FRANÇOISE LAMNABHI LAGARRIGUE

Séries de Volterra et commande optimale singulière, 1985

ORSAY
n° d'ordre : 2987

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

5.6

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D' ETAT
Spécialité : Sciences Physiques

PAR

Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE

SUJET : SERIES DE VOLTERRA ET COMMANDE OPTIMALE SINGULIERE

soutenue le 22 Mars 1985 devant la Commission d'examen

MM. P. CONTENSOU Président
D.J. BELL Rapporteur
B. BONNARD
M. FLIESS
B. PICINBONO
C. REUTENAUER

Je remercie vivement M. l'Ingénieur Général P. CONTENSOU d'avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse.

J'adresse tout particulièrement mes plus vifs remerciments à M. le Professeur D.J. BELL qui a accepté d'être le Rapporteur de ce travail.. Ses précieux commentaires et sa gentillesse ont été d'un grand support lors des derniers moments de la préparation.

Je remercie également M. le Professeur B. PICINBONO qui m'a accueillie dans son laboratoire,d'avoir accepté de faire partie du jury.

Ces quelques lignes sont pour moi l'occasion d'exprimer mon amicale reconnaissance à M. le Professeur M. FLIESS .Je dirai brièvement qu'il a largement contribué à m'enseigner le métier de chercheur en me transmettant son enthousiasme et nombre de ses connaissances . Je ne peux que souhaiter que notre collaboration se poursuive au delà de cette thèse.

Je remercie B. BONNARD d'avoir participé au jury et d'avoir fait d'importants commentaires qu'il sera bon d'approfondir.

Que C. REUTENAEUR soit aussi amicalement remercié d'avoir accepté de participer au jury.

A ma famille et aux personnes qui m'ont aidée et encouragée à un instant donné par leur soutien amical,je dois l'aboutissement de ce travail.

A. SUR LES SERIES DE VOLTERRA

Introduction

A1 - Première formule fondamentale.

A2 - Séries de Volterra - Développement de Taylor des noyaux.

A3 - Calcul symbolique : applications.

A4 - Une variante.

A5 - Deuxième formule fondamentale. Interprétation hamiltonienne des noyaux.

A6 - Développements fonctionnels pour une grande classe de systèmes.

Annexe A.

INTRODUCTION

L'utilisation de développements fonctionnels pour représenter des systèmes non linéaires a été très étudiée ces trente dernières années, aussi bien en ingénierie qu'en physique. Les développements fonctionnels ont été appliqués dans diverses branches de la théorie des systèmes non linéaires : identification et modélisation, réalisation, stabilité, commande optimale, équations différentielles stochastiques, filtrage, etc... Jusqu'à présent, presque tous les développements fonctionnels utilisés ont été du type Volterra ou dans le cas stochastique du type Wiener. Il y a eu un très grand nombre de publications sur ces développements. Pour simplifier, mentionnons ici seulement les deux livres récents de Rugh [r.2] et Schetzen [s.1].

Dans cette partie, nous rappelons tout d'abord les principaux résultats et notations de [A1] qui seront utilisés dans la suite. Cette approche algébrique entièrement nouvelle, qui utilise les séries formelles en variables non commutative a conduit d'une part à connaître de façon très précise les développements de Taylor des noyaux de Volterra et d'autre part à introduire un calcul symbolique non commutatif généralisant au domaine non linéaire le calcul de Heaviside.

Avec l'introduction du Principe du Maximum, le formalisme Hamiltonien, précédemment important seulement en mécanique et physique est devenu un outil commun et utile en commande optimale qui, comme chacun sait, englobe le calcul des variations. Or les séries de Volterra sont aussi originaires [v2] du calcul des variations. Quel peut donc être le lien entre le formalisme hamiltonien et les séries de Volterra ? En utilisant des dérivées fonctionnelles de l'hamiltonien associé au système on identifiera, dans une deuxième partie, ces liens, donnant ainsi un contexte nouveau pour la commande optimale singulière.

A1. - Première formule fondamentale

On considère un système linéaire en la commande

$$\Sigma \begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + u(t)A_1(q) \\ y(t) = h(q(t)) \end{cases}$$

où l'état q appartient à une variété analytique Q de dimension finie N. Les champs de vecteurs A_0, A_1 : $Q \longrightarrow TQ$ (fibré tangent) et la fonction de sortie h : $Q \longrightarrow R$ sont analytiques. Pour simplifier, on suppose que la commande est une fonction scalaire continue, c'est-à-dire, $u \in C^0[0,T]$, $T>0$. Dans une carte locale $q = (q^1, \ldots, q^N)$, les champs de vecteurs du premier ordre $A_j(q)$, j = 0,1 s'écrivent

$$A_j(q) = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k(q^1, \ldots, q^N) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

et la dynamique de Σ devient

$$\dot{q}^k(t) = \theta_0^k(q^1, \ldots, q^N) + u(t)\,\theta_1^k(q^1, \ldots, q^N) \quad , \quad k = 1, \ldots, N$$

où les $\theta_j^k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions analytiques.

L'état initial $q(0) = q_0 \in Q$ étant fixé, on sait que la sortie de Σ peut s'exprimer comme une fonctionnelle causale de l'entrée u, par la série en variables non commutatives donnée par la première formule fondamentale

$$g = h(q_0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0,1} A_{j_0} \cdots A_{j_\nu} h(q_0)\, x_{j_\nu} \cdots x_{j_0} \quad .$$

$A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h$ désigne la dérivée itérée de h selon les opérateurs différentiels A_j. Pour un temps t "court" et une entrée "petite", on obtient la valeur numérique de y en remplaçant le mot $x_{j_0} \ldots x_{j_\nu}$ par l'intégrale itérée $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$ définie par récurrence sur la longueur:

$$y(t) = h(q_0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0,1} A_{j_0} \cdots A_{j_\nu} h(q_0) \int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0} \qquad \text{(A1)}$$

$$\xi_0(\tau) = \tau \quad , \quad \xi_1(\tau) = \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma \quad , \quad \int_0^t d\xi_j = \xi_j(t) \quad , \quad j = 0, 1$$

et

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0} = \begin{cases} \int_0^t \left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0} \right) d\tau & , \text{ si } j_\nu = 0 \\ \int_0^t \left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0} \right) u(\tau)\, d\tau & , \text{ si } j_\nu = 1 \end{cases}$$

La démonstration, de nature essentiellement algébrique, généralise les travaux de Gröbner [$\mathcal{G}$ 4], sur les équations différentielles libres.

La série g associée à y(t), appelée série génératrice, caractérise [$\mathcal{F}$ 2] le comportement entrée-sortie du système. Certains termes peuvent être regroupés ; on peut envisager, par exemple, de regrouper les termes ne comprenant aucune occurence de x_j, puis ceux qui en comprennent une et une seule, puis deux etc... Comme nous allons le rappeler dans ce qui suit, on obtient alors "l'équivalent" de la série de Volterra. L'étude de cette série permet d'avoir des informations importantes souhaitées par les ingénieurs lorsqu'ils rencontrent de tels systèmes.

A2. - Série de Volterra - Développement de Taylor des noyaux de Volterra.

Divers auteurs (voir [A1] pour la bibliographie) ont montré que la sortie de Σ pouvait être développée en série de Volterra,

$$y(t) = \varpi_0(t,\tau,a) + \int_\tau^t \varpi_1(t,\sigma_1,\tau,a)\, u(\sigma_1)d\sigma_1 +$$
$$+ \int_\tau^t\int_\tau^{\sigma_2} \varpi_2(t,\sigma_2,\sigma_1,\tau,a)\,u(\sigma_1)u(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots + \int_\tau^t \cdots \int_\tau^{\sigma_s} \varpi_s(t,\sigma_s,\dots,\sigma_1,\tau,a)\,u(\sigma_s)\dots u(\sigma_1)\,d\sigma_s \dots d\sigma_1$$
$$+ \dots$$

où $0 \leq \tau \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_s \leq t \leq T$. Les noyaux sont ici sous forme triangulaire. A l'instant initial τ , $q(\tau) = a \in Q$. En réarrangeant les termes de (A1) on montre :

<u>Proposition 1</u> : La sortie du système   peut être développée en série de Volterra où les noyaux sont des fonctions analytiques données par :

$$\varpi_0(t,\tau,a) = \sum_{\nu \geq 0} A_0^{\nu}\, h(a) \frac{(t-\tau)^{\nu}}{\nu!}$$

$$\varpi_1(t,\sigma_1,\tau,a) = \sum_{\nu_0,\nu_1 \geq 0} A_0^{\nu_0} A_1 A_0^{\nu_1}\, h(a)\, \frac{(t-\sigma_1)^{\nu_1}(\sigma_1-\tau)^{\nu_0}}{\nu_1!\,\nu_0!}$$

$$\vdots$$

$$\varpi_s(t,\sigma_s,\dots,\sigma_1,\tau,a) = \sum_{\nu_0,\dots,\nu_s \geq 0} A_0^{\nu_0} A_1 A_0^{\nu_1} \dots A_1 A_0^{\nu_s}\, h(a)\, \frac{(t-\sigma_s)^{\nu_s}\dots(\sigma_1-\tau)^{\nu_0}}{\nu_s!\,\dots\,\nu_0!} \, .$$

$$\vdots$$

Les membres de droite de ces égalités sont le développement de Taylor des noyaux correspondants. Bien sûr, on peut encore écrire formellement :

$$\varpi_0(t,\tau,a) = e^{(t-\tau)A_0}\, h(a)$$

$$\varpi_1(t,\sigma_1,\tau,a) = e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_0}\, \varpi_0(t,\tau,q)\Big|_{q=a}$$

$$\vdots$$

$$\varpi_s(t,\sigma_s,\dots,\sigma_1,\tau,a) = e^{(\sigma_s-\tau)A_0} A_1 \dots A_1\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_0}\, \varpi_0(t,\tau,q)\Big|_{q=a}$$

où les dérivées de ϖ_0 sont prises par rapport à q. La barre $\big|_{q=a}$ indique l'évaluation au point a de l'expression à gauche de la barre.

A3. - Calcul symbolique : applications

Grâce à la vision renouvelée des développements fonctionnels, esquissée dans les deux paragraphes précédents, des algorithmes pour le calcul et l'analyse de la réponse de certains systèmes non linéaires ont pu être élaborés. Les techniques, basées sur des manipulations algébriques de variables non commutatives, généralisent au domaine non linéaire certains aspects des transformations de Fourier et de Laplace. Comme application, citons le calcul de la réponse à une entrée déterministe [A2], ou encore le calcul des statistiques de la réponse quand l'entrée est aléatoire [A3]. On trouvera d'autres applications dans la bibliographie de [A1]. D'autre part, dans [A4], on montre que ce calcul symbolique non commutatif donne une explication à des calculs heuristiques faits par des physiciens en utilisant des transformations de Fourier dans un contexte non linéaire.

A4. - Une variante

Si x et y sont deux variables non commutatives, un sous-produit bien connu de la formule de Baker - Campbell - Hausdorff donne (Bourbaki [b12] p. 59):

$$e^{x} y e^{-x} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu !} \mathrm{ad}_{x}^{\nu} y$$

où $\mathrm{ad}_{x}^{\nu} y$ est le crochet de Lie itérée ν fois $[x, \ldots [x,y] \ldots]$. On obtient une variante des formules précédentes sous la forme :

Proposition 2 : La sortie du système Σ peut être développée en série de Volterra où les noyaux sont des fonctions analytiques données par :

$$w_0(t,\tau,a) = e^{(t-\tau)A_0} R(a)$$

$$w_1(t,\sigma_1,\tau,a) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu}}{\nu !} \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1\, w_0(t,\tau,q) \Big|_{q=a}$$

$$\vdots$$

$$w_s(t,\sigma_s,\ldots,\sigma_1,a) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_s \geq 0} \frac{(\sigma_s-\tau)^{\nu_s} \ldots (\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_s ! \ldots \nu_1 !} \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu_s} A_1 \ldots \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu_1} A_1\, w_0(t,\tau,q) \Big|_{q=a} .$$

A5. - Deuxième formule fondamentale - Interprétation hamiltonienne des noyaux.

Le formalisme hamiltonien, utilisé en mécanique et en physique depuis le siècle dernier pour exprimer des variations, est bien connu en théorie du contrôle depuis vingt cinq ans avec le Principe du Maximum. Les séries de Volterra sont, elles, connues depuis la fin du siècle dernier. Une des raisons de leur introduction a été, comme l'a dit Volterra lui-même, essentiellement le calcul des variations. Ce fait a été confirmé par d'autres travaux importants en analyse fonctionnelle moderne comme ceux de Fréchet, Gateaux ou Lévy. Comme chacun sait, ces deux outils mathématiques sont largement utilisés en engéniérie non linéaire, et, jusqu'à maintenant, l'intersection de ces deux domaines était presque vide.

En généralisant une remarque de [ƒ5] sur la géométrie symplectique du premier noyau, nous montrons dans la Note [A5] que ces deux notions sont presque identiques. Plus précisément, les coefficients du développement de Taylor des noyaux de la série de Volterra associée à la réponse d'un système non linéaire Σ, sont exprimés naturellement grâce aux dérivées fonctionnelles de l'hamiltonien correspondant. L'utilisation de tels développements fonctionnels pour l'étude de la commande optimale singulière semble alors tout à fait appropriée. Ce contexte nouveau permettra d'éviter d'exprimer les conditions nécessaires d'optimalité en termes de dérivées totales par rapport au temps de l'hamiltonien qui, comme l'a noté Knobloch [k3], peuvent être ambigües.

A6. - Développement fonctionnel pour une grande classe de systèmes.

Considérons le système à entrée scalaire u

$$\Sigma' \begin{cases} \dot{q} = F(t, q\,;\, u) \\ y(t) = h(q(t)) \end{cases}$$

où F est une fonction analytique par rapport à toutes les variables t, q et u. Dans une carte locale, définissons les champs de vecteurs A_o et A_i , i = 1,2,... respectivement par ,

$$A_o = \sum_{k=1}^{N} F^k(t, q\,;\, u)\Big|_{u=0} \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$A_i = \sum_{k=1}^{N} F^k_{u(i)}(t, q\,;\, u)\Big|_{u=0} \frac{\partial}{\partial q^k}$$

où $F^k_{u(i)}$ désigne la i-ème dérivée partielle de F^k par rapport à u. On montre le résultat :

Proposition 3 : La sortie y de Σ' peut être développée en série de Volterra de la façon suivante :

$$y(t) = \omega_o(t, \tau, a) + \int_\tau^t e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_1\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, a)\Big|_{q=a} u(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_\tau^t e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_2\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a} u^2(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_\tau^t \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o} A_1\, e^{(\sigma_2-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a} u(\sigma_1)\, u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^t e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_3\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a} u^3(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_\tau^t \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o} A_2\, e^{(\sigma_2-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a} u(\sigma_1)\, u^2(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^t \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_2\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o} A_1\, e^{(\sigma_2-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a} u^2(\sigma_1)\, u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^t \int_\tau^{\sigma_3} \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o} A_1\, e^{(\sigma_3-\sigma_2)A_o} A_1\, e^{(\sigma_3-\tau)A_o}\, \omega_o(t, \tau, q)\Big|_{q=a}$$

$$u(\sigma_1)\, u(\sigma_2)\, u(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3$$

$$+ \cdots$$

Remarque : Comme pour les paragraphes précédents, on ne s'étendra pas sur la convergence de tels développements. Citons à ce sujet les deux importants articles de Lesiak et Krener [ℓ 2] et Boyd et coll. [b 13].

Preuve : Nous donnerons ici seulement une preuve heuristique. La démonstration rigoureuse sera donnée ultérieurement.

F étant analytique par rapport à u, on peut écrire Σ' sous la forme

$$\begin{cases} \dot{q} = F(t,q;u)\big|_{u=0} + \sum_{i\geq 1} F_{u^{(i)}}(t,q;u)\big|_{u=0} u^i(t) \\ y(t) = h(q(t)) \end{cases}$$

En première approximation, on peut supposer que les entrées, $v_i(t) = u^i(t)$, $i = 1,2, \ldots$ sont "indépendantes". En appliquant les résultats précédents à la commande vectorielle $(v_1, v_2, \ldots)$ on obtient le développement souhaité.

A N N E X E A

[A1] M. FLIESS, M. LAMNABHI, F. LAMNABHI-LAGARRIGUE . An algebraic approach to nonlinear functional expansions. IEEE CS 30, 1983, pp. 554-570.

[A2] F. LAMNABHI - LAGARRIGUE, M. LAMNABHI - Algebraic computation of the solution of some nonlinear differential equations. In "Computer Algebra" - Lect Notes Comp. Sc. n° 144, p. 204-212.

[A3] F. LAMNABHI - LAGARRIGUE, M. LAMNABHI - Algebraic computation of the solution of some nonlinear stochastic diffential equations. In "Computer Algebra" - Lect. Notes Comp. Sc. n° 162, p. 55-68.

[A4] M. FLIESS, F. LAMNABHI - LAGARRIGUE - Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator. J. Math. Phys. 23 1982, p. 495-502.

[A5] M. FLIESS, F. LAMNABHI - LAGARRIGUE - Série de Volterra et formalisme hamiltonien - C.R.A.S. Paris.

An Algebraic Approach to Nonlinear Functional Expansions

MICHEL FLIESS, MOUSTANIR LAMNABHI, AND FRANÇOISE LAMNABHI-LAGARRIGUE

Abstract —A new theory of functional expansion is presented which makes use of formal power series in several noncommutative variables and of iterated integrals. A simple closed-form expression for the solution of a nonlinear differential equation with forcing terms is derived, which enables us to give the corresponding Volterra kernels with utmost precision. The noncommutative variables give birth to a symbolic calculus which generalizes in a nonlinear setting many features of the Laplace and Fourier transforms and which is developed in order to simplify some computations, like the so-called association of variables, related to high-order transfer functions.

INTRODUCTION

THE USE OF functional expansions in order to represent nonlinear systems has been energetically studied in the last thirty years, in engineering as well as in physics. Functional expansions have been applied in every branch of nonlinear system theory: identification and modelization, realization, stability, optimal control, stochastic differential equations and filtering, and so on. Until recently, almost all of the expansions used have been of the Volterra type or, in the stochastic case, of the Wiener type. There has been an enormous number of publications on these expansions. For simplicity let us mention here only the early works by Wiener [54], Barrett [2], and George [24], which are still worth reading, and the two recent books by Rugh [45] and Schetzen [48].

In this survey, we shall present an entirely new approach to functional expansions, using formal power series in several noncommutative variables. These formal powers series were introduced by Schützenberger [49] in computer science as a generalization of automata and formal languages. There were first used by [15] in 1973 to give a theory of realization for bilinear systems, which shows their relations to finite automata [17], [31], [44]. Since then,

Manuscript received November 24, 1982; revised January 26, 1983.
M. Fliess and F. Lamnabhi-Lagarrigue are with Laboratoire des Signaux et Systemes, C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France.
M. Lamnabhi is with Laboratoire d'Electronique et de Physique Appliquée, 94450 Limeil-Brevannes, France.

0098-4094/83/0800-0554$01.00 ©1983 IEEE

many papers have developed the theory in various directions. In this review, we shall show how to represent an input–output behavior by a noncommutative power series via the iterated integrals and we shall give the fundamental formula expressing the solution of a differential equation with forcing terms [19]. This simple formula completely explains the relationship between ordinary differential equations and functional expansions, something which has been sought for a long time. Using this formula, it is possible to determine the Taylor expansions of the corresponding Volterra kernels with utmost precision [19], [20].

Several methods for computing the Volterra functional representation corresponding to a state equation have been derived in the literature. Among them, the method of exponential inputs is particularly well known and allows the nonlinear transfer functions to be determined recursively. However, the computations involved are often unwieldy and seem difficult to implement on a computer. The use of noncommutative series allows us to derive the Volterra functional series of the solution of a large class of nonlinear forced differential equations [34], [35] by simple algebraic manipulations. In the last part, we present a new operational calculus for computing the response of nonlinear systems to various deterministic excitations. The calculus introduced compares advantageously with the method of association of variables [24]. It leads to a natural generalization of the well-known Heaviside symbolic calculus for time-invariant linear systems. This remarkable feature shows that we have introduced a kind of nonlinear Fourier–Laplace transform [19], [33]. We shall illustrate the computability of our methods by working out the case of a simple nonlinear electrical circuit. In this connection, we stress the fact that the algebraic and combinatorial nature of our approach fits very well with the symbolic computation methods which are now being developed in programming (see [35]). Some other applications related to physics have been studied elsewhere [22].

It is worth pointing out that our concepts are intimately related to the differential geometric methods which have become mainstays of nonlinear control theory, following the pioneering work by Hermann [29] and Lobry [38] (for the connections with Volterra series, see Brockett [6], Lesiak and Krener [36], and Crouch [11]). For a detailed explanation the reader is advised to consult the presentation of realization theory in [21].

I. Analytic Causal Functionals

A. Heuristic Introduction of the Noncommutative Variables

The following systems, called *bilinear* systems,[1] have been studied for some fifteen years:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) M_i\right) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t). \end{cases} \tag{I.1}$$

The state q belongs to a finite-dimensional R-vector space Q; the initial state $q(0)$ is given. The mappings $M_0, M_1, \cdots, M_m$: $Q \to Q$, and λ: $Q \to R$ are R-linear. The inputs $u_1, \cdots, u_m$ are real-valued and, for the sake of simplicity, are assumed to be piece-wise continuous.

Thanks to the well-known Peano-Baker formula (cf. Gantmakher [23], p. 127), the output y of system (I.1) may be expressed in the following way:

$$y(t) = \lambda\left[1 + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \cdots, j_\nu = 0}^{m} M_{j_\nu} \cdots M_{j_0} \int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}\right] q(0). \tag{I.2}$$

The *iterated integral* $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}$ is defined recursively on its length:

$$\xi_0(\tau) = \tau, \qquad \xi_i(\tau) = \int_0^\tau u_i(\sigma)\, d\sigma, \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$\int_0^t d\xi_j = \xi_j(t), \qquad j = 0, 1, \cdots, m$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0}$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0}\right) d\tau, & \text{if } j_\nu = 0 \\ \int_0^t \left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0}\right) u_i(\tau)\, d\tau, & \text{if } j_\nu = i. \end{cases}$$

Now introduce the finite set $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$. Replacing each iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}$ in (I.2) by the corresponding sequence $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ we obtain the following expression:

$$g = \lambda q(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \cdots, j_\nu = 0}^{m} \lambda M_{j_\nu} \cdots M_{j_0} q(0) x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}. \tag{I.3}$$

This is a series in the noncommutative variables $x_j \in X$. The noncommutativity of the variables reflects the fact that the permutation of indices in an iterated integral changes in general its numerical value.

Example: Taking $u_1(t) = t^\alpha$ we find

$$\int_0^t d\xi_0\, d\xi_1 = \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\alpha+1)} \quad \text{and} \quad \int_0^t d\xi_1\, d\xi_0 = \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}.$$

They differ iff $\alpha \neq 0$.

The series (I.3) characterizes the input–output behavior of system (I.1) in exactly the same way as do rational transfer functions for time-invariant linear systems.

B. Some Elementary Algebraic Structures

The algebraic structures that have appeared in the foregoing paragraph will now be defined more precisely.

The finite set $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ is called the *alphabet*. It generates the *free monoid* X^*, the elements of which are finite sequences $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ called *words*. The product is the *concatenation*:

$$(x_{j_\nu} \cdots x_{j_0})(x_{k_\mu} \cdots x_{k_0}) = x_{j_\nu} \cdots x_{j_0} x_{k_\mu} \cdots x_{k_0}$$

[1] They are also called *internally bilinear* systems, *regular* systems, or *affine* systems.

The neutral element is called the *empty word* and is denoted by 1.

The *length* $|w|$ of a word $w \in X$ is its number of letters: $|x_0 x_1^3 x_0| = 5$. The length of the empty word 1 is zero.

Let $R\langle X\rangle$ and $R\langle\langle X\rangle\rangle$ be the R-algebras of formal polynomials and formal power series with real coefficients and in the noncommutative variables $x_j \in X$. A series $s \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ is noted

$$s = \sum\{(s,w)w \mid w \in X^*\}, \qquad \text{where } (s,w) \in R.$$

A polynomial is a series with at most a finite number of nonzero coefficients (s,w). Sum and (Cauchy) product are defined by

$$s_1 + s_2 = \sum\{[(s_1,w)+(s_2,w)]w \mid w \in X^*\}$$

$$s_1 s_2 = \sum\left\{\left[\sum_{uv=w}(s_1,u)(s_2,v)\right]w \mid w \in X^*\right\}.$$

C. Definition of the Functionals and of the Generating Series

Under some condition of convergence, we associate with each noncommutative series $g \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ a causal functional (i.e., an input–output behavior) by replacing each word $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ by the corresponding iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}$ (cf. Section I-A):

$$y(t; u_1, \cdots, u_m) = (g,1) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\nu = 0}^{m} (g, x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}) \int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}. \tag{I.4}$$

We assume that the series (I.4) is absolutely convergent for t and $\max_{0 \leq \tau \leq t}|u_i(\tau)|$ $(i = 1,\cdots,m)$ sufficiently "small". This is verified if the coefficients satisfy the following growth condition: there exist $K, L > 0$ such that

$$|(g,w)| < K|w|!L^{|w|}. \tag{I.5}$$

It can be shown that to distinct series of $R\langle\langle X\rangle\rangle$ there correspond distinct functionals. Therefore, the following definition is valid. A causal functional is said to be *analytic* if, and only if, it is defined as in formula (I.4) by a noncommutative formal power series which is called the *generating* series of the functional.

Remarks. (i) Causality means only that the value $y(t)$ of the functional depends of the inputs $u_i(\tau)$ for $\tau \leq t$.

(ii) The notion of an analytic functional has already been given various meanings in the literature (cf. Volterra [52], Hille and Philips [30], etc).

(iii) If the output is vector-valued in R^s, one should take an s-uple of generating series.

The notion of analytic causal functional generalizes in some sense the notion of an analytic function. In order to illustrate this assertion, consider a generating series $g \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ which is *exchangeable*: if $\mathfrak{S}_\nu$ denotes the symmetric group acting on the set $\{0,1,\cdots,\nu\}$, g is exchangeable iff for any $\sigma \in \mathfrak{S}_\nu$, $(g, x_{j_{\sigma(\nu)}} \cdots x_{j_{\sigma(0)}}) = (g, x_{j_\nu} \cdots x_{j_0})$, i.e., iff the coefficients do not depend on the order of the variables. A simple computation then shows that

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\nu} \int_0^t d\xi_{j_{\sigma(\nu)}} \cdots d\xi_{j_{\sigma(0)}} = \xi_{j_\nu}(t) \cdots \xi_{j_0}(t).$$

The value of the functional is given by

$$\sum_{k_0,k_1,\cdots,k_m \geq 0} (g, x_0^{k_0} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}) \xi_0(t)^{k_0} \xi_1(t)^{k_1} \cdots \xi_m(t)^{k_m}$$
$$= \sum_{k_0,k_1,\cdots,k_m \geq 0} (g, x_0^{k_0} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}) t^{k_0} \xi_1(t)^{k_1} \cdots \xi_m(t)^{k_m}. \tag{I.6}$$

This is the classical Taylor expansion of an analytic function in the "ordinary" variables $\xi_0(t) = t, \xi_1(t), \cdots, \xi_m(t)$.

D. Rationality

A formal power series $s \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ is *invertible* if there exists $s^{-1} \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ such that $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$. This is the case iff the *constant term* $(s,1)$ is not zero. We can then write

$$s = (s,1)[1 - s']$$

where $s' \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ and $(s',1) = 0$. We thus obtain

$$s^{-1} = \frac{1}{(s,1)}[1-s']^{-1} = \frac{1}{(s,1)} \sum_{k \geq 0} s'^k.$$

A subalgebra R of $R\langle\langle X\rangle\rangle$ is said to be *rationally closed* iff the inverse s^{-1} of any invertible $s \in R$ again belongs to R.

The R-algebra $R\langle\langle X\rangle\rangle$ of noncommutative *rational* power series is the least rationally closed subalgebra of $R\langle\langle X\rangle\rangle$ which contains the polynomials $R\langle X\rangle$.[2] This means that any $r \in R\langle(X)\rangle$ is obtained from a finite set of polynomials of $R\langle X\rangle$ by making a finite number of additions, (Cauchy) multiplications, and inversions in a given order.

The fundamental property of the rational power series is the so-called Kleene–Schützenberger theorem. If End(Q) denotes the set of endomorphisms (i.e., of R-linear mappings $Q \to Q$) of a R-vector space Q, a (linear) *representation* μ: $X^* \to$ End(Q) is a homomorphism of the free monoid X^* in the multiplicative monoid of End(Q), i.e., if $w, w' \in X^*$, $\mu(ww') = \mu(w)\mu(w')$.

Theorem I.1. (Kleene–Schützenberger, cf. [49], [16], [44]). A formal power series $r \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ is rational if, and only if, there exist a finite-dimensional R-vector space Q, an element $\gamma \in Q$, and a R-linear mapping d: $Q \to R$ such that

$$r = \sum\{(\lambda\mu(w)\gamma)w \mid w \in X^*\}.$$

It is then obvious that the series (I.3) is rational and we can state:

Corollary I.2. A generating power series corresponds to a finite-dimensional bilinear system if, and only if, it is rational.

This correspondence is analogous to that between finite-dimensional time-invariant linear systems and rational

[2] The notion of noncommutative rational power series is due to Schützenberger [49].

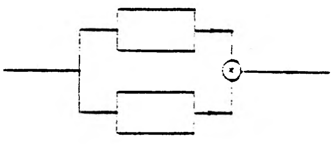


Fig. 1.

transfer functions. This gives a realization theory for bilinear systems [17], [31], [44] which makes use of an extended Hankel matrix [16].

E. Shuffle Product

Take two systems with the same inputs and consider the product of the outputs, i.e., the multiplicative parallel connection (Fig. 1). If the two systems may be defined by generating power series, is the same true of the composite system?

First we have to introduce a new and very important operation called the *shuffle product*, written $\sqcup\!\sqcup$. We define the shuffle product of two words of X recursively on the length:

$$1 \sqcup\!\sqcup 1 = 1, \qquad \forall w \in X^*, \qquad w \sqcup\!\sqcup 1 = 1 \sqcup\!\sqcup w = w$$
$$\forall x_j, x_{j'} \in X, \qquad \forall w, w' \in X^*$$
$$(x_j w) \sqcup\!\sqcup (x_{j'} w') = x_j\left[w \sqcup\!\sqcup (x_{j'} w')\right] + x_{j'}\left[(x_j w) \sqcup\!\sqcup w'\right]. \tag{I.7}$$

The shuffle product of two words gives a homogeneous polynomial of degree equal to the sum of the lengths of the words.

Examples: (i)

$$x^k \sqcup\!\sqcup x^{n-k} = \binom{n}{k} x^n \qquad (n \geq k).$$

(ii) $x_0 x_1 \sqcup\!\sqcup x_2 = x_0 x_1 x_2 + x_0 x_2 x_1 + x_2 x_0 x_1$.

The shuffle product of two series $s_1, s_2 \in R\langle\langle X \rangle\rangle$ is defined by

$$s_1 \sqcup\!\sqcup s_2 = \sum \{(s_1, w_1)(s_2, w_2) w_1 \sqcup\!\sqcup w_2 \mid w_1, w_2 \in X^*\}.$$

With the addition and this new product, the sets $R\langle X \rangle$ and $R\langle\langle X \rangle\rangle$ become commutative, integral R-algebras with unit 1.

Remark: For the reader who is more mathematically oriented, let us add that the shuffle product may be viewed as a very natural operation in the framework of *Hopf algebras* (cf. Sweedler [50]).

The well-known formula for integration by parts allows us to write the product of two iterated integrals in the following way:

$$\left(\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^t d\xi_{k_\mu} \cdots d\xi_{k_0}\right)$$
$$= \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_\mu} \cdots d\xi_{k_0}\right)\right]$$
$$+ \int_0^t d\xi_{k_\mu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_{\mu-1}} \cdots d\xi_{k_0}\right)\right].$$

This corresponds to (I.7) and we may state the following result, essentially due to Ree [43]:

Theorem I.3. The product of two analytic causal functionals is again an analytic causal functional the generating series of which is the shuffle product of the two generating series.

Remarks: (i) One can show that the shuffle product of two rational power series is again rational [19]. Therefore, the product in the foregoing sense of two bilinear systems is again bilinear.

(ii) The additive parallel connection of two systems described by generating series is obviously given by the sum of the series. The cascade connection may also be computed in terms of noncommutative variables (cf. Ferfera [13]).

II. Functional Expansions of the Solutions of Differential Equations with Forcing Terms

A. The Fundamental Formula

The search for a functional expansion of solutions of differential equations with forcing terms is a classical problem in engineering as well as in physics. Since previous attempts have almost exclusively used Volterra series, a brief analysis of the existing literature is postponed until the next chapter.

Consider the *control-linear* system

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i(q) \\ y(t) = h(q). \end{cases} \tag{II.1}$$

The state q belongs to a finite-dimensional R-analytic *manifold* Q.[3] The vector fields $A_0, A_1, \cdots, A_m$: $Q \to TQ$ (TQ: tangent bundle), the output function h: $Q \to R$ are analytic and defined in a neighborhood of the initial state $q(0)$. Readers who have not worked with vector fields will understand what this means in the language of a local coordinates chart $q = (q^1, \cdots, q^N)$. The vector field $A_j(q)$ is then a first-order linear differential operator

$$A_j(q) = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k(q^1, \cdots, q^N) \frac{\partial}{\partial q^k}, \qquad j = 0, 1, \cdots, m$$

where the θ_j^k: $R^N \to R$ are analytic in a neighborhood of $q^1(0), \cdots, q^N(0)$. The first line of (II.1) may be rewritten in the more classical form

$$\dot{q}^k(t) = \theta_0^k(q^1, \cdots, q^N) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \theta_i^k(q^1, \cdots, q^N),$$
$$k = 1, \cdots, N. \tag{II.2}$$

The next theorem generalizes Gröbner's work [26], [27] on free differential equations.

[3] If the reader is not familiar with differential geometry, he will not lose very much of the meaning by assuming that the state belongs to some R^N. But, since we do need the modern notion of *vector fields*, we refer to the numerous textbooks on differentiable geometry, for example, Arnold [1].

Theorem II.1: The output y of system (II.1) is an analytic causal functional of the inputs $u_1, \cdots, u_n$ given by the generating series

$$\boxed{g = h|_{q(0)} + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \cdots, j_\nu = 0}^{m} A_{j_0} \cdots A_{j_\nu} h|_{q(0)} x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}.} \tag{II.3}$$

The bar $|_{q(0)}$ indicates evaluation at $q(0)$. Taking into account the fact that vector fields are differential operators, the notation $A_{j_0} \cdots A_{j_\nu} h$ means the iterated derivative of h with respect to $A_{j_\nu}, \cdots, A_{j_0}$.[4] The inverse order of the sequences $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ and $A_{j_0} \cdots A_{j_\nu}$ should be noted.

Because of its importance, we will call (II.3) the *fundamental formula*. Before giving its proof, we will illustrate it by some examples.

Remark: In this survey paper we consider only continuous-time systems. Normand-Cyrot [41] has recently introduced a discrete-time analog of the fundamental formula which gives birth to as rich a theory as in the continuous-time case.

B. Examples

(i) Free Differential Systems

With Gröbner [26], [27], consider a system without inputs

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) \\ y(t) = h(q). \end{cases}$$

Using formula (II.3), we find

$$y(t) = \sum_{\alpha \geq 0} A_0^\alpha h|_{q(0)} \frac{t^\alpha}{\alpha!} = e^{tA_0} h|_{q(0)}.$$

This is a familiar formula in the case of a linear differential system.

(ii) Commutative Vector Fields

Suppose that in system (II.1) the vector fields commute, i.e., that the corresponding differential operators commute: $A_j A_{j'} = A_{j'} A_j$. This is usually expressed by writing that the *Lie brackets* $[A_j, A_{j'}] = A_j A_{j'} - A_{j'} A_j$ are zero. Formula (II.3) says that the generating series g is exchangeable (cf. Section I.C) and (I.6) becomes

$$y(t) = \sum_{k_0, k_1, \cdots, k_m} A_0^{k_0} A_1^{k_1} \cdots A_m^{k_m} h|_{q(0)} \cdot \frac{t^{k_0} \xi_1(t)^{k_1} \cdots \xi_m(t)^{k_m}}{k_0! k_1! \cdots k_m!}$$

(cf. Gröbner [26], [27]). No use of iterated integrals is then required.

(iii) Time-Varying Systems

Consider the system

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = B_0(t, q) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i(t, q) \\ y(t) = b(t, q) \end{cases}$$

which is identical to (II.1) except that the vector fields $B_0, B_1, \cdots, B_m$, and the output function b may depend analytically on time. As usual we reduce it to an autonomous system by adding one dimension q^0

$$\begin{cases} \dot{q}^0(t) = 1, \quad q^0(0) = 0 \\ \dot{q}(t) = B_0(q^0, q) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i(q^0, q) \\ y(t) = b(q^0, q). \end{cases}$$

By applying (II.3), we are led to introduce the new vector fields

$$C_0(t, q) = \frac{\partial}{\partial t} + B_0(t, q)$$
$$C_i(t, q) = B_i(t, q), \qquad i = 1, \cdots, m.$$

The corresponding generating series is

$$g = b|_{\bar{q}(0)} + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, \cdots, j_\nu = 0}^{m} C_{j_0} \cdots C_{j_\nu} b|_{\bar{q}(0)} x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$$

where $\bar{q}(0) = (0, q(0))$.

(iv) Bilinear Systems

Consider again the bilinear system (I.1). We choose a basis for the finite-dimensional vector space Q where $q = (q^1, \cdots, q^N)$. The corresponding vector fields are

$$A_j(q) = (q^1, \cdots, q^N)\, {}^t M_j \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q^N} \end{pmatrix}, \qquad j = 0, 1, \cdots, m$$

where ${}^t M_j$ is the transpose matrix. Writing $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, the output function h is $h(q) = \lambda_1 q^1 + \cdots + \lambda_N q^N$. Because of the transposition, (II.3) gives once again the series (I.3).

C. Proof

The proof of the fundamental formula is essentially algebraic and generalizes that of Gröbner [26], [27] on free differential systems. We will only sketch it and omit the part concerning the convergence which uses the same majoring series as Gröbner. For more details, see [19].

First consider $m+1$ formal vector fields (i.e., formal first-order linear differential operators)

$$A_j = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k(q^1, \cdots, q^N) \frac{\partial}{\partial q^k}, \qquad j = 0, 1, \cdots, m$$

where the $\theta_j^k \in R[[q^1, \cdots, q^N]]$ are formal power series with real coefficients, in the commutative variables $q^1, \cdots, q^N$. The A_j's act in an obvious way on any element of $R[[q^1, \cdots, q^N]]$. We must now introduce the R-algebra $R[[q^1, \cdots, q^N]]\langle\langle X \rangle\rangle$, i.e., the set of formal power series in the noncommutative variables $x_j \in X$, but with coefficients

[4] The derivative with respect to a vector field is called a *Lie derivative* in differential geometry.

in $R[[q^1,\cdots,q^N]]$. Addition and shuffle product (and also the Cauchy product) are defined in a completely analogous way.

Define the application Λ: $R[q^1,\cdots,q^N]] \to R[[q^1,\cdots,q^N]]\langle\langle X\rangle\rangle$ by

$$h \to \Lambda(h) = h + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\nu = 0}^{m} A_{j_0}\cdots A_{j_\nu} h x_{j_\nu}\cdots x_{j_0}$$

where the right-hand side is a kind of noncommutative *Lie series*.

Lemma II.2. If $h_1, h_2 \in R[[q^1,\cdots,q^N]]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ one can write

$$\Lambda(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1\Lambda(h_1) + \alpha_2\Lambda(h_2)$$

$$\Lambda(h_1h_2) = \Lambda(h_1) ш \Lambda(h_2). \tag{II.4}$$

Proof: Only the equality (II.4) requires a proof. It follows from

$$A_{j_0}\cdots A_{j_\nu}(h_1h_2) = A_{j_0}\cdots A_{j_{\nu-1}}(h_1A_{j_\nu}h_2 + h_2A_{j_\nu}h_1)$$

which reduces to (I.7) defining the shuffle product. ●

As an application, consider an element of $R[[q^1,\cdots,q^N]]$

$$h = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N \geq 0} h_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(q^1)^{\alpha_1}\cdots(q^N)^{\alpha_N}.$$

We get

$$\Lambda(h) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N \geq 0} h_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}[\Lambda(q^1)]^{ш\alpha_1} ш \cdots ш [\Lambda(q^N)]^{ш\alpha_N} \tag{II.5}$$

where $ш\alpha_k$ means the power α_k with respect to the shuffle product.

Take local coordinates as in (II.2) and set $(k = 1,\cdots,N)$

$$\dot{q}^k(t) = q^k(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\nu = 0}^{m} A_{j_0}\cdots A_{j_\nu} q^k|_{q(0)} \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0} \tag{II.6}$$

$$y(t) = h|_{q(0)} + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\nu = 0}^{m} A_{j_0}\cdots A_{j_\nu} h|_{q(0)} \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}. \tag{II.7}$$

We have to show that the quantities q^k and y defined by (II.6) and (II.7) do satisfy the equations (II.1). Because of formula (II.5), it is clear that $y(t) = h(q^1(t),\cdots,q^k(t))$.

Consider now the derivative with respect to time of an iterated integral. We get

$$\frac{d}{dt}\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0} = \begin{cases} \int_0^t d\xi_{j_{\nu-1}}\cdots d\xi_{j_0}, & \text{if } j_0 = 0 \\ u_i(t)\int_0^t d\xi_{j_{\nu-1}}\cdots d\xi_{j_0}, & \text{if } j_\nu = i \in \{1,\cdots,m\}. \end{cases}$$

We are now able to derive the two members of (II.6)

$$\dot{q}^k(t) = \left[\theta_0^k|_{q(0)} + \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\alpha = 0}^{m} A_{j_0}\cdots A_{j_\alpha}\theta_0^k|_{q(0)} \cdot \int_0^t d\xi_{j_\alpha}\cdots d\xi_{j_0}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\left[\theta_i^k|_{q(0)} + \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\alpha = 0}^{m} A_{j_0}\cdots A_{j_\alpha}\theta_i^k|_{q(0)} \cdot \int_0^t d\xi_{j_\alpha}\cdots d\xi_{j_0}\right].$$

Once again, because of formula (II.5), we obtain

$$\dot{q}^k(t) = \theta_0^k(q^1,\cdots,q^N) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\theta_i^k(q^1,\cdots,q^N).$$

This is the required expressions. ●

D. A Noncommutative Symbolic Calculus

The practical computation of functional expansions and, in particular of the generating series, is not a simple matter. We propose here a recursive determination of the coefficients by a fixed-point method.

Equations (II.2) are equivalent to

$$q^k(t) = q^k(0) + \int_0^t \theta_0^k(q^1(\tau),\cdots,q^N(\tau))\,d\tau + \sum_{i=1}^{m}\int_0^t u_i(\tau)\theta_i^k(q^1(\tau),\cdots,q^N(\tau))\,d\tau.$$

By hypothesis, the θ_j^k and the output function h are expandable in Taylor series around the initial state $q(0)$ which we may take as the origin of the coordinates. To a function such as

$$a(q^1,\cdots,q^N) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N \geq 0} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(q^1)^{\alpha_1}\cdots(q^N)^{\alpha_N}$$

associate

$$\overset{ш}{a}(s^1,\cdots,s^N) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N \geq 0} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(s^1)^{ш\alpha_1} ш \cdots ш (s^N)^{ш\alpha_N}$$

where $s^1,\cdots,s^N \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ are power series with constant terms such that $\Sigma a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(s^1,1)^{\alpha_1}\cdots(s^N,1)^{\alpha_N}$ is convergent.

The very meaning of the variables $x_0, x_1,\cdots,x_m$ with respect to the iterated integrals shows that system (II.1) is equivalent to

$$\begin{cases} g^k = q^k(0) + x_0\overset{ш}{\theta}{}_0^k(g^1,\cdots,g^N) + \sum_{i=1}^{m} x_i\overset{ш}{\theta}{}_i^k(g^1,\cdots,g^N) \\ g = \overset{ш}{h}(g^1,\cdots,g^N). \end{cases} \tag{II.8}$$

There exists one and only one $(N+1)$-uple $g^1,\cdots,g^N, g$ solution of (II.8), which is obtained by iterations.[5]

[5] In the R-algebra $R\langle\langle X\rangle\rangle$, consider the two-sided ideal (X) of the power series with zero constant terms. The sequence $(X), (X)^2,\cdots$, defines a fundamental set of neighborhoods of zero and thus a topology where $R\langle\langle X\rangle\rangle$ is a complete metrizable space. System (II.8) defines a contraction and it is then possible to apply the fixed-point theorem (for more details, see [19]).

The following examples will, we hope, illuminate these rather terse explanations. They will also be employed in Section IV.

Examples:

(i) Consider a linear stationary system

$$\begin{cases} \dot q(t) = Fq(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i \\ y(t) = Hq(t). \end{cases}$$

The state q belongs to a finite-dimensional R-vector space Q and $q(0)=0$. The G_i are elements of Q; the mappings F: $Q \to Q$, H: $Q \to R$ are R-linear. With the foregoing notations, we get

$$q(t) = F\int_0^t q(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} G_i \int_0^t u_i(\tau)\,d\tau$$

and, if $q = (q^1, \cdots, q^N)$

$$\begin{cases} {}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N) = Fx_0\,{}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N) + \sum_{i=1}^{m} G_i x_i \\ \mathrm{g} = H\,{}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N). \end{cases}$$

It follows

$$(1 - Fx_0)\,{}^t(\mathrm{g}i^1,\cdots,\mathrm{g}^N) = \sum_{i=1}^{m} G_i x_i$$

and

$$\mathrm{g} = H(1 - Fx_0)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} G_i x_i\right).$$

Since we know that the matrix transfer function is

$$H(p - F)^{-1}\,{}^t(G_1, \cdots, G_m)$$

we see that the generating series is equivalent to it up to an elementary change of variables.

(ii) Take again the bilinear system (I.1). We get

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \left(M_0\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} u_i(\tau) M_i\,d\tau \right) q(\tau)$$

whence

$$\begin{cases} {}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N) = q(0) + \left(M_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} M_i x_i \right) {}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N) \\ \mathrm{g} = \lambda\,{}^t(\mathrm{g}^1,\cdots,\mathrm{g}^N) \end{cases}$$

and

$$\mathrm{g} = \lambda\left(1 - \sum_{j=0}^{m} M_j x_j\right) q(0)$$
$$= \lambda q(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0,\cdots,j_\nu = 0} \lambda M_{j_\nu} \cdots M_{j_0} q(0) x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$$

which is again the series (I.3).

(iii) Consider the Duffing equation, which is well known in nonlinear mechanics

$$\ddot y(t) + a\dot y(t) + \omega^2 y(t) + by^3(t) = u_1(t).$$

The corresponding integral equation is

$$y(t) + a\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \omega^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau y(\sigma)\,d\sigma + b\int_0^t d\tau \int_0^\tau y^3(\sigma)\,d\sigma = \int_0^t d\tau \int_0^\tau u_1(\sigma)\,d\sigma + \beta t + \alpha$$

where α and β are two constants depending on the initial conditions: $\alpha = y(0)$, $\beta = \dot y(0) + ay(0)$. Hence the generating series of y satisfies

$$\mathrm{g} + ax_0\mathrm{g} + \omega^2 x_0^2 \mathrm{g} + bx_0^2(\mathrm{g} ш \mathrm{g} ш \mathrm{g}) = x_0 x_1 + \beta x_0 + \alpha.$$

Remarks: (i) Practical computations will be given in Section IV.

(ii) In [22], one will find an application of the noncommutative symbolic calculus to give an explanation of heuristic computations made by physicists by means of the Fourier transform in a nonlinear setting. This confirms the fact that the noncommutative variables do generalize some properties of the Fourier-Laplace transforms.

III. Volterra Series

A. Definition and Relationship with Generating Series

Volterra series are today the most popular tool when one deals with functional expansions. Recall that Volterra introduced at the end of the last century the following *regular* functional expansions (cf. Volterra [52], Lévy [37]):

$$\begin{aligned} &k_0 + \int_a^b k_1(\tau_1) u(\tau_1)\,d\tau_1 \\ &+ \int_a^b \int_a^b k_2(\tau_2, \tau_1) u(\tau_2) u(\tau_1)\,d\tau_2\,d\tau_1 \\ &+ \cdots + \int_a^b \cdots \int_a^b k_s(\tau_s, \cdots, \tau_1) \\ &\cdot u(\tau_2) \cdots u(\tau_1)\,d\tau_s \cdots d\tau_1 + \cdots \end{aligned} \tag{III.1}$$

where the limits of integration are fixed once and for all.

In order to take into account the time evolution, a time-varying integration limit is introduced and one gets the so-called *Volterra series*

$$\begin{aligned} y(t; u_1) = {} & w_0(t) + \int_0^t w_1(t, \tau_1) u(\tau_1)\,d\tau_1 \\ &+ \int_0^t \int_0^{\tau_2} w_2(t, \tau_2, \tau_1) u(\tau_2) u(\tau_1)\,d\tau_2\,d\tau_1 \\ &+ \cdots + \int_0^t \int_0^{\tau_s} \cdots \int_0^{\tau_2} w_s(t, \tau_s, \cdots, \tau_1) \\ &\cdot u(\tau_s) \cdots u(\tau_1)\,d\tau_s \cdots d\tau_1 + \cdots. \end{aligned} \tag{III.2}$$

There are several ways to define the kernels w_s:

—In (III.2), we used the triangular version where $t \geq \tau_s \geq \cdots \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq 0$,

—A very current way is to use symmetric kernels

$$y(t;u_1)=w_0'(t)+\int_0^t w_1'(t,\tau_1)u(\tau_1)\,d\tau_1$$
$$+\int_0^t\int_0^t w_2'(t,\tau_2,\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)\,d\tau_2\,d\tau_1$$
$$+\cdots+\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t w_s'(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)$$
$$\cdot u(\tau_s)\cdots u(\tau_1)\,d\tau_s\cdots d\tau_1+\cdots$$

where w_s' is a symmetric function of the variables $\tau_1,\cdots,\tau_s$. The passage from one form to the other is classic.

