDMONDS, A. L. and EWING, J. H. Remarks on the cobordism group of surface diffeomorphisms. *Math. Ann.* **259** (1982), 497–504.
- (11) EPSTEIN, D. B. A. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.* **115** (1966), 83–107.
- (12) FATHI, A., LAUDENBACH, F. and POENARU, V. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque no. 66–67 (1979).
- (13) FREEDMAN, M. H. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357–453.
- (14) GILMER, P. M. On the slice genus of knots. *Invent. Math.* **66** (1982), 191–197.
- (15) HARER, J. How to construct all fibered knots and links. *Topology* **21** (1982), 263–280.
- (16) JOHANNSON, K. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*. Springer Lecture Notes, vol. 761 (1979).

- (17) JOHANNSON, K. and JOHNSON, D. Non-bounding surface diffeomorphisms which act trivially on the homology. (Preprint, 1980.)
- (18) KIRBY, R. C. A calculus for framed links. *Invent. Math.* **45** (1978), 35–56.
- (19) KRECK, M. Bordism of diffeomorphisms. *Bull. Am. Math. Soc.* **82** (1976), 759–761.
- (20) LEVINE, J. Knot cobordism groups in codimension two. *Comment. Math. Helv.* **44** (1969), 229–244.
- (21) MILNOR, J. W. Infinite cyclic coverings. *Topology of manifolds*, ed. J. Hocking, Prindle Weber & Schmidt, 1968), pp. 115–133.
- (22) MORTON, H. R. Fibred knots with a given Alexander polynomial. (Preprint, 1982.)
- (23) MURASUGI, K. On a certain subgroup of an alternating link. *Amer. J. Math.* **85** (1963), 544–550.
- (24) PENNER, R. C. A computation of the action of the mapping class group on isotopy classes of curves and arcs on surfaces. Thesis M.I.T. (1982).
- (25) ROLFSEN, D. *Knots and links* (Publish or Perish, Berkeley, 1976).
- (26) STALLINGS, J. On fibering certain 3-manifolds. *Topology of 3-manifolds and related topics*, ed. Fort (Prentice Hall, 1962).
- (27) STALLINGS, J. Constructions of fibred knots and links. *Proc. Sympos. Pure Math.* **32**, part II (1978), 55–60.
- (28) THURSTON, W. P. The geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. (Preprint, Princeton University, 1976.)
- (29) THURSTON, W. P. The geometry and topology of 3-manifolds. (Lecture notes, Princeton University, 1976–9.)
- (30) WALDHAUSEN, F. On irreducible manifolds which are sufficiently large. *Ann. Math.* **87** (1968), 56–88.
- (31) PAPADOPOULOS, A. Réseaux ferroviaires, difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l’homologie d’une surface. Thèse de troisième cycle, Orsay (1983).

DEUXIEME PARTIE

UNICITE DES STRUCTURES ELLIPTIQUES
SUR LES ESPACES LENTICULAIRES

L'un des exemples les plus anciens de structure géométrique sur une variété compacte, remontant à une époque où la notion de variété n'était elle-même pas complètement dégagée, est celui de la structure elliptique sur les espaces lenticulaires (de dimension 3). Nous démontrons dans cette partie un résultat d'unicité à isotopie près pour cette structure géométrique.

L'espace lenticulaire $L(p, q)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, est le quotient de la sphère unité S^3 de $\mathbb{R}^4$ par le sous-groupe cyclique fini de $SO(4)$ engendré par l'isométrie

$$I(p, q) : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 \omega_p, z_2 \omega_p^{-q})$$

où l'on a identifié $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$ et où $\omega_p = \exp(2i\pi/p)$. Rappelons qu'il existe un difféomorphisme orienté entre $L(p, q)$ et $L(p', q')$ si et seulement si $p = p'$ et, ou bien $q \equiv q' [p]$, ou bien $qq' \equiv 1 [p]$; d'autre part, il existe un difféomorphisme renversant l'orientation entre $L(p, q)$ et $L(p, -q)$ (voir [15], ou la section suivante).

Par construction, $L(p, q)$ admet de manière naturelle une structure géométrique de type elliptique, c'est-à-dire qu'elle possède un atlas modelant $L(p, q)$ sur des ouverts de S^3 de sorte que les changements de cartes soient des restrictions d'isométries de S^3 (i.e. d'éléments du groupe orthogonal $O(4)$); plus précisément, une structure elliptique est un atlas comme ci-dessus qui est maximal pour cette propriété. Nous allons démontrer :

THEOREME 1. A isotopie près, l'espace lenticulaire $L(p, q)$ admet une seule structure elliptique.

En d'autres termes, les atlas maximaux correspondant à deux structures elliptiques sur $L(p, q)$ se déduisent l'un de l'autre par composition par un difféomorphisme de $L(p, q)$ isotope à l'identité.

On peut également donner une autre interprétation du théorème 1 en termes de métriques riemanniennes. En effet, le théorème de Cartan-Ambrose-Hicks caractérise la sphère S^n comme l'unique variété riemannienne simplement connexe de dimension n dont la courbure sectionnelle est constante égale à $+1$ (voir [14] ou [16]). Sur une variété donnée, on en déduit aisément une

correspondance naturelle entre structures elliptiques et métriques riemanniennes à courbure sectionnelle constante $+1$. On peut donc paraphraser le théorème 1 sous la forme équivalente suivante :

THEOREME 2. Sur l'espace lenticulaire $L(p,q)$, toute métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante $+1$ est l'image de la métrique standard par un difféomorphisme isotope à l'identité.

Dans les théorèmes 1 et 2, la partie difficile est d'obtenir des isotopies au lieu de simples difféomorphismes. En effet, on montre assez facilement :

LEMME 3. Toute métrique riemannienne μ sur $L(p,q)$ à courbure sectionnelle constante $+1$ est isométrique à la métrique standard par un difféomorphisme de $L(p,q)$.

La démonstration du lemme 3 est basée sur la conséquence suivante de la classification topologique des espaces lenticulaires.

LEMME 4. Deux espaces lenticulaires qui sont difféomorphes sont isométriques (pour les métriques standards).

Démonstration du lemme 4. Par construction, $L(p,q)$ est métriquement le quotient de S^3 par le groupe Γ engendré par l'isométrie $I(p,q)$ définie plus haut. Soit de même $L(p',q') = S^3/\Gamma'$ où Γ' est engendré par $I(p',q')$. Par la classification des espaces lenticulaires (voir [15]) , $L(p,q)$ et $L(p',q')$ sont difféomorphes si et seulement si $p = p'$ et $q \equiv \pm q'[p]$ ou $qq' \equiv \pm 1[p]$. Or cette condition revient à dire que le groupe Γ' est égal à Γ ou à son conjugué par l'isométrie $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, \overline{z_2})$, et entraîne bien sûr que $L(p,q)$ et $L(p',q')$ sont isométriques. $\square$

Démonstration du lemme 3. Par le théorème de Cartan-Ambrose-Hicks déjà cité, $L(p,q)$ muni de μ est isométrique au quotient de S^3 par un sous-groupe fini Γ' de $SO(4)$ agissant librement sur S^3 . Comme Γ' est cyclique et agit librement sur S^3 , on peut supposer après conjugaison dans $SO(4)$ qu'il est engendré par une isométrie de type $I(p',q')$, de sorte que S^3/Γ' est un espace lenticulaire $L(p',q')$. Puisque $L(p',q')$ est difféomorphe à $L(p,q)$ par construction, il lui est isométrique par le lemme 4 , et la métrique μ de $L(p,q)$ est ainsi isométrique à la métrique standard par un difféomorphisme de $L(p,q)$. $\square$

Grâce au lemme 3, les théorèmes 1 et 2 sont ainsi équivalents au résultat suivant.

THEOREME 5. Tout difféomorphisme de $L(p,q)$ est isotope à une isométrie de la métrique standard.

Pour $S^3 = L(1,0)$, le théorème 5 est dû à J. Cerf ([13]). Nous le démontrerons dans tous les autres cas à la section suivante (en utilisant au passage le cas de S^3).

Plus précisément, considérons les éléments suivants de $O(4)$

$$\begin{aligned}\tau &: (z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2}) , \\ \sigma_+ &: (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1) , \\ \sigma_- &: (z_1, z_2) \mapsto (z_2, \overline{z_1}) .\end{aligned}$$

Par passage au quotient, τ induit une isométrie de $L(p,q)$. Il en est de même pour σ_+ à condition que $q^2 \equiv +1[p]$, et pour σ_- à condition que $q^2 \equiv -1[p]$. On va montrer que tout difféomorphisme de $L(p,q)$ est isotope à un élément du groupe engendré par τ et, éventuellement, σ_+ ou σ_- .

Avant d'aborder cette démonstration, on va d'abord donner une autre description de l'espace lenticulaire $L(p,q)$. Pour cela, décomposons la sphère

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

en les deux tores solides

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= \{(z_1, z_2) \in S^3 ; |z_1| \geq \tfrac{1}{2}\} \\ \text{et} \quad \tilde{V}_2 &= \{(z_1, z_2) \in S^3 ; |z_2| \geq \tfrac{1}{2}\} .\end{aligned}$$

Choisissons r et $s \in \mathbb{Z}$ tels que $qr - ps = -1$ et, si S^1 et D^2 sont les cercles et disques unités de $\mathbb{C}$, considérons les applications $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{V}_1 \rightarrow S^1 \times D^2$ et $\tilde{\varphi}_2 : \tilde{V}_2 \rightarrow S^1 \times D^2$ définies par

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(z_1, z_2) &= \left(\frac{z_2^p}{|z_2|^p}, 2z_1 \frac{z_2^{-r}}{|z_2|^{-r}} \right) \\ \tilde{\varphi}_2(z_1, z_2) &= \left(\frac{z_1^p}{|z_1|^p}, 2z_2 \frac{z_1^q}{|z_1|^q} \right)\end{aligned}$$

Ces applications sont invariantes par l'action du groupe Γ engendré par l'isométrie $I(p,q)$, et induisent des difféomorphismes $\varphi_1 : V_1 \rightarrow S^1 \times D^2$ et $\varphi_2 : V_2 \rightarrow S^1 \times D^2$, où $V_1 = \tilde{V}_1/\Gamma$ et $V_2 = \tilde{V}_2/\Gamma$. Ainsi, on a décomposé l'espace lenticulaire $L(p,q)$ en deux tores solides V_1 et V_2 , et un calcul simple montre que l'application de recollement $\partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ s'exprime par $(u, v) \mapsto (u^r v^p, u^s, v^q)$ dans les paramétrages par $S^1 \times S^1$ définis par φ_1 et φ_2 . C'est cette description que nous utiliserons par la suite.

DIFFÉOTOPIES DES ESPACES LENTICULAIRES

LE RÉSULTAT essentiel de cet article est le suivant.

THEOREME 1. *A isotopie près, l'espace lenticulaire $L(p, q)$ contient un unique tore le séparant en deux tores solides.*

L'existence d'un tel tore est classique, et peut être même prise comme définition des espaces lenticulaires (si l'on y inclut $S^1 \times S^2$). Le point important de l'énoncé concerne donc l'unicité de ce tore à isotopie près.

Une conséquence facile du théorème 1 est la détermination du groupe des difféotopies (= classes d'isotopie de difféomorphismes) de $L(p, q)$. En fait, d'après la classification des espaces lenticulaires, la détermination de ce groupe est équivalente au Théorème 1.

Une autre application intéressante, quoique n'apportant aucun résultat nouveau, est que notre preuve du Théorème 1 fournit une nouvelle démonstration de la classification des espaces lenticulaires qui est entièrement géométrique (modulo quelques considérations élémentaires sur l'homologie de rang 1).

Le Théorème 1 correspond à une vieille conjecture qui, hormis pour les cas faciles de S^3 , $S^1 \times S^2$ et $\mathbb{RP}^3$, est restée longtemps sans progrès significatif (voir par exemple [4], Problem 3-35, en 1976). Ces toutes dernières années, divers travaux de N. Ivanov, J. Rubinstein et J. Birman en ont fourni une preuve dans le cas particulier où l'espace lenticulaire considéré contient une bouteille de Klein [3, 7] ou une surface homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs [1]; les méthodes utilisées sont inspirées de celles introduites par W. Haken pour l'étude des variétés de dimension 3 qui sont "suffisamment grandes".

Or, dès 1956, H. Schubert démontrait dans son article [10] sur les noeuds à deux ponts un résultat que l'on peut énoncer ainsi: Identifiant l'espace lenticulaire $L(p, q)$ avec le revêtement double ramifié d'un noeud à deux ponts, soit τ l'involution de revêtement correspondante (voir une définition explicite de τ au §1); alors, à isotopie τ -équivariante près, $L(p, q)$ contient exactement un tore qui est préservé par τ et sépare $L(p, q)$ en deux tores solides. En effet, la donnée d'un tel tore est équivalente à celle d'une présentation à deux ponts du noeud considéré, et la deuxième moitié (§§5 à 10) de [10] est consacrée à la démonstration de l'unicité des présentations à deux ponts à isotopie préservant le noeud près. Il semble que ce résultat ait assez peu attiré l'attention, y compris sous sa forme théorie des noeuds (voir par exemple certains articles sur les automorphismes des noeuds à deux ponts parus dans les années 70, alors que le groupe de ces automorphismes est implicitement déterminé dans [10]). Pourtant, on peut considérer que le théorème 1 était pratiquement "démontré entre les lignes" dans [10]. En effet, la preuve que nous présentons ici est directement issue d'un "nettoyage" des démonstrations de [10], et en utilise les grandes lignes autant que les détails; hormis la mise en place du cadre général et quelques simplifications redevables aux vingt-cinq années de mathématiques qui se sont écoulées

depuis 1956, les différences techniques sont en effet mineures (voir seulement la remarque concluant le §4).

Nous espérons que le présent article incitera le lecteur à se plonger dans [10] et contribuera à renouveler l'intérêt pour les méthodes de H. Schubert telles qu'elles sont développées dans [8–10]. Celles-ci, plus fines que les techniques de minimalisation d'intersection qui suffisent habituellement pour travailler dans les variétés de Haken, sont en effet peut-être plus adaptées que ces dernières pour l'étude des variétés de dimension 3 insuffisamment grandes (voir également [2]).

N.B. Après soumission de ce manuscrit, nous avons appris que le groupe $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ a été indépendamment et simultanément déterminé par C. D. Hodgson dans sa thèse à l'Université de Melbourne (1981).

§1. DIFFEOMORPHISMES DES ESPACES LENTICULAIRES

Avant de démontrer le théorème 1, nous examinons d'abord ici son application à l'étude des difféomorphismes des espaces lenticulaires.

L'espace lenticulaire orienté $L(p, q)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, est obtenu en recollant deux copies V_1 et V_2 de $S^1 \times D^2$ par le difféomorphisme $\theta: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ de degré -1 défini par $\theta(u, v) = (u'v^p, u^s v^q)$, où $qr - ps = -1$ et où S^1 (resp. D^2) est considéré comme l'ensemble des nombres complexes de module égal (resp. inférieur ou égal) à 1. Etant donnés V_1 et V_2 dans $L(p, q)$, il est toujours possible de modifier les paramétrages (orientés) $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte qu'alors $\theta(u, v) = (u'v^p, u^s v^q)$ où q', r', s' prennent n'importe quelles valeurs telles que $q' \equiv q[p]$ et $q'r' - ps' = -1$.

Les espaces lenticulaires $L(1, 0) \cong S^3$ et $L(0, 1) \cong S^1 \times S^2$ apparaîtront comme des exceptions tout au long de cet article. D'autre part, le Théorème 1 et ses applications sont classiquement connus (et faciles) dans ces deux cas. Par conséquent, nous supposons toujours que $p \geq 2$.

Soit $\varphi: L(p, q) \rightarrow L(p', q')$ un difféomorphisme de degré $+1$ entre deux espaces lenticulaires, construits comme ci-dessus. Le Théorème 1 affirme que φ peut être isotopé de sorte que, ou bien $\varphi(V_1) = V'_1$ et $\varphi(V_2) = V'_2$, ou bien $\varphi(V_1) = V'_2$ et $\varphi(V_2) = V'_1$ (les primes distinguant les données relatives à $L(p', q')$). Par considération des noyaux des applications $H_1(\partial V_i) \rightarrow H_1(V_i)$ et $H_1(\partial V'_i) \rightarrow H_1(V'_i)$, $i = 1, 2$, un exercice facile et classique montre alors que $p = p'$ et que $q \equiv q'[p]$ dans le premier cas, et $qq' \equiv 1[p]$ dans le second. Ceci redémontre donc la classification des espaces lenticulaires orientés[6].

Les applications les plus intéressantes du Théorème 1 concernent cependant le groupe des difféotopies de $L(p, q)$. En effet, d'après le Théorème 1, tout difféomorphisme de $L(p, q)$ est isotope à un difféomorphisme préservant le tore $T = \partial V_1 = \partial V_2$.

Parmi les difféomorphismes de $L(p, q)$ respectant T figure toujours l'involution τ qui préserve chacun des tores solides V_1 et V_2 et qui s'exprime dans les paramétrisations $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ par $\tau(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$. Elle correspond à la translation de revêtement quand $L(p, q)$ est identifié au revêtement double ramifié d'un noeud à deux ponts.

D'autre part, il est classique (et facile à vérifier par considération des applications $H_1(T) \rightarrow H_1(V_i)$, $i = 1, 2$) que $L(p, q)$ n'admet en général pas de difféomorphismes échangeant V_1 et V_2 , sauf si $q^2 \equiv \pm 1[p]$. Quand $q^2 \equiv 1[p]$, il existe une involution σ_+ de degré $+1$ qui, si l'on a choisi les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte que $r = -q$, échange V_1 et V_2 par l'application $(u, v) \in V_1 \leftrightarrow (u, v) \in V_2$. De même, quand $q^2 \equiv -1[p]$, $L(p, q)$ admet un difféomorphisme σ_- de degré -1 et d'ordre 4 qui, si les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ sont choisis de sorte que $r = q$, s'exprime par $(u, v) \in V_1 \mapsto (\bar{u}, v) \in V_2$ et $(u, v) \in V_2 \mapsto (u, \bar{v}) \in V_1$. Remarquer que τ commute avec σ_+ et σ_- , et que $\sigma_-^2 = \tau$.

PROPOSITION 2. *Tout difféomorphisme de $L(p, q)$ est isotope à un élément du groupe engendré par τ et, éventuellement, σ_+ et σ_- .*

Remarque. L'exclusion de $L(0, 1) \cong S^1 \times S^2$ est ici nécessaire. En effet, le twist de Dehn le long de $1 \times S^2$ n'est pas isotope à un composé de τ , σ_+ , et σ_- .

Démonstration. Soit φ un difféomorphisme de $L(p, q)$. D'après le Théorème 1, on peut l'isotoper de sorte que $\varphi(T) = T$, où $T = \partial V_1 = \partial V_2$. Quitte à composer avec σ_+ ou σ_- , on peut en outre supposer que $\varphi(V_1) = V_1$ et $\varphi(V_2) = V_2$.

Pour $i = 1, 2$, soit m_i un générateur du noyau de $H_1(T) \rightarrow H_1(V_i)$. Puisque $p \neq 0, 1$, m_1 et m_2 sont distincts et $m_1 \cdot m_2 \neq \pm 1$. Du fait que $\varphi_*(m_i) = \pm m_i$ dans $H_1(T)$, il s'ensuit que φ_* est sur $H_1(T)$ la multiplication par ± 1 .

Quitte à composer φ avec τ , on peut maintenant supposer que φ_* est l'identité sur le tore T . Un argument classique, utilisant un disque méridien dans V_1 et V_2 , fournit alors une isotopie fixant T entre φ et l'identité. Ceci achève la preuve. $\square$

Notons $\text{Diff } L(p, q)$ le groupe topologique des difféomorphismes de $L(p, q)$.

THEOREME 3. *Le groupe $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ des classes d'isotopie de difféomorphismes de $L(p, q)$ est (pour $p \geq 2$) isomorphe à:*

- (a) $\mathbb{Z}/2$, de générateur τ , si $q^2 \not\equiv \pm 1[p]$.
- (b) $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, de générateurs τ et σ_+ , si $q^2 \equiv 1[p]$ et $q \not\equiv \pm 1[p]$.
- (c) $\mathbb{Z}/2$, de générateur τ , si $q \equiv \pm 1[p]$ et $p \neq 2$.
- (d) $\mathbb{Z}/4$, de générateur σ_- , si $q^2 \equiv -1[p]$ et $p \neq 2$.
- (e) $\mathbb{Z}/2$, de générateur σ_- , si $p = 2$.

Démonstration. Soit $G(p, q)$ le groupe abstrait muni d'une présentation dont les générateurs correspondent à τ et, quand $L(p, q)$ les admet, à σ_+ et σ_- , et dont les relateurs traduisent les relations évidentes $\tau^2 = \sigma_+^2 = \text{Id}$, $\sigma_-^2 = \tau$, $\tau\sigma_+ = \sigma_+\tau$ et, quand $p = 2$, $\sigma_+\sigma_-\sigma_+ = \sigma_-^{-1}$. Le groupe $G(p, q)$ est ainsi isomorphe à:

- (i) $\mathbb{Z}/2$ quand $q^2 \not\equiv \pm 1[p]$.
- (ii) $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ quand $q^2 \equiv 1[p]$ et $p \neq 2$.
- (iii) $\mathbb{Z}/4$ quand $q^2 \equiv -1[p]$ et $p \neq 2$.
- (iv) D_8 quand $p = 2$.

La Proposition 2 montre que l'homomorphisme naturel $G(p, q) \rightarrow \pi_0 \text{Diff } L(p, q)$ est surjectif. Il suffit donc de déterminer son noyau pour calculer $\pi_0 \text{Diff } L(p, q)$. Pour cela, considérons la composition:

$$G(p, q) \rightarrow \pi_0 \text{Diff } L(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_* L(p, q).$$

Sur $H_1 L(p, q) \cong \mathbb{Z}/p$, τ , σ_+ et σ_- agissent respectivement par multiplication par -1 , $-q$ et q . Si $q \not\equiv \pm 1[p]$, il s'ensuit que l'homomorphisme $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_* L(p, q)$ est injectif et donc que $\pi_0 \text{Diff } L(p, q) \cong G(p, q)$.

Si $q \equiv \pm 1[p]$ et $p \neq 2$, le noyau de $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*(L(p, q))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, engendré par σ_+ ou $\tau\sigma_+$, selon que $q \equiv -1$ ou $+1[p]$.

Si $p = 2$, le noyau de $G(p, q) \rightarrow \text{Aut } H_*(L(p, q))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, engendré par τ et σ_+ (car σ_- agit non trivialement sur $H_3 L(p, q) \cong \mathbb{Z}$).

Pour achever la preuve du théorème 3, il suffit donc de montrer que, si $q \equiv \pm 1[p]$, σ_+ est isotope à l'identité ou à τ (selon que $q \equiv -1$ ou $+1[p]$) et que, si en outre $p = 2$, τ est isotope à l'identité. Ceci découle immédiatement du lemme ci-dessous et du fait que tout difféomorphisme de $L(p, q)$ respectant V_1 est isotope à l'identité ou à τ (voir la preuve de la Proposition 2).

LEMME 4. Si $q \equiv \pm 1[p]$, il existe une isotopie de $L(p, q)$ qui échange V_1 et V_2 . Si $p = 2$, il existe en outre une isotopie de $L(2, 1) \cong \mathbb{RP}^3$ qui coïncide avec τ sur $T = \partial V_1 = \partial V_2$.

Démonstration. Le tore solide V_1 est clairement isotope à $U(C_1)$, où C_1 est l'âme $S^1 \times 0$ de $V_1 \cong S^1 \times D^2$ et où la notation $U(X)$ désigne un "petit" voisinage tubulaire de X .

Si $q \equiv \pm 1[p]$, on peut choisir les paramétrages $V_1 \cong V_2 \cong S^1 \times D^2$ de sorte que $r = \pm 1$. La courbe C_1 est isotope à $C = S^1 \times 1$ contenue dans le bord de $V_1 \cong S^1 \times D^2$, laquelle est aussi la courbe paramétrée par $z \in S^1 \rightarrow (z', z'')$ dans le bord de $V_2 \cong S^1 \times D^2$. Puisque $r = \pm 1$, C est isotope à l'âme $C_2 = S^1 \times 0$ de $V_2 \cong S^1 \times D^2$. Comme $U(C_2)$ est isotope à V_2 , on a ainsi exhibé une isotopie envoyant V_1 sur V_2 via $U(C_1)$, $U(C)$ et $U(C_2)$.

Si $p = 2$, alors $L(2, 1) = \mathbb{RP}^3$ et C_1 est isotope à $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$. Il existe une isotopie de $\mathbb{RP}^3$ qui renverse l'orientation de $\mathbb{RP}^1$ et qui s'étend aisément à $\mathbb{RP}^3$. Composant cette isotopie de $\mathbb{RP}^3$ avec deux isotopies convenables entre V_1 et $U(\mathbb{RP}^1)$, on obtient l'isotopie cherchée.

Ceci achève la démonstration du Lemme 4, et donc du Théorème 3. $\square$

On peut remarquer que l'on a montré au passage que deux difféomorphismes de $L(p, q)$ sont isotopes si et seulement si ils sont homotopes (en fait si et seulement si ils ont même action sur l'homologie).

§2. PLANS PROJECTIFS GENERALISES

Considérons $L(p, q) = V_1 \cup_\theta V_2$ comme au §1.

Soit D_1 le disque méridien $1 \times D^2$ de $V_1 \cong S^1 \times D^2$. Son bord est aussi la courbe de $V_2 \cong S^1 \times D^2$ paramétrée par $z \in S^1 \rightarrow (z^p, z^q)$. Considérons alors le sous-complexe Δ de $L(p, q)$ formé de l'union de D_1 et de la partie de $V_2 \cong S^1 \times D^2$ paramétrée par $(z, \rho) \in S^1 \times [0, 1] \rightarrow (z^p, \rho z^q)$. On peut penser à Δ comme étant l'image de D_1 par une isotopie contractant V_2 sur un voisinage infinitésimalement petit de son âme.

Le sous-complexe Δ de $L(p, q)$ est une sous-variété lisse en dehors d'une courbe fermée de points singuliers Σ (l'âme de V_2), le long de laquelle viennent se joindre p feuillet distincts. La Fig. 1 représente l'allure de Δ près d'un point singulier (avec $p = 5$).

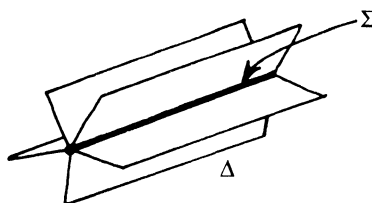


Fig. 1.

Abstraitement, Δ est isomorphe au quotient du disque D^2 par la relation d'équivalence qui identifie sur le bord z_1 et $z_2 \in S^1$ quand $z_1^p = z_2^p$. Si $p = 2$, Δ est ainsi isomorphe au plan projectif $\mathbb{RP}^2$. Pour cette raison, un tel complexe abstrait $\cong D^2/(z \in S^1 \sim z\xi_p)$, où ξ_p est une racine primitive p -ième de l'unité et où $p \geq 2$, sera appelé un *plan projectif généralisé*. Dans les cas dégénérés (et exclus) où $p = 0, 1$, Δ est une sphère ou un disque.

La petite scholie suivante montre que Δ contient un maximum d'informations sur la structure de l'espace qui le contient.

PROPOSITION 5. Une variété orientable M de dimension 3 qui est première (= qui n'admet que des décompositions en somme connexe triviales) et qui contient un plan projectif généralisé Δ est un espace lenticulaire. En outre, $M - \Delta$ est une boule.

Démonstration. Exercice. Considérer un voisinage régulier de Δ . $\square$

Un corollaire du Théorème 1 est par ailleurs que M contient au plus deux plans projectifs généralisés, à isotopie près.

§3. PLAN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Dans l'espace lenticulaire $L(p, q)$, on considère deux tores T et T' , séparant chacun $L(p, q)$ en deux tores solides, et on veut montrer que T et T' sont isotopes.

Nous allons traiter T et T' de façon différente. Si T sépare $L(p, q)$ en V_1 et V_2 , on peut construire comme au §2 une application $i : D \rightarrow L(p, q)$, où D est un disque, telle que $i(\partial D)$ est l'âme de V_2 , $i|_{\partial D} : \partial D \rightarrow i(\partial D)$ est un revêtement à p feuillets et $i|_{\text{int}(D)}$ est un plongement évitant $i(\partial D)$. Ainsi, $i(D)$ est un plan projectif généralisé et T est isotope à $\partial U(i(\partial D))$.

Pour T' , on choisit au contraire une fonction de Morse ordonnée $f : L(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$, possédant exactement un point critique pour chacun des indices 0, 1, 2, 3 et telle que T' est isotope aux surfaces de niveau situées entre les valeurs critiques d'indice 1 et 2. La construction de f s'effectue aisément à partir d'une fonction de Morse convenable sur le tore solide standard.

L'idée consiste alors à isotoper le plan projectif généralisé $i(D)$ de sorte que sa courbe singulière $i(\partial D)$ soit aussi simple que possible vis-à-vis de la fonction de Morse f . Cette stratégie est justifiée par le lemme suivant.

LEMME 6. *Si $i(\partial D)$ est dans une surface de niveau de f , alors T et T' sont isotopes.*

Démonstration. La preuve du Lemme 6 que nous donnons ici est une simplification, due à L. Siebenmann, de notre preuve originale. Celle-ci passait par la construction d'une fibration de Seifert convenable sur le complémentaire de $i(\partial D)$ dans $L(p, q)$, qui est un tore solide ouvert.

Par une légère isotopie de la courbe $i(\partial D)$, on peut supposer que la surface de niveau qui la contient est non-singulière. Comme $i(\partial D)$ représente un générateur de $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p \neq 0$, le niveau correspondant est situé entre les valeurs critiques d'indices 1 et 2 (sinon, $i(\partial D)$ serait contenue dans une sphère et serait donc homologue à 0). Après isotopie, on peut ainsi se ramener au cas où la surface de niveau contenant $i(\partial D)$ est exactement T' . La courbe $i(\partial D)$ ne sépare pas T' , puisqu'elle n'est pas homologue à 0 dans $L(p, q)$, et elle découpe donc le tore T' en un anneau.

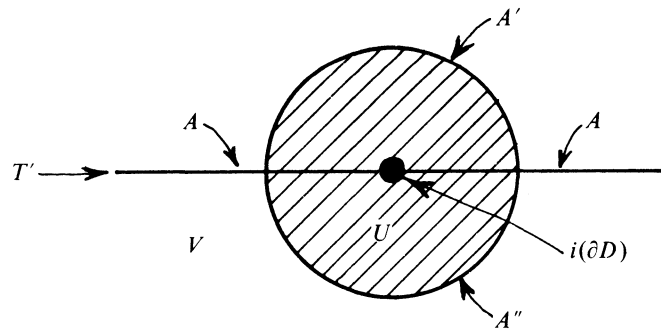


Fig. 2.

Soit U un petit voisinage tubulaire de $i(\partial D)$ et soit V l'adhérence du complémentaire de U dans $L(p, q)$. On utilise maintenant un lemme facile (voir par exemple [11], Lemma 2.3) qui affirme la chose suivante: Un anneau A proprement plongé dans un tore solide V est, ou bien compressible (et alors l'application $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(V)$ est nulle), ou bien parallèle à l'un des deux anneaux découpés par ∂A sur ∂V . En appliquant ce lemme à l'anneau $A = V \cap T'$, on en conclut que $V \cap T'$ est parallèle dans V à l'un des deux anneaux A' et A'' découpés

par T' sur $\partial V = \partial U$ (la première éventualité du lemme ne peut se produire car A contient une courbe isotope à $i(\partial D)$, laquelle est non-triviale dans $\pi_1 L(p, q)$). Par exemple, $V \cap T'$ est parallèle à A' , et $\partial U = A' \cup A''$ est ainsi isotope à $(V \cap T') \cup A''$ (modulo lissage). En "aplatissant" A'' sur $U \cap T'$ à travers U , on a ainsi construit une isotopie de ∂U à T' . Comme ∂U était isotope à T par construction, ceci démontre le Lemme 6. $\square$

§4. SINGULARITES PERMISES-SINGULARITES ESSENTIELLES

Soient $i : D \rightarrow L(p, q)$ et $f : L(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ comme au paragraphe précédent. Après composition de i par une petite isotopie de $L(p, q)$, on peut supposer que $i(D)$ est "générique", en ce sens que $i(D)$ évite les quatre points critiques de f et que les singularités de $f \circ i$ sont de Morse, c'est-à-dire de type centre ou selle sur $\text{int}(D)$ et de type demi-centre ou demi-selle sur le bord. La Fig. 3 présente l'allure de ces divers types de singularités (f étant représentée par la fonction hauteur, au signe près), ainsi que des feuilletages induits sur D ; dans le cas des singularités sur le bord, on n'a pas représenté les $(p-1)$ autres feuilletés attenants à la courbe singulière $i(\partial D)$ du plan projectif généralisé $i(D)$.

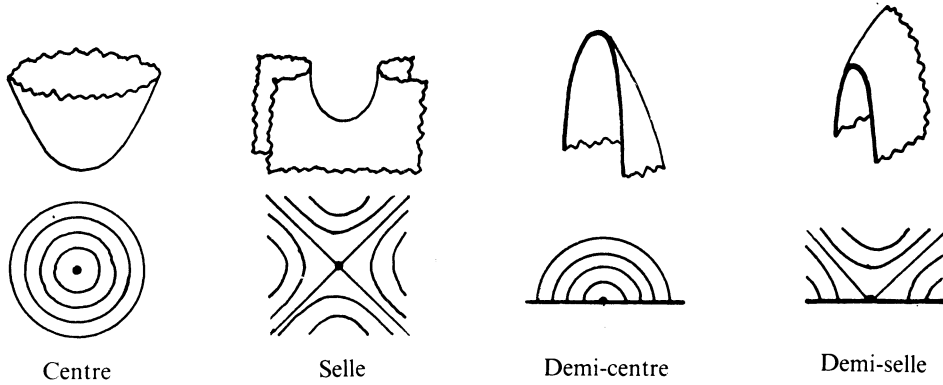


Fig. 3.

En outre, on peut imposer par généricité que les singularités de f sur $i(D)$ sont situées à des niveaux différents. Pour $f \circ i$, ceci entraîne que deux singularités $x \neq y$ ont des images par f distinctes sauf si x et y sont toutes deux sur le bord et $i(x) = i(y) \in i(\partial D)$. En particulier, aucune feuille du feuilletage (singulier) de D induit par $f \circ i$ ne joint deux selles distinctes.

Pour (uniquement) la commodité de l'exposition, on se ramène au cas où il n'y a pas de demi-centres. Ceci est toujours possible par une isotopie près des extrémums de $f|_{i(\partial D)}$ après laquelle tous les demi-plans tangents aux feuilletés pointent vers le haut aux maximums de $f|_{i(\partial D)}$ et vers le bas aux minimums.

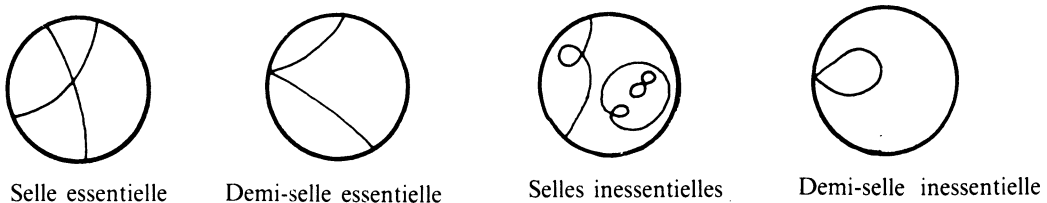


Fig. 4.

Par définition, une selle (resp. demi-selle) sera *essentielle* si, dans le feuilletage de D induit par $f \circ i$, les quatre (resp. deux) séparatrices qui en sont issues sont distinctes (voir Fig. 4). Les centres seront toujours considérés comme des singularités inessentielles. Un exemple typique de selle inessentielle est constitué par les singularités que l'on introduit quand on crée des petites bosses sur $i(\text{int } D)$.

Contrairement à ce qui se passe dans la preuve de H. Schubert pour les noeuds à deux

ponts ([10], §6, Schritt 1), il ne semble pas exister dans le cadre que nous considérons d'argument simple pour se débarrasser des selles inessentielles. Il faudra donc s'accommoder de leur présence.

§5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Le but final est de se ramener au cas où l'on peut appliquer le Lemme 6, et l'idée générale consiste à diminuer par isotopie le nombre de points critiques de $f|i(\partial D)$ en utilisant le feuilletage (singulier) de D induit par $f \circ i$ comme guide.

Par définition, les 4 séparatrices issues d'une selle essentielle de ce feuilletage sont distinctes, aboutissent chacune en un point de ∂D et par conséquent découpent D en quatre *quartiers* (voir Fig. 4).

De façon similaire, les deux séparatrices (distinctes) issues d'une demi-selle essentielle découpent D en trois morceaux, deux *demi-disques* contenant chacun exactement une séparatrice et un troisième morceau contenant les deux séparatrices et auquel on ne donnera aucun nom particulier car il n'interviendra pas dans la preuve (voir Fig. 4).

Considérons l'ensemble formé de tous les quartiers et demi-disques ainsi associés à toutes les singularités essentielles du feuilletage de D défini par $f \circ i$. Il contient un élément D_1 (un quartier ou un demi-disque) qui est minimal pour l'inclusion. Si tous les singularités sont inessentielles, on prend $D_1 = D$; on verra toutefois ci-dessous que l'hypothèse $p \geq 2$ exclut cette possibilité.

Le lemme suivant est crucial dans la démonstration.

LEMME 7. *L'intérieur de D_1 contient exactement une demi-selle. En particulier, $D_1 \neq D$ et la restriction de i à l'intérieur de l'arc $D_1 \cap \partial D$ est injective.*

Démonstration. Soit E le complémentaire dans ∂D de l'ensemble constitué des demi-selles essentielles et des extrémités des séparatrices issues de singularités essentielles. Considérons $\omega: E \rightarrow E$ définie par: Si x est l'extrémité d'une feuille lisse, $\omega(x)$ est l'autre extrémité de cette feuille; si x est l'extrémité d'une séparatrice issue d'une selle inessentielle, $\omega(x)$ est l'extrémité de l'autre séparatrice issue de la même selle qui aboutit au bord; si x est une demi-selle, $\omega(x) = x$. La fonction ω est continue et localement injective (en fait, c'est même un difféomorphisme involutif de E).

Dans l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$, il y a au moins un extrémum de $(f \circ i)|_{\partial D}$, c'est-à-dire une demi-selle x_0 . Par minimalité de D_1 , cette demi-selle est nécessairement inessentielle et donc $x_0 \in E$ et $\omega(x_0) = x_0$.

Soit $t \mapsto \gamma(t) \in \partial D$ un chemin monotone issu de $x_0 = \gamma(t_0)$, et soit t_1 la première valeur de $t > t_0$ pour laquelle l'un des deux accidents suivants se produisent:

- (a) $\gamma(t_1) \notin E$.
- (b) $\gamma(t_1) \in E$ est une demi-selle (nécessairement inessentielle).

En fait, le cas (b) ne peut se produire: Sinon $\omega \circ \gamma|_{[t_0, t_1]}$ définit un autre chemin monotone issu de x_0 , mais partant en sens opposé à γ . D'autre part, ce chemin ne rencontre $\gamma([t_0, t_1])$ qu'en ses extrémités (car $\omega(x) = x \Leftrightarrow x$ est une demi-selle). Alors, ∂D serait l'union de ces deux chemins et ne contiendrait que deux demi-selles, à savoir $x_0 = \gamma(t_0)$ et $x_1 = \gamma(t_1)$. Mais ceci contredirait la remarque que, si la restriction de $f \circ i$ à $i(\partial D)$ admet $n \geq 2$ extrémums, la restriction de $f \circ i$ à ∂D admet $pn \geq 4$ extrémums (= demi-selles). Donc, seul le cas (a) peut se produire (remarquer que l'hypothèse $p \geq 2$ est ici nécessaire).

Dans le cas (a), $x_1 = \gamma(t_1)$ est situé sur la même feuille qu'une singularité essentielle. De la définition de t_1 il s'ensuit aisément que l'un des trois ou quatre morceaux de D découpés par les séparatrices de cette singularité rencontre ∂D le long de l'adhérence de $\gamma([t_0, t_1]) \cup \omega \circ \gamma([t_0, t_1])$. Par minimalité de D_1 , ce morceau de D est D_1 lui-même et l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$ contient donc une seule demi-selle, $x_0 = \gamma(t_0)$.

Ceci prouve la première assertion.

La restriction $\text{int}(D_1 \cap \partial D) \rightarrow i(\partial D)$ de i n'est pas surjective: Autrement $\text{int}(D_1 \cap \partial D)$ contiendrait au moins deux demi-selles, envoyées respectivement sur le maximum et le minimum de f sur $i(\partial D)$, ce qui contredirait ce qui précède. Puisque cette restriction de i est une subimmersion de variétés connexes de dimension 1, il s'ensuit qu'elle est injective et que $D_1 \neq D$. $\square$

L'existence de quartiers ou demi-disques jouissant des propriétés démontrées au Lemme 7 va nous permettre de simplifier $i(D)$ relativement à f . Plus précisément, l'ensemble $\mathbb{N}^2$ étant muni de l'ordre lexicographique, on va simplifier le couple $(n_d, n_e) \in \mathbb{N}^2$, où n_d (resp. n_e) est le nombre de demi-selles (resp. selles essentielles) du feuilletage de D induit par $f \circ i$, jusqu'à ce que l'on atteigne une situation favorable où une isotopie "évidente" peut amener $i(\partial D)$ dans une surface de niveau de f , situation qui n'est certes plus "de Morse" mais qui permet de conclure la démonstration du théorème 1 grâce au Lemme 6.

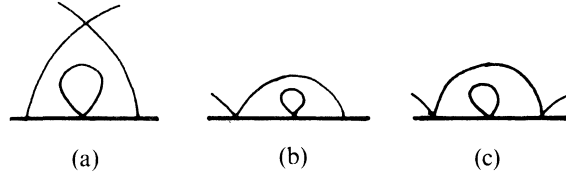


Fig. 5.

Considérons donc un quartier ou demi-disque minimal D_1 comme plus haut. On distingue trois cas, illustrés en Fig. 5, selon que D_1 est un quartier, un demi-disque bordé par la séparatrice d'une demi-selle qui n'aboutit pas à une autre demi-selle, ou un demi-disque bordé par la séparatrice commune à deux demi-selles. Remarquer que le dernier cas ne peut se produire que si la restriction de f à $i(\partial D)$ a exactement deux points critiques (un maximum et un minimum): En effet, les deux demi-selles de $\partial(D_1 \cap \partial D)$ ont même image par f et, par hypothèse de généricité, ont donc même image par i ; donc $i(D_1 \cap \partial D) = i(\partial D)$ et, comme l'intérieur de $D_1 \cap \partial D$ contient une seule demi-selle, $f|_{i(\partial D)}$ n'a que deux points critiques. D'autre part, le lecteur devra garder à l'esprit que les selles inessentiels ne sont pas représentées sur la Fig. 5; ainsi, dans le cas de la Fig. 5(a), l'allure complète du feuilletage peut très bien être comme en Fig. 6.

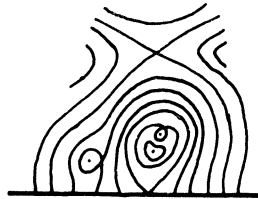


Fig. 6.

Le cas le plus simple est celui de la Fig. 5(b) où l'on peut réduire n_d sans, en vertu de l'ordre lexicographique, avoir à se soucier de l'effet sur n_e . En effet, le Lemme 7 affirme que $i(D_1)$ est un disque plongé dans $L(p, q)$ qui ne rencontre $i(\partial D)$ que le long de l'arc $i(D_1 \cap \partial D)$. Il existe donc une isotopie PL envoyant $i(\partial D)$ sur la courbe PL obtenue en remplaçant dans $i(D)$ l'arc $i(D_1 \cap \partial D)$ par $i(\partial D_1 - \partial D)$. L'arc $i(\partial D_1 - \partial D)$ étant contenu dans une surface de niveau de f , on peut alors par arrondissement construire une isotopie lisse envoyant $i(\partial D)$ sur une courbe lisse "générique" C telle que $f|_C$ a deux points critiques de moins que $f|_{i(\partial D)}$ (voir Fig. 7). Modifiant i par composition avec cette isotopie, on a ainsi réduit le couple (n_d, n_e) pour l'ordre lexicographique (même si n_e peut très bien avoir augmenté).

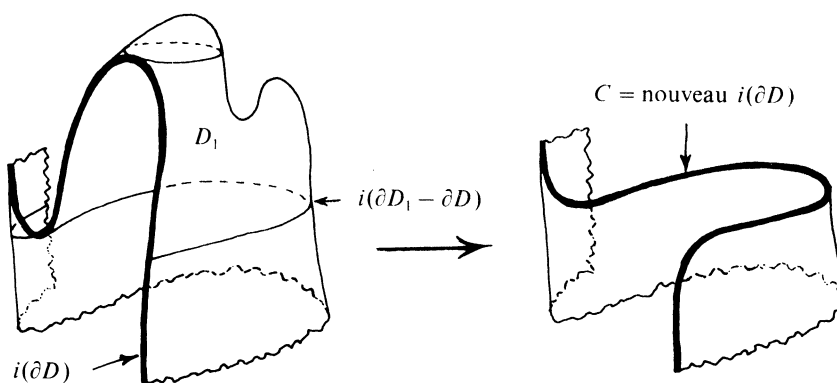


Fig. 7.

Le cas de la Fig. 5(a) nécessite un peu plus de soin. Comme précédemment, il existe une isotopie PL , à support dans un petit voisinage de $i(D_1)$, qui contracte $i(D_1)$ sur lui-même et envoie $i(\partial D)$ sur $(i(\partial D) - i(D_1 \cap \partial D)) \cup i(\partial D_1 - \partial D)$. Après lissage, on a ainsi une isotopie envoyant $i(\partial D)$ sur une courbe lisse C telle que $f|_C$ a le même nombre d'extrémums que $f|i(\partial D)$, dont l'un est situé exactement sur la selle de $i(D)$ contenue dans $i(D_1)$ (voir Fig. 8). Cette isotopie peut être choisie de sorte que, si on l'utilise pour modifier i , la selle et la demi-selle contenues dans D_1 se combinent pour former une seule demi-selle (voir Fig. 8). On a ainsi éliminé la selle essentielle contenue dans D_1 .

Il faut toutefois vérifier que l'on n'a pas introduit de nouvelle selle essentielle. En effet, l'isotopie modifie i au voisinage de D_1 mais aussi au voisinage des $(p-1)$ arcs disjoints dans ∂D qui sont identifiés à $D_1 \cap \partial D$ par i . Pour chacun de ces arcs, l'isotopie remplace l'image par i d'un de ses petits voisinages U par, grosso modo, son union avec une copie de $i(D_1)$. Ceci introduit autant de selles qu'il y avait de selles dans l'intérieur de D_1 , plus une autre selle correspondant au recollement de la demi-selle de U et de la demi-selle de D_1 ; les premières selles sont inessentielles par minimalité de D_1 , et la dernière est inessentielle car la demi-selle de D_1 l'était. La modification de i ainsi introduite réduit donc n_e de une unité sans modifier n_d , et diminue donc le couple (n_d, n_e) pour l'ordre lexicographique.

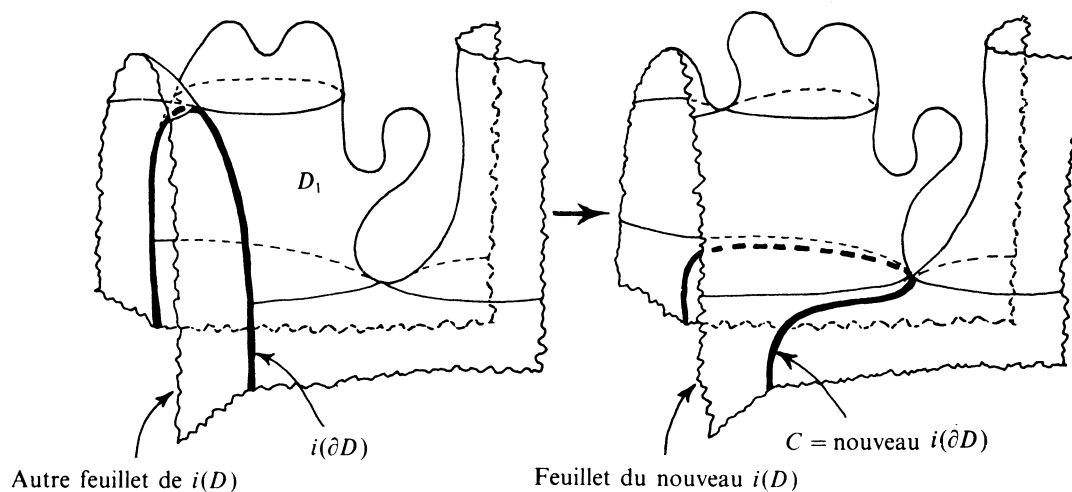


Fig. 8.

Enfin, le cas de la Fig. 5(c), où D_1 est un demi-disque et $\partial(D_1 \cap \partial D)$ est constitué de deux demi-selles, est le cas favorable où l'on peut conclure la démonstration. En effet, nous avons vu que $i(D_1 \cap \partial D) = i(\partial D)$. D'autre part, $C = i(\partial D_1 - \partial D)$ est une courbe simple

fermée située dans une surface de niveau de f . L'existence du demi-disque D_1 fournissant une isotopie entre $i(\partial D)$ et C , on peut ainsi se ramener aux hypothèses du Lemme 6, qui achève la démonstration du Théorème 1. $\square$

Remerciements—Cet article n'aurait pas vu le jour si, par l'intermédiaire de L. Siebenmann nous n'avions tenu de F. Waldhausen que l'unicité des présentations à deux ponts des noeuds était démontrée dans [10]. Qu'ils en soient ici tous deux particulièrement remerciés.

REFERENCES

1. J. BIRMAN et J. RUBINSTEIN: Homeotopy groups of a class of 3-manifolds. *Proc. London Math. Soc.* **49** (1984).
2. A. HATCHER et W. THURSTON: Incompressible surfaces in two-bridge knot complements. *Invent. Math.* **79** (1985), 225–246.
3. N. IVANOV: Homotopy of space of automorphisms of some three-dimensional manifolds (traduction anglaise). *Sov. Math. Dokl.* **20** (1979), 47–50.
4. R. KIRBY: Problems in low-dimensional manifold theory. *Proc. Symposia in Pure Mathematics* **32**, Part 2 (1978), 273–312.
5. P. ORLIK, E. VOGT et H. ZIESCHANG: Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Topology* **6** (1967), 49–64.
6. K. REIDEMEISTER: Homotopieringe und Linsenräume. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **11** (1936), 102–109.
7. J. RUBINSTEIN: On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles. *Trans. Am. Math. Soc.* **251** (1979), 129–137.
8. H. SCHUBERT: Knoten und Vollringe. *Acta Math.* **90** (1953), 131–286.
9. H. SCHUBERT: Über eine numerische Knoteninvariante. *Math. Zeit.* **61** (1954), 245–288.
10. H. SCHUBERT: Knoten mit zwei Brücken. *Math. Zeit.* **65** (1956), 133–170.
11. F. WALDHAUSEN: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I und II. *Inventiones Math.* **3** (1967), 308–333 et **4** (1967), 87–117.
12. F. BONAHOE et J.-P. OTAL : Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **16** (1983), 451–466.
13. J. CERF : Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ($\Gamma_4 = 0$), *Lecture Notes in Mathematics* n° 53, Springer Verlag, 1968.
14. J. CHEEGER et D.G. EBIN : Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland, 1975.
15. J. HEMPEL : 3-manifolds, *Ann. of Math. Studies* n° 86, Princeton Univ. Press, 1976.
16. J.A. WOLF : Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1974.

TROISIEME PARTIE

BOUTS DES VARIETES HYPERBOLIQUES

DE DIMENSION TROIS

On s'intéresse dans cet article au comportement géométrique à l'infini des variétés de dimension 3 munies d'une structure hyperbolique, c'est-à-dire d'une métrique riemannienne complète de courbure constante -1 . Cette étude fait suite aux travaux menés par W. Thurston sur ces variétés, tels qu'ils sont en particulier exposés dans [Thu₂], et entend compléter ceux-ci en ce sens que nous démontrons l'une des principales conjectures émises par Thurston à ce sujet.

Parmi les variétés hyperboliques, celles dont la géométrie est la plus simple sont les variétés géométriquement finies, obtenues comme quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ par un groupe discret d'isométries admettant un polyèdre convexe fini comme domaine fondamental. Pour étudier les variétés hyperboliques de dimension 3 qui apparaissent comme dégénérescences de variétés géométriquement finies, Thurston a introduit, sous une certaine condition homotopique (*) énoncée plus loin, la notion de variété géométriquement sage ("geometrically tame") qui englobe celle de variété géométriquement finie. On définira cette notion avec précision au § 1.3. On peut simplement dire pour l'instant que, au moins quand la variété est sans cusps, elle traduit une propriété des bouts de la variété au sens de Freudenthal (lesquels sont en nombre fini). Chaque bout d'une variété géométriquement sage (sans cusps) appartient à l'un parmi deux types distincts : Ou bien il a l'allure d'un bout de variété géométriquement finie, et il est alors géométriquement très évasé ; ou bien il est au contraire uniformément étroit, et géométriquement pincé le long d'une certaine lamination sur la surface de même groupe fondamental que ce bout.

Même si elles sont plus difficiles à construire que les variétés géométriquement finies, on connaît beaucoup de variétés géométriquement sages qui ne sont pas géométriquement finies. Ceci peut être de manière explicite comme dans [Jor] [Ril] (par exemple le célèbre revêtement infini cyclique du complémentaire du noeud de 8), soit indirectement car Thurston a démontré dans [Thu₂] que toute limite de variété géométriquement sage est géométriquement sage. Ce dernier résultat montre par exemple que les points de la compactification de

Bers de l'espace de Teichmüller ($[Ber_2]$, $[Ber_4]$) correspondent à des variétés géométriquement sages. De fait, toutes les variétés hyperboliques de dimension 3 connues sont géométriquement sages, et ceci a conduit Thurston à conjecturer dans $[Thu_2]$ le résultat suivant, dont la démonstration est l'objet du présent article.

THEOREME A. Soit M une variété hyperbolique complète de dimension 3 , telle que $\pi_1(M)$ est de type fini et satisfait la condition (*) ci-dessous. Alors, M est géométriquement sage.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler qu'un groupe est de type fini quand il admet un nombre fini de générateurs. La condition (*) qui apparaît dans les hypothèses du théorème A est la suivante.

(*) Pour toute décomposition non-triviale de $\pi_1(M)$ en produit libre $A * B$, il existe un élément parabolique qui n'est conjugué à aucun élément de A ou de B . De plus, $\pi_1(M)$ n'est pas cyclique.

En particulier, la condition (*) est toujours réalisée quand $\pi_1(M)$ est non-cyclique et indécomposable en produit libre non trivial. Rappelons qu'un élément de $\pi_1(M)$ est parabolique quand sa classe de conjugaison est représentée par des courbes fermées arbitrairement courtes dans M (et correspond à un cusp de M) .

Pour donner une interprétation plus géométrique de cette condition (*) , supposons que l'on sache que M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte $\bar{M}$ (ce qui se trouvera a posteriori être toujours le cas sous l'hypothèse (*) par le corollaire B) . Les éléments paraboliques de $\pi_1(M)$ sont dans ce cas exactement ceux qui sont conjugués à des courbes dans une certaine sous-variété $\partial_p \bar{M}$ de $\partial \bar{M}$ formée de tores, bouteilles de Klein, anneaux et rubans de Moebius ; la condition (*) est alors équivalente à dire que chaque composante S de $\partial \bar{M} - \partial_p \bar{M}$ est incompressible, c'est-à-dire que l'application $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective (voir le lemme 1.5).

Thurston a démontré dans $[Thu_2]$ que les variétés géométriquement sages possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. En combinant ses résultats avec notre théorème A , on obtient en particulier les corollaires B et C ci-dessous.

COROLLAIRE B. Sous les hypothèses du théorème A , la variété M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte.

Ce corollaire B provient directement du théorème 9.4.1 de [Thu₂]. Nous en donnerons au § 1.5 une preuve assez rapide basée sur un résultat de topologie "classique" des variétés de dimension 3 dû à M. Freedman, J. Hass et P. Scott [FHS], qui ne nécessite pas les délicates interpolations de surfaces plissées utilisées par Thurston.

Le corollaire C traite de la conjecture d'Ahlfors [Ahl₁], qui joue un rôle fondamental dans la théorie des déformations quasi-conformes des groupes kleinéens ([Ber₂], [Ber₄], [Thu₇], [Mor]). Soit $\mathfrak{m}_2$ le groupe de Moebius formé des transformations conformes et anticonformes de la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{CP}^1$, i.e. engendré par l'action de $PSL_2(\mathbb{C})$ et de la conjugaison complexe. Si Γ est un sous-groupe de $\mathfrak{m}_2$, rappelons qu'il existe un ouvert maximum Ω_Γ de S^2 sur lequel Γ agit proprement discontinûment. Cet ouvert Ω_Γ est appelé le domaine de discontinuité de Γ , et son complémentaire Λ_Γ est l'ensemble limite de Γ . La conjecture d'Ahlfors affirme que, quand Γ est de type fini, ou bien Λ_Γ est de mesure de Lebesgue nulle dans S^2 ou alors $\Lambda_\Gamma = S^2$. Rappelons qu'un élément de $\mathfrak{m}_2$ est parabolique quand il fixe exactement un point de S^2 .

COROLLAIRE C. Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathfrak{m}_2$ vérifiant la condition suivante : Pour toute décomposition non triviale $\Gamma = A *_C B$ ou $A *_C$ de Γ en produit amalgamé ou HNN le long d'un groupe fini C cyclique ou diédral, il existe un élément parabolique de Γ qui n'est conjugué à aucun élément de A ou de B . Alors l'ensemble limite Λ_Γ est de mesure nulle dans S^2 s'il n'est pas S^2 tout entière.

Le corollaire C est une conséquence de notre théorème A et du corollaire 8.12.4 de [Thu₂], lequel généralise un résultat analogue d'Ahlfors pour les groupes géométriquement finis [Ahl₂]; on indiquera brièvement au § 1.6 comment relier les deux problèmes. En particulier, la conjecture d'Ahlfors est maintenant démontrée pour tous les groupes kleinéens qui n'admettent aucune décomposition en produit amalgamé ou HNN le long d'un groupe fini cyclique ou diédral. On remarquera que cette condition est purement algébrique, alors que les seules hypothèses sous lesquelles la conjecture d'Ahlfors était connue jusqu'à présent étaient d'essence géométrique (sauf bien sûr pour le cas trivial des groupes dits élémentaires).

En fait, ainsi que me l'a fait remarquer G.A. Swarup, on peut relâcher un peu ces hypothèses si l'on a un peu plus d'information sur le domaine de discontinuité. Ceci s'applique notamment dans le cas des "groupes de fonction",

c'est-à-dire des groupes kleinéens Γ qui préservent une composante S de leur domaine de discontinuité Ω_Γ . En effet, supposant Γ sans torsion par le lemme de Selberg et considérant la variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, la partie non-cuspidale $M_0(\mu)$ a un bout géométriquement fini correspondant à S/Γ et on vérifie sans peine que les autres bouts de $M_0(\mu)$ ont un groupe fondamental $\subset \pi_1(M) = \Gamma$ qui satisfait la condition $(*)$. (Voir §1.1 et § 1.2 pour les définitions). On peut donc appliquer notre analyse à ces bouts pour montrer qu'ils sont géométriquement sages. Ceci démontre en particulier que tout groupe de fonction qui est de type fini satisfait la conjecture d'Ahlfors.

Parmi les autres propriétés connues des variétés géométriquement sages, on peut également citer certaines propriétés d'ergodicité du flot géodésique démontrées par D. Sullivan dans [Sul₁] [Sul₂]. On pourra également consulter à ce sujet [Thu₂, §9.9]. (Cette dernière référence a été distribuée vers 1980, séparément des autres sections.)

Par ailleurs, notre preuve du théorème A fournit évidemment une nouvelle démonstration du résultat de Thurston que toute limite algébrique de variétés géométriquement sages est géométriquement sage, propriété qui joue un rôle central dans la preuve de son théorème d'hyperbolisation des variétés de dimension 3 "suffisamment grandes" (voir [Thu₇] [Mor]). Nous espérons que cette approche permettra de simplifier un peu cette partie de la démonstration du théorème d'hyperbolisation.

Une grande partie des techniques que nous utilisons est directement issue des idées de Thurston, et le lecteur familier avec [Thu₂] [Thu₅] [Thu₆] reconnaîtra facilement notre dette envers celles-ci. Nous avons toutefois essayé d'être aussi indépendant que possible de ces articles, en particulier des chapitres 8 et 9 de [Thu₂], réputés assez difficiles à lire (peut-être pas toujours à tort!). La seule idée un peu nouvelle est l'introduction à la section IV de la notion de courant géodésique sur une surface hyperbolique S . Celle-ci généralise la notion de géodésique fermée, et ces courants géodésiques fournissent une complétion de l'espace des classes d'homotopie de courbes fermées sur S , dont la restriction à l'espace des courbes simples n'est autre que la complétion de cet espace par les laminations géodésiques mesurées introduite par Thurston ([Thu₁] [Thu₂] [Cas] [HarP]). En fait, ces courants géodésiques peuvent être définis dans n'importe quelle variété à courbure négative, et nous ne nous sommes restreints aux surfaces que pour des raisons d'efficacité dans l'exposition. En particulier, cette notion fournit pour l'étude des variétés hyperboliques un cadre

qui est peut-être conceptuellement mieux adapté que le point de vue des réalisations de laminations par des surfaces plissées développées par Thurston, et pourrait d'autre part avoir d'autres applications dans divers domaines de la topologie. Nous développerons ces idées plus longuement dans [Bon] .

La plupart des résultats de cet article s'étendent aux variétés riemanniennes complètes de dimension 3 à courbure négative pincée, c'est-à-dire dont la courbure sectionnelle est comprise entre deux constantes a et b avec $-\infty < a \leq b < 0$, du moins en l'absence de cusps. Essentiellement, il suffit de remplacer les triangles totalement géodésiques utilisés pour construire des applications "hyperboliquement simpliciales" par des triangles réglés, dont la courbure extrinsèque est encore ≤ 0 . Cette extension est alors à peu près automatique.

Enfin, on peut se demander à quel point l'hypothèse (*) est nécessaire dans l'analyse des variétés hyperboliques de dimension 3. Pour le moment, la réponse semble assez simple : On ne sait pratiquement rien des variétés géométriquement infinies ne satisfaisant pas cette condition, et la situation est analogue pour la conjecture d'Ahlfors. Toute la théorie développée par Thurston s'effondre en effet complètement dans ce cas-là, et il faudra peut-être mettre au point de nouvelles techniques pour avancer dans cette direction.

Après quelques définitions et discussions préliminaires, le lecteur trouvera au § 1.7 un plan de la démonstration du théorème A, indiquant comment s'articule le reste de l'article. Il constatera bien vite que les cusps de la variété viennent systématiquement rajouter des complications techniques qui, sans être essentielles, brouillent toutefois un peu l'exposition. On pourrait peut-être suggérer de complètement négliger ceux-ci dans une première lecture, en se limitant d'abord au cas des variétés sans cusps.

Cet article n'aurait jamais vu le jour sans la contribution amicale de Jean-Pierre Otal. C'est en effet à la suite du travail que nous avons mené en commun pour percer les mystères des derniers chapitres de [Thu₂] que sont nées les premières idées de ce travail. Il en a également suivi la progression, et subi avec patience les premiers tâtonnements. Je tiens à lui exprimer ici mes plus vifs remerciements. Je dois également remercier Peter Shalen, dont les critiques pertinentes m'ont été fort utiles lors de la rédaction du manuscrit, et B.N. Apanasov qui m'a signalé quelques incorrections figurant dans la première version de ce texte.

P L A N

I. TYPES GEOMETRIQUES DES BOUTS DE VARIETES HYPERBOLIQUES.	82
1.1. Quelques rappels sur les variétés hyperboliques.	82
1.2. Le coeur compact d'une variété de dimension 3 .	86
1.3. Types de bouts.	91
1.4. Le lemme du diamètre borné.	94
1.5. Enveloppe convexe. Démonstration du corollaire B.	101
1.6. La conjecture d'Ahlfors.	107
1.7. Plan de la démonstration du théorème A.	111
II. GEODESIQUES ALLANT A L'INFINI.	113
2.1. Courbes avec un nombre borné de coins.	113
2.2. Géodésiques tendant vers un bout.	116
III. LE LEMME DU NOMBRE D'INTERSECTION.	122
3.1. Nombre d'intersection géométrique.	122
3.2. Le lemme du nombre d'intersection.	125
IV. COURANTS GEODESIQUES SUR LES SURFACES.	130
4.1. Définitions.	130
4.2. Nombres d'intersection et longueurs des courants géodésiques.	139
4.3. Laminations géodésiques mesurées.	144
V. RETRECISSEMENT DES LAMINATIONS MESUREES.	147
5.1. Réseaux ferroviaires.	149
5.2. Rétrécissement par courbure.	155
5.3. Rétrécissement par raccourcis.	157
5.4. Preuve de la proposition 5.1.	162
5.5. Cas des courbes paraboliques.	170
VI. PREUVE DU THEOREME PRINCIPAL.	176
6.1. Mise en place.	176
6.2. Les β_k^* restent loin des cusps.	180
6.3. Les β_k^* tendent vers un bout de $M_0(\mu)$.	184
6.4. Les β_k^* tendent vers le bon bout.	186
6.5. La lamination terminale d'un bout simplement dégénéré.	191

I. TYPES GEOMETRIQUES DES BOUTS DE VARIETES HYPERBOLIQUES

§ 1.1. Quelques rappels sur les variétés hyperboliques.

Dans tout cet article, une variété hyperbolique sera une variété connexe munie d'une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle constante égale à -1 . L'archétype des variétés hyperboliques est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ que l'on peut décrire comme l'intérieur de la boule standard de rayon 1 dans $\mathbb{R}^m$, munie de la métrique riemannienne qui est $2(1-\rho^2)^{-1}$ fois la métrique euclidienne usuelle en un point à distance ρ de l'origine. Un autre modèle pour $\mathbb{H}^m$, isométrique au précédent, est donné par le demi-espace supérieur formé des points de $\mathbb{R}^m$ à dernière coordonnée strictement positive, muni de la métrique qui est x_m fois la métrique euclidienne au point $(x_1, \dots, x_m)$ (voir [Bea] [Ber₃] [Thu₂] [Thu₃]).

Par un théorème classique de géométrie différentielle (voir [CheE], [Wol]), l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ est la seule variété hyperbolique simplement connexe de dimension m , et toute variété hyperbolique est donc isométrique au quotient de $\mathbb{H}^m$ par un groupe d'isométries agissant librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^m$.

On pourra trouver une bonne introduction aux variétés hyperboliques dans les premiers chapitres de [Thu₂] ou [Thu₃]. On peut également recommander le chapitre 7 de [Bea], qui constitue une mine inépuisable de formules de trigonométrie hyperbolique plane bien commodes.

Dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$, identifié à la boule ouverte de rayon 1 de $\mathbb{R}^m$ munie de la métrique indiquée plus haut, les géodésiques sont les traces dans $\mathbb{H}^m$ des cercles de $\mathbb{R}^m$ coupant orthogonalement la sphère unité S_∞^{m-1} . Cette sphère à l'infini S_∞^{m-1} peut être décrite intrinsèquement à partir de $\mathbb{H}^m$ comme la compactification naturelle de $\mathbb{H}^m$ par les bouts des rayons géodésiques issus d'un point base quelconque (voir [EbON], dans un cadre plus général). En particulier, toute isométrie de $\mathbb{H}^m$ s'étend en un homéomorphisme de la boule $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$.

A partir de là, on vérifie sans peine que les isométries de $\mathbb{H}^m$ se répartissent en trois catégories disjointes :

- (i) les isométries elliptiques, qui ont au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^m$;
- (ii) les isométries paraboliques, qui ont un unique point fixe dans la boule $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$, situé sur S_∞^{m-1} ;
- (iii) les isométries loxodromiques, dont les seuls points fixes dans $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$ sont deux points distincts de S_∞^{m-1} , et qui laissent donc invariante l'unique géodésique passant par ces deux points.

L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ est très homogène, en ce sens qu'il a beaucoup d'isométries : Etant donnés deux points x et $y \in \mathbb{H}^m$, toute isométrie entre les espaces linéaires tangents $T_x(\mathbb{H}^m)$ et $T_y(\mathbb{H}^m)$ est tangente à une (unique) isométrie de $\mathbb{H}^m$ envoyant x sur y . Le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^m$ est en fait le groupe de Moebius de la sphère S_∞^{m-1} , engendré par les inversions de $\mathbb{R}^m \cup \infty$ par rapport aux $(m-1)$ -sphères orthogonales à S_∞^{m-1} .

Pour une variété hyperbolique M de dimension m , identifions son revêtement universel à $\mathbb{H}^m$ et interprétons $\pi_1(M)$ comme le groupe des automorphismes (isométriques) de ce revêtement. Alors tout élément non trivial de $\pi_1(M)$ est, ou bien loxodromique, ou bien parabolique. On remarquera que le caractère parabolique ou loxodromique de $\gamma \in \pi_1(M)$ ne dépend que de sa classe de conjugaison dans $\pi_1(M)$.

En particulier, toute courbe fermée γ dans M qui représente un élément loxodromique de $\pi_1(M)$ est librement homotope à une unique géodésique fermée de M . Selon une notation que l'on utilisera intensivement tout au long de l'article, cette géodésique sera désignée par γ^* .

De même, remarquons que deux points de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ peuvent être joints par un unique arc géodésique. Par conséquent, dans une variété hyperbolique, un chemin k est homotope à extrémités fixes à un unique arc géodésique k^* de mêmes extrémités.

On dit qu'un sous-groupe de $\pi_1(M)$ est parabolique si tous ses éléments non-triviaux sont paraboliques et fixent le même point de S_∞^{m-1} . De même, un sous-groupe est loxodromique si tous ses éléments non-triviaux sont loxodromiques et respectent la même géodésique de $\mathbb{H}^m$. On a alors le théorème fondamental suivant, dû à Margoulis, dont on pourra trouver une démonstration dans [Thu₂, §5.10], et pour un cadre plus général dans [Gro₃] [BusK].

PROPOSITION 1.1. Etant donnée une variété hyperbolique M , il existe une constante μ ne dépendant que de la dimension de M avec la propriété suivante : Pour tout $x \in M$, le sous-groupe de $\pi_1(M;x)$ engendré par les lacets de longueur $\leq \mu$ est parabolique ou loxodromique (éventuellement trivial). $\square$

On dira qu'une constante μ satisfaisant les conclusions de la proposition 1.1 est une constante de Margoulis pour M .

Etant donnée une constante de Margoulis μ , on a alors une bonne décomposition de M en la partie fine $M_f(\mu)$ formée des points où le rayon d'injectivité est $\leq \mu$, et la partie épaisse $M_e(\mu)$ qui est l'adhérence du complémentaire de $M_f(\mu)$. En effet, en raison du théorème de Margoulis ci-dessus, les composantes de $M_f(\mu)$ sont de deux types simples, selon que le sous-groupe de $\pi_1(M)$ engendré par les lacets courts γ est loxodromique ou parabolique.

Un sous-groupe loxodromique Γ de $\pi_1(M)$ est nécessairement cyclique, ainsi qu'on le voit par restriction à la géodésique g de $\mathbb{H}^m$ qu'il respecte. D'autre part, pour tout $\gamma \in \Gamma$, la distance de translation $d(x, \gamma x)$ définit une fonction propre et strictement croissante sur tout rayon géodésique issu orthogonalement de la géodésique g . On en déduit que chaque composante de $M_f(\mu)$ où les lacets courts sont loxodromiques est un voisinage tubulaire compact d'une géodésique fermée de M de longueur $\leq \mu$. Les composantes de $M_f(\mu)$ de ce type seront désignées sous le nom de tubes de Margoulis.

Un sous-groupe parabolique Γ de $\pi_1(M)$ fixant le point c sur la sphère à l'infini S_∞^{m-1} respecte le feuilletage de $\mathbb{H}^m$ défini par le champ (intégrable) des hyperplans orthogonaux aux géodésiques passant par c . Les feuilles de ce feuilletage sont les horisphères centrées en c , qui dans le modèle de la boule unité pour $\mathbb{H}^m$ sont les traces des sphères tangentes en c à S_∞^{m-1} . La métrique induite sur une telle horisphère se trouve être plate (euclidienne), et Γ s'identifie donc à un groupe cristallographique de dimension $m-1$. D'autre part, si $\gamma \in \Gamma$, la distance de translation $d(x, \gamma x)$ définit une fonction propre strictement monotone de chaque géodésique de $\mathbb{H}^m$ passant par c sur $]0, \infty[$. On en déduit que chaque composante de $M_f(\mu)$ où les lacets courts sont paraboliques est homéomorphe à $(H/\Gamma) \times [\mu, \infty[$, où la variété cristallographique H/Γ est le quotient d'une horisphère H centrée en un certain $c \in S_\infty^{m-1}$ par le stabilisateur parabolique Γ de c dans $\pi_1(M)$. Les composantes de $M_f(\mu)$ de ce type sont dites paraboliques, ou cuspidales.

Sur S_∞^{m-1} , on peut considérer les points c qui sont fixés par au moins un élément parabolique de $\pi_1(M)$. Les classes d'équivalence de ces points par l'action de $\pi_1(M)$ sont appelés les cusps de M (tant pis pour l'anglicisme !). Par l'analyse précédente sur les composantes cuspidales de $M_f(\mu)$, on a une topologie naturelle sur l'union disjointe de M et de ses cusps, en prenant pour base de voisinages d'un cusp les composantes cuspidales de $M_f(\mu')$, avec $\mu' < \mu$, correspondant à ce même cusp. Toute cette terminologie vient bien sûr de la théorie des surfaces de Riemann, via le théorème d'uniformisation.

L'ensemble des éléments $\gamma \in \pi_1(M)$ qui réalisent le minimum de la distance de translation $d(x, \gamma x)$ en $x \in \mathbb{H}^m$ est fini, mais n'est en général pas localement constant sur la préimage de $\partial M_f(\mu)$. Il s'ensuit que $\partial M_f(\mu)$ est une sous-variété à coins.

La situation est toutefois un peu plus simple quand M est orientable et de dimension 3, ou de dimension 2 sans conditions d'orientabilité. En effet, si $\gamma \in \pi_1(M)$ est loxodromique, la distance de translation $d(x, \gamma x)$ ne dépend alors que de la distance de x à la géodésique invariante par γ ; chaque tube de Margoulis est donc le quotient d'un "croissant" ou "fuseau" de $\mathbb{H}^3$, formé des points dont la distance à une certaine géodésique est inférieure ou égale à une certaine constante, par un sous-groupe loxodromique de $\pi_1(M)$ respectant cette géodésique. De même, si $\gamma \in \pi_1(M)$ est parabolique, fixant $c \in S_\infty^{m-1}$, $d(x, \gamma x)$ ne dépend que de l'horisphère centrée en c passant par x ; chaque composante cuspidale de $M_f(\mu)$ est ainsi le quotient d'une horiboule de $\mathbb{H}^3$, c'est-à-dire de l'"intérieur" d'une horisphère, par un certain sous-groupe parabolique.

A titre d'illustration de ce qui peut se passer en dimension 3 dans le cas non-orientable, considérons par exemple une composante cuspidale V de $M_f(\mu)$ dont le groupe fondamental $\Gamma \subset \pi_1$ est cyclique et engendré par un élément γ renversant l'orientation. Dans le modèle du demi-espace supérieur $\mathbb{R}^2 \times]0, \infty[$ pour $\mathbb{H}^3$, on peut faire en sorte que γ soit la translation-reflection $(u, v, t) \mapsto (u+1, -v, t)$. A l'aide d'un peu de trigonométrie élémentaire (voir [Bea, §7.2]), on calcule aisément que si $x = (u, v, t)$,

$$d(x, \gamma x) = 2 \operatorname{Arcsh} (\sqrt{1 + 4v^2/2t})$$

$$d(x, \gamma^2 x) = 2 \operatorname{Arcsh} (1/t) .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z} - 0$, $d(x, \gamma^n x)$ est minoré par l'un de ces deux nombres. Il s'ensuit que la composante V de $M_f(\mu)$ considérée est le quotient par Γ de

$$\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[; t \geq \inf \{ \sqrt{1 + 4v^2}, 2 \} / 2 \operatorname{sh}(\mu/2) \} .$$

Ainsi, ∂V est l'union du ruban de Moebius A_1 image de

$$\{(u, v, t) ; t = \sqrt{1 + 4v^2} / 2 \operatorname{sh}(\mu/2), |v| \leq \sqrt{3}/2 \} ,$$

et de l'anneau A_2 image de la portion d'horisphère

$$\{(u, v, t) ; t = 1/\operatorname{sh}(\mu/2), |v| \geq \sqrt{3}/2 \} ,$$

et ∂V présente un coin le long de $\partial A_1 = \partial A_2$.

On a une situation analogue pour les autres types de composantes non-orientables de $M_0(\mu)$. En dimensions supérieures, la géométrie des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ peut être nettement plus subtile, quand le sous-groupe parabolique correspondant ne possède pas de sous-groupe d'indice fini qui soit formé de translations (en tant que groupe cristallographique).

En dimension 3, on remarquera que le bord de la partie fine $M_f(\mu)$ est formé de tores, de bouteilles de Klein, d'anneaux et de ruban de Moebius. Ces deux dernières catégories proviennent exclusivement des composantes cuspidales, alors que les deux autres peuvent aussi bien correspondre aux tubes de Margoulis qu'aux composantes cuspidales.

On travaillera beaucoup avec la partie fine $M_f(\mu)$, mais on utilisera finalement assez peu la partie épaisse $M_e(\mu)$. On lui préférera de beaucoup la partie "non cuspidale" de M , qui est l'adhérence $M_0(\mu)$ du complémentaire dans M des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$. Une raison pour cela est que, contrairement à $M_f(\mu)$, la topologie de $M_0(\mu)$ est indépendante de la constante de Margoulis μ , ainsi qu'on le voit aisément par projection radiale le long des géodésiques passant par les cusps.

§ 1.2. Le coeur compact d'une variété de dimension 3.

Dans [Sco₂], P. Scott a montré que toute variété M de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini contient une sous-variété compacte M_c telle que l'injection $M_c \rightarrow M$ soit une équivalence d'homotopie. Quand M est

une variété hyperbolique, nous allons avoir besoin d'une version relative de ce résultat pour le complémentaire $M_0(\mu)$ de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$ (on pourra trouver des arguments analogues dans [KulS][Mes]). Si l'on suppose en outre que M satisfait la condition $(*)$, la preuve sera un peu plus facile et ne nécessitera guère que les idées plus simples de [Sco₁].

Fixons tout d'abord une convention concernant les sous-variétés des variétés à bord, valable pour tout l'article sauf mention explicite du contraire. En codimension ≥ 1 , une sous-variété P de dimension p d'une variété N de dimension $n > p$ sera telle que la paire (N, P) soit localement modelée sur $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^p)$, où $\mathbb{R}_+^q$ est formé des points de $\mathbb{R}^q$ à première coordonnée positive ou nulle ; en particulier, ∂P est toujours contenu dans ∂N . En codimension 0, on réclame simplement que la paire (N, P) soit localement modelée sur $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1})$, de sorte que la frontière topologique δP de P dans N soit une sous-variété de codimension 1 de N . (Remarquer que $\delta P = \overline{\partial P} - \partial N$ si P est topologiquement fermée.)

Une variété est de type fini si elle est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte.

LEMME 1.2. Soit N une variété acyclique de dimension 3, dont le bord est formé d'un nombre fini de surfaces de type fini et de caractéristique d'Euler nulle. On suppose en outre que $\pi_1(N)$ est de type fini et satisfait la condition suivante : Pour toute décomposition non-triviale de $\pi_1(N)$ en produit libre $A * B$, il existe une courbe dans ∂N dont la classe dans $\pi_1(N)$ n'est conjuguée à aucun élément de A ou de B ; de plus, $\pi_1(N)$ n'est pas cyclique.

Alors, N contient une sous-variété compacte N_c de codimension 0 telle que l'injection $(N_c, N_c \cap \partial N) \rightarrow (N, \partial N)$ soit une équivalence d'homotopie.

Démonstration. En utilisant le lemme de Dehn, on vérifie sans peine qu'on peut se restreindre au cas où l'application $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(N)$ n'est nulle pour aucune composante S de ∂N . De toute façon, nous n'utiliserons le lemme 1.2 que dans ce cas-là.

D'après [Sco₁], $\pi_1(N)$ est de présentation finie. Il existe donc un complexe cellulaire connexe fini K_1 de dimension 2, un sous-complexe L de K_1 , et une application continue $f_1 : (K_1, L) \rightarrow (N, \partial N)$ induisant des isomorphismes $\pi_1(K_1; x) \cong \pi_1(N; f_1(x))$, $\pi_1(L; y) \cong \pi_1(\partial N; f_1(y))$ et $\pi_1(K_1, L; z) \cong \pi_1(N, \partial N; f_1(z))$

pour tout choix de points bases x, y et z . Soit N_1 une sous-variété compacte de codimension 0 de N contenant $f_1(K_1)$. Dans un premier temps, on va faire en sorte que la frontière δN_1 soit incompressible, c'est-à-dire que l'application $\pi_1(\delta N_1) \rightarrow \pi_1(N)$ soit injective pour tout point base.

Supposons donc que $\pi_1(\delta N_1) \rightarrow \pi_1(N)$ soit non injective pour un certain point base. Par le lemme de Dehn, il existe alors un disque D plongé dans N_1 ou $\overline{N-N_1}$ tel que la courbe ∂D soit homotopiquement non triviale dans δN_1 .

Si D est contenu dans N_1 , bougeons un peu $f_1 : K_1 \rightarrow N$ de sorte que son intersection avec D soit transverse, c'est-à-dire transverse sur chaque cellule de K_1 . On choisit un voisinage tubulaire de D paramétré par $D \times [-1, +1]$ de sorte que f_1 soit transverse à chaque tranche $D \times t$. Soit alors K_1' obtenu à partir de K_1 en effondrant sur un point chaque composante de $f_1^{-1}(D \times t)$, pour tout t . On déduit de f_1 une application $f_1' : (K_1', L) \rightarrow (N, \partial N)$ ayant les mêmes propriétés homotopiques que f_1 , mais telle que $(f_1')^{-1}(D \times [0, 1])$ est formée d'un nombre fini d'arcs isolés de K_1' . Chacun de ces arcs donne lieu à une décomposition de $\pi_1(K_1') \cong \pi_1(N)$ en produit libre, de sorte que le π_1 de chaque composante de L ou ∂N soit contenu dans l'un des facteurs ; par hypothèse, une telle décomposition est nécessairement triviale. Par conséquent, si K_2 est défini en retirant de K_1' l'intérieur de ces arcs ainsi que les composantes restantes qui sont simplement connexes, K_2 est connexe et la restriction $f_2 : (K_2, L) \rightarrow (N, \partial N)$ de f_1' induit comme celle-ci des isomorphismes $\pi_1(K_2) \cong \pi_1(N)$ et $\pi_1(K_2, L) \cong \pi_1(N, \partial N)$ pour tout choix de point base. De plus, son image est contenue dans $N_1 - D$. Soit N_2 la sous-variété de N obtenue en retirant de N_1 un voisinage tubulaire de D (et en arrondissant les coins), suffisamment petit pour que $f_2(K_2)$ soit contenu dans N_2 .

Si le disque D n'est pas contenu dans N_1 , la modification est plus simple puisque l'on prend pour N_2 l'union de N_1 et d'un voisinage tubulaire de D , convenablement arrondie aux coins, tandis que $K_2 = K_1$ et $f_2 = f_1$.

Si δN_2 est compressible, on itère le procédé, et on construit ainsi une famille d'applications $f_p : (K_p, L) \rightarrow (N, \partial N)$ et de sous-variétés N_p telles que $f_p(K_p) \subset N_p$. Comme, à chaque étape, la surface δN_{p+1} est "plus petite" que δN_p (en fonction du genre des composantes de ces surfaces) un argument standard affirme que cette construction doit s'arrêter au bout d'un moment, et par conséquent que l'on aboutit à un N_p de frontière incompressible. Quitte à en supprimer les composantes superflues ne contenant pas $f_p(K_p)$, on peut

supposer N_p connexe.

A ce point-ci, on utilise l'hypothèse que le bord ∂N est formé de tores, bouteilles de Klein, anneaux et rubans de Moebius pour raccourcir un peu la preuve ; on comparera cet argument avec celui du lemme 2.6 de [Wal₁]. Soit S une composante de δN_p telle que $\pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(N_p, N_p \cap \partial N)$ ait un noyau non trivial. Utilisant l'allure de ∂N , on peut composer un chemin de S représentant un élément de ce noyau avec les deux composantes de ∂S qu'il rencontre pour obtenir un lacet de S homotope à 0 dans N , et donc dans S . On en déduit que S est un anneau ou un ruban de Moebius. De plus, en utilisant $\pi_2(N) = 0$, on peut homotoper S dans ∂N en fixant ∂S . La composante N_S de $N - S$ sur laquelle cette homotopie est de degré impair a un groupe fondamental engendré par $\pi_1(S)$. Cette composante N_S ne peut contenir $f_p(K_p)$ que dans le cas où $\pi_1(S) \cong \pi_1(N)$, auquel cas le lemme est immédiat. Excluant ce cas, on peut alors remplacer N_p par $N_p \cup N_S$ de façon à diminuer le nombre de composantes de δN_p sans rien changer aux propriétés précédentes de N_p .

On procède de même pour une composante S de δN_p pour laquelle $\pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(\overline{N - N_p}, \overline{\partial N - N_p})$ n'est pas injectif.

En itérant le procédé, on aboutit ainsi au cas où $\pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(N, \partial N)$ est injectif pour toute composante S de δN_p et tout point base. Comme $f_p(K_p)$ est contenu dans N_p , on en déduit que les applications $\pi_1(N_p) \rightarrow \pi_1(N)$ et $\pi_1(N_p, N_p \cap \partial N) \rightarrow \pi_1(N, \partial N)$ sont des isomorphismes pour tout choix de point base.

Quitte à rajouter à N_p des composantes de son complémentaire, on peut supposer qu'aucune composante de δN_p n'est une sphère, ni un disque de bord homotope à 0 dans ∂N (car $\pi_2(N) = 0$). Alors $\pi_2(N_p) = \pi_2(N) = 0$ et $\pi_1(N_p \cap \partial N) \cong \pi_1(\partial N)$ pour tout point base.

A ce moment-là, $(N_p, N_p \cap \partial N)$ a bien le type d'homotopie de $(N, \partial N)$. $\square$

Etant donné une variété hyperbolique M de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition (*) de l'introduction, on veut appliquer le lemme 1.2 au complémentaire $M_0(\mu)$ de l'intérieur des composantes cuspidales de sa partie fine. Mais, pour cela, il faut savoir que ∂M_0 n'a qu'un nombre fini de composantes. Une preuve de ce fait est donnée par D. Sullivan dans [Sul₃]; en voici une autre basée sur le lemme 1.2.

LEMME 1.3. Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini. Alors, M possède seulement un nombre fini de cusps.

Démonstration. Soient p composantes cuspidales distinctes $V_1, \dots, V_p$ de la partie fine. Parmi toutes les décompositions de $\pi_1(M)$ en produit libre $A_1 * \dots * A_n$ telles que chaque $\pi_1(V_i)$ puisse être conjugué dans un (seul) des A_j , choisissons-en une maximale. Pour tout i , on considère alors la variété à bord $M^{(i)}$ obtenue en prenant le revêtement de M dont le groupe fondamental est A_i , et en lui retirant les intérieurs des relevés des V_j tels que $\pi_1(V_j)$ soit contenu dans A_i (après conjugaison).

Considérons un A_i non cyclique. On peut appliquer le lemme 1.2 à $M^{(i)}$, par maximalité de la décomposition en produit libre de $\pi_1(M)$, ce qui fournit une sous-variété compacte $M_C^{(i)}$ de $M^{(i)}$ telle que $(M_C^{(i)}, M_C^{(i)} \cap \partial M^{(i)})$ ait le type d'homotopie de $(M^{(i)}, \partial M^{(i)})$. Le nombre de composantes de $\partial M_C^{(i)}$ est limité par le rang de $H_2(M_C^{(i)})$ et sa caractéristique d'Euler $\chi(\partial M_C^{(i)})$ est égale à $2\chi(M_C^{(i)})$. Comme les V_j avec $\pi_1(V_j)$ conjugué dans A_i correspondent à des composantes entières de $\partial M_C^{(i)}$ ou à des anneaux et rubans de Moebius deux à deux non parallèles dans $\partial M_C^{(i)}$, il s'ensuit que leur nombre est majoré par une constante qui ne dépend que du type d'homotopie de $M_C^{(i)}$, et par conséquent que du groupe A_i .

Si A_i est cyclique, remarquer qu'au plus un $\pi_1(V_j)$ peut être conjugué dedans.

La démonstration du lemme 1.3 est alors achevée par les deux remarques suivantes qui découlent de l'unicité des factorisations en produit libre : D'une part, toute décomposition de $\pi_1(M)$ en produit libre a un nombre borné de facteurs ; d'autre part, il y a un nombre fini de groupes A_i qui peuvent apparaître comme facteurs libres de $\pi_1(M)$. Il s'ensuit que le nombre p des composantes cuspidales considérées est borné par une constante dépendant uniquement de $\pi_1(M)$. $\square$

En combinant les lemmes 1.2 et 1.3, on obtient ainsi :

PROPOSITION 1.4. Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition (*) de l'introduction. Si $M_0(\mu)$ est obtenue en retirant de M l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$, alors $M_0(\mu)$ contient une sous-variété compacte $M_C(\mu)$ de codimension 0 telle que l'injection $(M_C, M_C \cap \partial M_0) \rightarrow (M_0, \partial M_0)$ est une équivalence d'homotopie (en omettant le μ pour simplifier l'écriture). $\square$

La sous-variété compacte $M_c(\mu)$ de $M_0(\mu)$ fournie par la proposition 1.4 sera appelée le coeur compact de $M_0(\mu)$. On pourrait montrer en utilisant [Wal₂] que $M_c(\mu)$ est unique à isotopie de $M_0(\mu)$ près, mais nous n'en aurons pas besoin de ce résultat.

Par contre, la remarque suivante joue un rôle crucial. C'est en effet essentiellement celle-ci qui justifie la nécessité de la condition (*) (voir §1.4).

LEMME 1.5. Sous les hypothèses de la proposition 1.4, la frontière $\delta M_c(\mu)$ du coeur compact de $M_0(\mu)$ est incompressible (c'est-à-dire $\pi_1(\delta M_c) \rightarrow \pi_1(M_0)$ est injective pour tout point base).

Démonstration. La propriété est certes vérifiée si $M_c(\mu)$ est la sous-variété construite lors de la preuve du lemme 1.2. Montrons quand même ceci dans le cas général, puisque la preuve en est courte.

Comme l'application $\pi_1(M_c) \rightarrow \pi_1(M)$ est un isomorphisme, δM_c ne peut être compressible que si $\pi_1(\delta M_c) \rightarrow \pi_1(M_c)$ a un noyau non trivial pour un certain point base. Mais alors, le lemme de Dehn fait apparaître dans $M_c(\mu)$ une anse d'indice 2, qui fournit une décomposition non triviale de $\pi_1(M_c) \cong \pi_1(M)$ en produit libre telle que chaque élément parabolique puisse être conjugué dans l'un des facteurs, ou un isomorphisme $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, contredisant la condition (*).

□

§ 1.3. Types de bouts.

Il peut tout d'abord être utile de rappeler la définition des bouts d'un espace topologique X , au sens de Freudenthal (voir [Fre] [Sie] [Eps]): Considérons la famille des ouverts connexes de X dont la frontière est compacte, mais qui ne sont pas relativement compacts. Si l'on munit cette famille des flèches d'inclusion, un bout de X est un élément de la limite projective de cette famille. Autrement dit, un bout b est défini comme une famille d'ouverts connexes $(U_i)_{i \in I}$ avec les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout i , U_i est de frontière compacte mais n'est pas relativement compact.
- 2) Pour tous i et j , il existe k tel que U_k soit contenu dans $U_i \cap U_j$.
- 3) La famille $(U_i)_{i \in I}$ est maximale pour les propriétés 1) et 2).

On peut munir l'union de X et de l'ensemble de ses bouts d'une topologie en prenant pour base de voisinage d'un bout $b = (U_i)_{i \in I}$ la famille des ouverts $U_i \cup \{b\}$. Si X est localement compact et dénombrable à l'infini, l'espace topologique ainsi défini est la compactification de Freudenthal de X .

Par abus de langage, on dira qu'une partie Y de X contient le bout $b = (U_i)_{i \in I}$ si $Y \cup \{b\}$ est un voisinage de b , autrement dit si Y contient au moins l'un des U_i .

PROPOSITION 1.6. Avec les hypothèses et notations de la proposition 1.4, l'adhérence de chaque composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contient exactement un bout b de $M_0(\mu)$ et une composante S_b de $\delta M_c(\mu)$. Il y a donc correspondance biunivoque entre les bouts de $M_0(\mu)$ et les composantes de la frontière $\delta M_c(\mu)$ de son coeur compact.

Démonstration. Pour ne pas alourdir les notations, on abrégiera $M_0(\mu)$ en M_0 , $M_c(\mu)$ en M_c , etc....

Soit N l'adhérence d'une composante connexe de $M_0 - M_c$. Elle ne peut être compacte : Sinon la classe de δN serait nulle dans $H_2(M_0, \partial M_0)$, et donc dans $H_2(M_c, M_c \cap \partial M_0)$ par définition de M_c ; alors M_0 serait nécessairement compacte et $M_0 = M_c$ par un argument de caractéristique d'Euler, ce qui rend le problème vide. Par conséquent, N contient au moins un bout b .

Si N contient un autre bout $b' \neq b$, ces deux bouts b et b' admettent deux voisinages U et U' disjoints et contenus dans l'intérieur de N . Quitte à restreindre U et U' par des techniques standards, on peut supposer que ce sont des sous-variétés de codimension 0 de M_0 . Alors, la surface δU n'est homologue relativement à ∂M_0 (modulo 2) à aucune combinaison linéaire de composantes de δN , et par conséquent à aucun cycle de $(M_c, M_c \cap \partial M_0)$, ce qui contredit la définition de M_c . Par conséquent, N contient un seul bout b de M .

D'autre part, N contient par définition au moins une composante S_b de δM_c . S'il en contenait une autre, on construirait aisément un lacet γ dans M_0 de nombre d'intersection 1 avec S_b ; un tel lacet ne pourrait évidemment être homologue à un cycle de M_c , ce qui contredirait encore la définition de M_c . Donc N contient exactement une composante de δM_c . $\square$

Nous allons maintenant définir deux types géométriques particuliers de bouts de $M_0(\mu)$.

La première définition est assez générale, et ne dépend en fait ni de la condition (*) ni de la dimension de la variété hyperbolique : Un bout b de $M_0(\mu)$ est dit géométriquement fini s'il admet un voisinage ne rencontrant aucune géodésique fermée de M . Si le lecteur sait déjà ce qu'est l'enveloppe convexe de M , on peut indiquer qu'on montrera au § 5.1 que ceci est équivalent à dire que cette enveloppe convexe ne s'approche pas de b . La terminologie est justifiée par la propriété suivante : La variété M est géométriquement finie, dans le sens défini dans l'introduction, si et seulement si tous les bouts de $M_0(\mu)$ sont géométriquement finis dans le sens ci-dessus. Ce fait est dû essentiellement à A. Marden [Mar] sous une forme légèrement différente, et à W. Thurston sous cette forme [Thu₂]; on pourra également consulter [BeaM] et [Apa₁] [Apa₂] pour des généralisations en dimensions supérieures.

Un bout géométriquement infini est bien sûr un bout qui n'est pas géométriquement fini.

Si cette première définition était très générale, la suivante est au contraire spécifique à la dimension 3 et à la condition (*). Par la proposition 1.6, une composante S_b de la frontière δM_c du coeur compact de $M_0(\mu)$ est naturellement associée à chaque bout b de $M_0(\mu)$. Le bout b est dit simplement dégénéré si, pour tout voisinage U de b , il existe une courbe fermée simple (= sans points doubles) γ sur S_b qui soit homotope dans M à une géodésique fermée γ^* contenue dans U .