Remark: As usual the input is assumed, for simplicity, to be one dimensional.

Roughly speaking the study of Volterra series may be divided into three main classes: multidimensional Laplace–Fourier transforms (see Sections III-D and IV for details and references), differential geometric methods (see Introduction), and approaches related to functional analysis (see, e.g., Halme [28], Gilbert [25], De Figueirodo and Dwyer [12], Sandberg [46], [47]). Among the numerous attempts to apply Volterra series let us quote the recent and original ones to nonlinear oscillations and Hopf bifurcations (Chua and Tang [10], Tang, Mees, and Chua [51]).

In fact there is a closed and perhaps unexpected relationship between Volterra series and generating series.

Theorem III.1. The triangular Volterra series (III.1) defines an analytic causal functional if, and only if, for any $s\geq 0$, the kernel $w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)$ is an analytic function of the variables $\tau_1,\cdots,\tau_s,t$ in a neighborhood of the origin, such that the radius of convergence of $w_0,w_1,\cdots,w_s,\cdots$, are bounded from below by a strictly positive quantity.

Proof: Expand $w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)$ not with respect to the variables $t,\tau_s,\cdots,\tau_1$ but $t-\tau_s,\tau_s-\tau_{s-1},\cdots,\tau_2-\tau_1,\tau_1$:

$$w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s\geq 0} w_{s,\alpha_0,\cdots,\alpha_s}\frac{(t-\tau_s)^{\alpha_s}\cdots(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_1}\tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_s!\cdots\alpha_1!\alpha_0!}. \tag{III.3}$$

A simple computation shows that to the word $x_0^{\alpha_s}x_1\cdots x_0^{\alpha_1}x_1x_0^{\alpha_0}$ corresponds the multiple integral

$$\int_0^t\int_0^{\tau_s}\cdots\int_0^{\tau_2}\frac{(t-\tau_s)^{\alpha_s}u(\tau_s)\cdots(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_1}u(\tau_1)\tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_s!\cdots\alpha_1!\alpha_0!}\cdot d\tau_s\cdots d\tau_1.$$

Hence we can associate with (III.3) the generating series of $R\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$

$$\sum_{\alpha_0,\cdots,\alpha_s\geq 0} w_{s,\alpha_0,\cdots,\alpha_s}x_0^{\alpha_s}x_1\cdots x_0^{\alpha_1}x_1x_0^{\alpha_0}.$$ ●

Remark: As Volterra had already noticed, series (III.1) may be considered as a functional generalization of Taylor expansions (cf. [52], [37]). On the other hand, a Volterra series (III.2) where t is not fixed once and for all is certainly by no means a Taylor expansion, although this has often been asserted in the literature. It is in fact a perturbative expansion with respect to the product of the inputs. In a future publication, it will be shown that for causal functionals, generating series have a natural interpretation as Taylor expansions.

B. Application of the Fundamental Formula

Consider again a system analogous to (II.1) with the exception that we take a one-dimensional input

$$\begin{cases}\dot q(t)=A_0(q)+u(t)A_1(q)\\ y(t)=h(q).\end{cases} \tag{III.4}$$

The determination of the Volterra series giving the output y has a long history beginning at the end of the fifties mainly with Barrett [2] and George [24] and culuminating with Lesiak and Krener [36] to which one should compare what follows (in this large time interval, let us mention for example Waddington and Fallside [53] and Parente [42] among papers we have not already quoted). Theorems II.1 and III.1 yield:

Proposition III.2. The output of system (III.4) may be expanded in a triangular Volterra series (III.2) where the kernels are analytic functions given by

$$w_0(t)=\sum_{\nu\geq 0}A_0^{\nu}h|_{q(0)}\frac{t^{\nu}}{\nu!}=e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$w_1(t,\tau_1)=\sum_{\nu_0,\nu_1\geq 0}A_0^{\nu_0}A_1A_0^{\nu_1}h|_{q(0)}\frac{(t-\tau_1)^{\nu_1}\tau_1^{\nu_0}}{\nu_1!\nu_0!}$$
$$=e^{\tau_1A_0}A_1e^{(t-\tau_1)A_0}h|_{q(0)}$$

$$w_2(t,\tau_2,\tau_1)=\sum_{\nu_0,\nu_1,\nu_2\geq 0}A_0^{\nu_0}A_1A_0^{\nu_1}A_1A_0^{\nu_2}h|_{q(0)}\frac{(t-\tau_2)^{\nu_2}(\tau_2-\tau_1)^{\nu_1}\tau_1^{\nu_0}}{\nu_2!\nu_1!\nu_0!}$$
$$=e^{\tau_1A_0}A_1e^{(\tau_2-\tau_1)A_0}A_1e^{(t-\tau_2)A_0}h|_{q(0)}$$

- -

$$w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)=\sum_{\nu_0,\cdots,\nu_s\geq 0}A_0^{\nu_0}A_1A_0^{\nu_1}\cdots A_1A_0^{\nu_s}h|_{q(0)}\frac{(t-\tau_s)^{\nu_s}\cdots\tau_1^{\nu_0}}{\nu_s!\cdots\nu_0!}$$
$$=e^{\tau_1A_0}A_1e^{(\tau_2-\tau_1)A_0}A_1\cdots A_1e^{(t-\tau_s)A_0}h|_{q(0)}.$$

As for the fundamental formula, we will not dwell on the question of convergence. More details are to be found in Lesiak and Krener [36].

C. A Variant

If x and y are two noncommutative variables a well-known by-product of the so-called Baker–Campbell–Hausdorff formula gives (cf. Bourbaki [4], p. 59)

$$e^{x}ye^{-x}=\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\nu!}ad_{x}^{\nu}y.$$

The operator ad_x^ν is defined recursively on ν

$ad_x^0 y = y$

$ad_x^1 y = [x, y]$, where $[x, y] = xy - yx$ is the Lie bracket

$ad_x^{\nu+1}y = [x, ad_x^\nu y]$.

With obvious notations, we may write

$$e^{x}ye^{-x}=e^{ad_x}y.$$

We deduce a variant of the formulas of the foregoing proposition which was stated in [20] in order to solve a singular optimal control problem.

Proposition III.3. The output of system (III.4) may be expanded in a triangular Volterra series (III.2) where the kernels are analytic functions given by

$$w_0(t)=e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$w_1(t,\tau_1)=\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\nu!}(ad^{\nu}_{\tau_1A_0}A_1)e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$=(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1)e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$w_2(t,\tau_2,\tau_1)=\sum_{\nu_0,\nu_1\geq 0}\frac{1}{\nu_0!\nu_1!}(ad^{\nu_0}_{\tau_1A_0}A_1)(ad^{\nu_1}_{\tau_2A_0}A_1)e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$=(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1)(e^{ad_{\tau_2A_0}}A_1)e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

- -

$$w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)=\sum_{\nu_0,\cdots,\nu_s\geq 0}\frac{1}{\nu_0!\cdots\nu_s!}(ad^{\nu_s}_{\tau_sA_0}A_1)\cdots(ad^{\nu_1}_{\tau_1A_0}A_1)e^{tA_0}h|_{q(0)}$$

$$=\left(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1\right)\cdots\left(e^{ad_{\tau_sA_0}}A_1\right)e^{tA_0}h|_{q(0)}.$$

Remarks: (i) In those formulas, the Volterra kernels w_s are expressed with respect to $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_s,t$ and not, as before, with $\tau_1,\tau_2-\tau_1,\cdots,t-\tau_s$. Notice that we do need Lie brackets to give the precise expression.

(ii) We know (Gröbner [26]) that $e^{tA_0}h|_{q(0)}=h|_{q_t}$, where q_t is the point reached at time t by q satisfying $\dot q = A_0(q)$ with the initial condition $q(0)$. Hence we arrive at the following formulas where the derivations are taken with respect to $q(0)$, i.e., w.r.t. the dependence of q_t on the initial condition

$$w_0(t)=h(q_t)|_{q(0)}$$

$$w_1(t,\tau_1)=(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1)h(q_t)|_{q(0)}$$

$$w_2(t,\tau_2,\tau_1)=(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1)(e^{ad_{\tau_2A_0}}A_1)h(q_t)|_{q(0)}$$

- -

$$w_s(t,\tau_s,\cdots,\tau_1)=(e^{ad_{\tau_1A_0}}A_1)\cdots(e^{ad_{\tau_sA_0}}A_1)h(q_t)|_{q(0)}.$$

Obviously the same change could be made with the formulas of Theorem III.1.

D. Some Remarks on Transfer Functions

Consider first the linear stationary system

$$y(t)=\int_0^t w_1(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

where

$$w_1(t-\tau)=\sum_{\nu\geq 0}a_\nu\frac{(t-\tau)^\nu}{\nu!}$$

is an analytic function. From Theorem III.1, the corresponding generating series is

$$\sum_{\nu\geq 0}a_\nu x_0^\nu x_1$$

when the transfer function is

$$\sum_{\nu\geq 0}\frac{a_\nu}{p^{\nu+1}}.$$

This confirms the relationship between Laplace transforms and noncommutative variables.

Consider now the homogeneous time-invariant system in triangular form

$$y(t)=\int_0^t\int_0^{\tau_s}\cdots\int_0^{\tau_2}w_s(t-\tau_s,\tau_s-\tau_{s-1},\cdots,\tau_2-\tau_1)\cdot u(\tau_s)\cdots u(\tau_1)\,d\tau_s\cdots d\tau_1.$$

With respect to $t-\tau_s,\tau_s-\tau_{s-1},\cdots,\tau_2-\tau_1,\tau_1$ time-invariance implies that w_s is independant of τ_1. Corresponding to the Taylor expansion

$$w_s=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\geq 0}a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}\frac{(t-\tau_1)^{\alpha_s}\cdots(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_1}}{\alpha_s!\cdots\alpha_1!}$$

we get the generating series

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\geq 0}a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}x_0^{\alpha_s}x_1\cdots x_0^{\alpha_1}x_1.$$

It is equivalent up to an elementary change of variables to the *regular* transfer function introduced by Mitzel and Rugh [40] (see also Rugh [45]) which is here

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\geq 0}a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}\frac{1}{p_s^{\alpha_s+1}}\cdots\frac{1}{p_1^{\alpha_1+1}}.$$

Those transfer functions exhibit some remarkable properties: they correspond to a bilinear system iff they are *recognizable* (cf. [14]), i.e., of the form $P(p_1,\cdots,p_s)/Q_1(p_1)\cdots Q_s(p_s)$ where $P, Q_1,\cdots,Q_s$ are polynomials. As noted in [18], this property may be seen as a direct consequence of the theory of noncommutative rational power series.

Remark: There are at least three types of high-order transfer functions one can introduce:

—the symmetric ones corresponding to symmetric Volterra kernels (see Section IV),

—the regular ones due to Mitzel and Rugh and which have a very natural interpretation thanks to noncommutative variables,

—the multidimensional Laplace transforms of the triangular Volterra kernels with respect to the variables $\tau_1,\cdots,\tau_s, t$ (Section III-C). Until now they do not seem to have attracted any attention. One should certainly select the type of transfer function according to the problem one is interested in.

IV. Determination of Volterra Series

When the input–output behavior of a system described by state equations is of interest, a representation, generally the Volterra functional representation of the solution of the state equations, is needed. Several methods have been developed in the literature for determining the kernels or the associated transfer functions based on classical symbolic methods (cf. Brillant [5], George [24], Bedrosian and Rice [3], Bussgang, Ehrman and Graham [7], Chua and Ng [8], [9]). Among them, the method of exponential inputs is particularly used. After briefly reviewing this method, we describe a new technique based on generating power series. This approach has the advantage of allowing more easily the use of a computer. This becomes necessary as soon as one tries to obtain high-order terms. The two methods are illustrated by analyzing a simple nonlinear circuit.

A. Exponential Input Method

A convenient analysis method of evaluating the nonlinear transfer functions is the so-called "*exponential input*" method which is considered in this section (Bedrosian and Rice [3], Chua and Ng [8], [9]). Following those papers, we will consider, unlike Section III, stationary Volterra series where the time interval of integration is unbounded

$$
\begin{aligned}
y(t) = &\int_0^{\infty} h_1(\tau_1)u(t-\tau_1)\,d\tau_1 \\
&+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_2(\tau_2,\tau_1)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\cdots + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n) \\
&\cdot \prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i)\,d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n + \cdots . \qquad \text{(IV.1)}
\end{aligned}
$$

The input u is one-dimensional. It is well known that, without loss of generality, the kernels can be assumed to be symmetric. In fact any kernel $h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ in (IV.1) can be replaced by a symmetric one by setting

$$h_n^{\mathrm{sym}}(\tau_1,\cdots,\tau_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{all permutations}\\ \text{of } \tau_1,\cdots,\tau_n}} h_n(\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_n}).$$

The multiple Laplace transform of the nth-order Volterra kernel $n>0$

$$
\begin{aligned}
H_n(s_1,\cdots,s_n) = &\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n) \\
&\cdot \exp(-s_1\tau_1 - s_2\tau_1\cdots - s_n\tau_n)\,d\tau_1\cdots d\tau_n
\end{aligned}
$$

is called the *nth-order transfer function*. Since $h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ is symmetric, so is $H_n(s_1,\cdots,s_n)$.

Thus the output of a nonlinear system in the form (IV.1) entails the determination of Volterra kernels $h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ or similarly the nonlinear transfer functions $H_n(s_1,\cdots,s_n)$. To this end, let the input $u(t)$ be a sum of exponentials

$$u(t) = e^{s_1 t} + e^{s_2 t} + \cdots + e^{s_k t}$$

where $s_1, s_2,\cdots,s_k$ are *rationally independent*.[6] Then (IV.1) becomes

$$
\begin{aligned}
y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[&\sum_{k_1=1}^{k}\sum_{k_2=1}^{k}\cdots\sum_{k_n=1}^{k} H_n(s_{k_1},s_{k_2},\cdots,s_{k_n}) \\
&\cdot\exp\big((s_{k_1}+s_{k_2}+\cdots+s_{k_n})t\big)\Bigg]. \qquad \text{(IV.2)}
\end{aligned}
$$

If each s_i occurs in $(s_{k1},\cdots,s_{k_n})m_i$ times, then there are $n!/(m_1!m_2!\cdots m_k!)$ identical terms in the expression between brackets.

Thus (IV.2) can be written in the form

$$
\begin{aligned}
y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m} &\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!} H_n(s_{k_1},\cdots,s_{k_n}) \\
&\cdot \exp(s_{k_1}+\cdots+s_{k_n})t
\end{aligned}
$$

where m under the summation sign indicates that the sum includes all the distinct vectors $(m_1,\cdots,m_k)$ such that

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Note that if $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 1$, then the amplitude associated with the exponential component $\exp(s_1+\cdots+s_k)t$ is simply $k!H_k(s_1,\cdots,s_k)$. This suggests a recursive procedure for determining all the nonlinear transfer functions from the equations defining the behavior of a system. Rather than a general formulation we apply the method to the simple nonlinear circuit (Bussgang, Ehrman, and Graham [7]) of Fig. 2 consisting of a capacitor, a linear resistor, and a nonlinear resistor in parallel with the current source $i(t)$.

The nonlinear differential equation relating the current excitation $i(t)$ and the voltage $v(t)$ across the capacitor is

[6]The number $s_1, s_2,\cdots,s_k$ are said to be rationally independent if there are no rational numbers $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ such that the sum $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \cdots + \alpha_k s_k$ is rational.

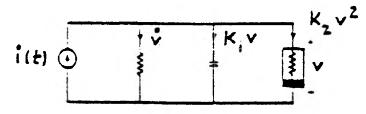


Fig. 2.

given by

$$\frac{dv}{dt}+k_1v(t)+k_2v^2(t)=i(t). \tag{IV.3}$$

A single exponential excitation is first considered

$$i(t)=e^{st}.$$

Equating the coefficients of e^{st} on both sides of (IV.3) after the substitution of (IV.2) for $v(t)$ we get

$$(s+k_1)H_1(s)=1.$$

Thus for the specified circuit, the first-order Volterra transfer function is

$$H_1(s)=\frac{1}{s+k_1}.$$

To determine $H_2(s_1,s_2)$ let us take

$$i(t)=e^{s_1t}+e^{s_2t}$$

and identify the coefficient of the term $2!e^{(s_1+s_2)t}$, after the substitution of (IV.2) for $v(t)$, in both sides of (IV.3). We obtain

$$(s_1+s_2+k_1)H_2(s_1,s_2)+k_2H_1(s_1)H_2(s_2)=0.$$

This yields $H_2(s_1,s_2)$ in terms of $H_1(s)$

$$H_2(s_1,s_2)=-k_2H_1(s_1)H_1(s_2)H_1(s_1+s_2).$$

Similarly, the third-order nonlinear transfer function is obtained by injecting a mixture of three exponential inputs

$$i(t)=e^{s_1t}+e^{s_2t}+e^{s_3t}$$

and equating the coefficients of $3!e^{(s_1+s_2+s_3)t}$ on both sides of (IV.3)

$$H_3(s_1,s_2,s_3)=-\frac{2}{3}\left[H_2(s_1,s_2)H_1(s_3)+H_2(s_2,s_3)H_1(s_1)+H_2(s_1,s_3)H_1(s_2)\right]H_1(s_1+s_2+s_3).$$

Repeating this process indefinitely gives higher order nonlinear transfer functions in terms of lower order nonlinear transfer functions.

B. Generating Power Series Method

In Section III-A, we have derived the relationship between functional Volterra series and generating power series. Here, we describe an algorithm for finding algebraically the generating power series associated with the solution of a nonlinear forced differential equation. The equation we are going to consider is

$$Ly(t)+\sum_{i=2}^{m}p_iy^i(t)=u(t)$$

$$L=\sum_{i=0}^{n}l_i\frac{d^i}{dt^i},\qquad l_n=1 \tag{IV.4}$$

or, in its integral form

$$\begin{aligned}
&y(t)+l_{n-1}\int_0^t y(\tau_1)\,d\tau_1+l_{n-2}\int_0^t d\tau_2\int_0^{\tau_2}y(\tau_1)\,d\tau_1\\
&\quad+\cdots+l_0\int_0^t d\tau_n\int_0^{\tau_n}d\tau_n\int_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\cdots d\tau_2\int_0^{\tau_2}y(\tau_1)\,d\tau_1\\
&\quad+\sum_{i=2}^{m}p_i\int_0^t d\tau_n\int_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\cdots d\tau_2\int_0^{\tau_2}y^i(\tau_1)\,d\tau_1\\
&=\int_0^t d\tau_n\int_0^{\tau_n}d\tau_{n-1}\cdots d\tau_2\int_0^{\tau_2}u(\tau_1)\,d\tau_1
\end{aligned} \tag{IV.5}$$

if we assume zero initial conditions.

Let g denotes the generating series associated with $y(t)$, then (IV.5) can be written symbolically as

$$\left(1+\sum_{j=0}^{n-1}l_jx_0^{n-i}\right)g+x_0^n\sum_{i=0}^{m}p_ig^{\text{ш}\, i}=x_0^{n-1}x_1$$

where $g^{\text{ш}\, i}$ corresponds to the nonlinear functional $y^i(t)$.

This algebraic equation can be solved iteratively, following the recursive scheme

$$g=g_1+g_2+\cdots+g_n+\cdots \tag{IV.6}$$

with

$$g_1=\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}l_ix_0^{n-i}\right)^{-1}x_0^{n-1}x_1$$

and

$$g_n=\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}l_ix_0^{n-i}\right)^{-1}x_0^n\cdot\sum_{i=2}^{m}p_i\sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i=n}g_{\nu_1}\,\text{ш}\,g_{\nu_2}\,\text{ш}\cdots\text{ш}\,g_{\nu_i}.$$

This formula shows that the computation of g_n requires the shuffle product of expressions of the form

$$R_1(x_0)x_1R_2(x_0)x_1\cdots x_1R_p(x_0)$$

where $R_j(x_0)$ $(j=1,\cdots,p)$ is a rational series in the single variable x_0. Decomposing this into partial fractions allows us to consider only the expressions

$$(1-a_0x_0)^{-p_0}x_1(1-a_1x_0)^{-p_1}x_1\cdots x_1(1-a_qx_0)^{-p_q},\qquad p_i\in N,\quad(i=0,\cdots,q).$$

Finally, if we note that

$$(1-ax_0)^{-p}=(1-ax_0)^{-(p-1)}+a(1-ax_0)^{-1}x_0(1-ax_0)^{-(p-1)}$$

we only need to compute the shuffle product of noncommutative power series of the form

$$(1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1},\qquad i_1,\cdots,i_p\in\{0,1\}.$$

This results from the following proposition.

Proposition IV.1. (cf. [34]). Given two noncommutative power series

$$g_1^p = (1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}$$
$$= g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}$$

and

$$g_2^q = (1-b_0x_0)^{-1}x_{j_1}(1-b_1x_0)^{-1}x_{j_2}\cdots x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}$$
$$= g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}$$

where p and q belongs to N, the subscripts $i_1,\cdots,i_p$, $j_1,\cdots,j_q$ to $\{0,1\}$ and a_i, b_j to C; the shuffle product is given by induction on the length by

$$g_1^p ш g_2^q = (g_1^p ш g_2^{q-1})x_{j_q}[1-(a_p+b_q)x_0]^{-1} + (g_1^{p-1} ш g_2^q)x_{i_p}[1-(a_p+b_q)x_0]^{-1}$$

with

$$(1-ax_0)^{-1} ш (1-bx_0)^{-1} = [1-(a+b)x_0]^{-1}.$$

For example, if we choose

$$g_1 = (1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}(1-a_2x_0)^{-1}$$

and

$$g_2 = (1-b_0x_0)^{-1}x_{j_1}(1-b_1x_0)^{-1}$$

then

$$\begin{aligned} g_1 ш g_2 = {} & [1-(a_0+b_0)x_0]^{-1}x_{i_1}[1-(a_1+b_0)x_0]^{-1}x_{i_2} \\ & \cdot[1-(a_2+b_0)x_0]^{-1}x_{j_1}[1-(a_2+b_1)x_0]^{-1} \\ & +[1-(a_0+b_0)x_0]^{-1}x_{i_1}[1-(a_1+b_0)x_0]^{-1}x_{j_1} \\ & \cdot[1-(a_1+b_1)x_0]^{-1}x_{i_2}[1-(a_2+b_1)x_0]^{-1} \\ & +[1-(a_0+b_0)x_0]^{-1}x_{j_1}[1-(a_0+b_1)x_0]^{-1}x_{i_1} \\ & \cdot[1-(a_1+b_1)x_0]^{-1}x_{i_2}[1-(a_2+b_1)x_0]^{-1}. \end{aligned}$$

Proof: Let us consider the formal power series

$$g_1^p = g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}$$

and

$$g_2^q = g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}.$$

Their shuffle product is given by

$$g_1^{p-1}x_{i_p}[1+a_p(1-a_px_0)^{-1}x_0] ш g_2^{q-1}x_{j_q} \cdot[1+b_q(1-b_qx_0)^{-1}x_0]$$

where we use the identity

$$(1-ax_0)^{-1} = 1+a(1-ax_0)^{-1}x_0. \qquad \text{(IV.7)}$$

Applying the definition of the shuffle product and equality (IV.7) gives

$$\begin{aligned} & g_1^p ш g_2^q \\ & = [g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1} ш g_2^{q-1}]x_{j_q} \\ & + [g_1^{p-1} ш g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}]x_{i_p} \\ & + [g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1} ш g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}]a_px_0 \\ & + [g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1} ш g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}]b_qx_0. \end{aligned}$$

Thus we obtain

$$(g_1^p ш g_2^q)[1-(a_p+b_q)x_0] = (g_1^p ш g_2^{q-1})x_{j_q} + (g_1^{p-1} ш g_2^q)x_{i_p}$$

Q.E.D.

Using this proposition, g_i is obtained as a finite sum of expressions of the form

$$(1-a_0x_0)^{-p_0}x_1(1-a_1x_0)^{-p_1}x_1\cdots x_1(1-a_ix_0)^{-p_i}. \qquad \text{(IV.8)}$$

The expansion (IV.6) is "equivalent" to the Volterra series expansion of $y(t)$ (cf. Section III-A). The algebraic closed-form expression of triangular Volterra kernels can be easily deduced from it since the expression (IV.8) is a symbolic representation of the i-dimensional integral

$$\int_0^t\int_0^{\tau_i}\cdots\int_0^{\tau_2} f_{a_0}^{p_0}(t-\tau_i)\cdots f_{a_{i-1}}^{p_{i-1}}(\tau_2-\tau_1)f_{a_i}^{p_i}(\tau_1) \cdot u(\tau_i)\cdots u(\tau_1)\,d\tau_i\cdots d\tau_1 \qquad \text{(IV.9)}$$

where

$$f_a^p(t) = \left(\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\binom{p-1}{j}}{j!}a^jt^j\right)e^{at}.$$

The technique presented above is now used to compute the generating power series associated with the previous nonlinear circuit. The integral form of (IV.3) is

$$v(t)+k_1\int_0^t v(\tau)\,d\tau + k_2\int_0^t v^2(\tau)\,d\tau = \int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

where we assume a zero initial condition.

Thus for the specified circuit, the generating power series is the solution of the algebraic equation

$$g + k_1x_0g + k_2x_0g ш g = x_1$$

or

$$g = -k_2(1+k_1x_0)^{-1}x_0[g ш g] + (1+k_1x_0)^{-1}x_1.$$

This equation is solved iteratively by a computer program (cf. [32], [35]). We obtain Table I, where the symbolic notation

$$\begin{matrix} & x_{i_1} & & x_{i_2} & \cdots & & x_{i_n} & \\ a_0 & & a_1 & & & a_{n-1} & & a_n \end{matrix},$$

$$i_1,\cdots,i_n \in \{0,1\}$$

TABLE I

1		$k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-2	k_2	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+4	k_2^2	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+12	k_2^2	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-8	k_2^3	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-24	k_2^3	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-72	k_2^3	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-24	k_2^3	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
-144	k_2^3	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+48	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+144	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+432	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+288	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+864	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+1728	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+864	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+144	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+2880	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_0} \; 3k_1 \; {}^{x_0} \; 4k_1 \; {}^{x_0} \; 5k_1 \; {}^{x_1} \; 4k_1 \; {}^{x_1} \; 3k_1 \; {}^{x_1} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$
+16	k_2^4	$k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_0} \; 2k_1 \; {}^{x_1} \; k_1 \; {}^{x_1} \; 0$

stands for

$$(1+a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1+a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots$$
$$(1+a_{n-1}x_0)^{-1}x_{i_n}(1+a_nx_0)^{-1}$$

Remarks: (i) The expansion in Table I is "equivalent" to the Volterra series expansion of the solution up to order 5.

(ii) Viennot has recently informed the authors that he has found a combinatorial interpretation of the previous computations which should make the programming much easier.

V. Symbolic Calculus for the Response of Nonlinear Systems

Our next objective will be to show how the Volterra series can be used to determine the output of a system subject to various deterministic excitations (steps, slopes, harmonics, etc.). In the linear case, Laplace and Fourier transforms are systematic and powerful tools of operational calculus. A direct generalization of these techniques, to the nonlinear domain, leads to multidimensional Laplace and Fourier transforms; but the computation based on these is often tedious, even for low-order Volterra kernels, and seems difficult to implement on a computer. An alternative method presented here, based on commutative variables and on the properties of iterated integrals, leads to a simple nonlinear generalization of Heaviside symbolic calculus and to an easy implementation on a computer. It is compared with the *association of variables* introduced by George [24], that we shall now briefly review.

A. Association of Variables

If the Volterra kernels are known for a system, then the output $y(t)$ for a given input $u(t)$ could be obtained. However, as for linear systems, where the use of Laplace transform allows one to develop a powerful operational calculus, one can introduce here the multiple Laplace transform. Indeed, let us consider the "nth-order output" corresponding to the Volterra series (IV.1)

$$y_n(t)=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\cdot u(t-\tau_1)\cdots u(t-\tau_n)\,d\tau_1\cdots d\tau_n.$$

Introduce a set of artificial variables $t_1,t_2,\cdots,t_n$ so that

$$y_{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty h_0(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\cdot u(t_1-\tau_1)\cdots u(t_n-\tau_n)\,d\tau_1\cdots d\tau_n \quad \text{(V.1)}$$

and

$$y_n(t)=y_{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)|_{t_1=t_2=\cdots=t}.$$

Then, taking the nth-order Laplace transform of both sides of (V.1) gives

$$Y_{(n)}(s_1,\cdots,s_n)=H_n(s_1,\cdots,s_n)\prod_{i=1}^{n}U(s_i)$$

where $U(s_i)$ is the usual first-order Laplace transform of the input. Thus, as in the linear case, the convolution in the time domain corresponds to the multiplication in the frequency domain.

Now, assume that the nth-order Laplace transform of $y_{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$, $Y_{(n)}(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ is given and $y_n(t)$ is desired. Obviously, one can perform the nth-order inverse Laplace transform of $Y_{(n)}(s_1,s_2,\cdots,s_n)$

$$y_{(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi j)^n}\int_{\sigma_n-j\infty}^{\sigma_n+j\infty}\cdots\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}Y_{(n)}(s_1,\cdots,s_n)\cdot e^{s_1t_1+\cdots+s_nt_n}\,ds_1\cdots ds_n \quad \text{(V.2)}$$

and set $t_1=t_2=\cdots=t_n=t$. However, this computation is often unwieldy. In order to bypass this difficulty, George [24] developed a method whereby the t_i variables could be set equal or *associated* without leaving the transform domain, leading to a one-dimensional Laplace transform $Y_n(s)$. Indeed, let us consider a two variables transform

$Y_{(2)}(s_1, s_2)$, setting $t_1 = t_2 = t$ in (V.2) yields

$$y_{(2)}(t_1, t_1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 - j\infty} Y_{(2)}(s_1, s_2) e^{s_1 t}\, ds_1\right] e^{s_2 t}\, ds_2.$$

Changing the variable of integration s_1 to $s = s_1 + s_2$ gives

$$y_{(2)}(t_1, t_1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 - j\infty} Y_{(2)}(s - s_1, s_2) e^{(s - s_2)t}\, ds\right] e^{s_2 t}\, ds_2$$

or, by interchanging the order of integration

$$y_{(2)}(t_1, t_1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} Y_{(2)}(s - s_2, s_2)\, ds_2\right] e^{st}\, ds.$$

Thus the associated transform $Y_2(s)$ is

$$Y_2(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} Y_{(2)}(s - s_2, s_2)\, ds_2. \qquad \text{(V.3)}$$

Similarly, a transform of any order can be reduced to a first-order transform by successive pairwise associations.

For example, let us consider the third-order term

$$\frac{1}{(s_1 + s_2 + s_3 + a)(s_1 + a)(s_2 + a)(s_3 + a)}.$$

Using (V.3) to associate the variables s_2 and s_3 yields

$$\frac{1}{(s_1 + s_2 + a)(s_1 + a)(s_2 + 2a)}.$$

Then associating s_1 and s_2 results in the first-order transform

$$\frac{1}{(s + a)(s + 3a)}.$$

The procedure for computing $Y_n(s)$ from $Y_{(n)}(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ is called *association of variables*. Although an explicit formula for performing the associating operation in a wide class of Laplace transforms has been obtained in the literature (see Rugh [45] and the references herein), this technique has seldom been used. The main reason for this situation seems to be the tedious manipulations involved and the difficulty in decomposing them on a computer.

B. Noncommutative Symbolic Calculus

Using the noncommutative generating power series, we develop in this section a symbolic calculus for computing the response of nonlinear systems described by (IV.4) to various deterministic inputs (steps, slopes, harmonics, etc.). Such computations may be of interest in order to get nonlinear distortions. To this end we show that integrals of the form (IV.9) can be expressed in terms of "elementary functions" for a specified set of functions $u(t)$.

Let the input $u(t)$ be an analytic function

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} u_{(n)} \frac{t^n}{n!}.$$

Define the transform (known as the Laplace-Borel transform) of $u(t)$

$$\mathfrak{g}_{u(t)} = \sum_{n \geq 0} u_{(n)} x_0^n.$$

(This series may be regarded as the generating power series associated with $u(t)$ since

$$\frac{t^n}{n!} = \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau} d\tau_1 \Big).$$

Then we can state the following result [33]:

Proposition V.1. The integration (IV.9) defines an analytic function, the Laplace-Borel transform of which is given by

$$(1 - a_0 x_0)^{-p_0} x_0 \big(\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup (1 - a_1 x_0)^{-p_1} x_0 \cdot \big[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup \cdots x_0 \big[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup (1 - a_i x_0)^{-p_i}\big] \cdots \big]\big). \qquad \text{(V.4)}$$

Thus it is simply obtained, by replacing each indeterminate x_1 in (IV.8) by the operator $x_0[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup \cdot]$.

This results in a single variable transform (i.e., the Laplace-Borel transform) and thus the shuffle product appears as an operation which implicitly takes into account the technique of association of variables.

Proof: Let $f_1(t)$ and $f_2(t)$ be two analytic functions, $\mathfrak{g}_{f_1(t)}$ and $\mathfrak{g}_{f_2(t)}$ their corresponding Laplace-Borel transforms. Based on the results in Section III-D, one can first state that

$$\mathfrak{g}_{\int_0^t f_1(\tau)\, d\tau} = x_0 \mathfrak{g}_{f_1(t)} \qquad \text{(V.5)}$$

and

$$\mathfrak{g}_{f_1(t) \times f_2(t)} = \mathfrak{g}_{f_1(t)} \sqcup\!\sqcup \mathfrak{g}_{f_2(t)}. \qquad \text{(V.6)}$$

Now, let us consider the expression

$$(1 - a_0 x_0)^{-p_0} x_1 (1 - a_1 x_0)^{-p_1} \qquad \text{(V.7)}$$

which is the symbolic representation of the integral series

$$\sum_{n \geq 0} \binom{p_0 + n - 1}{n} a_0^n \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} u(\tau_0) f_{a_1}^{p_1}(\tau_0)\, d\tau_0 \qquad \text{(V.8)}$$

where

$$f_a^p(t) = \sum_{n \geq 0} \binom{p + n - 1}{n} a^n \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1$$

is the inverse Laplace-Borel transform of $(1 - a x_0)^{-p}$. Following (V.5) and (V.6), the Laplace-Borel transform of (V.8) is

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \binom{p_0 + n - 1}{n} a_0^n x_0^n \right\} x_0 \big[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup (1 - a_1 x_0)^{-p_1}\big] = (1 - a_0 x_0)^{-p_0} x_0 \big[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup (1 - a_1 x_0)^{-p_1}\big].$$

Thus it is simply obtained by replacing the indeterminate x_1 in (V.7) by the operator $x_0[\mathfrak{g}_{u(t)} \sqcup\!\sqcup \cdot]$.

The proposition (V.1) results from repeated application of this rule to the expression

$$(1 - a_0 x_0)^{-p_0} x_1 (1 - a_1 x_0)^{-p_1} x_1 \cdots x_1 (1 - a_i x_0)^{-p_i}. \quad \blacksquare$$

TABLE II
LAPLACE–BOREL TRANSFORM OF SOME FUNCTIONS

$u(t)$	$g_{u(t)}$
unit step	1
$\frac{t^n}{n!}$	x_0^n
$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{a^i t^i}{i!}\right) e^{at}$	$(1-ax_0)^{-n}$
$\cos(\omega t)$	$(1+\omega^2 x_0^2)^{-1}$

Now, assume that $g_{u(t)}$ is the rational fraction

$$(1-ax_0)^{-p}$$

that is, $u(t)$ is an exponential polynomial of the form

$$u(t)=\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}\frac{a^j t^j}{j!}\right)e^{at}$$

then, the simple identity

$$(1-ax_0)^{-p}=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}a^j(1-ax_0)^{-1} \cdot \underbrace{x_0(1-ax_0)^{-1}x_0\cdots x_0(1-ax_0)^{-1}}_{j \text{ times}}$$

and Proposition (IV.1) allow to derive a closed-form expression for (V.4) as a rational fraction. The corresponding time function, that is, the value of the integral (IV.9), then results from the decomposition into partial fractions of this rational fraction. The same technique applies when $g_{u(t)}$ is a general rational function, regular at the origin. Let us note here, that to compute the response, one only needs to know the Laplace–Borel transform of some common functions (Table II).

In order to illustrate the use of this rule, consider again the nonlinear system shown in Fig. 1. Its response to an input $i(t)$ derives from Table I by

$$\begin{aligned}&(1+k_1x_0)^{-1}x_0\left[g_{i(t)}Ш 1\right]\\ &-2k_2(1+k_1x_0)^{-1}x_0(1+2k_1x_0)^{-1}x_0\\ &\cdot\left[g_{i(t)}Ш(1+k_1x_0)^{-1}x_0\left[g_{i(t)}Ш 1\right]\right]\\ &+4k_2^2(1+k_1x_0)^{-1}x_0(1+2k_1x_0)^{-1}x_0\\ &\cdot\left\{g_{i(t)}Ш(1+k_1x_0)^{-1}x_0(1+2k_1x_0)^{-1}x_0\right.\\ &\left.\cdot\left[g_{i(t)}Ш(1+k_1x_0)^{-1}x_0\left[g_{i(t)}Ш 1\right]\right]\right\}+\cdots \qquad (V.9)\end{aligned}$$

where $g_{i(t)}$ is the Laplace–Borel transform of $i(t)$.

Application.

1) Let us, for example, compute the response of the system to the unit step

$$i(t)=1, \qquad t \geqslant 0.$$

As the Laplace–Borel transform of the unit step is 1, the neutral element for the shuffle product, the Laplace–Borel

TABLE III

1		k_1	x_0	0												
-2	k_2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0								
+4	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0				
+12	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0				
-8	k_2^3	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0
-24	k_2^3	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0
-72	k_2^3	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0
-24	k_2^3	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0
-144	k_2^3	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$4k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1$	x_0	k_1	x_0	0
⋮																

TABLE IV

$\frac{1}{2}$		k_1	x_0	$j\omega$								
$-\frac{1}{2}$	k_2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	$2j\omega$				
$-\frac{1}{2}$	k_2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	0				
$+\frac{1}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	$k_1+2j\omega$	x_0	$3j\omega$
$+\frac{1}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	$k_1+2j\omega$	x_0	$j\omega$
$+\frac{1}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	k_1	x_0	$j\omega$
$+\frac{1}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$k_1+j\omega$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	k_1	x_0	$-j\omega$
$+\frac{3}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	$k_1+2j\omega$	x_0	$3j\omega$
$+\frac{3}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	$k_1+2j\omega$	x_0	$j\omega$
$+\frac{3}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	k_1	x_0	$j\omega$
$+\frac{3}{2}$	k_2^2	k_1	x_0	$2k_1$	x_0	$3k_1$	x_0	$2k_1+j\omega$	x_0	k_1	x_0	$-j\omega$

+ complex conjugates

+ ......

transform of $v(t)$ is given simply by replacing each variable x_1 in the generating power series g by the variable x_0 (Table III). Then, by decomposing into partial fractions, we get the original function

$$\begin{aligned}v(t)=&\frac{1}{k_1}(1-e^{-k_1t})-\frac{k_2}{k_1^3}(1-2k_1te^{-k_1t}-e^{-2k_1t})\\ &+\frac{k_2^2}{k_1^5}\left[2+(1-2k_1t-2k_1^2t^2)e^{-k_1t}\right.\\ &\left.-2(1+2k_1t)e^{-2k_1t}-e^{-3k_1t}\right]+\cdots.\end{aligned}$$

2) Let us now consider a harmonic input

$$u(t)=\cos\omega t=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right],\qquad t\geqslant 0.$$

Its Laplace–Borel transform is

$$g_{u(t)}=\frac{1}{2}\left[(1-j\omega x_0)^{-1}+(1+j\omega x_0)^{-1}\right].$$

Applying (V.9) gives (Table IV). The time-domain response is then

$$\begin{aligned}
v(t)=&\frac{1}{k_1^2+\omega^2}\left[-k_1e^{-k_1t}+k_1\cos\omega t+\omega\sin\omega t\right]\\
&+\frac{k_2}{2(k_1^2+\omega^2)}\left[\frac{1}{k_1}e^{-2k_1t}+\frac{2}{\omega}\sin\omega t e^{-k_1t}-\frac{1}{k_1}\right]\\
&+\frac{k_2}{2}\left[\frac{4}{k_1(k_1^2+4\omega^2)}e^{-k_1t}+\frac{k_1^2-\omega^2}{k_1(k_1^2+\omega^2)^2}e^{-2k_1t}\right.\\
&-\frac{2\left[2k_1\omega\cos\omega t-(k_1^2-\omega^2)\sin\omega t\right]}{\omega(k_1^2+\omega^2)^2}e^{-k_1t}\\
&\left.\cdot\frac{\left[k_1(k_1^2-\omega^2)-4k_1\omega^2\right]\cos 2\omega t-\left[2\omega(k_1^2-\omega^2)+2k_1^2\omega\right]\sin 2\omega t}{(k_1^2+4\omega^2)(k_1^2+\omega^2)^2}\right]+\cdots.
\end{aligned}$$

The steady-state response may be obtained directly from Table III by considering only those terms which do not vanish for large t

$$\begin{aligned}
v(t)=&\frac{1}{2}\left.\frac{x_0}{1+k_1x_0}\right|_{x_0=-1/j\omega}e^{j\omega t}\\
&-\frac{1}{2}k_2\left.\frac{x_0^3}{(1+k_1x_0)(1+2k_1x_0)\left[1+(k_1+j\omega)x_0\right]}\right|_{x_0=-1/2j\omega}e^{2j\omega t}\\
&-\frac{1}{2}k_2^2\left.\frac{x_0^5}{(1+k_1x_0)(1+2k_1x_0)\left[1+(k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(2k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(k_1+2j\omega)x_0\right]}\right|_{x_0=-1/3j\omega}e^{3j\omega t}\\
&-\frac{1}{2}k_2^2\left.\frac{x_0^5}{(1+k_1x_0)(1+2k_1x_0)\left[1+(k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(2k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(k_1+2j\omega)x_0\right]}\right|_{x_0=-1/j\omega}e^{j\omega t}\\
&-\frac{1}{2}k_2^2\left.\frac{x_0^5}{(1+k_1x_0)(1+2k_1x_0)\left[1+(k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(2k_1+j\omega)x_0\right](1+k_1x_0)}\right|_{x_0=-1/j\omega}e^{j\omega t}\\
&-\frac{1}{2}k_2^2\left.\frac{x_0^5}{(1+k_1x_0)(1+2k_1x_0)\left[1+(k_1+j\omega)x_0\right]\left[1+(2k_1+j\omega)x_0\right](1+k_1x_0)}\right|_{x_0=+1/j\omega}e^{-j\omega t}\\
&+\text{complex conjugates}+\cdots.
\end{aligned}$$

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to express their warmest thanks to Professor L. O. Chua for having invited them to present this survey paper.

REFERENCES

[1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (translated from the Russian). Cambridge, MA: MIT Press, 1973.
[2] J. F. Barrett, "The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems," *J. Electron. Contr.*, vol. 15, pp. 567–615, 1963.
[3] E. Bedrosian and S. Rice, "The output properties of Volterra systems driven by harmonic and Gaussian inputs," *Proc. IEEE*, vol. 59, pp. 1688–1707, 1971.
[4] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*. Paris, France: Hermann, 1972, ch. 2 and 3.
[5] M. Brilliant, "Theory and analysis of nonlinear systems," MIT RLE Tech. Rep. 345, 1958.
[6] R. W. Brockett, "Volterra series and geometric control theory," *Automatica*, vol. 12, pp. 167–176, 1976 (addendum with E. Gilbert, vol. 12, p. 635).
[7] J. Bussgang, L. Ehrman, and J. Graham, "Analysis of nonlinear systems with multiple inputs," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1088–1119, 1974.
[8] L. O. Chua and C. Y. Ng, "Frequency-domain analysis of nonlinear systems: General theory," *Electronic Circuits Syst.*, vol. 3, pp. 165–185, 1979.
[9] ——, "Frequency-domain analysis of nonlinear systems: Formulation of transfer function," *Electronic Circuits Syst.*, vol. 3, pp. 257–269, 1979.
[10] L. O. Chua and Y. S. Tang, "Nonlinear oscillation via Volterra series," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 29, pp. 150–168, 1982.
[11] P. E. Crouch, "Dynamical realizations of finite Volterra series," *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 19, pp. 177–202, 1982.
[12] R. J. P. De Figueiredo and T. A. W. Dwyer, "A best approximation framework and implementation for simulation of large-scale nonlinear systems," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 27, pp. 1005–1014, 1980.
[13] A. Ferfera, "Combinatoire du monoïde libre et composition de certains systèmes non linéaires," in *Analyse des Systèmes*, Astérisque 75–76, pp. 87–93, Soc. Math. France, 1980.

[14] M. Fliess, "Series reconnaissables, rationnelles et algébriques," *Bull. Sci. Math.*, vol. 94, pp. 231–239, 1970.
[15] ——, "Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires," *C.R. Acad. Sci.*, Paris, France, vol. A-277, pp. 923–926, 1973.
[16] ——, "Matrices de Hankel," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 53, pp. 197–222, 1974 (Corrigendum, vol. 54, p. 481, 1975).
[17] ——, "Un outil algébrique: Les séries formelles non commutatives," in *Mathematical Systems Theory* (G. Marchesini and S. K. Mitter, Eds.), Lect. Notes Econom. Math. Syst., vol. 131, pp. 122–148, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1976.
[18] ——, "A remark on transfer functions and the realization of homogeneous continuous-time systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 24, pp. 507–508, 1979.
[19] ——, "Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives," *Bull. Soc. Math. France*, vol. 109, pp. 3–40, 1981.
[20] ——, "An algebraic approach to functional expansions, application to a singular optimal control problem," in *Proc. 8th IFAC World Congress* (Kyoto, 1981), vol. 1, pp. 331–336, Oxford: Pergamon Press, 1982.
[21] ——, "Réalisation des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives," *Invent. Math.*, vol. 71, pp. 521–537, 1983.
[22] M. Fliess and F. Lamnabhi-Lagarrigue, "Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator," *J. Math. Phys.*, vol. 23, pp. 495–502, 1982.
[23] F. R. Gantmakher, *The Theory of Matrices* (translated from the Russian), vol. 2. New York: Chelsea, 1959.
[24] D. George, "Continuous nonlinear systems," MIT RLE Tech. Rep. 335, 1959.
[25] E. G. Gilbert, "Functional expansions for the response of nonlinear differential systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 909–921, 1977.
[26] W. Gröbner, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, (2nd ed.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissonschaften, 1967.
[27] W. Gröbner and H. Knapp, *Contributions to the Method of Lie Series*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1967.
[28] A. Halme, "Polynomial operators for nonlinear systems," *Acta Polytech. Scand. Math.*, vol. 24, 1972.
[29] R. Hermann, "On the accessibility problem in control theory," in *Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*. New York: Academic, 1963, pp. 325–332.
[30] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*. (2nd ed.). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1957.
[31] G. Jacob, "Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries génératrices non commutatives," in *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal*. (I. D. Landau, Ed.), vol. 1, pp. 325–357, Paris: CNRS, 1981.
[32] M. Lamnabhi, "Séries de Volterra et séries génératrices non commutatives," Thèse Doct. Ing., Université Paris XI, Orsay, 1980.
[33] ——, "A new symbolic calculus for the response of nonlinear systems," *Systems and Control Lett.*, vol. 2, pp. 154–162, 1982.
[34] F. Lamnabhi-Lagarrigue and M. Lamnabhi, "Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires," *Ricerche di Automatica*, vol. 10, pp. 17–26, 1979.
[35] F. Lamnabhi-Lagarrigue and M. Lamnabhi, "Algebraic computation of the solution of some nonlinear differential equations," in *Computer Algebra* (J. Calmet, ed.), Lect. Notes, Comput. Sci. 144, pp. 204–211, Berlin: Springer-Verlag, 1982.
[36] C. Lesiak and A. J. Krener, "The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 23, pp. 1090–1095, 1978.
[37] P. Lévy, *Problèmes Concrets d'Analyse Fonctionnelle*. Paris, France: Gauthier-Vollars, 1951.
[38] C. Lobry, "Contrôlabilité des systèmes non linéaires," *SIAM J. Contr.*, vol. 8, pp. 573–605, 1970.
[39] J. K. Lubbock and U. S. Bansal, "Multidimensional Laplace transforms for solutions of nonlinear equations," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 116, pp. 2075–2082, 1969.
[40] G. Mitzel and W. Rugh, "On a multidimensional S. transform and the realization problem for homogeneous nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 825–830, 1977.
[41] D. Normand-Cyrot, "An algebraic approach to the input-output description of nonlinear discrete-time systems," in *Proc. 1st American Control Conf.*, Arlington, pp. 466–471, 1982.
[42] R. Parente, "Nonlinear differential equations and analytic system theory," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 41–66, 1970.
[43] R. Ree, "Lie elements and an algebra associated with shuffles," *Ann. Math.*, vol. 68, pp. 210–220, 1958.
[44] C. Reutenauer, "Non commuting variables I (finite automata), II (rational generating series), III (realization of bilinear systems)," in *Encyclopedia of Systems and Control* (M. Singh, Ed.), Oxford: Pergamon Press, to be published.
[45] W. J. Rugh, *Nonlinear System Theory*. Baltimore, MD: The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.
[46] I. W. Sandberg, "Expansions for nonlinear systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 61, pp. 159–199, 1982.
[47] ——, "Volterra expansions for time-varying nonlinear systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 61, pp. 201–225, 1982.
[48] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. New York: Wiley, 1980.
[49] M. P. Schützenberger, "On the definition of a family of automata," *Inform. Control*, vol. 4, pp. 245–270, 1961.
[50] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*. New York: Benjamin, 1969.
[51] Y. S. Tang, A. I. Mees, and L. O. Chua, "Hopf bifurcation via Volterra series," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, pp. 42–53 1983.
[52] V. Volterra, "*Theory of Functionals*" (translated from the Spanish), London: Blackie, 1930 (reprinted by Dover, New York, 1959).
[53] J. Waddington and F. Fallside, "Analysis of non-linear differential equations by the Volterra series," *Int. J. Contr.*, vol. 3, pp. 1–15, 1966.
[54] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory*. New York: Wiley, 1958.