Pour un bout de $M_0(\mu)$, être simplement dégénéré est donc une façon très restrictive d'être géométriquement infini. En effet, par définition, le bout b est géométriquement infini si et seulement si, pour tout voisinage U de b , il existe une géodésique fermée γ^* qui rencontre U . Nous démontrerons à la section II que, dans un cadre général, on peut remplacer la condition " γ^* rencontre U " par " γ^* est contenue dans U et est homotope à une courbe γ (pas forcément simple) dans S_b ". Toute la subtilité de la définition des bouts simplement dégénérés réside donc dans la restriction à des courbes simples sur la surface S_b . On verra au paragraphe suivant comment intervient cette restriction a priori surprenante.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de cet article. Thurston a défini les variétés géométriquement sages comme les

variétés M dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$, et telles que tout bout de $M_0(\mu)$ est, ou bien géométriquement fini, ou bien simplement dégénéré. On peut donc paraphraser le théorème A en :

THEOREME 1.7. Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$ de l'introduction. Si $M_0(\mu)$ est le complémentaire de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$ de M , alors tout bout géométriquement infini de $M_0(\mu)$ est simplement dégénéré.

§ 1.4. Le lemme du diamètre borné.

C'est de ce lemme du diamètre borné que découlent les propriétés majeures des bouts simplement dégénérés, et c'est en fait lui qui justifie leur introduction. On pourra trouver ce lemme caché dans la preuve de la proposition 8.8.5 de [Thu₂].

Précisons tout d'abord de quel type de diamètre il s'agit : Sur une variété hyperbolique M , définissons la distance modulo la partie fine $M_f(\mu)$ entre deux points x et y comme le minimum de la longueur de $k - M_f(\mu)$ pour tout arc k joignant x à y ; cette semi-distance est notée $d_\mu(x, y)$. Le diamètre modulo la partie fine $M_f(\mu)$ d'un sous-ensemble X de M est bien sûr le maximum de $d_\mu(x, y)$ pour x et $y \in X$.

Le lemme du diamètre borné est l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1.8. Soit $\varphi : S \rightarrow M$ une application d'une surface compacte connexe S dans une variété hyperbolique M , telle que l'application $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induite soit injective et envoie chaque composante de ∂S sur un élément parabolique de $\pi_1(M)$. Soit également γ une courbe simple dans S , telle que $\varphi(\gamma)$ soit homotope à une géodésique fermée γ^* de M .

Alors, φ est homotope à $\varphi^l : S \rightarrow M$ telle que $\varphi^l(\gamma) = \gamma^*$, que $\varphi^l(\partial S) \subset M_f(\mu)$ et que l'image $\varphi^l(S)$ ait un diamètre modulo $M_f(\mu)$ borné par une constante ne dépendant que de μ et du type topologique de S .

En particulier, on a ce qui est la propriété a priori la plus surprenante des courbes simples sur une surface :

COROLLAIRE 1.9. Sous les hypothèses de la proposition 1.8, la géodésique γ^* a un diamètre modulo $M_f(\mu)$ borné par une constante ne dépendant que de μ et du type topologique de S . $\square$

Démonstration de la proposition 1.8. Celle-ci est basée sur une forme simplifiée des "surfaces plissées" introduites dans [Thu₂].

Pour des raisons techniques qui apparaîtront très bientôt, on peut supposer sans perte de généralité que γ n'est pas le bord d'un ruban de Moebius contenu dans S , quitte à remplacer γ par l'âme de ce ruban.

Pour démontrer la proposition 1.8, on commence par augmenter S en $\hat{S}$, obtenue en recollant un collier semi-ouvert $\cong S^1 \times [0, \infty[$ le long de chaque composante de ∂S . On étend arbitrairement φ à $\hat{S}$.

Puis, on "triangle" la surface $\hat{S}$ de la manière suivante : Choisissons un point base s sur γ et considérons $\hat{S}$ comme le complémentaire d'un nombre fini de points dans une surface fermée $\hat{S}'$. On prend alors une décomposition de $\hat{S}'$ en triangles dont les sommets sont exactement s et les points de $\hat{S}' - \hat{S}$, dont γ est une arête particulière, et dont chaque arête a au moins une extrémité dans s . (Deux sommets ou deux côtés d'un même triangle peuvent bien sûr être confondus dans $\hat{S}'$, ce qui fait qu'il ne s'agit pas là d'une triangulation au sens habituel du terme.) On obtient ainsi une décomposition de $\hat{S}$ en triangles, auxquels manquent éventuellement un sommet quand celui-ci correspond à un point de $\hat{S}' - \hat{S}$. On remarquera que cette construction n'a été possible que parce que chaque composante de $S - \gamma$ est de caractéristique d'Euler < 0 , ce qui découle des diverses conditions imposées à γ .

Nous allons maintenant "raidir" φ de sorte que sa restriction à chacun de ces triangles soit une immersion totalement géodésique. On dira alors que φ est hyperboliquement simpliciale pour la triangulation de $\hat{S}$ choisie. Marquons cette étape par un énoncé.

LEMME 1.10. On peut homotoper $\varphi : \hat{S} \rightarrow M$ de sorte qu'elle soit hyperboliquement simpliciale pour la triangulation de $\hat{S}$ donnée.

Démonstration. On commence par homotoper φ de sorte qu'elle envoie γ sur γ^* . A chaque arête k de la triangulation de $\hat{S}$ est alors naturellement associé un arc géodésique k^* de M :

En effet, si k joint le point base s à lui-même, on prend pour k^* l'unique arc géodésique de M joignant $\varphi(s)$ à lui-même et homotope à $\varphi(k)$ à extrémités fines.

Si k joint s à un bout de $\hat{S}$, il faudra être un peu plus soigneux. Pour cela, remarquons que si l'on utilise k pour joindre s à un petit lacet autour de ce bout de $\hat{S}$, l'arc k spécifie un sous-groupe cyclique Γ_k de $\pi_1(\hat{S}; s)$, dont l'image par φ est un sous-groupe parabolique de $\pi_1(M; \varphi(s))$. Considérons alors le revêtement universel $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^m$ de M , pointé par un point base $\tilde{s}$ au-dessus de $\varphi(s)$ de façon à identifier $\pi_1(M; \varphi(s))$ avec le groupe des automorphismes du revêtement. Le sous-groupe parabolique $\varphi(\Gamma_k)$ spécifie un point sur la sphère à l'infini S_∞^{m-1} , et donc un arc géodésique joignant $\tilde{s}$ à ce point à l'infini. On prend alors pour k^* l'image de cet arc géodésique dans M , qui joint $\varphi(s)$ à un cusp de M .

Ayant fait ceci, on homotope φ de sorte que $\varphi|_k$ soit une immersion de k sur k^* pour toute arête k de la triangulation de $\hat{S}$.

Pour chaque triangle T de cette triangulation, $\varphi(\partial T)$ est formée de trois arcs géodésiques dans M , et se relève dans le relèvement universel $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^m$ en le bord d'un triangle totalement géodésique T^* (= contenu dans un plan hyperbolique), avec éventuellement un sommet sur la sphère à l'infini si T est non compact. Le seul point à vérifier ici est que, quand ce relevé contient deux arcs infinis, ceux-ci convergent vers le même point à l'infini ; mais ceci découle immédiatement de la définition des arcs k^* .

Par accident, il pourrait se produire que l'un de ces triangles totalement géodésiques T^* soit plat, c'est-à-dire que deux de ses côtés soient contenus dans le troisième. Remarquons toutefois, par un argument de caractéristique d'Euler, qu'aucune des arêtes k joignant s à lui-même ne peut avoir une image triviale dans $\pi_1(S; s)$ et donc dans $\pi_1(M; s)$, et que deux telles arêtes représentent des éléments distincts de $\pi_1(M; s)$. On en déduit aisément que T^* ne peut être plat que quand le triangle $T \subset S$ est compact, et sans aucun côté contenu dans γ . Alors, les trois sommets de T^* sont situés dans des composantes distinctes de la préimage de γ^* dans $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^m$. Il suffit alors d'homotoper φ en faisant glisser $\varphi(s)$ le long de γ^* , tout en conservant la propriété que φ envoie chaque arête k sur un arc géodésique de M , pour que le triangle T^* associé à $\varphi(\partial T)$ cesse d'être plat : Si l'on est vaillant, on peut vérifier cette assertion par un calcul soigneux, qui montre même que cette perturbation de φ peut être choisie arbitrairement petite ; mais il existe une solution paresseuse qui consiste à faire faire à $\varphi(s)$ un grand nombre

de tours autour de γ^* lors de l'homotopie, de sorte que les trois sommets de T^* tendent dans $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$ vers les extrémités (distinctes) des relevés de γ^* correspondants, et ne peuvent donc rester alignés.

Ainsi, on peut faire en sorte qu'aucun des triangles T^* ne soit plat. Pour chacun des triangles T de la triangulation de S , on peut alors homotoper $\varphi|_T$ fixant ∂T de sorte qu'elle se factorise par un difféomorphisme de T sur le triangle totalement géodésique T^* dans $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^m$ correspondant. On rend ainsi φ hyperboliquement simpliciale. $\square$

Maintenant que φ est hyperboliquement simpliciale, nous affirmons que son image $\varphi(\hat{S})$ a un diamètre modulo $M_f(\mu)$ uniformément borné.

Tout d'abord, remarquons que l'application φ est propre. En effet, chaque bout de $\hat{S}$ admet un voisinage difféomorphe à $S^1 \times [0, \infty[$ tel que φ envoie chaque rayon $x \times [0, \infty[$ sur un rayon géodésique convergeant vers un cusp. D'après l'allure des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$, la restriction de φ à chacun de ces voisinages est donc propre, et donc φ est propre.

La métrique de M induit par φ une métrique par chemins sur $\hat{S}$, la longueur d'un chemin dans $\hat{S}$ étant définie comme celle de son image par φ dans M , et donc une métrique sur $\hat{S}$ en définissant la distance de x et y comme le minimum des longueurs des chemins joignant x à y . Cette métrique est complète puisque φ est propre. D'autre part, puisque la restriction de φ à chaque triangle est une immersion totalement géodésique, cette métrique est en fait localement isométrique au plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ sur $\hat{S} - s$.

Au point s , $\hat{S}$ est localement isométrique à l'espace obtenu en recollant plusieurs secteurs angulaires de $\mathbb{H}^2$, correspondant aux coins des triangles adjacents à s . Pour être élémentaire, la remarque suivante n'en sera pas moins fondamentale.

LEMME 1.11. La somme des angles des secteurs angulaires de $\hat{S}$ autour de s est supérieure ou égale à 2π .

Démonstration. Comme γ est envoyé sur la géodésique γ^* , qui est lisse en $\varphi(s)$, la somme des angles sur chacune des deux moitiés délimitées par γ est au moins égale à π . $\square$

En particulier, $\hat{S}$ se comporte exactement comme une surface de courbure ≤ -1 . Pour donner un sens à cette assertion, considérons plus

généralement une surface S_1 munie d'une métrique du même type, localement isométrique à un espace obtenu en recollant plusieurs secteurs angulaires de $\mathbb{H}^2$. Ceci autorise S_1 à avoir un bord géodésique par morceaux. En un point $x \in S_1$, on définit l'angle de cône $c(x)$ comme la somme des angles des secteurs angulaires de $\mathbb{H}^2$ recollés pour obtenir un modèle local pour S_1 au voisinage de x . On a alors la formule de Gauss-Bonnet suivante :

LEMME 1.12. Si S_1 est compacte, ou plus généralement si elle est formée d'un nombre fini de triangles hyperboliques (avec éventuellement des sommets à l'infini),

$$2\pi \chi(S_1) - \sum_{x \in \partial S_1} (\pi - c(x)) = -\text{aire}(S_1) + \sum_{x \in \text{int}(S_1)} (2\pi - c(x)). \quad \square$$

En particulier, on peut utiliser cette formule pour définir la courbure de $\hat{S}$ comme une mesure sur $\hat{S}$, pour laquelle la masse d'une portion S_1 de $\hat{S}$ comme ci-dessus est égale à l'un des termes de l'égalité du lemme 1.12. Alors, comme $c(s) \geq 2\pi$, cette courbure est une mesure ≤ -1 , égale à la fonction -1 sur $\hat{S} - s$ et possédant un atome en s .

Dans $\hat{S}$ muni de cette métrique hyperbolique avec une singularité éventuelle en s , on considère la partie fine $\hat{S}_f(\mu)$, définie comme l'ensemble des points de $\hat{S}$ par où passe un lacet de longueur $\leq \mu$ non homotope à 0. Puisque l'application $\pi_1(\hat{S}) \rightarrow \pi_1(M)$ induite par φ est injective, l'image de $\hat{S}_f(\mu)$ par φ est contenue dans $M_f(\mu)$. La démonstration de la proposition 1.8 sera donc clairement achevée par celle du lemme suivant.

LEMME 1.13. Le diamètre modulo $\hat{S}_f(\mu)$ de $\hat{S}$ est borné par une constante ne dépendant que de μ et du type topologique de $\hat{S}$.

Démonstration. On pourrait utiliser pour ceci un argument de "bourrage par boules" (cf. [Che] [Gro₄] [Thu₂, §5.11]). Pour des raisons d'exposition, nous préférons cependant la démonstration suivante, car basée sur une technique qui sera régulièrement utilisée par la suite.

Soient x et y deux points de $\hat{S}$, et soit k un arc dans $\hat{S}$ joignant x à y et réalisant le minimum de la longueur pour de tels arcs. Clairement, k est plongé, passe donc par s au plus une fois, et $k - s$ est formé de 1 ou 2 arcs géodésiques pour la métrique hyperbolique de $S - s$; on remarquera que ceci permet d'affirmer l'existence d'un tel arc k de longueur minimale. Si k passe par s , notons que par minimalité de la longueur de k les angles de chacun des deux secteurs délimités par k sont tous deux $\geq \pi$.

Sélectionnons un côté de l'arc k . Pour tout point z dans $k - \hat{S}_f(\mu)$, traçons un arc géodésique λ_z de longueur $\mu/4$ issu de z orthogonalement à k du côté sélectionné. Ceci n'est certes pas défini quand l'arc λ_z vient buter sur s (en particulier si $z = s$), et on arrête alors l'arc λ_z en ce point s ; on verra en fait plus loin que ceci n'arrive que pour au plus un z .

Dans le revêtement universel de $\hat{S}$, aucune géodésique (évitant la préimage de s) ne peut avoir de point double, par la formule de Gauss-Bonnet (lemme 1.12). Si l'arc λ_z avait un point double, il fournirait donc un lacet homotopiquement non trivial passant par z et de longueur $\leq \mu/2$, contrairement à l'hypothèse que $z \notin \hat{S}_f(\mu)$. Les arcs λ_z sont donc plongés.

Les arcs λ_z sont deux à deux disjoints. En effet, supposons que λ_z et $\lambda_{z'}$ se rencontrent en t , avec $z \neq z'$, et considérons la courbe α formée :

- (i) du sous-arc de λ_z joignant z à t ,
- (ii) du sous-arc de $\lambda_{z'}$ joignant t à z' ,
- (iii) du sous-arc de k joignant z' à z .

Quitte à bien choisir z , z' et t , on peut supposer que α est simple.

Puisque k est de longueur minimale, les deux points z et z' sont à distance $\leq \mu/2$ sur k ; par conséquent, α est de longueur $\leq \mu$. Comme $z \notin \hat{S}_j(\mu)$, elle est donc homotope à 0, et borde un disque D dans $\hat{S}$. Ce disque D a un coin en t , deux coins d'angles $\pi/2$ ou $3\pi/2$ en z et z' , plus éventuellement un coin d'angle $\geq \pi$ en s . Ceci est incompatible avec la formule de Gauss-Bonnet, et montre donc bien que les λ_z sont deux à deux plongés.

En particulier, au plus un λ_z vient buter sur le point s .

Soit U le "tube" union de tous ces arcs λ_z . Puisque ceux-ci sont plongés et deux à deux disjoints, un calcul simple de géométrie hyperbolique plane (utilisant par exemple [Bea, §7.35]) montre que

$$\text{aire}(U) = \ell(k - \hat{S}_f(\mu)) \int_0^{\mu/4} \text{ch}(t) dt,$$

où $\ell(\cdot)$ désigne la longueur, et donc

$$\text{aire}(U) \geq (\mu/4) \ell(k - \hat{S}_f(\mu)).$$

D'autre part, le nombre $n(\hat{S})$ de triangles apparaissant dans la triangulation de $\hat{S}$ ne dépend que du type topologique de cette surface (il est précisément égal à $2\chi(\hat{S}) + 2$). Comme l'aire d'un triangle hyperbolique est majorée par π ,

$$\text{aire}(U) \leq \text{aire}(\hat{S}) \leq \pi n(\hat{S}).$$

(On peut également considérer la formule de Gauss-Bonnet.)

En combinant les deux inégalités, on obtient que

$$\ell(k - \hat{S}_f(\mu)) \leq 4\pi n(\hat{S})/\mu ,$$

ce qui démontre le lemme 1.13, et donc la proposition 1.8. $\square$

En fait, on peut légèrement raffiner le lemme 1.13 de la manière suivante :

Dans le cadre du lemme 1.13, soit $\hat{S}_0(\mu)$ l'adhérence du complémentaire dans $\hat{S}$ des "composantes cuspidales" de $\hat{S}_f(\mu)$, formées des points par où passe un lacet de longueur $\leq \mu$ homotope à un bout de $\hat{S}$.

LEMME 1.14. Dans $\hat{S}$, $\hat{S}_0(\mu)$ a un diamètre modulo $\hat{S}_f(\mu) \cap \hat{S}_0(\mu)$ borné par une constante ne dépendant que de μ et du type topologique de $\hat{S}$.

Démonstration. Soient x et $y \in \hat{S}_0(\mu)$. Nous venons de voir qu'on peut les joindre par un chemin k dans $\hat{S}$ tel que $k - \hat{S}_f(\mu)$ est de longueur majorée par une certaine constante c_1 .

Soit V une composante "cuspidale" de $\hat{S}_f(\mu)$. Quitte à raccourcir $k - \hat{S}_f(\mu)$, on peut supposer $V \cap k$ connexe. On considère alors deux lacets de longueur $\leq \mu$, homotopes au bout de $\hat{S}$ correspondant à V , passant respectivement par les deux points de $\partial V \cap k$. En utilisant ces deux lacets, on modifie aisément k de sorte que $V \cap k$ soit de longueur $\leq \mu$. (Il faut simplement distinguer deux cas, selon que les lacets sont disjoints ou non.)

Procédant ainsi pour toute composante cuspidale de $\hat{S}_f(\mu)$, on obtient à la fin que la partie de k située hors de $S_f(\mu) \cap S_0(\mu)$ est de longueur majorée par la somme de la constante c_1 et de μ fois le nombre de bouts de $\hat{S}$. $\square$

De même, une adaptation automatique de la preuve de la proposition 1.8 donne :

PROPOSITION 1.15. L'énoncé de la proposition 1.8 est encore vrai si l'on remplace la courbe simple γ par une famille γ de courbes simples disjointes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ deux à deux non parallèles, telles que chaque $f(\gamma_i)$ soit homotope à une géodésique fermée γ_i^* , et si γ^* désigne l'union des γ_i^* . $\square$

(Il peut être utile de remarquer que le nombre n de courbes simples est majoré en fonction du type topologique de S .)

§ 1.5. Enveloppe convexe. Démonstration du corollaire B.

Soit X un sous-ensemble de l'union $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m$ et de sa sphère à l'infini S_∞^{m-1} . Celui-ci est convexe si tout arc géodésique dont les deux extrémités sont dans X est entièrement contenu dans X . En général, on définit l'enveloppe convexe $C(X)$ de X comme le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$ contenant X .

On démontre aisément le lemme suivant dont l'analogie euclidien est bien connu (on pourra commencer par traiter par récurrence le cas où X est fini).

LEMME 1.16. Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$, son enveloppe convexe $C(X)$ est l'union des enveloppes convexes $C(Y)$ où Y décrit l'ensemble des parties de X formées de $(m+1)$ éléments. $\square$

Dans une variété hyperbolique M , un sous-ensemble $X \subset M$ est convexe s'il est connexe par arcs et si, pour tout chemin dans X , l'arc géodésique de M qui lui est homotope à extrémités fixes est entièrement contenu dans X . Ceci équivaut à dire que chaque composante de la préimage de X dans le revêtement universel $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^m$ de M est convexe dans le sens précédent.

On définit l'enveloppe convexe $C(M)$ de la variété hyperbolique M comme le plus petit des fermés convexes X de M tels que $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(M)$ soit surjective. On remarquera que cette dernière condition revient à dire que la préimage de X dans le revêtement universel de M est convexe, et l'existence et l'unicité d'un tel fermé minimal est donc immédiate.

Pour décrire plus précisément cette enveloppe convexe $C(M)$, on identifie M au quotient de $\mathbb{H}^m$ par un groupe d'isométries $\Gamma \cong \pi_1(M)$. On définit l'ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset S_\infty^{m-1}$ comme l'ensemble des points d'accumulation de n'importe quelle orbite de Γ dans $\mathbb{H}^m$ (on vérifie sans peine que Λ_Γ est indépendant de l'orbite choisie). L'ensemble Λ_Γ est bien sûr invariant par Γ , et il en est donc de même pour son enveloppe convexe $C(\Lambda_\Gamma) \subset \mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$. Celle-ci est par ailleurs compacte par compacité de Λ_Γ . (On pourra utiliser le lemme 1.16.) On en déduit immédiatement :

LEMME 1.17. L'enveloppe convexe $C(\Lambda_\Gamma)$ est le plus petit fermé convexe de $\mathbb{H}^m \cup S_\infty^{m-1}$ invariant par Γ . Par conséquent, $(C(\Lambda_\Gamma) - S_\infty^{m-1})/\Gamma$ est l'enveloppe convexe $C(M)$ de M . $\square$

LEMME 1.18. Il existe une constante $c(m)$, dépendant uniquement de la dimension m , avec la propriété suivante : Etant donné un sous-ensemble X de la sphère à l'infini S_{∞}^{m-1} , tout $x \in C(X) \cap \mathbb{H}^m$ est à distance $< c(m)$ d'une géodésique à extrémités dans X .

Démonstration. Par le lemme 1.16, on peut se limiter au cas où X est formé de $(m+1)$ points, et où $C(X)$ est ainsi un "simplex idéal". Or, un calcul simple fournit une constante universelle majorant le volume de tous les simplex idéaux de dimension m (voir [Thu₂, §6.3.1]). On en déduit que tout $x \in C(X) \cap \mathbb{H}^m$ est à distance uniformément bornée de la frontière de $C(X)$, et donc de $C(X')$ pour une partie X' formée de m éléments de X . Comme $C(X') \cap \mathbb{H}^m$ est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{H}^m$, isométrique à $\mathbb{H}^{m-1}$, on conclut par récurrence sur m . $\square$

LEMME 1.19. Dans une variété hyperbolique M de dimension m , tout point de l'enveloppe convexe $C(M)$ est à distance $< c(m)$ d'une géodésique fermée γ^* de M , où $c(m)$ est la constante du lemme 1.18.

Démonstration. Identifions M avec $\mathbb{H}^m/\Gamma$. Par le lemme 1.18, tout point de $C(\Lambda_{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^m$ est à distance $< c(m)$ d'une géodésique g dont les deux extrémités x_1 et x_2 sont dans Λ_{Γ} . Il suffit donc de montrer que l'on peut arbitrairement approcher g pour la topologie compacte ouverte par l'axe d'un élément loxodromique de Γ ou, ce qui est équivalent, arbitrairement approcher les extrémités x_1 et x_2 de g dans S_{∞}^{m-1} par les deux points fixes d'un élément loxodromique de Γ .

L'ensemble des points fixes d'éléments loxodromiques de Γ est dense dans Λ_{Γ} . En effet, l'enveloppe convexe de son adhérence contredirait sinon le lemme 1.17. Il existe donc deux éléments loxodromiques γ_1 et γ_2 de Γ dont les points fixes attractifs y_1^+ et y_2^+ sont respectivement proches de x_1 et x_2 . Soient y_1^- et y_2^- les points fixes répulsifs de γ_1 et γ_2 .

Si γ_1 et γ_2 ont un point fixe en commun, alors ils ont exactement les mêmes deux points fixes : Un moyen simple de voir cela est de remarquer que les images de l'axe de γ_2 par des γ_1^p convenables approchent l'axe de γ_1 uniformément sur tout compact de $\mathbb{H}^m$; et, par projection dans M , ceci n'est possible que si les axes de γ_1 et γ_2 sont confondus. Donc, dans ce cas,

l'élément loxodromique γ_1 a pour points fixes y_1 et y_2 qui approchent bien x_1 et x_2 comme requis.

Sinon, nous affirmons que pour $p, q \geq 0$ suffisamment grands, l'élément $\gamma_1^p \gamma_2^{-q}$ de Γ est loxodromique, avec son point fixe attractif arbitrairement proche de y_1^+ et son point fixe répulsif arbitrairement proche de y_2^+ . En effet, pour q assez grand, γ_2^{-q} envoie une petite boule voisinage de y_1^+ dans S_∞^{m-1} à l'intérieur d'un petit voisinage de y_2^- évitant y_1^- . Alors, pour p assez grand, $\gamma_1^p \gamma_2^{-q}$ envoie cette boule autour de y_1^+ à l'intérieur d'elle-même, et a donc un point fixe dans celle-ci. De même, pour p et q assez grands, $\gamma_2^q \gamma_1^{-p} = (\gamma_1^p \gamma_2^{-q})^{-1}$ a un point fixe dans une boule arbitrairement petite autour de y_2^+ .

Ceci termine la preuve du lemme 1.19, puisque les points fixes de $\gamma_1^p \gamma_2^{-q}$ sont proches de x_1 et x_2 . $\square$

Le lemme 1.19 démontre immédiatement :

PROPOSITION 1.20. Avec les définitions et notations du § 1.3, un bout b de $M_0(\mu)$ est géométriquement fini si et seulement si il admet un voisinage disjoint de l'enveloppe convexe $C(M)$. $\square$

Par convexité, tout point x de $\mathbb{H}^m$ a une unique projection $\pi(x)$ sur $C(\Lambda_\Gamma)$. De plus, la fonction qui à $x \in \mathbb{H}^m - C(\Lambda_\Gamma)$ associe la distance $d(x, \pi(x))$ est de classe C^1 et de différentielle non nulle. En effet, on vérifie sans peine que, pour y voisin de x fixé, $d(y, \pi(y))$ est comprise entre $d(y, \pi(x))$ et la distance de y à l'hyperplan géodésique passant par $\pi(x)$ et orthogonal à l'arc $x\pi(x)$, et ces deux fonctions ont la même différentielle en x .

En particulier, pour $\epsilon > 0$ donné, le bord $\partial C_\epsilon(\Lambda_\Gamma)$ de l'ensemble des points de $\mathbb{H}^m$ à distance $\leq \epsilon$ de $C(\Lambda_\Gamma)$ est une sous-variété de classe C^1 de $\mathbb{H}^m$. De plus, par chaque point de $\partial C_\epsilon(\Lambda_\Gamma)$, il passe exactement un des rayons de projection de $\mathbb{H}^m - C(\Lambda_\Gamma)$ sur $C(\Lambda_\Gamma)$, et ceci orthogonalement. On en déduit un homéomorphisme naturel entre $\mathbb{H}^m - \text{int}(C_\epsilon(\Lambda_\Gamma))$ et $\partial C_\epsilon(\Lambda_\Gamma) \times [\epsilon, \infty[$. Par passage au quotient, celui-ci fournit un homéomorphisme entre $M - \text{int}(C_\epsilon(M))$ et $\partial C_\epsilon(M) \times [\epsilon, \infty[$, où $C_\epsilon(M)$ est le ϵ -voisinage de l'enveloppe convexe $C(M)$.

De plus, chaque rayon de la projection de $\mathbb{H}^m - C_\epsilon(\Lambda_\Gamma)$ sur $\partial C_\epsilon(\Lambda_\Gamma)$ coupe la préimage de $M_f(\mu)$ en au plus un arc (les distances de translation décroissent le long de ces rayons de projection). A partir de l'homéomorphisme précédent, on peut donc aisément construire un homéomorphisme entre l'adhérence de $M_0(\mu) - C_\epsilon(M)$ et $(\partial C_\epsilon(M) \cap M_0(\mu)) \times [\epsilon, \infty[$, où $M_0(\mu)$ est toujours le

complémentaire dans M de l'intérieur des composantes cuspidales de sa partie fine.

PROPOSITION 1.21. Si b est un bout géométriquement fini de $M_0(\mu)$, il admet un voisinage homéomorphe à $(S, \partial S) \times [0, \infty[$ pour une certaine variété compacte S .

Démonstration. Par la proposition 1.20 et l'analyse ci-dessus, b admet un voisinage connexe homéomorphe à $(S, \partial S) \times [0, \infty[$ pour une certaine composante connexe S de $\partial C_\epsilon(\Lambda_T) \cap M_0(\mu)$. Il reste simplement à voir que S est compacte.

Or, par définition, b admet un voisinage U contenu dans le précédent, dont la frontière ∂U est une sous-variété compacte de $M_0(\mu)$. En particulier, le bord $\partial(\partial U)$ est contenu dans la partie de $M_0(\mu)$ correspondant à $\partial S \times [0, \infty[$. Par projection sur S , on en déduit une application $(\partial U, \partial(\partial U)) \rightarrow (S, \partial S)$ de degré (mod 2) non nul, d'où la compacité de S . $\square$

En dimension 3, on va démontrer un résultat analogue à la proposition 1.21 pour un bout simplement dégénéré. Pour cela, on va utiliser le lemme suivant dû à M. Friedmann, J. Hass et P. Scott [FHS].

LEMME 1.22. Soient S une surface compacte, N une variété de dimension 3 et $\psi : (S, \partial S) \rightarrow (N, \partial N)$ une équivalence d'homotopie de paires. Si ψ est homotope à un plongement, alors elle est homotope à un plongement dont l'image est contenue dans un voisinage arbitrairement petit de $\psi(S)$.

Démonstration. Quand $\partial S = \emptyset$, ceci est démontré (un peu entre les lignes) dans le §2 de [FHS]. La preuve est basée sur des techniques classiques de topologie des variétés de dimension 3, en particulier un argument de tour analogue à celui utilisé lors de la démonstration traditionnelle du lemme de Dehn. On peut aussi voir le lemme 1.22 comme un corollaire du résultat central de [FHS] sur les surfaces minimales, en munissant N d'une métrique riemannienne qui est monstrueusement grande hors d'un petit voisinage de $\psi(S)$.

Quand $\partial S \neq \emptyset$ on peut, ou bien adapter (sans difficulté) la preuve de [FHS] au cas avec bord, ou bien considérer les doubles de N et S obtenus en recollant deux copies de celles-ci le long de leur bord. $\square$

PROPOSITION 1.23. Soit M une variété hyperbolique de dimension 3, dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$. Avec les notations du § 1.3, tout bout simplement dégénéré b de $M_0(\mu)$ est contenu dans l'enveloppe convexe $C(M)$. De plus, b admet un voisinage U tel que la paire $(U, U \cap \partial M_0(\mu))$ est difféomorphe à $(S_b, \partial S_b) \times [0, \infty[$.

Démonstration. Tout d'abord, il sera commode de se ramener au cas où $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$. Pour cela, considérons le revêtement $\tilde{M}$ de M dont le groupe fondamental est $\pi_1(S_b)$. Alors, la composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contenant b se relève difféomorphiquement à $\tilde{M}_0(\mu)$, et le bout b correspond naturellement à un bout $\tilde{b}$ de $\tilde{M}_0(\mu)$. Ce bout $\tilde{b}$ est clairement simplement dégénéré si b l'est, puisque la composante $S_{\tilde{b}}$ de $\partial \tilde{M}_c(\mu)$ lui faisant face est difféomorphe à S_b ; ce dernier point provient du fait que $(S_b, \partial S_b)$ et $(S_{\tilde{b}}, \partial S_{\tilde{b}})$ ont toutes deux le type d'homotopie de $(V_b, \partial V_b)$, où V_b est la composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contenant b . Comme l'enveloppe convexe $C(M)$ contient la projection de $C(\tilde{M})$, le bout b de $M_0(\mu)$ satisfait les conclusions de la proposition dès que le bout $\tilde{b}$ de $\tilde{M}_0(\mu)$ le fait. Sans perte de généralité, on peut donc se limiter au cas où $M = \tilde{M}$, c'est-à-dire où $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$.

De plus, quitte à restreindre la constante de Margoulis μ (ce qui ne change pas le type topologique de $M_0(\mu)$), on peut faire en sorte que les tubes de Margoulis de $M_f(\mu)$ soient à distance ≥ 1 les uns des autres. Vérifier ceci ne nécessite qu'une estimation de géométrie hyperbolique facile.

Soit $\hat{S}_b$ obtenue en recollant sur S_b un collier $\cong S^1 \times [0, \infty[$ le long de chaque composante de bord. Puisque b est simplement dégénéré, on peut comme au § 1.4 construire une suite $\varphi_i : \hat{S}_b \rightarrow M$ d'applications hyperboliquement simpliciales, telles que tout voisinage de b rencontre au moins l'une des images $\varphi_i(\hat{S}_b)$.

De plus, le diamètre modulo $M_f(\mu)$ de $\varphi_i(\hat{S}_b)$ est borné par une constante indépendante de i . En fait, le raffinement fourni par le lemme 1.14 donne même mieux : Si $M_b(\mu)$ est formé des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ rencontrant ∂S_b , alors même le diamètre modulo $M_f(\mu) - M_b(\mu)$ de $\varphi_i(\hat{S}_b)$ est borné par une constante c_1 ne dépendant que de μ et S_b . On remarquera que l'on a utilisé ici l'hypothèse que $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$, pour que toute courbe de $\hat{S}_b$ qui peut être homotopée à l'intérieur de $M_b(\mu)$ dans M soit homotope dans $\hat{S}_b$ à un bout de cette surface.

Soit U un voisinage de b . On veut montrer que $U \cup M_b(\mu)$ contient au moins l'une des $\varphi_i(\hat{S}_b)$. Sans perte de généralité, on peut supposer la frontière ∂U dans $M_0(\mu)$ compacte, et que U est disjoint des composantes cuspidales de $M_f(\mu) - M_b(\mu)$.

Parce que l'action de $\pi_1(M)$ sur le revêtement universel de M est proprement discontinue, il n'y a qu'un nombre fini de tubes de Margoulis de $M_f(\mu)$ à distance $\leq c_1$ du compact ∂U . Par induction et parce que les tubes de Margoulis sont à distance ≥ 1 les uns des autres, on en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de tubes de Margoulis que l'on peut joindre à ∂U par un chemin dont la partie située hors des tubes est de longueur $\leq c_1$. Par conséquent, U contient un voisinage U' de b dans $M_0(\mu)$, tel qu'on ne puisse joindre U' à ∂U par un chemin dont la longueur hors des tubes de Margoulis est $\leq c_1$. Alors, si l'on a choisi i de sorte que $\varphi_i(\hat{S}_b)$ rencontre U' , on a tout fait pour que $\varphi_i(\hat{S}_b) - M_b(\mu)$ soit contenu dans U .

Remarquons par ailleurs que, par construction des applications hyperboliquement simpliciales au § 1.4, les φ_i ont leurs images contenues dans l'enveloppe convexe $C(M)$, et sont deux à deux homotopes dans $C(M)$ (en "raidissant" leurs homotopies dans M).

Alors, si U_0 est un voisinage connexe de b ne rencontrant pas $\varphi_0(\hat{S}_b)$, ce voisinage U_0 est entièrement contenu dans $C(M)$. En effet, si $x \in U_0$, il existe un voisinage fermé $U \subset \text{int}(U_0)$ de b tel que $U_0 - U$ soit connexe et contienne x . Si l'image de $\varphi_i : \hat{S}_b \rightarrow M$ est contenue dans $U \cup M_b(\mu)$, toute homotopie entre φ_0 et φ_i traverse au moins une fois x , et celui-ci est donc dans $C(M)$. On a ainsi montré que U_0 , et donc b , est contenu dans $C(M)$ comme annoncé.

Avant de montrer la dernière partie de la proposition 1.23, à savoir que b admet un voisinage produit dans $M_0(\mu)$, faisons une petite remarque : Par l'hypothèse que $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$, les composantes de $\partial M_0(\mu)$ sont des anneaux et jamais des rubans de Moebius. En effet, chaque composante de ∂S_b respecte l'orientation normale de ∂M_c dans M et celle de ∂S_b dans $\hat{S}_b$, et respecte donc l'orientation ambiante de M .

Passons maintenant à la démonstration que b admet un voisinage produit dans $M_0(\mu)$. Pour cela, considérons un voisinage U de b . Nous venons de voir qu'il existe $\varphi_i : \hat{S}_b \rightarrow M$ dont l'image est contenue dans $U \cup M_b(\mu)$. En perturbant φ_i de façon à rendre son intersection avec $\partial M_b(\mu)$ tranverse et en la composant avec une isotopie de $\hat{S}_b$, on peut homotoper φ_i en φ'_i telle que $\varphi'_i(\partial S_b)$ soit contenue dans $\partial M_b(\mu)$, avec toujours $\varphi'_i(\hat{S}_b)$ dans $U \cup M_b(\mu)$. De plus, puisque chaque composante de $M_b(\mu)$ est difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty[$, on peut chasser $\varphi'_i(S_b)$ hors de l'intérieur $M_b(\mu)$ et faire en sorte que $\varphi'_i(S_b)$ soit contenue dans U .

Par construction, $\varphi'_i|_{S_b} : S_b \rightarrow M_0(\mu)$ est homotope à un plongement $S_b \rightarrow M_0(\mu)$, à savoir l'injection canonique. Par le lemme 1.22, on peut donc de plus supposer que $\varphi'_i(S_b)$ est une sous-variété (plongée) de $M_0(\mu)$, contenue dans U .

Ainsi, tout voisinage U de b contient un plongement $\varphi'_i : S_b \rightarrow M_0(\mu)$ homotope à l'injection $\varphi'_0 : S_b \rightarrow M_0(\mu)$ par une homotopie gardant l'image de ∂S_b dans $\partial M_0(\mu)$. Sans perte de généralité, on peut supposer les $\varphi'_i(S_b)$ disjoints, et progressant monotonement vers b de sorte que $\varphi'_i(S_b)$ soit situé homologiquement entre $\varphi'_{i-1}(S_b)$ et $\varphi'_{i+1}(S_b)$. Comme φ'_i et φ'_{i+1} sont homotopes, un résultat classique de F. Waldhausen [Wal₂, Proposition 5.4] affirme que $\varphi'_i(S_b)$ et $\varphi'_{i+1}(S_b)$ sont séparés dans $M_0(\mu)$ par un collier $\cong S_b \times [i, i+1]$. L'union de ces colliers fournit un voisinage W de b dans $M_0(\mu)$ difféomorphe à $S_b \times [0, \infty[$. $\square$

§ 1.6. La conjecture d'Ahlfors.

Considérons le groupe de Moebius m_2 , agissant sur la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{CP}^1$. Si l'on identifie conformément cette sphère de Riemann avec la sphère à l'infini S_∞^2 de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$, cette action de m_2 s'étend en une action isométrique sur $\mathbb{H}^3$ (voir [Ber₃]); le moyen le plus simple de voir cela est de se rappeler que m_2 est engendré par les inversions à travers les cercles de S^2 , et de remarquer que toute inversion de $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ à travers une sphère orthogonale à S_∞^2 induit une isométrie de $\mathbb{H}^3$.

Si Γ est un sous-groupe de m_2 , on sait depuis (au moins) Poincaré [Poi] qu'il existe un plus grand ouvert $\Omega_\Gamma \subset S_\infty^2$ sur lequel Γ agit proprement

discontinûment, et que Γ agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^3$ tout entier dès que $\Omega_{\Gamma} \neq \emptyset$. L'ouvert Ω_{Γ} est le domaine de discontinuité de Γ , et c'est un exercice facile de vérifier que son complémentaire dans S_{∞}^2 est l'ensemble limite Λ_{Γ} , tel que nous l'avons défini au § 1.5.

Quand de plus Γ est de type fini, Ahlfors a montré dans [Ahl₁] que la surface Ω_{Γ}/Γ est de type fini, et a conjecturé que la mesure de Lebesgue de Λ_{Γ} est nulle dès que $\Omega_{\Gamma} \neq \emptyset$. Cette conjecture intervient par exemple dans la théorie des déformations quasi-conformes des groupes kleinéens ([Ber₁] [Ber₄]) : Si Λ_{Γ} est de mesure nulle, les déformations quasi-conformes du groupe Γ sont en bijection naturelle avec les structures conformes sur la surface Ω_{Γ}/Γ , i.e. avec les points de l'espace de Teichmüller $\mathfrak{T}(\Omega_{\Gamma}/\Gamma)$; cet espace de Teichmüller étant relativement bien compris, on a ainsi une bonne maîtrise de ces déformations quasi-conformes.

Quand Γ est sans torsion et agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^3$ (par exemple si $\Omega_{\Gamma} \neq \emptyset$), il agit également librement sur $\mathbb{H}^3$ et on peut donc considérer la variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$. C'est ce cadre qui a été utilisé pour démontrer la conjecture d'Ahlfors d'abord par Ahlfors lui-même quand Γ est géométriquement fini [Ahl₂], puis par Thurston quand la variété M est géométriquement sage [Thu₂, §8.12]. Il peut être intéressant de rappeler brièvement l'argument de [Ahl₂] et [Thu₂, §8.12], afin de voir comment interviennent les notions introduites au § 1.3. Considérons donc Γ sans torsion, avec $\Omega_{\Gamma} \neq \emptyset$ et $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ géométriquement sage, et supposons Λ_{Γ} de mesure non nulle en quête d'une contradiction. A tout $x \in M$, on associe la proportion $h(x) \in [0, 1]$ de ceux parmi les rayons géodésiques issus de x dont les relevés au revêtement universel $\mathbb{H}^3$ de M aboutissent dans Ω_{Γ} (ce qui ne dépend pas des relèvements choisis). La fonction h ainsi définie est harmonique, et non constante si Λ_{Γ} est de mesure non nulle. Son champ de gradient X respecte donc le volume, et on vérifie aisément qu'il est rentrant sur le bord de l'enveloppe convexe $C(M)$. Les lignes de flot de X ne repassant pas deux fois par le même point, elles doivent ressortir par quelque part, et ce doit être par les cusps et bouts simplement dégénérés de $M_0(\mu)$. Or, ceux-ci sont "étroits", et le flot X devient de plus en plus lent avec le temps car la fonction h reste ≤ 1 . Considérant la trajectoire d'une boule par le flot X , on déduit alors de quelques estimations de volume que les goulets d'étranglements constitués par les cusps et les bouts simplement dégénérés donnent lieu à des "embouteillages", et fournissent ainsi la contradiction cherchée.

En combinant notre théorème A avec ces résultats d'Ahlfors et Thurston, on peut collecter les meilleurs résultats sur la conjecture d'Ahlfors connus à ce jour sous l'énoncé suivant. Rappelons d'abord la définition des produits amalgamés et des produits HNN (qui sont en quelque sorte des produits auto-amalgamés) : Soient trois groupes A, B, C , et deux morphismes injectifs $\rho_1 : C \rightarrow A$ et $\rho_2 : C \rightarrow B$; le produit de A et B amalgamé le long de C est défini par générateurs et relations de la façon suivante :

$$A *_C B = \langle A, B ; \forall c \in C, \rho_1(c) = \rho_2(c) \rangle,$$

tandis que, quand $A = B$, le produit HNN de A le long de C est :

$$A *_C = \langle A, t ; \forall c \in C, \rho_1(c) = t \rho_2(c) t^{-1} \rangle.$$

COROLLAIRE C. Soit Γ un sous-groupe de type fini de m_2 , satisfaisant la propriété suivante : Pour toute décomposition non triviale $\Gamma = A *_C B$ ou $A *_C$ de Γ en produit amalgamé ou HNN le long d'un groupe fini C cyclique ou diédral, il existe un élément parabolique de Γ qui n'est conjugué à aucun élément de A ou de B . Alors, Γ vérifie la conjecture d'Ahlfors.

Démonstration. On peut bien sûr se limiter au cas où $\Omega_\Gamma \neq \emptyset$, de sorte que Γ agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^3$.

Si Γ est sans torsion, le corollaire est une conséquence immédiate du théorème A et de [Thu₂, §8.12], puisque la condition de l'énoncé devient alors la condition (*) de l'introduction. (Un produit HNN le long du groupe trivial est un produit libre $A * \mathbb{Z}$.)

Dans le cas général, un lemme fameux de Selberg [Sel] fournit un sous-groupe normal sans torsion Γ' d'indice fini dans Γ . Puisque Γ' est d'indice fini dans Γ , ces deux groupes ont même domaine de discontinuité. Il suffit donc de vérifier que Γ' satisfait les hypothèses de l'énoncé. C'est ce que fait à peu près le lemme 1.24 ci-dessous.

LEMME 1.24. Dans le cadre ci-dessus, soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma'$ et soit $M_0 = M_0(\mu)$ le complémentaire de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$. Alors, M contient une sous-variété compacte M_C telle que l'inclusion $(M_C, M_C \cap \partial M_0) \rightarrow (M_0, \partial M_0)$ soit une équivalence d'homotopie de paires, et que la frontière ∂M_C soit incompressible.

Démonstration du lemme 1.24. On va copier la preuve du lemme 1.2, en tenant compte de l'action du groupe fini $G = \Gamma/\Gamma'$ sur M . Puisque cette action est isométrique, elle respecte nécessairement M_0 .

On sait que $\pi_1(M) = \Gamma'$ est de présentation finie [Sco₁] et que ∂M_0 n'a qu'un nombre fini de composantes (lemme 1.3). On construit donc aisément un complexe cellulaire connexe fini K_1 de dimension 2 muni d'une action de G , un sous-complexe L de K_1 invariant par G , et une application continue G -équivariante $f_1 : (K_1, L) \rightarrow (M_0, \partial M_0)$ induisant des isomorphismes $\pi_1(K_1) \cong \pi_1(M_0)$, $\pi_1(L) \cong \pi_1(\partial M_0)$ et $\pi_1(K_1, L) \cong \pi_1(M_0, \partial M_0)$ pour tous choix de points bases. Soit N_1 une sous-variété compacte de codimension 0 de M_0 contenant $f_1(K_1)$, que l'on peut bien sûr choisir invariante par G .

Si $\pi_1(\delta N_1)$ est compressible, on applique alors le lemme de Dehn G -équivariant [MeeY]. Celui-ci nous fournit une famille D de disques plongés dans N_1 ou $\overline{M_0 - N_1}$, dont les bords sont homotopiquement non triviaux dans δN_1 , et tels que G respecte D ainsi qu'une de ses orientations normales.

Si D n'est pas contenu dans N_1 , on définit N_2 comme l'union de N_1 et d'un voisinage tubulaire de D , convenablement arrondie aux coins et invariante par G , tandis que $K_2 = K_1$ et $f_2 = f_1$.

Si D est contenu dans N_1 , on peut effectuer une perturbation G -équivariante de $f_1 : K_1 \rightarrow M_0$ de sorte que son intersection avec D soit transverse. (Commencer au voisinage des points fixes de G sur M_0 .) Choisissons alors un voisinage de D paramétré par $D \times [-1, +1]$, tel que chaque tranche $D \times t$ soit transverse à f_1 et invariante par G . Si K'_1 est obtenu à partir de K_1 en effondrant sur un point chaque composante de $f_1^{-1}(D \times t)$ pour tout t , on déduit de f_1 une application G -équivariante $f'_1 : (K'_1, L) \rightarrow (M_0, \partial M_0)$ ayant les mêmes propriétés homotopiques que f_1 , mais telle que $(f'_1)^{-1}(D \times [-1, +1])$ est formée d'un nombre fini d'arcs isolés de K'_1 . En considérant par exemple l'action de Γ sur le revêtement universel $\tilde{K}'_1$ de K'_1 définie en relevant l'action de G sur K'_1 , on constate que chacun de ces arcs k donne lieu à une décomposition de Γ en $A *_C B$ ou $A *_C$, où C est le stabilisateur de k dans G et où $A \cap \Gamma'$ et $B \cap \Gamma'$ sont les groupes fondamentaux de composantes de $K'_1 - Gk$. De plus, C est contenu dans le stabilisateur d'une composante de D et est donc cyclique ou diédral, et tout élément parabolique de Γ peut être conjugué dans A ou B , car ces éléments paraboliques sont exactement ceux qui respectent une composante de la préimage de L dans $\tilde{K}'_1$. Par

hypothèse sur I , cette décomposition est nécessairement triviale et donc, si K_2 est défini en retirant de K_1' l'intérieur de ces arcs ainsi que les composantes restantes qui sont simplement connexes, K_2 est connexe et la restriction f_2 de f_1' induit des isomorphismes $\pi_1(K_2) \cong \pi_1(M_0)$ et $\pi_1(K_2, L) \cong \pi_1(M_0, \partial M_0)$. De plus $f_2(K_2)$ est contenue dans la sous-variété N_2 de M_0 , invariante par G , obtenue en retirant de N_1 un voisinage tubulaire de D et en arrondissant les coins.

En itérant le procédé, on finit comme pour le lemme 1.2 à aboutir à une sous-variété N_p de M_0 avec ∂N_p incompressible, contenant $f_p(K_p)$ pour une application $f_p : (K_p, L) \rightarrow (M_0, \partial M_0)$ induisant des isomorphismes $\pi_1(K_p) \cong \pi_1(M_0)$ et $\pi_1(K_p, L) \cong \pi_1(M_0, \partial M_0)$ pour tous choix de points bases. On termine alors comme au lemme 1.2. $\square$

Le lemme 1.24 termine la preuve du corollaire B. En effet, un argument standard de topologie des variétés de dimension 3 montre qu'alors $I' = \pi_1(M_c)$ satisfait la condition (*) de l'introduction (voir par exemple [Hem, chap. 7], adapté de façon immédiate pour tenir compte de $M_c \cap \partial M_0$). En fait, on n'a même pas besoin de cela puisque on n'utilisera dans l'article que la conclusion du lemme 1.24, et non la condition (*) elle-même (même si elle lui est équivalente). $\square$

§ 1.7. Plan de la démonstration du théorème A.

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3, dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition (*) de l'introduction. Avec les notations du § 1.3, on considère un bout b géométriquement infini de $M_0(b)$. On veut montrer que, si S_b est la composante du bord du coeur compact $M_c(\mu)$ de $M_0(\mu)$ qui fait face à b , il existe une famille (α_j) de courbes simples sur cette surface S_b telles que chaque voisinage de b contienne au moins les géodésiques fermées α_j^* pour j assez grand. (On dira alors que les α_j^* tendent vers le bout b .)

Dans une première étape, on construit à la section II une suite (α_j) de courbes fermées (pas forcément simples) sur la surface S_b qui ont la propriété énoncée ci-dessus. L'argument utilisé est assez général, valable en toute dimension et indépendant de la condition (*). La démonstration de cette étape est relativement simple quand la variété M n'a pas de cusps ; dans le cas général,

la présence de cusps vient malheureusement rajouter quelques technicalités qui, sans être subtiles, sont quand même assez désagréables.

Si les courbes α_j ainsi construites ne sont pas simples, le lemme du nombre d'intersection dû à Thurston et démontré à la section III, montre que l'on peut toutefois les choisir de sorte qu'elles "deviennent de plus en plus simples" dans le sens suivant : Le quotient entre le nombre de points doubles de α_j et le carré de sa longueur tend vers 0 quand j tend vers l'infini.

A la section IV, on introduit la notion de courants géodésiques sur une surface, destinée à donner un sens plus précis au fait que "les α_j sont de plus en plus simples" sur la surface S_b . Pour cela, on considère l'ensemble des classes d'homotopie de courbes fermées sur la surface S_b , et l'espace $\mathcal{C}(S_b)$ des courants géodésiques est en quelque sorte la complétion de cet ensemble muni d'une certaine structure uniforme. On peut définir le nombre d'intersection géométrique de deux courants géodésiques, qui étend la notion analogue pour les courbes fermées, et il se trouve alors que l'espace des courants géodésiques d'auto-intersection nulle s'identifie naturellement à l'espace des laminations géodésiques mesurées introduit par Thurston pour compléter l'espace des courbes simples ($[\text{Thu}_1]$, $[\text{Thu}_2]$, $[\text{Cas}]$, $[\text{HarP}]$). Cet espace des laminations géodésiques mesurées est également l'adhérence dans $\mathcal{C}(S)$ des homothétiques de courbes simples.

Quitte à en extraire une sous-suite, les α_j convenablement normalisés convergent dans $\mathcal{C}(S)$ vers un courant géodésique α_∞ . Alors, en raison de la continuité du nombre d'intersection, l'estimation fournie à la section III par le lemme du nombre d'intersection montre que α_∞ est une lamination géodésique mesurée. En particulier, le courant géodésique α_∞ est également limite d'une suite de courbes simples β_k convenablement normalisées. (En pratique, c'est une composante β_∞ de α_∞ qui est la limite des β_k , mais il se trouve a posteriori que α_∞ et β_∞ sont pratiquement identiques.)

Il reste à montrer que les β_k sont homotopes à des géodésiques fermées β_k^* de M qui tendent vers le bout b (c'est-à-dire que tout voisinage de b contient toutes les β_k^* à l'exception d'un nombre fini d'entre elles), de sorte que b est simplement dégénéré. Ceci est effectué à la section VI, après un important travail technique à la section V.

II. GEODESIQUES ALLANT A L'INFINI

Nous attaquons dans cette section une première étape de la démonstration du théorème A . Il s'agit en fait d'une propriété assez générale des bouts d'une variété hyperbolique M de n'importe quelle dimension (au moins pour des variétés sans cusps) : Rappelons que, par définition, un bout b de $M_0(\mu)$ est géométriquement infini si et seulement si tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ rencontre une géodésique fermée de M . Nous allons voir que l'on peut remplacer dans l'énoncé ci-dessus le mot "rencontre" par "contient" .

§ 2.1. Courbes avec un nombre borné de coins.

L'outil principal pour démontrer le résultat annoncé est l'estimation donnée par le lemme 2.1 ci-dessous . Il sera commode d'utiliser la terminologie suivante : Le ϵ -voisinage d'un sous-ensemble X d'un espace métrique Y est l'ensemble des points de Y situés à distance $\leq \epsilon$ de X .

LEMME 2.1. Etant donné un entier n et un réel $\mu > 0$, il existe une constante $c_1(n, \mu)$ avec la propriété suivante : Pour toute variété hyperbolique M et toute courbe fermée $\gamma \subset M$ formée de n arcs géodésiques, le $c_1(n, \mu)$ -voisinage de γ contient une courbe γ' homotope à γ qui, ou bien est une géodésique fermée, ou bien est de longueur $\leq \mu$.

Démonstration. L'idée de base est analogue à celle utilisée au §1.4 pour démontrer le lemme du diamètre borné.

Considérons tout d'abord le cas où γ représente un élément loxodromique de $\pi_1(M)$, et est donc homotope à une géodésique fermée γ^* par une homotopie $A : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ (c'est en fait le seul cas dont nous aurons besoin). On peut rendre A hyperboliquement simpliciale comme pour le lemme du diamètre borné de la manière suivante : Soient $a_1, \dots, a_n$, dans cet ordre, les points de $S^1 \times 0$ envoyés par A sur les coins de γ ; choisissons n points arbitraires $b_1, \dots, b_n$ dans cet ordre sur $S^1 \times 1$. On triangule alors l'anneau $S^1 \times [0, 1]$ comme un tambour en joignant par une arête chaque a_i à b_i et b_{i+1} (avec $b_{n+1} = b_1$; on aurait pu prendre tous les b_i confondus, mais c'est tellement plus joli comme ça !). Comme au §1.4, on peut alors raidir h de sorte que chaque triangle de cette triangulation de $S^1 \times [0, 1]$ soit envoyé sur un triangle totalement géodésique de M . Par accident, il pourrait arriver qu'un tel triangle

soit dégénéré et réduit à un arc ; mais, quitte à perturber un peu γ , ce qui ne change pas les conclusions du lemme 2.1, on peut supposer que ceci n'arrive jamais et que A est un difféomorphisme sur chaque triangle.

Il sera commode d'interpréter A comme un "anneau singulier" dans M . Plus proprement, on peut identifier A à son graphe, qui est homéomorphe à $S^1 \times [0, 1]$. Sur cet anneau A , la métrique de M induit une métrique par chemin, qui fait de A une surface hyperbolique à bord géodésique par morceaux. On remarquera que ce bord ∂A s'identifie naturellement à l'union disjointe des deux courbes γ et γ^* .

Soit x un point quelconque de γ^* , et soit k un arc (simple) dans A joignant x à γ , de longueur minimum parmi tous les arcs de ce type. Dans k , on considère le sous-arc k' joignant l'extrémité $\partial k - x$ au plus proche point de k par où passe une courbe de longueur $\leq \mu$ homotope à γ dans A (avec $k' = k$ s'il n'existe aucun point comme ça). Nous allons montrer que la longueur de k' est majorée par une certaine constante $c_1'(n, \mu)$ ce qui, en posant $c_1(n, \mu) = c_1'(n, \mu) + \mu/2$, démontrera le lemme 2.1 dans le cas considéré où γ est loxodromique dans M . (Le terme $\mu/2$ est ajouté pour que, si k' rencontre une courbe de longueur $\leq \mu$, celle-ci soit entièrement contenue dans le $c_1(n, \mu)$ -voisinage de γ .)

Tout d'abord, remarquons que, puisque γ^* n'a pas de coins dans M , tous les angles (intérieurs) de A situés sur la composante γ^* de ∂A sont au moins égaux à π . Par la formule de Gauss-Bonnet, ceci entraîne que tout arc géodésique de l'anneau A à extrémités dans γ^* est entièrement contenu dans γ^* . Par conséquent, k est formé d'un arc contenu dans γ^* (éventuellement réduit à x) et d'un arc géodésique joignant γ^* à γ .

Remarquons également que toute courbe γ' dans A qui est de longueur $< \mu$ et rencontre k' est homotope à 0. En effet, en considérant la frontière de la composante annulaire de $A - \gamma'$ contenant γ , on verrait sinon une courbe de longueur $< \mu$ homotope à γ et rencontrant k' , ce qui est exclu par définition de k' .

Si $k \cap \gamma^*$ n'est pas réduit à x , considérons le côté de k qui n'est pas en contact avec γ^* . Remarquons que tous les angles de k situés de ce côté-là sont $\geq \pi$: Cela provient de la minimalité de la longueur de k au point où k quitte γ^* , et de la propriété des angles de γ^* aux autres coins. Quand $k \cap \gamma^*$ est réduit à x , fixons de même un côté privilégié, choisi de sorte qu'en x l'angle entre k et γ^* soit $\geq \pi/2$ de ce côté, ce qui est possible puisque

l'angle interne de A y est $\geq \pi$. Dans les deux cas, menons par tout point non anguleux z de k' un arc géodésique λ_z de longueur $\mu/4$, issu de z orthogonalement à k et du côté privilégié (on arrête bien sûr l'arc λ_z s'il vient buter sur le bord).

Comme dans la preuve du lemme 1.13, les λ_z sont plongés. D'autre part, en utilisant Gauss-Bonnet, la propriété des angles de k du côté privilégié d'où ils sont issus, et la minimalité de la longueur de k , les λ_z sont disjoints et ne peuvent venir buter sur γ^* . Par contre, λ_z peut très bien venir buter sur γ ; toutefois, comme k est de longueur minimum, ceci ne peut se produire que si z est à distance $\leq \mu/4$ dans k de l'extrémité $\partial k - x$.

Comme lors de la preuve du lemme 1.13, il s'ensuit que si U est le "tube" formé de l'union des λ_z ,

$$\text{aire}(U) \geq (\ell(k') - \mu/4) \mu/4.$$

D'autre part, l'aire de U est majorée par l'aire de A , elle-même majorée par $2\pi n$ puisque A est formée de $2n$ triangles hyperboliques (chacun d'aire $\leq \pi$). D'où il vient que la longueur de k' est majorée par

$$c'_1(n, \mu) = 8\pi n/\mu + \mu/4.$$

Si l'on prend $c_1(n, \mu) = c'_1(n, \mu) + \mu/2$, ceci démontre ainsi le lemme 2.1 pour les courbes γ loxodromiques dans M .

L'argument est similaire quand la classe d'homotopie de γ est parabolique. Comme pour le lemme 1.10, on construit une homotopie $A : S^1 \times [0, \infty[\rightarrow M$ de γ vers le cusp correspondant, hyperboliquement simpliciale pour une décomposition de $S^1 \times [0, \infty[$ en triangles définie par des rayons $a_i \times [0, \infty[$. Identifiant encore A à son graphe, la métrique de M induit sur cet anneau semi-ouvert A une métrique hyperbolique de volume fini à bord géodésique par morceaux. Si $c'_1(n, \mu)$ a la même valeur que dans le cas précédent, choisissons un point $x \in A$ à distance $> c'_1(n, \mu)$ de ∂A , et soit k un arc de longueur minimum joignant x à ∂A . Le même argument d'aire que précédemment montre alors qu'il y a nécessairement sur k un point situé à distance $\leq c'_1(n, \mu)$ de l'extrémité $\partial k - x$ par où passe une courbe de longueur $\leq \mu$ homotope à ∂A . Ceci termine la démonstration du lemme 2.1 quand γ est parabolique, et donc dans le cas général puisque le résultat est trivial si γ est homotope à 0. $\square$

Pour référence ultérieure, signalons l'énoncé élémentaire suivant :

LEMME 2.2. Soient A et B deux isométries paraboliques de $\mathbb{H}^3$ respectant l'orientation et ne fixant pas le même point de la sphère à l'infini S_∞^2 . Alors, au moins l'une des deux isométries AB et AB^{-1} n'est pas parabolique.

Démonstration. Choisissons pour $\mathbb{H}^3$ le modèle du demi-espace supérieur $\mathbb{C} \times]0, \infty[$, de sorte que le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ respectant l'orientation s'identifie à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agissant par homographies sur $S_\infty^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ (voir [Ber₃] [Thu₂] [Thu₃] par exemple). Les éléments paraboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sont ceux de trace différente de ± 2 , et la preuve est alors élémentaire. $\square$

§ 2.2. Géodésiques tendant vers un bout.

Revenons maintenant aux bouts géométriquement infinis de $M_0(\mu)$, c'est-à-dire du complémentaire de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$ d'une variété hyperbolique M de dimension 3.

PROPOSITION 2.3. Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 avec un nombre fini de cusps. Si la constante de Margoulis μ est choisie suffisamment petite, un bout b de $M_0(\mu)$ est géométriquement infini si et seulement si tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ contient une géodésique fermée de M.

Démonstration. Si tout voisinage du bout b contient une géodésique fermée, b est évidemment géométriquement infini par définition de cette notion.

Pour la réciproque, la démonstration est relativement simple si M est sans cusps. Par contre, les cusps introduisent un certain nombre de technicalités qui, sans être difficiles, rendent toutefois la preuve assez rébarbative.

Montrons tout d'abord que l'on peut se limiter au cas où M est orientable, de sorte que les composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$ seront des quotients d'horiboules de $\mathbb{H}^3$ par leurs stabilisateurs paraboliques. En effet, soient $\hat{M}$ le revêtement d'orientation de M et $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ la projection naturelle. Si μ est assez petit pour que 2μ soit une constante de Margoulis pour $\hat{M}$, $\pi\hat{M}_0(2\mu) \subset M_0(\mu) \subset \pi\hat{M}_0(\mu)$ et ces trois sous-variétés sont homéomorphes par projection radiale à partir des cusps. (Le complémentaire de $\pi\hat{M}_0(\mu)$ est formé des points par où passe un lacet parabolique de longueur $< \mu$ qui respecte l'orientation de M .) Tout arc géodésique contenu dans $\pi\hat{M}_0(\mu) - \pi\hat{M}_0(2\mu)$ est

de longueur majorée par une constante ne dépendant que de μ , ainsi qu'on le vérifie par relèvement des composantes de $\pi \hat{M}_f(\mu)$ et $\pi \hat{M}_f(2\mu)$ correspondantes en des horiboules de $\mathbb{H}^3$. Par conséquent, un bout de $M_0(\mu)$ est géométriquement infini si et seulement si le bout de $\pi \hat{M}_0(\mu)$ (resp. $\pi \hat{M}_0(2\mu)$) correspondant est géométriquement fini. D'autre part, puisque le carré de toute géodésique fermée de M se relève en une géodésique fermée de $\hat{M}$, un bout de $\pi \hat{M}_0(\mu)$ est géométriquement fini si et seulement si le ou les bouts de $\hat{M}_0(\mu)$ correspondants sont géométriquement finis. Il s'ensuit que la proposition 2.3 est démontrée pour M dès que l'on a démontré le même énoncé pour $\hat{M}$.

On supposera donc désormais que M est orientable. En particulier, et c'est en fait la seule raison pour laquelle on a imposé cette condition, la préimage dans $\mathbb{H}^3$ des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ est formée d'horiboules disjointes.

Précisons maintenant quand la constante de Margoulis μ sera "suffisamment petite". On part de n'importe quelle constante de Margoulis μ_0 pour M . On choisit alors $\mu < \mu_0$ de sorte que tout point de $\partial M_0(\mu)$ soit à distance $> c_1(8, \mu_0) + \mu_0$ de $M_0(\mu_0)$, où $c_1(8, \mu_0)$ est la constante fournie par le lemme 2.1. On pourrait évidemment préciser la valeur limite de μ en utilisant un peu de trigonométrie hyperbolique (tirée par exemple de [Bea, §7.35]).

Soit donc μ comme ci-dessus, et considérons un bout b géométriquement infini de $M_0(\mu)$. Désignant encore par b le bout correspondant de $M_0(\mu_0)$, on commence par considérer un voisinage U_0 de b dans $M_0(\mu_0)$; on peut choisir U_0 connexe et de frontière δU_0 dans $M_0(\mu_0)$ compacte. Nous allons montrer que U_0 contient "presque" une géodésique fermée de M .

Remarquons que b est géométriquement infini en tant que bout de $M_0(\mu_0)$. En effet, tout arc géodésique contenu dans $M_0(\mu) - M_0(\mu_0)$ est de longueur majorée par une certaine constante dépendant de μ et μ_0 . Il existe donc une famille de géodésiques fermées de M qui rencontre tout voisinage arbitrairement petit de b dans $M_0(\mu_0)$.

Si l'une de ces géodésiques fermées est contenue dans U_0 , on est content et on s'arrête là. Sinon, considérant leur intersection avec U_0 , on déduit de ces géodésiques fermées une famille d'arcs géodésiques (α_i) contenus dans U_0 , d'extrémités dans ∂U_0 (union de δU_0 et de portions de $\partial M_0(\mu_0)$), et rencontrant tout voisinage arbitrairement petit de b . A ce point-ci, quitte à restreindre la famille des (α_i) , l'analyse se scinde en trois cas.

1er cas : l'un des arcs α_i a ses deux extrémités x_i' et x_i'' dans $\partial M_0(\mu_0)$.

Par définition de la partie fine $M_f(\mu_0)$, il existe un arc géodésique α_i de longueur μ_0 joignant x_i' à lui-même ; cet arc α_i est en fait contenu dans $M_f(\mu_0)$ par convexité des horiboules de $\mathbb{H}^3$. Soit α_i'' associé de même à x_i'' . On considère alors la courbe fermée γ formée des quatre arcs géodésiques α_i' , α_i , α_i'' , α_i^{-1} (i.e. α_i décrit dans l'autre sens).

On peut supposer γ loxodromique. En effet, un relèvement de α_i dans le revêtement universel $\mathbb{H}^3$ de M joint deux horiboules convexes de la préimage de $M_f(\mu_0)$, puisque celles-ci sont convexes. Les deux éléments paraboliques α_i' et $\alpha_i \alpha_i'' \alpha_i^{-1}$ de $\pi_1(M; x_i')$ fixent donc des points distincts de la sphère à l'infini S_∞^2 . Quitte à remplacer α_i'' par $\alpha_i''^{-1}$, on peut donc faire en sorte que γ soit loxodromique par le lemme 2.2.

Ainsi on a construit dans ce cas une courbe loxodromique γ qui est formée de 4 arcs géodésiques et n'est pas trop loin de U_0 en ce sens qu'elle est contenue dans son μ_0 -voisinage. De plus, γ reste à distance $> c_1(8, \mu_0)$ de $\partial M_0(\mu)$.

2e cas : Chaque α_i a une extrémité x_i' dans δU_0 et une autre x_i'' dans $\partial M_0(\mu_0)$.

Puisque δU_0 est compact, on peut supposer que la suite (x_i') converge et que tous les x_i' sont contenus dans une petite boule B de rayon $\leq \mu_0/2$, suffisamment petite pour qu'elle soit effectivement difféomorphe à la boule standard. Par définition de $M_f(\mu_0)$, il existe un arc géodésique α_i'' de longueur μ_0 joignant x_i'' à lui-même dans $M_f(\mu_0)$.

Relevons notre petite boule B en une boule $\tilde{B}$ dans le revêtement universel $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^3$. Pour chaque horiboule B' de $\tilde{M}$, l'union des arcs géodésiques joignant $\tilde{B}$ à $\partial B'$ sans rencontrer l'intérieur de B' est compacte. (Un dessin dans le modèle du demi-espace supérieur pour $\mathbb{H}^3$ peut aider.) Par conséquent, comme les α_i vont arbitrairement loin dans M , les relèvements des α_i dans $\tilde{M}$ issus de $\tilde{B}$ ne peuvent tous aboutir à la même composante de la préimage de $M_f(\mu_0)$.

Soient donc i et j deux indices tels que les relèvements de α_i et α_j issus de $\tilde{B}$ dans $\tilde{M}$ aboutissent à des horiboules distinctes, et soit α_{ij} l'arc géodésique joignant x_i' à x_j' dans la petite boule B . On considère alors la

courbe γ formée des 8 arcs géodésiques $\alpha_i, \alpha_i'', \alpha_i^{-1}, \alpha_{ij}, \alpha_j, \alpha_j'', \alpha_j^{-1}$ et α_{ij}^{-1} , dans cet ordre. Par le lemme 2.2, et quitte à remplacer α_j'' par $\alpha_j''^{-1}$, la courbe γ est loxodromique.

On remarquera que, par construction, la courbe γ est contenue dans le μ_0 -voisinage de U_0 et que son $c_1(8, \mu_0)$ -voisinage est contenu dans $M_0(\mu)$.

3e cas : Tous les arcs (α_i) ont leurs deux extrémités x_i' et x_i'' dans δU_0 .

Puisque δU_0 est compact, on peut encore supposer que les suites (x_i') et (x_i'') convergent, et que tous les x_i' (resp. x_i'') sont contenus dans une petite boule B' (resp. B'') de rayon $\mu_0/2$. Puisque les α_i passent arbitrairement près du bout b , on peut en outre faire en sorte qu'au moins un point de α_i soit à distance $\geq 100\mu_0$ de tous les α_j avec $j < i$. Pour i et j fixés, considérons alors la courbe γ_{ij} formée de α_i et α_j et de deux arcs géodésiques (de longueur $\leq \mu_0$ joignant respectivement x_i' à x_j' et x_i'' à x_j'' dans les petites boules B' et B'').

La courbe γ_{ij} n'est pas homotope à 0 : En effet, des relevés de α_i et α_j fourniraient sinon deux arcs géodésiques de $\mathbb{H}^m$ dont les extrémités sont à distance $\leq \mu_0$ mais dont au moins un point de l'un est à distance $\geq 100\mu_0$ de l'autre, ce qui est clairement impossible.

Si l'un des γ_{ij} est loxodromique, on prend $\gamma = \gamma_{ij}$. (On remarquera que c'est en particulier vrai si M est sans cusps, ce qui fait que la preuve est beaucoup plus simple dans ce cas.) Sinon, il va falloir travailler un peu plus. En fait, on pourrait montrer que les γ_{ij} ne peuvent être tous paraboliques, mais on utilisera plutôt un argument basé sur le lemme 2.2.

Choisissons un point base dans la petite boule B' contenant les x_i' de sorte qu'à chaque γ_{ij} est maintenant associé un élément $[\gamma_{ij}] \in \pi_1(M)$. Comme $[\gamma_{1i}][\gamma_{1j}]^{-1} = [\gamma_{ij}]$ est non nul, les $[\gamma_{1i}]$ sont deux à deux distincts. En particulier, ceci entraîne que les $[\gamma_{1i}]$ ne peuvent tous être dans le même sous-groupe parabolique de $\pi_1(M)$: Sinon, dans $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^3$ muni d'un relèvement $\tilde{B}'$ de la petite boule B' , les extrémités des relevés $\tilde{\gamma}_{1i}$ des γ_{1i} issus de $\tilde{B}'$ tendraient dans $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$ vers le point fixe $p \in S_\infty^2$ du sous-groupe parabolique considéré ; ces $\tilde{\gamma}_{1i}$ finiraient alors par entrer dans n'importe quelle horiboule centrée en p , contredisant le fait que les α_i évitent les composantes cuspidales de $M_f(\mu_0)$. (Faire un dessin dans le modèle du demi-espace supérieur.)

Choisissons i et j de sorte que $[\gamma_{1i}]$ et $[\gamma_{1j}]$ soient dans des sous-groupes paraboliques de $\pi_1(M)$ distincts. On prend alors pour γ l'une des deux courbes $\gamma_{1i} \gamma_{1j}$ et $\gamma_{1i} \gamma_{1j}^{-1}$ qui, par le lemme 2.2, est loxodromique.

Dans les trois cas, on a ainsi construit une courbe loxodromique γ formée d'au plus 8 arcs géodésiques et contenue dans le μ_0 -voisinage de U_0 . De plus, le $c_1(8, \mu_0)$ -voisinage de γ est contenu dans $M_0(\mu)$. Si γ^* est la géodésique fermée de M homotope à γ , le lemme 2.1 affirme que, ou bien γ est contenue dans le $c_1(8, \mu_0)$ -voisinage de γ , ou alors γ^* est l'âme d'un tube de Margoulis de $M_f(\mu_0)$ rencontrant ce même $c_1(8, \mu_0)$ -voisinage de γ . En particulier, γ^* est contenue dans $M_0(\mu)$.

Après cette longue préparation, passons à l'assaut final pour démontrer la proposition 2.4. Soit donc U un voisinage dans $M_0(\mu)$ du bout géométriquement infini b . Sans perte de généralité, on peut supposer U connexe et de frontière δU compacte. Le compact δU ne rencontre qu'un nombre fini de tubes de Margoulis de $M_f(\mu_0)$: En effet, si B est une boule dans le revêtement universel $\tilde{M}$ dont la projection dans M recouvre δU , on verrait sinon une infinité d'éléments de $\pi_1(M)$ envoyant B à distance $\leq \mu_0$, contredisant le fait que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ est proprement discontinue. Il existe par conséquent un voisinage U_0 de b dans $M_0(\mu_0)$ qui est à distance $> c_1(8, \mu_0) + \mu_0$ du complémentaire de U et des tubes de Margoulis de $M_f(\mu_0)$ rencontrant δU .

Appliquons l'analyse précédente à U_0 , ce qui fournit une courbe γ contenue dans le μ_0 -voisinage de U_0 et homotope à une géodésique fermée $\gamma^* \subset M_0(\mu)$. Si γ^* est contenue dans le $c_1(8, \mu_0)$ -voisinage de γ , elle est contenue dans U par construction de U_0 et γ . Sinon, par le lemme 2.1, γ^* est l'âme d'un tube de Margoulis de $M_f(\mu_0)$ passant à distance $\leq c_1(8, \mu_0)$ de γ . Par construction, ce tube de Margoulis ne peut être contenu dans $M_0(\mu) - U$, ni rencontrer δU . Il est donc entièrement contenu dans U , et il en est par conséquent de même pour γ^* .

On a ainsi montré que tout voisinage dans $M_0(\mu)$ du bout géométriquement infini b contient une géodésique fermée γ^* , ce qui achève la démonstration de la proposition 2.3. $\square$

Revenons momentanément à la preuve du théorème A (ou du théorème 1.7 équivalent). Soit donc M une variété hyperbolique de dimension 3, dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$ de l'introduction. Avec les notations du § 1.3, soit S_b la composante du bord de l'âme compacte de $M_0(\mu)$ faisant face au bout b . La proposition 2.3 donne alors :

PROPOSITION 2.4. Avec les données ci-dessus, et quitte à restreindre la constante de Margoulis μ , le bout b est géométriquement infini si et seulement si il existe une suite de courbes fermées (α_j) (pas forcément simples) sur la surface S_b , homotopes à des géodésiques fermées α_j^* de M , telles que tout voisinage de b contienne toutes les géodésiques α_j^* avec j suffisamment grand.

De plus, on peut faire en sorte que l'homotopie de α_j à α_j^* ne rencontre S_b qu'en α_j .

Démonstration. La proposition 2.3 fournit une suite de géodésiques fermées (α_j^*) avec les propriétés annoncées. Il reste à voir que ces α_j^* sont homotopes à des courbes α_j sur S_b par une homotopie ne rencontrant S_b qu'en α_j . Mais ceci découle immédiatement de la définition de l'âme compacte de $M_0(\mu)$ et du fait que $\pi_1(S_b) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective (cf. lemme 1.5). $\square$

III . LE LEMME DU NOMBRE D'INTERSECTION

Ce lemme va montrer que, si le bout b est géométriquement infini, les courbes α_i sur la surface S_b fournies par la proposition 2.4 peuvent être choisies de sorte que, en gros, leur nombre de points doubles soit arbitrairement petit devant le carré de leur longueur quand i tend vers l'infini. Elles se comportent donc de plus en plus comme des courbes simples.

Ce résultat est dû à Thurston et apparaît au théorème 9.3.5 de [Thu₂]. Nous en donnons toutefois une preuve ici pour plusieurs raisons, outre la volonté d'offrir une exposition à peu près complète : D'une part, nous utiliserons un argument analogue au § 6.3, et une bonne compréhension de la démonstration sera alors nécessaire. D'autre part, ce lemme est présenté de manière un peu erronée dans les premières versions de [Thu₂], et y est en particulier énoncé avec des hypothèses insuffisantes pour la démonstration utilisée.

§ 3.1. Nombre d'intersection géométrique.

Dans une variété M , soient une courbe fermée $\alpha: S^1 \rightarrow M$ et une application $\varphi: N \rightarrow M$ d'une variété compacte N dont la dimension est inférieure de 1 à celle de M . On suppose $\varphi(\partial N)$ disjoint de $\alpha(S^1)$, et l'intersection de α et φ transverse. Pour être rigoureux, un point d'intersection de α et φ est un point $(x, y) \in S^1 \times N$ tel que $\alpha(x) = \varphi(y)$; bien souvent, on identifiera celui-ci avec le point $\alpha(x) = \varphi(y)$ de $\alpha(S^1) \cap \varphi(N)$ correspondant, ce qui d'ailleurs ne prête aucunement à confusion quand α et φ sont "génériques".

On munit l'intersection de α et φ de la relation d'équivalence qui identifie deux points d'intersection quand ils peuvent être joints par un chemin k dans S^1 et un chemin k' dans N tels que $\alpha(k)$ et $\varphi(k')$ soient homotopes dans M à extrémités fixes. Similairement, un point d'intersection est trivial s'il peut être joint à lui-même par un arc $k \subset S^1$ non trivial dans $\pi_1(S^1)$ et par un arc $k' \subset N$ tels que les lacets $\alpha(k)$ et $\varphi(k')$ soient homotopes dans M à extrémités fixes; on remarquera que cette notion est invariante par la relation d'équivalence. On définit alors le nombre d'intersection géométrique $i(\alpha, \varphi)$ comme le nombre de classes d'équivalences non triviales de l'intersection de α et φ qui sont formées d'un nombre impair de points.

On pourra comparer cette notion à certaines définitions classiques de nombres d'intersection à valeurs dans $(\mathbb{Z}/2)[\pi_1(M)]$. L'exclusion des points d'intersection triviaux est principalement motivée par la propriété intéressante suivante du nombre d'intersection vis-à-vis des courbes itérées : Si la courbe α^p est la composition de la courbe α avec un revêtement $S^1 \rightarrow S^1$ de degré p , alors

$$i(\alpha^p, \varphi) = p i(\alpha, \varphi) \quad .$$

LEMME 3.1. Le nombre d'intersection $i(\alpha, \varphi)$ est invariant par toute homotopie $t \mapsto \alpha_t$ et $t \mapsto \varphi_t$ gardant $\alpha_t(S^1)$ disjoint de $\varphi_t(\partial N)$ pour tout t .

Démonstration. Combinons les deux homotopies $t \mapsto \alpha_t$ et $t \mapsto \varphi_t$ en une application $\Phi: S^1 \times N \times [0, 1] \rightarrow M \times M$. Par transversalité, on peut perturber Φ en fixant le bord en une application Ψ telle que la préimage $\Psi^{-1}(\Delta)$ de la diagonale Δ de $M \times M$ soit une sous-variété de dimension 1 de $S^1 \times N \times [0, 1]$. Le bord de $\Psi^{-1}(\Delta)$ est alors contenu dans $S^1 \times N \times \{0, 1\}$, et correspond à l'intersection de α_0 et φ_0 d'une part, α_1 et φ_1 d'autre part.

Soit k un arc composante de $\Psi^{-1}(\Delta)$. Si ∂k est contenu dans $S^1 \times N \times 0$, les deux points d'intersection de α_0 et φ_0 correspondants sont clairement équivalents pour la relation d'équivalence utilisée pour définir $i(\alpha_0, \varphi_0)$, par considération d'un arc de $S^1 \times N \times 0$ homotope à k à extrémités fixes. De même si ∂k est contenu dans $S^1 \times N \times 1$. D'autre part, si k et k' sont deux arcs de $\Psi^{-1}(\Delta)$ joignant $S^1 \times N \times 0$ à $S^1 \times N \times 1$, on vérifie sans peine que les deux points d'intersection $k \cap (S^1 \times N \times 0)$ et $k' \cap (S^1 \times N \times 0)$ sont équivalents si et seulement si $k \cap (S^1 \times N \times 1)$ et $k' \cap (S^1 \times N \times 1)$ le sont ; de même, $k \cap (S^1 \times N \times 0)$ est trivial si et seulement si $k \cap (S^1 \times N \times 1)$ l'est. Il vient alors immédiatement que $i(\alpha_0, \varphi_0) = i(\alpha_1, \varphi_1)$. $\square$

On dit qu'une sous-variété de codimension 1 d'une variété donnée est biface si son fibré normal est trivial, autrement dit si elle a deux faces distinctes. D'autre part, rappelons qu'une surface S dans une variété M de dimension 3 est incompressible si l'application $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective.

LEMME 3.2. Soit S une surface biface incompressible dans une variété M de dimension 3. Pour $j = 1, 2$, considérons deux courbes fermées $\alpha_j \subset S$ et $\alpha'_j \subset M - S$ homotopes par une homotopie $A_j: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ ne recoupant pas S hors de α_j . Supposons en outre que les deux homotopies A_1 et A_2 partent du même côté de S , et que α'_1 et α'_2 sont disjointes. Alors,

$$i(\alpha_1, \alpha_2) \leq i(\alpha'_1, A_2) + i(\alpha'_2, A_1) \quad ,$$

où le premier terme est le nombre d'intersection des deux courbes dans S , tandis que les deux autres sont les nombres d'intersection dans M .

Démonstration. Par une légère perturbation, on peut supposer que A_1 et A_2 sont des immersions transverses au voisinage de l'intersection $A_1 \cap A_2$ de leurs

images. (Selon l'abus de langage que l'on a systématiquement utilisé pour les courbes, on note de la même façon l'application A_j et son image.) Cette intersection est alors formée d'arcs et courbes fermées immergées dans M . Considérons un tel arc k .

Si k joint deux points x et y de $\alpha_1 \cap \alpha_2$, A_1 et A_2 montrent qu'il est homotope à extrémités fixes à un chemin $k_1 \subset \alpha_1$ et un chemin $k_2 \subset \alpha_2$.

Les deux chemins k_1 et k_2 sont en particulier homotopes dans M , et donc dans S par incompressibilité de cette surface. On en déduit que x et y sont équivalents pour la relation utilisée pour définir $i(\alpha_1, \alpha_2)$.

Si k joint deux points de $\alpha_1' \cap A_2$ (ou symétriquement de $\alpha_2' \cap A_1$), l'anneau singulier A_1 fournit immédiatement un arc dans α_1' homotope à k , et donc une équivalence entre ces deux points.

Enfin, la dernière possibilité est que k joigne un point x de $\alpha_1 \cap \alpha_2$ à un point y de $\alpha_1' \cap A_2$ ou de $\alpha_2' \cap A_1$. Si k' est un autre tel arc joignant $x' \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ à un y' du même type, on vérifie sans peine en utilisant A_1 et A_2 que x est équivalent à x' si et seulement si y et y' sont équivalents, et que x est trivial si et seulement si x' l'est.

Comme un tel arc k de $A_1 \cap A_2$ est issu de chaque point de $\alpha_1 \cap \alpha_2$, $\alpha_1' \cap A_2$ et $\alpha_2' \cap A_1$, on déduit des observations ci-dessus qu'à chaque classe d'équivalence X de $\alpha_1 \cap \alpha_2$ sont naturellement associées une classe d'équivalence Y de $\alpha_1' \cap A_2$ et une classe Z de $\alpha_2' \cap A_1$ (éventuellement vides), dont les cardinaux vérifient

$$\#X = \#Y + \#Z \pmod{2}.$$

La conclusion du lemme 3.2 en découle immédiatement. $\square$

Par le même genre d'arguments, on démontre la formule de "dualité" ci-dessous qui sera particulièrement commode au § 6.4. Nous laissons la démonstration, similaire à celle du lemme 3.2, en exercice au lecteur.

LEMME 3.3. Dans une variété M de dimension 3, considérons quatre courbes disjointes $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2'$, et deux homotopies A_1 entre α_1 et α_1' et A_2 entre α_2 et α_2' . Supposons que $\alpha_1 \cap A_2 = \alpha_2 \cap A_1 = \emptyset$. Alors

$$i(\alpha_1', A_2) = i(\alpha_2', A_1) \quad . \quad \square$$

C'est essentiellement pour cette formule de dualité que nous avons introduit la condition de parité des classes d'équivalence lors de la définition du nombre d'intersection géométrique.

§ 3.2. Le lemme du nombre d'intersection.

Considérons une variété hyperbolique M de dimension 3, une constante de Margoulis μ pour M , et une surface biface incompressible compacte S dans $M_0(\mu)$. Nous allons voir que deux courbes de S homotopes à des géodésiques situées loin de S ont en général un nombre d'intersection petit par rapport à leur longueur. Plus précisément :

PROPOSITION 3.4. Dans le cadre ci-dessus, il existe une constante C avec la propriété suivante : Soient α_1^* et α_2^* deux géodésiques fermées de M , situées à distance $\geq D$ de S , et homotopes à deux courbes α_1 et α_2 sur S par deux homotopies ne recoupant pas S et arrivant du même côté de S . Supposons d'autre part que chacune de ces géodésiques ou bien est disjointe de la partie fine $M_f(\mu)$, ou bien est l'âme d'un tube de Margoulis. Alors :

$$i(\alpha_1, \alpha_2) \leq C e^{-D} \ell(\alpha_1) \ell(\alpha_2) + 2,$$

où $i(,)$ et $\ell(,)$ désignent respectivement le nombre d'intersection dans S et la longueur dans M .

Démonstration. Soient A_1 et A_2 les homotopies entre α_1 et α_1^* d'une part, α_2 et α_2^* d'autre part. Par le lemme 3.2, il suffit de majorer $i(\alpha_1^*, A_2)$ et $i(\alpha_2^*, A_1)$. Pour commencer, supposons les géodésiques α_1^* et α_2^* disjointes.

Considérons $i(\alpha_1^*, A_2)$. D'après le lemme 3.1, celui-ci est indépendant de l'homotopie A_2 entre α_2 et α_2^* . Quitte à perturber légèrement la surface S de sorte que α_1 soit géodésique par morceaux, on peut donc choisir l'homotopie A_2 hyperboliquement simpliciale pour une triangulation en tambour de l'anneau $S^1 \times [0, 1]$. Toujours par une petite perturbation de S , on peut supposer l'intersection de A_2 avec α_1^* transverse.

Si l'on identifie A_2 avec son graphe, l'anneau A_2 hérite de la métrique de M une métrique hyperbolique à bord géodésique par morceaux.

La restriction imposée à l'intersection de α_1^* avec la partie fine $M_f(\mu)$ a la conséquence suivante : Deux points x et y de $\alpha_1^* \cap A_2$ qui sont à distance $\leq \mu/2$ à la fois dans α_1^* et dans A_2 sont équivalents pour la relation utilisée pour définir les nombres d'intersection géométrique. En effet, x et y sont alors joints par un chemin dans α_1^* et un chemin dans A_2 , tous deux de longueur $\leq \mu/2$, qui se combinent pour former une courbe fermée de longueur $\leq \mu$. Si α_1^* évite $M_f(\mu)$, cette courbe est homotope à 0, et x et y sont équivalents. Sinon, x est dans un tube de Margoulis d'âme α_1^* et cette courbe

fermée est homotope à un certain itéré de α_1^* ; en rajoutant au chemin dans α_1^* un nombre convenable de tours autour de α_1^* , on exhibe encore une équivalence entre x et y .

Après ces remarques, la preuve se scinde en deux cas.

Premier cas. $\ell(\alpha_1^*) > \mu$.

Remarquons qu'en raison des hypothèses de la proposition 3.4, ceci entraîne que α_1^* évite la partie fine $M_f(\mu)$ de M .

On considère le produit abstrait $\alpha_1^* \times A_2$, muni du produit des métriques induites par M . Chaque point de $\alpha_1^* \cap A_2$ correspond à un point de $\alpha_1^* \times A_2$, et nous venons de voir que deux tels points qui sont à distance $\leq \mu/2$ dans cette variété $\alpha_1^* \times A_2$ sont des points d'intersection équivalents.

Considérons d'abord les points d'intersection qui sont à distance $\geq \mu/8$ du bord dans $\alpha_1^* \times A_2$. Choisissons un représentant x_p dans chaque classe d'équivalence de tels points. Puisque α_1^* évite la partie fine de M , deux géodésiques de $\alpha_1^* \times A_2$ de longueur $\leq \mu/2$ issues de x_p ne peuvent se recouper ; en effet, elles se projetteraient sinon sur deux géodésiques de A_2 dont l'image dans M fournirait une courbe fermée de longueur $\leq \mu$ rencontrant α_1^* et homotope à un itéré non trivial de α_2^* . Par conséquent la boule de rayon $\mu/8$ autour de x_p dans $\alpha_1^* \times A_2$ est isométrique à la boule de même rayon dans $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, et a donc un certain volume c_1 ne dépendant que de μ . Les x_p étant deux à deux non équivalents, nous avons vu qu'ils sont à distance $\geq \mu/2$ les uns des autres. On en déduit que le nombre de classes d'équivalence représentées par des points à distance $\geq \mu/8$ du bord de $\alpha_1^* \times A_2$ est majoré par

$$c_1^{-1} \text{volume}(\alpha_1^* \times A_2) = c_1^{-1} \ell(\alpha_1^*) \text{aire}(A_2).$$

Or, un calcul simple par balayage à partir d'un sommet, utilisant la distorsion de l'application exponentielle par la courbure, montre que l'aire d'un triangle hyperbolique est majorée par la longueur de chacun de ses côtés (voir le lemme 9.3.2 de [Thu₂]; on peut également se ramener à un triangle rectangle et utiliser les formules de [Bea, §7.11]). En particulier, comme chaque triangle de A_2 a un côté contenu dans α_2 ou α_2^* , il vient que

$$\text{aire}(A_2) \leq \ell(\alpha_2) + \ell(\alpha_2^*) \leq 2\ell(\alpha_2)$$

et le nombre de classes d'équivalence de $\alpha_1^* \cap A_2$ représentées par des points à distance $\geq \mu/8$ du bord de $\alpha_1^* \times A_2$ est au plus

$$2c_1^{-1} \ell(\alpha_1^*) \ell(\alpha_2)$$

Considérons maintenant les points d'intersection à distance $\leq \mu/8$ du bord dans $\alpha_1^* \times A_2$. Choisissons encore pour chaque classe d'équivalence de tels points un représentant x_p , et un point x'_p dans $\partial(\alpha_1^* \times A_2)$ à distance $\leq \mu/8$ de x_p . Les x_p étant à distance $\geq \mu/2$ les uns des autres, les x'_p sont à distance $\geq \mu/4$ les uns des autres. D'autre part, $\partial(\alpha_1^* \times A_2)$ est localement isométrique à $\mathbb{R}^2$, et le rayon d'injectivité en chaque x'_p est $\geq \mu/8$ encore parce que α_1^* évite la partie fine. Si c_2 minore l'aire de la boule de rayon $\mu/8$ dans $\mathbb{R}^2$, on en déduit comme précédemment que le nombre de classes d'équivalence représentées par des points à distance $\leq \mu/8$ du bord est majoré par

$$\begin{aligned} c_2^{-1} \text{aire}(\partial(\alpha_1^* \times A_2)) &= c_2^{-1} \ell(\alpha_1^*) (\ell(\alpha_2) + \ell(\alpha_2^*)) \\ &\leq 2c_2^{-1} \ell(\alpha_1^*) \ell(\alpha_2) . \end{aligned}$$

En combinant ces deux analyses, on obtient que le nombre total de classes d'équivalence, et donc en particulier $i(\alpha_1^*, A_2)$, est majoré par

$$2(c_1^{-1} + c_2^{-1}) \ell(\alpha_1^*) \ell(\alpha_2) .$$

D'autre part, puisque tout point de α_1 est à distance $\geq D$ de la géodésique fermée α_1^* , un calcul simple (cf. [Bea, §7.35]) montre que

$$\ell(\alpha_1) \geq \text{ch}(D) \ell(\alpha_1^*) \geq (e^D/2) \ell(\alpha_1^*) .$$

D'où

$$i(\alpha_1^*, A_2) \leq 4(c_1^{-1} + c_2^{-1}) e^{-D} \ell(\alpha_1) \ell(\alpha_2)$$

quand α_1^* est de longueur $\geq \mu$.

Second cas. $\ell(\alpha_1^*) \leq \mu$.

Deux points de α_1^* sont alors toujours à distance $\leq \mu/2$ dans α_1^* , et par conséquent deux points non équivalents de $\alpha_1^* \cap A_2$ sont nécessairement à distance $\geq \mu/2$ dans A_2 .

Comme dans le cas précédent, le nombre de classes d'équivalence de $\alpha_1^* \cap A_2$ représentées par des points à distance $\geq \mu/8$ de ∂A_2 est majoré par

$$c_3^{-1} \text{aire} \{x \in A_2 ; d(x, \alpha_2) \geq D - \mu/8\}$$

où c_3 est l'aire du disque de rayon $\mu/8$ dans $\mathbb{H}^2$, puisque tout point de α_1^* est à distance $\geq D$ de la surface S . On remarquera que l'on utilise ici l'hypothèse que $\alpha_1^* \neq \alpha_2^*$ pour montrer que le rayon d'injectivité de A_2 est $\geq \mu/8$ en chaque point de $\alpha_1^* \cap A_2$.

Or, dans un triangle hyperbolique, l'aire de l'ensemble des points à distance $\geq R$ d'un côté est majoré par e^{-R} fois la longueur de ce côté. C'est un exercice facile que l'on montre aisément par balayage à partir du sommet

opposé (voir le lemme 9.3.2 de [Thu₂]).

En appliquant cette estimation aux triangles de A_2 ayant une arête dans α_2 et l'autre sommet dans α_2^* , on obtient que

$$\begin{aligned} \text{aire } \{x \in A_2 \mid d(x, \alpha_2) \geq D - \mu/8\} &\leq \ell(\alpha_2^*) + e^{-D+\mu/8} \ell(\alpha_2) \\ &\leq (2 + e^{\mu/8}) e^{-D} \ell(\alpha_2) . \end{aligned}$$

D'autre part, le nombre de classes d'équivalence de points de $\alpha_1^* \cap A_2$ à distance $\leq \mu/8$ de $\ell(\alpha_2^*)$ est majoré par le plus grand de 1 et de

$$(4/\mu) \ell(\alpha_2^*) \leq (8/\mu) e^{-D} \ell(\alpha_2) .$$

D'où l'on déduit que

$$i(\alpha_1^*, A_2) \leq (2c_3^{-1} + c_3^{-1} e^{\mu/8} + 8/\mu) e^{-D} \ell(\alpha_2) + 1$$

quand $\ell(\alpha_1^*) \leq \mu$.

Pour unifier les formules dans les deux cas, remarquons qu'il existe une borne inférieure $c_0 > 0$ à la longueur des courbes homotopiquement non triviales dans la surface compacte S . Par conséquent, si la constante C est choisie de sorte que

$$\begin{aligned} C/2 &\geq 4(c_1^{-1} + c_2^{-1}) \\ \text{et} \quad C/2 &\geq (2c_3^{-1} + c_3^{-1} e^{\mu/2} + 8/\mu) c_0^{-1} , \end{aligned}$$

nous avons montré dans les deux cas que

$$i(\alpha_1^*, A_2) \leq (C/2) e^{-D} \ell(\alpha_1) \ell(\alpha_2) + 1 .$$

D'où, par le lemme 3.2

$$i(\alpha_1, \alpha_2) \leq i(\alpha_1^*, A_2) + i(\alpha_2^*, A_1) \leq C e^{-D} \ell(\alpha_1) \ell(\alpha_2) + 2 .$$

Ceci termine la preuve de la proposition 3.4 quand les géodésiques α_1^* et α_2^* sont disjointes.