Michel Fliess is a graduate from the Ecole Polytechnique and received his "Doctorat d'Etat" in 1972 from the Université Paris VII.

He is now a Professor at the Université Paris VIII and is also leading a research group on nonlinear systems at the Laboratoire des Signaux et Systèmes, Gif-sur-Yvette, France.

Moustanir Lamnabhi was born in Salé, Morocco in 1954. He received the Dipl. Ing. Degree from the Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France, in 1978. He received the Dr. Ing. degree in signal processing from the Laboratoire des Signaux et Systèmes, Gif-sur-Yvette, France, in 1980.

At present, he is with the Laboratoire d'Electronique et de Physique Appliquée, Limeil-Brevannes, France. His research interests are in the areas of nonlinear networks and system theory.

Françoise Lamnabhi-Lagarrigue was born in Toulouse, France, in 1953. She received the M.S. degree from the Université Paul Sabatier, Toulouse, France, in 1976, and the "Doctorat 3ième cycle" degree in signal processing from the Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S.), Gif-sur-Yvette, France, in 1980.

At present she is doing post-doctoral research in this laboratory. Her research interests are in the areas of nonlinear systems theory.

ALGEBRAIC COMPUTATION OF THE SOLUTION OF SOME NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

F. LAMNABHI-LAGARRIGUE
M. LAMNABHI

Laboratoire des Signaux et Systèmes
C.N.R.S. - E.S.E.
Plateau du Moulon
91190 - GIF SUR YVETTE, France.

1. INTRODUCTION

In this paper, we are concerned with solving algebraically the forced non linear differential equation

$$Ly + \sum a_i y^i = u(t)$$

where L is a linear differential operator with constant coefficients. Several papers have been written about the use of multidimensional Fourier or Laplace transforms for the solution of such a differential equation (see for example, Lubbock et Bansal [1]); but the computations based on these are often tedious and seem difficult to implement on a computer.

The use of a new tool : non commutative generating power series [2] allows us to derive, by simple algebraic manipulations, a functional expansion (i.e. the Volterra series) of the solution. The symbolic calculus introduced appears as a natural generalization, to the nonlinear domain, of the well known Heaviside's operational calculus. Moreover, by using symbolic computation systems, like REDUCE or MACSYMA, it leads to an easy implementation on computer; this becomes necessary as soon as high order approximations are desired.

2. A SIMPLE INTRODUCTIVE EXAMPLE.

Let us consider the nonlinear differential equation

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + A_1 y(t)\, u(t) \tag{1}$$

where $y(t)$ is an n-dimensional vector and A_0, A_1 are square matrices (equations of this form are called, in control theory, bilinear). Both sides of the differential equation (1) can be integrated to obtain

$$y(t) = y(0) + A_0 \int_0^t y(\sigma_1)d\sigma_1 + A_1 \int_0^t u(\sigma_1)\, y(\sigma_1)\, d\sigma_1 \tag{2}$$

This expression can be solved by repeated substitutions. For example,

$$y(\sigma_1) = y(0) + A_0 y(0) \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 + A_1 y(0) \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2)d\sigma_2$$

can be substitute into (2) to obtain

$$y(t) = y(0) + A_0 y(0) \int_0^t d\sigma_1 + A_0^2 y(0) \int_0^t d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 + A_0 A_1 y(0) \int_0^t d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2) d\sigma_2$$

$$+ A_1 y(0) \int_0^t u(\sigma_1) d\sigma_1 + A_1 A_0 y(0) \int_0^t u(\sigma_1) d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 + A_1^2 y(0) \int_0^t u(\sigma_1) d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} u(\sigma_2) d\sigma_2$$

Repeating this process indefinitely yields the well known Peano-Baker formula :

$$y(t) = y(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, j_1, \ldots, j_\nu = 0}^{1} A_{j_\nu} \ldots A_{j_1} A_{j_0} y(0) \int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} \qquad (3)$$

where the iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$ is defined by induction on the length by

$$\xi_0(t) = t \qquad \xi_1(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0}$$

If we denote by the letter x_0 the integration with respect to time and by the letter x_1 the integration with respect to time after multiplying by the function u(t), (3) can be written symbolically in the form :

$$g = y(0) + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_0, j_1, \ldots, j_\nu = 0}^{1} A_{j_\nu} \ldots A_{j_1} A_{j_0} y(0) x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$$

g is called the non-commutative generating power series associated with y(t). Of course, this is a non-commutative series because

$$\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} u(\tau_2) d\tau_2 \neq \int_0^t u(\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{\tau_2} d\tau_2$$

that is, $x_0 x_1 \neq x_1 x_0$.

3. NON COMMUTATIVE GENERATING POWER SERIES

Let $X = \{x_0, x_1\}$ be a finite alphabet and X^* the monoid generated by X. An element of X^* is a word, i.e. a sequence $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$ of letters of the alphabet. The product of two words $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$ and $x_{k_\mu} \ldots x_{k_0}$ is the concatenation $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0} x_{k_\mu} \ldots x_{k_0}$. The neutral element is called the empty word and denoted by 1. A formal power series with real or complex coefficients is written as a formal sum

$$g = \sum_{w \in X^*} (g, w) w, \quad (g, w) \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

Let g_1 and g_2 be two formal power series, the following operations are defined :

<u>Addition</u> $$g_1 + g_2 = \sum_{w \in X^*} [(g_1,w) + (g_2,w)]w$$

<u>Cauchy product</u> $$g_1 \cdot g_2 = \sum_{w \in X^*} [\sum_{w_1w_2=w} (g_1,w_1)\ (g_2,w_2)]w$$

A series g is invertible if and only if, its constant term, $(g,1)$ is not zero.

<u>Shuffle product</u> $$g_1 \omega g_2 = \sum_{w_1,w_2 \in X^*} (g_1,w_1)\ (g_2,w_2) w_1 \omega w_2$$

The shuffle product of two words is defined by induction on the length by

$$1\omega 1 = 1$$

$$\forall\ x \in X, \qquad 1\omega x = x\omega 1 = x$$

$$\forall x,\ x' \in X,\ \forall w,\ w' \in X^*,\ (xw)\ \omega\ (x'\ w') = x[w\omega(x'\ w')] + x'[(xw)\omega w']$$

This operation consists of mixing the letters of the two words keeping the order of each one. For example

$$x_0x_1\ x_1x_0 = x_0x_1x_1x_0 + x_0x_1x_1x_0 + x_0x_1x_0x_1 + x_1x_0x_1x_0 + x_1x_0x_0x_1 + x_1x_0x_0x_1 =$$

$$2x_0x^2x_0 + x_0x_1x_0x_1 + x_1x_0x_1x_0 + 2x_1x_0^2x_1$$

Let us consider a non-commutative power series g; given a function $u(t)$, g will define a functional $y\{t,u(t)\}$ if we replace, following the previous section, the word $x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}$ in g by the corresponding iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}$. Thus, the numerical value is

$$y\{t,u(t)\} = (g,1) + \sum_{\nu \geq 0}\ \sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{1} (g,x_{j_\nu}\ldots x_{j_0}) \int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0} \qquad (4)$$

g is known as the non-commutative generating power series associated with the functional y. Now, one can state the important result [2] :

<u>*Theorem*</u> : The product of two nonanticipative functionals of the form (4) is a functional of the same kind, the generating power series of which is the shuffle product of the two generating power series.

4. <u>DERIVATION OF GENERATING POWER SERIES</u>

In this section, we describe an algorithm for finding algebraically the generating power series associated with the solution of a nonlinear forced differential equation. The equation we are going to consider is

$$Ly(t) + \sum_{i=2}^{m} a_i y^i(t) = u(t)$$

$$L = \sum_{i=o}^{n} \ell_i \frac{d^i}{dt^i}, \quad (\ell_n = 1) \tag{5}$$

or, in its integral form

$$y(t) + \ell_{n-1}\int_o^t y(\tau_1)d\tau_1 + \ell_{n-2}\int_o^t d\tau_2 \int_o^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \ell_o \int_o^t d\tau_n \int_o^{\tau_n} d\tau_{n-1} \ldots$$

$$\ldots d\tau_2 \int_o^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{i=2}^{m} a_i \int_o^t d\tau_n \int_o^{\tau_n} d\tau_{n-1}\ldots d\tau_2 \int_o^{\tau_2} y^i(\tau_1)d\tau_1 =$$

$$= \int_o^t d\tau_n \int_o^{\tau_n} d\tau_{n-1}\ldots d\tau_2 \int_o^{\tau_2} u(\tau_1)d\tau_1 \tag{6}$$

Here we assume, for simplicity's sake, zero initial conditions.

Let g denotes the generating power series associated with $y(t)$, then (6) can be written symbolically

$$g + \sum_{j=o}^{n-1} \ell_j x_o^{n-i} g + x_o^n \sum_{i=1}^{m} a_i \underbrace{g\omega\ldots\omega g}_{i \text{ times}} = x_o^{n-1} x_1$$

where $\underbrace{g\omega\ldots\omega g}_{i \text{ times}}$ corresponds, according to the previous theorem, to the nonlinear functional $y^i(t)$.

This algebraic equation can be solved iteratively, following the recursive scheme

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots$$

with

$$g_1 = (1 + \sum_{i=o}^{n-1} \ell_i x_o^{n-i})^{-1} x_o^{n-1} x_1$$

and

$$g_n = -(1 + \sum_{i=o}^{n-1} \ell_i x_o^{n-i})^{-1} x_o^n \sum_{i=2}^{m} a_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_i=n} g_{\nu_1}\omega g_{\nu_2}\omega\ldots\omega g_{\nu_i}$$

To have the closed form expression of g_i, one only need to compute the shuffle product of non-commutative power series of the form

$$(1-a_o x_o)^{-1} x_{i_1} (1-a_1 x_o)^{-1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} (1-a_p x_o)^{-1}; \quad i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{0,1\}.$$

This results from the following proposition [3].

Proposition 1 : Given two formal power series

$$g_1^p = (1-a_ox_o)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_o)^{-1}x_{i_2}\dots x_{i_p}(1-a_px_o)^{-1} = g_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_o)^{-1}$$

and

$$g_2^q = (1-b_ox_o)^{-1}x_{j_1}(1-b_1x_o)^{-1}x_{j_2}\dots x_{j_q}(1-b_qx_o)^{-1} = g_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_o)^{-1}$$

where p and q belongs to $\mathbb{N}$, the subscripts $i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q$ to $\{0,1\}$ and a_i,b_j to $\mathbb{C}$; the shuffle product is given by induction on the length by

$$g_1^p \omega g_2^q = (g_1^p \omega g_2^{q-1})\ x_{j_q}\ [1-(a_p+b_q)x_o]^{-1}$$
$$+\ g_1^{p-1}\omega g_2^q\ x_{i_p}\ [1-(a_p+b_q)x_o]^{-1}$$

with $\quad (1-ax_o)^{-1}\ \omega(1-bx_o)^{-1} = [1-(a+b)x_o]^{-1}$.

Using this proposition, g_i is obtained as a finite sum of expressions of the form

$$(1-a_ox_o)^{-p_o}\ x_1(1-a_1x_o)^{-p_1}\ x_1\dots x_1(1-a_ix_o)^{-p_i} \qquad (7)$$

Now, it can be shown [3] that this expression is a symbolic representation of the n-dimensional integral

$$\int_o^t\int_o^{\tau_i}\dots\int_o^{\tau_2} f_{a_o}^{p_o}(t-\tau_i)\dots f_{a_{i-1}}^{p_{i-1}}(\tau_2-\tau_1)f_{a_i}^{p_i}(\tau_1)u(\tau_1)u(\tau_2)\dots u(\tau_i)d\tau_1 d\tau_2\dots d\tau_i \quad (8)$$

where

$$f_a^p(t) = \Big(\sum_{j=o}^{p-1}\frac{\binom{j}{p-1}}{j!}\ a^jt^j\Big)e^{at}$$

Thus, what has been shown to this point is that for the nonlinear forced differential equation (5), it is possible to derive algebraically a functional expansion of the solution y(t). (Functionals of this form are known, in control theory, as Volterra series). In the next section, we show that integrals of the form (8) can be expressed in terms of "elementary functions" for a specified set of function u(t).

5. A SYMBOLIC INTEGRATION METHOD.

Let us consider an analytic function u(t)

$$u(t) = \sum_{n\geq o} u_n \frac{t^n}{n!}$$

and define the transform (known as the Laplace-Borel transform)

$$g_u = \sum_{n\geq o} u_n x_o^n$$

(This series may be regarded as the generating power series associated with u(t) since

$$\frac{t^n}{n!} = \int_o^t d\tau_n \int_o^{\tau_n} d\tau_{n-1} \int_o^{\tau_{n-1}} \cdots \int_o^{\tau_2} d\tau_1)$$

Then, we can state the following result [4] :

Proposition 2 : The integral (8) defines an analytic function, the Laplace-Borel transform of which is given by

$$(1-a_o x_o)^{-p_o} x_o\{g_u\omega(1-a_1x_o)^{-p_1} x_o[g_u\omega \ldots x_o[g_u\omega(1-a_i x_o)^{-p_i}] \ldots]\} \qquad (9)$$

Thus, it is simply obtained, by replacing each indeterminate x_1 in (7) by the operator $x_o[g_u\omega.]$.

Now, assume that g_u is the rational fraction

$$(1 - ax_o)^{-p}$$

That is, u(t) is an exponential polynomial of the form

$$u(t) = (\sum_{j=o}^{p-1} \binom{j}{p-1} \frac{a^j t^j}{j!})e^{at}$$

then, the simple identity

$$(1-ax_o)^{-p} = \sum_{j=o}^{p-1} \binom{j}{p-1} a^j \underbrace{(1-ax_o)^{-1} x_o (1-ax_o)^{-1} x_o \ldots x_o (1-ax_o)^{-1}}_{j \text{ times}}$$

and the proposition 1 allow to derive a closed for (9) as a rational fraction. The corresponding time function, that is the value of the integral (8), results then from its decomposition into partial fractions. The same technique applies when g_u is a general rational fraction, regular at the origin.

6. EXAMPLE.

Consider the nonlinear differential equation

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y + \beta y^2 = u(t)$$

or its integral form

$$y(t) + \alpha \int_0^t y(\tau)d\tau + \beta \int_0^t y^2(\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

where we assume a zero initial condition.

Thus, the generating power series is simply the solution of

$$g + \alpha x_o g + \beta x_o g \omega g = x_1$$

or

$$g = -\beta(1 + \alpha x_o)^{-1} x_o g \omega g + (1 + \alpha x_o)^{-1} x_1$$

This equation is solved iteratively by a computer program. We obtain

$$
\begin{array}{rlll}
g = & 1 & & {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -2 & \beta & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +4 & \beta^2 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +12 & \beta^2 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -8 & \beta^3 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -24 & \beta^3 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -72 & \beta^3 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -24 & \beta^3 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & -144 & \beta^3 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_o\, {}_4\, x_1\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +48 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +144 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +432 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +288 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_o\, {}_4\, x_1\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +864 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_o\, {}_4\, x_1\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & +1728 & \beta^4 & {}_1\, x_o\, {}_2\, x_o\, {}_3\, x_o\, {}_4\, x_1\, {}_3\, x_o\, {}_4\, x_1\, {}_3\, x_1\, {}_2\, x_1\, {}_1\, x_1\, {}_0 \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

where, for example, the symbolic notation

$$-2\beta \quad {}_1\, x_o\, {}_2\, x_1 \quad {}_1\, x_1\, {}_0$$

stands for

$$-2\beta(1+\alpha x_0)^{-1}x_0(1+2\alpha x_0)^{-1}x_1(1+\alpha x_0)^{-1}x_1$$

Now let us, for example, compute the solution y(t) when u(t) is the unit step

$$u(t) = 1 \quad t \geq 0$$

As the Laplace-Borel transform of the unit step is 1, the neutral element for the shuffle product, the Laplace-Borel transform of y(t) is given simply by replacing each variable x_1 in the generating power series g by the variable x_0.

Then decomposing into partial fractions, we get the original function :

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \\ & - \frac{\beta}{\alpha^3}(1 - 2\alpha t e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) \\ & + \frac{\beta^2}{\alpha^5}[2 + (1-2\alpha t-2\alpha^2 t^2)e^{-\alpha t} - 2(1+2\alpha t)e^{-2\alpha t} - e^{-3\alpha t}] + \ldots \end{aligned}$$

REFERENCES

[1] J.K. LUBBOCK and V.S. BANSAL, Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equations. Proc. IEEE, 166, 1969, p. 2075-2082.

[2] M. FLIESS, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France, 109, 1981, p. 3-40.

[3] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, M. LAMNABHI, Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires, Ricerche di Automatica, 10, 1979, p. 17-26.

[4] M. LAMNABHI, Séries de Volterra et séries génératrices non commutatives, thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris XI, Orsay, 1980.

ALGEBRAIC COMPUTATION OF THE STATISTICS OF THE SOLUTION OF SOME NONLINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

F. LAMNABHI-LAGARRIGUE
Laboratoire des Signaux et Systèmes
E.S.E., Plateau du Moulon
91190 Gif sur Yvette

M. LAMNABHI
Laboratoire d'Electronique et de Physique Appliquée
3, Avenue Descartes
94450 Limeil-Brevannes

This paper presents an algebraic method for computing the statistics of the solution of some stochastic non-linear differential equations by mean of the Volterra functional expansion. The symbolic calculus introduced, based on noncommutative variables and iterated integrals has the advantage of allowing easily the use of symbolic computation systems, like REDUCE or MACSYMA, to perform the manipulations. This becomes necessary as soon as one tries to get high order terms.

I. INTRODUCTION

Volterra or Wiener functional series has been widely used in the study of the statistical properties of the output of nonlinear systems with a random input. They have been introduced by Wiener in 1942 [10] for nonlinear circuits analysis. Since Wiener's early work, many authors have dealt with the subject. Among them, the papers by Barrett [2] and Bedrosian and Rice [3] are of a particulary importance. But the difficulties involved in obtaining the terms of the series and in performing the required integrations reduce the interest of the method.

Recently, a new approach of causal functionals was proposed, using noncommutative variables and iterated integrals [4]. In this approach, the input/output behaviour of a nonlinear system is represented in termes of a formal power series, called the generating power series. There is, in fact, a strong relationship between Volterra series and noncommutative generating power series. The present paper shows how to use this series to determine the statistics of the output of some nonlinear systems driven by a white Gaussian noise. It is a sequel to an earlier paper [7] where we described an algebraic algorithm for computing the response of a nonlinear system to deterministic inputs. The symbolic calculus introduced has the advantage of allowing easily the use of symbolic computation systems, like REDUCE or MACSYMA, to perform the manipulations. This becomes necessary as soon as one tries to get high order terms.

II. VOLTERRA SERIES

Let us consider a system described by the Volterra series [8],[9]

$$y(t) = h_o(t)+\int_o^t h_1(t,\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int_o^t\int_o^{\tau_n}\ldots\int_o^{\tau_2} h_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1)u(\tau_1)\ldots u(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n+\ldots \tag{1}$$

where y(t) is the system output and u(t) is the system input. The kernels h_i are assumed to be analytic. Their Taylor expansion may be written

$$h_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1) = \sum_{i_o,i_1,\ldots,i_n\geq 0} h_n^{(i_o,i_1,\ldots,i_n)} \times \frac{(t-\tau_n)^{i_n}(\tau_n-\tau_{n-1})^{i_{n-1}}\ldots(\tau_2-\tau_1)^{i_1}\tau_1^{i_o}}{i_n!\ldots i_1!\ldots i_o!}$$

with respect to the new variables $\tau_1,\tau_2-\tau_1,\ldots,t-\tau_n$.

Each n-dimensional integral

$$\int_o^t\int_o^{\tau_n}\ldots\int_o^{\tau_2}\frac{(t-\tau_n)^{i_n}(\tau_n-\tau_{n-1})^{i_{n-1}}\ldots(\tau_2-\tau_1)^{i_1}\tau_1^{i_o}}{i_n!i_{n-1}!\ldots i_o!}u(\tau_1)\ldots u(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n$$

can be shown to be equal to the iterated integral

$$\underbrace{x_o\ldots x_o}_{i_n}\, x_1\, \underbrace{x_o\ldots x_o}_{i_{n-1}}\, x_1\ldots\ldots\ldots\ldots x_1\, \underbrace{x_o\ldots x_o}_{i_o}$$

where the lettre x_o denotes the integration with respect to time and the letter x_1 the integration with respect to time after multiplying by the input u. This is a generalization of the well known formula

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} u(\tau)d\tau = \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} u(\tau_o)d\tau_o$$

This allow to write (1) symbolically in the form

$$g = \sum_{n\geq 0} \sum_{i_o,i_1,\ldots,i_n\geq 0} h_n^{(i_o,i_1,\ldots,i_n)} x_o^{i_n} x_1 \ldots x_o^{i_1} x_1 x_o^{i_o}$$

g is called the *noncommutative generating power series* associated with the system. This power series can, as we shall see in a next section, be derived directly from the nonlinear differential equations governing the dynamic of a system.

Of course this is a noncommutative series because

$$\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} u(\tau_2)d\tau_2 \neq \int_0^t u(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\tau_2} d\tau_2$$

that is $x_o x_1 \neq x_1 x_o$.

III. NONCOMMUTATIVE GENERATING POWER SERIES

Let $X = \{x_o, x_1\}$ be a finite alphabet and X^* the monoid generated by X. An element of X^* is a word, i.e. a sequence $x_{j_\nu} \ldots x_{j_o}$ of letters of the alphabet. The product of two words $x_{j_\nu} \ldots x_{j_o}$ and $x_{k_\mu} \ldots x_{k_o}$ is the concatenation $x_{j_\nu} \ldots x_{j_o} x_{k_\mu} \ldots x_{k_o}$. The neutral element is called the empty word and denoted by 1. A formal power series with real or complex coefficients is written as a formal sum

$$g = \sum_{w\in X^*} (g,w)w \ , \quad (g,w) \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}.$$

Let g_1 and g_2 be two formal power series, the following operations are defined :

<u>Addition</u> $\qquad g_1 + g_2 = \sum_{w\in X^*} \Big[(g_1,w) + (g_2,w)\Big]w$

<u>Cauchy product</u> $\qquad g_1 \cdot g_2 = \sum_{w\in X^*} \Big[\sum_{w_1 w_2 = w} (g_1,w_1)(g_2,w_2)\Big]w$

<u>Shuffle product</u> $\qquad g_1 \,ш\, g_2 = \sum_{w_1,w_2\in X^*} (g_1,w_1)(g_2,w_2) w_1 ш w_2$

The shuffle product of two words consists of mixing the letters of the two words keeping the order of each one. For example

$$x_o x_1 \omega x_1 x_p = x_o x_1 x_1 x_o + x_o x_1 x_1 x_o + x_o x_1 x_o x_1 + x_1 x_o x_1 x_o$$
$$+ x_1 x_o x_o x_1 + x_1 x_o x_o x_1$$
$$= 2 x_o x_1^2 x_o + x_o x_1 x_o x_1 + x_1 x_o x_1 x_o + x_1 x_o^2 x_1$$

Let us now consider two generating power series g_1 and g_2 associated respectively with the output systems $y_1\{t,u(t)\}$ and $y_2\{t,u(t)\}$. It can be shown [4] that the generating power series associated with the product

$$y_1\{t,u(t)\} \times y_2\{t,u(t)\}$$

is the shuffle product of the generating power series g_1 and g_2.

IV. DERIVATION OF GENERATING POWER SERIES

In this section, we describe an algorithm for finding algebraically the generating power series associated with the solution of a nonlinear forced differential equation. The equation we are going to consider is

$$Ly(t) + \sum_{i=2}^{m} a_i y^i(t) = u(t)$$

$$L = \sum_{i=0}^{n} \ell_i \frac{d^i}{dt^i}, \qquad (\ell_n = 1)$$

or, in its integral form

$$y(t) + \ell_{n-1} \int_0^t y(\tau_1) d\tau_1 + \ell_{n-2} \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1$$
$$+ \dots + \ell_o \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots d\tau_2 \int_0^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1$$
$$+ \sum_{i=2}^{m} a_i \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots d\tau_2 \int_0^{\tau_2} y^i(r_1) d\tau_1 =$$
$$= \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots d\tau_2 \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 \qquad (2)$$

Here we assume, for simplicity's sake, zero initial conditions.

Let g denotes the generating power series associated with y(t), then (2) can be written symbolically

$$g + \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j x_o^{n-i} g + x_o^n \sum_{i=1}^{m} a_i \underbrace{g\omega\ldots\omega g}_{i\ \text{times}} = x_o^{n-1} x_1$$

where $\underbrace{g\omega\ldots\omega g}_{i\ \text{times}}$ corresponds, according to the previous theorem, to the nonlinear functional $y^i(t)$.

This algebraic equation can be solved iteratively, following the recursive scheme

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots$$

with

$$g_1 = \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i x_o^{n-i}\right)^{-1} x_o^{n-1} x_1$$

and

$$g_n = -\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i x_o^{n-i}\right)^{-1} x_o^n \sum_{i=2}^{m} a_i \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_i=n} g_{\nu_1} \omega g_{\nu_2} \ldots \omega g_{\nu_i}$$

To have the closed form expression of g_i, one only need to compute the shuffle product of noncommutative power series of the form

$$\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \left(1-a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \left(1-a_p x_o\right)^{-1} \quad ; \ i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{0,1\}.$$

This results from the following proposition [6] :

Proposition 1 : Given two formal power series

$$g_1^p = \left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \left(1-a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \left(1-a_p x_o\right)^{-1} = g_1^{p-1} x_{i_p} \left(1-a_p x_o\right)^{-1}$$

and

$$g_2^q = \left(1-b_o x_o\right)^{-1} x_{j_1} \left(1-b_1 x_o\right)^{-1} x_{j_2} \ldots x_{j_q} \left(1-b_q x_o\right)^{-1} = g_2^{q-1} x_{j_q} \left(1-b_q x_o\right)^{-1}$$

where p and q belongs to N, the subscripts $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$ to $\{0,1\}$ and a_i, b_j to $\mathbb{C}$; the shuffle product is given by induction on the length by

$$g_1^p \omega g_2^q = \left(g_1^p \omega g_2^{q-1}\right) x_{j_q} \left[1 - (a_p + b_q) x_o\right]^{-1}$$
$$+ \left(g_1^{p-1} \omega g_2^q\right) x_{i_p} \left[1 - (a_p + b_q) x_o\right]^{-1}$$

with $\left(1 - a x_o\right)^{-1} \omega \left(1 - b x_o\right)^{-1} = \left[1 - (a+b) x_o\right]^{-1}$.

Using this proposition, g_i is obtained as a finite sum of expressions of the form :

$$\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \left(1-a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2} \ldots . x_{i_n} \left(1-a_n x_o\right)^{-1} \quad ; \; i_1,\ldots,i_n \in \{0,1\} \qquad (3)$$

<u>Example 1</u> :

The technique presented above is now used to compute the generating power series associated with the nonlinear differential equation

$$\dot{y}(t) + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = u(t) \qquad (4)$$

Its integral form is :

$$y(t) + k_1 \int_o^t y(\tau)d\tau + k_2 \int_o^t y^2(\tau)d\tau = \int_o^t u(\tau)d\tau$$

where we assume a zero initial condition.

Thus, the generating power series g is simply the solution of

$$g + k_1 x_o g + k_2 x_o g \omega g = x_1$$

This equation is solved iteratively by a computer program (table 1).

$$
\begin{array}{lll}
g = & 1 & \begin{array}{ccc} & x_1 & \\ k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -2 & k_2 \begin{array}{ccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & +4 & k_2^2 \begin{array}{ccccccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & +12 & k_2^2 \begin{array}{ccccccccccc} & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -8 & k_2^3 \begin{array}{ccccccccccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_0 & & x_1 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -24 & k_2^3 \begin{array}{ccccccccccccccc} & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -72 & k_2^3 \begin{array}{ccccccccccccccc} & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -24 & k_2^3 \begin{array}{ccccccccccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & -144 & k_2^3 \begin{array}{ccccccccccccccc} & x_0 & & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_1 & & x_1 & \\ k_1 & & 2k_1 & & 3k_1 & & 4k_1 & & 3k_1 & & 2k_1 & & k_1 & & 0 \end{array} \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

<u>table 1</u>

where the symbolic notation

$$\begin{array}{ccccccccc} & x_{i_1} & & x_{i_2} & \cdots\cdots & & x_{i_n} & \\ a_o & & a_1 & & & a_{n-1} & & a_n \end{array} \quad ; \; i_1,\ldots,i_n \in \{0,1\}$$

stands for $\left(1+a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1}\left(1+a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2}\cdots\left(1+a_{n-1}x_o\right)^{-1} x_{i_n}\left(1+a_n x_o\right)^{-1}$

Remark : The expansion, in table 1, is equivalent to the Volterra series expansion of the solution up to order 5. The algebraic closed form expression of triangular Volterra kernels can be easily deduced from it [6], since the expression (3) is the symbolic representation of the n-dimensional integral

$$\int_o^t\int_o^{\tau_n}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{a_o(t-\tau_n)}\, e^{a_1(\tau_n-\tau_{n-1})}\cdots e^{a_{n-1}(\tau_2-\tau_1)}\, e^{a_n\tau_1}\, u_{i_n}(\tau_1)$$

$$\cdots u_{i_2}(\tau_{n-1})\, u_{i_1}(\tau_n)\, d\tau_1\cdots d\tau_n$$

where

$$\{i_1,\ldots,i_n\} \in \{0,1\}, \quad u_o(\tau) = 1 \quad \text{and} \quad u_1(\tau) = u(\tau),$$

which we shall denote later by

$$\left[\left(1 - a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1}\left(1 - a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2}\cdots x_{i_n}\left(1 - a_n x_o\right)^{-1}\right]_o^t$$

V. A SYMBOLIC CALCULUS FOR THE OUTPUT STATISTICS

In the previous section, we used noncommutative generating power series to derive, by simple algebraic manipulations, a functional expansion (i.e. the Volterra series) of the solution of some nonlinear differential equations. In the following the derived series is used to obtain closed form expressions for the *moments* and *correlations* of the output of a Volterra system driven by Gaussian white noise.

Output moments

Let us consider a zero-mean Gaussian process u(t) with correlation function

$$E[u(t)u(\tau)] = \sigma^2\delta(t-\tau)$$

where δ is the Dirac delta function (a process of this kind is usually called a white Gaussian noise) [1]. The first-order moment of the output $E[y(t)]$ is then obtained by a simple rule on each term (3) of the functional expansion of y(t). This rule results [5] from the classical rules of stochastic differential calculus and is given by induction on the length by

$$E\Big[\int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2} e^{a_o(t-\tau_n)} u_{i_1}(\tau_n) e^{a_1(\tau_n-\tau_{n-1})} u_{i_2}(\tau_{n-1})\cdots u_{i_n}(\tau_1) e^{a_n\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_n\Big]$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{a_o(t-\tau_n)} d\tau_n E\Big[\int_0^{\tau_n} e^{a_1(\tau_n-\tau_{n-1})} u_{i_2}(\tau_{n-1})\cdots u_{i_n}(\tau_1) e^{a_n\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_{n-1}\Big] & \underline{\text{if } i_1 = 0} \\ \displaystyle\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^t e^{a_o(t-\tau_n)} d\tau_n E\Big[\int_0^{\tau_n} e^{a_2(\tau_n-\tau_{n-2})} u_{i_3}(\tau_{n-2})\cdots u_{i_n}(\tau_1) e^{a_n\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_{n-2}\Big] & \underline{\text{if } i_1 = i_2 = 1} \\ 0 \ \underline{\text{otherwise}} \end{cases}$$

In fact, the moment of the output function $y(t)$ can be obtained directly from its associated generating power series by the following algebraic rule which is a symbolic representation of the previous one :

$$<\left(1 - a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1}\left(1 - a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2}\cdots x_{i_n}\left(1 - a_n x_o\right)^{-1}> \qquad (5)$$

$$= \begin{cases} \left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_o<\left(1-a_1 x_o\right)^{-1} x_{i_2}\cdots x_{i_n}\left(1-a_n x_o\right)^{-1}> & \underline{\text{if } i_1 = 0} \\ \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_o<\left(1-a_2 x_o\right)^{-1} x_{i_3}\cdots x_{i_n}\left(1-a_n x_o\right)^{-1}> & \underline{\text{if } i_1 = i_2 = 1} \\ 0 \ \underline{\text{otherwise}} \end{cases}$$

This results in a rational fraction in the only variable x_o. Its decomposition into partial fractions and the following lemma give its corresponding expression in time.

<u>Lemma</u> : The rational fraction

$$\left(1 - a x_o\right)^{-p}$$

corresponds to the exponential polynomial

$$\left\{\sum_{j=0}^{p-1} \binom{j}{p-1} \frac{a^j t^j}{j!}\right\} e^{at} .$$

In order to illustrate the use of this rule, consider again the non-linear differential equation (4). For the first-order moment of $y(t)$ we have then

$$
\begin{aligned}
\langle g \rangle = \; & -2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)k_2 \quad {}_{k_1}x_0\,{}_{2k_1}x_0\,{}_{0} \\
& -24\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 k_2^3 \quad {}_{k_1}x_0\,{}_{2k_1}x_0\,{}_{3k_1}x_0\,{}_{k_1}x_0\,{}_{2k_1}x_0\,{}_{0} \\
& -144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 k_2^3 \quad {}_{k_1}x_0\,{}_{2k_1}x_0\,{}_{3k_1}x_0\,{}_{4k_1}x_0\,{}_{2k_1}x_0\,{}_{0} \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

By decomposing into partial fractions, we get the corresponding time function :

$$
\begin{aligned}
E[y(t)] = \; & 2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{k_1^2}\left(e^{-k_1 t} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}k_1 t\, e^{-2k_1 t}\right) \\
& + 24\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\frac{1}{k_1^5}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k_1 t\right)e^{-k_1 t} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}k_1 t\right)e^{-2k_1 t} + \frac{1}{12}e^{-3k_1 t} + \frac{1}{12}\right] \\
& + 144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\frac{1}{k_1^5}\left[\frac{1}{6}e^{-k_1 t} - \frac{1}{4}k_1 t e^{-2k_1 t} - \frac{1}{6}e^{-3k_1 t} + \frac{1}{48}e^{-4k_1 t} - \frac{1}{48}\right] \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

High order moments $E[y^n(t)]$ result in the same way from the series $\underbrace{g\omega g \ldots \omega g}_{n \text{ times}}$.

Output autocorrelation

In this section, we are interested in computing the output autocorrelation function defined by

$$R_{yy}(t_1,t_2) \; = \; E[y(t_1)y(t_2)]$$

where y(t) is the functional expansion derived previously. As y(t) is a sum of expressions of the form (3), we only need to compute the partial autocorrelation functions :

$$
\begin{aligned}
& E\Big[\Big(\int_o^{t_1}\!\!\cdots\int_o^{\tau_2} e^{a_o(t_1-\tau_p)}\,u_{i_1}(\tau_p)\cdots u_{i_p}(\tau_1)\,e^{a_p\tau_1}\,d\tau_1\cdots d\tau_p\Big) \\
& \Big(\int_o^{t_2}\!\!\cdots\int_o^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)}\,u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1)\,e^{b_q\tau_1}\,d\tau_1\cdots d\tau_q\Big)\Big] \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Let us assume $t_2 > t_1$; then the second integral may be decomposed as follows :

$$\int_o^{t_2}\int_o^{\tau_q}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)} u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_q =$$

$$\left(\int_o^{t_1}\int_o^{\tau_q}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)} u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_q\right)\left(\int_{t_1}^{t_2} e^{b_o\tau_1} d\tau_1\right)$$

$$+\left(\int_o^{t_1}\int_o^{\tau_{q-1}}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{b_1(t_2-\tau_{q-1})} u_{j_2}(\tau_{q-1})\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_{q-1}\right)$$

$$\times\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_2)} u_{j_1}(\tau_1) e^{b_1\tau_1} d\tau_1 d\tau_2\right)$$

$$+\ \cdots$$

$$+\left(\int_o^{t_1} e^{b_q\tau_1} d\tau_1\right)\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{\tau_q}\cdots\int_{t_1}^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)} u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_q\right)$$

and this leads for the expression (6) to

$$E\Big[\left(\int_o^{t_1}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{a_o(t_1-\tau_p)} u_{i_1}(\tau_p)\cdots u_{i_p}(\tau_1) e^{a_p\tau_1} d\ _1\cdots d\tau_p\right)$$

$$\left(\int_{t_1}^{t_2}\cdots\int_{t_1}^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)} u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_q\right)\Big]E\Big[\int_{t_1}^{t_2} e^{b_o\tau_1} d\tau_1\Big]$$

$$+\ \cdots$$

$$+\ E\Big[\left(\int_o^{t_1}\cdots\int_o^{\tau_2} e^{a_o(t_1-\tau_p)} u_{i_1}(\tau_p)\cdots u_{i_p}(\tau_1) e^{a_p\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_p\right)\left(\int_o^{t_1} e^{b_q\tau_1} d\tau_1\right)\Big]$$

$$\times\ E\Big[\int_{t_1}^{t_2}\cdots\int_{t_1}^{\tau_2} e^{b_o(t_2-\tau_q)} u_{j_1}(\tau_q)\cdots u_{j_q}(\tau_1) e^{b_q\tau_1} d\tau_1\cdots d\tau_q\Big]$$

where we used statistical independance between integrals over $[0,t_1]$ and $[t_1,t_2]$.

Now recalling that the product of two iterated integrals over the same interval corresponds to the shuffle product of their generating power series, we derive the following symbolic rule :

$$<\left[\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \cdots x_{i_p}\left(1-a_p x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_1} \times \left[\left(1-b_o x_o\right)^{-1} x_{j_1} \cdots x_{j_q}\left(1-b_q x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_2}>$$

$$= \left[<\left\{\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \cdots x_{i_p}\left(1-a_p x_o\right)^{-1}\right\} \omega \left\{\left(1-b_o x_o\right)^{-1} x_{j_1} \cdots x_{j_q}\left(1-b_q x_o\right)^{-1}\right\}>\right]_o^{t_1} \times$$

$$\left[<\left(1-b_o x_o\right)^{-1}>\right]_{t_1}^{t_2} \tag{7}$$

$$+ \left[<\left\{\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \cdots x_{i_p}\left(1-a_p x_o\right)^{-1}\right\} \omega \left\{\left(1-b_1 x_o\right)^{-1} x_{j_2} \cdots x_{j_q}\left(1-b_q x_o\right)^{-1}\right\}>\right]_o^{t_1} \times$$

$$\left[<\left(1-b_o x_o\right)^{-1} x_{j_1}\left(1-b_1 x_o\right)^{-1}>\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left[<\left\{\left(1-a_o x_o\right)^{-1} x_{i_1} \cdots x_{i_p}\left(1-a_p x_o\right)^{-1}\right\} \omega \left(1-b\ x_o\right)^{-1}>\right]_o^{t_1} \times$$

$$\left[<\left(1-b_o x_o\right)^{-1} x_{j_1} \cdots x_{j_q}\left(1-b_q x_o\right)^{-1}>\right]_{t_1}^{t_2}$$

<u>Example 2</u> : Let us consider the linear stochastic differential equation

$$\dot{v} = -\alpha v + u(t) \ , \quad v(0) = c$$

where $u(t)$ is a white Gaussian process and c is assumed independent of $u(t)$. The generating power series associated with $v(t)$ is given by

$$<g> = \left(1 + \alpha x_o\right)^{-1} x_1 + c\left(1 + \alpha x_o\right)^{-1} .$$

In accordance with (5) and (7), $v(t)$ has mean value

$$<g> = E(c)\left(1 + \alpha x_o\right)^{-1}$$

that is $$E\left(v(t)\right) = E(c) e^{-\alpha t}$$

and covariance

$$<[g]_o^{t_1}[g]_o^{t_2}> = <\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_2}>$$

$$+ \left\{<c\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_2}>=0\right\}$$

$$+ \left\{<c\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_2}>=0\right\}$$

$$+ <c^2\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_2}> =$$

$$= \left[<\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1 \,\omega\, \left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1>\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_{t_1}^{t_2} +$$

$$\left\{<\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}x_1\right]_o^{t_2}>=0\right\} + <c^2\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_1}\left[\left(1+\alpha x_o\right)^{-1}\right]_o^{t_2}>$$

that is $E\left(v(t_1)v(t_2)\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha t_1}\right)e^{-\alpha(t_2-t_1)} + E(c^2)e^{-\alpha(t_1+t_2)}$

If we begin with an $N\left(o,\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$-distributed c then v(t) is a stationary Gaussian process (sometimes called a colored noise) such that

$$E\left(v(t)\right) = 0 \quad \text{and} \quad E\left(v(t_1)v(t_2)\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t_2-t_1|}$$

Remark : The techniques presented in this paper still apply for a rationally correlated noise input ; for example considering example 1 in conjonction with example 2 allows to deal with the nonlinear system

$$\dot{y}(t) + k_1y(t) + k_2y^2(t) = v(t)$$

where v(t) is a Gaussian colored noise. The following equivalent nonlinear system with a white Gaussian noise input u(t) is then considered :

$$\begin{cases} \dot{v} = - v + u(t) \\ \dot{y} = - k_1y - k_2y^2 + v(t). \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.ARNOLD, Stochastic differential equations. Wiley, New York, 1974.

[2] J.F.BARRETT. The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems, J.Electron. & Contr. 15, 1963, pp. 567-615.

[3] E.BEDROSIAN and S.O.RICE. The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and Gaussian inputs. Proc.IEEE, 59, 1971, pp. 1688-1708.

[4] M.FLIESS. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. Bull.Soc.Math.France, 109, 1981, pp. 3-40.

[5] M.FLIESS and F.LAMNABHI-LAGARRIGUE. Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator. J.Math.Phys, 23, 1982, pp. 495-502.

[6] F.LAMNABHI-LAGARRIGUE and M.LAMNABHI. Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires, Ricerche di Automatica, 1979, 10, pp. 17-26.

[7] F.LAMNABHI-LAGARRIGUE and M.LAMNABHI. Algebraic computation of the solution of some nonlinear differential equations. In "Computer algebra" (J.Calmet, éd.), Lect.Notes Comput.Sc, 144, Springer Verlag, Berlin, 1982, pp. 204-211.

[8] W.J.RUGH. Nonlinear system.Theor, John Hopkins, Baltimore 1981.

[9] M.SCHETZEN. The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. John Wiley, New York, 1980.

[10] N.WIENER. Response of a nonlinear device to noise. M.I.T. Radiation Laboratory, Cambridge, Mass. Report 129, 1942.

* *
*

Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator

Michel Fliess and Françoise Lamnabhi-Lagarrigue
Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.–E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France

(Received 27 May 1981; accepted for publication 16 October 1981)

A new representation of causal functionals is introduced which makes use of noncommutative generating power series and iterated integrals. This technique allows the solutions of nonlinear differential equations with forcing terms to be obtained in a simple and natural way. It generalizes some properties of Fourier and Laplace transforms to nonlinear systems and leads to effective computations of various perturbative expansions. Illustrations by means of the cubic anharmonic oscillator are given in both the deterministic and the stochastic cases.

PACS numbers: 02.30. – k

INTRODUCTION

Recently a new approach to causal functionals was proposed using noncommutative variables and iterated integrals.[1] This algebraic viewpoint enables us to obtain in closed form solutions of nonlinear differential equations with forcing terms. This can be done in a very simple and natural way using the vector fields connected with the equation. The rules for manipulating noncommutative variables, where the product is replaced by the shuffle, generalize Heaviside symbolic calculus to the nonlinear domain, i.e., noncommutative variables allow us to extend some properties of Laplace and Fourier transforms to nonlinear systems.

The aim of this paper is to illustrate this theory, which has appeared in engineering, by some physical examples. After some necessary recapitulation, we compare the fundamental formula giving the solution of a nonlinear differential equation with some recent attempts due to Uzes,[2] Jouvet and Phythian,[3] and Langouche *et al.*[4] Morton and Corrsin[5] used Fourier transforms for giving the solution of the cubic anharmonic oscillator, commonly known as the Duffing equation. Their computations, which had only an heuristic value, are completely justified with our noncommutative variables.

The last section is devoted to the study of statistical properties of the output of the cubic anharmonic oscillator driven by a Gaussian white noise. Noncommutative variables give a systematic understanding of the derivation of the first perturbative terms of the moments and lead to an easy implementation on computers.[6]

I. NONCOMMUTATIVE GENERATING POWER SERIES

A. Free monoid and noncommutative formal power series

Let X^* be the *free monoid*[7] generated by a finite set $X = \{x_0, ..., x_n\}$ called the *alphabet*. Every element of X^* is a *word* and consists of a finite sequence $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ of letters of the alphabet. The product of two words $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ and $x_{k_\mu} \cdots x_{k_0}$ is the concatenation $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0} x_{k_\mu} \cdots x_{k_0}$. This operation is noncommutative. The neutral element is called the *empty word* and written with 1.

Let $\mathbf{R}\langle X\rangle$ and $\mathbf{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ be the $\mathbf{R}$-algebras of formal polynomials and power series (ps) with real coefficients and noncommutative variables $x_j \in X$. An element $s \in \mathbf{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ is written as a formal sum

$$s = \sum \{(s, w) w \mid w \in X^*\}, \quad \text{where } (s, w) \in \mathbf{R}.$$

Addition and (Cauchy) multiplication are defined by[8]

$$s_1 + s_2 = \sum \{[(s_1, w) + (s_2, w)] w \mid w \in X^*\},$$

$$s_1 s_2 = \sum \left\{ \left[\sum_{w_1 w_2 = w} (s_1, w_1)(s_2, w_2) \right] w \mid w \in X^* \right\}.$$

B. Iterated integrals and analytic causal functionals

Let $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n : [0, T] \to \mathbf{R}$ be $n + 1$ continuous functions with bounded variations. We define the *iterated integral*[9] $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}$ $(0 < t < T)$ by induction on the length

$$\int_0^t d\xi_j = \xi_j(t) - \xi_j(0) \quad (j = 0, 1, ..., n),$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0},$$

where the last integral is a Stieltjes integral.

To the inputs $u_1, ..., u_n : [0, T] \to \mathbf{R}$, which are assumed to be piecewise continuous, one associates the iterated integral

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}, \text{ where } \xi_0(\tau) = \tau, \ \xi_i(\tau) = \int_0^\tau u_i(\sigma) d\sigma \quad (i = 1, ..., n).$$

Now consider a noncommutative ps $g \in \mathbf{R}\langle\langle X\rangle\rangle$. It defines a causal, or nonanticipative, functional[10] of the inputs u_i if we replace the word $x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}$ by the corresponding iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}$. Thus, the numerical value[11] is

$$y(t; u_1, ..., u_n) = (g, 1) + \sum_{\nu > 0} \sum_{j_0, ..., j_\nu = 0}^{n} (g, x_{j_\nu} \cdots x_{j_0}) \times \int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}. \quad (1)$$

Such a causal functional is said to be *analytic* with the *generating ps* g.

C. Fundamental formula

Consider the following differential system, which is assumed to be of first order without loss of generality,

$$\begin{cases} \dot{q}(t) (= dq/dt) = A_0(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i(q), \\ y(t) = h(q). \end{cases} \quad (2)$$

 0022-2488/82/040495-08$02.50

The state q belongs to a real analytic manifold Q [the initial state $q(0)$ is given]; the vector fields $A_0, A_1, ..., A_n$ and the function $h: Q\rightarrow\mathbb{R}$ are analytic. The inputs (or controls) $u_1, ..., u_n: [0, T]\rightarrow\mathbb{R}$ are often forces.

Take some local coordinates chart, where $q = (q^1, ..., q^N)$ and

$$A_j = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k (q^1, ..., q^N) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

(the θ_j^k are analytic functions of $q^1, ..., q^N$). Recall then that the first line of (2) is equivalent to

$$\dot{q}^k(t) = \theta_0^k + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\theta_i^k \quad (k = 1, ..., N).$$

One can prove that the output y of (2) is an analytic causal functional of $u_1, ..., u_n$ defined by the generating ps[12]

$$\mathrm{g} = h\,|_{q(0)} + \sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_0, ..., j_\nu = 0}^{n} A_{j_0} \cdots A_{j_\nu} h\,|_{q(0)} x_{j_\nu} \cdots x_{j_0} \qquad (3)$$

[the notation $|_{q(0)}$ means the value at $q(0)$].

The formula (3) and its proof generalize Gröbner's work[13] on Lie series and free differential equations of the form $\dot{q}(t) = A(q)$.

Uzes[2] tried also to extend Gröbner's theory to get the solution of forced nonlinear differential equations, using Gâteaux–Fréchet's functional derivatives.[14] The latest expansions are really useful if the time t is fixed once and for all. In the dynamic case, where time varies, they lead to a more complex formulation than (3). On the other hand, Jouvet and Phythian[3] and Langouche, Roekaerts, and Tirapegui[4] used a formalized operator which does not give the generating functional in a simple form. These comparisons, and others we can make with engineering attempts,[15–17] lead us to think that for causal functionals the natural expansion is done with noncommutative generating power series.

D. Volterra series

Volterra series are until now the functional expansions most commonly used.[2,4,15–17] With only one input, one obtains

$$\begin{aligned} y(t; u_1) &= w_0(t) + \int_0^t w_1(t, \tau_1)u_1(\tau_1)d\tau_1 \\ &+ \int_0^t \int_0^{\tau_2} w_2(t, \tau_2, \tau_1)u_1(\tau_2)u_1(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1 \\ &+ \cdots + \int_0^t \int_0^{\tau_s} \cdots \int_0^{\tau_2} w_s(t, \tau_s, ..., \tau_1)u_1(\tau_s)\cdots u_1(\tau_1) \\ &\times d\tau_s \cdots d\tau_1 + \cdots. \end{aligned} \qquad (4)$$

Kernels here are in a triangular form; hence $t\geq\tau_s\geq\cdots\geq\tau_1\geq 0$. One can also use the symmetric form

$$\begin{aligned} y(t; u_1) &= w_0'(t) + \int_0^t w_1'(t, \tau_1)u_1(\tau_1)d\tau_1 + \cdots \\ &+ \int_0^t \cdots \int_0^t w_s'(t, \tau_s, ..., \tau_1)u_1(\tau_s)\cdots u_1(\tau_1) \\ &\times d\tau_s \cdots d\tau_1 + \cdots, \end{aligned}$$

where the w_s' are symmetric functions of the variables $\tau_s, ..., \tau_1$. In each case the kernels are uniquely defined up to a set of measure zero.

In these expansions, the linear, quadratic, cubic, etc.,... contributions are separated.

There is, in fact, a strong relationship between Volterra series and noncommutative generating ps. One can show that a Volterra series defines an analytic causal functional if, and only if, for all $s\geq 0$, the kernel $w_s(t, \tau_s, ..., \tau_1)$ is an analytic function of $t, \tau_s, ..., \tau_1$.

Consider the differential system

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + u_1(t)A_1(q) \\ y(t) = h(q) \end{cases}$$

of the form (2), with only a single input. From (3), we can get the output y as a Volterra series (4), where the kernels are given by[18]

$$w_0(t) = \sum_{\nu\geq 0} A_0^{\nu} h\,|_{q(0)} \frac{t^\nu}{\nu!} = e^{tA_0}h\,|_{q(0)},$$

$$\begin{aligned} w_1(t, \tau_1) &= \sum_{\nu_0, \nu_1\geq 0} A_0^{\nu_0} A_1 A_0^{\nu_1} h\,|_{q(0)} \frac{(t-\tau_1)^{\nu_1}\tau_1^{\nu_0}}{\nu_1!\nu_0!} \\ &= e^{\tau_1 A_0} A_1 e^{(t-\tau_1)A_0} h\,|_{q(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &w_2(t, \tau_2, \tau_1) \\ &= \sum_{\nu_0, \nu_1, \nu_2\geq 0} A_0^{\nu_0} A_1 A_0^{\nu_1} A_1 A_0^{\nu_2} h\,|_{q(0)} \frac{(t-\tau_2)^{\nu_2}(\tau_2-\tau_1)^{\nu_1}\tau_1^{\nu_0}}{\nu_2!\nu_1!\nu_0!} \\ &= e^{\tau_1 A_0} A_1 e^{(\tau_2-\tau_1)A_0} A_1 e^{(t-\tau_2)A_0} h\,|_{q(0)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_s(t, \tau_s, ..., \tau_1) &= \sum_{\nu_0, ..., \nu_s\geq 0} A_0^{\nu_0} A_1 \cdots A_1 A_0^{\nu_s} h\,|_{q(0)} \frac{(t-\tau_s)^{\nu_s}\cdots\tau_1^{\nu_0}}{\nu_s!\cdots\nu_0!} \\ &= e^{\tau_1 A_0} A_1 \cdots A_1 e^{(t-\tau_s)A_0} h\,|_{q(0)}. \end{aligned}$$

II. A NONCOMMUTATIVE SYMBOLIC CALCULUS

A. Presentation

The generating ps representing the solution of a forced differential system can be obtained by a noncommutative symbolic calculus which generalizes Heaviside symbolic, or operational, calculus. Rather than a general formulation,[1] we apply the method to the cubic anharmonic oscillator, i.e., the Duffing equation

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) + y(t) + \beta y^3(t) = u_1(t). \qquad (5)$$

To account for the cubic term, we introduce a new operation on generating ps: we define the *shuffle product* by induction on the length of words

$$\begin{aligned} &1 ш 1 = 1, \\ &\forall x\in X, \quad x ш 1 = 1 ш x = x, \\ &\forall x, x'\in X, \quad \forall w, w'\in X^*, \\ &(xw) ш (x'w') = x[w ш (x'w')] + x'[(xw) ш w']. \end{aligned} \qquad (6)$$

So the shuffle product of two words is a homogeneous polynomial, the degree of which is the sum of the length of the words. For example

$$x_0x_1 ш x_1x_0 = 2x_0x_1^2x_0 + x_0x_1x_0x_1 + x_1x_0x_1x_0 + 2x_1x_0^2x_1.$$

The shuffle product of two generating ps $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2\in\mathbb{R}\langle\langle X\rangle\rangle$ is given by

$$\mathrm{g}_1 ш \mathrm{g}_2 = \sum \{(\mathrm{g}_1, w_1)(\mathrm{g}_2, w_2) w_1 ш w_2 | w_1, w_2 \in X^*\}.$$

Consider now the product of two iterated integrals

$$\left(\int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^t d\xi_{k_\mu} \cdots d\xi_{k_0}\right).$$

An integration by parts gives

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_\mu} \cdots d\xi_{k_0}\right)\right] + \int_0^t d\xi_{k_\mu}(\tau)\left[\left(\int_0^\tau d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j_0}\right)\left(\int_0^\tau d\xi_{k_{\mu-1}} \cdots d\xi_{k_0}\right)\right].$$

This last formula is similar to the definition (6) of the shuffle product.[19] We then have the following important result.

Theorem[20]: The product of two analytic causal functionals is a functional of the same kind, the generating power series of which is the shuffle product of the two generating power series.

Consider again (5) in the following integral form:

$$y(t) + \alpha \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^\tau y(\sigma) d\sigma + \beta \int_0^t d\tau \int_0^\tau y^3(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\tau \int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma + at + b, \qquad (7)$$

where $a = \dot{y}(0) + \alpha y(0)$ and $b = y(0)$.

The previous theorem and the relationship between iterated integrals and noncommutative indeterminates allow us to write (7) in the following form:

$$\mathrm{g} + \alpha x_0 \mathrm{g} + x_0^2 \mathrm{g} + \beta x_0^2 \mathrm{g} ш \mathrm{g} ш \mathrm{g} = x_0 x_1 + a x_1 + b. \qquad (8)$$

The algebraic equation can be solved iteratively with the fixed point theorem, according to the scheme

$$\mathrm{g}_{i+1} + \alpha x_0 \mathrm{g}_i + x_0^2 \mathrm{g}_i + \beta x_0^2 \mathrm{g}_i ш \mathrm{g}_i ш \mathrm{g}_i = x_0 x_1 + a x_1 + b.$$

Noncommutative variables extend some properties of Laplace–Fourier transforms to the nonlinear domain. Indeed, with the linear differential equation

$$\ddot{y} + y = u_1(t)$$

we associate for $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, by the method described above, the generating ps

$$\mathrm{g} + x_0^2 \mathrm{g} = x_0 x_1,$$

$$\mathrm{g} = (1 + x_0^2)^{-1} x_0 x_1,$$

which is analogous to the classical transfer function $1/(p^2 + 1)$.

B. An example of functional expansion

Consider again Eq. (5), seeking for small β a perturbative expansion of the form

$$y(t) = y_0(t) + \beta y_1(t) + \beta^2 y_2(t) + \cdots.$$

In a quoted paper, Morton and Corrsin,[5] to this end, used the Fourier transform. This is heuristic because there is no simple relationship between the transform of a product and a product of transforms. After briefly reviewing their work, we show that our noncommutative symbolic calculus justifies it rigorously.

Making use of harmonic analysis, the authors write y and u_1 in the form

$$y(t) = \sum_\omega Y(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{with } Y(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$u_1(t) = \sum_\omega U_1(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{with } U_1(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} u_1(\omega) e^{-i\omega t} dt,$$

where $[-T, +T]$ can be very large. Equation (5) becomes

$$(1 - \omega^2 + i\alpha\omega) Y(\omega) + \beta \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} Y(\omega - \omega') Y(\omega' - \omega'') Y(\omega'') = U_1(\omega)$$

or

$$(1 - \omega^2 + i\alpha\omega) Y(\omega) + \beta \sum_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega} Y(\omega_1) Y(\omega_2) Y(\omega_3) = U_1(\omega).$$

Terms of the perturbative expansion

$$Y(\omega) = Y_0(\omega) + \beta Y_1(\omega) + \beta^2 Y_2(\omega) + \cdots$$

are then

$$Y_0(\omega) = (1 - \omega^2 + i\alpha\omega)^{-1} U_1(\omega) = -S(\omega) U_1(\omega),$$

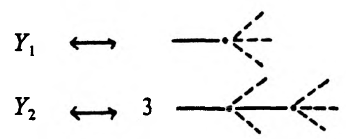
$$Y_1(\omega) = S(\omega) \sum_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega} Y_0(\omega_1) Y_0(\omega_2) Y_0(\omega_3),$$

$$Y_2(\omega) = 3S(\omega) \sum_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega} Y_0(\omega_1) Y_0(\omega_2) Y_1(\omega_3).$$

These expressions become more and more complicated. The use of Feynman type diagrams in which

a straight line (——) represents $S(\omega)$,
a dot (.) represents β,
a dashed line (---) represents $Y_0(\omega)$,

allows us to simplify the manipulations. We deduce the following representations:



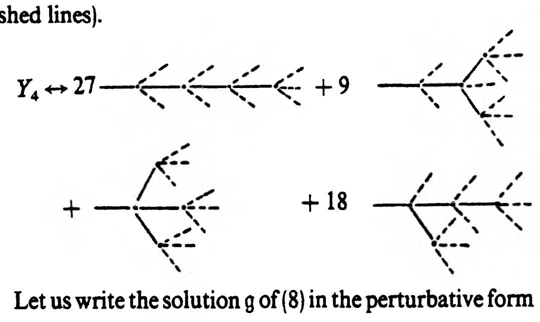
The one-to-one correspondance between Y_k and these diagrams obeys the following rules:

Four elements are joined at each vertex, at least one of which is a straight line.

There is a factor of 3 associated with every vertex having one or two dashed lines entering it.

. . . .

So to draw Y_k one must take k straight lines and k vertices, combining them in all possible ways consistent with the above rules and adding the necessary $(2k + 1) Y_0$'s (dashed lines).



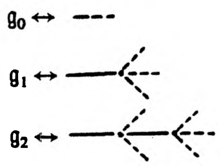
Let us write the solution g of (8) in the perturbative form

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}_0 + \beta \mathrm{g}_1 + \beta^2 \mathrm{g}_2 + \cdots.$$

Hence,

$$g_0 = (1 + ax_0 + x_0^2)^{-1}(x_0x_1 + ax_0 + b)$$
$$= -S(x_0)(x_0x_1 + ax_0 + b),$$
$$g_1 = S(x_0)g_0 ш g_0 ш g_0,$$
$$g_2 = 3S(x_0)g_0 ш g_0 ш g_1,$$

which represent them as Y_0, Y_1, Y_2 by



The connection between three branches corresponds to the shuffle of three series.[21]

III. SYSTEMS DRIVEN BY WHITE GAUSSIAN NOISES

A. Generalities

A classical problem of convergence of functional expansions arises when the inputs are white Gaussian noises. This happens with generating ps as well as with the other techniques.

As we will see in the following, it is, however, instructive to use noncommutative variables. To this end, we must first give a meaning to stochastic iterated integrals $\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}$, where the $\xi_i(t) = b_i(t)$ are Wiener processes, or Brownian motions which, for simplicity's sake, are supposed to be mutually independent and standard, i.e., $\langle b_i(t)\rangle = 0$, $\langle b_i^2(t)\rangle = |t|$. To keep the rules of ordinary calculus and taking account of approximation properties,[22] we use Stratonovich integrals.[23,24] If $\xi_0(t) = t$, $\xi_i(t) = b_i(t)$, we set

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\cdots d\xi_{j_0},$$

where for $j_\nu \neq 0$, this last integral is a Strotonovich integral.

It is also necessary to compute the average $\langle \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}\rangle$ of iterated integrals. The following proposition can be compared with Wick's theorem.

Proposition: The moment $\langle \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}\rangle$ of the iterated integral $\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}$ is given by induction on the length by

$$\left\langle \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}\right\rangle = \begin{cases} \int_0^t d\tau\left\langle \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\cdots d\xi_{j_0}\right\rangle & \text{if } j_\nu = 0,\\ \int_0^t \frac{d\tau}{2}\left\langle \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-2}}\cdots d\xi_{j_0}\right\rangle & \text{if } j_\nu = j_{\nu-1} \neq 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Proof: The iterated integral

$$B_{j_\nu\ldots j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}$$

satisfies the Stratonovich stochastic differential equation

$$dB_{j_\nu\ldots j_0} = B_{j_{\nu-1}\ldots j_0}\circ d\xi_{j_\nu}.$$

(For $j_\nu = 0$, i.e., $d\xi_{j_\nu} = dt$, the result is trivial). This Stratonovich stochastic differential is related to that of Itô by

$$dB_{j_\nu\ldots j_0} = B_{j_{\nu-1}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_\nu} + \tfrac{1}{2}dB_{j_{\nu-1}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_\nu},$$

where the symbol . denotes the differential in the Itô's sense. Hence,

$$dB_{j_\nu\ldots j_0} = B_{j_{\nu-1}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_\nu} + \tfrac{1}{2}\left[B_{j_{\nu-2}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_{\nu-1}} + \tfrac{1}{2}dB_{j_{\nu-2}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_{\nu-1}}\right]\cdot d\xi_{j_\nu}.$$

From the definition of the Itô stochastic differentials, we have

$$\langle B_{j_{\nu-1}\ldots j_0}\cdot d\xi_{j_\nu}\rangle = 0.$$

Finally, the classical rules of stochastic calculus,

$$\begin{cases} db.db \simeq dt,\\ db.dt \simeq 0,\\ dt.dt \simeq 0,\end{cases}$$

lead to

$$\langle dB_{j_\nu\ldots j_0}\rangle = \begin{cases} \frac{dt}{2}\cdot\langle B_{j_{\nu-2}\ldots j_0}\rangle & \text{if } j_\nu = j_{\nu-1} \neq 0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

B. Statistics of the solutions of stochastic differential equations

Consider again the system (2); here in Stratonovich stochastic form

$$\begin{cases} dq = A_0(q)dt + \sum_{i=1}^n A_i(q)db_i,\\ y(t) = h(q).\end{cases}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ are standard Wiener processes, which are mutually independent [the initial state $q(0)$ is given]. Applying the previous rules to the fundamental formula, we get[25]

$$\langle y(t)\rangle = h|_{q(0)} + \sum_{\nu>0}\frac{t^\nu}{\nu!}\left(A_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n A_i^2\right)^\nu h|_{q(0)}$$
$$= \left[\exp t\left(A_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n A_i^2\right)\right]h|_{q(0)}.$$

Example: The following system is described by

$$\begin{cases} dq = \left(B_0 + \sum_{i=1}^n B_i db_i\right)q(t),\\ y(t) = \lambda q(t).\end{cases}$$

The state q belongs to $\mathbb{R}^N$; B_j ($j = 0, \ldots, n$) and λ are, respectively, square matrices and row vectors of order N (systems of this form are known, in control theory, as *regular* or *bilinear* systems). We have

$$y(t) = \lambda\left(1 + \sum_{\nu>0}\sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^n B_{j_\nu}\cdots B_{j_0}\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}\right)q(0),$$

hence

$$\langle y(t)\rangle = \lambda\left[\exp t\left(B_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n B_i^2\right)\right]q(0). \qquad (9)$$

In this particular case, we see that we have convergence and the formula (9) is then rigorous.[26]

Figure 1 gives the time expansion up to orders 8 and 12 of the moment $\langle q(t)\rangle$ where

$$\ddot q + \dot q + q + 0,2q^3 = \dot b(t),$$

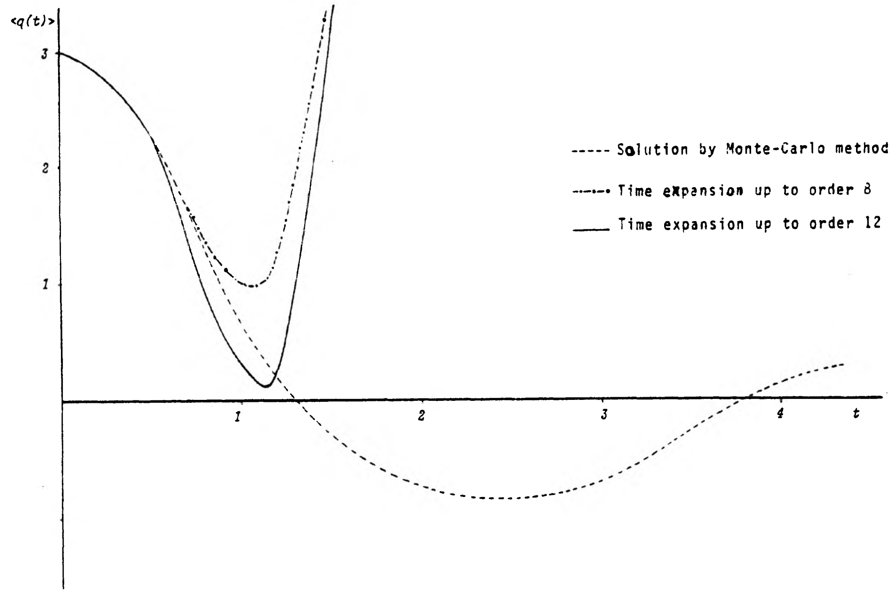


FIG. 1. First moment of the solution of the equation $\ddot q + \dot q + q + 0.2q^3 = \dot b(t)$ with $\sigma^2 = 5$, $q(0) = 3$, $\dot q(0) = 0$.

with $q(0) = 3$, $\dot q(0) = 0$.[27] The symbol $\dot b$ is the formal derivative of a Wiener process b, i.e., $\dot b$ is a Gaussian white noise. Here $\langle b(t)\rangle = 0$, $\langle b^2(t)\rangle = 5|t|$.

In the following we study perturbative expansions from which we can expect better results.

C. Perturbative expansions with respect to nonlinearity

Consider the nonlinear differential equation

$$Ly + \beta P(y) = \dot b(t) \quad (y(0), \dot y(0), \ldots, \text{ are given}),$$

where L is a differential operator with constant coefficients, P a polynomial, and β a small parameter. Here we seek a perturbative expansion for the solution $y(t)$,

$$y(t) = y_0(t) + \beta y_1(t) + \beta^2 y_2(t) + \cdots. \tag{10}$$

Techniques using noncommutative variables, shown in the Appendix, give the ps $\mathfrak{g}_i$ corresponding to the y_i:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \beta\mathfrak{g}_1 + \beta^2\mathfrak{g}_2 + \cdots.$$

$\mathfrak{g}$ is the generating ps associated to y. From a result analogous to the previous proposition, it is possible to derive the first terms of the perturbative expansion of $\langle y(t)\rangle$ and more generally of $\langle y^n(t)\rangle$.

Application: We refer again to the anharmonic oscillator

$$\ddot y + \alpha\dot y + y + \beta y^3 = \dot b(t),$$

for which we compare our results with those of Morton and Corrsin[5] (Fig. 2). The generating ps associated with the solution y verifies the algebraic equation

$$\mathfrak{g} = -\beta(1 + \alpha x_0 + x_0^2)^{-1}\mathfrak{g}\,ш\,\mathfrak{g}\,ш\,\mathfrak{g} + (1 + \alpha x_0 + x_0^2)^{-1}(x_0x_1 + ax_0 + b).$$

Setting

$$(1 + \alpha x_0 + x_0^2) = (1 - a_1x_0)(1 - a_2x_0)$$

and

$$(1 + \alpha x_0 + x_0^2)^{-1}(ax + b) = A_1(1 - a_1x_0)^{-1} + A_2(1 - a_2x_0)^{-1},$$

we obtain[28]

$$\mathfrak{g}_0 = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & & 1 & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & & 1 & \\ & 0 & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & & X & & Y & \\ & 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 1 & & 0 \\ \hline\end{array},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & & X & & Y & \\ & 1 & & 0 & & 3 \\ & 0 & & 1 & & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 3 & & X & & X & \\ & 1 & & 0 & & 2 \\ & 0 & & 1 & & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 3 & & X & & X & \\ & 1 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & & X & & X & \\ & 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 1 & & 3 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 3 & & X & & X & & X & & Y & \\ & 1 & & 0 & & 3 & & 2 & & 2 \\ & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccccccc|}\hline 6 & & X & & X & & X & & Y & \\ & 1 & & 0 & & 2 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} 3 & X & X & X & Y & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} 6 & X & X & X & Y & X & Y \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 12 & X & X & X & X & Y & Y \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 6 & X & X & X & Y & X & Y \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 12 & X & X & X & X & Y & Y \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}}$$

For the first moment, we have then

$$\langle g_0\rangle = \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}},$$

$$\langle g_1\rangle = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & X & X \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & X & X \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & X & X \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & X & X \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} 12\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) & X & X & X & X & X \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} 12\frac{\sigma^2}{2} & X & X & X & X & X \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}}$$

Figure 2 gives the perturbative expansion up to order 2 of steady-state moment $\langle y^2\rangle$.

IV. CONCLUSION

The functional methods proposed here are mathematically rigorously correct in the deterministic case, where they clarify various former attempts. In the stochastic case, their algebraic nature simplifies the computations of perturbative expansions.

APPENDIX

Consider the differential equation

$$Ly + \beta P(y) + \dot{b}(t)$$

with

$$L = \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{d}{dt_i} \quad (l_n = 1)$$

and

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j x^j.$$

As previously (Sec. IIA), the generating ps associated with y is given by

$$\left(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\right) g + x_0^n \beta \sum_{j=1}^{m} p_j g^{ш j}$$
$$= x_0^{n-1} x_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i x_0^i$$

or

$$g = -\left(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\right)^{-1} x_0^n \beta \sum_{j=1}^{m} p_j g^{ш j}$$
$$+ \left(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\right)^{-1} \left(x_0^{n-1} x_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i x_0^i\right),$$

where $\delta_i (i = 0,...,n-1)$ are constants depending on the initial conditions.

The expansion (10) is "equivalent" to that of g in powers of β:

$$g = g_0 + \beta g_1 + \beta^2 g_2 + \cdots$$

with

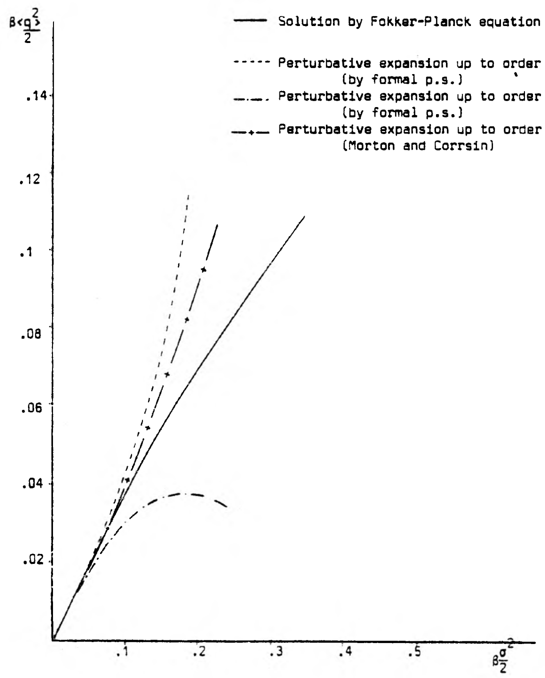


FIG. 2. Second steady-state moment of the solution of the equation $\ddot{q} + \dot{q} + q + \beta q^3 = \dot{b}(t)$, $\langle \dot{b}^2(t)\rangle = \sigma^2 |t|$.

$$\mathfrak{g}_0=\Big(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\Big)^{-1}\Big(x_0^{n-1}x_1+\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i x_0^i\Big)$$

and

$$\mathfrak{g}_k=-\Big(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\Big)^{-1}x_0^n\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_j\\ k_1+\cdots+k_j=k}}p_{k_1}p_{k_2}\cdots$$

$$\times p_{k_j}\mathfrak{g}_{k_1}ш\mathfrak{g}_{k_2}ш\cdotsш\mathfrak{g}_{k_j}.$$

To have the rational expression of g_i, we need to compute the shuffle product of powers series of the form

$$(1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots(1-a_px_0)^{-1}. \qquad \text{(A1)}$$

Proposition[29]: Given two formal ps

$$S_1^p=(1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}$$
$$=S_1^{p-1}x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}$$

and

$$S_2^q=(1-b_0x_0)^{-1}x_{j_1}(1-b_1x_0)^{-1}x_{j_2}\cdots x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1}$$
$$=S_2^{q-1}x_{j_q}(1-b_qx_0)^{-1},$$

where p and q belong to N, the subscripts $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q$ to $\{0,1\}$, and a_i, b_j to $\mathbb{C}$; the shuffle product is given by induction on the length by

$$S_1^pшS_2^q=(S_1^pшS_2^{q-1})x_{j_q}[1-(a_p+b_q)x_0]^{-1}$$
$$+(S_1^{p-1}шS_2^q)x_{i_p}[1-(a_p+b_q)x_0]^{-1}$$

with

$$(1-ax_0)^{-1}ш(1-bx_0)^{-1}=[1-(a+b)x_0]^{-1}.$$

This shows that $\mathfrak{g}_i(i>0)$ is a finite sum of expressions of the form (11). To derive perturbative expansion of the first moment,

$$\langle\mathfrak{g}\rangle=\langle\mathfrak{g}_0\rangle+\beta\langle\mathfrak{g}_1\rangle+\beta^2\langle\mathfrak{g}_2\rangle+\cdots,$$

we should compute

$$\langle(1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}\rangle.$$

This is given (see the proposition of Sec. IIIA) by induction on the length by

$$\langle(1-a_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}\rangle$$
$$=\begin{cases}(1-a_0x_0)^{-1}x_0\langle(1-a_1x_0)^{-1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}\rangle & \text{if } i_1=0,\\ \tfrac{1}{2}(1-a_0x_0)^{-1}x_0\langle(1-a_2x_0)^{-1}x_{i_3}\cdots x_{i_p}(1-a_px_0)^{-1}\rangle & \text{if } i_1=i_2=1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$\mathfrak{g}_i$ is then a rational fraction in the only variable x_0. Its decomposition into partial fractions and the following lemma give its corresponding expression in time.

Lemma: The rational fraction $(1-ax_0)^{-p}$ corresponds to the exponential polynomial

$$\Big(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{j}{p-1}\frac{a^jt^j}{j!}\Big)e^{at}.$$

This results easily from

$$(1-ax_0)^{-p}=(1+ax_0)^{p-1}ш(1-ax_0)^{-1}.$$

[1]M. Fliess, Bull. Soc. Math. France **109**, 3 (1981).

[2]C. A. Uzes, J. Math. Phys. **19**, 2232 (1978).

[3]B. Jouvet and R. Phythian, Phys. Rev. A **19**, 1350 (1979).

[4]F. Langouche, D. Roekaerts, and E. Tirapegui, Physica A **95**, 252 (1979).

[5]J. B. Morton and S. Corrsin, J. Stat. Phys. **2**, 153 (1970).

[6]F. Lamnabhi-Lagarrigue, "Application des variables non commutatives à des calculs formels en statistique non linéaire, Thèse 3^e cycle, Université Paris XI, Orsay, 1980 (unpublished).

[7]Remember that the free monoid is an important subject of investigation in some questions resulting from theoretical computer science. One should cite here the name of M. P. Schützenberger. See, for example, S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines* (Academic, New York, 1974), Vol. A; G. Lallement, *Semigroups and Combinational Applications* (Wiley, New York, 1979).

[8]In the case $n=0$, one finds again the commutative algebras $\mathbb{R}[x_0]$ and $\mathbb{R}[[x_0]]$ of polynomials and power series in one variable.

[9]Iterated integrals have been introduced by Chen as an important tool in topology. See, for example, K. T. Chen, Bull. Am. Math. Soc. **83**, 831 (1977).

[10]A functional is said to be causal, or nonanticipative, if at time t its value depends on the values of the $u_i(\tau)$ only for $\tau<t$.

[11]Equation (1) is supposed to be absolutely convergent for t and $\max_{0\le\tau\le t}|u_i(\tau)|$ sufficiently small.

[12]It is worth noting that the order of subscripts in the sequences $A_{j_0}\cdots A_{j_\nu}h|_{q(t)}$ and $x_{j_\nu}\cdots x_{j_0}$ are inverted.

[13]W. Gröbner, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, 2nd ed. (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967).

[14]For a related work, see L. M. Garrido, J. Math. Anal. Appl. **3**, 295 (1961); J. Math. Phys. **10**, 2045 (1969).

[15]J. F. Barrett, J. Electron. Contr. **15**, 567 (1963).

[16]M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems* (Wiley, New York, 1980).

[17]W. J. Rugh, *Nonlinear systems theory/The Volterra–Wiener's approach* (John Hopkins U. P., Baltimore, 1981).

[18]Here, too, the comparison with Ref. 2 is illuminating.

[19]R. Ree, Ann. Math. **68**, 210 (1958).

[20]This theorem is also essential for the proof of the fundamental formula.

[21]In addition to a justification of Morton and Corrsin's computations, we also get simple algorithms which have been implemented on computers for deriving the first terms of functional expansions (see Ref. 6). This approach can be applied to a wide range of ordinary differential equations.

[22]E. Wong and M. Zakai, Int. J. Engin. Sci. **3**, 213 (1969).

[23]R. L. Stratonovich, *Conditional Markov Processes and their Application to the Theory of Optimal Control* (Russian, Moscow, 1966, English translation: Elsevier, New York, 1968).

[24]For an equivalent definition of the stochastic iterated integrals, which is mathematically more natural, see M. Fliess, Stochastics **4**, 205 (1981).

[25]Let us note that the generating ps related to the fundamental formula is, in general, only convergent for "short" times and "small" inputs. Therefore

the mathematical validity of the foregoing is not ensured. This formula could also be derived, in an heuristic way, from the Fokker–Planck equation by path integral techniques. See, for example, R. L. Stratonovich, Sel. Transl. Math. Stat. Prob. **10**, 273 (1971); and R. Graham, Z. Phys. B **26**, 281 (1977).

[26]L. Arnold, *Stochastische Differentialgleichungen* (Oldenbourg, Munich, 1973); English translation, *Stochastic Differential Equations* (Wiley, New York, 1974).

[27]It should be remembered that, for this equation with an additive noise, Itô's and Stratonovich's interpretations are equivalent.

[28]The notation

$$\boxed{\begin{array}{lllll} C & x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_p} \\ c_{10} & c_{11} & & c_{1(p-1)} & c_{1p} \\ c_{20} & c_{21} & & c_{2(p-1)} & c_{2p} \end{array}}$$

means

$$CA_1^{c_{1p}}A_2^{c_{2p}}[1-(c_{10}a_1+c_{20}a_2)x_0]^{-1}x_{i_1}\cdots x_{i_p}[1-(c_{1p}a_1+c_{2p}a_2)x_0]^{-1}.$$

[29]F. Lammabhi-Lagarrigue and M. Lammabhi, Ric. Automatica **10**, 17 (1979).

AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — Séries de Volterra et formalisme hamiltonien.

Note de **Michel Fliess** et **Françoise Lamnabhi-Lagarrigue**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Reçue le 18 juin 1984, acceptée le 24 juillet 1984.

On montre que le développement en série de Volterra de la solution d'un système différentiel forcé s'exprime de façon naturelle à l'aide de l'hamiltonien de ce système.

AUTOMATION (THEORETICAL). — Volterra Series and Hamiltonian Formalism.

It is shown that the Volterra series expansion of the solution of a differential equation with forcing terms can be most naturally expressed by using the Hamiltonian of the system.

1. Introduction. — Les séries de Volterra sont l'un des outils les plus employés par les ingénieurs pour traiter du non-linéaire (*cf.* Rugh [8], Boyd, Chua et Desoer [1]). Quoique Volterra [11] les ait introduites en liaison avec le calcul des variations, on s'est assez peu soucié, dans les travaux actuels, de leurs liens éventuels avec la commande optimale. Pour celle-ci, le formalisme hamiltonien, si important en mécanique et en physique, s'est imposé avec le Principe du Maximum. Le but de cette Note est de généraliser une remarque de [4] sur la géométrie symplectique du premier noyau, en montrant que les noyaux d'ordre supérieur du développement en série de Volterra de la sortie d'un système différentiel forcé s'expriment naturellement grâce aux dérivées fonctionnelles d'un hamiltonien. Ce résultat, qui semble nouveau en automatique, avait sans doute été plus ou moins pressenti en physique statistique et quantique (Garrido [6], Uzes [10]).

2. Rappels sur les séries de Volterra. — On considère un système où, pour simplifier, commande et sortie sont scalaires :

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + u(t) A_1(q) \\ y(t) = h(q). \end{cases}$$

L'état q appartient à une variété $\mathbf{R}$-analytique Q de dimension finie N. Les champs de vecteurs A_0, $A_1 : Q \to TQ$ (fibré tangent) et la fonction de sortie $h : Q \to \mathbf{R}$ sont $\mathbf{R}$-analytiques. On suppose la commande u continue, c'est-à-dire $u \in C^0([0, T], \mathbf{R})$, $T > 0$. Divers auteurs ont montré que la sortie y pouvait être développée en série de Volterra :

$$y(t) = w_0(t, \tau, a) + \int_\tau^t w_1(t, \sigma_1, \tau, a) u(\sigma_1) d\sigma_1 + \dots$$
$$+ \int_\tau^t \dots \int_\tau^{\sigma_2} w_s(t, \sigma_s, \dots, \sigma_1, \tau, a) u(\sigma_s) \dots u(\sigma_1) d\sigma_s \dots d\sigma_1 + \dots,$$

où $0 \leqq \tau \leqq \sigma_1 \leqq \dots \sigma_s \leqq t \leqq T$. Les noyaux sont ici sous forme triangulaire. A l'instant initial τ, $q(\tau) = a \in Q$.

En réarrangeant les termes de la série génératrice et en utilisant un sous-produit de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on montre [5] que les noyaux sont des fonctions

0249-6321/84/02990783 $ 2.00

analytiques dont le développement de Taylor est donné par :

$$w_1(t, \sigma_1, \tau, a) = \sum_{\nu_1 \geqq 0} \frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_1 !} ad^{\nu_1}_{A_0} A_1 w_0(t, \tau, q)\big|_{q=a},$$

$$w_s(t, \sigma_s, \ldots, \sigma_1, \tau, a) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s \geqq 0} \frac{(\sigma_s-\tau)^{\nu_s} \ldots (\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_s ! \ldots \nu_1 !} \times ad^{\nu_s}_{A_0} A_1 \ldots ad^{\nu_1}_{A_0} A_1 w_0(t, \tau, q)\big|_{q=a}.$$

Comme à l'accoutumée, $ad^{\nu}_{A_1} A_1$ est le crochet de Lie itéré ν fois $[A_0, \ldots, [A_0, A_1] \ldots]$. Les dérivées de w_0 sont prises par rapport à q.

3. Géométrie symplectique du premier noyau [4]. — La différentielle dw_0 de w_0 par rapport à q définit un champ de covecteurs sur Q. Le fibré cotangent $T^* Q$ étant muni de sa structure symplectique canonique (*cf.* [9]), introduisons les hamiltoniens $\mathcal{H}_j = \langle A_j, dw_0 \rangle$, $j=0,1$. Rappelons que le crochet de Poisson de deux fonctions $f, g : T^* Q \to \mathbf{R}$ est, en coordonnées locales $(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N)$, donné par :

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k}.$$

A partir des équations de Hamilton, il vient :

Proposition 1. — *Le premier noyau de Volterra s'écrit :*

$$\begin{aligned} w_1(t, \sigma_1, \tau, a) &= \sum_{\nu_1 \geqq 0} \frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_1 !} ad^{\nu_1}_{A_0} A_1 w_0(t, \tau, q)\big|_{q=a} \\ &= \sum_{\nu_1 \geqq 0} \frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_1 !} \frac{d^{\nu_1} \mathcal{H}_1}{d\tau^{\nu_1}}\bigg|_{\substack{u=0 \\ q=a}} \\ &= \sum_{\nu_1 \geqq 0} \frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_1 !} (\mathcal{H}_0, \ldots (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \ldots)\big|_{q=a}. \end{aligned}$$

Remarque. — La *formule fondamentale*, qui exprime le développement en série génératrice g de la sortie y de Σ, à savoir ([3], [5]) :

$$\mathrm{g} = h\big|_{q=a} + \sum_{\nu \geqq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0, 1} A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h\big|_{q=a} x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}, \tag{1}$$

se traduit immédiatement en crochets de Poisson :

$$\mathrm{g} = h\big|_{q=a} + \sum_{\nu \geqq 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0,1} (\mathcal{H}_{j_0}, \ldots (\mathcal{H}_{j_\nu}, h) \ldots)\big|_{q=a} x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}.$$

On généralise ainsi une formule bien connue pour les systèmes différentiels libres (*cf.* [9]).

4. Expression hamiltonienne des noyaux d'ordre supérieur. — Commençons par quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Soit une fonctionnelle $U : C^0([0,1], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, dérivable au sens de Fréchet (*cf.* [7], [12]). Supposons de plus que cette dérivée s'exprime par l'intégrale $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, \delta f(\alpha)\, d\alpha$, où φ, qui est la *dérivée fonctionnelle*, peut dépendre de

f. Pour une définition mathématique précise, renvoyons à [2], où cette dérivée est dite de Fréchet-Volterra. Posons, selon des notations usuelles en physique :

$$\frac{\delta U}{\delta f^{\alpha}}=\varphi(\alpha).$$

t et τ étant fixés, il est immédiat que la dérivée fonctionnelle de la sortie y de Σ est donnée par le premier noyau :

$$(2)\qquad \frac{\delta y}{\delta u^{\sigma_1}}=\sum_{\nu_1\geq 0}\frac{(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_1\,!}\,\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu_1}A_1\,w_0(t,\,\tau,\,q)\,|_{q=a}.$$

PROPOSITION 2. — *Le noyau de Volterra d'ordre s s'écrit :*

$$w_s(t,\,\sigma_s,\,\ldots,\,\sigma_1,\,\tau,\,a)$$
$$=\sum_{\nu_1,\,\ldots,\,\nu_s\geq 0}\frac{(\sigma_s-\tau)^{\nu_s}\ldots(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_s\,!\ldots\nu_1\,!}\,\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu_s}A_1\ldots ad_{A_0}^{\nu_1}A_1\,w_0(t,\,\tau,\,q)\,|_{q=a}$$
$$=\sum_{\nu_1,\,\ldots,\,\nu_s\geq 0}\frac{(\sigma_s-\tau)^{\nu_s}\ldots(\sigma_1-\tau)^{\nu_1}}{\nu_s\,!\ldots\nu_1\,!}\,\frac{d^{\nu_s}}{d\theta_s^{\nu_s}}\,\frac{\delta}{\delta u^{\theta_s}}\ldots\frac{d^{\nu_2}}{d\theta_2^{\nu_2}}\,\frac{\delta}{\delta u^{\theta_2}}\,\frac{d^{\nu_1}}{d\tau^{\nu_1}}\mathscr{H}_1\Bigg|_{\substack{u=0\\ \theta_s=\ldots\theta_2=\tau\\ q=a}}.$$

Démonstration. — Nous l'esquissons pour $s=2$ en montrant que :

$$ad_{A_0}^{\nu_2}A_1\,ad_{A_0}^{\nu_1}A_1\,w_0\,|_{q=a}=\frac{d^{\nu_2}}{d\theta_2^{\nu_2}}\,\frac{\delta}{\delta u^{\theta_2}}\,\frac{d^{\nu_1}}{d\tau^{\nu_1}}\mathscr{H}_1\Bigg|_{\substack{u=0\\ \theta_2=\tau\\ q=a}}.$$

Considérons $ad_{A_0}^{\nu_1}A_1\,w_0 \quad =d^{\nu_1}/d\tau^{\nu_1}\,\mathscr{H}_1$ comme une fonctionnelle de u. Comme en (2), il vient :

$$\frac{\delta}{\delta u^{\theta}}\left(\frac{d^{\nu_1}}{d\tau^{\nu_1}}\mathscr{H}_1\right)\Bigg|_{\substack{u=0\\ q=a}}=\sum_{\nu\geq 0}\frac{(\theta-\tau)^{\nu}}{\nu\,!}\,\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu}A_1\left(\frac{d^{\nu_1}}{d\tau^{\nu_1}}\mathscr{H}_1\right)\Bigg|_{\substack{u=0\\ q=a}}.$$

Par analogie avec (1), qui a permis bien des applications, nous appellerons les formules des propositions 1 et 2 *secondes formules fondamentales.*

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BOYD, L. O. CHUA et C. A. DESOER, *Analytical Foundations of Volterra series*, Memo. UCB/ERL M84/14, Electron. Res. Lab., University of California, Berkeley, février 1984.

[2] M. D. DONSKER et J.-L. LIONS, *Acta Math.*, 108, 1962, p. 147-228.

[3] M. FLIESS, *Bull. Soc. Math. Fr*, 109, 1981, p. 3-40.

[4] M. FLIESS, *Proc. IXth I.F.A.C. World Congr.*, Budapest, juillet 1984.

[5] M. FLIESS, M. LAMNABHI et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, *I.E.E.E. Trans. Circuits Systems*, 30, 1983, p. 554-570.

[6] L. M. GARRIDO, *J. Math. Physics*, 10, 1969, p. 1045-1056.

[7] P. LÉVY, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[8] W. J. RUGH, *Nonlinear System Theory*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[9] W. THIRRING, *Lehrbuch der mathematischen Physik* 1, *Klassische dynamische Systeme*, Springer, Wien, 1977, traduction anglaise : *A Course in Mathematical Physics* 1, *Classical Dynamical Systems*, Springer, New York, 1978.

[10] C. A. UZES, *J. Math. Physics*, 19, 1978, p. 2232-2238.

[11] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[12] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, 1, Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Laboratoire des Signaux et Systèmes,
C.N.R.S.-E.S.E., plateau du Mouton, 91190 *Gif-sur-Yvette.*

Avant d'introduire le problème de la commande optimale singulière proprement dit, il est peut-être bon de situer l'étude qui va être faite dans le vaste domaine de la commande optimale. Pour cela, on citera un paragraphe d'une critique faite par Berkovitz, au sujet de livres récents sur la commande optimale.

"The principal questions associated with a control problem are the following. First, do there exist controls u in the set of allowable controls such that the target set will be attained? This isthe controllability problem. If the answer to the first question is affirmative, does there exist a u* that minimizes the functional? This is the existence problem. Finally, if the problem has a solution, find necessary conditions that will be useful in actually finding the solution or in characterizing the solution qualitatively in a useful way".

C'est précisément ce dernier thème qui sera étudié ici, dans le cas particulier des problèmes singuliers.

B. COMMANDE OPTIMALE SINGULIERE

INTRODUCTION

Considérons le système

$$\Sigma' \begin{cases} \dot{q}(t) = F(t, q; u) \\ y(t) = h_0(q(t)) \end{cases} \qquad , \; q(0) = q_0$$

L'état q appartient à une variété analytique Q de dimension finie, par exemple $\mathbb{R}^N$. Le champ de vecteurs F est analytique par rapport aux variables $q^1, \ldots q^N$ et au vecteur commande $u = (u_1, \ldots u_m)$. La fonction de sortie $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique. On s'intéresse dans ce qui suit au problème de Mayer suivant, avec un temps terminal fixé T et des contraintes terminales (1) : Trouver une commande $u = (u_1, \ldots u_m)$ qui minimise la sortie $y(T) = h_0(q(T))$ et telle que $h_i(q(T)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$; les fonctions h_i, $i = 1, \ldots n : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sont, elles aussi, supposées analytiques. Enfin les composantes $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ à valeurs dans un ensemble donné U sont supposées analytiques par morceaux sur [0,T] avec un nombre fini de points de commutation.

Nous nous intéressons ici à la classe des problèmes singuliers. D'une façon générale, un problème de commande optimale est dit singulier dès que le Principe du Maximum est trivialement satisfait sur une portion de trajectoire. Les cas les plus communs comportant des arcs singuliers sont les problèmes de Mayer pour lesquels la fonction F est linéaire en la commande scalaire u(t), $F(t, q; u) = A_0(q) + u(t)A_1(q)$. L'hamiltonien associé et la fonction de commutation Φ s'écrivent respectivement

$H = \langle p, A_0(q) + u A_1(q) \rangle$ et $\Phi = \langle p, A_1(q) \rangle$, p étant le vecteur adjoint. Le problème est dit singulier dès que la fonction Φ s'annule sur des sous-intervalles $(t_a, t_b) \subset [0, T]$; les arcs extrémaux sont dits singuliers sur (t_a, t_b) et non-singuliers ailleurs. Si u est telle que $|u(t)| < K$, la condition nécessaire du premier ordre est satisfaite sur l'arc singulier :

$\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$ et de plus, sur cet intervalle, $\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} \equiv 0$. On ne sait donc plus, dans ce cas, distinguer un maximum d'un minimum.

Deux types de questions apparaissent : l'une concernant l'optimalité de l'arc (ou des arcs) singulier(s) sur l'intervalle considéré, l'autre concernant l'optimalité en un point de jonction entre un arc singulier et un arc non singulier. Cette étude a commencé dans les années soixante avec les travaux de Tait [t 1], Kelley [k 1], Johnson [j 2], Goh [g 3], Robbins [r 1], Kelley - Knopp et Mayer [k 2], Contensou [c 1]. De nouveaux tests d'optimalité ont été obtenus, notamment une condition nécessaire d'ordre deux, utilisée par la suite avec succès par les ingénieurs appelée condition de Legendre - Clebsch généralisée ou encore , test de Kelley - Contensou. On rencontre souvent aussi celle appelée de Jacobson-Gabasov. En même temps, des conditions à la jonction entre arc singulier et non-singulier sont proposées [m 2, b 4]. Les articles de Gabasov et Kirillova [g 1] et de Marchall et Contensou [m 1] ainsi que le livre de Bell et Jacobson [b 2] résument cette période d'intensive recherche sur le sujet et donnent une bibliographie plus étendue. Plus récemment, sont soulevés deux importants problèmes : l'un lié à l'utilisation de définitions confuses de la notion d'ordre [ℓ 3] et l'autre à des hypothèses trop fortes faites lorsque des contraintes terminales sont imposées au problème de commande [k 4]. Si Lewis propose une nouvelle définition de l'ordre (ordre intrinsèque et ordre local) et si Krener obtient de nouvelles conditions nécessaires sans l'hypothèse trop forte de normalité, on relève une non-unicité dans cet ensemble de travaux. Comme le précise Lewis, une troisième définition de l'ordre serait nécessaire pour les problèmes où l'hypothèse de normalité n'est pas imposée.

On propose ici un contexte nouveau pour la commande optimale singulière. De nouvelles définitions d'ordre seront données. Elles seront exprimées en fonction des champs de vecteurs associés au problème de commande sans faire directement intervenir le vecteur adjoint (l'hypothèse de normalité est en fait liée à l'unicité du vecteur adjoint extrémal). De même, on proposera une nouvelle interprétation des conditions nécessaires d'optimalité d'ordre supérieur (deuxième et troisième) ainsi que de nouvelles conditions aux jonctions en relation avec les travaux récents de Bortins [b11]. Il y a eu en théorie du contrôle depuis une quinzaine d'années un intérêt considérable dans l'utilisation de crochets de Lie de champs de vecteurs (voir par exemple Sussman [s4] pour caractériser des propriétés fondamentales comme la contrôlabilité ou l'accessabilité ; citons à ce sujet par exemple les travaux importants de Lobry [ℓ4], de Hermann et Krener [h2] ou plus récemment encore ceux de Bonnard [8]. En commande optimale singulière, cette approche a été utilisée par Krener [k4] pour les systèmes linéaires en la commande (voir aussi Brockett [b14]). Knobloch [k3] a ensuite généralisé ces résultats en obtenant une théorie complète des conditions nécessaires d'ordre deux. L'auteur donne de nouvelles conditions nécessaires, peut être plus adaptées aux applications, en mettant en évidence des redondances dans les formulations classiques. Des résultats importants sont aussi obtenus dans le cas d'une entrée vectorielle. Néanmoins, son approche fait intervenir un formalisme mathématique complexe. On retrouvera ici les principaux résultats.

Le principe de notre méthode est simple : on utilise le nouveau développement fonctionnel du chapitre précédent pour exprimer celui de la variation à l'instant T de la sortie y de Σ' lorsque une variation $\delta u(t)$ est imposée au système étudié. Du choix de $\delta u(t)$ découlera l'ensemble des conditions nécessaires obtenues. Notons enfin que l'utilisation des séries de Volterra est naturelle pour ce type de problème. C'est en effet dans ce cas (T fixé) l'analogue des séries de Taylor (voir Brockett [b14] et Fliess [f5].