Dans le cas général, on procède de même en approchant α_1^* par une géodésique brisée disjointe de α_2^* , et l'argument est exactement le même, sauf dans le cas suivant.

3e cas. $\alpha_1^* = \alpha_2^*$ et $\ell(\alpha_1^*) \leq \mu$.

En effet, l'analyse faite au deuxième cas se trouve alors en défaut pour montrer que le rayon d'injectivité de l'anneau A_2 est $\geq \mu/2$ aux points de $\alpha_1^* \cap \text{int}(A_2)$. Choisissons donc comme précédemment deux homotopies

hyperboliquement simpliciales "en tambour" A_1 et A_2 entre α_1 et α_1^* d'une part, α_2 et α_2^* d'autre part, après une perturbation de S de sorte que α_1 et α_2 soient géodésiques par morceaux et que α_1^* coupe transversalement les intérieurs des anneaux A_1 et A_2 .

Montrons que le rayon d'injectivité de A_2 est $\geq \mu/2$ en tout point x de $\alpha_1^* \cap \text{int}(A_2)$. Sinon, il existe un lacet γ de longueur $\leq \mu$ non trivial dans $\pi_1(A_2; x)$. Si k est un arc joignant x à $\alpha_1^* \subset \partial A_2$ dans A_2 , la classe de γ dans $\pi_1(A_2; x)$ est également celle de $k(\alpha_1^*)^n k^{-1}$ pour un certain entier n . D'autre part, par le lemme de Margoulis (proposition 1.1), la classe de γ dans $\pi_1(M; x)$ est également celle d'un $(\alpha_1^*)^m$. Les deux lacets $k(\alpha_1^*)^n k^{-1}$ et $(\alpha_1^*)^m$ représentent donc le même élément de $\pi_1(M; x)$. Or, par construction "en tambour" de A_2 , on peut choisir l'arc k contenu dans une géodésique de M joignant α_1^* à α_2 . Alors les lacets $k(\alpha_1^*)^n k^{-1}$ et $(\alpha_1^*)^m$ ne peuvent être homotopes fixant x que si k est contenu dans α_1^* , ce qui est exclu car sinon α_1^* rencontrerait α_2 et en particulier S .

Approchons α_1^* et α_2^* par des géodésiques brisées α'_1 et α'_2 respectivement contenues dans A_1 et A_2 , et soient A'_1 et A'_2 les homotopies entre α_1 et α'_1 d'une part, α_2 et α'_2 d'autre part, définies par restriction de A_1 et A_2 . Si α'_1 est suffisamment proche de α_1^* , le rayon d'injectivité de A'_2 en chaque point de $\alpha'_1 \cap A'_2$ à distance $\geq \mu/8$ du bord est maintenant $> \mu/2$. De même pour le rayon d'injectivité de A'_1 sur $\alpha'_2 \cap A'_1$. On peut alors appliquer l'analyse du deuxième cas pour majorer $i(\alpha'_1, A_2)$ et $i(\alpha'_2, A_1)$, et obtenir ainsi l'inégalité cherchée en faisant tendre α'_1 et α'_2 vers α_1^* et α_2^* . $\square$

Remarque. A propos du troisième cas de la preuve ci-dessus, Jean-Pierre Otal m'a fait remarquer qu'on peut a posteriori démontrer un résultat plus fort à l'aide d'interpolations de surfaces plissées [Thu₂, §9.6] et de l'analyse faite au §6.2 : Si μ est choisi suffisamment petit et si $\ell(\alpha_1^*) \leq \mu$, alors α_1 est homotope dans S à une courbe simple.

IV . COURANTS GEODESIQUES SUR LES SURFACES

Si l'on applique le lemme du nombre d'intersection à la suite de courbes $\alpha_j \subset S_b$ fournie par la proposition 2.4, dont les géodésiques associées α_j^* sont situées arbitrairement loin de S_b , on en déduit que leur nombre d'auto-intersection $i(\alpha_j, \alpha_j)$ devient arbitrairement petit devant le carré de leur longueur. Elles deviennent donc "de plus en plus comme des courbes simples". Le but de cette section est de donner un sens à cette assertion, en créant un certain espace topologique où les α_j vont converger vers quelque chose qui sera aussi une limite de courbes simples. A la motivation près, cette section est indépendante du reste de l'article.

§ 4.1. Définitions.

Soit S une surface sans bord, de type fini et de caractéristique d'Euler strictement négative. On s'intéresse à l'ensemble des classes d'homotopie de courbes fermées, non orientées et homotopiquement non triviales, dans S . Pour fixer un représentant privilégié dans chaque telle classe d'homotopie, il est commode de munir S d'une métrique hyperbolique sans cusps arbitraire. Alors, chaque classe d'homotopie est représentée par une unique géodésique fermée dans S .

Dans $[Thu_1]$ $[Thu_2]$, Thurston a étudié le sous-ensemble des classes d'homotopie de courbes simples. Munissant celui-ci d'une topologie, il en a défini une certaine complétion formée des laminations géodésiques mesurées : Une lamination géodésique mesurée est la donnée d'un feuilletage partiel de S par des géodésiques simples (sans points doubles) disjointes, ainsi que d'une mesure transverse invariante à ce feuilletage (voir § 4.3). Nous allons étendre cette construction aux courbes non simples.

La différence entre une courbe simple et une courbe pas simple provient évidemment ... des points doubles. Pour se débarrasser de ceux-ci, il est relativement naturel de les déssingulariser en relevant les géodésiques fermées dans le fibré tangent unitaire $T_1(S)$ de S . En fait, comme on néglige les orientations des courbes, il vaut mieux regarder le fibré tangent en droites $\mathbb{P}(S)$, quotient de $T_1(S)$ par l'involution qui induit l'application antipodale sur chaque fibre.

Puisque l'on a fixé une métrique hyperbolique sur S , le fibré tangent unitaire $T_1(S)$ se trouve muni du flot géodésique dont les trajectoires sont définies en suivant les géodésiques de S et en les relevant à $T_1(S)$ par considération de leurs vecteurs tangents en chaque point. Par passage au quotient, le flot géodésique de $T_1(S)$ induit un feuilletage $\mathfrak{F}$ de dimension 1 de $\mathbb{P}(S)$, appelé le feuilletage géodésique. Il y a alors une correspondance naturelle entre les géodésiques fermées (non orientées) de S et les feuilles compactes de $\mathfrak{F}$.

L'enveloppe convexe $C(S)$ de S , au sens du § 1.5, est la partie compacte de S délimitée par les géodésiques fermées correspondant aux bouts de S . On note $\mathbb{P}C(S)$ le compact de $\mathbb{P}(S)$ formé des relevés des géodésiques de S qui sont entièrement contenues dans cette enveloppe convexe. En particulier, $\mathbb{P}C(S)$ contient tous les relevés des géodésiques fermées de S , et le même argument que lors de la démonstration du lemme 1.19 montre que l'union de ces relevés est dense dans $\mathbb{P}C(S)$.

Par définition, un courant géodésique α de S est une mesure positive transverse invariante pour le feuilletage géodésique $\mathfrak{F}$ dont le support est contenu dans $\mathbb{P}C(S)$. Ceci veut dire que α définit une mesure positive à support contenu dans $V \cap \mathbb{P}C(S)$ sur chaque sous-variété V de codimension 1 de $\mathbb{P}(S)$ transverse à $\mathfrak{F}$, et que α est invariante par holonomie dans le sens suivant : Si $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$ sont deux points de telles sous-variétés transverses situées sur la même famille de $\mathfrak{F}$, et si $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ est un difféomorphisme d'holonomie entre deux voisinages de x_1 et x_2 dans V_1 et V_2 (défini en suivant les feuilles de $\mathfrak{F}$), alors φ respecte les mesures induites par α sur U_1 et U_2 . Les courants géodésiques sont ainsi des cas particuliers des courants géométriques introduits par D. Ruelle et D. Sullivan dans [RueS].

Donnons tout de suite un exemple fondamental de courant géodésique. Etant donnée une géodésique fermée de S , il lui correspond une feuille compacte $\tilde{\alpha}$ de $\mathfrak{F}$. On lui associe alors le courant géodésique qui induit sur chaque sous-variété transverse V la mesure de Dirac aux points de $V \cap \tilde{\alpha}$; l'invariance par holonomie est en effet immédiate.

On munit l'ensemble $\mathcal{C}(S)$ des courants de S de la topologie de la convergence vague, dans laquelle deux courants α et β sont proches s'il existe une famille finie de fonctions continues $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact définies sur des sous-variétés transverses V_i telles que chaque $\alpha(f_i)$ soit proche de $\beta(f_i)$. (Voir par exemple [Bou, chap. III, §1, n° 9]). On peut même munir $\mathcal{C}(S)$ d'une

structure d'espace uniforme en prenant pour base d'entourages les

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S) ; \forall i = 1, \dots, n, |\alpha(f_i) - \beta(f_i)| < \epsilon\}$$

pour tout $\epsilon > 0$ et toute famille finie de fonctions $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ comme précédemment. On a alors le résultat classique d'analyse fonctionnelle suivant (cf. [Bou, chap. III, §1, n° 9]).

PROPOSITION 4.1. L'espace uniforme $\mathcal{C}(S)$ est complet. $\square$

Pour bien comprendre les courants de S et leur topologie, il est d'abord nécessaire de bien comprendre $\mathbb{P}(S)$ muni de $\mathfrak{F}$. Une boîte à flot B pour $\mathfrak{F}$ est définie par la donnée sur S d'un dessin en forme de lettre H allongée, dont la barre horizontale est un arc géodésique et dont les deux barres verticales sont transverses à la précédente, et suffisamment petites pour que tout arc géodésique joignant ces deux barres verticales en étant homotope à un chemin dans le H arrive transversalement sur celles-ci. (On imposera en pratique une condition supplémentaire ; voir après le lemme 4.3.) La boîte $B \subset \mathbb{P}(S)$ est alors formée des relevés de tous les arcs géodésiques de S joignant les deux barres verticales en étant homotopes à un chemin dans le H . Si Q désigne le produit abstrait des deux barres verticales du H , les coordonnées barycentriques sur chaque arc géodésique fournissent un difféomorphisme $B \cong Q \times [0, 1]$ pour lequel les feuilles de $B \cap \mathfrak{F}$ correspondent aux $* \times [0, 1]$. Remarquons que l'on peut relever Q dans B en un carré transverse au feuilletage, et que ce relèvement est unique à holonomie près ; si l'on se donne un courant géodésique $\alpha \in \mathcal{C}(S)$, on peut donc parler de la mesure $\alpha(B) \in \mathbb{R}^+$, définie comme la mesure pour α de ce carré transverse. De même, si $\partial_{\mathfrak{F}} B$ désigne la partie de B correspondant à $\partial Q \times [0, 1]$ (formée des arcs géodésiques rencontrant l'une des extrémités du H), on définit $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B)$ comme la mesure pour α du bord d'un carré transverse relevant Q .

A titre d'illustration, regardons ce que cela veut dire quand le courant géodésique α est défini par une géodésique fermée α dans S . (On identifiera usuellement les géodésiques fermées avec les courants géodésiques qu'elles définissent.) Si B est une boîte à flot, $\alpha(B)$ est clairement le nombre de sous-arcs de α qui se relèvent en des feuilles de $B \cap \mathfrak{F}$, c'est-à-dire qui joignent les deux barres verticales du H définissant B en étant homotopes à un arc dans le H .

PROPOSITION 4.2. Une base de voisinages pour le courant $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ est formée des ouverts $\mathcal{U}(\alpha; B_1, \dots, B_n; \epsilon) = \{\beta \in \mathcal{C}(S) / \forall i, |\alpha(B_i) - \beta(B_i)| < \epsilon\}$, où ϵ décrit $\mathbb{R}_*^+$ et où les B_i décrivent l'ensemble des boîtes à flot B telles que $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B) = 0$.

Démonstration. Pour expliquer la restriction $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B) = 0$, rappelons une petite subtilité de la topologie de la convergence vague : Si μ_i est une suite de mesures sur un espace localement compact X , convergeant vaguement vers une mesure μ , et si A est un sous-ensemble mesurable de X , les $\mu_i(A)$ ne convergent vers $\mu(A)$ que si $\mu(\delta A) = 0$, où δA est la frontière de A (voir [Bou, chap. IV, §5, n° 12] ; l'exemple des mesures de Dirac montre bien que cette condition est nécessaire).

A partir de là, il est clair que chaque $\mathcal{U}(\alpha; B_1, \dots, B_n; \epsilon)$ contient un ouvert de la topologie vague.

La réciproque est simplement une question d'approximation de fonctions continues à support compact par des fonctions en escalier. On remarquera que chaque boîte à flot B peut être approchée par une boîte B' avec $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B') = 0$. En effet, il suffit pour cela de raccourcir légèrement l'une des barres du H utilisé pour définir B ; puisque $\alpha(B)$ est finie, au plus une quantité dénombrable de tels raccourcissements donnent des B' avec $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B') \neq 0$. On remarquera d'autre part que toute boîte à flot admet une subdivision arbitrairement fine en boîtes à flot d'intérieurs disjoints par décomposition des barres verticales du H correspondant. $\square$

Pour appliquer la Proposition 4.2, la remarque suivante sera bien commode.

LEMME 4.3. Si $\partial_{\mathfrak{F}} B$ ne rencontre aucune feuille compacte de $\mathfrak{F}$, $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B) = 0$ pour tout courant $\alpha \in \mathcal{C}(S)$.

Démonstration. Supposons que $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B) > 0$. Alors, pour au moins l'une x des quatre extrémités du H définissant B , l'arc k transversal à $\mathfrak{F}$ qui est formé des directions en x pointant vers l'autre barre du H est de mesure non nulle pour α . Remarquons qu'il n'y a qu'une quantité dénombrable de feuilles de $\mathfrak{F}$ coupant k en au moins deux points puisqu'il y en a au plus une par élément de $\pi_1(M; x)$.

Recouvrons le compact $\mathbb{P}\mathcal{C}(S)$ par un nombre fini de boîtes à flot $B_1, \dots, B_n$. Par finitude des $\alpha(B_i)$, il vient que la partie de k formée des feuilles coupant k en exactement un point est de mesure nulle pour α . Par conséquent, la mesure définie par α sur k doit avoir au moins un atome, correspondant à une feuille passant plus d'une fois par k . Encore par finitude des $\alpha(B_i)$, cette feuille doit être compacte. $\square$

Désormais, et sauf mention explicite du contraire, on imposera aux boîtes à flot B que $\partial_{\mathfrak{F}} B$ ne rencontre aucune feuille compacte de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire qu'aucune géodésique fermée de S ne passe par une extrémité du H définissant B avant d'aller frapper la barre verticale opposée du H . Ainsi, $\partial_{\mathfrak{F}} B$ sera de mesure nulle pour tout courant géodésique $\alpha \in \mathcal{C}(S)$.

Si le lecteur souffre d'allergie au flot géodésique et aux mesures transverses, on peut donner une définition des courants géodésiques complètement indépendante de ces notions. En effet, soit $G(\tilde{S})$ la variété des géodésiques non-orientées du revêtement universel $\tilde{S}$ de S . Si $\tilde{S}$ est identifié avec le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, celle-ci est difféomorphe au ruban de Moebius $(S^1_\infty \times S^1_\infty - \Delta)/(\mathbb{Z}/2)$, où Δ est la diagonale et où $\mathbb{Z}/2$ agit par échange des deux facteurs. Le sous-ensemble $GC(\tilde{S})$ formé des géodésiques contenues dans la préimage de l'enveloppe convexe $C(S)$ correspond à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta)(\mathbb{Z}/2)$, où Λ est l'ensemble limite de $\pi_1(S)$ agissant sur $\tilde{S} \cong \mathbb{H}^2$. En remarquant que la projection $IP(\tilde{S}) \rightarrow G(\tilde{S})$ est une submersion, on constate sans peine qu'un courant géodésique est la même chose qu'une mesure sur $G(\tilde{S})$ de support contenu dans $GC(\tilde{S})$ et invariante par $\pi_1(S)$, et donc qu'une mesure $\pi_1(S)$ -invariante sur $GC(\tilde{S})$. De plus, la topologie de $\mathcal{C}(S)$ correspond alors à la topologie vague classique des mesures sur un espace localement compact.

En fait, les deux points de vue se complètent. Celui des mesures $\pi_1(S)$ -invariantes sur $GC(\tilde{S})$ semble assez approprié pour faire de l'analyse. C'est par exemple dans ce contexte que Sullivan montre dans [Sul₂] que la mesure de Hausdorff sur Λ induit un courant privilégié α sur S , ergodique dans sa classe de mesures (i.e. toute fonction $\pi_1(M)$ -invariante sur $GC(\tilde{S})$ est constante α -presque partout). Par contre, le point de vue des mesures transverses au feuilletage géodésique est plus commode quand il s'agit de faire appel à l'intuition géométrique. La preuve du résultat ci-dessous, qui ne sera pas nécessaire stricto sensu pour démontrer le théorème A, mais qui justifie quand même un peu les définitions introduites, en fournit une illustration.

PROPOSITION 4.4. Les homothétiques (réels positifs) des courants géodésiques définis par les géodésiques fermées de S sont denses dans $\mathcal{C}(S)$.

Démonstration. L'argument que nous allons utiliser est fortement apparenté aux réseaux ferroviaires utilisés par Thurston [Thu₂]. Bill Veech m'a fait remarquer que cette proposition 4.4 est en fait un cas particulier d'un résultat plus général de K. Sigmund [Sig].

Dans un premier temps, on va d'abord montrer que les combinaisons linéaires (à coefficients positifs) des géodésiques fermées sont denses dans $\mathcal{C}(S)$.

Soient donc $\alpha \in \mathcal{C}(S)$, et $u(\alpha; B_1, \dots, B_n; \varepsilon)$ un voisinage de α comme à la proposition 4.2. Puisque $\text{IPC}(S)$ est compact, on peut supposer sans perte de généralité que les boîtes à flot B_i recouvrent $\text{IPC}(S)$. De plus, quitte à redécouper ces boîtes et à les perturber un peu, on peut se ramener au cas où les intérieurs des B_i sont deux à deux disjoints : Dans un premier temps, par découpage et perturbation, on fait en sorte que les barres verticales des H définissant les B_i soient deux à deux disjointes ; puis on remarque qu'alors chaque $B_i \cap B_j$ et $\overline{B_i - B_j}$ est l'union d'un nombre fini de boîtes à flot d'intérieurs disjoints, ce qui permet de terminer.

Cette décomposition en boîtes B_i étant fixée, il existe un nombre $\ell_h > 0$ tel que chaque feuille de $B_i \cap \mathfrak{F}$ se projette dans S sur un arc géodésique de longueur $> \ell_h$. On subdivise alors les barres verticales des H pour définir une nouvelle décomposition en boîtes à flot B'_j avec les mêmes propriétés que les B_i (chaque B'_j étant contenue dans une B_i), mais qui sont étroites en ce sens que les barres verticales des H définissant les B'_j sont de longueur $\leq \ell_v$, pour une certaine "petite" constante ℓ_v qui sera précisée plus loin (tandis que leurs barres horizontales sont de longueur $> \ell_h$).

Choisissons une section Q_j de $B'_j \cap \mathfrak{F}$ pour chaque boîte B'_j , formée par exemple des milieux de chaque feuille. Soient Q_{j+} et Q_{j-} ses deux faces. Si p et q sont deux symboles de la forme $j+$ ou $j-$, on considère le sous-ensemble de la face Q_p formé des points x tels que Q_q est la première face Q_r rencontrée par la demi-feuille de $\mathfrak{F}$ issue de x (du côté Q_p). On note $a(p, q)$ la mesure de ce sous-ensemble de Q_p pour le courant géodésique α .

Les réels positifs $a(p, q)$ satisfont clairement les équations

$$\forall p, q, \quad a(p, q) = a(q, p)$$

$$\forall j, \quad \sum_p a(j_+, p) = \sum_q a(j_-, q) \quad (= \alpha(B'_j)).$$

Comme il s'agit d'équations linéaires à coefficients entiers, les $a(p, q)$ peuvent être arbitrairement approchés par des rationnels positifs $b(p, q)$ qui satisfont la même famille d'équations, et tels qu'en outre $b(p, q) = 0$ si et seulement si $a(p, q) = 0$.

Soit $D \in \mathbb{N}$ un dénominateur commun aux $b(p, q)$, de sorte que chaque $Db(p, q)$ soit entier.

Chaque fois que $a(j+, k-) \neq 0$, il existe au moins une feuille de $\mathfrak{F}$ qui sort de B_j dans le sens de Q_{j+} pour rentrer dans B_k dans le sens de Q_{k-} .

Soit alors $K(j+, k-)$ l'arc géodésique joignant les milieux des barres horizontales des H définissant respectivement B'_j et B'_k , dans la classe d'homotopie ainsi privilégiée. On remarquera que, si les boîtes B'_j ont été choisies suffisamment étroites, la longueur de $K(j+, k-)$ est $\geq \ell_h$ et que l'angle formé par $K(j+, k-)$ avec les barres horizontales des H définissant B'_j et B'_k arbitrairement petit.

On définit de même l'arc $K(p, q)$ pour tout couple de symboles p, q de la forme $j+$ ou $j-$ tels que $a(p, q) \neq 0$.

Prenons maintenant $Db(p, q)$ copies de l'arc $K(p, q)$ pour tous p, q . Puisque $\sum_p b(j+, p) = \sum_q b(j-, q)$ pour tout j , on peut recoller toutes ces copies pour former une famille γ de courbes fermées géodésiques par morceaux. (Il y a bien sûr beaucoup de choix possibles pour γ .)

Chaque courbe γ_1 de γ est presque une géodésique. En effet, elle est formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \ell_h$, tandis que ses angles sont arbitrairement petits si l'on a pris dès le début les boîtes B'_i suffisamment étroites, i.e. la constante ℓ_v suffisamment petite. Un argument simple et classique montre alors qu'il y a une homotopie arbitrairement petite entre γ_1 et une géodésique fermée γ_1^* de S . Rappelons brièvement l'argument : Si l'on sait déjà que γ_1 est homotope à une géodésique γ_1^* , on considère un point de γ_1 qui est le plus loin possible de γ_1^* dans le revêtement $\tilde{S}$ de S tel que $\pi_1(\tilde{S}) = \pi_1(\gamma_1) \subset \pi_1(S)$; si ce point est effectivement loin, un peu de trigonométrie hyperbolique montre que γ_1 fait nécessairement un grand angle en ce point, ce qui est exclu. L'argument est analogue pour montrer que γ_1 ne peut être homotope à 0; on relève γ_1 au revêtement universel de S et on vérifie que γ_1 doit faire un grand angle au point situé le plus loin d'un point base donné.

Revenons maintenant à notre voisinage $u(\alpha; B_1, \dots, B_n; \epsilon)$ de $\alpha \in \mathcal{C}(S)$. Soit $\beta \in \mathcal{C}(S)$ obtenu en divisant par D le courant de Dirac défini par l'union γ^* des géodésiques γ_1^* homotopes aux courbes γ_1 de γ . Si la constante ℓ_v a été choisie suffisamment petite pour que l'homotopie entre γ et γ^* envoie chaque arc géodésique dans γ sur un arc de γ^* dont le relevé est à distance $\leq \eta$ dans $\mathbb{P}(S)$, le nombre $\beta(B_i)$ est proche de la somme de tous les $b(j+, p)$ avec $B'_j \subset B_i$, la valeur absolue de la différence étant majorée par la somme des $b(j+, p)$ où B'_j est à distance $\leq \eta$ de $\partial_{\mathfrak{F}} B_i$. Or, cette borne est proche de la mesure pour α du η -voisinage de $\partial_{\mathfrak{F}} B_i$ dans $\mathbb{P}(S)$, laquelle est petite si η

est suffisamment petit puisque $\alpha(\partial_{\mathfrak{F}} B_1) = 0$. Par conséquent, $\beta(B_1)$ est proche de la somme des $a(j, p)$ avec $B'_j \subset B_1$, c'est-à-dire de $\alpha(B_1)$. On a ainsi montré que β est contenu dans $U(\alpha; B_1, \dots, B_n; \epsilon)$ si les B'_j sont choisies suffisamment étroites et les $b(p, q)$ suffisamment proches des $a(p, q)$.

Comme β était par construction une combinaison linéaire de géodésiques fermées, on a ainsi prouvé que ces combinaisons linéaires sont denses dans $\mathcal{C}(S)$.

Il reste à montrer que toute combinaison linéaire de géodésiques fermées peut être arbitrairement approchée par des homothétiques de géodésiques fermées. Par récurrence, il suffit de voir cela pour une combinaison linéaire $\lambda\alpha + \mu\beta$ de deux géodésiques fermées α et β .

Choisissons deux arcs géodésiques k_+ et k_- joignant α et β . Quitte à faire faire à leurs extrémités un grand nombre de tours autour de α et β , on peut choisir k_+ et k_- de sorte que les angles (α, k_+) , (α^{-1}, k_-) , (β, k_+) , (β^{-1}, k_-) en ces extrémités soient arbitrairement petits. (C'est un exercice de géométrie hyperbolique plane facile, par considération du revêtement universel $\mathbb{H}^2$.) On considère alors trois entiers positifs a , b et D tels que a/D et b/D soient respectivement proches de λ et de μ . Si γ est la courbe fermée $\alpha^a k_+ \beta^b k_-$, on vérifie comme précédemment qu'elle est homotope à une géodésique fermée γ^* par une "petite" homotopie si les divers angles entre k_+ , k_- , α et β ont été choisis suffisamment petits. D'où, si ces angles sont suffisamment petits et si a/D et b/D sont suffisamment proches de λ et μ , il suit que le courant géodésique $D^{-1}\gamma^*$ est proche de $\lambda\alpha + \mu\beta$ pour la topologie de $\mathcal{C}(S)$, par le même argument que celui utilisé plus haut.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.4. □

Avant de poursuivre, on peut se demander à quel point les notions que nous avons introduites dépendent de la métrique hyperbolique que nous avons choisie. En fait, si S_1 et S_2 sont deux surfaces hyperboliques sans cusps, tout difféomorphisme $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ induit (de manière non unique) un homéomorphisme $\hat{\varphi}: \mathbb{P}(S_1) \rightarrow \mathbb{P}(S_2)$ qui envoie feuilletage géodésique sur feuilletage géodésique. On peut voir cela, d'abord localement quand φ est presque une isométrie en utilisant le fait qu'une courbe de petite courbure dans $\mathbb{H}^2$ est uniformément proche d'une géodésique, puis globalement par connexité de l'espace de Teichmüller de S_1 . On pourra également utiliser une construction explicite de $\hat{\varphi}$ donnée par M. Gromov dans [Gro₁]. Comme $\hat{\varphi}$ envoie nécessairement

$\mathbb{P}\mathcal{C}(S_1)$ sur $\mathbb{P}\mathcal{C}(S_2)$, puisque ce sont les adhérences des feuilles compactes des feuilletages géodésiques, il permet ainsi d'identifier $\mathcal{C}(S_1)$ et $\mathcal{C}(S_2)$.

Une autre alternative est de remarquer que, selon un point de vue originellement dû à M. Morse [Mors] et largement développé par la suite (voir par exemple [BowS] [Ser] [Flo]), l'ensemble limite Λ de l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{H}^2$ admet une description uniquement en termes de métriques par mots sur le groupe $\pi_1(S)$. Si l'on interprète un courant géodésique comme une mesure $\pi_1(M)$ -invariante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta)/(\mathbb{Z}/2)$, il est alors clair que $\mathcal{C}(S)$ est en fait un invariant du groupe $\pi_1(S)$.

Nous aurions également pu définir des courants géodésiques pour toute variété hyperbolique M , avec ou sans cusps et de n'importe quelle dimension. La proposition 4.4 est alors encore valable dès que M est géométriquement finie ; la preuve en est à peu près identique, modulo un peu de bricolage près des cusps. Toujours quand M est géométriquement finie, son ensemble limite peut être décrit uniquement en termes de $\pi_1(M)$ et de la collection de ses sous-groupes paraboliques (voir [Flo]), et il en est donc de même pour l'espace $\mathcal{C}(M)$ des courants géodésiques. Quand M n'est pas géométriquement finie, une approche de l'étude de sa géométrie consiste à évaluer la différence entre $\mathcal{C}(M)$ et l'invariant homotopique $\mathcal{C}_h(M)$, défini en terme de $\pi_1(M)$ et de ses sous-groupes paraboliques de façon à coïncider avec $\mathcal{C}(M)$ quand M est géométriquement finie. Nous ne développerons toutefois pas ce point de vue dans cet article-ci (voir [Bon]).

Enfin, tant que l'on parle des choses que l'on aurait pu faire et que l'on n'a pas faites, on peut définir des courants géodésiques orientés, qui généralisent la notion de géodésique fermée orientée, en considérant les mesures transverses au flot géodésique dans $T_1(S)$ au lieu de $\mathbb{P}(S)$. Cette notion est un tout petit peu plus riche que celle de courant géodésique (non orienté), et peut peut-être avoir des applications intéressantes. Si nous avons fait l'autre choix, c'est essentiellement pour des raisons de goût, ainsi que pour récupérer la compactification de Thurston quand on se restreint aux courbes simples (voir §4.3).

§ 4.2. Nombres d'intersection et longueurs des courants géodésiques.

PROPOSITION 4.5. La fonction "nombre d'intersection" définie sur l'ensemble des géodésiques fermées de S s'étend en une application bilinéaire symétrique continue $i : \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Le nombre d'intersection géométrique de deux géodésiques fermées α_1 et α_2 se trouve être égal au nombre de triplets $(x, \lambda_1, \lambda_2)$ où $x \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ et où λ_1 et λ_2 sont deux droites distinctes de $T_x S$ respectivement tangentes à α_1 et α_2 . Cette définition a l'avantage de pouvoir s'exprimer uniquement en termes de courants géodésiques, et nous allons exploiter cette remarque pour définir la fonction i sur $\mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S)$.

Partant du fibré $\mathbb{P}(S) \rightarrow S$, on considère la somme de Whitney $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S) \rightarrow S$. En d'autres termes, $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S)$ est la variété de dimension 4 formée des triplets $(x, \lambda_1, \lambda_2)$ où $x \in S$ et λ_1 et λ_2 sont deux droites de l'espace tangent $T_x(S)$. L'oubli de la deuxième ou de la première droite définit deux projections p_1 et p_2 de $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S)$ sur $\mathbb{P}(S)$. On considère alors les deux feuilletages $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ de codimension 2 de $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S)$ dont les feuilles sont les préimages des feuilles de $\mathfrak{F}$ par, respectivement, p_1 et p_2 . On vérifie sans peine que ces deux feuilletages sont transverses sauf sur la diagonale Δ de $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S)$.

Soient α_1 et α_2 deux courants géodésiques. Par p_1 , α_1 induit une mesure transverse invariante $p_1^*(\alpha_1)$ pour $\mathfrak{F}_1$ qui, par transversalité de $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$, dépose hors de Δ une mesure sur chaque feuille de $\mathfrak{F}_2$. De même, α_2 induit au dehors de Δ une mesure $p_2^*(\alpha_2)$ sur chaque feuille de $\mathfrak{F}_1$. On considère alors la mesure produit $p_2^*(\alpha_2) \times p_1^*(\alpha_1)$ sur $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S) - \Delta$. Par définition, le nombre d'intersection $i(\alpha_1, \alpha_2)$ sera la masse de cette mesure.

Par la remarque que nous avons effectuée au début de cette preuve, il est immédiat que $i(\alpha_1, \alpha_2)$ est le nombre d'intersection usuel quand α_1 et α_2 sont deux géodésiques fermées. Il reste à vérifier que ce nombre $i(\alpha_1, \alpha_2)$ est fini pour deux courants quelconques, et que la fonction $i : \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ainsi définie est continue. La bilinéarité et la symétrie de i sont immédiates.

Fixons deux courants α_1 et $\alpha_2 \in \mathcal{C}(S)$. Si B_1 et B_2 sont deux boîtes à flot pour $\mathfrak{F}$, soit $B_1 \oplus B_2$ l'intersection de $p_1^{-1}(B_1)$ et $p_2^{-1}(B_2)$ dans $\mathbb{P}(S) \oplus \mathbb{P}(S)$. Si B_1 et B_2 sont suffisamment petites (en fonction du rayon

d'injectivité sur S), deux feuilles de $B_1 \cap \mathfrak{F}$ et $B_2 \cap \mathfrak{F}$ se projettent sur S en des arcs géodésiques simples se rencontrant en au plus un point. Il vient alors des définitions que la mesure de $B_1 \oplus B_2$ pour $p_2^*(\alpha_2) \times p_1^*(\alpha_1)$ est majorée par le produit $\alpha_1(B_1) \alpha_2(B_2)$. Par conséquent, si l'on recouvre le compact $\text{IPC}(S)$ par un nombre fini de petites boîtes à flot B_j , la masse $i(\alpha_1, \alpha_2)$ est majorée par la somme des $\alpha_1(B_j) \alpha_2(B_k)$ et est donc finie.

La continuité de i en $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S)$ va être plus délicate à montrer. En effet, comme $\text{IPC}(S) \oplus \text{IPC}(S) - \Delta$ n'est pas compact, la convergence vague de mesures $p_2^*(\beta_2) \times p_1^*(\beta_1)$ n'entraîne pas forcément la convergence de leurs masses $i(\beta_1, \beta_2)$. La stratégie va donc être la suivante : Fixons $\epsilon > 0$. On va construire un voisinage U de la diagonale Δ dans $\text{IPC}(S) \oplus \text{IPC}(S)$ dont la masse pour $p_2^*(\beta_2) \times p_1^*(\beta_1)$ est plus petite que ϵ dès que les courants (β_1, β_2) sont suffisamment près de (α_1, α_2) . On appliquera alors la convergence vague de $p_2^*(\beta_2) \times p_1^*(\beta_1)$ vers $p_2^*(\alpha_2) \times p_1^*(\alpha_1)$ au complémentaire compact de $\text{int}(U)$ dans $\text{IPC}(S) \oplus \text{IPC}(S)$ pour montrer que $i(\beta_1, \beta_2)$ diffère d'au plus 3ϵ de $i(\alpha_1, \alpha_2)$ quand (β_1, β_2) est suffisamment proche de (α_1, α_2) .

La principale difficulté technique proviendra des atomes des courants géodésiques considérés. Rappelons qu'un atome d'une mesure quelconque μ est un point x tel que $\mu(\{x\}) \neq 0$. Un atome d'un courant géodésique α est bien sûr une feuille de $\mathfrak{F}$ passant par un atome de la mesure déposée par α sur une sous-variété transverse à $\mathfrak{F}$. Une telle feuille atomique est forcément fermée : En effet, elle ne peut passer qu'un nombre fini de fois à travers une boîte à flot, par finitude de la mesure de celle-ci, et le compact $\text{IPC}(S)$ peut être recouvert par un nombre fini de boîtes à flot. Le même argument montre que pour tout $\eta > 0$, un courant géodésique n'a qu'un nombre fini d'atomes de mesure transverse $\geq \eta$.

Soient donc $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S)$ et $\epsilon > 0$. On choisit également un recouvrement de $\text{IPC}(S)$ par un nombre fini de boîtes à flot B_j , suffisamment petites pour que deux feuilles de $B_j \cap \mathfrak{F}$ et $B_k \cap \mathfrak{F}$ se projettent dans S en deux arcs simples se rencontrant en au plus un point.

Quitte à remplacer S par son revêtement d'orientation, ce qui double le nombre d'intersection, on peut supposer S orientable.

Fixons deux nombres ϵ' et ϵ'' suffisamment petits, en un sens que l'on précisera plus loin ; on peut quand même annoncer que la petitesse de ϵ' dépendra des $\alpha_1(B_j)$ et $\alpha_2(B_j)$ ci-dessus, tandis que celle de ϵ'' dépendra des mêmes plus de ϵ' . En subdivisant les barres verticales du H définissant B_j , on peut découper cette boîte à flot en petites boîtes B_k' d'intérieurs disjoints

telles que :

- (i) ou bien $\alpha_1(B'_k) < \epsilon'$;
- (ii) ou bien la barre horizontale λ_k du H définissant B'_k est contenue dans une feuille atomique de α_1 de mesure transverse $\geq \epsilon'$, et $\alpha_1(B'_k - \lambda_k) < \epsilon''$, et symétriquement pour α_2 .

Etant donnés deux courants géodésiques β_1 et β_2 , nous avons vu que la contribution de $B'_k \oplus B'_k$ à $i(\beta_1, \beta_2)$ est majorée par $\beta_1(B'_k) \beta_2(B'_k)$. Pour (β_1, β_2) suffisamment proche de (α_1, α_2) , la contribution totale à $i(\beta_1, \beta_2)$ des $B'_k \oplus B'_k$ avec $\alpha_1(B'_k) < \epsilon'$ est donc majorée par $\epsilon' \sum \beta_2(B'_k)$, qui est aussi $\epsilon' \sum \beta_2(B_j)$. Symétriquement pour les B'_k avec $\alpha_2(B'_k) < \epsilon'$. Par conséquent, si ϵ' a été choisi suffisamment petit en fonction des $\alpha_1(B_j)$ et $\alpha_2(B_j)$, la contribution à $i(\beta_1, \beta_2)$ des $B'_k \oplus B'_k$ où B'_k évite les atomes communs de masse $\geq \epsilon'$ de α_1 et α_2 va être plus petite que ϵ si (β_1, β_2) est suffisamment près de (α_1, α_2) .

Il reste à s'occuper des B'_k dont une feuille λ_k de $B'_k \cap \mathcal{F}$ est de mesure $\geq \epsilon'$ à la fois pour α_1 et α_2 . Considérons le revêtement $\tilde{S}_k$ de S dont le groupe fondamental est celui de la géodésique fermée contenant λ_k , et relevons-y B'_k . Chaque géodésique non compacte de $\tilde{S}_k$ traverse la boîte B'_k un nombre fini de fois. Par convention, on considère que la géodésique fermée de $\tilde{S}_k$ traverse B'_k une infinité de fois. Notons A_k^p la partie de B'_k formée des arcs de $B'_k \cap \mathcal{F}$ situés sur une géodésique (non compacte) de $\tilde{S}_k$ traversant la boîte B'_k exactement p fois. Alors B'_k est l'union des A_k^p , $p \in \mathbb{N}$, et de λ_k .

Nous utilisons maintenant une remarque géométrique essentielle : Si g et h sont deux géodésiques de l'anneau hyperbolique $\tilde{S}_k$ traversant respectivement p fois et q fois la boîte B'_k , les projections sur S de $B'_k \cap g$ et $B'_k \cap h$ se rencontrent en au plus $(p+q)$ points. De plus, la projection de $B'_k \cap g$ rencontre celle de λ_k en au plus un point. On en déduit que la contribution de $B'_k \oplus B'_k$ à $i(\beta_1, \beta_2)$ est majorée par

$$\sum_{p,q} \frac{p+q}{pq} \beta_1(A_k^p) \beta_2(A_k^q) + \beta_1(\lambda_k) \sum_q \beta_2(A_k^q)/q + \beta_2(\lambda_k) \sum_p \beta_1(A_k^p)/p .$$

Or, $\beta(B'_k) = \beta(\lambda_k) + \sum \beta(A_k^p)$ pour tout courant géodésique β . D'où

$$\sum_{p \geq q} \frac{p+q}{pq} \beta_1(A_k^p) \beta_2(A_k^q) \leq 2 \beta_1(B'_k) \sum_q \beta_2(A_k^q)/q$$

et
$$\sum_{p < q} \frac{p+q}{pq} \beta_1(A_k^p) \beta_2(A_k^q) \leq 2 \beta_2(B'_k) \sum_p \beta_1(A_k^p)/p$$

et la contribution de $B_k' \oplus B_k'$ à $i(\beta_1, \beta_2)$ est ainsi au plus

$$3 \beta_1(B_k') \sum_q \beta_2(A_k^q)/q + 3 \beta_2(B_k') \sum_p \beta_1(A_k^p)/p .$$

En décomposant les sommes, on obtient que

$$\begin{aligned} \sum_p \beta(A_k^p)/p &\leq \sum_{p < p_0} \beta(A_k^p)/p + p_0^{-1} \sum_{p \geq p_0} \beta(A_k^p) \\ &\leq \sum_{p < p_0} \beta(A_k^p)/p + \beta(B_k')/p_0 \\ &\leq \sum_{p < p_0} \beta(A_k^p)/p + K/p_0 \end{aligned}$$

pour tout courant géodésique β suffisamment proche de α_1 ou α_2 pour que tous les $\beta(B_j)$ soient majorés par une certaine constante K (ne dépendant que des $\alpha_1(B_j)$ et $\alpha_2(B_j)$).

Fixons p_0 de sorte que $K/p_0 < \epsilon'$. Puis remarquons que toute géodésique rencontrant la frontière de A_p^q dans B_k' rencontre nécessairement $\partial_{\mathfrak{F}} B_k'$ (éventuellement plus loin). Par le lemme 4.3, on en déduit que cette frontière de A_p^q est de mesure nulle pour tout courant géodésique. Par conséquent, et puisque les $\alpha_1(A_k^p)$ et $\alpha_2(A_k^q)$ sont $< \epsilon''$, il existe un voisinage de α_1 et α_2 dans $\mathcal{C}(S)$ tel que, pour tout courant géodésique β dans ce voisinage,

$$\sum_p \beta(A_k^p)/p \leq p_0 \epsilon'' + \epsilon' \leq 2 \epsilon'$$

si l'on a choisi $\epsilon'' \leq \epsilon'/p_0$ dès le départ (rappelons que le choix de p_0 ne dépendait que de K et ϵ').

Ainsi, si (β_1, β_2) est suffisamment proche de (α_1, α_2) , la contribution à $i(\beta_1, \beta_2)$ de tous les $B_k' \oplus B_k'$ rencontrant les atomes de mesure $\geq \epsilon'$ communs à α_1 et α_2 est au plus

$$6 \epsilon' \left(\sum_k \beta_1(B_k') + \sum_k \beta_2(B_k') \right) \leq 12 \epsilon' n K ,$$

où n est le nombre des boîtes B_j dont on est parti. Si ϵ' a été choisi suffisamment petit au démarrage, cette contribution est ainsi $\leq \epsilon$.

En combinant les deux analyses pour les B_k' , on a ainsi construit un voisinage U de Δ , formé des $B_k' \oplus B_k'$, dont la contribution à $i(\beta_1, \beta_2)$ est $\leq 2\epsilon$ pour (β_1, β_2) suffisamment proche de (α_1, α_2) . Maintenant, puisque le complémentaire de $\text{int}(U)$ dans $\mathbb{P}\mathcal{C}(S) \oplus \mathbb{P}\mathcal{C}(S)$ est compact, il vient par convergence vague que sa contribution à $i(\beta_1, \beta_2)$ est ϵ -proche de sa contribution à $i(\alpha_1, \alpha_2)$, et donc que $i(\beta_1, \beta_2)$ diffère d'au plus 5ϵ ($= 2\epsilon + 2\epsilon + \epsilon$) de $i(\alpha_1, \alpha_2)$.

si (β_1, β_2) est assez près de (α_1, α_2) .

Ceci termine la preuve de la continuité de i , et donc de la proposition 4.5. $\square$

Supposons maintenant que la surface hyperbolique S soit munie d'une semi-métrique par chemins m supplémentaire. Rappelons que m associe à chaque chemin dans S un nombre positif (éventuellement nul ou infini), que m est invariante par changement de paramétrage des chemins, qu'elle est additive pour la juxtaposition des chemins, et qu'elle est continue pour la topologie compacte ouverte. Si de plus m associe à chaque chemin non constant un réel fini et non nul, m est alors une métrique par chemins (voir [Gro₄]).

PROPOSITION 4.6. Si on munit la surface hyperbolique S d'une semi-métrique par chemins m , la fonction "longueur pour m " définie pour les géodésiques fermées (hyperboliques) s'étend en une fonction linéaire continue $\ell_m : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Etant donné un courant géodésique $\alpha \in \mathcal{C}(S)$, on munit $\mathbb{P}(S)$ de la mesure qui est localement le produit de la mesure transverse définie par α et de la métrique induite par m le long des feuilles de $\mathfrak{F}$. La longueur $\ell_m(\alpha)$ de α est alors définie comme la masse de cette mesure.

La continuité de ℓ_m ainsi définie est immédiate par compacité de $\mathbb{P}\mathcal{C}(S)$. $\square$

On remarquera que l'application ℓ_m dépend à la fois de la métrique par chemins m et de la structure hyperbolique sur S , contrairement à toutes les notions introduites jusqu'à présent, qui étaient indépendantes de cette métrique hyperbolique.

Sur la surface hyperbolique S , on a bien sûr une métrique par chemin privilégiée définie par la métrique hyperbolique, et donc une fonction longueur privilégiée ℓ sur $\mathcal{C}(S)$. Celle-ci sera fréquemment utilisée pour normaliser les éléments de $\mathcal{C}(S)$. En effet, on manipulera des courants géodésiques qui ne sont définis qu'à homothétie près, et il sera plus commode de considérer l'espace des courants géodésiques de longueur 1 plutôt que le projectifié $\mathbb{P}\mathcal{C}(S)$ de $\mathcal{C}(S)$, même si ces deux espaces sont canoniquement isomorphes. En particulier, on a la propriété suivante (valable en fait pour n'importe quelle métrique par chemins).

PROPOSITION 4.7. Sur la surface hyperbolique S , l'ensemble des courants α de longueur $\ell(\alpha)$ inférieure ou égale à 1 est compact.

Démonstration. Si B est une boîte à flot, soit λ_B le minimum de la longueur des arcs de $B \cap \mathcal{F}$. Alors $\alpha(B)$ est majoré par $\ell(\alpha)/\lambda_B$ pour tout courant α . En particulier, B étant fixée, les $\alpha(B)$ sont bornés quand α décrit l'ensemble des courants de longueur 1. La compacité de cet ensemble découle alors immédiatement d'un résultat classique d'analyse fonctionnelle (cf. [Bou, chap. III, §1, n° 9] par exemple), qui est essentiellement le théorème de Tykhonof. $\square$

§ 4.3. Laminations géodésiques mesurées.

Une lamination géodésique mesurée α sur la surface hyperbolique S (de type fini, sans cusps) est un feuilletage partiel de l'enveloppe convexe $C(S)$ muni d'une mesure transverse invariante. Plus précisément, c'est la donnée d'un fermé de $C(S)$ appelé le support $\text{Supp}(\alpha)$ de α , qui est une union disjointe de géodésiques sans points doubles, et d'une mesure définie sur tout arc k dans S transverse à $\text{Supp}(\alpha)$, dont le support est $k \cap \text{Supp}(\alpha)$ et qui est invariante par homotopie respectant $\text{Supp}(\alpha)$.

Une lamination géodésique mesurée α définit de manière naturelle un courant géodésique que l'on notera encore α . En effet, $\text{IPC}(S)$ admet une base de voisinages formée de boîtes à flot B avec la propriété suivante : Ou bien B ne rencontre pas les relèvements des géodésiques de $\text{Supp}(\alpha)$ dans $\text{IPC}(S)$, ou bien B est définie par un H dans S dont la barre horizontale est contenue dans $\text{Supp}(\alpha)$ et dont les deux barres verticales sont transverses à $\text{Supp}(\alpha)$ et isotopes par une isotopie de S respectant $\text{Supp}(\alpha)$. On définit alors $\alpha(B)$ comme étant 0 dans le premier cas, et la mesure pour α de l'une quelconque des deux barres verticales du H dans le second cas. Ceci définit clairement un courant géodésique $\alpha \in \mathcal{C}(S)$.

PROPOSITION 4.8. Les laminations géodésiques mesurées sont exactement les courants géodésiques d'auto-intersection nulle, c'est-à-dire les $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ tels que $i(\alpha, \alpha) = 0$.