Les résultats obtenus seront appliqués à des problèmes de commande en mécanique du vol issus du livre de Vinh [v1].

I . GENERALITES

I.1 Formalisme hamiltonien .

I.2 Quelques notations et rappels:

a) Commande, trajectoire et vecteurs adjoints extremaux.

b) Conditions necessaires d'optimalité du premier ordre.

I.3 Propriétés de l'opérateur ad_{A_0} .

I.4 Quelques identités remarquables.

I.5 Sur la notion d'ordre d'un arc .

I.1. - Formalisme hamiltonien

L'hamiltonien associé au problème de commande Σ' s'écrit

$$H = \langle p(t), F(t,q,u) \rangle$$

où $p(t) \in T^*_{q(t)}\mathcal{Q}$ (l'espace cotangent au point $q(t)$) est le *vecteur adjoint*. Dans une carte locale où $p = (p_1, \ldots p_N)$, on obtient

$$H = \sum_{k=1}^{N} p_k(t)\, F^k(t,q,u).$$

Rappelons le principe du Maximum (voir par exemple, Pontriaguine et coll. [P1]) pour le problème de Mayer énoncé plus haut :

Principe du Maximum : Si (u(t), q(t)) est une solution du problème, il existe un vecteur adjoint $p(t) \in T^*_{q(t)}\mathcal{Q}$ absolument continu et non identiquement nul tel que, dans une carte locale,

$$\dot{p}(t) = - p^T(t)\, \frac{\partial F}{\partial q}\left(t, q(t), u(t)\right)$$

avec la condition de transversalité, $p(T) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \dfrac{\partial k_i}{\partial q}(q(T))$, $\nu_0 \geqslant 0$
et vérifiant de plus

$$p^T(t)\, F(t,q(t),u) \geqslant p^T(t)\, F(t,q(t),u(t)) \;, \quad \forall u \in U .$$

En utilisant le formalisme hamiltonien, si (u(t), q(t)), est une solution du problème, les équations suivantes, appelées équations de Hamilton, sont vérifiées dans une carte locale $(q^1, \ldots q^N, p_1, \ldots, p_N)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{q}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}\left(t, p(t), q(t), u(t)\right) \;, & q(0) = q_0 \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\left(t, p(t), q(t), u(t)\right), & p(T) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \nu_i \frac{\partial k_i}{\partial q}(q(T)) \end{array}\right. \qquad (2)$$

et de plus $\quad H\left(t, p(t), q(t), u(t)\right) = \min_{u \in U} H\left(t, p(t), q(t), u\right) \qquad (3)$

Si $u(t) \in \text{Int}\, U$ (l'intérieur de U), pour tout $t \in [0,T]$, alors

i) $H_u(t, p(t), q(t), u(t)) = 0 \quad , \forall t \in [0,T]$

et ii) $H_{uu}(t, p(t), q(t), u(t))$ est semi-définie positive $, \forall t \in [0,T]$.

Le problème de Mayer Σ' est dit *singulier* si la matrice $H_{uu}(t,p(t), q(t),u(t))$ n'est pas de rang maximal sur un sous-intervalle $(t_a,t_b) \subset [0,T]$.

I.2 - Quelques notations et quelques rappels.

a - Commande, trajectoire et vecteur(s) adjoint(s) extrémaux.

Dans la suite, u(t) et q(t), $t \in [0,T]$ désignant *une* solution de

$$\begin{cases} \dot{q} = F(q,u,t) \\ y(t) = R_0(q(t)) \end{cases} \quad , \quad q(0) = q_0$$

et seront appelés respectivement *commande de référence* et *trajectoire de référence* . Si de plus, il existe $p(t) \in T^*_{q(t)} Q$, $t \in [0,T]$ vérifiant la deuxième équation de Hamilton (2) et l'égalité (3), la commande u(t) et la trajectoire correspondante q(t) seront notées $\bar{u}(t)$ et $\bar{q}(t)$ et appelées respectivement *commande extrémale* et *trajectoire extrémale*. De même p(t) sera noté $\bar{p}(t)$ et appelé *vecteur adjoint extrémal*.

Toute quantité évaluée le long d'une solution extrémale $(\bar{u}(t),\bar{q}(t),\bar{p}(t))$ sera surlignée ; par exemple, l'expression $H_u(t,\bar{u}(t),\bar{q}(t),\bar{p}(t))$ sera simplement notée $\bar{H}_u$.

b- Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre

Considérons deux champs de vecteurs G et $G' : Q \times [0,T] \to TQ$
On peut définir (voir par exemple Helgason [*h*1] et la bibliographie citée) un nouveau champ de vecteurs noté [G,G'] défini dans une carte locale par

$$[G,G'] = G\left(\frac{\partial G'}{\partial q} + \frac{\partial G'}{\partial t}\right) - G'\left(\frac{\partial G}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

Il est facile de vérifier que cette définition est indépendante du choix des coordonnées (q,t). C'est une opération naturelle dans les groupes de Lie.

Choisissons en particulier le champ de vecteurs définissant Σ' :

$$A_o = \sum_{k=1}^{N} F^k(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Le résultat suivant est bien connu :

<u>Lemme 1</u> : Pour une solution p(t), $t \in [0,T]$, *arbitraire* de (2),

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} \langle p(t), G\rangle = \langle p(t), ad^\nu_{A_o} G\rangle \quad , \nu \geq 0 \ .$$

On rappelle que $\quad ad^\nu_{A_o} A_1 = [A_o , ad^{\nu-1}_{A_o} A_1] \quad$ avec $\quad ad^0_{A_o} A_1 = A_1$.

Désignons par A_1^i, i = 1,...,m, les champs de vecteurs

$$\sum_{k=1}^{N} F^k_{u_i}(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^k}$$

où $F^k_{u_i}$ dénote la dérivée partielle par rapport à u_i de F^k.
L'expression

$$\langle p(t), A_1^i\rangle$$

est alors la dérivée partielle par rapport à u_i de l'hamiltonien

$$H = \langle p(t), F(t,q,u)\rangle$$

D'après le lemme précédent on obtient :

<u>Lemme 2</u> : Pour une solution *arbitraire* p(t), $t \in [0,T]$ de (2)

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial u_i} = \langle p(t), ad^\nu_{A_o} A_1^i\rangle$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial u_i} = \langle p(t), \frac{\partial}{\partial u_i} ad^\nu_{A_o} A_1^i\rangle \ .$$

Nous aurons besoin aussi de l'identité suivante :

Lemme 3 : Pour une solution *arbitraire* p(t), t ∈[0,T], de (2),

$$\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)^T-\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)^T$$

$$= - \langle p(t)\,,\ [ad^{\nu-1}_{A_0} A^i_1\,,\ ad^{\nu}_{A_0} A^i_1] \rangle \quad , \ \nu > 1 \ .$$

Preuve : D'après le lemme précédent, $\frac{\partial}{\partial p}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial u_i} = ad^{\nu}_{A_0} A^i_1$

et $\quad \frac{\partial}{\partial q}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial u_i} = \langle p(t)\,,\ \frac{\partial}{\partial q}\, ad^{\nu-1}_{A_0} A^i_1 \rangle$

Si bien que
$$\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial u_i}\right)^T = \langle p(t),\ ad^{\nu}_{A_0} A^i_1\ ad^{\nu-1}_{A_0} A^i_1 \rangle \ .$$

Dans la suite, ainsi que dans les autres chapitres, sauf le dernier, on suppose que u(t) ∈ Int U . Avec les notations précédentes, le Principe du Maximum s'écrit :

Lemme 4 : Si $\bar{p}(t)$, t ∈[0,T] est un vecteur adjoint extrémal alors

i) $\langle \bar{p}(t)\,,\ \bar{A}^i_1 \rangle = 0 \qquad , i = 1, \ldots, m \ , \quad t \in [0,T] \quad$ et

ii) $\langle \bar{p}(t)\,,\ \overline{ad^{\nu}_{A_0} A^i_1} \rangle = 0 \qquad , i = 1, \ldots, m \ , \quad t \in [0,T]$.

Remarque : Nous verrons dans le chapitre suivant pourquoi ces conditions nécessaires sont appelées conditions nécessaires du premier ordre. Elles découlent en effet naturellement du premier noyau de Volterra d'un certain développement fonctionnel alors que les conditions nécessaires d'ordre supérieur proviendront des noyaux d'ordre supérieur de ce même développement.

On remarque, dès à présent, que l'opération sur les champs de vecteurs qui consiste à effectuer le crochet de Lie avec A_0, notée ad_{A_0}, est une opération fondamentale dans cette étude. Ainsi, avant de poursuivre, allons-nous en donner quelques propriétés (C'est l'équivalent de l'opérateur Γ de [k3]).

I.3 - Propriétés de l'opérateur ad_{A_0} .

Soit G un champ de vecteurs $G = \sum_{k=1}^{N} G^k(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^k}$,analytique. Le champ de vecteurs ad_{A_0} G dépend de u mais aussi de $u^{[1]}$, la dérivée totale de u par rapport à t. De même, après k applications de cet opérateur le champ de vecteurs résultant $ad_{A_0}^k$ G contiendra $u^{[j]}$, j = 1,...,k où $u^{[j]}$ dénote la i-ième dérivée totale par rapport à t de u. On montre facilement les propriétés suivantes

<u>Lemme 5</u> : i) $\frac{\partial}{\partial u_i} ad_{A_0} G = ad_{A_i} G + ad_{A_0} \frac{\partial G}{\partial u_i}$

ii) $\frac{\partial}{\partial u_i^{[k]}} ad_{A_0} G = \frac{\partial G}{\partial u_i^{[k-1]}} + ad_{A_0} \frac{\partial G}{\partial u_i^{[k]}}$, $k > 0$,

pour i = 1,...,m.

La propriété suivante est aussi très importante pour la suite :

<u>Lemme 6</u> : Soit u(t) une commande de référence telle qu'elle a été définie plus haut, si G = 0 pour t ∈[0,T] alors ad_{A_0} G = 0, pour t ∈ [0,T].

<u>Preuve</u> : Si G est identiquement nul sur [0,T], $\langle p(t), G \rangle$ et $\frac{d}{dt}\langle p(t), G\rangle$ sont aussi identiquement nuls pour une solution *arbitraire* p(t) de l'équation de Hamilton (2). D'après le lemme 1 $\langle p(t), ad_{A_0} G \rangle$ est nécessairement nul sur l'intervalle considéré et donc $ad_{A_0} G$ l'est aussi.

Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $ad_{A_0}^{\nu} A_i$, $\nu \geq 0$ i = 1,...,m *le long* de la solution (u(t),q(t)) de référence, i.e. les champs de vecteurs $ad_{A_0}^{\nu} A_i$ dépendant de (t,u,q) sont évalués au point (t,u(t), q(t)). On suppose que l'intervalle [0,T] est suffisamment petit pour que la dimension de $\mathcal{L}$ soit constante sur cet intervalle et que $\mathcal{L}$ soit engendré par des éléments fixés de la forme $ad_{A_0}^{\nu} A_1^i$, $\nu \geq 0$, $i = 1,\dots,m$. A partir du lemme précédent on montre :

Lemme 7 : Soit G un champ de vecteurs analytique, si $G \in \mathcal{L}$ alors $ad_{A_0} G \in \mathcal{L}$.

Preuve : Si $G \in \mathcal{L}$ alors il existe b_ν, $\nu = 1,\dots, s$ de la forme précédente, tels que $G = \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu(t) b_\nu$. Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme précédent à $\hat{G} = G - \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu(t)\, b_\nu$.

Nous commencerons l'étude des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas où la commande u est scalaire. La généralisation au cas vectoriel donne des conditions analogues sur chaque composante singulière, mais de nouvelles apparaissent associées aux contributions croisées. Ceci fera l'objet d'un autre paragraphe. Avant de poursuivre, introduisons une nouvelle définition des ordres d'un arc singulier ainsi que quelques identités remarquables, ces deux points étant essentiels aussi bien pour l'analyse d'un arc singulier que pour l'analyse à la jonction entre un arc singulier et un arc non-singulier.

I.4 - Quelques identités remarquables.

Le lemme suivant (voir [k 4] par exemple) est à la base des identités remarquables que nous obtiendrons :

Lemme 8 : x et y étant deux variables non commutatives,

i) $$[ad_x^\mu y, ad_x^\nu y] = (-1)^\mu \sum_{\tau=0}^{\mu} (-1)^\tau \binom{\mu}{\tau} ad_x^\tau [y, ad_x^{\mu+\nu-\tau} y]$$

ii) $$ad_x^i [ad_x^k y, ad_x^j y] = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m} [ad_x^{k+m} y, ad_x^{j+i-m} y]$$

En plus des champs de vecteurs A_0 et A_1 définis plus haut, introduisons A_2 pour dénoter le champ de vecteurs $\sum_{k=1}^{N} F^k_{uu} \frac{\partial}{\partial q^k}$, F^k_{uu} étant la dérivée partielle d'ordre deux par rapport à u de F^k (u est ici supposée scalaire) .

<u>Lemme 9</u> : i) $\frac{\partial}{\partial u} ad^{\nu}_{A_0} A_1 = ad^{\nu}_{A_0} A_2 + \sum_{1\leq \mu \leq \nu} \binom{\nu}{\mu} [ad^{\mu-1}_{A_0} A_1 , ad^{\nu-\mu}_{A_0} A_1]$, $\nu > 0$

ii) $\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} ad^{\nu}_{A_0} A_1 = \binom{\nu}{\alpha} ad^{\nu-\alpha}_{A_0} A_2 + \sum_{1\leq \sigma \leq \nu-\alpha} \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha} [ad^{\sigma-1}_{A_0} A_1 , ad^{\nu-\sigma-\alpha}_{A_0} A_1]$,

$\alpha \geq 0$, $\nu > \alpha$.

L'expression $\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} ad^{\nu}_{A_0} A_1$ sera notée $B_{\alpha,\nu}$.

<u>Preuve</u> : L'égalité i) est vraie pour $\nu = 1$ d'après le lemme 5 i). Supposons qu'elle soit vraie pour ν,

$$\frac{\partial}{\partial u} ad^{\nu+1}_{A_0} A_1 = \frac{\partial}{\partial u} [A_0 , ad^{\nu}_{A_0} A_1]$$

$$= [A_1 , ad^{\nu}_{A_0} A_1] + [A_0 , \frac{\partial}{\partial u} ad^{\nu}_{A_0} A_1]$$

ou encore, d'après l'hypothèse de récurrence.

$$= [A_1 , ad^{\nu}_{A_0} A_1] + [A_0 , ad^{\nu}_{A_0} A_2] + \sum_{1\leq \mu \leq \nu} \binom{\nu}{\mu} [A_0 , [ad^{\mu-1}_{A_0} A_1 , ad^{\nu-\mu}_{A_0} A_1]] .$$

Enfin, en utilisant le lemme 8ii), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u} ad^{\nu+1}_{A_0} A_1 = ad^{\nu+1}_{A_0} A_2 + [A_1 , ad^{\nu}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{1\leq \mu \leq \nu} \binom{\nu}{\mu} [ad^{\mu}_{A_0} A_1 , ad^{\nu-\mu}_{A_0} A_1] + \sum_{0\leq \mu \leq \nu-1} \binom{\nu}{\mu+1} [ad^{\mu}_{A_0} A_1 , ad^{\nu-\mu}_{A_0} A_1]$$

Après avoir groupé le deuxième et le troisième terme puis fait le changement de paramètre $\mu' = \mu+1$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u} ad^{\nu+1}_{A_0} A_1 = ad^{\nu+1}_{A_0} A_2 + \sum_{1\leq \mu' \leq \nu} \left(\binom{\nu}{\mu'-1} + \binom{\nu}{\mu'} \right) [ad^{\mu'-1}_{A_0} A_1 , ad^{\nu+1-\mu'}_{A_0} A_1]$$

$$+ [ad^{\nu}_{A_0} A_1 , A_1]$$

ou encore

$$= ad^{\nu+1}_{A_0} A_2 + \sum_{1\leq \mu \leq \nu+1} \binom{\nu+1}{\mu} [ad^{\mu-1}_{A_0} A_1 , ad^{\nu+1-\mu}_{A_0} A_1]$$

La propriété i) est donc vraie pour $\nu+1$.

La propriété ii) est obtenue par double récurrence. Supposons d'abord α fixe, et la propriété vraie pour ν :

$$\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} \mathrm{ad}^{\nu+1}_{A_0} A_1 = \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} [A_0, \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1] = [A_0, \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1] .$$

La suite de la démonstration est exactement identique à la précédente. Fixons maintenant ν, et supposons la propriété vraie pour $\alpha < \nu-1$ (elle est vraie pour $\alpha = 0$: c'est en effet la propriété i) ci-dessous).

D'après le lemme 5ii),

$$\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha+1]}} \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1 = \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} \mathrm{ad}^{\nu-1}_{A_0} A_1 + [A_0, \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha+1]}} \mathrm{ad}^{\nu-1}_{A_0} A_1]$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha+1]}} \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1 = \binom{\nu-1}{\alpha} \mathrm{ad}^{\nu-\alpha-1}_{A_0} A_1 + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-1} \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha} [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-1}_{A_0} A_1]$$

$$+ \binom{\nu-1}{\alpha+1} \mathrm{ad}^{\nu-\alpha-1}_{A_0} A_1 + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-2} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha+1} [A_0, [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-2}_{A_0} A_1]]$$

Le premier et le troisième terme regroupés donnent $\binom{\nu}{\alpha+1} \mathrm{ad}^{\nu-(\alpha+1)}_{A_0} A_1$; Notons (I) le deuxième terme et (II) le quatrième. D'après le lemme 8)ii,

$$(II) = \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-2} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-2}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-2} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-1}_{A_0} A_1]$$

En utilisant l'identité $\binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} = \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha+1} + \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha}$ on obtient:

$$(I) + (II) = \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-2} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-2}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-2} \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha+1} \binom{\nu-1}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-1}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-1} \binom{\sigma+\alpha-1}{\alpha} \binom{\nu}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-1}_{A_0} A_1]$$

Posons enfin $\sigma' = \sigma+1$ dans la première expression et additionnons deux à deux les quantités restantes, il vient :

$$(I) + (II) = \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha-1} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha+1} \binom{\nu}{\sigma+\alpha+1} [\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha-1}_{A_0} A_1] .$$

Lemme 10 : $$B_{j,\,i+j} = \sum_{\rho=0}^{i} \binom{\rho+j-1}{\rho} \, ad^{\rho}_{A_0} B_{0,\,i-\rho} \quad , \; j>0 \; .$$

Preuve : D'après le lemme 5 ii),

$$B_{j,\,i+j} = ad_{A_0} B_{j-1,\,i+j} + B_{j-1,\,i+j-1} \quad , \; j>0 \; .$$

Le lemme est obtenu en itérant cette formule.

Lemme 11 : $$[ad^{\mu}_{A_0} A_1 ,\, ad^{\nu}_{A_0} A_1] = (-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu+1} \binom{\mu+1}{\tau} (-1)^{\tau} \, ad^{\tau}_{A_0} B_{0,\,\nu+\mu+1-\tau}$$

Preuve : Utilisons le lemme 8i), on a :

$$[ad^{\mu}_{A_0} A_1 ,\, ad^{\nu}_{A_0} A_1] = (-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} \binom{\mu}{\tau} (-1)^{\nu} \, ad^{\tau}_{A_0} \, [A_1 ,\, ad^{\mu+\nu-\tau}_{A_0} A_1]$$

mais $[A_1 ,\, ad^{\mu+\nu-\tau}_{A_0} A_1] = B_{0,\,\mu+\nu-\tau+1} - ad_{A_0} B_{0,\,\mu+\nu-\tau}$ (lemme 5i),

Le lemme s'obtient en regroupant les deux termes

$$(-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} \binom{\mu}{\tau} (-1)^{\tau} \, ad^{\tau}_{A_0} B_{0,\,\mu+\nu-\tau+1}$$

et $$(-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} \binom{\mu}{\tau} (-1)^{\tau+1} \, ad^{\tau+1}_{A_0} B_{0,\,\mu+\nu-\tau} \; .$$

Lemme 12 : $$[ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{i+j+1}_{A_0} A_1] = \sum_{n=0}^{int(\frac{i}{2})} (-1)^n \binom{i-n}{n} \, ad^{i-2n}_{A_0} \, [ad^{n+j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{n+j+1}_{A_0} A_1]$$

Preuve : La propriété est vraie pour i = 0. Elle est vraie aussi pour i = 1 ; en effet, d'après l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned} [ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+2}_{A_0} A_1] &= [ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, [A_0 ,\, ad^{j+1}_{A_0} A_1]] \\ &= [A_0 ,\, [ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+1}_{A_0} A_1]] + [ad^{j+1}_{A_0} A_1 ,\, [A_0 ,\, ad^{j}_{A_0} A_1]] \end{aligned}$$

D'où $$[ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+2}_{A_0} A_1] = ad_{A_0} \, [ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+1}_{A_0} A_1] \; .$$

Supposons la propriété vraie pour i et montrons-la pour i+1 (j arbitraire).

$$[ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+i+2}_{A_0} A_1] = [A_0 ,\, [ad^{j}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+i+1}_{A_0} A_1]] + [ad^{j+i+1}_{A_0} A_1 ,\, ad^{j+1}_{A_0} A_1]$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$[ad^{j}_{A_0} A_1 , ad^{j+i+2}_{A_0} A_1] =$$

$$\sum_{n=0}^{int(\frac{i}{2})} (-1)^n \binom{i-n}{n} ad_{A_0}^{i-2n+1} [ad^{n+j}_{A_0} A_1 , ad^{n+j+1}_{A_0} A_1]$$

$$- \sum_{n=0}^{int(\frac{i-1}{2})} (-1)^n \binom{i-n-1}{n} ad_{A_0}^{i-1-2n} [ad^{n+j+1}_{A_0} A_1 , ad^{n+j+2}_{A_0} A_1]$$

En changeant n par n' = n+1 et en utilisant l'identité

$$int\left(\frac{i-1}{2}\right) + 1 = int\ \frac{i+1}{2}$$

On obtient :

$$[ad^{j}_{A_0} A_1 , ad^{j+i+2}_{A_0} A_1] =$$

$$\sum_{n=0}^{int(\frac{i}{2})} (-1)^n \binom{i-n}{n} ad_{A_0}^{i-2n+1} [ad^{n+j}_{A_0} A_1 , ad^{n+j+1}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{n=0}^{int(\frac{i+1}{2})} (-1)^n \binom{i-n}{n-1} ad_{A_0}^{i-2n+1} [ad^{n+j}_{A_0} A_1 , ad^{n+j+1}_{A_0} A_1]$$

La formule $\binom{i-n}{n-1} + \binom{i-n}{n} = \binom{i-n+1}{n}$ permet de conclure.

<u>Lemme 13</u> : $B_{0,\nu} = ad^{\nu}_{A_0} A_2 + \sum_{1 \leq \tau \leq int(\frac{\nu}{2})} (-1)^{\tau} \binom{\nu-\tau}{\tau} ad_{A_0}^{\nu-2\tau} [ad^{\tau-1}_{A_0} A_1, ad^{\tau}_{A_0} A_1]$

<u>Preuve</u> : L'identité est vraie pour $\nu = 0$. Supposons -la vraie pour ν.

$B_{0,\nu+1} = [A_1, ad^{\nu}_{A_0} A_1] + ad_{A_0} B_{0,\nu}$, d'après le lemme 5i).

En utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme12 pour $j = 0$ et $i = \nu-1$,

on obtient :

$$B_{0,\nu+1} = ad^{\nu+1}_{A_0} A_2$$

$$+ \sum_{n=0}^{int(\frac{\nu-1}{2})} (-1)^n \binom{\nu-n-1}{n} ad_{A_0}^{\nu-2n-1} [ad^{n}_{A_0} A_1 , ad^{n+1}_{A_0} A_1]$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{int(\frac{\nu}{2})} (-1)^{\tau} \binom{\nu-\tau}{\tau} ad_{A_0}^{\nu-2\tau+1} [ad^{\tau-1}_{A_0} A_1 , ad^{\tau}_{A_0} A_1]$$

Posons τ = n+1 dans la deuxième expression ; il vient :

$$
\begin{aligned}
B_{o,\nu+1} &= ad_{A_o}^{\nu+1} A_2 \\
&+ \sum_{\tau=1}^{int(\frac{\nu+1}{2})} (-1)^{\tau+1} \binom{\nu-\tau}{\tau-1} ad_{A_o}^{\nu-2\tau+1} [ad_{A_o}^{\tau-1} A_1, ad_{A_o}^{\tau} A_1] \\
&+ \sum_{\tau=1}^{int(\frac{\nu}{2})} (-1)^{\tau} \binom{\nu-\tau}{\tau} ad_{A_o}^{\nu-2\tau+1} [ad_{A_o}^{\tau-1} A_1, ad_{A_o}^{\tau} A_1]
\end{aligned}
$$

ou encore

$$B_{o,\nu+1} = ad_{A_o}^{\nu+1} A_2 + \sum_{\tau=1}^{int(\frac{\nu+1}{2})} (-1)^{\tau} \binom{\nu+1-\tau}{\tau} ad_{A_o}^{\nu+1-2\tau} [ad_{A_o}^{\tau-1} A_1, ad_{A_o}^{\tau} A_1]$$

<u>Remarque</u> : C'est ce dernier lemme qui permettra en particulier de mettre en évidence des redondances dans les formulations classiques des conditions nécessaires d'optimalité d'ordre deux.

On peut montrer de la même façon le lemme plus général suivant, à partir du lemme 5 ii) et du lemme 9:

<u>Lemme 14</u> : $B_{k,\nu} = ad_{A_o}^{\nu-k} A_2 + \sum_{1 \leq \tau \leq int\left(\frac{\nu-k}{2}\right)} (-1)^{\tau} \binom{\nu-\tau}{\tau+k} ad_{A_o}^{\nu-2\tau-k} [ad_{A_o}^{\tau-1} A_1, ad_{A_o}^{\tau} A_1]$

I.5 - Sur la notion d'ordre d'un arc.

Dans deux articles récents, Lewis [ℓ3] et Powers [p 2] donnent des définitions précises de l'ordre d'un problème singulier et de l'ordre d'un arc singulier, ces deux notions étant jusqu'alors plus ou moins confondues. Mais dans ces deux cas, soit les contraintes terminales sont inexistantes soit une hypothèse de normalité, concept vague jusqu'à l'article de Krener [k4], est faite : "Essentially, normality means that there exists sufficient local controllability around the trajectory reference to meet any terminal constraints that might be imposed without affecting the validity of the generalized Legendre-Clebsch condition". Et Gilbert et Berstein [g2] ajoutent : "Normality conditions are unpleasant because they are usually difficult to verify and may, on occasion, fail to be satisfied. This is why first-order conditions, which do not require normality, such as those due to Fritz-John (in mathematical Programming) and Pontriaquin (in optimal control) are popular". Pour se rendre compte de l'importance de cette définition Krener [k4] en donne une définition très précise pour les problèmes linéaires en la commande. On sait, dans ce cas, qu'on peut choisir la commande u=o comme commande de référence, sans restreindre la généralité . Normalité, signifie alors que l'espace $\mathcal{L}$, défini plus haut, est de dimension exactement N-1 sur tout l'intervalle considéré. Rappelons que, sur une trajectoire singulière , la dimension de $\mathcal{L}$ doit être strictement inférieure à N, sans aucune autre restriction. Imposer à la dimension de d'être égale à N-1, signifie qu'il existe un et un seul vecteur adjoint p(t) vérifiant la deuxième équation de Hamilton (2). Comme le précise Lewis [ℓ3], la non-unicité du vecteur adjoint extrémal, dans les problèmes plus généraux, rend confuses les définitions de l'ordre d'un arc singulier existantes. C'est pourquoi nous proposons ici une définition ne faisant pas intervenir directement le vecteur adjoint.

Avant de donner de nouvelles définitions, citons une phrase de [ℓ3] pour illustrer ce qui vient d'être dit :

"Singularity is strictly a property of extremals $(\bar{q}(.),\bar{p}(.),\bar{u}(.))$ and not of state-control pairs $(\bar{q}(.),\bar{u}(.))$ since for some such pair there may be more than one adjoint fonction $\bar{p}(.)$ making the triple extremal. This is a consequence of the nonuniqueness of ν_i in"(2).

<u>Définition 1</u> Soit u(t), t [0,T], une commande de référence et q(t) la trajectoire associée. Le couple (u(t),q(t)) sera dit d'ordre $r = 0$ si le système Σ' n'est pas linéaire en la commande ; il sera dit d'ordre $r(>0)$, si et seulement si,

$$[A_1, \mathrm{ad}^k_{A_0} A_1] \in \mathcal{L} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, 2(r-1)$$

et

$$[A_1, \mathrm{ad}^{2r-1}_{A_0} A_1] \notin \mathcal{L} \quad , \quad \forall t \in [0,T] .$$

<u>Remarque</u> : Cette définition est l'"analogue" de la définition de l'"ordre intrinsèque" de Lewis [ℓ 3] (encore appelé ordre du problème). Ces définitions sont équivalentes si, le couple de référence (u(t), q(t)) étant donné, il existe un et *un seul* vecteur adjoint solution de (2).

<u>Définition 2</u> : Soit $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$, une commande extrémale et $\bar{q}(t)$ la trajectoire associée. Le couple $(\bar{u}(t), \bar{q}(t))$ sera dit d'ordre s si et seulement si

i) $\bar{B}_{0,i} \in \bar{\mathcal{L}}$, $i = 0, \ldots, 2s-1$

et $\bar{B}_{0,2i} \notin \bar{\mathcal{L}}$, $\forall t \in [0,T]$;

ou bien

ii) $\bar{A}_2 \in \bar{\mathcal{L}}$, $\overline{[\mathrm{ad}^{i-1}_{A_0} A_1 , \mathrm{ad}^{i}_{A_0} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}}$, $i = 1, \ldots, s-1$

et $\overline{[\mathrm{ad}^{s-1}_{A_0} A_1 , \mathrm{ad}^{s}_{A_0} A_1]} \notin \bar{\mathcal{L}}$, $\forall t \in [0,T]$.

(Rappelons qu'une quantité est surlignée, lorsqu'elle est évaluée le long d'une solution $(\bar{u}(t),\bar{q}(t))$, $t \in [0,T]$, *extrémale*).

Remarque : D'après les lemmes 1 et 3,

$$< p(t) \, , \, B_{0,i} > = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial H}{\partial u} \qquad \text{où} \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = H_u = < p(t), A_1 >$$

et $$< p(t), \left[ad_{A_0}^{i-1} A_1 \, , \, ad_{A_0}^{i} A_1 \right] > =$$

$$\left(H_u^{[i]}\right)_q \left(H_u^{[i-1]}\right)_p - \left(H_u^{[i-1]}\right)_q \left(H_u^{[i]}\right)_p \; .$$

On voit donc que la définition 2 ii) est l'"analogue" de la définition 2.3 de Bortins [b 11], alors que la définition 2 i) est l'"analogue" de la définition 2.6 de l'"ordre local" de Lewis [ℓ3]. A priori, leur lien n'est pas clair ; elles sont pourtant équivalentes. Pour le voir, il suffit, bien sûr, de montrer qu'ici, i) et ii) sont équivalentes.

Lemme 15 : La définition 2i) est équivalente à la définition 2 ii)

Preuve : C'est immédiat à partir du lemme 13 pour la relation i) $\Rightarrow$ ii) et à partir du lemme 11 pour la réciproque.

Exemple : Reprenons l'exemple de [ℓ 3] avec ces nouvelles notations,

$$\begin{cases} \dot q^1 = q^2 u \\ \dot q^2 = u - q^1 \\ \dot q^3 = \left(q^1 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ y = q^3 \end{cases}$$

$t \in [t_0, t_1]$, $q^1(t_0) = \xi_1 \neq \frac{1}{2}$, $q^2(t_0) = \xi_2 \neq 0$ et $|u| \leq 1$.

L'arc extrémal $\bar{q}^1(t) = \frac{1}{2}$, $\bar{q}^2(t) = 0$, $\bar{u}(t) = \frac{1}{2}$, $\bar{\lambda}_1(t) = \bar{\lambda}_2(t) = 0$
est singulier. D'autre part,

$$A_0 = q^2 u \frac{\partial}{\partial q^1} + (u - q^1)\frac{\partial}{\partial q^2} + \left(q^1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial q^3} + \frac{\partial}{\partial t}$$

et $A_1 = q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2}$

$$[A_1, [A_0, A_1]] = -2q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} + 2\left[\left(q^1 - \frac{1}{2}\right) + (q^2)^2\right]\frac{\partial}{\partial q^3}$$

Il est facile de voir qu'ici $[A_1, [A_0, A_1]] \notin \mathcal{L}$, ainsi $\underline{r = 1}$
De plus,

$$\bar{A}_1 = \frac{\partial}{\partial q^2} \quad , \quad \overline{[A_0, A_1]} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^1}$$

et d'une façon générale,

$$\overline{\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1} = \lambda \frac{\partial}{\partial q^1} + \mu \frac{\partial}{\partial q^2} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si bien que

$$\bar{\mathcal{L}} = \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial q^1} + \mu \frac{\partial}{\partial q^2} \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Or,

$$\overline{[A_1, [A_0, A_1]]} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{[\mathrm{ad}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^2_{A_0} A_1]} = \rho + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^3}, \text{ avec } \rho \in \bar{\mathcal{L}}.$$

Ainsi, d'après la définition 2, comme $\overline{[A_1, \mathrm{ad}_{A_0} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}}$
et $\overline{[\mathrm{ad}_{A_0} A_1, \mathrm{ad}^2_{A_0} A_1]} \notin \bar{\mathcal{L}}$, on en déduit que $\underline{s = 2}$.

Il faut noter que cette valeur de s *ne dépend pas* du vecteur $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$. Autrement dit, si ce problème possèdait des contraintes, l'unité du vecteur adjoint n serait plus garantie mais la valeur de s serait la même pour *toute* solution ($\bar{u}$, $\bar{q}$, $\bar{\lambda}$) extrémale.

II . CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE

II.1 Introduction .

II.2 Variation de la commande concentrée en un point.

II.3 Lemmes fondamentaux

II.1 - Introduction :

De façon habituelle, imposons au système $\sum'$ une perturbation du type $u(t) + \delta u(t)$, $t \in [0,T]$. Les résultats du paragraphe A6 permettent de donner le développement fonctionnel, avec une grande précision, de la variation δy :

$$\delta y\,(t,\delta u) = y\,(t,\, u+\delta u) - y\,(t,u)$$

à l'instant T, pour un instant initial τ , $\tau \leq T$, arbitraire.

En effet, le système $\sum'$ devient

$$\begin{cases} \dot{q}\,(t) = F(t,q,u) + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!}\; F_{u^{(i)}}\,(t,q,u)\,\left(\delta u\,(t)\right)^{i} \\[2ex] y\,(t,\, u+\delta u) = h_o\,(q(t)) \end{cases}$$

et (4)

$$\delta y\,(T) = \delta_1 y\,(T) + \delta_2 y\,(T) + \delta_3 y\,(T) + o\,(|\delta u|^3)$$

avec

$$\delta_1 y\,(T) = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_1\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u\,(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$\begin{aligned}\delta_2 y\,(T) = & \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_2-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u\,(\sigma_1)\,\delta u\,(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_2\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u^2\,(\sigma_1)\, d\sigma_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_3 y\,(T) = & \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_3}\!\!\int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_3-\sigma_2)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_3-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a} \\ & \qquad \delta u\,(\sigma_1)\,\delta u\,(\sigma_2)\,\delta u\,(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3 \\ & + \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_2\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u^2(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_o}\, A_2\, e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u(\sigma_1)\,\delta u^2(\sigma_1)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, A_3\, e^{(\sigma_1-\tau)A_o}\, \omega_o\,(T,\tau,q)\big|_{q=a}\, \delta u^3(\sigma_1)\, d\sigma_1\,,\end{aligned}$$

où $q = (q^0, q^1, \ldots, q^N)$ et $a = (\tau,\, q^1(\tau), \ldots, q^N(\tau))$;

A_i sont les nouveaux (ils dépendent maintenant de u) champs de vecteurs

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} F^k(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^k} \quad , \quad A_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{i!} F^{\ell}_{u(i)}(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^k}$$

et
$$\varpi_0(T,\tau,a) = e^{(T-\tau)A_0} h_0(q)\big|_{q=a} .$$

Definition 3 : L'expression $\delta_i y(T)$ est appelée i-ème variation de la fonctionnelle y.

Rappelons un résultat d'analyse fonctionnelle [V3] :

Lemme 16 : Si $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ est minimisante, alors la première variation $\delta_1 y(T)$ est nulle, $\forall \tau \in [0,T]$.

On peut préciser le contenu de ce lemme en utilisant un sous-produit de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. En effet, utilisons la formule du paragraphe A4,il vient:

Lemme 17 : Si $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ est minimisante, alors

$$\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1 \, \varpi_0(T,\tau,q)\big|_{q=a} = 0 \quad , \quad \forall \nu \geqslant 0 , \quad \forall \tau \in [0,T] .$$

Remarque : Avec les notations du paragraphe A5, notons que

$$\delta_1 y(T) = \int_{\tau}^{T} \frac{\delta y}{\delta u^{\sigma_1}} \, \delta u(\sigma_1) \, d\sigma_1 \quad .$$

II.2. - <u>Variation de la commande concentrée en un point</u>.

Exprimons maintenant $\delta y(T)$ lorsque la variation $\delta u(t)$, $t \in [0,T]$ est "concentrée" en un point $\theta \in [0,T]$, arbitraire, c'est-à-dire telle que :

$$\delta u(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \notin [\theta \,, \theta + \omega(\varepsilon)] \qquad \text{avec} \ \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$$

Dans la suite, $\mathcal{U}$ désignera l'ensemble de ces variations vérifiant de plus $u(t) + \delta u(t) \in \mathrm{Int}\, U$.
De (4), il vient :

$$\delta y(T,\theta) = e^{(\theta-\tau)A_0}\, V(\varepsilon)\, e^{-(\theta-\tau)A_0}\, \tilde{w}_0(T,\tau,q)\big|_{q=a} \tag{5}$$

où *l'opérateur* $V(\varepsilon)$ est donné par

$$V(\varepsilon) = \delta_1 V + \delta_2 V + \delta_3 V + o(|\delta u|^3) \tag{5'}$$

avec

$$\delta_1 V = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \,,$$

$$\begin{aligned}\delta_2 V = {} & \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right) \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\, \delta u^2(\sigma_1)\, d\sigma_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_3 V = {} & \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_3}\!\!\int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_3-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_3-\theta)A_0}\right) \\ & \qquad \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\ & + \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right) \delta u^2(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T\!\!\int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right) \delta u(\sigma_1)\, \delta u^2(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & + \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_3\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\, \delta u^3(\sigma_1)\, d\sigma_1 \,.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le développement en puissance de de $V(\varepsilon)$; on notera V_k le coefficient de ε^k :

$$V(\varepsilon) := \sum_{k \geqslant 0} V_k \, \varepsilon^k$$

<u>Remarque</u> : L'expression $V(\varepsilon)\,\omega_0^-(T, \tau, q)$ doit être comparée à la "variation de la commande u", $\alpha(\varepsilon)q$, définie par Krener [k.4]. De même, l'expression $V_k\,\omega_0^-(T, \tau, q)$ est une formulation équivalente des dérivées par rapport à ε de $\alpha(\varepsilon)\,q$ que l'auteur cité note $\frac{d^k}{d\varepsilon^k}\alpha(0)q$.

Définissons enfin le sous-ensemble $\mathcal{P}_u$ *d'opérateurs différentiels* suivant :

<u>Définition 4</u> : $\mathcal{P}_u$ est l'ensemble des opérateurs différentiels D :

i) Il existe une variation $\delta u \in \mathcal{U}$
ii) Il existe un entier k
iii) Il existe un réel ξ strictement positif
tels que $$V(\varepsilon) = \xi\, D\, \varepsilon^k + o(\varepsilon^h)$$

Autement dit, $D \in \mathcal{P}_u$ ssi, D est le terme dominant, modulo un réel positif, d'*un* développement $V(\varepsilon)$.

On montre la propriété suivante :

<u>Proposition II.1</u> : $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_u$

<u>Preuve</u> : Soit $G \in \mathcal{L}$, on montre, (voir Krener [k 4, corollaire 4.5] ou Knobloch [k 3, p. 84]) qu'il existe une variation $\delta u \in \mathcal{U}$ telle que $V(\varepsilon) = \varepsilon^{2(\mu+1)} G + o(\varepsilon^{2(\mu+1)})$, μ étant la dimension de $\mathcal{L}$ (supposée constante sur l'intervalle considéré).

On peut maintenant exprimer de *façon générale* la condition nécessaire d'optimalité.

II.3 - Lemmes fondamentaux.

<u>Lemme 18</u> : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0,T] alors,

$$\forall \bar{D} \in \mathcal{P}_{\bar{u}} \quad , \quad \sum_{\nu \geq 0} \overline{\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} D\, \omega_0 (T,\tau,q)}\Big|_{q=a} \frac{(\theta-\tau)^{\nu}}{\nu!} \geq 0 \qquad (6)$$

pour tout $\tau \in [0,T]$ et tout $\theta \in [\tau,T]$.

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence directe de la définition de $\mathcal{P}_u$. En effet, $\bar{D}$ étant le terme dominant de $\bar{V}(\varepsilon)$, le lemme exprime la positivité de la variation $\delta y(T,\theta)$.

Choisissons en particulier, une variation $\delta u(t)$, $t \in [\tau,T]$, concentrée au point initial τ. La condition nécessaire d'optimalité du lemme précédent devient :

<u>Lemme 19</u> : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0,T] alors,

$$\forall \bar{D} \in \mathcal{P}_{\bar{u}} \quad , \quad \overline{D\omega_0 (T,\tau,q)}\Big|_{q=a} \geq 0 \quad , \forall \tau \in [0,T] .$$

De plus, supposons que l'opérateur différentiel D soit du premier ordre ; dans une carte locale, définissons le vecteur $p(\tau) \in T^*_{q(\tau)}\mathcal{G}$ par

$$p(\tau) = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau}, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^N} \right) .$$

On sait [δ1] que, sur la trajectoire extrémale, $\bar{p}(\tau)$ ainsi défini, est une solution de la deuxième équation de Hamilton. Il vient :

Lemme 20 : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ alors

$$\forall \bar{D} \in \mathcal{P}_{\bar{u}} \quad , \quad \langle \bar{p}(\tau), \bar{D} \rangle \geqslant 0 \quad , \forall \tau \in [0,T] ,$$

$\bar{p}(\tau)$ étant une solution de (2).

Pour se familiariser avec ces notations, rappelons ce que signifie l'expression

$$\langle \bar{p}(\tau), \bar{D} \rangle$$

dans une carte locale :

$D := \sum_{k=1}^{N} g^k(t,q,u) \frac{\partial}{\partial q^k}$, g^k, $k=1,\dots,N$ sont des fonctions analytiques par rapport à toutes les variables ; $p(\tau) = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial q^0}, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^N}\right)$

où $\omega_0(T,\tau,a) = e^{(T-\tau)A_0} h(q)\big|_{q=a}$.

Enfin, $\langle p(\tau), D \rangle = \sum_{k=1}^{N} g^k(\tau, a, u(\tau)) \frac{\partial \omega_0}{\partial q^k}$ et $\langle \bar{p}(\tau), \bar{D} \rangle$ exprime l'évalutation de cette quantité le long du couple extrémal $(\bar{u}(\tau), \bar{q}(\tau))$.

Exemple : Considérons par exemple le problème de Mayer suivant [g 1]

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = q^2 \\ \dot{q}^2 = u \\ \dot{q}^3 = -(q^1)^2 \\ y(t) = q^3(t) \end{cases} \quad , \quad q^1(0) = q^2(0) = 0$$

$t \in [0,1]$, $|u| < 1$.

La commande $\bar{u} = 0$ est une commande extrémale. Vérifions, par exemple, que

$$\langle \bar{p}(\tau), \bar{A}_1 \rangle = 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,1] .$$

Pour cela, calculons tout d'abord $\overline{\omega}_o(1,\tau,q)$ et $\bar{p}(\tau)$, on trouve

$$\overline{\omega}_o(1,\tau,q) = \overline{q^3} - (1-\tau)(\bar{q}^1)^2 - \bar{q}^2\bar{q}^1(1-\tau)^2 - \frac{(\bar{q}^2)^2}{3}(1-\tau)^3$$

et

$$\bar{p}(\tau) = \left(-2\bar{q}^1(1-\tau) - \bar{q}^2(1-\tau)^2 \;,\; -\bar{q}^1(1-\tau)^2 - 2\frac{\bar{q}^2}{3}(1-\tau)^3 \;,\; 1\right)$$

D'autre part $\bar{q}^1 = \bar{q}^2 = 0$; ainsi, $\bar{A}_1$ étant égal à $\frac{\partial}{\partial q^2}$

$$\langle \bar{p}(\tau), \bar{A}_1 \rangle = 0 \,, \quad \forall \tau \in [0,1] \,.$$

D'après ce qui précède, il est clair que la formulation des conditions nécessaires dépend du choix de la variation $\delta u(t)$. Dans la littérature, l'obtention des conditions nécessaires d'ordre supérieur fait appel à de nombreux types de variations, citons "les variations spéciales" [k 2], "les paquets de variations [g 1]", "les paquets de perturbations [a 1], etc... Pour l'étude des conditions nécessaires d'ordre deux, nous avons choisi celles de Knobloch [k 3] qui contiennent toutes celles citées. Nous utiliserons aussi celles de [s 2] et [s 3] parce qu'elles nous semblent bien adaptées aux formulations des conditions nécessaires d'ordre trois.

Remarque : Dans le cas où le problème de commande possède des contraintes terminales de la forme $h_i(q(T)) = 0$, $i = 1,\dots,n$, on définira $p(\tau) \in T^*_{q(\tau)}Q$ de la façon suivante,

$$p(\tau) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\tau}, \frac{\partial\omega}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial\omega}{\partial q^N}\right)$$

où $\omega(T,\tau,q) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \, h_i(q(T)) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \, e^{(T-\tau)A_o} h_i(q) \,, \; \nu_o \geq 0 \,.$

En effet, le problème revient à minimiser $y(T) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \, h_i(q(T))$ qui est égal à $h_o(q)$ à l'instant T pour toute condition initiale $\tau \in [0,T]$.

III . CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE D'ORDRE DEUX

III.1 Transformation sur la deuxième variation.

III.2 Variation de Knobloch.

III.3 Application.

III.4 Interprétation hamiltonienne des conditions nécessaires.

III.5 Condition de Jacobson-Gabasov.

III.6 Exemple.

Avant de subsituer des fonctions particulières $\delta u(t)$, appartenant à $\mathcal{U}$, dans (5) effectuons une transformation sur $\delta_2 V$

III.1 - Tansformation sur la seconde variation.

Propositions III.1 : L'expression

$$\delta_2 V = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u^2(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

peut encore s'écrire

$$\delta_2 V = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u^2(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} \left[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} , e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \right] \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

Preuve : Considérons uniquement le deuxième terme dans l'expression de $\delta_2 V$:

$$I = \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \right) \left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \right) \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 ,$$

et effectuons une intégration par partie en posant

$$\alpha = \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

et $$d\beta = e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_2 .$$

Il vient $I = \left(\int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right)^2$

$$- \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1) \int_\tau^{\sigma_1} e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_2$$

Permutons σ_1 et σ_2 dans la deuxième intégrale et ajoutons I aux deux membres on obtient

$$2 I = \left(\int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right)^2$$

$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} \left[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} , e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1 \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \right] \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 .$$

III.2 - Variation de Knobloch

Introduisons les variations suivantes, concentrées en un point $\theta \in [0,T]$, α étant un entier arbitraire,

$$\delta u(t) = \delta u^i_\alpha(t) \quad , \quad \theta + z_i \varepsilon \leq t < \theta + z_{i+1} \varepsilon \ , \text{ avec } 1 \leq i \leq M-1 ,$$

$$z_i \in \mathbb{R} \ , \ z_i \leq z_{i+1} \quad \text{et} \quad \delta u^i_\alpha(t) = \varepsilon^\pi \xi_i \frac{(t-\theta)^\alpha}{\alpha!} \ , \ \xi_i \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Les variations de Kelley, Kopp et Mayer [k 2] sont un cas particulier de ces variations. Par exemple, la "première variation spéciale" s'écrit

$$\delta u(t) = \begin{cases} a & \theta \leq t < \theta + \varepsilon^2 \\ 0 & \theta + \varepsilon^2 \leq t < \theta + 2\varepsilon - \varepsilon^2 \\ -a & \theta + 2\varepsilon - \varepsilon^2 \leq t < \theta + 2\varepsilon \end{cases}$$

donc ici, $z_1 = 0$, $z_2 = +\varepsilon$, $z_3 = 2 - \varepsilon$ et $z_4 = 2$,

$\alpha = \pi = 0$ et $\xi_1 = a$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = -a$.

Le lemme suivant qui est similaire au lemme 18.2 de [k.3], s'obtient ici très simplement en substituant les variations (7) dans (5'), $\delta_2 V$ étant donné par la proposition III.1.

<u>Lemme 21</u> : Pour toute variation δu définie par (7) on a :

$$\delta_1 V = \varepsilon^{\pi} \sum_{\nu \geq 1+\alpha} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \binom{\alpha}{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1} - \xi_i) \zeta_i^{\nu} \right) \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu-1-\alpha} A_1$$

et

$$\delta_2 V = \frac{\varepsilon^{2\pi}}{2} \Bigg\{ \sum_{\nu \geq 1+\alpha} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \binom{\alpha}{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1}^2 - \xi_i^2) \zeta_i^{\nu} \right) B_{\alpha,\, \nu-1-\alpha} \tag{8}$$

$$+ \sum_{\substack{\rho \geq \alpha+1 \\ \sigma \geq \alpha+1}} \frac{\varepsilon^{\rho+\sigma}}{\rho!\,\sigma!} \binom{\alpha}{\rho-1} \binom{\alpha}{\sigma-1} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq M} (\xi_{i-1} - \xi_i)(\xi_{j-1} - \xi_j) \zeta_i^{\rho} \zeta_j^{\sigma} \right) [\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\sigma} A_1]$$

$$\sum_{\substack{\rho \geq \alpha+1 \\ \sigma \geq \alpha+1}} \frac{\varepsilon^{\rho+\sigma}}{\rho!\,\sigma!} \binom{\alpha}{\rho-1} \binom{\alpha}{\sigma-1} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1} - \xi_i) \zeta_i^{\rho} \right) \left(\sum_{j=1}^{M} (\xi_{j-1} - \xi_j) \zeta_j^{\sigma} \right) \mathrm{ad}_{A_0}^{\rho} A_1 \ \mathrm{ad}_{A_0}^{\sigma} A_1 \Bigg\} ,$$

où $B_{\alpha,k}$ est le champ de vecteurs

$$B_{\alpha,k} = \binom{k}{\alpha} \mathrm{ad}_{A_0}^{k-\alpha} A_2 + \sum_{0 \leq \sigma \leq k-\alpha-1} \binom{\sigma+\alpha}{\alpha} \binom{\sigma+\alpha+1}{k} [\mathrm{ad}_{A_0}^{\sigma} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{k-\sigma-\alpha-1} A_1] .$$

<u>Remarque</u> : L'expression $B_{\alpha,k}$ obtenue est exactement celle du lemme 9

$$B_{\alpha,k} = \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}} \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1 .$$

<u>Preuve</u> : Remplaçons $\delta u(t)$, définie par (7), dans l'expression

$$\delta_1 V = \int_{\tau}^{T} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_1 e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u(\sigma)\, d\sigma ;$$

devient

$$\delta_1 V = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\theta+\zeta_i \varepsilon}^{\theta+\zeta_{i+1}\varepsilon} \sum_{k \geq 0} \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1 \frac{(\sigma-\theta)^k}{k!} \left(\varepsilon^{\pi} \xi_i \frac{(\sigma-\theta)^{\alpha}}{\alpha!} \right) d\sigma$$

ou encore

$$\delta_1 V = \varepsilon^{\pi} \sum_{k \geq 0} \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{k!\,\alpha!\,(k+\alpha+1)} \xi_i \left(\zeta_{i+1}^{k+1} - \zeta_i^{k+1} \right) \varepsilon^{k+1}$$

En posant $\nu = k+1$ et en réordonnant la sommation sur i, il vient :

$$\delta_1 V = \varepsilon^{\pi} \sum_{\nu \geq 0} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \binom{\alpha}{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1} - \xi_i) \zeta_i^{\nu} \right) \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu-1-\alpha} A_1$$

(on posera: $\xi_0 = \xi_M = 0$) .

Appliquons maintenant la proposition III.1

$\delta_\xi V$ peut alors s'écrire :

$$\delta_\xi V = \sum_{k\geq 0} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\theta + z_i \varepsilon}^{\theta + z_{i+1}\varepsilon} \frac{(\sigma_1-\theta)^k}{k!} \operatorname{ad}^k_{A_0} A_2 \left(\varepsilon^\pi \xi_i \frac{(\sigma_1-\theta)^\alpha}{\alpha!}\right)^2 d\sigma_1$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum_{k\geq 0} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\theta + z_i \varepsilon}^{\theta + z_{i+1}\varepsilon} \frac{(\sigma_1-\theta)^k}{k!} \operatorname{ad}^k_{A_0} A_1 \; \varepsilon^\pi \xi_i \frac{(\sigma_1-\theta)^\alpha}{\alpha!} d\sigma_1 \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum_{k,\ell\geq 0} \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{M-1} \int_{\theta + z_i \varepsilon}^{\theta + z_{i+1}\varepsilon} \int_{\theta + z_j \varepsilon}^{\theta + z_{j+1}\varepsilon} \frac{(\sigma_1-\theta)^k}{k!} \frac{(\sigma_2-\theta)^\ell}{\ell!} \left[\operatorname{ad}^k_{A_0} A_1 , \operatorname{ad}^\ell_{A_0} A_1\right] \right.$$
$$\left. \left(\varepsilon^\pi \xi_i \frac{(\sigma_1-\theta)^\alpha}{\alpha!}\right)\left(\varepsilon^\pi \xi_j \frac{(\sigma_2-\theta)^\alpha}{\alpha!}\right) d\sigma_1 \, d\sigma_2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum_{k,\ell\geq 0} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\theta + z_i \varepsilon}^{\theta + z_{i+1}\varepsilon} \int_{\theta + z_i \varepsilon}^{\sigma_2} \frac{(\sigma_1-\theta)^k}{k!} \frac{(\sigma_2-\theta)^\ell}{\ell!} \left[\operatorname{ad}^k_{A_0} A_1 , \operatorname{ad}^\ell_{A_0} A_1\right] \right.$$
$$\left. \left(\varepsilon^\pi \xi_i \frac{(\sigma_1-\theta)^\alpha}{\alpha!}\right)\left(\varepsilon^\pi \xi_j \frac{(\sigma_2-\theta)^\alpha}{\alpha!}\right) d\sigma_1 \, d\sigma_2 \right).$$

Il suffit alors d'intégrer et de regrouper certains termes pour obtenir (8).

III.3 - Application

Dans le lemme important suivant, nous particularisons, exactement comme dans le lemme 18.3 de [k.3], la perturbation δu pour montrer que, sous certaines conditions, les éléments $(-1)^{\frac{\mu}{2}} B_{0,\mu}$, μ étant un entier pair, appartiennent à $\mathcal{P}_u$.

Lemme 22 : Soit u(t), t ∈[0,T], une commande de référence et q(t) la trajectoire correspondante. Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel défini au paragraphe précédent et soit enfin μ , un entier pair. Si les champs de vecteurs suivants appartiennent à $\mathcal{L}$

i) $B_{\sigma,\sigma+\nu}$ pour $\sigma = 0, 1, \ldots$ et $\nu < \mu$

ii) $B_{\sigma,\sigma+\mu} - B_{0,\mu}$ pour $\sigma = 0, 1, \ldots$

iii) $[\mathrm{ad}^{\sigma}_{A_0} A_1 , \mathrm{ad}^{\rho}_{A_0} A_1]$ pour $\sigma + \rho < \mu - 1$

iv) $[\mathrm{ad}^{\sigma}_{A_0} A_1 , \mathrm{ad}^{\rho}_{A_0} A_1] - (-1)^{\sigma} B_{0,\sigma+\rho}$ pour $\sigma+\rho = \mu - 1$

alors $(-1)^{\frac{\mu}{2}} B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$.

Preuve : La première partie est identique à la démonstration du lemme 18.3 de [K3]. Soit d un entier tel que $\mathcal{L}$ soit engendré par $\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_1$, $\nu < d$. et choisissons un entier positif τ tel que

$$\mu + 1 + 2d \leq 2\tau \quad \text{et} \quad \mu + 1 \leq 2\tau$$

Etablissons d'abord que $\xi(\mu,\tau)\, B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$, où $\xi(\mu,\tau) \neq 0$ est un nombre dépendant de μ et de τ , mais indépendant du système $\sum'$ considéré. On pourra donc choisir un système particulier simple pour en déterminer le signe. Ayant fixé μ et τ , on construit des nombres réels ξ_i , ζ_i , $i = 1, \ldots, \tau+3 = M$ et un entier α , exactement comme dans la démonstration du lemme cité. Pour ce choix, on en déduit que

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^{r} \sum_{\nu=0}^{s-r} \varepsilon^{\nu} b_{\nu} + \varepsilon^{s} p + o(\varepsilon^{s})$$

avec

$$p = \frac{1}{2} (\alpha!)^{2} \xi(\mu,\tau)\, B_{0,\mu} \quad \text{et} \quad b_{\nu} \in \mathcal{L}$$

Donc $\xi(\mu,\tau)\, B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$ par construction.

Avant de déterminer le signe de $\xi(\mu,\tau)$, montrons le lemme suivant :

Lemme 23 : Soit u(t), q(t) une commande de référence et la trajectoire associée,

$$B_{0,\nu} \in \mathcal{L} \quad , \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{et} \quad \nu < \mu \quad ,$$

tous les champs de vecteurs i), ii) iii) et iv) du lemme précédent appartiennent aussi à $\mathcal{L}$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate des lemmes 10 et 11.

Corollaire III.1 : Pour tout entier pair $\mu > 0$, il existe un système particulier, $\dot{q} = f(q,u)$ ayant les propriétés suivantes

i) u est scalaire ; pour une certaine solution, u(t), q(t), $t \in [0,T]$, l'espace $\mathcal{L}$ est engendré par $ad^{\nu}_{A_0} A_1$, $\nu = 0, \dots, d = \frac{\mu}{2}$ où

$$A_0 = \sum_{k=1}^{N} f^k \frac{\partial}{\partial q^k} \quad \text{et} \quad A_1 = \sum_{k=1}^{N} f_u^k \frac{\partial}{\partial q^k}.$$

ii) $B_{0,\nu} \in \mathcal{L}$, $\nu < \mu$

iii) $(-1)^{\frac{\mu}{2}} B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$.

Preuve : μ, entier pair, étant donné, considérons le système particulier de dimension N telle que $\mu = 2(N-1)$.

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = \frac{1}{2}(q^2)^2 \\ \dot{q}^2 = q^3 \\ \vdots \\ \dot{q}^{N-1} = q^N \\ \dot{q}^N = u \end{cases} \qquad q(0) = 0 \quad \text{et} \quad |u| \leq 1 .$$

Comme

$$A_0 = \frac{1}{2}(q^2)^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^3 \frac{\partial}{\partial q^2} + \dots + q^N \frac{\partial}{\partial q^{N-1}} + u \frac{\partial}{\partial q^N} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{\partial}{\partial q^N}$$

on en déduit que

$$ad^k_{A_0} A_1 = (-1)^k \frac{\partial}{\partial q^{N-k}} \quad , \quad k = 0, \dots, N-2$$

et

$$ad^{N-1}_{A_0} A_1 = (-1)^{N-1} q^2 \frac{\partial}{\partial q^1}$$

avec la formule,

$$[ad^{\rho}_{A_0} A_1, ad^{\sigma}_{A_0} A_1] = (-1)^{\rho} \sum_{\tau=0}^{\rho} (-1)^{\tau} \binom{\rho}{\tau} ad^{\tau}_{A_0} [A_1, ad^{\rho+\sigma-\tau}_{A_0} A_1] ;$$

Pour ρ et $\sigma < N-1$, toutes ces quantités sont nulles. D'où

$$[A_1, ad^{\alpha}_{A_0} A_1] = 0 \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2N-4$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u} ad^{2N-2}_{A_0} A_1 = [A_1, ad^{2N-3}_{A_0} A_1] = (-1)^{N-2} [ad^{N-2}_{A_0} A_1, ad^{N-1}_{A_0} A_1]$$
$$= (-1)^{N-2} [(-1)^{N-2} \frac{\partial}{\partial q^2}, (-1)^{N-1} q^2 \frac{\partial}{\partial q^1}]$$

d'où

$$-\frac{\partial}{\partial q^1} = (-1)^{N-2} B_{0,2(N-1)}$$

et donc

$$B_{0,\mu} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\partial}{\partial q^1} \tag{9}$$

D'autre part, comme $B_{0,\nu} \in \mathcal{L}$, avec les deux lemmes précédents, on obtient $\xi(\mu,\tau)\, B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$ (10)

Soit $\bar{u}(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$. Cette commande minimise

$$\bar{q}'(T) = \int_0^T \frac{1}{2} (\bar{q}^2)^2(t)\, dt$$

Ainsi d'après le lemme 4, pour tout vecteur adjoint extrémal $\bar{p}(t)$,

$$< \bar{p}(t), \bar{G} > = 0 \quad , \quad \forall t \in [0,T] \quad , \quad \forall G \in \mathcal{L} .$$

$\xi(\mu,\tau)\, B_{0,\mu}$ est donc le premier terme non trivial du développement en $\mathcal{E}$ de la deuxième variation. D'où

$$< \bar{p}(t), \xi(\mu,\tau)\, \bar{B}_{0,\mu} > \quad \geqslant 0 \quad .$$

Choisissons $\bar{p}(t) = d\bar{\omega}_0(t) = (1, 0, \ldots 0)$. En utilisant (9), il vient :

$$\xi(\mu,\tau)(-1)^{\frac{\mu}{2}} \geqslant 0$$

ou encore, $\quad sg\, \xi(\mu,\tau) = (-1)^{\frac{\mu}{2}}$ soit d'après (10), $(-1)^{\frac{\mu}{2}} B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$.

Nous allons maintenant démontrer les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème III.1</u> : Soit u(t), q(t) une commande de référence et la trajectoire associée si $A_2 \in \mathcal{L}$ et si $[\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu-1} A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1] \in \mathcal{L}, \nu = 1, \ldots, \mu-1$ alors le champ de vecteurs

$$-[\mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu} A_1] \in \mathcal{P}_u$$

<u>Théorème III.2</u> : Soit u(t), q(t) une commande de référence et la trajectoire associée; si

$$B_{0,\nu} \in \mathcal{L} \quad , \quad \nu = 0, \ldots, \mu-1 \quad ,$$

alors i) μ est pair

ii) $(-1)^{\frac{\mu}{2}}\, B_{0,\mu} \in \mathcal{P}_u$

Dans les deux cas, on appliquera ensuite le lemme 20 pour obtenir les conditions nécessaires d'optimalité correspondantes.

Preuve : Montrons tout d'abord le théorème III.2

D'après le lemme 9 i),

$$B_{0,\mu} = \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu} A_2 + \sum_{1 \leq \rho \leq \mu} \binom{\mu}{\rho} [\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho-1} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-\rho} A_1]$$

En utilisant les hypothèses $B_{0,\nu} \in \mathcal{L}$, $\nu = 0, \ldots, \mu-1$, on en déduit que

$$B_{0,\mu} = [A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1] + \ell, \quad \text{où } \ell \in \mathcal{L}.$$

D'autre part, par le lemme 8i),

$$[\mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1, A_1] = (-1)^{\mu-1} [A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1] + \ell' \quad \text{avec } \ell' \in \mathcal{L}.$$

Si μ était impair, alors

$$2 [A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1] \in \mathcal{L}$$

et $B_{0,\mu}$ appartiendrait à $\mathcal{L}$, ce qui contredit l'hypothèse. Pour montrer la deuxième partie du théorème III.2, il suffit de montrer que si $B_{0,\nu} \in \mathcal{L}$, $\nu = 0, \ldots, \mu-1$ alors tous les champs de vecteurs apparaissant dans l'hypothèse du lemme 22 appartiennent aussi à $\mathcal{L}$. Or ceci se montre facilement en utilisant les lemmes 10 et 11 du chapitre I.

Toujours à partir de ces lemmes, il est facile de voir que les hypothèses du théorème III.1 impliquent que

$$B_{0,\nu} \in \mathcal{L} \quad \text{pour } \nu = 0, \ldots, 2\rho - 1$$

Appliquons le théorème III.2, il vient

$$(-1)^{\rho} B_{0,2\rho} \in \mathcal{P}_{\mu}$$

Mais d'après le lemme 11

$$[\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho-1} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\rho} A_1] = (-1)^{\rho-1} \sum_{\tau=0}^{\rho-1} \binom{\rho}{\tau} (-1)^{\tau} \mathrm{ad}_{A_0}^{\tau} B_{0,2\rho-\tau}$$

d'où

$$[\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho-1} A_1, \mathrm{ad}_{A}^{\rho} A_1] = (-1)^{\rho-1} B_{0,2\rho} + \ell \quad \text{avec } \ell \in \mathcal{L}.$$

On en déduit donc que

$$-[\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho-1} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\rho} A_1] \in \mathcal{P}_{\mu} \quad .$$

<u>Corollaire III.2</u> : Soit $(\bar{u}(t),\bar{q}(t)$ un couple extrémal d'ordre s. Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ alors :

i) $\overline{< \bar{p}(\tau) , (-1)^s \, B_{0,2s} >} \geqslant 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,T] ,$

ou, de *façon équivalente*,

ii) $- \overline{<\bar{p}(\tau) , [ad^{s-1}_{A_0} A_1 , ad^{s}_{A_0} A_1] >} \geqslant 0 , \quad \forall \tau \in [0,T] ,$

$\bar{p}(\tau)$ étant une solution de (2).

<u>Preuve</u> : Il suffit d'appliquer le théorème III.1 et le théorème III.2 respectivement pour la partie i) et la partie ii), avec le lemme fondamental 20 du chapitre précédent.

III.4 - <u>Interprétation hamiltonienne des conditions nécessaires d'optimalité</u>.

Dans ce chapitre, nous n'avons pas utilisé l'hamiltonien associé au problème de commande $\sum'$. Toutes les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre obtenues jusqu'ici sont exprimées en fonction des champs de vecteurs associés à $\sum'$; une question naturelle est donc de se demander quel est le lien entre ces formulations et l'hamiltonien associé à $\sum'$.
La réponse pour la partie i) du corollaire III.2 est immédiate :

<u>Corollaire III.3</u> : Soit $(\bar{u}(t), \bar{q}(t))$ un couple extrémal d'ordre s sur $[0,T]$. Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ alors,

$$(-1)^s \, \overline{\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2s}}{d\tau^{2s}} H_1 \Big|_{q=a}} \geqslant 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,T] ,$$

où $H_1 = <p(\tau), F_u(\tau, q, u)>$ et $\bar{p}(\tau)$ est *une* solution extrémale de (2).

<u>Preuve</u> : Nous avons vu (lemme 20) que

$$B_{0,2s} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2s}}{d\tau^{2s}} H_1$$

D'autre part, d'après le lemme 2, pour une solution arbitraire $p(\tau)$, $\tau \in [0,T]$ de (2),

$$< p(\tau), \, ad^{\mu}_{A_0} A_1 > \; = \; \frac{d^{\mu}}{d\tau^{\mu}} < p(\tau), A_1 > \; = \; \frac{d^{\mu}}{d\tau^{\mu}} H_1 \; .$$

Ainsi,

$$< p(\tau), (-1)^s B_{0,2s} > \; = \; (-1)^s \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2s}}{d\tau^{2s}} H_1 \; .$$

Remarque : Si le vecteur adjoint extrémal est *unique* alors le corollaire III.2 i) n'est autre qu'une nouvelle formulation de la condition de Legendre-Clebsch généralisée (voir par exemple [*g* 1], [*m* 1] et [*b* 3]).

En utilisant les résultats obtenus au paragraphe A5, il est clair que la condition du corollaire III2 ii) qui est une autre formulation du théorème 20.2 de Knobloch [*k* 3], reçoit *ici* une interprétation hamiltonienne, chose qui n'as pas été faite jusqu'ici :

Corollaire III.4 : Soit $(\bar{u}(t), \bar{q}(t))$ un couple extrémal d'ordre s sur [0,T]. Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0,T] alors :

$$\overline{\frac{d}{d\theta^{s-1}} \left[\frac{\delta}{\delta u^{\theta}} \frac{d}{d\tau} - \frac{d}{d\theta} \frac{\delta}{\delta u^{\theta}} \right] \frac{d}{d\tau^{s-1}} H_1 \Big|_{\substack{\theta = \tau \\ q = a}}} \leq 0$$

où $H_1 = < p(\tau), \, F_u(\tau, q, u) >$ et où $\bar{p}(\tau)$ est *une* solution extrémale de (2).

Dans une dernière partie nous montrerons que la formulation du corollaire III.2 ii) est mieux adaptée aux applications que celles du corollaire III.2i).

III.4 - Condition de Jacobson-Gabasov.

Dans [j1], des problèmes de commande sont décrits, illustrant la nécessité d'une nouvelle condition nécessaire d'optimalité, dans le cas où les conditions de Legendre-Clebsch généralisées sont satisfaites. Cette condition, appelée par la suite de Jacobson-Gabasov, peut s'obtenir aussi à partir de (5). En effet, introduisons, comme dans [j1], la variation simple suivante

$$\delta u(\sigma) = \begin{cases} a & , \quad \sigma \in [\theta, \theta+\varepsilon] \\ 0 & \text{ailleurs} . \end{cases}$$

Il vient alors

$$\delta_2 V = \sum_{k \geq 0} \int_\theta^{\theta+\varepsilon} a^2 \frac{(\sigma-\theta)^k}{k!} \, \mathrm{ad}^k_{A_0} A_2 \, d\sigma + \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} \int_\theta^{\theta+\varepsilon} a \frac{(\sigma-\theta)^k}{k!} \mathrm{ad}^k_{A_0} A_1 \, d\sigma\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,\ell \geq 0} \int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\theta^{\sigma_2} a^2 \frac{(\sigma_1-\theta)^k}{k!} \frac{(\sigma_2-\theta)^\ell}{\ell!} \left[\mathrm{ad}^k_{A_0} A_1 , \mathrm{ad}^\ell_{A_0} A_1\right] d\sigma_1 d\sigma_2$$

ou encore,

$$\delta_2 V = a^2 \left(A_2 \varepsilon + \mathrm{ad}_{A_0} A_2 \, \varepsilon^2 + A_1^2 \varepsilon^2 \right) + o(\varepsilon^2)$$

En appliquant le lemme 18 on obtient :

Proposition III.1 : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ et si $\bar{A}_2 \in \bar{\mathcal{L}}$ alors

$$\sum_{\nu \geq 0} \overline{\mathrm{ad}^\nu_{A_0} A_1^2 \, \varpi_0 (t, \tau, q)}\Big|_{q=a} \frac{(\theta-\tau)^\nu}{\nu!} \geq 0$$

$\forall \tau \in [0, T]$ et $\forall \theta \in [\tau, T]$.

Si en particulier, on choisit $\theta = \tau$, on retrouve la condition de Jacobson-Gabasov, sous la forme :

Corollaire III.5 : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ et si $\bar{A}_2 \in \bar{\mathcal{L}}$ alors

$$\overline{A_1^2 \, \varpi_0 (T, \tau, q)}\Big|_{q=a} \geq 0 \quad , \forall \tau \in [0, T] ,$$

ou encore,

$$A_1^T(q)\left(\frac{\partial H_1}{\partial q^k} + \left(\frac{\partial^2 \varpi_o}{\partial q^k \partial q^\ell}\right)_{\ell=1,\dots,N} A_1(q)\right)_{k=1,\dots,N} \geqslant 0$$

avec $H_1 = A_1\varpi_o(t,\tau,q)$

Avec les notations du paragraphe A5 on obtient :

<u>Corollaire III.6</u> : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$, alors

$$\overline{\frac{\delta}{\delta u^t} H_1 \Big|_{q=a}} \geqslant 0 \quad , \; \forall t \in [0,T] \; .$$

III.5 - <u>Exemple</u>.

Avec l'exemple suivant, on souhaite montrer que la condition nécessaire d'optimalité obtenue au corollaire III.2 i) qui est, rappelons-le, la traduction des conditions classiques de Legendre Clebsch généralisées (cf. corollaire III.3) est redondante dès que $s \geqslant 2$ par rapport à la condition nécessaire d'optimalité obtenue au corollaire III.2 ii). Grosso modo, pour arriver à une même conclusion, cette dernière formulation nécessite le calcul de seulement la moitié des crochets de Lie de champs de vecteurs nécessaires à la première formulation, ce qui est un considérable avantage pour traiter les problèmes de commande pratiques.
L'exemple choisit, qui a été aussi traité dans [k3] provient d'un problème bien connu en mécanique du vol. On trouvera tous les détails et les références dans le livre de Vinh [v1] p. 77 (voir aussi [b2]).

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = q^2 \\ \dot{q}^2 = k(q^1) + \dfrac{1}{q^3}\, u(t)\, Q(t) \\ \dot{q}^3 = -\dfrac{u(t)}{c} \\ y(t) = h(q^1, q^2, q^3) \end{cases}$$

$t \in [0,T]$, $0 \leqslant u(t) \leqslant K$. Les formes des fonctions k, Q et h, supposées analytiques, ne sont pas précisées pour l'instant.
Soit $\bar{u}(t) \in \mathrm{Int}\, U$, $t \in [0,T]$ (c.a.d. $0 < u(t) < K$) une commande

extrémale et la trajectoire associée. D'après le lemme 4, si $\bar{p}(t)$ dénote le vecteur adjoint extrémal alors

$$\langle \bar{p}(t), \overline{ad^{\nu}_{A_0} A_1} \rangle = 0 \quad , \forall \nu \geqslant 0 \ , \ \forall t \in [0,T] ,$$

où A_0 et A_1 sont ici respectivement :

$$A_0 = q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \left(k(q^1) + \frac{1}{q^3} u(t) Q \right) \frac{\partial}{\partial q^2} - \frac{u(t)}{C} \frac{\partial}{\partial q^3} + \frac{\partial}{\partial t}$$

et

$$A_1 = \frac{1}{q^3} Q \frac{\partial}{\partial q^2} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial q^3}$$

Calculons tout d'abord $[A_1, [A_0, A_1]]$, on trouve :

$$[A_1, [A_0, A_1]] = \frac{1}{Cq^3} A_1 \quad , \quad \text{ainsi} \quad [A_1, [A_0, A_1]] \in \mathcal{L} .$$

Appliquons le corollaire III.2 i) ; pour obtenir une nouvelle condition nécessaire il faut calculer les champs de vecteurs suivants : $ad^2_{A_0} A_1$, $ad^3_{A_0} A_1$ puis $[A_1, ad^3_{A_0} A_1]$. Par contre le test du corollaire III.2 ii) *évite* le calcul de $ad^3_{A_0} A_1$ qui n'est déjà pas aisé pour ce problème largement réduit.

On obtiendra donc une nouvelle condition nécessaire en calculant

$$[ad_{A_0} A_1 , ad^2_{A_0} A_1]$$

Il vient :

$$ad_{A_0} A_1 = -\frac{Q}{q^3} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\dot{Q}}{q^3} \frac{\partial}{\partial q^2}$$

$$\text{et} \quad ad^2_{A_0} A_1 = \left(-\frac{uQ}{C(q^3)^2} - \frac{2\dot{Q}}{q^3} \right) \frac{\partial}{\partial q^1} + \left(\frac{u\dot{Q}}{c(q^3)^2} + \frac{\ddot{Q}}{q^3} + \frac{Q}{q^3} \frac{\partial k}{\partial q^1} \right) \frac{\partial}{\partial q^2}$$

Après simplification,

$$[ad_{A_0} A_1 , ad^2_{A_0} A_1] = -\frac{Q}{(q^3)^2} \frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{\partial k}{\partial q^1} Q \right) \frac{\partial}{\partial q^2}$$

Ainsi, si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$, alors

$$\langle \bar{p}_2(t), \overline{\frac{Q}{(q^3)^2} \frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{\partial k}{\partial q^1} Q \right)} \rangle \geqslant 0 \quad , \ \forall t \in [0,T] \qquad (11)$$

Or précisément, les données physiques de k, Q et h ne peuvent en aucun cas garantir cette inégalité [k2], [k3]. Si bien qu'aucune commande extrémale $\bar{u}(t) \in \mathrm{Int}\,\mathcal{U}$, ne peut être minimale, autrement dit, une commande minimale ne peut être que Bang Bang, c.a.d., prendre ses valeurs sur les bords de $\mathcal{U}$.

Pour illustrer l'importance de la formulation ii) par rapport à la formulation i) du corollaire III.3, supposons que $\frac{\partial \bar{k}}{\partial q'} = 0$ (pour une certaine commande extrémale et sa trajectoire associée), ce qui ne correspond peut-être pas à un cas physique. La condition (11) est alors trivialement satisfaite. En poursuivant le processus, on remarque qu'on obtiendra un nouveau test en calculant,

$$[ad^2_{A_0} A_1 , ad^3_{A_0} A_1] \quad ,$$

soit *deux* nouveaux crochets de Lie, si on applique la partie ii), alors qu'il faudrait calculer

$$[A_1 , ad^5_{A_0} A_1]$$

soit *quatre* crochets de Lie supplémentaires. D'une façon générale, il est facile de voir que la formulation i) nécessite le calcul de la *moitié* des crochets de Lie, par rapport à la formulation ii), pour arriver à une même conclusion.

IV . CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE D'ORDRE TROIS

IV.1 Exemple nécessitant une étude au troisième ordre.

IV.2 Transformation sur la troisième variation.

IV.3 Choix des variations.

IV.4 Application:

a) Cas des systèmes linéaires en la commande .

b) Cas général .

IV.5 Exemples.

IV.1 - Exemple nécessitant une étude au troisième ordre.

Considérons le problème de commande suivant : $t \in [0, 1]$, minimiser $q^2(1)$, tel que

$$\begin{cases} q^1 = u + (q^1)^3 \\ q^2 = u + (q^1)^4 \end{cases}$$

avec $q^1(1) = 0$, $|u| \leqslant 1$.

Les champs de vecteurs A_0 et A_1 sont donnés respectivement par,

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(u + (q^1)^3\right) \frac{\partial}{\partial q^1} + \left(u + (q^1)^4\right) \frac{\partial}{\partial q^2}$$

et

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2}$$

Soit $\bar{u}(t) = 0$, $t \in [0,1]$, la commande extrémale et $\bar{q}(t) = (0,0)$ la trajectoire correspondante pour le vecteur adjoint $\bar{p}(t) = (1,1)$. Il est facile de voir que, pour tout $s \geqslant 0$,

$$< \bar{p}(t) , \overline{\left[\mathrm{ad}_{A_0}^{s-1} A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{s} A_1\right]} > = 0 \quad , \quad \forall t \in [0,T].$$

Ainsi, aucun test du second ordre n'est concluant. En fait, nous verrons, grâce aux conditions nécessaires d'optimalité du troisième ordre, que la commande $\bar{u}(t) = 0$ ne peut pas être optimale.

IV.2 - Transformation sur la troisième variation.

Rappelons (cf II.1) que la troisième variation de la sortie y à l'instant T de $\sum'$ pour un instant initial τ, $\tau \leq T$, arbitraire est donnée par :

$$\delta_3 y(T) = \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_3} \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1\, e^{(\sigma_3-\sigma_2)A_0}\, e^{-(\sigma_3-\tau)A_0} \omega_0(T,\tau,q)\Big|_{q=a} \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3$$

$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_2-\tau)A_0} \omega_0(T,\tau,q)\Big|_{q=a} \delta u(\sigma_1)\, \delta u^2(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_2\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\tau)A_0} \omega_0(T,\tau,q)\Big|_{q=a} \delta u^2(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_3\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_0} \omega_0(T,\tau,q)\Big|_{q=a} \delta u^3(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

où $q = (q^0, q^1, \dots, q^N)$, $a = (\tau, q^1(\tau), \dots, q^N(\tau))$

$$A_0 = \sum_{k=1}^{N} F^k(t,q,u) \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial q^0}$$

et $$A_i = \sum_{k=1}^{N} F^k_{u(i)}(t,q,u) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

Comme au paragraphe III.1, transformons la variation associée à $\delta_3 y(T)$ (voir (5)). On souhaite en effet, comme pour le second ordre, obtenir des conditions nécessaires d'optimalité les plus simples possibles. Dès que des opérateurs du second ordre interviennent dans une formulation (c'est par exemple le cas pour la condition de second ordre de Jacobson-Gabasov (&III)) le test se complique puisqu'il nécessite le calcul de $\frac{\partial^2}{\partial q^2}(t,\tau,q)$. Cette transformation est en fait une application d'un résultat plus général obtenu en Appendice.

Posons

$$D_j(\sigma) = e^{(\sigma-\theta)A_0} A_j\, e^{-(\sigma-\theta)A_0}$$

et appliquons le lemme de l'Appendice pour n = 3, il vient :

$$I = \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_3} \int_\tau^{\sigma_2} D_1(\sigma_1)\, D_1(\sigma_2)\, D_1(\sigma_3)\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3$$

$$= \frac{1}{3} \Big\{ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_3} \int_\tau^{\sigma_2} [[D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)], D_1(\sigma_3)]\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3$$

$$+ \int_\tau^T D_1(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \,.\, \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)]\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} D_1(\sigma_1)\, D_1(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \times \int_\tau^T D_1(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

ou encore, en appliquant la proposition III.1 à l'intégrale double du dernier terme:

$$I = \frac{1}{3} \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_3} \int_\tau^{\sigma_2} [[D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)], D_1(\sigma_3)]\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, \delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3$$

$$+ \frac{1}{3} \int_\tau^T D_1(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \times \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)]\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \frac{1}{3!} \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)]\, \delta u(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \times \int_\tau^T D_1(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\int_\tau^T D_1(\sigma_1)\, \delta u(\sigma_1)\, d\sigma_1 \right)^3 .$$

<u>Remarques</u> :

i) Le premier terme de cette expression est un champ de vecteurs ; dans la suite, on montrera que, pour les variations utilisées, c'est en fait le terme dominant.

ii) Ce processus de séparation des champs de vecteurs et des opérateurs différentiels d'ordre supérieur s'étend aux opérateurs différentiels $\delta_i V$ d'ordre supérieur à trois. (voir Appendice).

Proposition IV.1 : L'expression $\delta_3 V$ associée à $\delta_3 y(T,\theta)$ par (5) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta_3 V = \quad I &+ \frac{1}{2}\int_\tau^T D_2(\sigma_1)\,\delta u^2(\sigma_1)\,d\sigma_1 \,.\int_\tau^T D_1(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_1)\,d\sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_\tau^T D_1(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_1)\,d\sigma_1 \int_\tau^T D_2(\sigma_1)\,\delta u^2(\sigma_1)\,d\sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_2(\sigma_2)]\,\delta u(\sigma_1)\,\delta u^2(\sigma_2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\tau^{\sigma_2} [D_2(\sigma_1), D_1(\sigma_1)]\,\delta u^2(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \\ &+ \int_\tau^T D_3(\sigma_1)\,\delta u^3(\sigma_1)\,d\sigma_1 \ .\end{aligned}$$

Preuve : On applique à nouveau la proposition III.1 aux intégrales doubles apparaissant dans $\delta_3 V$.

Tout d'abord, nous rechercherons les conditions nécessaires du troisième ordre pour les problènes $\sum$ linéaires en la commande ; dans ce cas, en effet, l'expression $\delta_3 V$ devient égale à I. Mais avant, précisons les variations utilisées.

IV.3 - Choix des variations

Comme dans [δ 2], nous étudierons la variation de la fonctionnelle y, fonction de sortie des systèmes $\sum$ ou $\sum'$, pour les variations suivantes, appelées variations en aiguilles :
Soit la perturbation "concentrée" en $\theta \in [0,T]$, telle que, k étant un entier arbitraire,

$$\int_\theta^{\theta+\varepsilon} (\sigma-\theta)^i\,\delta u(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad , \; i \leq k-1 \ .$$

Une solution [S 3] de ces équations intégrales est :

$$\delta u(t) = a \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \binom{k+l}{l} \frac{1}{\varepsilon^l} (t-\theta)^l \tag{15}$$

$a = \delta u(\theta)$ et $t \in [\theta, \theta+\varepsilon]$

et de plus

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (\sigma-\theta)^m \delta u(\sigma)\, d\sigma = (-1)^k a \frac{(m!)^2}{(m-k)!(m+k+1)!} \varepsilon^{m+1} \quad , \; m \geqslant k \tag{16}$$

IV.4 - Application

a - Cas des systèmes linéaires en la commande.

Avant d'exprimer les conditions nécessaires d'optimalité du troisième ordre, rappelons [L1] le développement obtenu après introduction des variations ci-dessus dans $\delta_2 V$ donné par la proposition III.1:

$$\delta_2 V = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} \operatorname{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1 \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (\sigma-\theta)^{\alpha} \delta u(\sigma)\, d\sigma \right)^2$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left[\operatorname{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1 , \operatorname{ad}_{A_0}^{\beta} A_1\right] \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \int_{\theta}^{\sigma_2} (\sigma_1-\theta)^{\alpha} (\sigma_2-\theta)^{\beta} \delta u(\sigma_1) \delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

Pour k quelconque, en utilisant (15) et (16), on trouve :

$$\delta_2 V = a^2 (-1)^k \sum_{\substack{\alpha,\beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta \leqslant k-1}} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left[\operatorname{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1 , \operatorname{ad}_{A_0}^{\beta} A_1\right] \sum_{l=k-(\alpha+\beta+1)}^{k} .$$

$$(-1)^l \binom{k}{l} \binom{k+l}{l} \frac{1}{(\alpha+l+1)} \frac{(\alpha+\beta+l+1)!^2}{(\alpha+\beta+l+1-k)!\,(\alpha+\beta+l+k+2)!} \varepsilon^{\alpha+\beta+2}$$

$$+ o(\varepsilon^{k+1})$$

Choisissons k =1 , il vient :

$$\delta_2 V = a^2 \mu \, [A_1, [A_0, A_1]]\, \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \tag{17}$$

où μ est un nombre négatif.

En appliquant le lemme 18, on obtient :

Proposition IV.2 : Si $\bar{u} = 0$ est minimisante sur [0, T] pour le problème de commande Σ , alors

$$\overline{[A_1, [A_0, A_1]] \omega_0 (T, \tau, q)}\Big|_{q=a} \leqslant 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0, T] \ .$$

ou encore (lemme 19),

$$< \bar{p}(\tau), \overline{[A_1, [A_0, A_1]]} > \leqslant 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0, T] \ ,$$

$\bar{p}(\tau)$ étant le vecteur adjoint

$$\bar{p}(\tau) = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau}, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^N} \right) = d\omega_0$$

Si le champ de vecteurs $[A_1, [A_0, A_1]] \in \mathcal{L}$, l'espace vectoriel engendré par $ad^{\nu}_{A_0} A_1$, $\nu \geqslant 0$, cette condition est trivialement satisfaite (voir lemme 17).
Pour cette classe de variations qui est contenue dans la classe des variations définies par Knobloch et utilisées au chapitre précédent, on obtient de façon générale :

Proposition IV.3 : Si $\bar{u} = 0$ est minimisante sur [0, T] pour le problème de commande Σ et si

$$\overline{[A_1, ad^{\ell}_{A_0} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \qquad \text{pour } \ell \leqslant k - 2$$

alors i) k est pair

ii) $$(-1)^{\frac{k}{2}} \ \overline{[A_1, ad^{k-1}_{A_0} A_1] \omega_0 (T, \tau, q)}\Big|_{q=a} \geqslant 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0, T] \ .$$

Remarque : Cette proposition est un cas particulier du corollaire III.2 i) pour la classe des systèmes étudiés ici, c'est-à-dire ceux linéaires en la commande.

Intéressons-nous maintenant aux conditions nécessaires basées sur la troisième variation. Nous avons vu, que dans le cas ou le système est linéaire en la commande, $\delta_3 V$ est donnée par I .
Pour les variations utilisées il est facile de voir que, k étant arbitraire les termes

$$\int_\tau^T D_1(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_1)\,d\sigma_1 \cdot \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)]\,\delta u(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \;,$$

$$\int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} [D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)]\,\delta u(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \int_\tau^T D_1(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_1)\,d\sigma_1$$

et $\left(\int_\tau^T D_1(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_1)\,d\sigma_1\right)^3$

sont respectivement d'ordre $\varepsilon^k \times \varepsilon^3$, $\varepsilon^k \times \varepsilon^3$ et ε^{3k}. On considérera donc, dans la suite, seulement le premier terme de I :

$$\delta_3 V = \frac{1}{3}\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\theta^{\sigma_3}\int_\theta^{\sigma_2} [[D_1(\sigma_1), D_1(\sigma_2)], D_1(\sigma_3)]\,\delta u(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\,\delta u(\sigma_3)\,d\sigma_1\,d\sigma_2\,d\sigma_3 \quad (18)$$
$$+ \, o(\varepsilon^{k+1})$$

A partir des propriétés (15) et (16) de $\delta u(t)$, déterminons les coefficients G_ν définis par

$$\delta_3 V = a^3 \sum_{\nu=1}^{k} G_\nu\, \varepsilon^{k+1} + o(\varepsilon^{k+1})$$

De (18) il vient :

$$\delta_3 V = \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0} [[\mathrm{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\beta} A_1], \mathrm{ad}_{A_0}^{\gamma} A_1]$$
$$\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \sum_{\ell, s} \frac{(-1)^{\ell+s}}{\varepsilon^{\ell+s}} \frac{\binom{k}{\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\binom{k}{s}\binom{k+s}{s}}{(\alpha+\ell+1)\,(\beta+\alpha+\ell+s+2)} (\sigma_3-\theta)^{\alpha+\beta+\ell+s+2+\gamma}\,\delta u(\sigma_3)\,d\sigma_3$$

Posons $\nu = \alpha+\beta+\gamma+2$ et $m = \alpha+\beta+\gamma+\ell+s+2$, alors

$$G_\nu = \sum_{\substack{\ell=0 \\ s=0 \\ \ell+s \geq k-\nu}}^{k} \Phi(\nu, k, \ell, s)\, V(\nu, \ell, s)$$

où $V(\nu, \ell, s)$ est le champ de vecteurs

$$V(\nu,\ell,s) = \frac{1}{3}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=\nu-2}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, \frac{1}{(\alpha+\ell+1)\,(\beta+\alpha+\ell+s+1)} [[\mathrm{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\beta} A_1], \mathrm{ad}_{A_0}^{\gamma} A_1]$$

et $$\Phi(\nu, k, \ell, s) = (-1)^k \frac{\binom{k}{\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\binom{k}{s}\binom{k+s}{s}\,(\nu+\ell+s)!^2}{(\nu+k+\ell+s+1)!\,(\nu-k+\ell+s)!}$$

Comme le paramètre a dans (15) est arbitraire, a^3 peut être choisi soit positif, soit négatif.
Prenons k = 3,

$$\delta_3 V = a^3 G_3 \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$$

avec $G_3 = \mathfrak{z} [A_1, [A_1, [A_0, A_1]]] \quad , \mathfrak{z} \in \mathbb{R}$.

Si le champ de vecteurs $[A_1, [A_0, A_1]] \in \mathcal{L}$, alors $\delta_2 V$ est d'ordre ε^5 si bien que le terme dominant de $\delta y(T)$ devient $a^3 \mathfrak{z} G_3$. En appliquant les lemmes 18 et 19, on obtient :

<u>Proposition IV.4</u> : Si $\bar{u} = o$ est minimisante sur [0, T], et si

$$\overline{[A_1, [A_0, A_1]]} \in \bar{\mathcal{L}}$$

alors

$$\overline{[A_1, [A_1, [A_0, A_1]]] \, \bar{\omega}_0 (T, \tau, q)}\Big|_{q=a} = o$$

ou encore,

$$\langle \bar{p}(\tau), \overline{[A_1, [A_1, [A_0, A_1]]]} \rangle = o, \quad \forall \tau \in [0, T].$$

<u>Remarques</u> : i) Cette dernière condition est une autre formulation de la condition obtenue par Skorodinskii [s2] :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{\substack{u=o \\ q=a}} = o \quad , \forall \tau \in [0, T].$$

ii) Ces critères du troisième ordre, contenant des égalités pourront augmenter considérablement l'ensemble des conditions nécessaires disponibles pour déterminer la commande.

La proposition précédente se généralise de la façon suivante :

<u>Proposition IV.5</u> : Si $\bar{u} = o$ est minimisante sur [0, T] et si

$$\overline{[A_1, ad_{A_0}^{\ell-1} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \quad , \ell \leqslant k-2$$ (k est pair, cf. prop. IV.3)

alors

$$\overline{G_\nu \, \bar{\omega}_0 (T, \tau, q)}\Big|_{q=a} = o \quad , \forall \nu \leqslant k, \quad \forall \tau \in [0, T] ,$$

ou encore

$$\langle \bar{p}(\tau), \bar{G}_\nu \rangle = o \quad , \forall \nu \leqslant k, \quad \forall \tau \in [0, T].$$

preuve : La démonstration est ici beaucoup plus facile que celle de la proposition IV.3 parcequ'il n'est pas utile de connaître le signe des expressions G_ν. Si $[A_1, ad_{A_0}^{\ell-1} A_1] \in \mathcal{L}$, $\ell \leq k-2$, alors $\delta_2 V$ est d'ordre ε^{k+2}. Ainsi, tous les coefficients de $\delta_3 V$ jusqu'à l'ordre ε^{k+1} sont alors nuls. C'est cela qu'exprime la proposition.

On souhaite maintenant trouver des conditions nécessaires d'optimalité pour des sytèmes plus généraux, du type Σ', déjà rencontrés aux chapitres précédents. Comme dans le cas linéaire en la commande, exprimons les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre obtenues à partir des variations (15).

b - Cas général :

Pour un problème de commmande Σ' les variations $\delta_2 V$ et $\delta_3 V$ sont données respectivement par les propostions III.1 et IV.1 Introduisons, tout d'abord, dans $\delta_2 V$ la variation (15) pour k = 1:

$$\delta u(t) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{2}{\varepsilon}(t-\theta)\right) & , t \in [\theta, \theta+\varepsilon] \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors

$$\delta_2 V = + \frac{a^2}{3} A_2 \varepsilon + o(\varepsilon)$$

D'où (lemme 20)

Proposition IV.6 : Si $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ est minimisante pour le problème de commande Σ' alors

$$\overline{A_2 \omega_0 (T, \tau, q)}_{|q=a} \geqslant 0 \quad , \forall \tau \in [0,T]$$

ou

$$\langle \bar{p}(\tau), \bar{A}_2 \rangle \geqslant 0 \quad , \forall \tau \in [0,T]$$

Remarque : Bien sûr, le membre de gauche de cette dernière expression n'est autre que la fonction $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$, H étant l'hamiltonien associé à Σ',

$$H = \langle p, F \rangle$$

et $p = d\varpi_0 = \left(\frac{\partial\varpi_0}{\partial q^k}\right)_{k=0,\dots,N}$. Cette condition est une formulation équivalente de la condition de Legendre-Clebsch [ℓ3].
Supposons que, sur tout l'intervalle [0,T]*, cette condition soit trivialement satisfaite. Autrement dit, considérons un problème de commande $\sum'$ tel que $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ s'annule *le long* de la trajectoire *extrémale*.

Si k = 3 alors

$$\delta_2 V = -a^2\left(\mu_0 A_2 \varepsilon + \mu_1 [A_0, A_2]\varepsilon^2 + \mu_2 [A_0,[A_0,A_2]]\varepsilon^3 + \mu_3 [A_1,[A_0,A_1]]\varepsilon^3\right) + o(\varepsilon^3) \quad , \mu_3 > 0 .$$

<u>Proposition IV.7</u> : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0, T] et si

$$\overline{A_2\varpi_0(T,\tau,q)}\big|_{q=a} = 0 \qquad \left(\text{ou } \langle\bar{p}(\tau), \bar{A}_2\rangle = 0\right) \quad , \forall\tau\in[0,T]$$

alors

$$\overline{[A_1,[A_0,A_1]]\varpi_0(T,\tau,q)}\big|_{q=a} \leqslant 0$$

$$\left(\text{ou } \langle\bar{p}(\tau), \overline{[A_1,[A_0,A_1]]}\rangle \leqslant 0\right) , \quad \forall\tau\in[0,T] .$$

<u>Preuve</u> : En appliquant le lemme 1 on sait que si

$$\langle\bar{p}(\tau), \bar{A}_2\rangle = \overline{A_2\varpi_0(T,\tau,q)}\big|_{q=a} \quad \text{est nul} \quad , \forall\tau\in[0,T]$$

alors

$$\langle\bar{p}(\tau), \overline{\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_2}\rangle = 0 \quad , \quad \forall\nu > 0 \quad , \forall\tau\in[0,T] .$$

Désignons par $\mathcal{L}'$ l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0} A_2$, $\nu \geqslant 0$.
La proposition IV.3 devient :

<u>Proposition IV.8</u>: Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0,T], si

$$\overline{A_2\varpi_0(T,\tau,q)}\big|_{q=a} = 0$$

et si

$$\overline{[A_1, \mathrm{ad}^{\ell}_{A_0} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \cup \bar{\mathcal{L}}' \quad , \ell \leqslant k-2$$

---

* On pourrait ne considérer qu'un sous-intervalle (a,b)$\subset$[0,T] sur lequel cette condition serait vérifiée. Les conditions nécessaires d'optimalité obtenues ultérieurement seraient alors valides sur cet intervalle.

alors i) k est pair

ii) $(-1)^{\frac{k}{2}} \overline{[A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{k-1} A_1]\bar{\omega}_0 (T,\tau,q)}_{|q=a} \geqslant 0 \quad , \forall \tau \in [0,T].$

Un calcul simple, analogue à celui du paragraphe montre que,

$$\delta_3 V := a^3 \sum_{\nu=1}^{k} G_\nu \, \varepsilon^{\nu+1} + o(\varepsilon^{k+1}) \quad ,$$

les seuls termes intervenant dans la détermination des G_ν sont :

$$\frac{1}{3}\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\theta^{\sigma_3}\int_\theta^{\sigma_2}\Big[\Big[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} , e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\Big], e^{(\sigma_3-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_3-\theta)A_0}\Big]\delta u(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\,\delta u(\sigma_3)\, d\sigma_1 d\sigma_2\, d\sigma_3 \quad ,$$

$$\frac{1}{4}\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\theta^{\sigma_2}\Big[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} , e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\Big]\delta u(\sigma_1)\,\delta u^2(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \quad ,$$

$$\frac{1}{4}\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\theta^{\sigma_2}\Big[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} , e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\Big]\delta u^2(\sigma_1)\,\delta u(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \quad ,$$

$$\frac{1}{6}\int_\theta^{\theta+\varepsilon} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_3\, e^{-(\sigma-\theta)A_0}\, \delta u^3(\sigma)\, d\sigma$$

et

$$G_\nu = \sum_{\substack{l=0\\ s=0\\ l+s\leqslant k-\nu}}^{k} \Phi(\nu,k,l,s)\, V(\nu,l,s)$$

où V(v,l,s) est le champ de vecteurs

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{\nu!}\,\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_3 + \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta\geqslant 0\\ \alpha+\beta=\nu-1}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,\frac{1}{\alpha+l+s+1}\,\big[\mathrm{ad}_{A_0}^{\alpha} A_2 , \mathrm{ad}_{A_0}^{\beta} A_1\big]$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta\geqslant 0\\ \alpha+\beta=\nu-1}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,\frac{1}{\alpha+l+1}\,\big[\mathrm{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{\beta} A_2\big]$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\geqslant 0\\ \alpha+\beta+\gamma=\nu-2}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\frac{1}{(\alpha+l+1)(\beta+l+\alpha+s+1)}\,\big[\big[\mathrm{ad}_{A_0}^{\alpha} A_1 , \mathrm{ad}_{A_0}^{\beta} A_1\big], \mathrm{ad}_{A_0}^{\gamma} A_1\big]$$

et où

$$\Phi(\nu, k, \ell, s) = (-1)^k \frac{\binom{k}{\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\binom{k}{s}\binom{k+s}{s}(\nu+\ell+s)!^2}{(\nu-k+\ell+s)!\,(\ell+\nu+k+s+1)!}$$

D'où la proposition :

<u>Proposition IV.9</u> : Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur [0, T], si

$$\overline{A_2\,\omega_0(T,\tau,q)}\Big|_{q=a} = 0$$

et si

$$\overline{[A_1, \mathrm{ad}^{\ell}_{A_0} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \cup \bar{\mathcal{L}}' \quad , \quad \ell \leq k-1 \; ,$$

alors

$$\overline{G_\nu\,\omega_0(T,\tau,q)}\Big|_{q=a} = 0 \quad , \quad \underline{\forall \nu \leq k} \; , \; \forall \tau \in [0,T] \; .$$

Prenons par exemple k = 1, on obtient la condition

$$\overline{[A_1, A_2]\,\omega_0(T,\tau,q)}\Big|_{q=a} = 0 \; , \quad \forall \tau \in [0,T] \; .$$

C'est exactement la condition

$$\overline{\frac{\partial}{\partial u^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial u}}\Big|_{q=a} = 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,T]$$

obtenue par Skorodinskii [ś2].