Démonstration. On a défini le nombre d'intersection de deux courants géodésiques comme la masse d'une certaine mesure sur $\text{IP}(S) \oplus \text{IP}(S) - \Delta$. Or, si $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ provient d'une lamination géodésique mesurée, il est immédiat que la mesure utilisée pour définir $i(\alpha, \alpha)$ est de support vide, et donc que $i(\alpha, \alpha) = 0$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ tel que $i(\alpha, \alpha) = 0$. Alors, son support

$\text{Supp}(\alpha) \subset \mathbb{P}\mathbb{C}(S)$ se projette sur une union de géodésiques simples disjointes dans S . En effet, on verrait sinon deux arcs dans $\text{Supp}(\alpha)$ qui se projettent sur deux arcs géodésiques simples k_1 et k_2 dans S se rencontrant (transversalement) en un point. Rajoutant deux petites barres aux extrémités de chacun de ces arcs pour former un H dans S , on définit deux boîtes à flot B_1 et B_2 autour des relevés de k_1 et k_2 dans $\mathbb{P}(S)$. Mais il est alors immédiat que la contribution de $B_1 \oplus B_2$ à $i(\alpha, \alpha)$ est exactement $\alpha(B_1)\alpha(B_2)$, qui est non nul puisque k_1 et k_2 proviennent du support de α . Comme $i(\alpha, \alpha) = 0$, ceci ne peut donc se produire et l'image A de $\text{Supp}(\alpha)$ dans S est donc bien du type annoncé.

Il reste à mettre une mesure invariante sur tout arc k transverse à A . On peut clairement se restreindre pour cela aux k différentiables, et on définit alors $\alpha(k)$ comme la mesure pour α de la sous-variété transverse à $\mathcal{F}$ formée des (x, λ) où $x \in k$ et où la direction λ en x n'est pas tangente à k . On vérifie aisément que ceci définit bien une lamination géodésique mesurée, dont le courant géodésique associé est précisément α . $\square$

Les laminations géodésiques mesurées les plus simples sont évidemment les géodésiques fermées simples munies de la mesure transverse de Dirac. Thurston a montré le résultat suivant [Thu₁] [Thu₂].

PROPOSITION 4.9. Le sous-ensemble $\mathcal{L}(S)$ de $\mathcal{C}(S)$ formé des laminations géodésiques mesurées est l'adhérence de l'ensemble des combinaisons linéaires de géodésiques fermées simples disjointes.

Démonstration. $\mathcal{L}(S)$ est fermé par continuité du nombre d'intersection, et contient évidemment les homothétiques de géodésiques fermées simples.

Si $\alpha \in \mathcal{L}(S)$, on vérifie que α admet une base de voisinage $u(\alpha; B_1, \dots, B_n; \epsilon)$ au sens de la proposition 4.2 tels que les boîtes à flot $B_m, \dots, B_n$ évitent le support de α tandis que $B_1, \dots, B_m$ sont définis par des H dont la barre horizontale est contenue dans $\text{Supp}(\alpha) \subset S$ tandis que les deux barres verticales sont transverses à $\text{Supp}(\alpha)$ et isotopes par une isotopie respectant ce support. Si l'on utilise cette base de voisinage lors de la preuve de la proposition 4.5, on vérifie sans peine que celle-ci fournit une approximation de α par une combinaison linéaire de géodésiques fermées simples disjointes, ce qui démontre notre proposition. (Il s'agit exactement de la preuve de Thurston, que nous avons généralisée pour la proposition 4.5.) $\square$

En général, les homothétiques de géodésiques fermées simples ne sont pas denses dans $\mathcal{L}(S)$. En effet, les composantes de $\partial C(S)$ et les géodésiques fermées simples renversant l'orientation de S sont isolées dans l'espace des géodésiques fermées simples. Par conséquent, une lamination mesurée possédant une feuille de ce type ne peut être approchée par un multiple de géodésique fermée simple. C'est toutefois le seul contre-exemple.

Par abus de langage, on désignera souvent dans la suite le support de la lamination géodésique mesurée α par simplement $\alpha \subset S$.

V . RETRECISSEMENT DES LAMINATIONS MESUREES

On développe dans cette section un outil technique qui sera utilisé de manière fondamentale lors de la démonstration du théorème A. L'idée est grosso modo la suivante. Soit φ une application d'une surface compacte S dans une variété hyperbolique M , induisant une injection entre les groupes fondamentaux. Etant donnée une courbe simple γ sur S , on peut homotoper φ de façon à rendre $\varphi(\gamma)$ de plus en plus courte. Si $\varphi(\gamma)$ est parabolique dans M , cette longueur de $\varphi(\gamma)$ va tendre vers 0. Sinon, $\varphi(\gamma)$ va tendre vers la géodésique fermée γ^* de M homotope à γ . Nous allons effectuer une opération analogue pour une lamination géodésique mesurée α sur S , qui donnera une estimation uniforme pour toutes les courbes fermées dont un homothétique est proche de α dans l'espace $\mathcal{C}(S)$ des courants géodésiques.

Pour cela, il faut définir ce qu'est la longueur $\ell_M(\varphi(\alpha))$ de $\varphi(\alpha)$ dans M quand α est une lamination géodésique mesurée sur S , ou plus généralement un courant de $\mathcal{C}(S)$: Sur la surface S , on considère la semi-métrique par chemins induite par φ et la métrique de M (la longueur d'un chemin étant définie comme celle de son image par φ). On définit alors $\ell_M(\varphi(\alpha))$ comme la longueur du courant géodésique α pour cette semi-métrique par chemins, au sens de la proposition 4.6. Cette longueur est finie pour peu que φ soit relativement raisonnable, par exemple lipschitzienne ainsi que ce sera en pratique toujours le cas.

Habituellement, chaque surface S arrive avec une métrique hyperbolique privilégiée pour définir $\mathcal{C}(S)$, et on notera $\ell_S(\alpha)$ la longueur du courant géodésique α pour cette métrique.

PROPOSITION 5.1. Soient S une surface hyperbolique de type fini sans cusps, $\varphi: S \rightarrow M$ une application continue de S dans une variété hyperbolique M induisant une injection entre les groupes fondamentaux, et α une lamination géodésique sur S . Alors,

- (i) ou bien on peut homotoper φ de sorte que $\ell_M(\varphi(\alpha))$ soit arbitrairement petite,
- (ii) ou bien, pour tous $\epsilon > 0$ et $t < 1$, on peut homotoper φ de sorte que :
Pour toute géodésique fermée γ de S avec $\gamma/\ell_S(\gamma)$ suffisamment proche de

$\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $C(S)$, $\varphi(\gamma)$ est homotope à une géodésique fermée γ^* de M qui longe $\varphi(\gamma)$ à distance $\leq \epsilon$ sur une longueur d'au moins $t_M^\ell(\varphi(\gamma))$.

De plus, les deux possibilités s'excluent mutuellement.

Quand la lamination α est connexe, l'alternative entre les conclusions (i) et (ii) de la proposition 5.1 revient précisément à savoir si α est réalisable ou non, au sens de [Thu₂, §8].

On peut démontrer un énoncé analogue à la proposition 5.1 quand α est un courant géodésique quelconque. Il faut cependant modifier son cadre de la façon suivante : On ne considère plus seulement des applications $S \rightarrow M$, mais des applications multivoques $\mathbb{P}(S) \rightarrow M$ qui se factorisent par des variétés obtenues en découpant $\mathbb{P}(S)$ le long de portions de feuilles du feuilletage géodésique. (Ces variétés fournissent des approximations des courants géodésiques analogues aux réseaux ferroviaires définis au § 5.1.) On a une notion naturelle d'homotopie pour de telles applications multivoques, et on démontre un énoncé similaire à celui de la proposition 5.1 en partant de l'application $\mathbb{P}(S) \rightarrow M$ définie par composition de la projection $\mathbb{P}(S) \rightarrow S$ et de $\varphi : S \rightarrow M$. Après qu'il ait souffert sur le cas "simple", le lecteur devrait aisément comprendre que nous n'ayons osé lui infliger celui-ci.

L'idée de base de la démonstration de la proposition 5.1 est la suivante. Considérons une courbe fermée dans une variété hyperbolique : Si sa variation angulaire totale (i.e. l'intégrale de sa courbure) est grande, on peut la raccourcir de manière significative par une homotopie ; si sa variation angulaire totale est petite devant sa longueur, la courbe est homotope à une géodésique fermée qui passe relativement près d'elle. Bien que cette affirmation grossière ne soit pas absolument vraie, car perturbée par les "raccourcis" discutés au § 5.3, elle suggère quand même assez bien la stratégie de démonstration que nous allons utiliser. Utilisant des approximations par réseaux ferroviaires (cf. § 5.1), on va homotoper φ de sorte que $\varphi(c)$ soit un graphe dans M , et se comporte donc plus ou moins comme une courbe fermée. Au § 5.2, on introduit un processus qui réduit la longueur de $\varphi(c)$ de manière d'autant plus efficace que la variation angulaire totale de $\varphi(c)$ (convenablement définie) est grande. Si la longueur de $\varphi(c)$ tend vers 0, la conclusion (i) de la proposition 5.1 est vérifiée. Sinon, la variation angulaire totale de $\varphi(c)$ devient petite devant sa longueur et on montre au § 5.4 que, pourvu qu'on ait convenablement éliminé tout "raccourci" au § 5.3, la conclusion (ii) est vérifiée.

§ 5.1. Réseaux ferroviaires.

Les réseaux ferroviaires sont un moyen commode introduit par Thurston pour étudier les laminations géodésiques mesurées sur une surface hyperbolique S . On pourra consulter [Thu₂, §§8-9] [Cas] [HarP] [Pap] pour plus de détails sur les réseaux ferroviaires.

Un réseau ferroviaire τ dans la surface S est une famille finie de "longs" rectangles R_i dans S , feuilletés par des arcs parallèles aux "petits" côtés, venant se recoller des deux côtés d'une famille d'arcs disjoints ainsi qu'il est illustré sur l'exemple de la figure 1 (plus une condition sur $S - \tau$ énoncée plus loin). Ainsi, deux rectangles ne se rencontrent que le long de leurs petits côtés et tout petit côté est contenu dans un arc de recollement. Un rectangle est autorisé à se "mordre la queue", c'est-à-dire qu'un arc d'un de ses petits côtés peut venir se recoller sur un arc de l'autre petit côté.

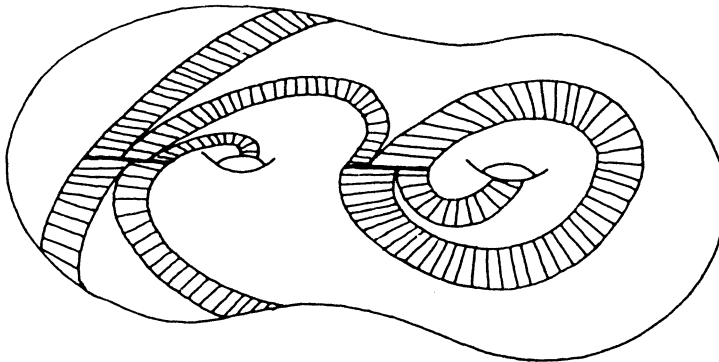


Figure 1

Si elle ne l'est déjà, l'origine de la terminologie devrait être encore plus claire si l'on ajoute les quelques définitions suivantes : Les feuilles des rectangles sont appelées les traverses du réseau ferroviaire, et les arcs de recollement où se recollent plus de deux rectangles sont les aiguillages de celui-ci. Les adhérences des composantes connexes du complémentaire des aiguillages sont les branches du réseau ferroviaire.

On remarquera que cette définition des réseaux ferroviaires diffère un peu de celle de Thurston, pour qui un réseau ferroviaire est un objet de dimension 1. On passe toutefois facilement d'un cadre à l'autre, encore que les deux définitions ne soient pas complètement équivalentes (la nôtre contient un peu plus d'information au niveau des aiguillages).

On impose habituellement, et nous le ferons effectivement, une condition supplémentaire aux réseaux ferroviaires τ , à savoir que l'adhérence de chaque composante connexe de $S - \tau$ n'est jamais un disque avec ≤ 2 coins sur le bord. Cette condition est imposée pour que τ satisfasse l'énoncé suivant, qui est une propriété d'unicité sur les trajets que peuvent suivre les trains.

LEMME 5.2. Dans un réseau ferroviaire τ sur la surface S , deux chemins transverses aux traverses qui sont homotopes dans S (à extrémités fixes) sont homotopes dans τ par une homotopie préservant les traverses.

Démonstration. Considérons la préimage $\tilde{\tau}$ de τ dans le revêtement universel $\tilde{S}$ de S . En raison de la condition sur les composantes de $S - \tau$, un argument de caractéristique d'Euler montre que $\tilde{\tau}$ ne contient aucune courbe simple qui soit transverse aux traverses sauf peut-être en un point. De même, une courbe simple dans $\tilde{\tau}$ qui est transverse aux traverses sauf en deux points borde dans $\tilde{\tau}$ un disque feuilleté de la manière évidente. Le lemme 5.2 se déduit aisément de ces remarques. $\square$

Une lamination α est portée par le réseau ferroviaire τ quand elle est contenue dans son intérieur et y est transverse aux traverses. On montre facilement qu'une lamination α est toujours portée par au moins un réseau ferroviaire : Un moyen simple consiste à construire localement un feuilletage transverse à α au voisinage de α , puis à remarquer que l'ensemble des points que l'on peut relier à α par un chemin de longueur $\leq \epsilon$ dans une feuille constitue un réseau ferroviaire si ϵ est assez petit et si le feuilletage est assez régulier (on pourra également consulter [Thu₂, § 8.9]).

Un réseau ferroviaire τ' est contenu dans τ s'il est effectivement contenu dans τ en tant que sous-ensemble de S , et si de plus toute traverse de τ' est contenue dans une traverse de τ . Il est alors clair que toute lamination portée par τ' est également portée par τ , mais que la réciproque est en général fausse.

Pour démontrer la proposition 5.1, nous allons utiliser des applications $\varphi : S \rightarrow M$ d'un type particulier sur un réseau ferroviaire τ portant α : D'une part φ envoie chaque traverse de τ sur un seul point ; d'autre part φ envoie monotonement chaque branche e de τ sur une ligne géodésique par morceaux $\varphi(e)$ de M , la condition de monotonie voulant dire que la restriction $k \rightarrow \varphi(e)$ de φ à un chemin k dans e transverse aux traverses est monotone pour les

abscisses curvilignes. On dira alors que φ est adaptée à τ . Il est immédiat que, pour tout réseau ferroviaire τ sur S , toute application $S \rightarrow M$ est homotope à une application adaptée à τ .

Les applications adaptées sont particulièrement commodes en raison du contrôle que l'on a ainsi sur tout le réseau ferroviaire. Par exemple, si φ est adaptée au réseau ferroviaire τ portant la lamination mesurée α , la longueur $\varphi(\alpha)$ dans M est simplement

$$\ell_M(\varphi(\alpha)) = \sum_e \alpha(e) \ell_M(\varphi(e)) ,$$

où e décrit l'ensemble de toutes les branches de τ et où $\alpha(e)$ est la mesure pour α de n'importe quelle traverse de e .

De même, quand φ est adaptée à τ , on peut facilement calculer la variation angulaire totale de $\varphi(\alpha)$ pour une lamination géodésique mesurée α portée par τ . Faisons une petite pause pour définir cette notion.

Pour un chemin $\gamma \subset M$ qui est une immersion par morceaux, sa variation angulaire totale, ou courbure totale, est la masse de sa mesure de courbure.

Plus précisément, c'est la somme de l'intégrale de sa fonction courbure (définie aux points au voisinage desquels γ est immergée), et des angles externes des coins de γ . A ce propos, fixons un peu les conventions : En un point $x \in \gamma$, où γ admet deux vecteurs tangents v_+ et v_- pour une orientation de γ donnée, l'angle externe de γ en x est l'angle formé par v_+ et v_- dans M , tandis que son angle interne en x est l'angle entre v_+ et $-v_-$. On remarquera que ces deux angles externe et interne sont contenus dans l'intervalle $[0, \pi]$, que leur somme est égale à π , et qu'ils sont indépendants de l'orientation de γ utilisée. On évitera de confondre l'angle externe $\in [0, \pi]$ de γ dans M avec l'angle externe orienté $\in]-\infty, \pi]$ du bord d'une surface riemannienne à bord anguleux, qui apparaît par exemple dans la formule de Gauss-Bonnet.

Supposons maintenant $\varphi : S \rightarrow M$ suffisamment raisonnable pour qu'elle envoie chaque géodésique g de S sur une courbe $\varphi(g)$ immergée par morceaux (même si $\varphi|_g$ n'est pas forcément une immersion). On pourrait réclamer par exemple que φ soit une immersion sauf en un nombre fini de points, mais cette condition est évidemment trop forte pour que φ soit adaptée à un réseau ferroviaire ; une condition ad hoc sera plutôt que φ soit adaptée à un réseau ferroviaire τ dont toutes les traverses sont géodésiques, et que φ soit une immersion sur $S - \tau$ sauf en un nombre fini de points. Alors, φ induit une mesure de courbure sur toute géodésique de S , et donc sur toute feuille du feuilletage

géodésique γ de $\mathbb{P}(S)$. Si α est un courant géodésique, on définit la variation angulaire totale, ou la courbure totale, $K_M(\varphi(\alpha))$ de $\varphi(\alpha)$ dans M comme la masse de la mesure sur $\mathbb{P}(S)$ qui est localement le produit de α et de cette mesure de courbure le long des feuilles. On vérifie immédiatement que cette définition coïncide avec celle donnée plus haut quand α est une géodésique fermée, et que l'application qui à $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ associe $K_M(\varphi(\alpha))$ est continue.

Quand α est une lamination géodésique mesurée portée par le réseau ferroviaire τ auquel φ est adaptée, sa courbure totale $K_M(\varphi(\alpha))$ peut être calculée de manière purement combinatoire. En une traverse s de τ , définissons un trajet local comme un germe d'arc transverse à s , défini seulement modulo homotopie respectant les traverses. Ainsi, à un aiguillage, un trajet local revient à spécifier deux branches de τ se faisant face en se rencontrant effectivement à cet aiguillage ; toutes les autres traverses n'admettent qu'un seul trajet local. Pour un tel trajet local t en la traverse s , on peut définir sa masse $\alpha(t)$, qui est la mesure pour α du sous-arc de s formé des points par où passe un arc transverse à s représentant t . De même, si φ est adaptée à τ , on peut définir l'angle $\theta(\varphi(t))$ comme l'angle externe au point $\varphi(s)$ de la géodésique brisée $\varphi(t)$ dans M . Alors,

$$K_M(\varphi(\alpha)) = \sum_t \alpha(t) \theta(\varphi(t)),$$

la somme étant prise sur tous les trajets locaux dans τ . (Il n'y a bien sûr qu'un nombre fini de termes non nuls dans la somme).

En particulier, pour une lamination géodésique mesurée α , la formule ci-dessus permet de définir la courbure totale $K_M(\varphi(\alpha))$ dès que φ est adaptée à un réseau ferroviaire τ portant α , sans se préoccuper davantage de propriétés de régularité pour φ et τ destinées à définir la courbure totale de $\varphi(\beta)$ pour un courant $\beta \in \mathcal{C}(S)$ quelconque. De tels scrupules seront en effet inutiles pendant un bon bout de temps.

Le lemme suivant est essentiellement un lemme de préparation avant d'appliquer à φ des modifications plus conséquentes.

LEMME 5.3. Sous les hypothèses de la proposition 5.1, supposons en outre la lamination α sans feuille compacte et fixons un nombre $\eta > 0$. Si $\varphi : S \rightarrow M$ est adaptée à un réseau ferroviaire τ portant la lamination mesurée α , on peut alors homotoper φ en $\varphi' : S \rightarrow M$ adaptée à un réseau ferroviaire τ' contenu dans τ et portant encore α , tels que $\varphi'(\tau')$ soit formée d'arcs géodésiques

de M tous de longueur $\geq \eta$ et que $\ell_M(\varphi'(\alpha)) \leq \ell_M(\varphi(\alpha))$.

Démonstration. Pour commencer, remarquons qu'il existe une constante η' avec la propriété suivante : Pour tout arc géodésique k de S contenu dans l'enveloppe convexe $C(S)$ et de longueur $\geq \eta'$ pour la métrique hyperbolique de S , l'arc géodésique de M homotope à $\varphi(k)$ (à extrémités fixes) est de longueur $\geq \eta$. Pour voir cela, considérons les revêtements universels $\tilde{S}$ et $\tilde{M}$ de S et M , et relevons φ en $\tilde{\varphi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}$. Puisque φ induit une injection de groupes fondamentaux, l'intersection de $\tilde{\varphi}(\tilde{S})$ avec chaque boule de rayon η de M est compacte. On en déduit qu'une telle constante existe localement pour tous les arcs k issus d'un même point x de $C(S)$, et donc globalement par compacité de $C(S)$.

L'idée va donc être de construire τ' contenu dans τ et portant α , de sorte que chaque branche e' de τ' contienne une géodésique de longueur $\geq \eta'$ coupant transversalement chaque traverse de e' . Il suffira alors d'appliquer la remarque ci-dessus et de raidir chaque $\varphi(e')$ par une homotopie de φ , de sorte que e' soit envoyée sur l'arc géodésique (de longueur $\geq \eta$) de M homotope à $\varphi(e')$ à extrémités fixes. Clairement, ceci n'augmente pas la longueur de l'image de α dans M .

Il va être commode de définir la longueur d'une branche e comme le minimum de la longueur des arcs dans e qui sont transverses aux traverses et joignent ses deux extrémités (i.e. les deux côtés du rectangle qui sont des traverses).

Considérons d'abord le cas où τ n'a aucune branche qui se "morde la queue", c'est-à-dire dont les deux extrémités se rencontrent le long d'un arc. A partir de chaque coin rentrant de τ , menons dans τ un arc transverse aux traverses et ceci jusqu'à ce que l'on rencontre un aiguillage. On peut clairement choisir ces deux arcs disjoints de α et deux à deux disjoints. Soit alors τ_1 un réseau ferroviaire portant α obtenu en découpant τ le long de ces arcs. Comme aucune branche de τ ne se mord la queue, chaque branche de τ_1 est formée de deux rectangles obtenus en découpant longitudinalement deux branches distinctes de τ . En particulier, chaque branche de τ_1 est de longueur deux fois supérieure au minimum des longueurs des branches de τ .

S'il y a une branche e de τ qui se mord la queue, on va utiliser l'hypothèse que α n'admet aucune feuille fermée pour se ramener au cas précédent.

En effet, celle-ci entraîne qu'aucune demi-feuille de α ne peut rester

éternellement dans e . Partant de l'un des coins adjacents à l'intersection des deux extrémités de e , on peut ainsi construire un arc dans e transverse aux traverses, disjoint de α , et qui aboutit hors de l'intersection des deux extrémités : Si α rencontre e , il suffit de longer une feuille de α ; sinon, c'est immédiat. Si l'on découpe τ le long de cet arc et si l'on effectue ceci pour toutes les branches se mordant la queue, le réseau ferroviaire obtenu n'a plus aucune branche se mordant la queue. On peut alors appliquer le procédé précédent pour obtenir encore un réseau ferroviaire portant α dont toutes les branches sont de longueur deux fois supérieure au minimum des longueurs des branches de τ .

En itérant le procédé, on aboutit ainsi à un réseau ferroviaire τ' contenu dans τ qui porte α et dont toutes les branches sont de longueur $\geq \eta'$. Quitte à ôter de τ' les branches ne rencontrant pas α et à arrondir les "cicatrices" ainsi créées, on peut supposer que α passe par chaque branche de τ' . En particulier, chaque branche e' de τ' contient une géodésique de longueur $\geq \eta'$ qui rencontre transversalement chaque traverse de e' en un point. Nous avons vu que ceci termine la démonstration du lemme 5.3. $\square$

LEMME 5.4. Sous les hypothèses et conclusions du lemme 5.3, on peut en outre faire en sorte que

$$K_M(\varphi'(\alpha)) \leq K_M(\varphi(\alpha)) \quad .$$

Démonstration. Bien que ceci ne soit pas absolument nécessaire, il sera commode de choisir le réseau ferroviaire τ' utilisé lors de la preuve du lemme 5.3 sans branche se mordant la queue. Nous avons vu que ceci est toujours possible.

Pour vérifier que la modification du lemme 5.4 n'augmente pas la variation angulaire totale, on décompose l'homotopie de φ à φ' en une succession d'applications $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi'$, où on passe de φ_i à φ_{i+1} par une homotopie raidissant l'image d'une seule branche e_i et fixant $\tau' - e_i$. Il suffit donc de vérifier qu'à chaque étape

$$K_M(\varphi_{i+1}(\alpha)) \leq K_M(\varphi_i(\alpha)) \quad .$$

Puisque φ_i et φ_{i+1} coïncident sur $\tau' - e_i$, il suffit pour cela de montrer que, pour tout arc k qui est un petit voisinage d'une composante de $\alpha \cap e_i$ dans une feuille de α , la somme des angles externes de $\varphi_{i+1}(k)$ dans M est inférieure ou égale à celle de $\varphi_i(k)$. On remarquera que $\varphi_i(k - e_i) = \varphi_{i+1}(k - e_i)$ puisque e_i ne se mord pas la queue.

Réalisons l'homotopie entre les géodésique brisées $\varphi_i(e_i)$ et $\varphi_{i+1}(e_i)$ par une application $\Delta: D^2 \rightarrow M$ envoyant ∂D^2 sur $\varphi_i(e_i) \cup \varphi_{i+1}(e_i)$. Ainsi qu'il

commence à être habituel, on peut choisir ψ hyperboliquement simpliciale pour une triangulation du disque D^2 dont tous les sommets sont situés sur le bord et correspondent aux coins de $\varphi_i(e_i)$ et à ses extrémités (qui sont aussi celles de $\varphi_{i+1}(e_i)$). Identifiant Δ avec son graphe, celui-ci hérite alors d'une métrique hyperbolique à bord géodésique par morceaux, induite par la métrique de M .

Soient $x_1, \dots, x_p$ les sommets de la triangulation de Δ , dans cet ordre sur $\partial\Delta$, de sorte que x_1 et x_p correspondent aux deux extrémités de $\varphi_i(e_i)$. Notons θ_k l'angle externe orienté (éventuellement négatif) de Δ en x_k , c'est-à-dire π moins l'angle interne de $\partial\Delta$ dans Δ en ce point ; soit également θ_k^i l'angle externe (non orienté) de $\varphi_i(k)$ en $\Delta(x_k)$ dans M , et soient θ_1^{i+1} et θ_p^{i+1} les angles externes dans M de $\varphi_{i+1}(k)$ en $\Delta(x_1)$ et $\Delta(x_p)$. Alors,

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p &\geq 2\pi, \\ \forall k \neq 1, p, \quad \theta_k^i &\geq \theta_k, \\ (\pi - \theta_1^i) &\leq (\pi - \theta_1^{i+1}) + (\pi - \theta_1), \\ (\pi - \theta_p^i) &\leq (\pi - \theta_p^{i+1}) + (\pi - \theta_p). \end{aligned}$$

En effet, la première inégalité provient de la formule de Gauss-Bonnet (la différence des deux termes étant l'aire de Δ). Les autres inégalités s'obtiennent en considérant la façon dont se combinent dans M les divers secteurs angulaires autour des $\Delta(x_k)$; il peut pour cela être utile de tracer une sphère dans l'espace tangent à M en $\Delta(x_k)$, de sorte que les divers angles s'expriment comme des longueurs de chemins tracés sur cette sphère.

En combinant ces inégalités, on obtient :

$$\theta_1^{i+1} + \theta_p^{i+1} \leq \theta_1^i + \theta_2^i + \dots + \theta_p^i.$$

Autrement dit, la somme des angles externes dans M de $\varphi_{i+1}(k)$ est bien inférieure ou égale à celle de $\varphi_i(k)$. Ceci termine la démonstration du lemme 5.4. $\square$

§ 5.2. Rétrécissement par courbure.

Une courbe qui a des coins importants peut être rétrécie par une homotopie. On va appliquer cette idée aux images de lamination mesurées par des applications adaptées. Le point de départ est la remarque suivante.

LEMME 5.5. Etant donné $\eta > 0$, il existe une constante $c(\eta)$ avec la propriété suivante : Pour tout chemin k dans une variété hyperbolique M , formé de deux arcs géodésiques dont la longueur est comprise entre η et $\eta/2$, l'arc géodésique k' de M homotope à k (à extrémités fixes) est de longueur majorée par

$$\ell_M(k) - c(\eta)\theta^2 ,$$

où θ est l'angle externe de k en son unique coin.

Démonstration. Si ℓ , ℓ' , ℓ_1 et ℓ_2 désignent respectivement les longueurs de k , k' et des deux arcs géodésiques de k , on a la formule de trigonométrie hyperbolique plane suivante (cf. [Bea, §7.12]) :

$$\begin{aligned} \text{ch } \ell' &= \text{ch } \ell_1 \text{ch } \ell_2 + \text{sh } \ell_1 \text{sh } \ell_2 \cos \theta \\ &= \text{ch } \ell - \text{sh } \ell_1 \text{sh } \ell_2 (1 - \cos \theta) . \end{aligned}$$

Quand θ tend vers 0 , la différence $(\text{ch } \ell - \text{ch } \ell')$ est donc de l'ordre de θ^2 puisque ℓ_1 et ℓ_2 sont compris entre η et $\eta/2$. D'autre part,

$$\text{ch } \ell - \text{ch } \ell' = 2 \text{sh } \frac{\ell + \ell'}{2} \text{sh } \frac{\ell - \ell'}{2}$$

est également de l'ordre de $\ell - \ell'$. Le rapport $(\ell - \ell')/\theta^2$ reste donc borné quand θ tend vers 0 . D'où le lemme. $\square$

Quand on est dans la situation fournie par le lemme 5.3, on va utiliser l'estimation du lemme 5.5 pour obtenir une diminution significative de la longueur $\ell_M(\varphi(\alpha))$ en fonction de la variation quadratique angulaire $Q_M(\varphi(\alpha))$ de $\varphi(\alpha)$ dans M . Celle-ci est définie de la manière suivante. Rappelons qu'au § 5.1 nous avons vu que la variation angulaire totale $K_M(\varphi(\alpha))$ était

$$K_M(\varphi(\alpha)) = \sum_t \alpha(t) \theta(\varphi(t))$$

où t décrit l'ensemble des trajets locaux de τ , où $\alpha(t)$ est la masse de t pour α et où $\theta(\varphi(t))$ est l'angle externe de $\varphi(t)$ dans M . On définit de même

$$Q_M(\varphi(\alpha)) = \sum_t \alpha(t) \theta(\varphi(t))^2 .$$

Ainsi, quand α est une courbe fermée, $Q_M(\varphi(\alpha))$ est exactement la somme des carrés des angles externes aux coins de la géodésique brisée $\varphi(\alpha)$ de M .

LEMME 5.6. Sous les hypothèses de la proposition 5.1, supposons φ adaptée à un réseau ferroviaire τ portant α , et telle que $\varphi(\tau)$ soit formée d'arcs géodésiques tous de longueur η . On peut alors homotoper φ en φ' , adaptée à un réseau ferroviaire τ' contenu dans τ et portant α , telle que

$$\ell_M(\varphi'(\alpha)) \leq \ell_M(\varphi(\alpha)) - c(\eta) Q_M(\varphi(\alpha))$$

et

$$K_M(\varphi'(\alpha)) \leq K_M(\varphi(\alpha)) ,$$

où la constante $c(\eta)$ est celle du lemme 5.5 et où $Q_M(\varphi(\alpha))$ est la variation quadratique angulaire de $\varphi(\alpha)$ dans M .

Démonstration. Puisque chaque branche e de τ est envoyée par φ sur une ligne brisée formée d'arcs géodésiques de longueur $\leq \eta$, on peut découper e le long de traverses en des rectangles R tels que $\varphi(R)$ soit un arc géodésique de longueur comprise entre η et 2η . Pour chacun de ces rectangles R , soit s_R la traverse médiane qui est envoyée sur le milieu de l'arc $\varphi(R)$.

Le réseau ferroviaire τ' est défini de la façon suivante. Partant de chaque coin de τ , on trace un arc transverse aux traverses disjoint de α , et ceci jusqu'à la première traverse médiane s_R rencontrée. On choisit ces arcs deux à deux disjoints, et on obtient τ' en découpant τ le long de ces arcs. Par construction, chaque aiguillage de τ' est contenu dans une traverse médiane s_R et les s_R découpent τ' en rectangles R' avec $\varphi(R')$ formé de deux arcs géodésiques de longueur comprise entre η et $\eta/2$.

Choisissons maintenant $\varphi' : S \rightarrow M$ adaptée à τ' et homotope à φ , telle que φ' envoie chacun des rectangles R' découpés par les s_R dans τ' sur l'arc géodésique de M homotope à l'arc $\varphi(R')$. Il vient immédiatement du lemme 5.5 que

$$\ell_M(\varphi'(\alpha)) \leq \ell_M(\varphi(\alpha)) - c(\eta) Q_M(\varphi(\alpha)) .$$

D'autre part, si le réseau ferroviaire τ de départ n'avait aucune branche se mordant la queue, ce que l'on peut toujours supposer, on vérifie que

$$K_M(\varphi'(\alpha)) \leq K_M(\varphi(\alpha))$$

de la même façon que pour le lemme 5.4. $\square$

§ 5.3. Prise de raccourcis.

Toujours dans le cadre de la proposition 5.1, supposons $\varphi : S \rightarrow M$ adaptée à un réseau ferroviaire τ . Etant donnés deux nombres ϵ et η avec $0 < \epsilon < \eta$, un (ϵ, η) -raccourci pour $\varphi|_{\tau}$ est la donnée d'un arc k contenu dans τ transversalement aux traverses, tel que $\varphi(k)$ est de longueur $\geq \eta$ dans M tandis que l'arc géodésique k' de M homotope à $\varphi(k)$ est de longueur $\leq \epsilon$. (Au sens mathématique du terme, ce serait plutôt k' le raccourci, mais puisqu'il est entièrement déterminé par $k \dots$.)

Les (ϵ, η) -raccourcis vont venir perturber certaines estimations que nous effectuerons au paragraphe suivant. On aimerait par conséquent se débarrasser d'eux.

LEMME 5.7. Pour ϵ suffisamment petit devant η , on a la propriété suivante :
Soit $\varphi : S \rightarrow M$ adaptée au réseau ferroviaire τ portant la lamination α sans
feuille compacte, telle que l'application $\varphi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induite est injective.
Alors, τ contient un réseau ferroviaire τ' portant α et on peut homotoper φ
en φ' adaptée à τ' , de sorte que $\varphi'|\tau'$ n'admette aucun (ϵ, η) -raccourci et que

$$\ell_M(\varphi'(\alpha)) \leq \ell_M(\varphi(\alpha))$$

et

$$K_M(\varphi'(\alpha)) \leq K_M(\varphi(\alpha)) \quad .$$

(Le résultat est encore vrai si α a des feuilles compactes, et se déduit en fait aisément de ce cas particulier, mais nous n'en aurons pas besoin.)

Démonstration. Fixons deux nombres ϵ' et η' avec $0 < \epsilon' < \eta'$, que l'on précisera plus loin en même temps que l'on indiquera exactement ce que veut dire l'hypothèse que ϵ est suffisamment petit devant η .

L'idée de la démonstration va consister, quitte à modifier τ , à trouver pour $\varphi|\tau$ une famille finie $k_1, \dots, k_n$ de (ϵ', η') -raccourcis ne traversant aucun aiguillage, et qui est maximale en ce sens que toute traverse contenant l'extrémité d'un autre (ϵ', η') -raccourci rencontre nécessairement l'un des k_i . On modifiera φ en remplaçant chaque $\varphi(k_i)$ par l'arc géodésique de M qui lui est homotope. Si ϵ' et η' ont été convenablement choisis en fonction de ϵ et η , on montrera alors qu'il n'y a plus de (ϵ, η) -raccourcis.

Pour commencer, montrons d'abord qu'il existe une borne au nombre de passages que peut effectuer un (ϵ', η') -raccourci de $\varphi|\tau$ à travers les branches de τ . En effet, étant données deux branches e_1 et e_2 de τ , il n'y a qu'un nombre fini de classes d'homotopie de chemins de longueur $\leq \epsilon'$ joignant $\varphi(e_1)$ à $\varphi(e_2)$ dans M . Comme $\varphi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective, il n'y a donc qu'un nombre fini de classes d'homotopie de chemins joignant e_1 à e_2 dans S qui soient réalisées par des (ϵ', η') -raccourcis. Par le lemme 5.2, il y a donc bien une borne au nombre (avec multiplicités) de branches traversées par un (ϵ', η') -raccourci.

En particulier, la longueur dans M de l'image par φ d'un (ϵ', η') -raccourci de $\varphi|\tau$ est majorée par une certaine constante A . Par l'argument

utilisé pour le lemme 5.3 et puisqu'on a supposé la lamination α sans feuille compacte, celle-ci est portée par un réseau ferroviaire $\tau_0 \subset \tau$ dont toutes les branches ont une image dans M de longueur $> 2A$. Ainsi, un (ϵ', η') -raccourci de $\varphi|_{\tau_0}$ ne coupe une arête de τ_0 qu'en au plus un point, et rencontre au plus un aiguillage.

Il sera commode d'utiliser la notation suivante : Si X est un sous-ensemble de τ_0 , alors $R_0(X)$ est l'union des traverses de τ_0 rencontrant X .

Considérons d'abord les (ϵ', η') -raccourcis de $f|_{\tau_0}$ qui ne traversent aucun aiguillage. Sélectionnons une famille finie $\{k_1, \dots, k_p\}$ de raccourcis comme cela telle que les rectangles $R_0(k_i)$ soient d'intérieurs disjoints, et que l'union des $R_0(k_i)$ soit maximale parmi les familles de ce type. L'existence d'une telle famille maximale est immédiate, de même que le fait que tout autre (ϵ', η') -raccourci k ne traversant pas d'aiguillage a nécessairement au moins une extrémité dans l'intérieur des $R_0(k_i)$.

Ensuite, on s'intéresse à l'union U_0 des $R_0(k)$ où k est un (ϵ', η') -raccourci tel que ∂k évite l'intérieur des $R_0(k_i)$ (ce qui entraîne que k traverse un aiguillage). On remarquera que U_0 ne peut contenir une branche entière de τ_0 , puisque les images de celles-ci par φ sont de longueur $> 2A$. Par contre, U_0 peut très bien contenir certains des k_i . Pour chaque coin de τ_0 contenu dans U_0 , joignons ce coin à l'une des traverses de δU_0 par un chemin dans U_0 disjoint de α et transverse aux traverses ; et choisissons ces chemins deux à deux disjoints. Soit alors τ' un réseau ferroviaire obtenu en découpant τ_0 le long de ces chemins.

Notons $R'(X)$ l'union des traverses de τ' qui rencontrent l'ensemble X , et soit U' la partie de τ' correspondant à U_0 . Par construction, l'intérieur de U' ne contient aucun aiguillage de τ' .

Réindiquons les k_i de sorte que ceux qui sont contenus dans U_0 soient exactement ceux qui correspondent aux indices $i < m$. Alors les k_j avec $m \leq j \leq p$ sont également des (ϵ', η') -raccourcis pour $\varphi|_{\tau'}$. On complète ceux-ci par une famille $\{k_{p+1}, \dots, k_n\}$ de (ϵ', η') -raccourcis pour $\varphi|_{\tau'}$ qui sont contenus dans U' et tels que :

- (i) les $R'(k_j)$ pour $j > p$ (et donc pour $j \geq m$) sont d'intérieurs disjoints ;
- (ii) pour tout $i < m$, chaque composante de $R_0(k_i) \cap U'$ est contenue dans un $R'(k_j)$ avec $j > p$;
- (iii) l'union des $R'(k_j)$ est maximale parmi les familles $\{k_{p+1}, \dots, k_n\}$ avec les propriétés ci-dessus.

Nous affirmons que la famille $\{k_m, \dots, k_p, k_{p+1}, \dots, k_n\}$ de (ϵ', η') -raccourcis de $\varphi|_{\tau'}$ a la propriété suivante : Tout autre (ϵ', η') -raccourci k de $\varphi|_{\tau'}$ a au moins une extrémité dans l'intérieur de l'un des $R^i(k_i)$ avec $m \leq i \leq n$. En effet, un tel k est également un (ϵ', η') -raccourci de $\varphi|_{\tau_0}$. Si ∂k évite l'intérieur des $R^i(k_i) = R_0(k_i)$ avec $m \leq i \leq p$, c'est que, ou bien ∂k rencontre l'intérieur d'un $R_0(k_i)$ avec $i < m$, ou bien k traverse un aiguillage de τ_0 et est par conséquent contenu dans $U_0 \cap \tau' = U'$. Dans le premier cas, ∂k rencontre l'intérieur d'un $R^j(k_j)$ avec $j > p$ par la condition (ii) ; et la même propriété est satisfaite dans la deuxième hypothèse par la condition de maximalité (iii).

Maintenant que l'on a défini τ' et ces $k_m, \dots, k_n$, on homotope φ en φ' adaptée à τ' qui envoie chaque $R^i(k_i)$ avec $i \geq m$ sur l'arc géodésique de M homotope à $\varphi(k_i)$, et qui coïncide avec φ sur le reste de τ' . (Ceci n'est évidemment possible que parce que les k_i évitent les aiguillages de τ'). Clairement, le passage de φ à φ' n'augmente pas la longueur de l'image de α dans M , ni sa variation angulaire totale par l'argument du lemme 5.4.

Il est grand temps de préciser comment on a choisi ϵ' et η' au départ si l'on veut montrer que $\varphi'|_{\tau'}$ n'a pas de (ϵ, η) -raccourcis. Le nombre $\eta > 0$ étant fixé, on choisit ϵ' et η' de sorte que $0 < \epsilon' < \eta' < \eta - 2\epsilon'$. On réclame alors dans les hypothèses du lemme que $\epsilon > 0$ soit suffisamment petit pour satisfaire la propriété suivante : Pour tous arcs géodésiques k_1 et k_2 de longueur $\leq \epsilon'$ dans M avec $d(k_1, k_2) \leq \epsilon$, alors $d(\partial k_1, \partial k_2) < \epsilon'$ (où $d(X, Y)$ est le minimum des distances de x à y pour $x \in X$ et $y \in Y$). En effet, une telle propriété est vérifiée pour $\epsilon = 0$ par inégalité triangulaire, et donc pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit par continuité (on pourrait évidemment donner des estimations explicites).

Dans ces conditions, $\varphi'|_{\tau'}$ n'admet aucun (ϵ, η) -raccourci. En effet, en appliquant l'hypothèse sur ϵ aux arcs $\varphi^i(k_i)$, on pourrait sinon tronquer ou rallonger k près de ses extrémités de façon à construire un arc $k' \subset \tau'$ qui soit transverse aux traverses, d'extrémités hors des intérieurs des $R^i(k_i)$, tel que la longueur de $\varphi(k')$ dans M soit $\geq \eta - 2\epsilon' \geq \eta'$ et que celle de l'arc géodésique de M homotope à $\varphi(k')$ soit $\leq \epsilon'$. Mais alors k' serait un (ϵ', η') -raccourci de $\varphi'|_{\tau'}$ d'un type exclu par la définition des k_i . $\square$

COMPLEMENT 5.8. Dans les conditions du lemme 5.7, supposons en outre que $\varphi(\tau)$ est formée d'arcs géodésiques de M de longueur $\geq \eta$. On peut alors faire en sorte dans la conclusion qu'il existe une portion X de τ' , union de traverses,

telle que $\varphi^1(X)$ soit formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \eta$, que

$$\ell_M(\varphi^1(\alpha - X)) \leq 5 [\ell_M(\varphi(\alpha)) - \ell_M(\varphi^1(\alpha))] ,$$

et que, pour tout arc k transverse aux traverses dans τ^1 dont les extrémités sont dans X mais qui rencontre $\tau^1 - X$, l'arc géodésique de M homotope à $\varphi^1(k)$ soit de longueur $> \epsilon$.

(Le 5 de l'inégalité n'a pas de signification précise. On pourrait par exemple le remplacer par n'importe quelle constante > 4 .)

Démonstration. Dans la preuve ci-dessus du lemme 5.7, décomposons τ_0 en rectangles R tels que chaque $\varphi(R)$ soit un arc géodésique de longueur comprise entre η et 2η . On modifie alors légèrement la construction de τ^1 en ouvrant les coins de $S - \tau_0$ au-delà de δU_0 jusqu'à ce que l'on rencontre ou bien un $R_0(k_i)$ avec $m \leq i \leq p$, ou bien une traverse séparant deux tels rectangles R . On définit φ^1 comme précédemment.

Considérons l'un des rectangles R de τ_0 ci-dessus. Si R ne rencontre pas l'intérieur de l'un des k_i avec $m \leq i \leq p$, sa trace $R \cap \tau^1$ est formée de rectangles de τ^1 , se rencontrant en au plus un coin. Si R rencontre l'intérieur de l'un des k_i avec $m \leq i \leq p$, remarquons que $R \cap \tau^1$ reste connexe.

On prend pour X l'union des composantes des $R \cap \tau^1$ qui ne rencontrent pas l'intérieur d'aucun k_j avec $m \leq j \leq p$. Par construction, $\varphi^1(X) = \varphi(X)$ et est formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \eta$. De plus, si α_i désigne la mesure pour α de n'importe quelle traverse de τ^1 rencontrant l'intérieur de k_i ;

$$\ell_M(\varphi^1(\alpha - X)) \leq (4\eta + \epsilon^1) \sum_{i=m}^n \alpha_i .$$

En effet, ϵ^1 majore la longueur de $\varphi^1(k_i)$ et la contribution d'une composante de $R \cap \tau^1$ dont l'intérieur rencontre ∂k_i est majorée par $2\eta \alpha_i$.

Par ailleurs,

$$\ell_M(\varphi(\alpha)) - \ell_M(\varphi^1(\alpha)) \geq (\eta^1 - \epsilon^1) \sum_{i=m}^n \alpha_i .$$

Comme ϵ^1 et η^1 sont soumis à la seule condition que $0 < \epsilon^1 < \eta^1 < \eta - 2\epsilon^1$, on peut les choisir de sorte que $(4\eta + \epsilon^1)/(\eta^1 - \epsilon^1)$ soit ≤ 5 , ce qui démontre l'inégalité annoncée.

La dernière propriété provient immédiatement de la construction des k_i . $\square$

§ 5.4. Démonstration de la proposition 5.1.

Rappelons que l'on a une surface hyperbolique S de type fini, une application $\varphi: S \rightarrow M$ de S dans une variété hyperbolique M induisant une injection entre les groupes fondamentaux, et une lamination géodésique mesurée α sur S . Essentiellement, on va alternativement appliquer les processus de rétrécissement par courbure et par raccourcis. Alors, ou bien la longueur de $\varphi(\alpha)$ deviendra arbitrairement petite, ou bien on aboutira à une situation où " $\varphi(\alpha)$ n'est pas loin d'être formée de géodésiques" et où la conclusion (ii) de la proposition est vérifiée.

On va utiliser alternativement les processus de rétrécissement par courbure et par raccourcis pour construire une suite d'applications $\varphi_n: S \rightarrow M$, homotopes à φ et adaptées à des réseaux ferroviaires τ_n portant α , telles que la suite $\ell_M(\varphi_n(\alpha))$ soit décroissante.

Pour cela, on part de φ et d'un réseau ferroviaire τ portant α . Les feuilles compactes de α sont nécessairement isolées ; en effet, une géodésique simple qui passe près d'une géodésique fermée simple sans la rencontrer vient nécessairement spiraler autour de celle-ci, ce qui est incompatible avec l'existence d'une mesure transverse invariante. Par conséquent, quitte à découper τ , on peut supposer que chaque feuille compacte de α est contenue dans une composante de τ qui en est un simple voisinage collier. Soit τ^C l'union de ces colliers.

On peut déjà annoncer que les composantes de τ^C seront également des composantes de chacun des réseaux ferroviaires τ_n . On peut donc dès maintenant préciser l'allure des restrictions $\varphi_n|_{\tau^C}$; puisque φ_n est adaptée à τ_n , il va suffire de préciser les images des feuilles compactes γ de α : Si $\varphi(\gamma)$ est loxodromique, φ_n envoie γ sur la géodésique fermée γ^* de M correspondante. Sinon, $\varphi(\gamma)$ est parabolique et on réclame simplement que la longueur et la variation angulaire de $\varphi_n(\gamma)$ décroissent avec n et tendent vers 0 ; par exemple, il suffit pour cela de prendre $\varphi_n(\gamma)$ géodésique par morceaux avec un seul coin, et de faire avancer celui-ci en direction du cusp correspondant quand n tend vers l'infini.

Fixons un nombre $\varepsilon_0 > 0$. Puis, considérons les feuilles compactes γ de α telles que $\varphi(\gamma)$ soit loxodromique, et fixons un nombre $\eta > \varepsilon_0$ qui soit strictement supérieur aux longueurs des géodésiques fermées de M homotopes à ces $\varphi(\gamma)$.