IV.5 - <u>Exemples</u>

a) Reprenons tout d'abord l'exemple simple énoncé au début de ce chapitre et calculons le champ de vecteur $[A_1, [A_1, [A_0, A_1]]]$ on obtient,

$$6\frac{\partial}{\partial q^1} + 14 q^1 \frac{\partial}{\partial q^2}$$

Comme $\bar{p}_1(\tau) = 1$, $\tau \in [0,1]$, la condition nécessaire d'optimalité du troisième ordre

$$\langle \bar{p}(\tau), \overline{[A_1, [A_1, [A_0, A_1]]]} \rangle = 0 \quad , \; \forall \tau \in [0,1]$$

n'est pas satisfaite. On conclut donc que la commande $\bar{u}(t) = 0$, $t \in [0,1]$ ne peut pas être optimale.

b) Le mouvement du centre d'une masse d'un objet en déplacement est donné par

$$\begin{cases} \dot{q}^0 = (q^1)^2 \\ \dot{q}^1 = q^2 \\ \dot{q}^2 = a(q^3)^3 + f^1(q^1, q^2, t) \\ \dot{q}^3 = u(t) + f(q^2, t) \end{cases}$$

Le problème de commande est le suivant : trouver u qui minimise

$$h(q(T)) = q^0(T) + \beta_1 (q^1)^2(T) + \beta_2 (q^2)^2(T)$$

avec, $(q^1)^2(t) + (q^2)^2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$ et $|u(t)| \leq 1$.
Nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition IV.10 : La commande optimale pour ce problème est Bang Bang : $u(t) = \pm 1$.

Preuve : On utilise le même raisonnement que l'exemple III.5*. Soit une commande extrémale u(t), telle que $|u(t)| < 1$, $t \in \sigma \subset [0,T]$. Montrons que cette commande ne peut pas être minimale. Pour ce problème, on voit facilement que $\overline{[A_1, [A_0, A_1]]} \in \mathcal{L}$; or l'expression

$$\langle \bar{p}(\tau), \overline{[A_1, [A_1, [A_0, A_1]]]} \rangle$$

ne peut pas être nulle sur l'intervalle σ , ce qui contredit la conclusion de la proposition IV.3. Ainsi, aucune commande extrémale, $|\bar{u}(t)| < 1$, ne peut être minimale.

---

* Ce raisonnement est aussi employé dans [b 1] pour montrer le caractère Bang Bang d'une commande en utilisant les conditions nécessaires du *premier* ordre (voir lemme 4).

V . GENERALISATIONS

V.1 Cas d'une entrée vectorielle.

V.2 Temps final libre:

a) Conditions nécessaires du premier ordre.

b) Conditions nécessaires du second ordre.

c) Exemple.

V.1. - Cas d'une entrée vectorielle

Considérons le système suivant

$$\Sigma'' \begin{cases} \dot{q} = F(t, q, u_1, u_2) \\ y = h(q) \end{cases}$$ $q(0) = q_0$ est donné et où h et F ont les mêmes propriétés que pour le problème Σ'.

On s'intéresse, ici aussi, à trouver des conditions nécessaires d'optimalité pour que, lorsque le Principe du Maximum est trivialement satisfait, une commande extrémale $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$, $t \in [0, T]$, minimise la sortie $y(t) = h(q(t))$ à l'instant T fixé. On peut bien sûr obtenir des conditions nécessaires analogues à celles obtenues précédemment en fixant une des commandes et en imposant une perturbation à l'autre. Mais on conçoit que de nouvelles conditions nécessaires doivent exister lorsque les deux commandes sont perturbées en même temps. Celles-ci seront en fait d'une grande importance car elles seront sous forme d'égalité dès le second ordre (c'est le seul cas d'existence de critère égalité obtenu à partir de la seconde variation). On trouve un résumé de différentes approches par exemple dans [g 1]. Mais les résultats les plus complets se trouvent, semble-t-il dans [k 3]. A partir du nouveau développement fonctionnel de la variation à l'instant T de la sortie y de Σ'' lorsqu'une variation $\delta u(t) = (\delta u_1(t), \delta u_2(t))$ est imposée, on retrouvera deux importants théorèmes.

Soit, dans une carte locale $q = (q^1, \dots, q^N)$,

$$A_0 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} F^k(t, q, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$A_1^i := \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F^k}{\partial u} (t, q, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial q^k} \quad , \quad j = 1, 2$$

$$A_2^{ij} := \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} (t, q, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial q^k} \quad , \quad i, j = 1, 2$$

En généralisant la proposition 3 du paragraphe A6, il est clair que la deuxième variation à l'instant T s'écrit, pour des conditions initiales $q(\tau) = a$, $\tau \in [0,T]$:

Proposition V.1 :

$$\begin{aligned}\delta y(T) = & \sum_{j=1}^{2} \int_{\tau}^{T} e^{(\sigma-\tau)A_0} A_1^j \, e^{(T-\sigma)A_0} h(q)\big|_{q=a} \, \delta u_j(\sigma)\, d\sigma \\ & + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\tau}^{T} e^{(\sigma-\tau)A_0} A_2^{ij} \, e^{(T-\sigma)A_0} h(q)\big|_{q=a} \, \delta u_i(\sigma)\, \delta u_j(\sigma)\, d\sigma \\ & + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\tau}^{T}\int_{\tau}^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_1^i \, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1^j \, e^{(T-\sigma_2)A_0} \delta u_i(\sigma_1)\, \delta u_j(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & + o\left(\|(\delta u_1, \delta u_2)\|^2\right)\end{aligned}$$

En particulier, pour une variation concentrée en un point $\theta \in [0,T]$ on obtient

Corollaire V.1 : $$\delta y(T) = e^{(\theta-\tau)A_0} V(\varepsilon)\, e^{-(\theta-\tau)A_0} \omega_0(T,\tau,q)\big|_{q=a}$$

avec $\omega_0(T,\tau,q) = e^{(T-\tau)A_0} h(q)$

et $V(\varepsilon) = \delta_1 V + \delta_2 V + o\left(\|(\delta u_1, \delta u_2)\|^2\right)$

où $$\delta_1 V = \sum_{j=1}^{2} \int_{\tau}^{T} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_1^j \, e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u_j(\sigma)\, d\sigma$$

et

$$\begin{aligned}\delta_2 V = & \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\tau}^{T} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_2^{ij} \, e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u_i(\sigma)\, \delta u_j(\sigma)\, d\sigma \\ & + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\tau}^{T}\int_{\tau}^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1^i \, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1^j \, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0} \delta u_i(\sigma_1)\, \delta u_j(\sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2\end{aligned}$$

Dans la suite, $$p(\tau) = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial t}, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^k}\right) \qquad (20)$$

avec $\omega_0(T,\tau,q) = e^{(T-\tau)A_0} h(q)$

$\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$ désignant une commande extrémale et $\bar{q}(t)$ la trajectoire associée, $\bar{p}(t)$ s'obtiendra en évoluant $p(t)$ le long de $(\bar{u}(t),\bar{q}(t))$.

Application

Dans cette partie, nous allons retrouver les deux importants résultats de [k 3] concernant les conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de commande vectorielle. $\mathcal{L}$ désignant l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs $ad^{\nu}_{A_o} A^j_1$, $j = 1,2$, $\nu \geq 0$, le long d'une commande de référence et sa trajectoire associée, on montre :

<u>Théorème V.1</u> : Si $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$ est minimisante pour le problème de commande $\sum''$ sur [0,T] et si

$$A''_2 \in \bar{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \overline{[ad^{\nu-1}_{A_o} A_1, ad^{\nu}_{A_o} A_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \quad , \nu = 1,\dots,p$$

alors

$$\langle \bar{p}(t), \overline{\frac{\partial}{\partial u^j} ad^p_{A_o} A^i_1} \rangle = 0 \quad , i \neq j \quad , \forall t \in [0,T]$$

$\bar{p}(t)$ étant défini par (20).

Par analogie avec le chapitre précédent et pour simplifier la démonstration de ce théorème, on désignera dans la suite

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{[\alpha]}} ad^k_{A_o} A^j_1 \qquad \text{par} \qquad B^{i,j}_{\alpha,k} \tag{20'}$$

En généralisant le lemme 9, on montre que

$$B^{i,j}_{\alpha,k} = \binom{k}{\alpha} ad^{k-\alpha}_{A_o} A^{ij}_2 + \sum_{0 \leq \sigma \leq k-\alpha-1} \binom{\alpha+\sigma}{\alpha}\binom{\sigma+\alpha+1}{k} [ad^{\sigma}_{A_o} A^i_1, ad^{k-\sigma-\alpha-1}_{A_o} A^j_1]$$

<u>Preuve</u> : Démontrons tout d'abord que $B^{1,2}_{0,p} \in \mathcal{P}_{(\bar{u}_1,\bar{u}_2)}$. Pour cela, introduisons comme en [k 3] la variation, p étant un entier ≥ 0,

$$\delta u^i(t) = (\delta u^i_1(t), \delta u^i_2(t)) = \varepsilon^{\alpha}[(\xi_i(\beta), 0) + (0, \eta_i)\frac{(t-\theta)^p}{p!}] \tag{21}$$

pour $t \in [\theta + \varepsilon z_i, \theta + \varepsilon z_{i+1}[$, $z_1 < z_2 < \dots < z_M$,
α est un entier donné β est arbitraire et η_i et $z_i \in \mathbb{R}$.

Après substitution de la variation (21) dans $\delta_1 V$, on trouve :

$$\delta_1 V = \sum_{j=1,2} \sum_{i=0}^{M} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} e^{(\sigma-\theta)A_o} A_j e^{-(\sigma-\theta)A_o} \delta u_j(\sigma)\, d\sigma$$

qui peut encore s'écrire,

$$\varepsilon^{\alpha} \sum_{\nu \geq 0} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \left(\sum_{i=0}^{M} (\xi_{i-1}(\beta) - \xi_i(\beta)) z_i^{\nu} \right) ad^{\nu-1}_{A_o} A^1_1$$

$$+ \varepsilon^{\alpha} \sum_{\nu \geq p+1} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} \binom{p}{\nu-1} \left(\sum_{i=0}^{M} (\eta_{i-1} - \eta_i) z_i^{\nu} \right) ad^{\nu-1-p}_{A_o} A^2_1$$

Regardons maintenant l'expression $\delta_2 V$,

$$\delta_2 V = \sum_{q,r=1,2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_2^{q,r} e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u_q(\sigma)\, \delta u_r(\sigma)\, d\sigma$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{q,r=1,2} \sum_{1\leq i<j<n-1} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} \int_{\theta+z_j\varepsilon}^{\theta+z_{j+1}\varepsilon} \left[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1^q e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}, e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1^r e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right] \delta u_q(\sigma_1)\, \delta u_r(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{q,r=1,2} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\sigma_2} \left[e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1^q e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}, e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1^r e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right] \delta u_q(\sigma_1)\, \delta u_r(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{q,r=1,2} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_1^q e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u_q(\sigma)\, d\sigma \right) \left(\sum_{i=1}^{M-1} \int_{\theta+z_i\varepsilon}^{\theta+z_{i+1}\varepsilon} e^{(\sigma-\theta)A_0} A_1^r e^{-(\sigma-\theta)A_0} \delta u_r(\sigma)\, d\sigma \right).$$

On peut encore écrire:

$$\delta_2 V = \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{2} \Bigg\{ \sum_{\nu\geq 1} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1}^2 - \xi_i^2)\, z_i^\nu \right) B^{11}_{0,\nu-1}$$

$$+ \sum_{\nu\geq 1} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1} - \xi_i)(\eta_{i+1} + \eta_i)\, z_i^\nu \right) B^{21}_{p,\nu-1}$$

$$+ \sum_{\nu\geq 1} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \binom{p}{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^{M} (\eta_{i-1} - \eta_i)(\xi_{i-1} + \xi_i)\, z_i^\nu \right) B^{12}_{0,\nu-1-p}$$

$$+ \sum_{\nu\geq 1} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} \binom{p}{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^{n} (\eta_{i-1}^2 - \eta_i^2)\, z_i^\nu \right) B^{22}_{0,\nu-1-p}$$

$$+ \sum_{\substack{k\geq p+1\\ \ell\geq p+1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \binom{p}{k-1} \binom{p}{\ell-1} \left(\sum_{1\leq i<j\leq M} (\eta_{i-1} - \eta_i)(\eta_{j-1} - \eta_j)\, z_i^\ell z_j^k \right) \times \left[ad^\ell_{A_0} A_1^2, ad^k_{A_0} A_1^2\right]$$

$$+ \sum_{\substack{k\geq p+1\\ \ell\geq 1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \binom{p}{k-1} \left(\sum_{1\leq i<j\leq M} (\xi_{i-1} - \xi_i)(\eta_{j-1} - \eta_j)\, z_i^\ell z_j^k \right) \times \left[ad^\ell_{A_0} A_1^1, ad^k_{A_0} A_1^2\right]$$

$$+\sum_{\substack{k\geq 1\\ \ell\geq p+1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \binom{p}{\ell-1} \Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} (\eta_{j-1}-\eta_j)(\xi_{i-1}-\xi_i)\, z_i^{\ell} z_j^{k}\Big) [\mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^2,\ \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^1]$$

$$+\sum_{\substack{k\geq 1\\ \ell\geq 1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} (\xi_{i-1}-\xi_i)(\xi_{j-1}-\xi_j)\, z_i^{\ell} z_j^{k}\Big) [\mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^1,\ \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^1]$$

$$+\sum_{\substack{k\geq p+1\\ \ell\geq p+1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \binom{p}{k-1}\binom{p}{\ell-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\eta_{i-1}-\eta_i) z_i^{\ell}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} (\eta_{i-1}-\eta_i) z_i^{k}\Big) \mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^2\, \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^2$$

$$+\sum_{\substack{k\geq p+1\\ \ell\geq 1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \binom{p}{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\eta_{i-1}-\eta_i) z_i^{k}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i) z_i^{\ell}\Big)\Big(\mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^1\, \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^2 + \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^2\, \mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^1\Big)$$

$$+\sum_{\substack{\ell\geq 1\\ k\geq 1}} \frac{\varepsilon^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i) z_i^{k}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i) z_i^{\ell}\Big) \mathrm{ad}_{A_0}^{\ell} A_1^1\, \mathrm{ad}_{A_0}^{k} A_1^1$$

Comme dans [k 3] p. 136, posons $L^{(\nu)}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i) z_i^{\nu}$

$$P^{(\nu)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i)(\eta_{i-1}-\eta_i)\, z_i^{\nu}$$

$$Q^{(\nu,\tau)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \sum_{1\leq i<j\leq n} (\xi_{i-1}-\xi_i)(\eta_{j-1}-\eta_j)\, z_i^{\nu} z_j^{\tau}$$

$$S^{(\nu)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_{i-1}-\xi_i)(\eta_{i-1}+\eta_i)\, z_i^{\nu}$$

et choisissons un entier M, des nombres réels $z_1, \dots z_M$, $\eta_0 = 0$, $\eta_1, \dots \eta_n$ tel que le système suivant d'équations algébriques admette une solution $\xi(\beta)$ pour chaque β, K étant un entier $\geq 2p+1$:

$$\left\{\begin{array}{lll} L^{(\nu)}(\underline{\xi}) = 0 \ , \quad L^{(\nu)}(\underline{\eta}) = 0 & , & \nu = 0, \dots, K \\ P^{(\nu)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = 0 & , & \nu = 0, \dots, K \\ Q^{(\nu,\tau)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = 0 & , & \nu, \tau = 0, \dots, K \\ S^{(\nu)}(\underline{\xi},\underline{\eta}) = 0 & , & \nu = 0, \dots, K \\ S^{(\nu)}(\underline{\eta},\underline{\xi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq 2p+1 \\ \beta & \nu = 2p+1 \end{cases} & & \end{array}\right. \qquad (22)$$

(La démonstration de ce résultat est purement technique (voir [k3] lemme A.5), elle ne sera pas refaite ici).

Pour le choix de cette variation, on trouve

$$\text{et} \quad \delta_2 V = \varepsilon^{2\alpha} \Big\{ S^{(2p+1)}(\xi,\underline{\xi})\, B^{11}_{0,\nu-1} + S^{(2p+1)}(\xi,\underline{\eta})\, B^{21}_{p,\nu-1}$$

$$+ S^{(2p+1)}(\underline{\eta},\xi)\, B^{12}_{0,\nu-1-p} + S^{(2p+1)}(\eta,\underline{\eta})\, B^{22}_{p,\nu-1-p}$$

$$+ o(\varepsilon^{2p+1})$$

En utilisant les hypothèses du théorème et les relations (22), il vient :

$$\delta_2 V = \varepsilon^{2\alpha+2p+1} \left(b + \beta g + h \right) + o\left(\varepsilon^{2\alpha+2p+1}\right)$$

où $b \in \mathcal{L}$ (b provient de $B^{11}_{0,\nu-1}$ et $B^{21}_{0,\nu-1-p}$, $\nu = 2p+1$)

$$g = \frac{1}{2} \frac{1}{(2p+1)!} \binom{2p}{p} B^{12}_{0,p}$$ et

$$h = \frac{1}{2} \frac{1}{(2p+1)!} \binom{2p}{p} S^{(2p+1)}(\underline{\eta},\underline{\eta})\, B^{22}_{p,p}$$

En appliquant le lemme fondamental 20, on en déduit que

$$\forall \beta \,, \quad \beta \bar{g} + \bar{h} \in \mathcal{P}_{\bar{u}}$$

ou encore

$$\langle \bar{p}(t), \; \beta \bar{g} + \bar{h} \rangle \geqslant 0 \quad ;$$

or, β étant arbitraire, la condition $\langle \bar{p}(t), \bar{g} \rangle = 0$, $\forall\, t \in [0,T]$ est une condition nécessaire d'optimalité. Elle s'écrit encore (voir (20'))

$$\langle \bar{p}(t) \,, \; \frac{\partial}{\partial u_1} \mathrm{ad}^{\,p}_{A_0} A_1^2 \rangle = 0$$

En choisissant une variation de la forme

$$\left(\delta u_1^i(t)\ ,\ \delta u_2^i(t)\right) = \varepsilon^{\alpha}\left(\left(0, \xi_i(\beta)\right) + \left(\eta_i, 0\right)\frac{(t-\theta)^{\rho}}{\rho!}\right),\ \rho \geq 0$$

pour $t \in [\theta + \varepsilon \mathfrak{z}_i\ ,\ \theta + \varepsilon \mathfrak{z}_{i+1}[$, on montrerait de la même façon que

$$\langle \bar{p}(t), \frac{\partial}{\partial u_2} \mathrm{ad}_{A_0}^{\rho} A_1^1 \rangle = 0 \quad , \quad \forall t \in [0,T] \qquad \text{est}$$

une condition nécessaire d'optimalité.

Avec un raisonnement analogue, on retrouve également le théorème 21.2 de [k3]. Il s'exprime ici par :

<u>Théorème V.2</u> : Si $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t)\ ,\ \bar{u}_2(t))$ est minimisante pour le problème de commande $\sum''$ sur [o,T] et si

$$\bar{A}_2^{ii} \in \bar{\mathcal{L}} \quad , \quad \overline{[\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu-1} A_1^i\ ,\ \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1^i]} \in \bar{\mathcal{L}} \quad , \ \nu = 1,\dots,\rho_i\ ,\ \rho_i \geq 0$$

et i = 1,2 alors

i) $\quad \langle \bar{p}(t), \overline{\frac{\partial}{\partial u_j} \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1^i} \rangle = 0 \quad , \quad i \neq j \quad , \quad \nu \leq \rho_1 + \rho_2 + 1$

ii) $\quad \langle \bar{p}(t), \overline{[\mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1^1\ ,\ \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu} A_1^2]} \rangle = 0 \quad , \quad \nu + \mu \leq \rho_1 + \rho_2$

$\forall t \in [0,T]$, $\bar{p}(t)$ étant défini par (20).

<u>Remarque</u> : En utilisant les variations suivantes [gl]

$$\delta u_1(t) = \sum_{i=1}^{p} \delta u_1^i(t) \quad , \quad \delta u_1^i(t) = \begin{cases} a_i & ,\ \theta \leq t < \theta + q_i \varepsilon \\ 0 & \ t \notin [\theta, \theta + q_i \varepsilon] \end{cases}$$

$$0 < q_i < q_{i+1} \leq 1$$

$$\delta u_2(t) = \sum_{j=1}^{q} \delta u_2^j(t) \qquad \delta u_2^j(t) = \begin{cases} b_j & \ \theta \leq t < \theta + p_j \varepsilon \\ 0 & \end{cases}$$

$$0 < p_j < p_{j+1} \leq 1$$

nous aurions retrouvé les résultats du paragraphe 7.3 de [gl]. Mais la plupart de ceux-ci sont des cas particuliers des théorèmes précédents. Notons que ces variations sont différentes de celles utilisées plus haut, en effet, les intervalles de variations pour δu_1 et δu_2 ne sont pas ici nécessairement les mêmes.

V.2. - Temps final libre

Jusqu'à présent, l'instant T du problème de commande était fixé. L'objet de ce paragraphe est de montrer que notre approche s'applique aussi au problème singulier à temps final variable et donc en particulier à l'importante classe de problèmes en "temps minimal". Notons tout de suite qu'il n'était pas a priori certain que notre approche se prolonge à cette classe de problèmes car les développements fonctionnels utilisés ne sont l'analogue des développements de Taylor que dans le cas où T est fixé (voir [b14, et [f5])*. Ce problème a été étudié en particulier par Agracev et Gamkrelidze [g1] pour le cas linéaire en la commande. On remarque cependant que l'approche, là-aussi complexe, aboutit, sans véritable nouveauté, à des formulations équivalentes à celles de Krener [k4] : "Naturally, both formulas are equivalent, although it is difficult to say which one will turn out to be more convenient for computations". On voit ici encore qu'une préoccupation essentielle dans l'étude des problèmes singuliers est l'adaptation des conditions nécessaires obtenues, aux applications. L'idée est donc ici, d'étendre les nouvelles formulations du corollaire III.2, dont nous avons vu l'intérêt à travers un exemple (IV.5), au cas où l'instant final est variable. Il existe d'autres études sur les problèmes de commande singuliers en temps minimal, citons les travaux de Bonnard [b9] pour les systèmes évoluant dans $\mathbb{R}^3$.

Considérons ici le problème de commande suivant (Σ''')

$$q = F(t,\ q\ ;\ u)\ ,\ q(0)\ \text{donné},$$

l'état q appartient à une variété analytique Q de dimension N. Le champ de vecteurs F est analytique par rapport à toutes les variables t, q et u : trouver des conditions nécessaires d'optimalité pour qu'à un instant $\bar{T}$ minimal,

$h_i(q(\bar{T})) = 0,\ i = 1,\dots,\ N-n\quad (n<N)$.

---

* Pour un instant *non* fixé T on consultera [f3].

a - Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre.

Posons $t = \varphi(s)$, $s \in [0,1]$ où $\dot{\varphi}(s) = u_0(s)$ est une fonction supposée strictement positive sur l'intervalle [0,1]. Ce changement variable classique permet de retrouver un problème de commande du type $\sum'$; en effet,

$$dt = \dot{\varphi}(s)ds = u_o(s)ds$$

de plus, $\dot{q} = F(t,q,u)$ peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{dq}{ds} = F(\varphi(s), q, u \circ \varphi(s))\, u_o(s) \\ \dot{t} = u_o(s) \end{cases}$$

Désignons $u_o\varphi$ par v, t par q^{N+1} et s par q°, il vient :

Proposition V.2 : Le problème de commande $\sum'''$ est équivalent au problème de commande à temps fixe suivant, $q^\circ \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \dot{q} = F(q^{N+1}, q, v(q^\circ))\, u_o(q^\circ) \\ \dot{q}^{N+1} = u_o(q^\circ) \\ y = q^{N+1} \end{cases} \qquad q(0) = q_o$$

Trouver des conditions nécessaires pour que la sortie $y(1) = q^{N+1}(1)$ soit minimale et telle que $h_i(\bar{q}(1)) = 0$, $i = 1, \ldots, N-n$.

Pour ce nouveau problème, soit, dans une carte locale,

$$A_o := \sum_{k=1}^{N} F^k(q^{N+1}, q, v)\, u_o(q^\circ) \frac{\partial}{\partial q^k} + u_o(q^\circ) \frac{\partial}{\partial q^{N+1}} + \frac{\partial}{\partial q^\circ}, \qquad (23)$$

$$A_o' := \sum_{k=1}^{N} F^k(q^{N+1}, q, v) \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial q^{N+1}}, \text{ ainsi } A_o = u_o(q^\circ) A_o' + \frac{\partial}{\partial q^\circ}$$

de même

$$A_1 := \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F^k}{\partial v}(q^{N+1}, q, v)\, u_o(q^\circ) \frac{\partial}{\partial q^\circ} := u_o(q^\circ)\, A_1'$$

Il est clair que les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de commande Σ''' sont en "bijection" avec celles de ce nouveau problème. On souhaite cependant, que ces conditions *ne dépendent pas* du choix du changement de variable φ et donc de u . Regardons tout d'abord les conditions nécessaires du premier ordre et pour cela, posons

$$\omega_0(1,\tau,a) = e^{(1-\tau)A_0} q^{N+1} \Big|_{(q,q^{N+1})=a}$$

Il s'agit de la valeur, à l'instant 1, de la sortie $y = q^{N+1}$, pour les conditions initiales $(q(\tau), q^{N+1}(\tau)) = a, \tau \in [0,1]$.

D'après le lemme 4, si $\bar{v}(s)$ est une commande extrémale sur [0,1]

alors,

$$\overline{ad^{\nu}_{A_0} A_1 \omega_0(1,\tau,q,q^{N+1})}\Big|_{(q,q^{N+1})=a} = 0, \ \forall \nu \geq 0, \ \forall \tau \in [0,1] \tag{24}$$

La proposition suivante est alors immédiate :

<u>Proposition V.3</u> : Si l'ensemble des conditions nécessaires du premier ordre (24) est vérifié alors

$$\overline{ad^{\nu}_{A'_0} A'_1 \omega_0(1,\tau,q,q^{N+1})}\Big|_{(q,q^{N+1})=a} = 0, \ \forall \nu \geq 0, \forall \tau \in [0,1]$$

A'_0 et A'_1 étant définis en (23).

Définissons maintenant $p(\tau) = d\omega_0 = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial q^i}\right)_{0 \leq i \leq N+1}$; par construction, sur toute trajectoire optimale, on a

$$\bar{\omega}(1,\tau,a) = \bar{q}^{N+1}(1) = \int_\tau^1 u_0(s)\,ds = 1-\tau$$

si bien que $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial q^0} = -1$; de plus, $\frac{\partial \omega_0}{\partial q^{N+1}} = 1$; ainsi dans la suite

$$\bar{p}(\tau) = \left(-1, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial \omega_0}{\partial q^N}, 1\right). \tag{25}$$

On obtient alors:

<u>Proposition V.4</u> : Si v(s) est une commande extrémale sur [0,1] alors
$$< \bar{p}(\tau), \mathrm{ad}^{\nu}_{A'_0} A'_1 > = 0 \quad , \forall \nu \geqslant 0 \, , \, \forall \tau \in [0,1]$$

<u>Remarque</u> : Dans le problème à temps libre, on peut utiliser la relation supplémentaire
$$\overline{A'_0 \, \omega_c^{\tau} (1, \tau, q, q^{N+1})}\Big|_{(q,\, q^{N+1}) = a} = 0 \quad , \forall \tau \in [0,1] \tag{24'}$$

(Si $H = < p(t), F(t, q, v) >$, cette relation correspond à $\bar{H} + 1 = 0$, sur [0,1]).

b- <u>Conditions d'optimalité du deuxième ordre</u> :

Intéressons-nous maintenant aux conditions du second ordre. Soit $\bar{v}(s)$ et $\bar{q}(s)$, $s \in [0,1]$ une commande extrémale et la trajectoire associée (c'est-à-dire vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité (24)) on montre

<u>Proposition V.5</u> : μ étant un entier pair,

si $$\bar{B}'_{0,\nu} = \overline{\frac{\partial}{\partial v} \mathrm{ad}^{\nu}_{A'_0} A'_1} \in \bar{\mathcal{L}} \qquad \nu = 0, \dots, \mu - 1$$

alors $$\bar{B}_{0,\mu} = \mu_0^{\mu+1}(q^\circ) \, \overline{B'_{0,\mu}} + \bar{\ell} \quad , \quad \bar{\ell} \in \bar{\mathcal{L}}$$

de même, si
$$\overline{[\mathrm{ad}^{\nu-1}_{A'_0} A'_1 \, , \, \mathrm{ad}^{\nu}_{A'_0} A'_1]} \in \bar{\mathcal{L}} \quad , \nu = 1, \dots, \rho - 1$$

alors $$\overline{[\mathrm{ad}^{\rho-1}_{A_0} A_1 \, , \, \mathrm{ad}^{\rho}_{A_0} A_1]} = \mu_0^{2\rho+1}(q^\circ) \, \overline{[\mathrm{ad}^{\rho-1}_{A'_0} A'_1 \, , \, \mathrm{ad}^{\rho-1}_{A'_0} A'_1]} + \bar{m} \, , \quad \bar{m} \in \bar{\mathcal{L}}.$$

<u>Preuve</u> :

Calculons par exemple $[\mathrm{ad}^{\rho-1}_{A_0} A_1 \, , \, \mathrm{ad}^{\rho}_{A_0} A_1]$

et posons
$$\mathrm{ad}^{\rho-1}_{A_0} A_1 = \mu_0^{\rho}(q^\circ) \, \mathrm{ad}^{\rho-1}_{A'_0} A'_1 + \sum_{i=1}^{\rho-1} f_i(q^\circ) \, \mathrm{ad}^{\rho-i-1}_{A'_0} A'_1$$ où $f_i(q^\circ)$ est une est une certaine fonction de q°,

$ad_{A_o}^{p} A_1 = u_o^{p+1}(q^o)\, ad_{A'_o}^{p} A'_1 + \sum_{i=1}^{p} q_i(q^o)\, ad_{A'_o}^{p-i} A'_1$ (q_i se calcule en fonction des fonctions f_i).

ainsi

$$[ad_{A_o}^{p-1} A_1 , ad_{A_o}^{p} A_1] = u_o^{2p+1}(q^o)\, [ad_{A'_o}^{p-1} A'_1 , ad_{A'_o}^{p} A'_1]$$

où $\bar{m} \in \bar{\mathcal{L}}$ d'après les hypothèses.

La fonction $u_o(s)$, $s \in [0,1]$ étant supposée *strictement positive* on en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème V.3</u> : Soit $\bar{v}(s)$, $\bar{q}(s)$ un couple extrémal d'ordre s sur $[0,1]$, si $\bar{v}(s)$ est minimisante sur $[0,1]$

alors

$$\langle \bar{p}(\tau), (-1)^s \overline{B'_{0,2s}} \rangle \geq 0 \qquad , \forall \tau \in [0,1]$$

ou de façon équivalente,

$$- \langle \bar{p}(\tau) , \overline{[ad_{A_o}^{s-1} A_1 , ad_{A_o}^{s} A_1]} \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,T]$$

$p(\tau)$ étant défini par (25).

<u>Remarque</u> : La première condition (s = 1) du deuxième ordre

$$\langle \bar{p}(\tau), \overline{B'_{0,2}} \rangle \leq 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,1]$$

s'écrit encore dans le cas particulier d'un problème Σ linéaire en la commande :

$$\langle \bar{p}(\tau) , \overline{[A_1, [A_o, A_1]} \rangle \leq 0, \qquad \forall \tau \in [0,1].$$

c - <u>Exemple</u> [b 10] :

Il s'agit du problème de mise à zéro en temps minimal de la vitesse angulaire d'un engin spacial gouverné par un couple de rétrofusées opposées. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = a_1 q^2 q^3 + b_1 u(t) \\ \dot{q}^2 = a_2 q^1 q^3 \\ \dot{q}^3 = a_3 q^1 q^2 + b_3 u(t) \end{cases} \qquad (b_1, b_3) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \quad , \quad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \quad , \quad a_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3} \quad , \quad I_1 > I_2 > I_3 > 0 \, ,$$

$|u(t)| < 1$ (on ne s'intéresse pas ici au problème de synthèse mais seulement aux conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par une commande singulière).

Dans les problèmes de commande optimale, il apparaît que la *dimension* de l'espace d'état et celle des commandes jouent un rôle important, dans le sens que les solutions s'obtiennent plus facilement dans des cas particuliers que dans les cas tout à fait généraux. Prenons par exemple le problème de la recherche d'un bouclage analytique pour un problème *régulier*. Il est montré [64] que l'équation différentielle (issue des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre voir & I) vérifiée par cette commande, est une équation différentielle non linéaire du *premier ordre*, lorsque le nombre d'entrées est égal à celui de la dimension de l'état du système. Pour ce qui est du problème singulier en temps minimal ci-dessus, la commande étant scalaire et l'état de dimension trois, la commande singulière, généralement fonction de l'état et du vecteur adjoint, est indépendante de ce dernier. De plus, le vecteur adjoint est ici parfaitement connu en fonction de l'état.

Pour ce problème,

$$A'_0 = (a_1 q^2 q^3 + b_1 u)\frac{\partial}{\partial q^1} + a_2 q^1 q^3 \frac{\partial}{\partial q^2} + (a_3 q^1 q^2 + b_3 u)\frac{\partial}{\partial q^3}.$$

$$A'_1 = b_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + b_3 \frac{\partial}{\partial q^3}$$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent, si $\bar{p}(t) = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, 1)$

$$\begin{cases} (a_1 q^2 q^3 + b_1 u)p_1 + a_2 q^1 q^3 p_2 + (a_3 q^1 q^2 + b_3 u)p_3 + 1 = 0 \\ b_1 p_1 + b_3 p_3 = 0 \\ b_3 a_1 q^2 p_1 + a_2 (b_1 q^3 + b_3 q^1) p_2 + b_1 a_3 q^2 p_3 = 0 \end{cases}$$

provenant respectivement de (voir (24') et propositioin V.3)

$$\overline{A'_0 \omega_0} = 0 \quad , \quad \overline{A'_1 \omega_0} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{[A'_0, A'_1]\omega_0} = 0 \quad . \tag{26}$$

On en déduit p_1, p_2, p_3:

$$p_1 = -\frac{b_3}{b_1} p_3 \quad , \quad p_2 = -\frac{1}{b_1} \frac{(b_1^3 a_3 - b_3^2 a_1)q^2}{a_2 (b_1 q^3 + b_3 q^1)} p_3$$

et

$$p_3 = -\frac{b_1 q^3 + b_3 q^1}{b_3 b_1 q^2 \left(a_3 (q^1)^2 - a_1 (q^3)^2\right)}$$

De même, en utilisant $\overline{ad^2_{A'_o} A'_1 \omega_o} = 0$

on obtient, en supposant $(a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2) \neq 0$

$$\bar{u}(q^1, q^2, q^3) = \frac{a_2 \left(a_1 (q^3)^2 - a_3 (q^1)^2\right)\left(b_1 q^3 + b_3 q^1\right)}{\ell\, q^2 \left(a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2\right)}$$

Ecrivons maintenant la condition nécessaire d'optimalité vérifiée par une commande singulière minimisante. En appliquant la partie ii) (pour s = 1) du théorème V.3, il vient :

$$< \bar{p}(\tau)\,,\ \overline{[A'_1, [A'_o, A'_1]]} > \ \leqslant 0 \quad , \forall \tau \in [0,1]$$

Ce qui donne ici

$$- \ell \, \frac{a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2}{a_3 (\bar{q}^1)^2 - a_1 (\bar{q}^3)^2} \leqslant 0$$

Donc, si on se place dans le cas où $(a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2) > 0$ comme en [b10] une trajectoire singulière telle que $a_3 (\bar{q}^1)^2 - a_1 (\bar{q}^3)^2$ n'est pas optimale.

Supposons maintenant que $a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2 = 0$; les relations (26) entraînent

$$p_1 = \frac{b_3}{a_3 b_1 q^1 - a_1 b_3 q^3} \quad , \ p_2 = 0 \quad , \ p_3 = \frac{-b_1}{a_3 b_1 q^1 - a_1 b_3 q^3} \quad , \ p_4 = 1$$

Appliquons la partie ii) (pour s = 2) du théorème V.3, il vient :

$$< \bar{p}(\tau)\,,\ \overline{[ad_{A'_o} A'_1\,,\ ad^2_{A'_o} A'_1]} > \ \leqslant 0, \quad \forall \tau \in [0,1]$$

Un calcul simple montre que cette condition se réduit à

$$a_2 a_3 \leqslant 0$$

Or d'après la définition de a_2 et a_3, ce produit est toujours positif. Par conséquent, aucune trajectoire singulière issue du problème énoncé plus haut, dans le cas particulier où les coefficients vérifient la relation $a_3 b_1^2 - a_1 b_3^2 = 0$, ne peut être optimale. La commande est donc ici nécessairement Bang Bang.

VI . ANALYSE A LA JONCTION ENTRE UN ARC SINGULIER ET UN ARC NON-SINGULIER.

VI.1 Introduction.

VI.2 Présentation du problème.

VI.3 Exemple.

VI.4 Condition nécessaire d'optimalité en un point de jonction.

IV.1 - Introduction

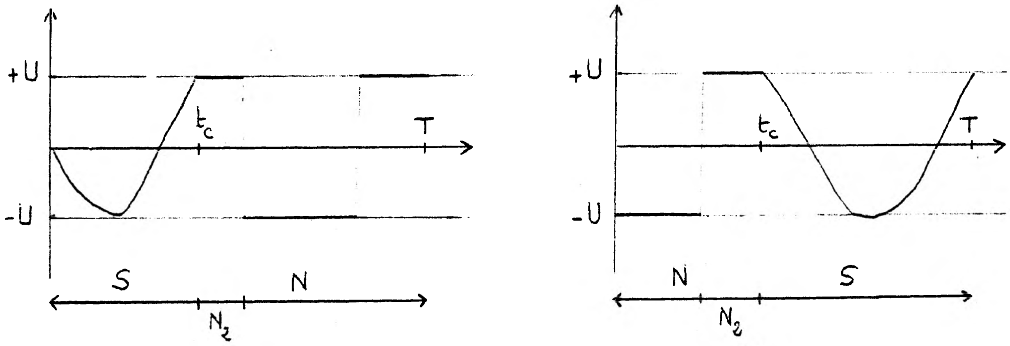
Cette étude est essentielle dans le cadre de la commande optimale singulière. Si jusqu'ici nous avons considéré un intervalle $[0,T]$ où le problème admettait une commande singulière sur cet intervalle, il est bien évident, qu'en général, une solution du problème de commande contient à la fois des arcs singuliers et arcs non singuliers. On rappelera un exemple dans la partie suivante). Les premiers résultats sur le sujet sont relativement récents [m2]. Il y a eu depuis quelques critiques, les unes déjà mentionnées au paragraphe I.5 et une, soulevée par Bell [b4] concernant plus particulièrement l'assertion d'un théorème, dès lors appelé conjecture de Mc Danell. Sans rentrer dans les détails bibliographiques, citons les travaux récents de Bortins [b11] où sont étendus des résultats existants. Toutefois, l'hypothèse de normalité, lorsque des contraintes terminales sont imposées, est encore indispensable.

On obtiendra ici les résultats de [b11] *sans* cette hypothèse. Ceci sera encore possible grâce à la nouvelle définition de l'ordre local (définition 2). D'autre part, les identités obtenues au paragraphe I4 permettent en général de conclure beaucoup plus rapidement. Nous espérons pouvoir ainsi montrer que notre approche, en rassemblant des thèses aussi éloignées, que celles de Knobloch ou de Bortins, unifie en grande partie, les travaux concernant la commande optimale singulière. Nous prouverons par là l'importance, dans cet autre domaine, de l'utilisation des crochets de Lie de champs de vecteurs.

VI.1 - Présentation du problème.

Dans l'étude des jonctions entre arc singulier et arc non-singulier, il est naturel de ne s'intéressser qu'à une composante de la commande u(t). Il est en effet peu probable que des jonctions se produisent au même temps pour différentes composantes. Dans la suite, on supposera donc u scalaire et $|u(t)| \leqslant U$. On fera les mêmes hypothèses d'analyticité qu'aux chapitres précédents, certainement trop générales mais qui évitent de préciser exactement le degré de différentiabilité des fonctions, nécessaire à chaque étape.
Nous ferons d'autre part les hypothèses suivantes :

H1 - La jonction entre un arc singulier et un arc non singulier, en un point $t_c \in [0,T]$ est analytique, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe au moins un voisinage du point t_c dans lequel la commande est analytique par morceaux. (On se rapportera au commentaire de l'exemple de [ℓ3] pour l'existence d'une jonction non analytique). Dans la suite, N désigne l'intervalle où la commande est non singulière et S désigne celui où elle est singulière.



H2 - On suppose de plus qu'il existe N_1 tel que $\bar{H}_u \neq 0$ et N_1 à t_c pour extrémité. D'autre part, la jonction étant supposée analytique, il existe un intervalle $N_2 \subset N_1$ ayant t_c pour extrémité et tel que $\bar{H}_u$ à un signe constant.

H3 - Enfin, on suppose que le plus petit ordre de la dérivée totale par rapport à t de u qui est discontinue est fini.

On posera $\ell = \min \{ i \geq 0, \quad \bar{u}_s^{[i]}(t_c) \neq \bar{u}_n^{[i]}(t_c) \}$
où $\bar{u}_n$ et $\bar{u}_s$ désignent respectivement la commande extrémale sur l'arc N et sur l'arc S. Notons que $\bar{u}_n = \pm U$ et $\bar{u}_n^{[i]}(t_c) = 0$, $i \geq 1$.
A partir de ces hypothèses, on obtient le lemme général suivant:

<u>Lemme 24</u> : Soit $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ une commande extrémale vérifiant les hypothèses H1, H2, H3. Alors,

$$\exists \varepsilon > 0 \; : \quad \bar{H}_u(t_c - \varepsilon)\left(\bar{u}_n^{[\ell]}(t_c) - \bar{u}_s^{[\ell]}(t_c)\right) < 0 \quad \text{si} \quad t_c - \varepsilon \in N_1$$

et

$$(-1)^{\ell}\, \bar{H}_u(t_c + \varepsilon)\left(\bar{u}_n^{[\ell]}(t_c) - \bar{u}_s^{[\ell]}(t_c)\right) < 0 \quad \text{si} \quad t_c + \varepsilon \in N_1$$

<u>Preuve</u> : Supposons que $t_c - \delta \in N_1$ et soit $\sigma = -\,\mathrm{sg}\, \bar{H}_u(t_c - \delta)$
alors $t_c + \delta \in S$

et $$\sigma U - \bar{u}(t_c + \delta) = \sigma U - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\delta^i}{i!} \bar{u}_s^{[i]}(t_c) + o(|\delta|^{\ell});$$

d'après H3 on peut encore écrire,

$$\sigma U - \bar{u}(t_c + \delta) = \frac{\delta^{\ell}}{\ell!}\left(\bar{u}^{[\ell]}(t_c) - \bar{u}_s^{[\ell]}(t_c)\right)$$

L'inégalité $|u(t)| \leq U$ permet de conclure ($\delta = \pm \varepsilon$).

<u>Remarque</u> : Dans ce lemme, on n'utilise pas les propriétés d'optimalité de l'arc singulier. Est-il possible d'utiliser les conditions nécessaires d'optimalité, maintenant connues de "chaque côté" de t_c pour obtenir une condition nécessaire d'optimalité *au point* t_c ? Cette question, préalablement posée par Mc Danell et Powers [m2] est à l'origine de tous les travaux qui suivront sur ce sujet. L'exemple suivant étudié successivement par Lewis [ℓ3] et Powers [p2] permet de se rendre compte de l'importance de cette question dans les problèmes de synthèses.

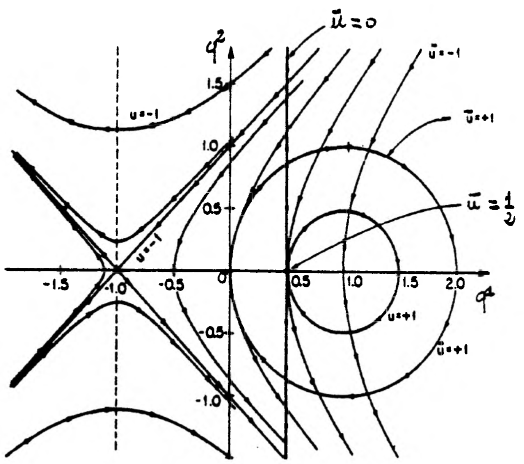
VI.2 - <u>Exemple</u>

Considérons à nouveau l'exemple du paragraphe I.5,

$$\begin{cases} q^1 = q^2 u \\ q^2 = u - q^1 \\ q^3 = (q^1 - 1/2)^2 \\ y = q^3 \end{cases}$$

$t \in [t_0, t_1]$, $q^1(t_0) = \xi_0 \neq \frac{1}{2}$, $q^2(t_0) = \xi_2 \neq 0$ et $|u| \leq 1$.

Il existe quatre commandes optimales pour ce problème, les commandes non singulières $\bar{u} = +1$ et $\bar{u} = -1$ et les commandes singulières $\bar{u} = 0$ et $\bar{u} = 1/2$. Le plan de phase est le suivant [p 2] :



Plaçons-nous en un point initial (ξ_1, ξ_2) $\neq$ (1/2, 0). En général, on peut soit utiliser une commande Bang Bang, soit commencer par $\bar{u} = +1$ ou $\bar{u} = -1$ jusqu'à atteindre la droite $q^1 = 1/2$ et terminer par $\bar{u} = 0$. La question est la suivante : cette dernière commande comprenant à la fois une partie non-singulière et une partie singulière, est-elle minimisante ? Bien que cet exemple n'ait aucun support physique, on conçoit qu'une telle question ait beaucoup d'importance. Il peut être en effet beaucoup plus "commode" d'utiliser une commande à l'intérieur de ces bornes.

IV.3 - Une condition nécessaire d'optimalité en un point de jonction.