Pour commencer, soit $\tau_0 = \tau$, et homotopons φ en φ_0 adaptée à τ_0 , et telle que sa restriction $\varphi_0|_{\tau^C}$ est du type imposé ci-dessus. On définit ensuite τ_n et φ_n par récurrence. Supposons donc τ_n et φ_n déjà construits. On définit τ_{n+1} et φ_{n+1} en deux étapes.

Dans un premier temps, on applique le lemme 5.3 à φ_n et au réseau ferroviaire $\tau_n - \tau^C$ où, rappelons-le, τ^C est formée des composantes colliers de τ_n autour des feuilles compactes de α . Ceci fournit un réseau ferroviaire τ_n^i contenu dans τ_n et portant α , et φ_n^i adaptée à τ_n^i et homotope à φ , tels que $\varphi_n^i(\tau_n^i - \tau^C)$ soit formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \eta$ et que $\varphi_n^i|_{\tau^C} = \varphi_n|_{\tau^C}$.

La deuxième étape dépend de la parité de n . Si n est pair, on applique le lemme 5.6 de rétrécissement par courbure à φ_n^i et $\tau_n^i - \tau^C$ pour définir φ_{n+1} et τ_{n+1} (sans préjudice des conditions imposées à $\varphi_{n+1}|_{\tau^C}$). Si n est impair, on utilise au contraire le lemme 5.7 de rétrécissement par (ε_0, η) -raccourcis et son complément 5.8.

Ayant ainsi défini les τ_n et φ_n , remarquons que par les lemmes 5.4, 5.6 et 5.7, ainsi que par construction de $\varphi_n|_{\tau^C}$, les suites $\ell_M(\varphi_n(\alpha))$ et $K_M(\varphi_n(\alpha))$ sont décroissantes. En particulier, elles sont donc convergentes.

AFFIRMATION 5.9. La suite $K_M(\varphi_n(\alpha))$ tend vers 0.

Démonstration. En raison des conditions imposées aux $\varphi_n|_{\tau^C}$, on peut se limiter au cas où α est sans feuille compacte.

Soient τ_{2m}^i et φ_{2m}^i les réseau ferroviaire et application définis lors de la première étape de la construction de τ_{2m+1} et φ_{2m+1} à partir de τ_{2m} et φ_{2m} . Rappelons que $\varphi_{2m}^i(\tau_{2m}^i)$ est formée d'arcs géodésiques de M de longueur $\geq \eta$.

D'après le lemme 5.6, $\ell_M(\varphi_{2m+1}(\alpha)) \leq \ell_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) - c(\eta) Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha))$. Comme la suite $\ell_M(\varphi_n(\alpha))$ converge, on en déduit que la variation quadratique angulaire $Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha))$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini.

D'autre part, rappelons que

$$K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) = \sum_t \alpha(t) \theta(\varphi_{2m}^i(t))$$

$$\text{et} \quad Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) = \sum_t \alpha(t) \theta(\varphi_{2m}^i(t))^2,$$

où t décrit l'ensemble des trajets locaux de τ_{2m}^i , $\alpha(t)$ est la masse de t

pour α , et $\theta(\varphi_{2m}^i(t))$ est l'angle externe de $\varphi_{2m}^i(t)$ dans M . En particulier, si l'on fixe un nombre $\theta_0 > 0$,

$$\begin{aligned} K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) &\leq \theta_0 \sum_{t \in A} \alpha(t) + \pi \sum_{t \in B} \alpha(t) \\ &\leq \theta_0 \sum_{t \in A} \alpha(t) + \pi Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) / \theta_0^2, \end{aligned}$$

où A est l'ensemble des trajets locaux t tels que $0 < \theta(\varphi_{2m}^i(t)) \leq \theta_0$ et où B est l'ensemble des t avec $\theta(\varphi_{2m}^i(t)) > \theta_0$.

Par ailleurs, puisque $\varphi_{2m}^i(\tau_{2m}^i)$ est formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \eta$, chaque trajet local t avec $\theta(\varphi_{2m}^i(t)) > 0$ (i.e. correspondant à un coin) contribue pour au moins $\eta \alpha(t)$ à la longueur de $\varphi_{2m}^i(\alpha)$. En particulier,

$$\sum_{t \in A} \alpha(t) \leq \ell_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) / \eta \leq \ell_M(\varphi_0(\alpha)) / \eta$$

et par conséquent

$$K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) \leq \theta_0 \ell_M(\varphi_0(\alpha)) / \eta + 2\pi Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) / \theta_0^2.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, fixons θ_0 tel que $\theta_0 \ell_M(\varphi_0(\alpha)) / \eta \leq \epsilon/2$.

Pour n suffisamment grand, $\pi Q_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) / \theta_0^2 \leq \epsilon/2$ et donc $K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) \leq \epsilon$. Ainsi, on a montré que la suite $K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha))$ tend vers 0. Comme

$$K_M(\varphi_{2m+2}(\alpha)) \leq K_M(\varphi_{2m+1}(\alpha)) \leq K_M(\varphi_{2m}^i(\alpha)) \leq K_M(\varphi_{2m}(\alpha))$$

par les lemmes 5.4, 5.6 et 5.7, on en déduit que $K_M(\varphi_n(\alpha))$ tend vers 0. $\square$

Avant d'achever la preuve de la proposition 5.1 et pour référence ultérieure, citons les deux énoncés faciles suivants.

LEMME 5.10. Etant donnés φ_n et $\epsilon > 0$, il existe une constante $c_1(\varphi_n, \epsilon)$ telle que, pour tout arc géodésique k dans l'enveloppe convexe $C(S)$ tel que l'arc géodésique de M homotope à $\varphi_n(k)$ soit de longueur $\leq \epsilon$, la longueur de $\varphi_n(k)$ dans M est $\leq c_1(\varphi_n, \epsilon)$.

Démonstration. Puisque φ_n induit une injection entre les groupes fondamentaux, le relèvement aux revêtements universels $\tilde{\varphi}_n : \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}$ est propre. En particulier, la préimage par φ_n d'une boule de rayon ϵ dans $\tilde{M}$ est compacte. Une telle constante existe donc localement pour les arcs k issus d'un même point $x \in C(S)$, et donc globalement par compacité de $C(S)$. $\square$

LEMME 5.11. Etant donnés $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe une constante $c_2(\epsilon, \eta)$ avec la propriété suivante : Dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, considérons un quadrilatère de sommets z_1, x, z_2, x' où les angles externes orientés sont respectivement $\pi/2, \theta, \pi/2, \theta'$, et tel que les distances $d(x', z_1)$ et $d(x', z_2)$ sont $\leq \epsilon$, tandis que $d(x, z_1)$ et $d(x, z_2)$ sont $\leq \eta$. Alors, $d(x, z_1)$ et $d(x, z_2)$ sont $\leq c_2(\epsilon, \eta) \epsilon$.

Démonstration. Il suffit de voir que les rapports $d(x, z_1)/\theta$ et $d(x, z_2)/\theta$ restent bornés quand θ tend vers 0 . Soient θ_1 et θ_2 les angles internes entre l'arc xx' et, respectivement, $x'z_1$ et $x'z_2$. Alors, par Gauss Bonnet;

$$\theta_1 + \theta_2 \leq \theta ,$$

tandis que par trigonométrie hyperbolique élémentaire (voir par exemple [Bea, §7.11])

$$\text{th } d(x, z_1) = \text{sh } d(x', z_1) \text{tg } \theta_1$$

$$\text{th } d(x, z_2) = \text{sh } d(x', z_2) \text{tg } \theta_2 ,$$

d'où le résultat suit immédiatement. $\square$

AFFIRMATION 5.12. Si la limite de la suite $\ell_M(\varphi_n(\alpha))$ est non nulle, la conclu- sion (ii) de la proposition est vérifiée : Etant donnés $\epsilon > 0$ et $t < 1$, alors, pour tout m suffisamment grand et toute géodésique fermée γ de S avec $\gamma/\ell_S(\gamma)$ suffisamment proche (en fonction de m) de $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$, la courbe $\varphi(\gamma)$ est homotope à une géodésique fermée γ^* de M qui longe $\varphi_{2m}(\gamma)$ à distance $\leq \epsilon$ sur une longueur d'au moins $t \ell_M(\varphi_{2m}(\gamma))$.

Démonstration. Fixons donc $\epsilon > 0$ et $t < 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer ϵ inférieur ou égal au nombre ϵ_0 utilisé lors de la construction des φ_n .

A ce point-ci, on aura besoin de parler de la courbure totale $K_M(\varphi_n(\beta))$ de $\varphi_n(\beta)$ pour un courant $\beta \in \mathcal{C}(S)$, ce qui nécessitera quelques propriétés de régularités pour φ_n et τ_n (voir § 5.1). Par exemple, on pourra demander que toutes les traverses de τ_n soient géodésiques, et que φ_n soit une immersion sur $S - \tau_n$ sauf en un nombre fini de points : Puisque τ_n est porté par τ_0 , le premier point sera immédiatement réalisé si le réseau ferroviaire τ_0 de départ avait ses traverses géodésiques, ce que l'on peut toujours supposer ; comme les seules conditions requises jusqu'à présent pour φ_n portaient uniquement sur sa restriction à τ_n , on peut évidemment supposer qu'elle satisfait la condition requise. Alors, la courbure totale $K_M(\varphi_n(\beta))$ est définie pour tout courant géodésique β , et dépend continûment de $\beta \in \mathcal{C}(S)$.

Puisque τ_{2m} et φ_{2m} sont construits par application du rétrécissement par (ϵ_0, η) -raccourcis à φ'_{2m-1} et $\tau'_{2m-1} - \tau^C$, soit $X_{2m} \subset \tau_{2m}$ l'union de la partie X de $\tau_{2m} - \tau^C$ fournie par le complément 5.8 et des composantes de τ^C qui sont des colliers autour de feuilles compactes de α dont l'image par φ est loxodromique. Ainsi, et puisque les géodésiques fermées constituant $\varphi_{2m}(\tau^C \cap X_{2m})$ sont toutes de longueur $\geq \eta$, $\varphi_{2m}(X_{2m})$ est formé d'arcs géodésiques de M de longueur $\geq \eta$.

Avec les notations et définitions de la section IV, recouvrons $\mathbb{P}(S)$ par un nombre fini de boîtes à flot $B_1, \dots, B_r$ de $\mathbb{P}(S)$ telles que tout arc de $B_i \cap \mathfrak{F}$ se projette sur un arc transverse aux traverses contenu dans X_{2m} si $1 \leq i \leq p$, sur un arc transverse aux traverses contenu dans $\tau_{2m} - X_{2m}$ si $p < i \leq q$, ou sur un arc disjoint de α si $q < i \leq r$. Par redécoupage comme au début de la preuve de la proposition 4.4, on peut de plus supposer les B_i d'intérieurs disjoints.

On remarquera que les boîtes B_i avec $i \leq p$ sont exactement celles sur lesquelles on a le meilleur contrôle, d'après toutes nos constructions.

Dans un premier temps, limitons-nous aux géodésiques fermées γ de S telles que $\varphi(\gamma)$ soit loxodromique, et par conséquent homotope à une géodésique fermée γ^* de M . Soit γ_{2m} la courbe dans M obtenue à partir de $\varphi_{2m}(\gamma)$ en remplaçant l'image de chaque composante de $\gamma \cap B_i$ avec $i > p$ par l'arc géodésique de M qui lui est homotope. On réalise alors l'homotopie entre γ^* et la géodésique par morceaux γ_{2m} par une application $A : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ qui est hyperboliquement simpliciale pour une triangulation en tambour de l'anneau $S^1 \times [0, 1]$ dont les sommets sont sur le bord ∂A , comme à la preuve du lemme 2.1. Identifiant comme d'habitude A avec son graphe, la métrique de M induit sur A une métrique hyperbolique à bord géodésique par morceaux ; chacune des deux composantes de ∂A est naturellement identifiée avec γ_{2m} ou γ^* .

Dans γ_{2m} , considérons l'image par φ_{2m} des $\gamma \cap B_i$ avec $1 \leq i \leq p$. Par construction, celle-ci est formée d'arcs géodésiques de longueur $\geq \eta$ (que ce soit dans M ou dans A). Notons γ_{2m}^0 son complémentaire dans γ_{2m} (c'est-à-dire que γ_{2m}^0 est essentiellement la partie où γ_{2m} diffère de $\varphi_{2m}(\gamma)$).

Par tout point $z \in \gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$ qui n'est pas un coin, menons dans A un arc géodésique λ_z orthogonal au bord et de longueur $\epsilon/2$ (si possible).

Si $\lambda_z \cap \lambda_{z'} \neq \emptyset$ mais $z \neq z'$, on peut joindre z à z' par un arc k dans γ_{2m} qui est homotope à extrémités fixes à un arc de longueur $\leq \epsilon$ dans A ,

et donc dans M . Par le lemme 5.10, la longueur de k dans S est majorée par une certaine constante $c_1(\varphi_{2m}, \epsilon)$.

Si k est contenu dans l'adhérence de $\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$, il est nécessairement de longueur $\leq \eta$ car il fournirait sinon un (ϵ_0, η) -raccourci pour $\varphi_{2m} | \tau_{2m}$, ce qui est exclu. Il contient donc au plus un coin de $\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$. Par Gauss-Bonnet, k possède donc exactement un coin d'angle externe orienté $\theta_A > 0$ dans A , et donc d'angle externe $\theta \geq \theta_A$ dans M . Il vient alors du lemme 5.11 que la longueur de k est majorée par $c_2(\epsilon, \eta) \theta$.

Si k rencontre γ_{2m}^0 , rappelons-nous qu'il existe un arc $k' \subset \gamma$ tel que k soit homotope à $\varphi_{2m}(k')$ à extrémités fixes dans M . D'après la définition de X_{2m} par le complément 5.8 (et puisque k est homotope à un arc de longueur $\leq \epsilon$ dans M), k' ne peut être contenu dans le réseau ferroviaire τ_{2m} en y étant transverse aux traverses, et contient donc un arc de $\gamma \cap B_i$ avec $i > q$.

Soit γ_{2m}^1 la partie de $\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$ formée des points qui sont à distance $\leq c_1(\varphi_{2m}, \epsilon)$ d'une portion de γ_{2m} correspondant à un arc de $\varphi_{2m}(\gamma \cap B_i)$ avec $i > q$, ou à distance $\leq c_2(\epsilon, \eta) \theta$ d'un coin de $\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$ d'angle externe θ dans M . Alors, quels que soient z et $z' \in \gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0 - \gamma_{2m}^1$, l'analyse ci-dessus montre que les arcs λ_z et $\lambda_{z'}$ de A sont disjoints; on montre de même qu'ils sont plongés.

Etant donné $z \in \gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$, il y a ainsi quatre possibilités :

- 1) $z \in \gamma_{2m}^1$;
- 2) $z \notin \gamma_{2m}^1$ et l'arc λ_z est effectivement de longueur $\epsilon/2$ dans A ;
- 3) $z \notin \gamma_{2m}^1$ et l'arc λ_z vient buter sur γ_{2m}^0 dans A ;
- 4) $z \notin \gamma_{2m}^1$ et l'arc λ_z vient buter sur γ^* dans A .

(L'arc λ_z ne peut venir buter sur $\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0$ par définition de γ_{2m}^1). Ces quatre possibilités définissent ainsi une partition de γ_{2m} en γ_{2m}^0 , γ_{2m}^1 , γ_{2m}^2 , γ_{2m}^3 et γ_{2m}^4 . Nous allons montrer que γ_{2m}^4 est "gros", par des estimations sur la longueur des autres morceaux.

Pour $i \leq q$, les arcs de $B_i \cap \mathfrak{F}$ ont tous la même image par φ_{2m} , que l'on notera $\varphi_{2m}(B_i)$. D'autre part, soit c_3 majorant la longueur des images par φ_{2m} des arcs des $B_j \cap \mathfrak{F}$ avec $j > q$. Alors :

$$\ell_M(\gamma_{2m}^0) \leq \sum_{i=p+1}^q \gamma(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i)) + c_3 \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j)$$

et

$$\ell_M(\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0) \geq \ell_M(\varphi_{2m}(\gamma)) - \sum_{i=p+1}^q \gamma(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i)) - c_3 \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j) ,$$

où $\gamma(B_i)$ est la mesure de la boîte B_i pour le courant défini par γ , c'est-à-dire plus prosaïquement le nombre de fois où γ passe à travers B_i .

Par définition de γ_{2m}^1 ,

$$\begin{aligned} \ell_M(\gamma_{2m}^1) &\leq 2c_1(\varphi_{2m}, \epsilon) \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j) + 2c_2(\epsilon, \eta) K_M(\gamma_{2m}) \\ &\leq 2c_1(\varphi_{2m}, \epsilon) \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j) + 2c_2(\epsilon, \eta) K_M(\varphi_{2m}(\gamma)) , \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient du fait que $K_M(\gamma_{2m}) \leq K_M(\varphi_{2m}(\gamma))$, ce qui se démontre comme le lemme 5.4.

Soit U le tube formé des λ_z avec $z \in \gamma_{2m}^2$. Alors

$$\text{aire}(A) \geq \text{aire}(U) \geq (\epsilon/2) \ell_M(\gamma_{2m}^2)$$

pour la métrique hyperbolique à bord géodésique par morceaux sur A . D'autre part, par Gauss-Bonnet, l'aire de l'anneau A est égale à la somme de ses angles externes orientés. Or, un tel angle externe orienté dans A est inférieur ou égal à l'angle externe de γ_{2m} ou γ^* dans M correspondant. Donc

$$\text{aire}(A) \leq K_M(\gamma_{2m}) + K_M(\gamma^*) \leq K_M(\varphi_{2m}(\gamma)) + 0 ,$$

et par conséquent

$$\ell_M(\gamma_{2m}^2) \leq (2/\epsilon) K_M(\varphi_{2m}(\gamma)) .$$

Un peu de trigonométrie hyperbolique élémentaire montre que l'application qui à z associe l'autre extrémité de λ_z augmente localement les distances (cf. [Bea, § 7.17]). Comme elle est également injective si $z \notin \gamma_{2m}^1$, on en déduit en particulier que

$$\begin{aligned} \ell_M(\gamma_{2m}^3) &\leq \ell_M(\gamma_{2m}^0) \\ &\leq \sum_{i=p+1}^q \gamma(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i)) + c_3 \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j) . \end{aligned}$$

En combinant toutes ces inégalités, on obtient ainsi que

$$\ell_M(\gamma_{2m}^4) = \ell_M(\gamma_{2m} - \gamma_{2m}^0) - \ell_M(\gamma_{2m}^1) - \ell_M(\gamma_{2m}^2) - \ell_M(\gamma_{2m}^3)$$

est supérieur ou égal à

$$\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma)) - 2 \sum_{i=p+1}^q \gamma(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i)) - (2c_1(\varphi_{2m}, \epsilon) + 2c_3) \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j) \\ - (2c_2(\epsilon, \eta) + 2/\epsilon) K_M(\varphi_{2m}(\gamma)) \quad .$$

Maintenant, notons γ_4^* la partie de γ^* formée des extrémités des λ_z avec $z \in \gamma_{2m}^4$. Par construction, chaque point de γ_4^* est à distance $\leq \epsilon/2$ de $\varphi_{2m}(\gamma)$. D'autre part, puisque l'application qui à z associe l'autre extrémité de λ_z augmente les distances, la longueur de γ_4^* est au moins égale à celle de γ_{2m}^4 . En particulier, le rapport $\ell_M(\gamma_4^*)/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma))$ est minoré par

$$1 - 2 \sum_{i=p+1}^q \gamma(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i))/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma)) - (2c_1(\varphi_{2m}, \epsilon) + 2c_3) \sum_{j=q+1}^r \gamma(B_j)/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma)) \\ - (2c_2(\epsilon, \eta) + 2/\epsilon) K_M(\varphi_{2m}(\gamma))/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma)) \quad .$$

Comme $\alpha(B_j) = 0$ pour tout $j > q$, il s'ensuit par continuité que la limite inférieure de $\ell_M(\gamma_4^*)/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma))$ quand $\gamma/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$ est minorée par

$$1 - 2 \sum_{i=p+1}^q \alpha(B_i) \ell_M(\varphi_{2m}(B_i))/\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha)) - (2c_2(\epsilon, \eta) + 2/\epsilon) K_M(\varphi_{2m}(\alpha))/\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha)) \\ = 1 - 2 \ell_M(\varphi_{2m}(\alpha - X_{2m}))/\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha)) - (2c_2(\epsilon, \eta) + 2/\epsilon) K_M(\varphi_{2m}(\alpha))/\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha)) \quad .$$

Or, quand m tend vers l'infini, $\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha))$ tend vers une constante non nulle par hypothèse et $K_M(\varphi_{2m}(\alpha))$ tend vers 0 par l'affirmation 5.9. D'autre part, si l'on se rappelle la définition de X_{2m} à l'aide du complément 5.8, on constate que $\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha - X_{2m}))$ tend vers 0 grâce à l'inégalité de 5.8 et à la convergence de $\ell_M(\varphi_{2m}(\alpha))$.

Ainsi, si m est suffisamment grand, cette limite inférieure de $\ell_M(\gamma_4^*)/\ell_M(\varphi_{2m}(\gamma))$ quand $\gamma/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$ est strictement supérieure au $t < 1$ fixé. Ceci démontre que γ^* satisfait la conclusion de l'affirmation 5.12 : Puisque l'application de $\gamma_4^* \subset \gamma^*$ sur $\gamma_{2m}^4 \subset \varphi_{2m}(\gamma)$ définie en suivant les λ_z déplace chaque point d'au plus $\epsilon/2$, ceci démontre bien que γ^* longe $\varphi_{2m}(\gamma)$ à distance $\leq \epsilon$ sur au moins une longueur de $\ell_M(\gamma_4^*) \geq t \ell_M(\varphi_{2m}(\gamma))$. Ceci termine la preuve de l'affirmation 5.12 pour les courbes γ dont on sait déjà que $\varphi(\gamma)$ est loxodromique dans M .

Pour finir la preuve de l'affirmation 5.12, il reste à vérifier que $\varphi(\gamma)$ est vraiment loxodromique dans M si $\gamma/\ell_S(\gamma)$ est suffisamment proche de $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$. La preuve en est analogue à la précédente. Supposons $\varphi(\gamma)$

parabolique en quête d'une contradiction, et soit γ_{2m} définie à partir de $\varphi_{2m}(\gamma)$ comme précédemment. Considérant une homotopie $A : S^1 \times [0, \infty[\rightarrow M$ entre γ_{2m} et le cusp correspondant qui est hyperboliquement simpliciale pour une triangulation de $S^1 \times [0, \infty[$ par des rayons $a \times [0, \infty[$, les mêmes estimations que précédemment (mais avec cette fois-ci $\gamma_{2m}^4 = \emptyset$) fournissent alors la contradiction cherchée. $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition 5.1, il reste seulement à démontrer que ses deux conclusions (i) et (ii) sont incompatibles. Pour cela, supposons la conclusion (ii) vérifiée et appliquons-la à $t > \frac{1}{2}$. On trouve ainsi φ' homotope à φ telle que, pour toute géodésique fermée γ avec $\gamma/\ell_S(\gamma)$ suffisamment proche de $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$, la géodésique fermée γ^* de M homotope à $\varphi(\gamma)$ est de longueur $\geq t \ell_M(\varphi'(\gamma))$. En particulier, si γ est suffisamment proche de α , $\ell_M(\gamma^*)/\ell_S(\gamma) \geq \ell_M(\varphi'(\alpha))/2\ell_S(\alpha)$ puisque $t > \frac{1}{2}$.

Par contre, si la condition (i) est vérifiée, on peut pour tout $\epsilon > 0$ homotoper φ en φ'' telle que $\ell_M(\varphi''(\alpha))/\ell_S(\alpha) < \epsilon$.

En particulier, pour γ suffisamment proche de α

$$\ell_M(\gamma^*)/\ell_S(\gamma) \leq \ell_M(\varphi''(\gamma))/\ell_S(\gamma) < \epsilon,$$

ce qui contredit la conclusion précédente pour ϵ convenablement choisi.

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.1. $\square$

§ 5.5. Cas des courbes paraboliques.

Nous allons avoir besoin plus loin d'un raffinement de la proposition 5.1 quand α est formée d'un nombre fini de courbes simples disjointes dont les images par φ correspondent à des éléments paraboliques de $\pi_1(M)$. Dans ce cas, c'est évidemment la conclusion (i) de la proposition 5.1 qui est satisfaite, mais nous voulons une estimation analogue à celle de la conclusion (ii).

PROPOSITION 5.13. Sous les hypothèses de la proposition 5.1, supposons de plus α formée de géodésiques fermées $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ (simples disjointes) telles que chaque $\varphi(\alpha_i)$ soit une courbe parabolique de M . Alors, pour toute géodésique fermée γ de S avec $\gamma/\ell_S(\gamma)$ suffisamment proche de $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$, la courbe $\varphi(\gamma)$ est homotope à une géodésique fermée γ^* qui rencontre au moins

l'une des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ où l'on peut homotoper une $\varphi(\alpha_i)$ (sauf bien sûr si α est connexe et $\gamma = \alpha$).

En fait, la preuve montre même qu'une proportion arbitrairement grande de γ^* est contenue dans ces composantes cuspidales.

Démonstration. Quitte à remplacer M par son revêtement $\tilde{M}$ tel que $\pi_1(\tilde{M}) = \varphi_* \pi_1(S)$, on peut supposer sans perte de généralité que l'homomorphisme $\varphi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induit par φ est un isomorphisme. Sans être essentielle, cette hypothèse sera quand même bien commode.

Pour chaque $i = 1, \dots, p$, on commence par choisir un petit voisinage collier τ_i de α_i , de sorte que l'union des τ_i forme un réseau ferroviaire τ portant α . Puis, toujours pour chaque $i \leq p$, on définit une boîte à flot B_i par un H dans S dont la barre horizontale est formée de α_i tandis que les deux barres verticales sont confondues, contenues dans une traverse de τ_i , et suffisamment petites pour que la projection sur S de chaque feuille de $B_i \cap \mathfrak{F}$ soit contenue dans τ_i et transverse aux traverses. On complète cette famille par des boîtes $B_{p+1}, \dots, B_q$ de sorte que les $B_1, \dots, B_p, B_{p+1}, \dots, B_q$ recouvrent le compact $\text{IPC}(S)$ et que les intérieurs des B_j soient deux à deux disjoints. On peut de plus supposer les B_j avec $j > p$ suffisamment petites pour qu'elles ne "se mordent pas la queue".

Puisque la boîte B_i avec $i \leq p$ "se mord la queue", les feuilles de $B_i \cap \mathfrak{F}$ font en général plusieurs fois le tour de B_i . Pour $n \geq 1$, notons B_i^n l'union des feuilles de $B_i \cap \mathfrak{F}$ qui font exactement n fois le tour de B_i . Alors, B_i est l'union du relevé de α_i et de tous les B_i^n .

Après homotopie, on peut supposer φ adaptée au réseau ferroviaire $\tau = \bigcup \tau_i$, et $\varphi(\tau)$ contenue dans l'intérieur de la partie fine $M_f(\mu)$.

Etant donnée une géodésique fermée γ de S , soit γ' la géodésique par morceaux de M obtenue à partir de $\varphi(\gamma)$ en remplaçant $\varphi(k)$ par l'arc géodésique de M homotope pour chaque composante k des $\gamma \cap B_j$. Notons γ_1 la partie de γ formée des $\gamma \cap B_i$ avec $i \leq p$, et γ'_1 la partie correspondante de γ' .

On supposera désormais que γ n'est aucune des α_i .

Si k est une composante de γ_1 , elle est aussi une composante d'un $\gamma \cap B_i^n$. Alors la composante k' de γ'_1 correspondante ne dépend que de i et

n . En effet, si $x_i \in \alpha_i$ est l'intersection de α_i avec les barres verticales (confondues) du H définissant B_i , k' est l'arc géodésique de M joignant $\varphi(x_i)$ à lui-même et homotope à $\varphi(\alpha_i)^n$. On remarquera que k' est entièrement contenu dans la composante cuspidale de $M_f(\mu)$ contenant $\varphi(\alpha_i)$, par convexité de $M_f(\mu)$; en particulier, γ_1' évite l'intérieur de $M_0(\mu)$.

Supposons que l'on sache déjà que γ' est homotope à une géodésique fermée γ^* de M par une homotopie A . Comme d'habitude, on peut supposer A hyperboliquement simpliciale pour une triangulation en tambour de $S^1 \times [0, 1]$, de sorte que son graphe encore noté A hérite d'une métrique hyperbolique à bord géodésique par morceaux. De plus, le bord ∂A s'identifie à l'union disjointe de γ' et γ^* .

Nous avons choisi les B_j avec $j > p$ de sorte qu'une composante de $\gamma \cap B_j$ ne puisse faire plusieurs fois le tour de B_j , et soit donc de longueur uniformément bornée. Par conséquent, il existe un compact $K \subset M$ autour de $\varphi(C(S))$ qui contient $\gamma' - \gamma_1'$ pour toute géodésique fermée $\gamma \subset S$.

Par tout point $z \in \gamma_1'$, menons dans A un arc λ_z issu de z orthogonalement à ∂A , que l'on arrête lorsqu'il vient buter sur ∂A , ou lorsque son image dans M vient buter sur $K \cup M_0(\mu)$ (bien sûr, $\lambda_z = z$ si z est contenu dans K).

Un tel arc λ_z est nécessairement plongé. En effet, il fournirait sinon dans l'anneau A une courbe fermée homotope à γ' dont l'image dans M est contenue dans la composante de $M_f(\mu)$ contenant l'image de z , contredisant notre hypothèse que γ n'est pas un α_i (car on a supposé $\pi_1(M) = \pi_1(S)$).

Nous affirmons que deux λ_z distincts ne peuvent se rencontrer. En effet, s'il existe deux points distincts x' et y' de γ_1' tels que $\lambda_{x'} \cap \lambda_{y'} \neq \emptyset$, l'un des deux arcs joignant x' à y' dans γ' est homotope dans M à un arc contenu dans $\lambda_{x'} \cup \lambda_{y'}$ et donc dans $M_f(\mu)$. De plus, par Gauss-Bonnet, cet arc $k' \subset \gamma'$ ne peut être entièrement contenu dans γ_1' . Or, par convexité de $M_f(\mu)$, l'homotopie de γ' à $\varphi(\gamma)$ peut être choisie de façon à garder les images de x' et y' dans $M_f(\mu)$, et on en déduit ainsi deux points x et y de γ_1 qui peuvent être joints par un arc $k \subset \gamma$ rencontrant $\gamma - \gamma_1$ tel que $\varphi(k)$ soit homotope à un arc dans $M_f(\mu)$. En particulier, x et y sont dans le même τ_i et $\varphi(k)$ est homotope à un arc dans la courbe $\varphi(\tau_i)$ puisque cette dernière engendre le π_1 de la composante de $M_f(\mu)$ qui la contient (car $\pi_1(M) = \pi_1(S)$). On en conclut que l'arc géodésique k est homotope dans S à un arc dans τ_i . Mais ceci se trouve

contradictoire avec le fait que k n'est pas entièrement contenu dans γ_1 : En effet, dans le revêtement de S de groupe fondamental $\pi_1(\alpha_i)$, une géodésique qui quitte le relèvement de B_i n'y retourne jamais, et l'arc k est ainsi obligé de rester dans B_i . Ceci démontre donc notre affirmation que les arcs λ_z sont deux à deux disjoints.

En particulier, aucun λ_z ne vient buter sur γ_1' . D'autre part, puisque les λ_z évitent le compact K par définition, aucun de ceux-ci ne vient buter sur $\gamma' - \gamma_1'$. Puisque l'on veut montrer que γ^* passe dans au moins une composante cuspidale de $M_f(\mu)$, il suffit de montrer qu'au moins l'un des λ_z vient buter sur γ^* . Supposons le contraire, en quête d'une contradiction.

Soit U l'union des λ_z . On veut une estimation pour l'aire de U . Pour cela, considérons une composante k de γ_1 et la composante k' de γ_1' correspondante. Nous avons déjà vu que $k' \subset M$ ne dépend que de i et n tels que k soit une composante de $\gamma \cap B_i^n$. Si U_k est l'union des λ_z avec $z \in k'$, on va minorer l'aire de U_k par une constante a_{in} ne dépendant que de i et de n .

Pour cela, on considère le cusp de M correspondant au sous-groupe parabolique de $\pi_1(M)$ engendré par α_i . Plus précisément, on considère les voisinages de ce cusp qui sont les projections d'horiboules du revêtement universel $\mathbb{H}^3$ de M . Parmi les voisinages de ce type dont l'intérieur évite à la fois $M_0(\mu)$, K et le point base $\varphi(x_i) \in \varphi(\alpha_i)$, il en existe un maximal V_i .

L'arc k' rencontre le convexe V_i en un sous-arc $k' \cap V_i$ (éventuellement vide). Soit $k'' \subset \partial V_i$ l'image de $k' \cap V_i$ par la projection radiale $V_i \rightarrow \partial V_i$ à partir du cusp. Alors l'union de k'' et $k' \cap V_i$ borde un disque D_{in} immergé et totalement géodésique (l'"ombre" de $k' \cap V_i$ par la projection radiale), dont l'aire a_{in} minore l'aire de U_k . Ce dernier point se vérifie de la manière suivante : Dans le revêtement universel $\mathbb{H}^3$ identifié au modèle du demi-espace supérieur de sorte que le point à l'infini corresponde au cusp de V_i , relevons $U_k \cap V_i$ et D_{in} dans la composante de la préimage de V_i qui est une horiboule centrée à l'infini ; alors la projection orthogonale euclidienne de $U_k \cap V_i$ sur l'hyperplan de $\mathbb{H}^3$ contenant D_{in} diminue les aires hyperboliques, et l'aire de son image est majorée par celle de D_{in} .

Ainsi, l'aire de U_k est minorée par a_{in} . Avant de poursuivre, montrons que le rapport a_{in}/n tend vers une constante $a_i > 0$ quand n tend vers l'infini. En effet, comme ∂V_i est horisphérique, la courbure extérieure de k'' dans D_{in} est $+1$ en tout point. La formule de Gauss-Bonnet donne alors

$$a_{in} = \ell_M(k'') - \theta_1 - \theta_2,$$

où θ_1 et θ_2 sont les deux angles internes de D_{in} . Or, quand n tend vers

l'infini, l'arc k pénètre de plus en plus profondément vers le cusp et on vérifie que θ_1 et θ_2 tendent vers $\pi/2$, tandis que $\ell_M(k'')$ est proche de la longueur de la projection radiale de k' sur ∂V_i , laquelle est asymptotiquement proportionnelle à n . (Dans le modèle du demi-espace supérieur, le générateur du stabilisateur du point à l'infini dans $\pi_1(M)$ agit par translation ou réflexion-translation.)

Revenons maintenant à l'aire de U . Nous venons de voir que

$$\begin{aligned} \text{aire}(U) &= \sum_{k \subset \gamma_1} \text{aire}(U_k) \\ &\geq \sum_{k \subset \gamma_1} a_{in} \\ &\geq \sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \gamma(B_i^n)/n, \end{aligned}$$

où $\gamma(B_i^n)$ est la mesure pour γ de $Q \cap B_i^n$ pour n'importe quelle section transverse Q de B_i . (Ne pas oublier que chaque composante de $\gamma \cap B_i^n$ contribue pour n à $\gamma(B_i^n)$.)

Quand $\gamma/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$, chaque $\gamma(B_i^n)/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha(B_i^n)/\ell_S(\alpha) = 0$. D'autre part, nous avons vu que a_{in}/n tend vers $a_i > 0$ quand n tend vers l'infini. En coupant les sommes en deux morceaux, il vient que quand $\gamma/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha/\ell_S(\alpha)$, la limite de

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \gamma(B_i^n)/n \right] / \ell_S(\gamma)$$

est la même que la limite de

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_i \gamma(B_i^n) \right] / \ell_S(\gamma) = a_i \gamma(B_i) / \ell_S(\gamma),$$

c'est-à-dire $a_i \alpha(B_i) / \ell_S(\alpha)$. Donc

$$\liminf \text{aire}(U) / \ell_S(\gamma) \geq \sum_{i=1}^p a_i \alpha(B_i) / \ell_S(\alpha) > 0$$

quand $\gamma/\ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha/\ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$.

D'autre part, $\text{aire}(U) \leq \text{aire}(A)$

$$\leq 2\pi \sum_{j=p+1}^q \gamma(B_j),$$

où la deuxième inégalité provient de la formule de Gauss-Bonnet et d'une estimation grossière de la somme des angles externes orientés de γ' dans A . En effet, les angles externes orientés de γ^* dans A sont tous négatifs, chaque angle de γ' est $\leq \pi$, et chaque composante de $\gamma \cap B_j$ avec $j > p$ contribue pour 1 ou 2 coins de γ' .

En particulier, puisque $\alpha(B_j) = 0$ pour tout $j > p$, il vient que

$$\lim \text{aire}(U) / \ell_S(\gamma) = 0$$

quand $\gamma / \ell_S(\gamma)$ tend vers $\alpha / \ell_S(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(S)$, ce qui, avec l'inégalité précédente, fournit bien la contradiction cherchée. Par conséquent, ceci montre qu'il y a au moins un λ_Z qui vient buter sur γ^* , et que γ^* rencontre donc une composante cuspidale de $M_f(\mu)$.

Si l'on n'avait pas su d'emblée que $\varphi(\gamma)$ était homotope à une géodésique γ^* , le même raisonnement basé sur des estimations d'aire montre qu'en fait $\varphi(\gamma)$ ne peut être parabolique si $\gamma / \ell_S(\gamma)$ est suffisamment proche de $\alpha / \ell_S(\alpha)$ (mais $\gamma \neq \alpha$). $\square$

VI. DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL

§ 6.1. Mise en place.

Rappelons les données du théorème A (ou du théorème 1.7). On s'est donné une variété hyperbolique M de dimension 3, dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$. On considère un bout b du complémentaire $M_0(\mu)$ de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$, et on suppose ce bout b géométriquement infini. On veut montrer qu'il est simplement dégénéré.

Puisque b est géométriquement infini, la proposition 2.3 nous fournit, quitte à restreindre la constante de Margoulis μ , une suite de géodésiques fermées α_j^* de M qui tendent vers le bout b , en ce sens que tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ contient toutes les α_j^* avec j suffisamment grand. De plus, on peut supposer que ces géodésiques α_j^* se comportent bien vis-à-vis des composantes non cuspidales de $M_f(\mu)$, dans le sens suivant : Si α_j^* rencontre un tube de Margoulis, elle est entièrement contenue dedans (et en est donc l'âme). En effet, ou bien b admet un voisinage ne rencontrant aucun tube de Margoulis, et alors la propriété ci-dessus est évidemment vérifiée, ou bien tout voisinage U de b dans $M_0(\mu)$ rencontre un tube de Margoulis. Comme l'action de $\pi_1(M)$ sur le revêtement universel de M est proprement discontinue, le compact δU ne peut rencontrer qu'un nombre fini de tubes de Margoulis, et on en déduit que U contient un tube de Margoulis. Dans ce second cas, on peut donc prendre pour géodésiques α_j^* les âmes des tubes de Margoulis contenus dans la même composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ que b .

Nous avons vu à la proposition 2.4 que, par définition de $M_c(\mu)$ et incompressibilité de S_b , chaque α_j^* est homotope à une courbe $\alpha_j \subset S_b$ par une homotopie ne recoupant pas S_b .

Puisque les α_j^* tendent vers le bout b , la suite des distances $d(\alpha_j^*, S_b)$ tend vers l'infini. Alors, en raison du bon comportement des α_j^* vis-à-vis des tubes de Margoulis, on peut appliquer le lemme du nombre d'intersection (proposition 3.4) et celui-ci nous indique que le quotient

$$i(\alpha_j, \alpha_k) / \ell_M(\alpha_j) \ell_M(\alpha_k)$$

tend vers 0 quand j et k tendent vers l'infini. (Remarquer que la suite $\ell_M(\alpha_j)$ tend vers ∞ puisque l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ est proprement discontinue.)

Maintenant, on fixe une fois pour toute une identification entre S_b et l'enveloppe convexe d'une surface hyperbolique S . De plus, alors que les courbes α_j étaient jusqu'à présent libres sur S_b , on imposera désormais qu'elles soient des géodésiques de S pour cette identification. On note ℓ_S la longueur pour la métrique hyperbolique de S , tandis que ℓ_M désigne toujours la longueur dans M .

Par compacité de $S_b = C(S)$, il existe une constante majorant le rapport $\ell_M(\alpha)/\ell_S(\alpha)$ pour toute géodésique fermée α de S . Par conséquent,

$$i(\alpha_j, \alpha_k)/\ell_S(\alpha_j)\ell_S(\alpha_k)$$

tend également vers 0 quand j et k tendent vers l'infini.

On considère maintenant les courants géodésiques $\alpha_j/\ell_S(\alpha_j)$ dans $\mathcal{C}(S)$. Puisqu'ils sont de longueur 1, on peut d'après la proposition 4.7 extraire une sous-suite de sorte que ces courants géodésiques $\alpha_j/\ell_S(\alpha_j)$ convergent vers un $\alpha_\infty \in \mathcal{C}(S)$. Par continuité du nombre d'intersection,

$$\begin{aligned} i(\alpha_\infty, \alpha_\infty) &= \lim i(\alpha_j/\ell_S(\alpha_j), \alpha_k/\ell_S(\alpha_k)) \\ &= \lim i(\alpha_j, \alpha_k)/\ell_S(\alpha_j)\ell_S(\alpha_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et α_∞ est ainsi une lamination géodésique mesurée (proposition 4.8).

Regardons ce que donne la proposition 5.1 si on l'applique à $\varphi: S \rightarrow M$ étendant l'injection canonique $S_b \rightarrow M$ et à la lamination α_∞ . L'existence des α_j dont les géodésiques α_j^* homotopes sont contenues dans des voisinages arbitrairement petits du bout b montre que la conclusion (ii) de la proposition 5.1 ne peut se produire. Par conséquent, c'est la conclusion (i) qui est vérifiée et, pour tout $\epsilon > 0$, on peut homotoper φ de sorte que

$$\ell_M(\varphi(\alpha_\infty)) < \epsilon.$$

En particulier, α_∞ ne contient aucune feuille compacte qui soit homotope à une géodésique fermée de M . D'autre part, puisque les α_j^* évitent les composantes cuspidales de $M_f(\mu)$, la proposition 5.13 montre que α_∞ ne peut être uniquement formée de feuilles compactes qui soient paraboliques dans M . Par conséquent, α_∞ possède au moins une feuille non compacte. Soit γ_∞ la lamination mesurée définie par restriction de α_∞ à l'adhérence (connexe) de cette feuille non compacte.

A posteriori, on montrera que γ_∞ est pratiquement α_∞ tout entière,

en ce sens que α_∞ est l'union de γ_∞ et de quelques composantes de ∂S_b . Mais pour le moment nous n'en savons rien.

Soit $C(\gamma_\infty)$ l'enveloppe convexe de γ_∞ dans S , c'est-à-dire la plus petite sous-surface convexe de S qui contienne γ_∞ . On peut décrire $C(\gamma_\infty)$ de la façon suivante : Considérons la famille des géodésiques fermées (simples) de S homotopes aux composantes de bord de $S - \gamma_\infty$ qui ne sont pas homotopes à 0 ; alors $C(\gamma_\infty)$ est l'ouvert relativement compact de S délimité par ces géodésiques. Appliquant la proposition 4.9 au revêtement de S dont le groupe fondamental est celui de $C(\gamma_\infty)$, on obtient que la lamination mesurée γ_∞ est la limite d'une suite de laminations mesurées γ_k dont chaque feuille est compacte et contenue dans $C(\gamma_\infty)$.

Pour chaque indice j , choisissons une feuille β_j de γ_j , et soit $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ le coefficient de β_j dans la décomposition de la lamination mesurée γ_j en combinaison linéaire de ses feuilles, i.e. λ_j est la mesure pour γ_j d'un petit arc coupant β_j en un point. Si la feuille β_j est choisie de sorte que sa contribution $\lambda_j \ell_S(\beta_j)$ à $\ell_S(\gamma_j)$ soit maximum, la suite $\lambda_j \beta_j \in \mathcal{C}(S)$ converge vers une lamination mesurée non-nulle β_∞ , après extraction d'une sous-suite ; la non-nullité de β_∞ provient du fait que $\ell_S(\lambda_j \beta_j) \geq \ell_S(\gamma_j)/n$ où la constante n ne dépend que du type topologique de S . Puisque le support de γ_∞ est connexe, on remarquera que γ_∞ et β_∞ ont même support.

Ainsi, on a trouvé une famille de géodésiques fermées simples β_j dans $C(\gamma_\infty) = C(\beta_\infty)$, telles que la suite $\beta_j/\ell_S(\beta_j)$ tend vers $\beta_\infty/\ell_S(\beta_\infty)$ pour une certaine lamination mesurée β_∞ qui est majorée par α_∞ en ce sens que α_∞ se décompose en $\beta_\infty + \beta'$ pour une lamination $\beta' \in \mathcal{L}(S)$. Le lecteur devine sans doute déjà que ce sont ces β_j qui vont montrer que le bout b est simplement dégénéré, c'est-à-dire que tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ contiendra les géodésiques fermées β_j^* de M homotopes aux β_j pour k assez grand (après avoir éventuellement diminué la constante de Margoulis μ).

Sans perte de généralité, on pourra se restreindre au cas où $\pi_1(S_b) = \pi_1(M)$. En effet, si $\tilde{M}$ est le revêtement de M tel que $\pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(S_b)$, la composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contenant le bout b se relève difféomorphiquement dans $\tilde{M}_0(\mu)$ en un voisinage d'un bout $\tilde{b}$. De plus, $\tilde{b}$ est géométriquement fini si et seulement si b l'est (utiliser par exemple la proposition 2.4), et est simplement dégénéré si et seulement si b l'est (c'est immédiat). Quitte à remplacer M par $\tilde{M}$, on supposera donc désormais que $\pi_1(S_b) = \pi_1(M)$, ce qui simplifiera un peu quelques énoncés.

On supposera donc désormais dans cette section que $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$. Dans ce cas, si $M_b(\mu)$ est l'union des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ rencontrant S_b , il vient de [Wal₂] que, en omettant les μ pour simplifier l'écriture, la paire $(M_c, \partial M_c \cap M_b)$ est homéomorphe au produit $(S_b \times [0, 1], \partial S_b \times [0, 1])$.

En particulier, les composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ correspondent à des courbes fermées simples disjointes dans S_b , bien définies à isotopie près (puisque'il en était ainsi dans $\partial M_c(\mu)$).

Comme il n'y a qu'un nombre fini de courbes de S_b qui soient paraboliques dans M , on peut bien sûr supposer que chaque β_j est loxodromique et homotope à une géodésique fermée β_j^* de M .

§ 6.2. Les β_j^* ne s'approchent pas trop des cusps.

On va montrer dans ce paragraphe qu'il existe une constante de Margoulis μ' telle que tous les β_j^* soient contenus dans $M_0(\mu')$. Cette propriété est une conséquence de la simplicité des β_j , et le principal ingrédient de sa démonstration sera des applications hyperboliquement simpliciales comme celles utilisées au § 1.4 pour le lemme du diamètre borné. Ce paragraphe est largement inspiré de la proposition 9.7.1 de [Thu₂].

Rappelons qu'on a identifié la surface S_b avec l'enveloppe convexe $C(S)$ de la surface hyperbolique S , et que $\varphi: S \rightarrow M$ étend l'injection canonique $S_b \rightarrow M$.

Soit S' un ouvert de S contenant l'enveloppe convexe $C(\beta_\infty)$ et tel que :

(i) l'adhérence $\bar{S}'$ est une sous-variété compacte de S , et φ envoie chaque composante de $\partial\bar{S}'$ sur une courbe parabolique de M ;

(ii) S' est minimale à isotopie près pour la propriété ci-dessus, en ce sens que toute courbe fermée simple dans $S' - C(\beta_\infty)$ dont l'image par φ est parabolique est homotope à une composante de $\partial\bar{S}'$.

L'existence d'une telle surface S' est immédiate, et, bien que ce soit inutile, on peut vérifier que S' est unique à isotopie près (considérer les courbes simples disjointes de S_b associées aux cusps de M).

Comme au lemme 1.10, on construit une suite d'applications $\varphi_j: S' \rightarrow M$, hyperboliquement simpliciales pour une triangulation de S' avec un seul sommet, homotopes à la restriction $\varphi|: S' \rightarrow M$, telles que φ_j envoie la courbe simple β_j sur la géodésique fermée β_j^* de M qui lui est homotope. De plus, on peut supposer β_j^* non contenue dans $M_f(\mu)$, car la propriété cherchée est sinon immédiate, et alors faire en sorte que le sommet de la triangulation de S' pour laquelle φ_j est hyperboliquement simpliciale soit envoyé par φ_j dans le complémentaire de la partie fine $M_f(\mu)$.

On désignera par S'_j la surface S' munie de la métrique par chemins induite par φ_j . Comme au § 1.4, soit $(S'_j)_f(\mu)$ la partie fine de S'_j , formée des points de S'_j par où passe un lacet homotopiquement non trivial de longueur $\leq \mu$.

Le lemme ci-dessous fait partie du prix à payer pour notre remplacement des surfaces plissées de [Thu₂] par des applications hyperboliquement simpliciales.

LEMME 6.1. Chaque composante de $(S'_j)_f(\mu)$ est isométrique à une composante de la partie fine d'une surface hyperbolique, c'est-à-dire au quotient d'une horiboule ou d'un fuseau (formé des points à distance bornée d'une géodésique donnée) de $\mathbb{H}^2$ par un groupe d'isométries.

Démonstration. Considérons $x \in (S'_j)_f(\mu)$. Par définition, il existe un arc géodésique γ_x de longueur $\leq \mu$ joignant x à lui-même. Le lacet γ_x est librement homotope dans S'_j à une géodésique fermée ou à un cusp. Parmi les arcs joignant x à cette géodésique ou ce cusp, dans la classe d'homotopie spécifiée par l'homotopie de γ_x , il en existe un k_x qui est de longueur minimale (disons localement dans le cas du cusp); l'existence de k_x se démontre facilement par un argument de géodésiques brisées, pour tenir compte de la singularité de S'_j . Une application de Gauss-Bonnet montre que, parmi les deux secteurs angulaires délimités par γ_x en x , celui qui contient localement k_x est d'angle $< \pi$. Par conséquent, k_x est localement contenu dans $(S'_j)_f(\mu)$, et donc globalement par connexité. En particulier, k_x évite le point singulier de S'_j , puisque celui-ci est hors de $(S'_j)_f(\mu)$.

D'autre part, comme φ_j induit une injection entre $\pi_1(S')$ et $\pi_1(M) = \pi_1(S)$, le sous-groupe de $\pi_1(M; x)$ engendré par tous les γ_x de ce type est cyclique, et la géodésique fermée ou le cusp ainsi associé à x est unique. On en déduit que chaque composante de $(S'_j)_f(\mu)$ est du type annoncé. $\square$

LEMME 6.2. Il existe $\mu_1 \leq \mu$, indépendante de S'_j , telle que toute géodésique fermée simple γ de S'_j évite les composantes cuspidales de $(S'_j)_f(\mu_1)$ et chaque composante de $\gamma \cap (S'_j)_f(\mu_1)$ rencontre l'âme de la composante de $(S'_j)_f(\mu_1)$ correspondante.

Démonstration. On peut démontrer ceci par de la trigonométrie hyperbolique élémentaire dans les modèles pour les composantes de $(S'_j)_f(\mu)$ décrits au lemme 6.1.

Une autre façon de voir est la suivante. Une composante V de $(S'_j)_f(\mu)$ étant fixée, l'espace des arcs géodésiques simples dans V qui joignent ∂V à lui-même et qui, si V n'est pas cuspidale, ne rencontrent pas son âme, est compact. En effet, il est homéomorphe à l'espace des sous-arcs de ∂V . Il existe donc un $\mu_V > 0$ maximal tel que $V \cap (S'_j)_f(\mu_V)$ ne rencontre aucun de ces arcs géodésiques simples. Comme l'espace des modèles que nous avons décrits pour V est compact pour la topologie géométrique (cf. [Thu₂, §5.11]), les μ_V

admettent une borne inférieure $\mu_1 > 0$. Une manière plus prosaïque de dire la même chose est que, si V n'est pas cuspidale, μ_V ne dépend que de la longueur de l'âme de V , et tend vers le μ_W de l'unique modèle cuspidal W quand cette longueur tend vers 0. $\square$

Soit μ_1 satisfaisant les conclusions du lemme 6.2. D'après le lemme du diamètre borné (lemme 1.13), il existe une constante $c_1(\mu_1)$ telle que deux points quelconques de S'_j peuvent être joints par un chemin k dans S'_j tel que la longueur de $k - (S'_j)_f(\mu_1)$ est $\leq c_1(\mu_1)$. (La constante $c_1(\mu_1)$ dépend également du type topologique de S'_j , mais celui-ci est fixé.)

LEMME 6.3. Tout point $x \in S'$ tel que $\varphi_j(x)$ soit à distance $> 2c_1(\mu_1)$ de $M_0(\mu_1)$ est contenu dans $(S'_j)_f(\mu_1)$.

Démonstration. Puisque $\varphi_j(S')$ ne peut être entièrement contenue dans $M_f(\mu_1)$, le lemme du diamètre borné entraîne que x est à distance $\leq c_1(\mu_1)$ d'une composante V de $(S'_j)_f(\mu_1)$. Supposons par l'absurde que x n'appartienne pas à V , et traçons le plus court chemin de x à V . Prolongeons cet arc géodésique de l'autre côté de x jusqu'à un point y à distance $c_1(\mu_1)$ de x , et soit k_x l'arc géodésique de longueur $> c_1(\mu_1)$ joignant y à V ainsi créé.

Comme $\varphi_j(y)$ est encore à distance $> c_1(\mu_1)$ de $M_0(\mu_1)$, le lemme du diamètre borné montre de même que y est à distance $\leq c_1(\mu_1)$ d'une composante V' de $(S'_j)_f(\mu_1)$. Joignons y à V' par un arc k_y de longueur minimum (avec $k_y = y$ si $y \in V'$). Alors, puisque $\varphi_j(k_x \cup k_y)$ est contenue dans la composante cuspidale de $M_f(\mu_1)$ contenant $\varphi_j(x)$, le sous-groupe de $\pi_1(S'; y)$ engendré par $\pi_1(V; y)$ et $\pi_1(V'; y)$ en reliant V et V' au point base y par respectivement k_x et k_y a une image cyclique dans $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$, et est donc cyclique. Par conséquent, $V = V'$ et le chemin $k_x \cup k_y$ peut être homotopé dans V à extrémités fixes. En particulier, on en déduit par convexité de V que $y \notin V$. D'autre part, k_x et k_y sont tous deux orthogonaux à ∂V , et la formule de Gauss-Bonnet montre alors qu'ils sont nécessairement confondus. Comme ils sont de longueurs différentes, ceci fournit la contradiction cherchée et montre que x est nécessairement dans $(S'_j)_f(\mu_1)$. $\square$

Choisissons μ' de sorte que chaque composante cuspidale de $M_f(\mu')$ soit à distance $> 2c_1(\mu_1)$ de $M_0(\mu_1)$. Si β_j^* rencontre une composante cuspidale W de $M_f(\mu')$, il vient du lemme 6.3 ci-dessus que β_j rencontre une composante de $(S'_j)_f(\mu_1)$ dont le groupe fondamental correspond à $\pi_1(W) \subset \pi_1(M) = \pi_1(S)$. Par le

lemme 6.2, cette composante de $(S'_j)_{\mathbf{f}}(\mu_1)$ ne peut être cuspidale dans S'_j , et β_j rencontre son âme γ_W^j . De plus, pour tout point de $\beta_j \cap \gamma_W^j$, l'arc de $\gamma \cap (S'_j)_{\mathbf{f}}(\mu)$ qui le contient n'est pas homotope à un arc du bord de $(S'_j)_{\mathbf{f}}(\mu)$, et est donc de longueur dans S'_j minorée par une certaine constante $c_2(\mu, \mu_1)$ tendant vers l'infini quand μ est fixé et μ_1 tend vers 0. En fait, si l'on veut une formule explicite, on pourra utiliser le théorème 7.35 de [Bea] et choisir $c_2(\mu, \mu_1)$ de sorte que

$$\text{ch}(c_2(\mu, \mu_1)/2) = \text{sh}(\mu/2)/\text{sh}(\mu_1/2) .$$

En particulier,

$$\ell_M(\beta_j^*) \geq c_2(\mu, \mu_1) i(\beta_j, \gamma_W^j) .$$

Or, γ_W^j est homotope à la géodésique fermée simple γ_W de S correspondant au cusp de W . D'autre part, puisque β_j^* est la géodésique fermée de M homotope à $\beta_j \subset S_b \subset M$,

$$\ell_M(\beta_j^*) \leq \ell_M(\beta_j) \leq c_3 \ell_S(\beta_j)$$

où la constante c_3 majore le quotient des métriques induites sur le compact S_b par les métriques de S et de M . On en déduit que

$$i(\beta_j/\ell_S(\beta_j), \gamma_W) \leq c_3/c_2(\mu, \mu_1)$$

dès que β_j^* rencontre la composante cuspidale W de $M_{\mathbf{f}}(\mu')$. On remarquera que le deuxième terme de l'inégalité tend vers 0 quand, μ étant fixé, μ_1 tend vers 0.

Récapitulons. La constante μ étant fixée, on a choisi μ_1 suffisamment petit en fonction de μ , et μ' suffisamment petit en fonction de μ_1 . Alors, les seules composantes cuspidales W de $M_{\mathbf{f}}(\mu')$ que β_j^* peut rencontrer sont celles qui correspondent homotopiquement à des courbes simples γ_W qui satisfont l'inégalité ci-dessus, peuvent être homotopées à l'intérieur de S' , mais ne sont pas homotopes à des composantes de $\partial \bar{S}'$.

Or, il n'y a qu'un nombre fini de telles géodésiques fermées γ_W de S qui correspondent à des cusps de M , et sont homotopables dans S' mais non dans $\partial \bar{S}'$. De plus, chacune de ces courbes a un nombre d'intersection non nul avec $\beta_\infty/\ell_S(\beta_\infty)$ par la condition de minimalité dans la définition de la surface S' . Par conséquent, si l'on avait choisi μ_1 suffisamment petite au départ de sorte que $c_3/c_2(\mu, \mu_1)$ soit strictement inférieur à ces nombres d'intersection, et si j est assez grand pour que $\beta_j/\ell_S(\beta_j)$ soit suffisamment proche de $\beta_\infty/\ell_S(\beta_\infty)$ dans $C(S)$, l'inégalité précédente n'est jamais satisfaite et β_j^* ne rencontre donc aucune composante cuspidale W de $M_{\mathbf{f}}(\mu')$.

On a ainsi atteint l'objectif fixé pour ce paragraphe.

§ 6.3. Les β_j^* tendent vers un bout de $M_0(\mu)$.

Nous avons vu au paragraphe précédent que, quitte à restreindre la constante de Margoulis μ , les β_j^* sont tous contenus dans $M_0(\mu)$. En fait, on a même montré plus, à savoir que $\varphi_j(S')$ ne rencontre aucune des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ qui correspondent à des courbes de S' non homotopes au bord. En particulier, les composantes de $(S'_j)_f(\mu)$ qui ne sont pas cuspidales dans S'_j sont envoyées dans des composantes non cuspidales de $M_f(\mu)$, i.e. des tubes de Margoulis.

On va montrer que, pour tout compact K de $M_0(f)$, il n'y a qu'un nombre fini des β_j^* qui rencontrent K . Une fois que l'on aura montré cela, il sera en effet immédiat d'extraire une sous-suite des β_j^* qui converge vers un certain bout b' de $M_0(\mu)$, en ce sens que tout voisinage de b' contient les β_j^* avec j suffisamment grand.

Soit donc K un compact de $M_0(f)$. On considère la suite d'applications hyperboliquement simpliciales $\varphi_j : S' \rightarrow M$ utilisées au paragraphe précédent. Rappelons que S'_j désigne la surface S' munie de la métrique par chemins induite par φ_j et la métrique de M .

Une première étape, comme lors de la preuve de la proposition 1.23, consiste à construire un compact K' tel que tout β_j^* rencontrant K soit contenu dans K' . Pour cela, on utilise le lemme du diamètre borné, ou plus précisément son raffinement fourni par le lemme 1.14. En effet, si $(S'_j)_0(\mu)$ est le complémentaire dans S'_j de l'intérieur des composantes cuspidales de $(S'_j)_f(\mu)$, le lemme 1.14 fournit une constante $c(\mu)$ telle que deux points quelconques de $(S'_j)_0(\mu)$ peuvent être joints par un chemin dont la longueur hors de $(S'_j)_f(\mu) \cap (S'_j)_0(\mu)$ est majorée par $c(\mu)$. Or, ainsi que nous venons de le remarquer, ces composantes non cuspidales de $(S'_j)_f(\mu)$ sont envoyées par φ_j dans des tubes de Margoulis de $M_f(\mu)$. Le diamètre de β_j^* modulo les tubes de Margoulis de $M_f(\mu)$ est donc borné par $c(\mu)$. Si μ a été choisi de sorte que ces tubes soient à distance ≥ 1 les uns des autres, il n'y a qu'un nombre fini de tubes de Margoulis qu'on peut joindre à K par un chemin dont la longueur hors de ces tubes est $\leq c(\mu)$. On en déduit que le $c(\mu)$ -voisinage K' de l'union de K et de ce nombre fini de tubes de Margoulis a la propriété cherchée : Tout β_j^* rencontrant K est contenu dans K' .

Supposons en quête d'une contradiction qu'il existe une famille infinie de β_j^* rencontrant K , et donc contenus dans K' . Sans perte de généralité, on peut supposer que tous les β_j^* sont comme cela.

Alors, un résultat classique affirme que la longueur $\ell_M(\beta_j^*)$ est comparable à la longueur homotopique $\ell_h(\beta_j)$ de sa classe de conjugaison dans $\pi_1(M) = \pi_1(S)$. Pour définir celle-ci, on fixe un système de générateurs pour $\pi_1(M)$. Alors, $\ell_h(\beta_j)$ est la longueur du plus petit mot en ces générateurs représentant la classe de conjugaison de β_j . Changer le système de générateurs ne change $\ell_h(\beta_j)$ que dans un rapport borné.

Comme on reste dans le compact K' , un résultat habituellement attribué à Milnor [Mil] fournit une constante c_1 ne dépendant que de K' telle que

$$c_1^{-1} \ell_h(\beta_j) \leq \ell_M(\beta_j^*) \leq c_1 \ell_h(\beta_j) \quad \text{pour tout } j.$$

De même, dans le compact $C(S)$ de S , il existe une constante c_2 telle que

$$c_2^{-1} \ell_h(\beta_j) \leq \ell_S(\beta_j) \leq c_2 \ell_h(\beta_j).$$

On en déduit que

$$\ell_M(\beta_j^*) / \ell_S(\beta_j) \geq c_1^{-1} c_2^{-1},$$

et donc que

$$\ell_M(\beta_j') / \ell_S(\beta_j) \geq c_1^{-1} c_2^{-1}$$

pour toute courbe β_j' homotope à β_j dans M .

En particulier, si l'application $\varphi: S \rightarrow M$ est telle que sa restriction à S_b est homotope à l'injection canonique $S_b \rightarrow M$,

$$\ell_M(\varphi(\beta_j)) / \ell_S(\beta_j) \geq c_1^{-1} c_2^{-1}$$

pour tout j , et par passage à la limite

$$\ell_M(\varphi(\beta_\infty)) / \ell_S(\beta_\infty) \geq c_1^{-1} c_2^{-1} > 0.$$

Or, nous avons au contraire vu au § 6.1 que l'existence des α_j^* entraîne que la lamination α_∞ satisfait la conclusion (i) de la proposition 5.1. Autrement dit, on peut trouver de tels φ avec $\ell_M(\varphi(\alpha_\infty))$, et donc $\ell_M(\varphi(\beta_\infty))$, arbitrairement petits. Ceci fournit la contradiction cherchée, et montre bien que seulement un nombre fini des $\varphi_j(S')$ peut rencontrer un compact K donné.

A partir de maintenant, et quitte à extraire une sous-suite des β_j , on peut ainsi supposer que les β_j^* tendent vers un bout b' de $M_0(\mu)$. Il reste à voir que $b' = b$.

§ 6.4. Les β_j^* tendent vers le bon bout.

C'est peut-être l'étape la plus délicate de la démonstration du théorème A (et l'auteur avoue avoir séché dessus pendant de longs mois). Par exemple, c'est essentiellement pour cette partie de la démonstration que nous avons introduit à la section V les opérations de rétrécissement de laminations mesurées. En effet, l'usage que nous avons fait de la proposition 5.1 au paragraphe précédent pouvait être remplacé par des estimations moins fines. On pourra comparer l'analyse de ce paragraphe-ci avec celle que fait Thurston au §9.6 de [Thu₂] dans le cadre plus restreint où à la fois les α_j et les β_k sont des courbes simples, pour laquelle il a été amené à introduire ses délicates interpolations de surfaces plissées. La démonstration que nous allons utiliser sera essentiellement basée sur le lemme du nombre d'intersection démontré à la section III.

Sur la surface hyperbolique S , dont l'enveloppe convexe $C(S)$ est identifiée à S_b , on a deux suites (α_j) et (β_k) de géodésiques fermées. La suite $\alpha_j / \ell_S(\alpha_j)$ converge vers la lamination géodésique mesurée α_∞ dans $C(S)$, et les géodésiques α_j^* de M homotopes aux α_j tendent vers le bout b de $M_0(\mu)$, en ce sens que tout voisinage de b contient toutes les α_j^* sauf un nombre fini. De même la suite $\beta_k / \ell_S(\beta_k)$ converge vers $\beta_\infty / \ell_S(\beta_\infty)$, où β_∞ est majorée par α_∞ , et les géodésiques β_k^* tendent vers un bout b' de $M_0(\mu)$. (Le fait que les β_k soient simples sera sans incidence dans ce paragraphe.) On veut montrer que $b = b'$. Supposons donc le contraire en quête d'une contradiction.

Soit γ une géodésique fermée dans l'intérieur de l'enveloppe convexe $C(\beta_\infty)$. Ainsi

$$i(\gamma, \alpha_\infty) \geq i(\gamma, \beta_\infty) \neq 0.$$

Nous avons vu au § 6.1 que c'est la conclusion (i) de la proposition 5.1 qui est vérifiée pour la lamination $\alpha_\infty \subset S_b \subset M$. Autrement dit, on peut construire des applications $\varphi: S \rightarrow M$, dont la restriction à $S_b = C(S)$ est homotope à l'injection $S_b \rightarrow M$, de sorte que $\ell_M(\varphi(\alpha_\infty))$ soit arbitrairement petite.

Fixons une telle application φ . Par transversalité, on peut supposer que l'image par φ de l'union de toutes les géodésiques fermées de S évite la courbe $\gamma \subset S_b \subset M$. Choisissons une homotopie A_j entre α_j^* et $\varphi(\alpha_j)$, et une homotopie B_k entre β_k^* et $\varphi(\beta_k)$. Remarquons au passage que, puisque $\pi_1(M) = \pi_1(S_b)$, l'homotopie A_j est unique à homotopie respectant α_j^* et $\varphi(\alpha_j)$ près; de même pour B_k .

LEMME 6.4. Il existe une constante $c(\gamma)$ telle que, avec les notations de la section III ,

$$\begin{aligned} i(A_j, \gamma) &\leq c(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_j)) \\ i(B_k, \gamma) &\leq c(\gamma) \ell_M(\varphi(\beta_k)) \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. C'est l'argument du lemme du nombre d'intersection. Supposons d'abord $\varphi(\alpha_j)$ géodésique par morceaux et, puisque $i(A_j, \gamma)$ est invariant par homotopie de A_j d'après le lemme 3.1, choisissons A_j hyperboliquement simpliciale pour une triangulation en tambour de l'anneau $S^1 \times [0, 1]$. Alors, si ϵ est la borne inférieure du rayon d'injectivité de M sur γ , on obtient comme dans le premier cas de la preuve de la proposition 3.4 :

$$\begin{aligned} i(A_j, \gamma) &\leq c_1(\epsilon) \ell_M(\gamma) \text{Aire}(A_j) + c_2(\epsilon) \ell_M(\gamma) \text{Longueur}(\partial A_j) \\ &\leq (c_1(\epsilon) + c_2(\epsilon)) \ell_M(\gamma) \text{Longueur}(\partial A_j) \\ &\leq (c_1(\epsilon) + c_2(\epsilon)) \ell_M(\gamma) (\ell_M(\alpha_j^*) + \ell_M(\varphi(\alpha_j))) \\ &\leq 2(c_1(\epsilon) + c_2(\epsilon)) \ell_M(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_j)) \end{aligned}$$

ce qui est bien une inégalité du type cherché. Quand $\varphi(\alpha_j)$ n'est pas géodésique par morceaux, on procède de même en l'approchant par des géodésiques par morceaux.

La preuve est bien sûr identique pour $i(B_k, \gamma)$. □

Maintenant que l'on a ces estimations, on va essayer de relier $i(A_j, \gamma)$ et $i(B_k, \gamma)$ à $i(\beta_\infty, \gamma)$. Pour cela, il va être commode d'utiliser la formule de dualité du lemme 3.3.

Soit K un compact de M dont l'intérieur contient entièrement l'image de l'homotopie entre $\varphi|_{S_b}$ et l'injection $S_b \rightarrow M$. On peut choisir K de sorte que son intersection K_0 avec $M_0(\mu)$ soit une sous-variété de codimension 0 de $M_0(\mu)$ contenant l'âme compacte $M_c(\mu)$. De plus, on peut faire en sorte qu'aucune composante de $M_0(\mu) - K$ ne soit relativement compacte. Alors, par la proposition 1.6, chaque composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contient exactement une composante de la frontière δK_0 et, pour des raisons de degré, l'image dans $\pi_1(M)$ de chaque composante de δK_0 est la même que celle de la composante de $\partial M_c(\mu)$ qui lui fait face. En particulier, il existe deux homotopies C_b et $C_{b'}$, entre γ et deux courbes situées respectivement dans la composante de δK_0 faisant face à b et dans celle faisant face à b' .

LEMME 6.5. Si j et k sont suffisamment grands pour que α_j^* et β_k^* évitent le compact K et les images de C_b et $C_{b'}$, alors

$$i(A_j, \gamma) = i(\varphi(\alpha_j), C_{b'})$$

et
$$i(B_k, \gamma) = i(\varphi(\beta_k), C_b) .$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1, $i(A_j, \gamma)$ ne dépend que de α_j^* et $\varphi(\alpha_j)$. Par construction de K , on peut choisir l'homotopie A_j de sorte que son image soit contenue dans l'union de K et de la composante de $M_0(\mu) - M_c(\mu)$ contenant b , en mettant bout à bout une homotopie entre α_j^* et $\alpha_j \subset S_b$ et une homotopie entre α_j et $\varphi(\alpha_j)$. En particulier, l'image de A_j évite la courbe $\partial C_{b'} - \gamma$. Il suffit alors d'appliquer la formule de dualité du lemme 3.3. L'argument est identique pour $i(B_k, \gamma)$. $\square$

Quand j tend vers l'infini, le courant géodésique $\alpha_j / \ell_S(\alpha_j)$ tend vers $\alpha_\infty / \ell_S(\alpha_\infty)$, et on a envie de dire que $i(\varphi(\alpha_j), C_{b'}) / \ell_S(\alpha_j)$ tend vers $i(\varphi(\alpha_\infty), C_{b'}) / \ell_S(\alpha_\infty)$. Pour cela, il faut bien sûr donner un sens à cette assertion. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Soit $\tilde{S}$ le revêtement de S dont le groupe fondamental est engendré par γ , et notons encore γ le relevé de cette courbe dans $\tilde{S}$. Les géodésiques de $\tilde{S}$ se répartissent en trois catégories disjointes :

- 1) celles qui coupent transversalement γ en un point ;
- 2) celles qui restent à distance strictement positive de γ ;
- 3) celles qui viennent spiraler sur γ (y compris γ).

Les premières sont spécifiées par la donnée de leur point d'intersection avec γ et de leur direction en ce point. Les secondes sont caractérisées par la donnée de leur unique point dans $\tilde{S} - \gamma$ où elles sont parallèles à γ , c'est-à-dire orthogonales à la perpendiculaire à γ passant par ce point. On peut ainsi identifier l'espace $G_p(\tilde{S})$ de ces géodésiques de types 1) ou 2) de $\tilde{S}$ (où le p de $G_p(\tilde{S})$ fait référence au fait que ce sont exactement les géodésiques propres de $\tilde{S}$) avec deux sous-variétés de $\mathbb{P}(\tilde{S})$ transverses au feuilletage géodésique, respectivement paramétrées par $\gamma \times]0, \pi[$ et $\tilde{S} - \gamma$, et qui rencontrent chaque géodésique de $G_p(\tilde{S})$ en exactement un point.

Si α est un courant géodésique sur S , il se relève en une mesure transverse au feuilletage géodésique de $\mathbb{P}(\tilde{S})$, qui induit elle-même une mesure sur ces deux sous-variétés transverses identifiées à $G_p(\tilde{S})$. On pourra ainsi parler de la mesure induite par α sur $G_p(\tilde{S})$.

Maintenant, considérons le revêtement $\tilde{M}$ de M dont le groupe fondamental est engendré par γ , et relevons φ en $\tilde{\varphi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}$ et C_b , en $\tilde{C}_{b,1}: S^1 \times [0,1] \rightarrow \tilde{M}$. Soit également $\tilde{S}_b$ la préimage dans $\tilde{S}$ de l'enveloppe convexe S_b de S . (On évitera la notation $C(S)$ pour éviter toute confusion avec C_b et $C_{b,1}$.) Perturbons légèrement φ et C_b , de sorte que, par transversalité, $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1})$ soit une famille d'arcs et courbes immergés dans $\tilde{S}$, de bord l'ensemble fini $\tilde{\varphi}^{-1}(\gamma)$ et coupant transversalement $\partial\tilde{S}_b \subset \tilde{S}$; ceci peut clairement être effectué en gardant la propriété que $\varphi^{-1}(\gamma)$ évite l'union de toutes les géodésiques fermées de S . Comme φ induit une injection de groupes fondamentaux, la restriction $\tilde{\varphi}|: \tilde{S}_b \rightarrow \tilde{M}$ est propre, et $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1}) \cap \tilde{S}_b$ est compact. Soit $X \subset G_p(\tilde{S})$ l'ensemble des géodésiques propres de $\tilde{S}$ qui sont contenues dans $\tilde{S}_b$, ne rencontrent pas $\partial\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1}) = \tilde{\varphi}^{-1}(\gamma)$ et ont un nombre d'intersection impair avec $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1})$; on remarquera que cette dernière condition n'a de sens que parce que $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1}) \cap \tilde{S}_b$ est compact et que l'on se restreint à des géodésiques propres évitant $\partial\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b,1})$. Si α est un courant géodésique, on définit maintenant $i(\alpha, C_{b,1})$ comme la masse de cet ensemble X pour la mesure induite par α sur $G_p(\tilde{S})$.

LEMME 6.6. L'application $\alpha \mapsto i(\alpha, C_{b,1})$ ainsi définie est continue en tout courant n'admettant pas γ comme atome, et elle coïncide avec la notion standard de nombre d'intersection géométrique quand α est une géodésique fermée de S .

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{C}(S)$ dont γ n'est pas un atome, et, pour montrer la continuité en α , donnons-nous $\epsilon > 0$. Puisque $\alpha(\gamma) = 0$, il existe une boîte à flot B de $\mathbb{P}(S)$ traversée par γ telle que $\alpha(B) < \epsilon$. Relevons B dans $\tilde{S}$.

Soit X_B le sous-ensemble de X formé des géodésiques traversant B dans $\tilde{S}$. Alors $X - X_B$ est relativement compact dans $G_p(\tilde{S})$. De plus, la frontière de X est formée de géodésiques passant par $\tilde{\varphi}^{-1}(\gamma)$; comme $\tilde{\varphi}^{-1}(\gamma)$ ne rencontre aucune géodésique fermée de S , le même raisonnement qu'au lemme 4.3 montre que cette frontière de X est de mesure nulle pour tout courant géodésique de S . Par conséquent, si β tend vers α dans $\mathcal{C}(S)$, $\beta(X - X_B)$ tend vers $\alpha(X - X_B)$ par convergence vague des mesures induites sur $G_p(\tilde{S})$ (voir [Bou, chap. IV, §5, n° 12] pour cette propriété de la convergence vague que nous avons déjà régulièrement utilisée à la section IV). D'autre part, $\alpha(X_B) \leq \alpha(B) < \epsilon$ et $\beta(X_B) \leq \beta(B) < \epsilon$ si β est suffisamment proche de α . Donc $|\alpha(X) - \beta(X)|$ est majoré par 3ϵ si β est suffisamment proche de α .

Ceci démontre la continuité de l'application $\alpha \mapsto i(\varphi(\alpha), C_{b'})$ aux courants de $\mathcal{C}(S)$ n'admettant pas γ comme atome. Que cette application coïncide avec la notion standard (définie à la section III) quand α est une géodésique fermée est à peu près immédiat. $\square$

En combinant les lemmes 6.4, 6.5 et 6.6, on obtient que

$$\begin{aligned} i(\varphi(\alpha_\infty), C_{b'}) &= \lim_{j \rightarrow \infty} i(\varphi(\alpha_j), C_{b'}) / \ell_S(\alpha_j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} i(A_j, \gamma) / \ell_S(\alpha_j) \\ &\leq c(\gamma) \lim_{j \rightarrow \infty} \ell_M(\varphi(\alpha_j)) / \ell_S(\alpha_j) \\ &\leq c(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_\infty)) . \end{aligned}$$

On définit de la même façon $i(\varphi(\beta_\infty), C_b)$ et on démontre de même en utilisant les β_k que

$$i(\varphi(\beta_\infty), C_b) \leq c(\gamma) \ell_M(\varphi(\beta_\infty)) .$$

Considérons maintenant l'homotopie C entre les courbes $\partial C_{b'} - \gamma$ et $\partial C_b - \gamma$ de M définie par juxtaposition de C_b et $C_{b'}$. Pour définir $i(\varphi(\alpha_\infty), C_{b'})$, on a utilisé le sous-ensemble X de $G_p(\tilde{S})$ formé des géodésiques contenues dans $\tilde{S}_b$, évitant $\tilde{\varphi}^{-1}(\gamma)$, et ayant un nombre d'intersection impair avec $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{C}_{b'})$. Soit $Y \subset G_p(\tilde{S})$ défini de même en remplaçant $C_{b'}$ par C_b . Alors, par définition

$$\begin{aligned} i(\varphi(\beta_\infty), C_{b'}) &= \beta_\infty(X) \\ i(\varphi(\beta_\infty), C_b) &= \beta_\infty(Y) \\ i(\varphi(\beta_\infty), C) &= \beta_\infty(X \cup Y - X \cap Y) . \end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned} i(\varphi(\beta_\infty), C) &\leq i(\varphi(\beta_\infty), C_{b'}) + i(\varphi(\beta_\infty), C_b) \\ &\leq i(\varphi(\alpha_\infty), C_{b'}) + i(\varphi(\beta_\infty), C_b) \\ &\leq c(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_\infty)) + c(\gamma) \ell_M(\varphi(\beta_\infty)) \\ &\leq 2c(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_\infty)) . \end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi(S_b)$ évite ∂C par construction de C_b et $C_{b'}$, et $i(\varphi(\beta_\infty), C)$ reste inchangé si l'on homotope φ parmi les applications possédant cette propriété. (Appliquer le lemme 3.1 en approchant β_∞ dans $\mathcal{C}(S)$ par des multiples de géodésiques fermées de S .) En particulier,

puisque l'image de l'homotopie entre $\varphi|_{S_b}$ et l'injection $S_b \rightarrow M$ évite ∂C car entièrement contenue dans l'intérieur du compact K , on en déduit que

$$\begin{aligned} i(\varphi(\beta_\infty), C) &= i(\beta_\infty, C) \\ &= i(\beta_\infty, \gamma) , \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du lemme 3.1 et du remplacement de C par C' tel que $\partial C' = \partial C$ et $C' \cap S_b = \gamma$. (On remarquera que c' est ici la première fois que l'on utilise l'hypothèse $b' \neq b$.) Avec l'estimation obtenue précédemment pour $i(\varphi(\beta_\infty), C)$, on a ainsi montré que

$$i(\beta_\infty, \gamma) \leq 2c(\gamma) \ell_M(\varphi(\alpha_\infty)) .$$

Or, $i(\beta_\infty, \gamma)$ est non nul par construction de γ , et on pouvait choisir φ au départ de sorte que $\ell_M(\alpha_\infty)$ soit arbitrairement petit (par la conclusion (i) de la proposition 5.1). Ceci fournit la contradiction que l'on cherchait et montre donc que $b = b'$.

Par conséquent, le bout b est simplement dégénéré, et ceci achève la démonstration du théorème A.

§ 6.5. La lamination terminale d'un bout simplement dégénéré.

Pour conclure notre étude des bouts de variétés hyperboliques de dimension 3, ce paragraphe contient simplement quelques remarques sur la lamination α_∞ que l'on a vu apparaître lors de la preuve du théorème A. Celles-ci sont entièrement contenues dans [Thu₂, §9.3], et on a simplement voulu indiquer comment "rattraper" la petite erreur de [Thu₂, §9.3.4] signalée à la section III.

LEMME 6.7. Avec les notations du §6.1, l'enveloppe convexe $C(\beta_\infty)$ de β_∞ est égale à l'intérieur de $S_b = C(S)$. En particulier, α_∞ est l'union de β_∞ et d'un certain nombre de composantes de ∂S_b .

Remarque. En fait, il paraît raisonnable de penser qu'aucune feuille de α_∞ ne peut être une courbe parabolique dans M , et donc que $\alpha_\infty = \beta_\infty$. Par exemple, une estimation analogue à celle de la proposition 5.13 pourrait peut-être permettre de démontrer ceci, mais j'avoue ne pas avoir réussi à suffisamment améliorer ce résultat (sans trop insister, toutefois).

Démonstration du lemme 6.7. Soit $S^1 \subset S$ la surface contenant $C(\beta_\infty)$ définie au §6.2. Etant donnée une suite d'applications hyperboliquement simpliciales $\varphi_j : S^1 \rightarrow M$ telles que $\varphi_j(\beta_j) = \beta_j^*$, nous avons montré aux §6.2 et §6.3 que, pourvu que μ soit suffisamment petit, les $\varphi_j(S^1)$ tendent vers b dans le sens suivant : Pour tout voisinage U de b dans $M_0(\mu)$, les $\varphi_j(S^1)$ avec j assez grand sont contenus dans l'union de U et des composantes cuspidales de $M_f(\mu)$ adjacentes à b (i.e. rencontrant ∂S_b). On en déduit immédiatement que chaque composante du bord de l'adhérence de S^1 est homotope à une composante de ∂S_b . Sans perte de généralité, on peut donc supposer $S_b \subset S^1$.

Supposons $C(\beta_\infty) \neq \text{int}(S_b)$ en quête d'une contradiction. Il existe alors une courbe γ dans $S_b - C(\beta_\infty)$ qui n'est pas homotope à une composante de bord de S_b (ou $\bar{S}^1$), et n'est donc pas parabolique dans M . Si γ^* est la géodésique de M homotope à γ , on peut légèrement modifier la construction des applications hyperboliquement simpliciales φ_j de sorte que $\varphi_j(\gamma) = \gamma^*$ avec toujours $\varphi_j(\beta_j) = \beta_j^*$, en tolérant un point singulier supplémentaire sur γ . Utilisant la forme du lemme du diamètre borné fournie par la proposition 1.15, on a comme précédemment que $\varphi_j(S^1)$ tend vers le bout b , ce qui contredit la propriété que $\varphi_j(\gamma) = \gamma^*$. $\square$

En quoi la lamination mesurée α_∞ dépend-elle de la suite (α_j) dont on est parti ? On peut vérifier que la mesure transverse de α_∞ ou β_∞ ne saurait être un invariant du bout b . En effet, si γ_∞ est n'importe quelle lamination mesurée de même support que β_∞ et si (γ_k) est une suite de géodésiques simples de $S_b = C(S)$ telle que $\gamma_k / \ell_S(\gamma_k)$ tende vers $\gamma_\infty / \ell_S(\gamma_\infty)$ dans $\mathcal{C}(S)$, on montre que les géodésiques γ_k^* de M homotopes aux γ_k tendent elles aussi vers le bout b ; il n'y a donc aucune raison de préférer α_∞ ou β_∞ à γ_∞ . On pourra trouver dans [Thu₂, §8.10] une preuve de ce résultat, qui peut également se démontrer de la même façon que pour les β_k^* (le point un peu délicat étant alors de voir que la lamination mesurée γ_∞ satisfait la conclusion (i) de la proposition 5.1).

Si la mesure transverse de β_∞ n'est pas intrinsèque, la proposition 6.8 ci-dessous va par contre montrer que son support est vraiment un invariant du bout simplement dégénéré b .

Faisons d'abord le point sur le cadre dans lequel on évolue : Soient M une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini et satisfait la condition $(*)$, b un bout simplement dégénéré du complémentaire $M_0(\mu)$ de l'intérieur des composantes cuspidales de la partie fine $M_f(\mu)$,

et S_b la composante du bord du coeur compact de $M_0(\mu)$ qui fait face à b . On identifie S_b avec l'enveloppe convexe d'une surface hyperbolique S de façon à pouvoir parler de courants géodésiques (mais ceci ne dépend pas du choix de S). Rappelons qu'une lamination géodésique de S est un fermé formé de géodésiques simples disjointes.

PROPOSITION 6.8. Il existe une unique lamination géodésique λ_b (sans mesure privilégiée) sur $S_b = C(S)$ avec la propriété suivante : Soit $\gamma_\infty \in \mathcal{C}(S)$ la limite d'une suite de courants $\gamma_k / \ell_S(\gamma_k)$ où les γ_k sont des géodésiques fermées de S_b homotopes dans M à des géodésiques γ_k^* de M , et telles que les γ_k^* tendent vers le bout b dans le sens faible que tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ contient les $\gamma_k^* \cap M_0(\mu)$ avec k assez grand. Alors γ_∞ est une lamination mesurée dont le support est formé de λ_b et de quelques composantes de ∂S_b .

De plus, λ_b est connexe, sans feuille compacte et "remplit" S_b en ce sens que son enveloppe convexe $C(\lambda_b)$ est égale à l'intérieur de S_b . En d'autres termes, chaque composante de $S_b - \lambda_b$ est topologiquement un disque ouvert ou un anneau semi-ouvert.

Démonstration. Quitte à restreindre la constante de Margoulis μ , nous avons construit à la section II une suite de géodésiques α_j de S_b telles que les géodésiques α_j^* de M homotopes tendent vers b dans le sens fort que tout voisinage de b dans $M_0(\mu)$ contient les α_j^* avec j assez grand. Sans perte de généralité, on peut supposer que les α_j^* se comportent bien vis-à-vis des tubes de Margoulis : Ou bien α_j^* évite la partie fine $M_f(\mu)$, ou bien α_j^* est l'âme d'un tube de Margoulis de $M_f(\mu)$. De plus, on peut supposer par extraction de sous-suite que la suite $\alpha_j / \ell_S(\alpha_j)$ converge vers un courant $\alpha_\infty \in \mathcal{C}(S)$. Nous avons alors vu grâce au lemme du nombre d'intersection que α_∞ est une lamination mesurée. Si λ_b est le complémentaire de ∂S_b dans le support de α_∞ , on vient de montrer au lemme 6.7 que λ_b est connexe, sans feuille compacte, et "remplit" S_b .

Soit une suite (γ_k) comme dans l'énoncé de la proposition 6.8, et choisissons des homotopies A_j entre α_j et α_j^* et des homotopies C_k entre γ_k et γ_k^* , ne recoupant pas S_b dans leur intérieur. L'indice j étant fixé, choisissons k suffisamment grand pour que γ_k^* évite l'homotopie A_j . Alors, par la proposition 3.2,

$$i(\alpha_j, \gamma_k) \leq i(\alpha_j^*, C_k) \quad .$$

(Un examen de la preuve montre en fait que l'inégalité ci-dessus est une égalité.)

Or, comme celui-ci ne requiert aucune hypothèse sur γ_k^* , on peut appliquer

l'argument de la preuve de la proposition 3.4 pour obtenir que

$$i(\alpha_j^*, C_k) \leq C e^{-D(j)} \ell_S(\alpha_j) \ell_S(\gamma_k) + 2$$

où la constante C est indépendante de j et k , tandis que $D(j)$ est la distance de α_j^* à S_b . D'où

$$i(\alpha_j / \ell_S(\alpha_j), \gamma_k / \ell_S(\gamma_k)) \leq C e^{-D(j)} + 2 / \ell_S(\alpha_j) \ell_S(\gamma_k) .$$

Faisant tendre k vers l'infini, on obtient que

$$i(\alpha_j / \ell_S(\alpha_j), \gamma_\infty) \leq C e^{-D(j)} ,$$

ce qui donne $i(\alpha_\infty, \gamma_\infty) = 0$ par passage à la limite en j . En particulier, aucune feuille du support de γ_∞ ne coupe λ_b . Comme λ_b remplit S_b , chaque feuille de ce support de γ_∞ est donc, ou bien contenue dans λ_b , ou bien une composante de ∂S_b . $\square$

La lamination λ_b est appelée la lamination terminale du bout simplement dégénéré b . C'est un problème ouvert de savoir si λ_b détermine le type de quasi-isométrie du bout b , ou si d'autres invariants sont nécessaires (voir [Thu₄]). Rappelons que l'intérêt de ce problème provient du théorème de rigidité de Mostow-Sullivan ([Sul₂]), qui montre que la métrique de M est caractérisée à isométrie près par le type de quasi-isométrie des bouts de $M_0(\mu)$; le type de quasi-isométrie des bouts géométriquement finis de $M_0(\mu)$ est déterminé par leur "structure conforme à l'infini".

REFERENCES

- [Ahl₁] L.V. AHLFORS, Finitely generated Kleinian groups, Amer. J. Math. 86 (1964), 413-423.
- [Ahl₂] L.V. AHLFORS, Fundamental polyhedrons and limit sets of Kleinian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 55 (1966), 251-254.
- [Apa₁] B.N. APANASOV, Geometrically finite groups of space transformations (en russe), Sibirsk. Math. Zh. 23 (1982), 16-27 (771-779 pour la traduction anglaise).
- [Apa₂] B.N. APANASOV, Geometrically finite hyperbolic structures on manifolds, Ann. Glob. Analysis and Geometry 1 (1983), 1-22.
- [Bea] A.F. BEARDON, The geometry of discrete groups, Springer Verlag, 1983.
- [BeaM] A.F. BEARDON, B. MASKIT, Limit points of Kleinian groups and finite-sided fundamental polyhedra, Acta Math. 132 (1974), 1-12.
- [Ber₁] L. BERS, Simultaneous uniformization, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 94-97.
- [Ber₂] L. BERS, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, Ann. of Math. 91 (1970), 570-600.
- [Ber₃] L. BERS, What is a Kleinian group ? , dans A crash course on Kleinian groups, Springer Lecture Notes n° 400, 1974.
- [Ber₄] L. BERS, Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations, Bull. Amer. Math. Soc. 5 (1981), 131-172.
- [Bon] F. BONAHO, Courants homotopiques et courants géodésiques, article en préparation.
- [Bou] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques, livre VI (Intégration), Hermann, 1965.
- [BowS] R. BOWEN, C. SERIES, Markov maps associated with Fuchsian groups, Publ. Math. IHES 50 (1979), 153-170.
- [BusK] P. BUSER, H. KARCHER, Gromov's almost flat manifolds, Astérisque n° 81, Société Mathématique de France, 1981.
- [Cas] A. CASSON, Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston, Notes de cours (rédaction de S. Bleiler), Université du Texas at Austin, 1982.

- [Che] J. CHEEGER, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.
- [CheE] J. CHEEGER, D.G. EBIN, Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland, 1975
- [EbON] P. EBERLEIN, B. O'NEILL, Visibility manifolds, Pacific J. Math. 46 (1973), 45-109.
- [Eps] D.B.A. EPSTEIN, Ends, dans Topology of 3-manifolds and related topics (édité par M.K. Fort), Prentice Hall, 1962.
- [Flo] W.J. FLOYD, Group completions and limit sets of Kleinian groups, Invent. Math. 57 (1980), 205-218.
- [FHS] M. FREEDMAN, J. HASS, P. SCOTT, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, Invent. Math. 71 (1983), 609-642.
- [Fre] H. FREUDENTHAL, Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, Math. Zeit. 33 (1931), 692-713.
- [Gro₁] M. GROMOV, Three remarks on geodesic dynamics and fundamental groups, article non publié (1976).
- [Gro₂] M. GROMOV, Manifolds of negative curvature, J. Diff. Geom. 13 (1978), 223-230.
- [Gro₃] M. GROMOV, Almost flat manifolds, J. Diff. Geom. 13 (1978), 231-242.
- [Gro₄] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes (rédaction de J. Lafontaine et P. Pansu), Cedic-Fernand-Nathan, 1981.
- [HarP] J.L. HARER, R.C. PENNER, Combinatorics of train tracks, Prépublication, Universités du Maryland et de Princeton, 1984.
- [Hem] J. HEMPEL, 3-manifolds, Annals of Math. Studies n° 86, Princeton University Press, 1976.
- [Jor] T. JØRGENSEN, Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle, Ann. of Math. 106 (1977), 61-72.
- [KulS] R.S. KULKARNI, P.B. SHALEN, Topological aspects of Ahlfors's finiteness theorem, Prépublication (1984).
- [Mar] A. MARDEN, The geometry of finitely generated Kleinian groups, Annals of Math. 99 (1974), 383-462.
- [MeeY] W.H. MEEKS III, S-T. YAU, The equivariant loop theorem for three-dimensional manifolds and a review of the existence theorems for minimal surfaces, dans The Smith Conjecture (édité par H. Bass et J. Morgan), Academic Press, 1984.
- [Mes] G. MESS, Thèse, Université de Berkeley, 1985.

- [Mil] J.W. MILNOR, A note on curvature and the fundamental group, Journal of Diff. Geometry 2 (1968), 1-7.
- [Mor] J.W. MORGAN, On Thurston's uniformization theorem for the three-dimensional manifolds, dans The Smith Conjecture (édité par H. Bass et J. Morgan), Academic Press, 1984.
- [Mors] H.M. MORSE, A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature, Amer. J. Math. 43 (1921), 33-51.
- [Pap] A. PAPADOPOULOS, Réseaux ferroviaires, difféomorphismes pseudo-Anosov, et automorphismes symplectiques de l'homologie d'une surface, Thèse de 3e cycle et Publication mathématique d'Orsay n° 83/03, 1983.
- [Poi] H. POINCARÉ, Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta Math. 3 (1883), 49-92.
- [Ril] R. RILEY, A quadratic parabolic group, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), 281-288.
- [RueS] D. RUELLE, D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, Topology 14 (1975), 319-327.
- [Sco₁] G.P. SCOTT, Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J. London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.
- [Sco₂] G.P. SCOTT, Compact submanifolds of 3-manifolds, J. London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.
- [Sel] A. SELBERG, On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, dans Colloquium Function Theory, Tata Institute, 1960.
- [Ser] C. SERIES, Symbolic dynamics for geodesic flows, Acta Math. 146 (1981), 103-128.
- [Sie] L.C. SIEBENMANN, The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five, Thèse Université de Princeton, 1965.
- [Sig] K. SIGMUND, On dynamical systems with the specification property, Trans. Amer. Math. Soc. 190 (1974), 285-299.
- [Sul₁] D. SULLIVAN, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, Proceedings of the Stony Brook conference on Riemann surfaces and related topics, Annals of Math. Studies n° 97, Princeton University Press, 1981.

- [Sul₂] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. IHES, 50 (1979), 171-202.
- [Sul₃] D. SULLIVAN, A finiteness theorem for cusps, Acta Math. 147 (1981), 289-299.
- [Thu₁] W.P. THURSTON, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, I, article non publié, 1975.
- [Thu₂] W.P. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Notes de cours, Université de Princeton, 1976-79.
- [Thu₃] W.P. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Livre à paraître à Princeton University Press (version révisée des §§ 1 à 6 et du §13 de [Thu₂]).
- [Thu₄] W.P. THURSTON, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-381.
- [Thu₅] W.P. THURSTON, Hyperbolic structures on 3-manifolds, I : deformations of acylindrical manifolds, Prépublication, 1980.
- [Thu₆] W.P. THURSTON, Hyperbolic structures on 3-manifolds, II : surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, Prépublication, 1980.
- [Thu₇] W.P. THURSTON, Hyperbolic structures on 3-manifolds : Overall logic, notes informelles, 1980.
- [Wal₁] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Invent. Math. 3 (1967), 308-333 et 4 (1967), 87-117.
- [Wal₂] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [Wol] J.A. WOLF, Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1974.