Introduisons le paramètre α

$$\alpha = \min \left\{ i \geq 0 \quad , \quad < \bar{p}(t_c) \, , \, \overline{ad^{i}_{A_0} A_1}^{\,n}_{|q=a} \neq 0 > \right\}$$

La notation $\overline{\quad}^{\,n}$ (resp. $\overline{\quad}^{\,s}$), signifie l'évaluation le long de l'arc non singulier (resp. singulier). Rappelons que

$$< \bar{p}(\tau) \, , \, \overline{ad^{i}_{A_0} A_1}^{\,s} > = 0 \quad , \forall i \geq 0 , \quad \forall \tau \in S$$

Soit δ tel que $t_c + \delta \in N_2$ alors,

$$\bar{H}_u (t_c + \delta) = \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\delta^i}{i!} < \bar{p}(t_c) \, , \, \overline{ad^{i}_{A_0} A_1}^{\,n} > + o(|\delta|^{\alpha})$$

$$= \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha!} < \bar{p}(t_c) \, , \, \overline{ad^{\alpha}_{A_0} A_1}^{\,n} > + o(|\delta|^{\alpha})$$

D'après le lemme précédent, il vient :

<u>Lemme 25</u> : Soit $\bar{u}(t)$, $t \in [o,T]$, une commande extrémale vérifiant les hypothèses H1, H2, H3. Alors, t_c étant un point de jonction,

$\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$(-1)^{\alpha} < \bar{p}(t_c) \, , \, \overline{ad^{\alpha}_{A_0} A_1}^{\,n} > \left(\bar{u}_n^{[\ell]}(t_c) - \bar{u}_s^{[\ell]}(t_c) \right) < 0 \quad \text{si } t_c - \varepsilon \in N_1$$

ou

$$(-1)^{\ell} < \bar{p}(t_c) \, , \, \overline{ad^{\alpha}_{A_0} A_1}^{\,n} > \left(\bar{u}_n^{[\ell]}(t_c) - \bar{u}_s^{[\ell]}(t_c) \right) < 0 \quad \text{si } t_c + \varepsilon \in N_1$$

Avant de donner une généralisation du théorème 5.1 de [b.11]. Rappelons le principal résultat du paragraphe III.

Soit r l'ordre du problème (définition 1) et s l'ordre de l'arc étudié (définition 2). Soit $(\bar{u}(t), \bar{q}(t)$ un couple extrémal d'ordre s. Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[o,T]$ alors

i) $$< \bar{p}(\tau) \, , \, (-1)^s \, \overline{B_{0,2s}}_{|q=a} > \; \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \in [0,T] ,$$

ou de façon équivalente,

ii) $\quad - \langle \bar{p}(\tau) , \overline{\left[ad_{A_0}^{s-1} A_1 , ad_{A_0}^{s} A_1\right]_{|q=a}} \rangle \quad \geq 0 \quad , \forall \tau \in [0,T] \; ;$

$\bar{p}(\tau)$ étant *une* solution de (2).

Dans la suite, on note R_s le champ de vecteurs $\left[ad_{A_0}^{s} A_1 , ad_{A_0}^{s-1} A_1\right]_{|q=a}$
La condition ii) devient

$$\langle p(\tau) , \bar{R}_s(\tau) \rangle \geq 0 \quad , \forall \tau \in [0,T]$$

Supposons tout d'abord que $\langle \bar{p}(t_c), \bar{R}_s(t_c)\rangle \neq 0$,on établit :

__Théorème VI.1__ : Soit $\bar{u}(t)$, $t \in [0,T]$ une commande telle que les hypothèses H1, H2, H3 soient vérifiées et telle que le couple $(\bar{u}(t),\bar{q}(t))$ soit d'ordre s sur l'intervalle $S \subset [0,T]$. Si $\bar{u}(t)$ est minimisante sur $[0,T]$ alors, quand $\ell > 2s - 3r$, $\ell + s$ est *impair*.

__Preuve__ : Pour simplifier, on supposera $\ell \geq 1$ et $t_c + \varepsilon \in N_1$
D'après le lemme précédent, t_c étant le point de jonction,

$$(-1)^{\ell} \langle \bar{p}(t_c) , \overline{ad_{A_0}^{\alpha} A_1}^{\,n} \rangle \, u_s^{[\ell]}(t_c) > 0$$

Par un raisonnement analogue à la démonstration du théorème 5.1 de [b11], on montre tout d'abord que $\alpha = 2s + \ell$. (Rappelons que

$$\alpha = \min \left\{ i \geq 0 \quad , \langle \bar{p}(t_c), \overline{ad_{A_0}^{i} A_1}^{\,n} \rangle \neq 0 \right.$$

s est l'ordre local (définition 2) et

$$\ell = \min \left\{ i \geq 0 \quad , \quad \bar{u}_s^{[i]}(t_c) \neq 0 \right\} \quad)$$

Considérons maintenant $ad_{A_0}^{\alpha} A_1$, on peut écrire

$$ad_{A_0}^{\alpha} A_1 = \sum_{i \geq 0} \left(\frac{\partial}{\partial u^{[i]}} ad_{A_0}^{\alpha} A_1 \right) u^{[i]}$$

d'après la définition de ℓ, on en déduit que

$$\overline{ad_{A_0}^{\alpha} A_1}(t_c) = \sum_{i \geq \ell} \overline{\frac{\partial}{\partial u^{[i]}} ad_{A_0}^{\alpha} A_1} \, \bar{u}_s^{[i]}(t_c)$$

Mais d'après le lemme 14 et la définition de s,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial u^{[k]}} ad_{A_0}^{2s+\ell} A_1} = \begin{cases} \bar{\ell}_k & , k > 0 \\ \bar{\ell}_0 - (-1)^s \bar{R}_s & , k = 0 \end{cases}$$ avec

$\ell_k \in \mathcal{L}$, $k \geq 0$.

En appliquant conjointement le lemme précédent et le corollaire III.2 rappelé au début de ce paragraphe, on en déduit que si la jonction $(S)(t_c)(N)$ est minimisante alors

$$\begin{cases} (-1)^{\ell+s} < \bar{p}(t_c) , \bar{R}_s(t_c) > \left(u_s^{[\ell]}(t_c)\right)^2 < 0 \\ \text{et} \quad < \bar{p}(t_c) , \bar{R}_s(t_c) > \, > 0 \end{cases}$$

et

d'où $\ell + s$ est un entier impair.

<u>Exemple</u> : Considérons en particulier la commande singulière $\bar{u} = 0$ du problème précédent ; il est facile de voir que la trajectoire associée $\bar{q}(t)$, $t \in S$ vérifie

$$\bar{q}'(t) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \bar{q}^2(t) = \bar{q}^2(t_1) - \frac{1}{2}(t - t_1)$$

et que $\ell = 0$,

Le théorème précédent indique donc que la commande

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \pm 1 & , \ t \in [t_0, t_c] \\ = 0 & \ t \in [t_c, t_1] \end{cases}$$

est minimisante.

Par contre, considérons la commande singulière $\bar{u} = 1/2$. On a ici encore $\ell = 0$ ($\bar{u}_n = \pm 1$) mais on ne pourra pas utiliser le théorème car ici, $\ell = 0 < 2s - 3r$. Nous savons en effet (cf. exemple du &I5) que $r = 1$ et $s = 2$.

A N N E X E   B

[B1] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE - Some second order necessary condition in optimal control. Systems and Control Letters,5,1984,pp.135-143.

Systems & Control Letters 5 (1984) 135–143
North-Holland
November 1984

Some second-order necessary conditions in optimal control

F. LAMNABHI-LAGARRIGUE
Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France

Received 8 February 1984
Revised 17 May 1984 and 13 August 1984

In optimal control problems any extremal arc which trivially satisfies the Maximum Principle, that is a first-order control variation produces no change in cost, is called singular. Higher-order conditions are then needed to check the optimality of such arcs. Using the Volterra series associated with the variation of the cost functional gives a new context for analyzing singular optimal control problems. A basic optimality criterion for a fixed terminal time Mayer problem is obtained which allows one to derive the necessary conditions for optimality in terms of Lie brackets of vector fields associated with the dynamics of the problem.

Keywords: Optimal control, Functional expansion, Second variation, Maximum principle.

Introduction

The study of second-order necessary conditions in optimal control has recently received much attention in the literature. These conditions first appeared in singular optimal control problems (for example, in the aerospace field or chemical industry [6]) where the Maximum Principle, i.e. the first-order necessary condition, is trivially satisfied. We refer the reader to the survey papers of Gabasov and Kirillova [5] and Marchall and Contensou [11]. The generalized Legendre–Clebsch condition (or Kelley–Contensou test) is, for example, a well known second-order condition which has proved to be useful in many singular control problems.

On the other hand, recently there has been a considerable interest in control theory in using Lie-brackets configurations to characterize such fundamental properties as controllability or accessibility (see for example Sussmann [12]). This approach was first used in singular optimal control problems by Brockett [2] and Krener [8]. Knobloch [7] has generalized these results obtaining a complete theory of second-order necessary conditions; he gives new conditions which are particularly suited for applications since one has to compute only half the number of Lie brackets that would be necessary in order to perform the same type of test using the classical version. However the mathematical formalism involved is unwieldy. New important results are also obtained in this way when vector-valued control problems are under consideration.

In the present paper, we propose a new context for the singular optimal control problems. The main tools are a new functional expansion [4] in conjunction with a by-product of the Baker–Campbell–Hausdorff formula. A basic optimality criterion for a fixed terminal time Mayer problem is obtained which allows one to derive the necessary conditions for optimality in terms of the vector fields (often in terms of Lie brackets of vector fields) associated with the dynamics of the problem. As a particular application, we will derive a new formulation of some result of Knobloch. Another advantage of this formalism is that a precise knowledge of Volterra kernels allows an easy derivation of third-order necessary conditions [10]. For affine systems, this approach lead first [9] to a new interpretation of some classical second-order necessary conditions like the generalized Legendre–Clebsch condition or the Jacobson condition.

In order to emphasize the essential results, some of the mathematical details are omitted.

1. Statement of the main result

Let us consider the following Mayer problem. Find u to miminize

$$J(u)=h(x(T)) \tag{1}$$

subject to

$$\dot{x}=f(t,x;u), \quad x(0)=x_0, t\in[0,T], T \text{ fixed.}$$

The state x belongs to an N-dimensional analytic manifold Q. The vector field f and the scalar output function h are assumed to be analytic. The control u is assumed to belong to a class of analytic functions which take values in some open set U.

In some local coordinate chart $x=x^1,\ldots,x^N$, let us denote respectively the vector fields

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{T^N} f^k(t,x;u)\frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{N} f^k_{u^{(i)}}(t,x;u)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

where the subcript $u^{(i)}$ indicates the ith-order partial derivative with respect to u, by A_0 and A_i. We will denote by $\mathscr{L}$ the linear space generated by

$$\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1, \quad \nu\geqslant 0$$

($\mathrm{ad}^{\nu}_X Y$ denotes $[X,\mathrm{ad}^{\nu-1}_X Y]$ with $\mathrm{ad}^0_X Y=Y$). Finally $w^u_0(T,\tau,a)$ will denote the functional $h(x(T))$ for a given control u, initial time $0\leqslant\tau\leqslant T$, and initial point $x(\tau)=a$.

Our main result is:

Theorem 1. *The dimension of $\mathscr{L}$ being assumed constant on the interval* $[0,T]$, *if u is minimizing on* $[0,T]$, *if $A_2\in\mathscr{L}$ and if ρ is the maximal integer such that*

$$\left[\mathrm{ad}^{\nu-1}_{A_0}A_1,\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1\right]\in\mathscr{L}, \quad \nu=1,\ldots,\rho-1,$$

then, there exists locally a costate vector $p(t)$ such that

$$\langle p(t),\left[\mathrm{ad}^{\rho-1}_{A_0}A_1,\mathrm{ad}^{\rho}_{A_0}A_1\right]\rangle\leqslant 0,$$

for all $t\in[0,T]$.

Remark. We shall show that this theorem is more suited for applications than the standard form of the Legendre–Clebsch condition which will also be interpreted within this new formalism in Lemma 3.5 of this paper.

This result will be proved by combining a new basic optimality criterion and Knobloch's special control variation.

2. Necessary condition for optimality

2.1. Some background

Consider the differential system

$$\dot{q}=F_0(q)+v(t)F_1(q), \qquad y(t)=h(q(t)), \tag{2}$$

where q belongs to an N-dimensional analytic manifold; the vector fields F_0 and F_1 and the scalar output function are assumed to be analytic and defined in a neighbourhood of $q(0)=a$. (If we write the vector fields F_j, $j = 0, 1$, in some local coordinate chart $q = (q^1,\ldots,q^N)$

$$F_j = \sum_{k=1}^{N} \theta_j^k(q^1,\ldots,q^N)\frac{\partial}{\partial q^k},$$

remember that the first line of (2) is equivalent to

$$\dot{q}^k(t) = \theta_0^k(q^1,\ldots,q^N) + \sigma(t)\theta_1^k(q^1,\ldots,q^N) \quad (k = 1,\ldots,N).)$$

It can be shown [4] that the output y can be expanded in a Volterra series in triangular form:

$$y(t) = w_0(t, a) + \int_0^t w_1(t, \sigma_1, a)v(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_1 + \int_0^t\int_0^{\sigma_2} w_2(t, \sigma_2, \sigma_1, a)v(\sigma_2)v(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_2\mathrm{d}\sigma_1$$

$$+ \cdots + \int_0^t\int_0^{\sigma_\alpha}\cdots\int_0^{\sigma_2} w_\alpha(t, \sigma_\alpha,\ldots,\sigma_1)v(\sigma_\alpha)\cdots v(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_\alpha\cdots\mathrm{d}\sigma_1 + \cdots$$

where $t \geqslant \sigma_\alpha \geqslant \cdots \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant 0$, with the following kernels:

$$w_0(t, a) = \sum_{\nu\geqslant 0} F_0^\nu h|_{x=a}\frac{t^\nu}{\nu!},$$

$$w_1(t, \sigma_1, a) = \sum_{\nu_1,\nu_2\geqslant 0} F_0^{\nu_1}F_1F_0^{\nu_2}h|_{x=a}\frac{\sigma_1^{\nu_1}(t-\sigma_1)^{\nu_2}}{\nu_1!\nu_2!},$$

$$w_2(t, \sigma_2, \sigma_1, a) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 0} F_0^{\nu_1}F_1F_0^{\nu_2}F_1F_0^{\nu_3}h|_{x=a}\frac{\sigma_1^{\nu_1}(\sigma_2-\sigma_1)^{\nu_2}(t-\sigma_2)^{\nu_3}}{\nu_1!\nu_2!\nu_3!},$$

($|_{x=a}$ indicates the evaluation at the initial point $x(0) = a$). The right-hand sides of these equalities are the Taylor expansions of the corresponding kernels. Of course, they can still be written *formally* as

$$w_0(t, a) = \mathrm{e}^{tF_0}h|_{x=a},$$

$$w_1(t, \sigma_1, a) = \mathrm{e}^{\sigma_1F_0}F_1\,\mathrm{e}^{(t-\sigma_1)F_0}h|_{x=a} = \mathrm{e}^{\sigma_1F_0}F_1\,\mathrm{e}^{-\sigma_1F_0}w_0(t, x)|_{x=a},$$

$$w_2(t, \sigma_2, \sigma_1, a) = \mathrm{e}^{\sigma_1F_0}F_1\,\mathrm{e}^{(\sigma_2-\sigma_1)F_0}F_1\,\mathrm{e}^{-\sigma_2F_0}w_0(t, x)|_{x=a},$$

2.2. The basic functional expansion

Let us fix $u(t)$, $t \in [0, T]$. As usual, we shall denote by $\delta u(t)$ an arbitrary perturbation of the control $u(t)$ on $[0, T]$ which satisfies the condition $u(t) + \delta u(t) \in U$. Using the input–output representation of the previous section, one can state that the Volterra series of the variation of the functional $w_0^u(T, \tau, a)$,

$$\delta w(T, \tau, a) = w_0^{u+\delta u}(T, \tau, a) - w_0^u(T, \tau, a),$$

can be written

$$\delta w = \delta w_1 + \delta w_2 + \mathrm{o}(|\delta u|^2) \tag{3}$$

with

$$\delta w_1(T, \tau, a) = \int_\tau^T \mathrm{e}^{(\sigma_1-\tau)A_0}A_1\,\mathrm{e}^{-(\sigma_1-\tau)A_0}w_0^u(T, \tau, x)|_{x=a}\delta u(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_1$$

and

$$\delta w_2(T, \tau, a) = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_1-\tau)A_0} w_0^u(T, \tau, x)|_{x=a} \delta u^2(\sigma_1) d\sigma_1$$
$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} e^{(\sigma_1-\tau)A_0} A_1\, e^{(\sigma_2-\sigma_1)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\tau)A_0} w_0^u(T, \tau, x)|_{x=a} \delta u(\sigma_1)\delta u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

$\delta w_2(T, \tau, a)$ is called the second variation of the functional w_0^u at the end time T, for the variable initial time $\tau \in [0, T]$ and initial point $x(t) = a$.

2.3. Control variation 'concentrated' at some point

We now express $\delta w(T, \tau, a)$ on a control variation concentrated at some point $\theta \in [\tau, T]$, that is

$$\delta u(t) = 0 \quad \text{if } t \notin [\theta, \theta + \omega(\varepsilon)]$$

with $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$. From (3) this implies that

$$\delta w(T, \tau, a) = e^{(\theta-\tau)A_0} V(\varepsilon)\, e^{-(\theta-\tau)A_0} w_0^u(T, \tau, x)|_{x=a}$$

where

$$V(\varepsilon) = \delta_1 V + \delta_2 V + o(|\delta u|^2) \tag{4}$$

with

$$\delta_1 V = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u(\sigma_1) d\sigma_1$$

and

$$\delta_2 V = \int_\tau^T e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_2\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0} \delta u^2(\sigma_1) d\sigma_1$$
$$+ \int_\tau^T \int_\tau^{\sigma_2} \left(e^{(\sigma_1-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_1-\theta)A_0}\right)\left(e^{(\sigma_2-\theta)A_0} A_1\, e^{-(\sigma_2-\theta)A_0}\right) \delta u(\sigma_1)\delta u(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

In the following we are interested in the expansion of $V(\varepsilon)$ in powers of ε,

$$V(\varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} V_k \varepsilon^k.$$

Before giving the basic optimality criterion, let us define the subset $\mathscr{P}_u$.

Definition 2.1. A differential operator D belongs to $\mathscr{P}_u$ if and only if there exists a variation δu and a number $\xi > 0$ such that

(i) $V(\varepsilon) = \varepsilon^r \sum_{k=0}^{h-r} V_k \varepsilon^k + V_h \varepsilon^h + o(\varepsilon^h)$ where $V_k \in \mathscr{L}$, $k = 0, \ldots, h - r$,

(ii) $D = \xi V_h$.

Expressing the positivity of the variation δw gives the fundamental lemma:

Lemma 2.1. *If u is minimizing on $[0, T]$, then*

$$\forall D \in \mathscr{P}_u, \quad \sum_{\nu \geqslant 0} \mathrm{ad}_{A_0}^\nu D w_0^u(T, \tau, x)|_{x=a} \frac{(\theta-\tau)^\nu}{\nu!} \geqslant 0$$

for all $\tau \in [0, T]$ and $\theta \in [\tau, T]$.

In a local coordinate chart, let us define the adjoint vector $p(t)$ associated with the system (2) by

$$\left(\frac{\partial w_0^u}{\partial t}, \frac{\partial w_0^u}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial w_0^u}{\partial x^N}\right).$$

If D is a first-order differential operator, the previous lemma takes the form:

Lemma 2.2. *If u is minimizing on $[0, T]$ then there exists locally a costate vector $p(t)$ such that, for all first-order differential operators D belonging to $\mathscr{P}_u$,*

$$\langle p(t), D\rangle \geqslant 0$$

for all $t \in [0, T]$.

Remark. Let us consider the special control variation

$$\delta u(t) = a, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon], a > 0.$$

The first non-vanishing term in the expansion of $V(\varepsilon)$ can easily be evaluated by substituting this control into the expansion (4). We obtain $V(\varepsilon) = a\varepsilon A_1 + o(\varepsilon)$ and thus $A_1 \in \mathscr{P}_u$. In the same way, calculating $V(\varepsilon)$ for the special variation

$$\delta u(t) = -a, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon],$$

gives $-A_1 \in \mathscr{P}_u$.

Using Lemma 2.2 we obtain again the well known first-order necessary condition [3]

$$\langle p(t), A_1\rangle = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

3. Special control variation

Let us introduce Knobloch's special control variation 'concentrated' at a point $\theta \in [0, T]$:

$$\delta u(t) = \delta u_\alpha^i(t), \quad \theta + \varepsilon\zeta_i \leqslant t < \theta + \varepsilon\zeta_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, M-1,$$

with $\zeta_i \leqslant \zeta_{i+1}$ and $\delta u_\alpha^i(t) = \varepsilon^\pi \zeta_i (t - \theta)^\alpha / \alpha!$.

We are now in a position to analyze the coefficients which are relevant for the second-order condition. In the following lemma we first evaluate the end point of the second variation $\delta_2 V$ on the above special variation.

Lemma 3.1.

$$\begin{aligned}
\delta_2 V = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{2\pi} \Bigg\{ & \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^{k+\alpha+1}}{(k+\alpha+1)!} C_{k+\alpha}^k \sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1}^2 - \xi_i^2) \zeta_i^{k+\alpha+1} B_{\alpha,k} \\
& + \sum_{\substack{\rho \geqslant 0 \\ \sigma \geqslant 0}} \frac{\varepsilon^{\sigma+\rho+2\alpha+2}}{(\rho+\alpha+1)!(\sigma+\alpha+1)!} C_{\rho+\alpha}^\rho C_{\sigma+\alpha}^\sigma \\
& \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant M} (\xi_{i-1} - \xi_i)(\xi_{j-1} - \xi_j) \zeta_i^{\rho+\alpha+1} \zeta_j^{\sigma+\alpha+1} \left[\mathrm{ad}_{A_0}^\rho A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho \geqslant 0 \\ \sigma \geqslant 0}} \frac{\varepsilon^{\sigma+\rho+2\alpha+2}}{(\rho+\alpha+1)!(\sigma+\alpha+1)!} \left(\sum_{i=1}^{M} (\xi_{i-1} - \xi_i) \zeta_i^{\rho+\alpha+1} \right) \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{M} (\xi_{j-1} - \xi_j) \zeta_j^{\sigma+\alpha+1} \right) C_{\rho+\alpha}^\alpha \mathrm{ad}_{A_0}^\rho A_1 \mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1 \Bigg\}
\end{aligned}$$

where $B_{\alpha.k}$ *is the vector field*

$$B_{\alpha.k} = C_k^\alpha \mathrm{ad}_{A_0}^{k-\alpha} A_2 + \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant k-\alpha-1} C_{\sigma+\alpha}^\alpha C_k^{\alpha+\sigma+1} \left[\mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{k-\sigma-\alpha-1} A_1\right].$$

In fact the expression $B_{\alpha.k}$ is a remarkable one. Let $u^{[\alpha]}$ denote the αth total derivative with respect to t of u. Then one shows (see Appendix A):

Lemma 3.2. $B_{\alpha.k} = (\partial/\partial u^{[\alpha]}) \mathrm{ad}_{A_0}^\nu A_1$.

The second step of this approach, which is of a more technical nature (see Appendix B), particularizes the special control in a similar manner to that in [7] (Lemma 18.3):

Lemma 3.3. *Let* μ *be an even integer and let us assume that the following vector fields are contained in* $\mathscr{L}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & B_{\sigma.\sigma+\mu} \quad \textit{for } \sigma = 0, 1 \ldots \text{ and } \nu < \mu, \\ \text{(ii)} & B_{\sigma.\sigma+\mu} - B_{0.\mu} \quad \textit{for } \sigma = 0, 1, \ldots, \\ \text{(iii)} & \left[\mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^\rho A_1\right] \quad \textit{for } \sigma + \rho < \mu - 1, \\ \text{(iv)} & \left[\mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^\rho A_1\right] - (-1)^\rho B_{0.\rho+\sigma} \quad \textit{for } \sigma + \rho = \mu - 1. \end{array} \tag{5}$$

Then $(-1)^{\mu/2} B_{0.\mu} \in \mathscr{P}_u$.

We now give two relations involving Lie brackets (see Appendix C).

Lemma 3.4.

(i) $$B_{j.i+j} = \sum_{\rho=0}^{i} C_{\rho+j-1}^\rho \mathrm{ad}_{A_0}^\rho B_{0.i-\rho}, \quad j > 0.$$

(ii) $$\left[\mathrm{ad}_{A_0}^\mu A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^\nu A_1\right] = (-1)^\mu \sum_{\tau=0}^{\mu+1} C_{\mu+1}^\tau (-1)^\tau \mathrm{ad}_{A_0}^\tau B_{0.\nu+\mu+1-\tau}.$$

Finally, we are able to establish the following theorem:

Theorem 2. *Let* μ *be the maximal integer such that*

$$B_{0.\nu} \in \mathscr{L}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1.$$

Then (i) μ *is even*; (ii) $(-1)^{\mu/2} B_{0.\mu} \in \mathscr{P}_u$.

Proof. First, it is easy to see that μ is even. Indeed, let us assume that μ is odd, then

$$B_{0.\mu} = \mathrm{ad}_{A_0}^\mu A_2 + \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \mu} C_\mu^\rho \left[\mathrm{ad}_{A_0}^{\rho-1} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-\rho} A_1\right]$$

or

$$B_{0.\mu} = l + \left[A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu-1} A_1\right] \quad \text{where } l \in \mathscr{L}.$$

Using the formula

$$\left[\mathrm{ad}_{A_0}^\rho A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^\sigma A_1\right] = (-1)^\rho \sum_{\alpha=0}^{\rho} C_\rho^\alpha (-1)^\alpha \mathrm{ad}_{A_0}^\alpha \left[A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\rho+\sigma-\alpha} A_1\right] \tag{6}$$

gives

$$\left[\operatorname{ad}_{A_0}^{\mu-1}A_1, A_1\right] = (-1)^{\mu-1}\left[A_1, \operatorname{ad}_{A_0}^{\mu-1}A_1\right] + l' \quad \text{where } l' \in \mathscr{L},$$

therefore

$$2\left[\operatorname{ad}_{A_0}^{\mu-1}A_1, A_1\right] \in \mathscr{L}$$

and $B_{0,\mu} \in \mathscr{L}$ in contrast to our hypothesis concerning μ.

The second part of the theorem is now easily inferred by combining Lemmas 3.3 and 3.4. Indeed, the hypothesis of this theorem implies that all vector fields listed under (5) belong to the space $\mathscr{L}$. Theorem 1 follows from Theorem 2, formula (6) and Lemma 2.2.

Applying Theorem 2 in conjunction with Lemma 2.2 yields:

Lemma 3.5. *If u is minimizing on* $[0, T]$ *and if μ is a maximal integer such that*

$$B_{0,\nu} \in \mathscr{L}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1,$$

then (i) *is even, and* (ii) *there exists locally a costate vector $p(t)$ such that*

$$\langle p(t), (-1)^{\mu/2} B_{0,\mu}\rangle \geqslant 0 \quad \textit{for all } t \in [0, T].$$

But $B_{0,\mu}$ is the vector field (see Lemma 3.2)

$$\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{ad}_{A_0}^{\mu}A_1.$$

On the other hand,

$$\langle p(t), \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{ad}_{A_0}^{\mu}A_1\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle p(t), \operatorname{ad}_{A_0}^{\mu}A_1\rangle$$

and we know [3] that

$$\langle p(t), \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{ad}_{A_0}^{\mu}A_1\rangle = \frac{\mathrm{d}^{\mu}}{\mathrm{d}t^{\mu}}\langle p(t), A_1\rangle$$

where $\langle p(t), A_1\rangle$ is of course H_u, the partial derivative with respect to u of the Hamiltonian H associated to the control problem (1). Hence, we have

$$\langle p(t), (-1)^{\mu/2} B_{0,\mu}\rangle = (-1)^{\mu/2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^{\mu}}{\mathrm{d}t^{\mu}}H_u.$$

Then, the previous lemma is nothing else than another formulation of the classical generalized Legendre–Clebsch condition.

Remarks. (i) In order to arrive at the same conclusion using Lemma 3.5, one has to take all $\operatorname{ad}_{A_0}^{\nu}A_1$, $\nu \leqslant \mu$, into account, whereas using Theorem 1 requires only the calculation of $\operatorname{ad}_{A_0}^{\nu}A_1$ for $\nu \leqslant \frac{1}{2}\mu + 1$.

(ii) It is worth noting that the construction of the special variation is such that the 'half Lie brackets' $\operatorname{ad}_{A_0}^{\alpha}A_1\operatorname{ad}_{A_0}^{\beta}A_1$ which are not in general vector fields play no role in the formulation of these second-order necessary conditions.

Acknowledgements

The author wishes to express her cordial thanks to Professor Michel Fliess and to the reviewer for offering valuable comments.

Appendix A

First, it is easy to show the following properties: if G is an analytic vector field then locally

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{ad}_{A_0}G = \mathrm{ad}_{A_1}G + \mathrm{ad}_{A_0}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial}{\partial u^{[k]}}\mathrm{ad}_{A_0}G = \frac{\partial}{\partial u^{[k-1]}}G + \mathrm{ad}_{A_0}\frac{\partial G}{\partial u^{[k]}}, \quad k > 0.$$

In order to prove that

$$\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}}\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1 = C^{\alpha}_{\nu}\mathrm{ad}^{\nu-\alpha}_{A_0}A_2 + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha} C^{\alpha}_{\sigma+\alpha-1}C^{\sigma+\alpha}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha}_{A_0}A_1\right], \quad \alpha \geqslant 0, \nu > \alpha,$$

we will do a 'double induction' with respect to the parameters ν and α.

Let us assume first that α is fixed. The property holds for $\nu = \alpha + 1$; indeed,

$$\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}}\mathrm{ad}^{\alpha+1}_{A_0}A_1 = \mathrm{ad}_{A_0}A_2.$$

Now, $(\partial/\partial u^{[\alpha]})\mathrm{ad}^{\nu+1}_{A_0}A_1$ $(\nu > \alpha)$ can be written (apply (ii))

$$(\alpha = 0)\left[A_1, \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1\right] + (\alpha > 0)\frac{\partial}{\partial u^{[\alpha-1]}}\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1 + \left[A_0, \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}}\mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1\right]$$

where

$$(\alpha = 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha > 0, \\ 1 & \text{if } \alpha = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad (\alpha > 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = 0, \\ 1 & \text{if } \alpha > 0. \end{cases}$$

Using the induction hypothesis gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha]}}\mathrm{ad}^{\nu+1}_{A_0}A_1 &= (\alpha = 0)\left[A_1, \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1\right] \\ &\quad + (\alpha > 0)\left\{C^{\alpha-1}_{\nu}\mathrm{ad}^{\nu-\alpha+1}_{A_0}A_2 + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha+1} C^{\alpha-1}_{\sigma+\alpha-2}C^{\sigma+\alpha-1}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha+1}_{A_0}A_1\right]\right\} \\ &= \left[A_0, C^{\alpha}_{\nu}\mathrm{ad}^{\nu-\alpha}_{A_0}A_2 + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha} C^{\alpha}_{\sigma+\alpha-1}C^{\sigma+\alpha}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha}_{A_0}A_1\right]\right]. \end{aligned}$$

This expression is still equal to

$$\begin{aligned} &(\alpha = 0)\left[A_1, \mathrm{ad}^{\nu}_{A_0}A_1\right] + \left((\alpha > 0)C^{\alpha-1}_{\nu} + C^{\alpha}_{\nu}\right)\mathrm{ad}^{\nu-\alpha+1}_{A_0}A_2 \\ &\quad + (\alpha > 0)\sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha+1} C^{\alpha-1}_{\sigma+\alpha-2}C^{\sigma+\alpha-1}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha+1}_{A_0}A_1\right] \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha} C^{\alpha}_{\sigma+\alpha-1}C^{\sigma+\alpha}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha}_{A_0}A_1\right] \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant \nu-\alpha} C^{\alpha}_{\sigma+\alpha-1}C^{\sigma+\alpha}_{\nu}\left[\mathrm{ad}^{\sigma-1}_{A_0}A_1, \mathrm{ad}^{\nu-\sigma-\alpha+1}_{A_0}A_1\right]. \end{aligned}$$

The formula (8) for α fixed and $\nu + 1$, $\nu > \alpha$, is easily inferred from this last expression by using the binomial formula. The second induction with ν fixed is obtained in the same way.

Appendix B

As in [7], Lemma 18.3, we can construct a control variation δu and find a value of h such that, under the hypothesis of Lemma 3.3, the vector field $\xi B_{0,\mu}$ belongs to $\mathscr{P}_u$, ξ being a certain number depending upon μ.

The value of ξ, which does not depend upon the underlying system, is then determined considering a particular N-dimensional system.

Appendix C

The identity (i) of Lemma 3.4 is easily inferred using the identity (i) of Appendix A. Indeed,

$$B_{j,i+j} =: \frac{\partial}{\partial u^{[i]}} \mathrm{ad}_{A_0}^{i+j} A_1.$$

Then if $G = \mathrm{ad}_{A_0}^{j+i-1} A_1$ one obtains

$$B_{j,i+j} = \mathrm{ad}_{A_0} B_{j-1,i+j} + B_{j-1,i+j-1}.$$

The iteration of this formula gives the desired identity. Now, by using formula (6) we have

$$\left[\mathrm{ad}_{A_0}^{\mu} A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\nu} A_1\right] = (-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} C_{\mu}^{\tau} (-1)^{\nu} \mathrm{ad}_{A_0}^{\tau} \left[A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu+\nu-\tau} A_1\right]$$

but

$$\left[A_1, \mathrm{ad}_{A_0}^{\mu+\nu-\tau} A_1\right] = B_{0,\mu+\nu-\tau-1} - \mathrm{ad}_{A_0} B_{0,\mu+\nu-\tau}.$$

Part (ii) of Lemma 3.4 is obtained by regrouping the terms

$$(-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} C_{\mu}^{\tau} (-1)^{\tau} \mathrm{ad}_{A_0}^{\tau} B_{0,\mu+\nu-\tau+1} \quad \text{and} \quad (-1)^{\mu} \sum_{\tau=0}^{\mu} C_{\mu}^{\tau} (-1)^{\tau+1} \mathrm{ad}_{A_0}^{\tau+1} B_{0,\mu+\nu-\tau}.$$

References

[1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1972) p. 59.

[2] R.W. Brockett, Lie Theory, functional expansions and necessary conditions in optimal control, in: W.A. Coppel, Ed., *Mathematical Control Theory*, Lecture Notes in Mathematics No. 680 (Springer, Berlin, 1978) 68–76.

[3] M. Fliess, Lie brackets and optimal nonlinear feedback regulation, *Proc. 9th Triennal World Congress of IFAC*, Budapest (1984).

[4] M. Fliess, M. Lamnabhi and F. Lamnabhi-Lagarrigue, An algebraic approach to nonlinear functional expansions, *IEEE Trans. Circuits and Systems* **30** (1983) 554–570.

[5] R. Gabasov and F.M. Kirillova, High order necessary conditions for optimality, *SIAM J. Control* **10** (1972) 127–168.

[6] H.J. Kelley, R.E. Kopp and H.G. Meyer, Singular extremals, in: G. Leitman, Ed., *Topics in Optimization* (Academic Press, New York, 1967).

[7] H.W. Knobloch, *Higher Order Necessary Conditions in Optimal Control Theory*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. No. 34 (Springer, Berlin, 1981).

[8] A.J. Krener, The high-order maximal principle and its applications to singular extremals, *SIAM J. Control Optim.* **15** (1977) 256–293.

[9] F. Lamnabhi-Lagarrigue, A Volterra series interpretation of some higher order conditions in optimal control, in: *Proc. MTNS'83*, Beersheva, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. No. 58 (Springer, Berlin, 1984) 615–627.

[10] F. Lamnabhi-Lagarrigue, Sur les conditions necessaires d'optimalité du deuxième et troisième ordre dans les problèmes de commande optimale singulière, in: *Proc. 6th Int. Conf. Anal. and Optim. Syst.*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. (Springer, Berlin, to appear).

[11] C. Marchall and P. Contensou, Singularities in optimization of deterministic dynamic systems, *J. Guidance Control* **4** (1980) 240–252.

[12] H.J. Sussmann, Lie brackets, real analyticity and geometric control, in: R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann, Eds., *Differential Geometric Control Theory*, Progress in Mathematics, Vol. 27 (Birkhäuser, Boston, 1983) 1–116.

A P P E N D I C E

Définissons

$$J_j(\rho_0) = \int_0^{\rho_0}\int_0^{\sigma_1}\cdots\int_0^{\sigma_{j-1}} X_n(\sigma_j)\,..\,X_{n-j+1}(\sigma_1)\,d\sigma_j\ldots d\sigma_1 \qquad , \quad J_0(\rho_0)=1$$

et

$$I_j^{n-k}(\rho_0) = \int_0^{\rho_0}\int_0^{\rho_1}\cdots\int_0^{\rho_{j-1}} X_{j+k-1}\cdots X_k\left([\cdots[\rho_j,\rho_{j-1}],\,..,\,\rho_1]\right)d\rho_j\ldots d\rho_1$$

Nous obtenons les relations

$$J_j(\rho_0) = \int_0^{\rho_0} J_{j-1}(\rho_1)\,X_{n-j+1}(\rho_1)\,d\rho_1 \qquad (1)$$

et

$$I_j^{n-1}(\rho_0) = \int_0^{\rho_0} I_{j-1}^{n-2}(\rho_1)\,X_1(\rho_1)\,d\rho_1 - \int_0^{\rho_0} X_j(\rho_1)\,I_{j-1}^{n-1}(\rho_1)\,d\rho_1 \qquad (2) .$$

On souhaite montrer l'identité:

$$\boxed{n\,J_n(\rho_0) = \sum_{j=0}^{n-1} J_j(\rho_0)\,I_{n-j}^{n-1}(\rho_0)}$$

Ceci est vrai pour n=1 et n=2. Supposons-la vraie pour n-1, alors

$$n\,J_n(\rho_0) = (n-1)\,J_n(\rho_0) + J_n(\rho_0) = (n-1)\int_0^{\rho_0} J_{n-1}(\rho_1)\,X_1(\rho_1)\,d\rho_1 + J_n(\rho_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2}\int_0^{\rho_0} J_j(\rho_1)\,I_{n-j-1}^{n-2}(\rho_1)\,X_1(\rho_1)\,d\rho_1 + J_n(\rho_0)$$

En intégrant par parties, il vient:

$$= \sum_{j=1}^{n-2} J_j(\rho_0)\int_0^{\rho_0} I_{n-j-1}^{n-2}(\rho_1)\,X_1(\rho_1)\,d\rho_1$$

$$- \sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\rho_0} J_{j-1}(\rho_1)\,X_{n-j+1}(\rho_1)\,d\rho_1\int_0^{\rho_1} I_{n-1-j}^{n-2}(\rho_2)\,X_1(\rho_2)\,d\rho_2$$

$$+ \int_0^{\rho_0} I_{n-1}^{n-2}(\rho_1)\,X_1(\rho_1)\,d\rho_1 + J_n(\rho_0)$$

Utilisons (2), nous obtenons:

$$= \sum_{j=1}^{n-2} J_j(\rho_0)\,I_{n-j}^{n-1}(\rho_0) + \sum_{j=0}^{n-2} J_j(\rho_0)\cdot\int_0^{\rho_0} X_{n-j}(\rho_1)\,I_{n-j-1}^{n-1}(\rho_1)\,d\rho_1$$

$$- \sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\rho_0} J_{j-1}(\rho_1)\,X_{n-j+1}(\rho_1)\;{}_{n-j}^{n-1}(\rho_1)\,d\rho_1$$

$$\left.- \sum_{j=1}^{n-2}\int_0^{\rho_0} J_{j-1}(\rho_1)\,X_{n-j+1}(\rho_1)\int_0^{\rho_1} X_{n-j}(\rho_2)\,I_{n-j-1}^{n-1}(\rho_2)\,d\rho_2\,d\rho_1\right\}\ (3)$$

$$+ I_n^{n-1}(\rho_0) + \int_0^{\rho_0} X_n(\rho_1)\,I_{n-1}^{n-1}(\rho_1)\,d\rho_1 + J_n(\rho_0)$$

En integrant encore par parties le terme (3), il vient:

$$
\begin{aligned}
n J_n(\rho_0) = & \sum_{j=0}^{n-2} J_j(\rho_0)\, I_{n-j}^{n-1}(\rho_0) \\
& - \sum_{j=1}^{n-2} \int_0^{\rho_0} J_{j-1}(\rho_1)\, X_{n-j+1}(\rho_1)\, I_{n-j}^{n-1}(\rho_1)\, d\rho_1 \\
& + \sum_{j=0}^{n-2} \int_0^{\rho_0} J_j(\rho_1)\, X_{n-j}(\rho_1)\, I_{n-j-1}^{n-1}(\rho_1)\, d\rho_1 \quad + J_n(\rho_0).
\end{aligned}
$$

Posons j=j'-1 dans le troisième terme,nous obtenons:

$$
= \sum_{j=0}^{n-2} J_j(\rho_0)\, I_{n-j}^{n-1}(\rho_0) + \underbrace{\int_0^{\rho_0} J_{n-2}(\rho_1)\cdot X_2(\rho_1)\, I_1^{n-1}(\rho_1)\, d\rho_1 + J_n(\rho_0)}_{= J_{n-1}(\rho_0)\, I_1^{n-1}(\rho_0)}
$$

$$
= \sum_{j=0}^{n-1} J_j(\rho_0)\, I_{n-j}^{n-1}(\rho_0) \ .
$$

Remarque : Cette formule devrait aussi avoir des conséquences importantes dans la théorie de la réalisation en liaison avec les travaux de Crouch [C2].

Perspectives :

1) Une application directe de cette nouvelle approche de la commande optimale singulière est l'étude des conditions suffisantes de contrôlabilité locale.Plus précisément,considérons le système

$$\Sigma', \quad \dot{q} = F(q,u) \quad ; \quad q \in Q \quad , u \in \mathcal{U} .$$

Soit $R_T(q_0)$ l'ensemble des points que l'on peut atteindre à l'instant T avec une solution de Σ' pour des commandes continues par morceaux, à partir du point $q_0 \in Q$,et soit

$$R(T,q_0) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} R_T(q_0)$$

l'ensemble des points que l'on peut atteindre jusqu'à l'instant T. Le système Σ' est dit localement contrôlable au point $q_0 \in Q$ si

$$q_0 \in \mathrm{Int}\, R(T,q_0) \quad , \forall T > 0 .$$

Les travaux récents d' Agracev[a2], Hermes[h3]et Sussmann[s5] ont montré que les conditions suffisantes de contrôlabilité locale étaient étroitement liées aux conditions nécessaires d'optimalité Ces conditions sont aussi exprimées en fonction de crochets de Lie de champs de vecteurs associés à Σ'.De nombreux points restent cependant à être étudiés dans ce sens,notamment,les conditions suffisantes du troisième ordre qui,à notre connaissance,n'ont pas été abordées jusqu'ici.

2) Le problème ,plus complexe ,de commande avec contraintes sur l'état(voir par exemple[k5]) pourra être aussi envisagé avec ce nouveau formalisme.

3) Considérons les problèmes de commande suivants ,encore appelés problèmes de minimisation de la consommation de carburant:

$$\Sigma_{11} \quad , \quad \dot{q} = A_0(q) + u(t) A_1(q)$$

avec un critère de la forme

$$J = \int_0^T \left(F(q(t)) + |u(t)| \right) dt \quad .$$

Cette classe de problèmes couvre en fait un grand champ d'applications,citons par exemple l'article tout récent[k6].
La solution ,du type Bang-off-Bang dans les cas les plus simples, [s6] ne peut pas être recherchée avec nos méthodes à cause de la présence de la valeur absolue de la commande dans le critère.

Mais cette commande apparaissant de façon simple,"linéaire", dans le critère, l'étude peut être adaptée à cette classe de problèmes. On peut ,par exemple envisager de dégager des conditions nécessaires d'optimalité qui,lorsqu'elles ne seront pas satisfaites,montreront le caractère Bang-off-Bang de la commande optimale.

B I B L I O G R A P H I E

[a 1] A.A. AGRAČEV et R. GAMKRELIDZE - A second order optimality principle for a time optimal problem. Math USSR Sbornik, 29, 1976, pp. 547-576.

[a 2] A.A. AGRACEV - A second-order necessary condition for optimality in the general nonlinear case.Math.USSR Sbornik, 31,1977,pp.493-506.

[b 1] S. BELGITH, F. LAMNABHI-LAGARRIGUE et M.M. ROSSET - Résolution Bang Bang d'une classe de problèmes de commande optimale. Proc."Méthodes Alg. et Géom. en Automatique",1985.

[b 2] D.J. BELL - The non-optimality of Lawden's spiral. Astronautica Acta, 16, 1971, pp. 317-324.

[b 3] D.J. BELL et D.H. JACOBSON - Singular optimal control problems - London, Academic Press, 1975.

[b 4] D.J. BELL - A note on junction conditions for partially singular trajectories - Int. J. Control, 28, 1978, pp. 67-69.

[b8] B. BONNARD - Contrôlabilité de systèmes mécaniques sur les groupes de Lie - SIAM J. Contr. and Optimiz , 22, 1984, pp 711-722.

[b 9] B. BONNARD - On singular extremals in the time minimal control problem in $\mathbb{R}^3$. A paraître dans SIAM J. Contr. and Optimiz.

[b 10] B. BONNARD - Remarques sur les extrémales singulières en contrôle en temps minimal - Dans Proc. Développement et utilisation d'outils et modèles mathématiques en automatique, analyse des systèmes et traitement du signal - Belle-Ile, 1982, pp. 217-224.

[b11] R. BORTINS - Order and junctions in singular optimal control problems, Ph. D. dissertation, Michigan Univ., Michigan, 1982.

[b12] N. BOURBAKI - Groupes et Algèbres de Lie, Paris, Hermann, 1972.

[b13] S. BOYD, L.O. CHUA et C.A. DESOER, Analytical foundations of Volterra series - Memo - UCB/ERL M84/14, Electron. Res. Lab., University of California, Berkeley, Février 1984.

[b14] R.W. BROCKETT - Lie theory, functional expansions and necessary conditions in optimal control, in Mathematical Control Theory (W.A. Coppel ed.) Lect. Notes Math., 680, Springer-Verlag, Berlin, 1978, pp. 68-76.

[c 1] P. CONTENSOU - Conditions d'optimalité pour les domaines de manoeuvrabilité à frontière semi-affine, Lect. Notes. Math., 112, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[c 2] P.E. CROUCH et M. IRWING. Dynamical realizations of homogeneous hamiltonian systems Math. System Theory, 17, pp. 293-318, 1984.

[f 1] W.H. FLEMING et R.W. RISHEL - Deterministic and stochastic optimal control. Applications of Mathematics - Springer Verlag - Berlin, 1975. (Théorème 8.1).

[f2] M. FLIESS - Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. soc. Math. France, 109, pp 3-40, 1981.

[f3] M. FLIESS - On the concept of derivatives and Taylor expansions for nonlinear input-output systems. Dans Proc. 22nd IEEE CDC, San Antonio, 12, pp. 643-646,1984.

[f4] M. FLIESS et H. SIGUERDIDJANE - BOURDACHE - Quelques remarques élémentaires sur le calcul des lois de bouclage en commande optimale non linéaire. Dans Proc. Analysis and Optimization Systems - Lect - Notes - Contr. Inf. Sc. n° 63, Berlin, Springer-Verlag, pp. 499-512 ,1984.

[f5] M. FLIESS - Lie brackets and optimal nonlinear feedback regulation, Proc. IXth IFAC World Congr., Budapest, 1984.

[g1] R. GABASOV et F.M. KIRILLOVA - High order necessary conditions for optimality SIAM J. Control, 10, 1972, pp. 127-168.

[g2] E.G. GILBERT et D.S. BERSTEIN - Second necessary conditions in optimal control accessory - problem results without normality conditions,JOTA, 41, 1983, pp. 75.

[g3] B.S. GOH - The second variation for the singular Bolza problem, SIAM J. Control 4, 1966, pp. 309-325.

[g4] W. GROBNER - Die Lie - Reihen une ihre Anwendungen (2nd ed.), Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967.

[h1] S. HELGASON - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces - Academic Press, New York, 1978.

[h2] R. HERMANN et A.J. KRENER - Nonlinear controllability and observability. IEEE Trans. AC, 22, 1977 - pp 728-740.

[h3] H. HERMES - Local controllability and sufficient conditions in singular problems , SIAM Contr. Optimization,14,1976, pp.1049-1062.

[j1] D.H. JACOBSON -A new necessary condition for optimality for singular control problems - SIAM. Contr. Optimization, 7, 1969, pp. 578-595.

[j2] C.D. JOHNSON - Singular solutions in optimal control problems, in Advances in Control Systems (C.T. Leondes, ed.) 2, New York, Academic Press, 1965, pp. 209-267.

[k1] H.J. KELLEY - A second variation test for singular extremals, AIAA J., 2, pp. 1380-1382, 1964.

[k2] H.J. KELLEY, R.E. KOPP et H.G. MOYER - Singular extremals, in Topics in Optimization (G. Leītmann, ed.), New York, Academic Press 1967, pp. 1439-1444.

[k3] H.W. KNOBLOCH - Higher order necessary conditions in optimal control theory. Lect. Notes Contr. and Inf. Sc., 34, Berlin, Springer-Verlag, 198...

[k4] A.J. KRENER - The high-order maximal principle and its application to singular extremals, SIAM. J. Contr. Optimization, 15, 1977, pp. 256-293.

[k5] E. KREINDLER - Additional necessary conditions for optimal control with state variable inequality constraints, JOTA , 38, 1982, pp.241- 250.

[k6] B.K. KIM et K.G. SHIN - Suboptimal control of industrial manipulators with a weighted minimum time fuel criterium, IEEE AC , 30, 1985, pp.1-10.

[ℓ 1] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE - Sur les conditions nécessaires d'optimalité du deuxième et troisième ordre dans les problèmes de commande optimale singulière. Dans Analysis and Optimization Systems - Lect. Notes Contr. Inf. Sc. n° 63, Berlin, Springer-Verlag, pp. 525-541.

[ℓ 2] C. LESIAK et J. KRENER - The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems - IEEE Trans. Automat. Contr., 23, pp. 1090-1096, 1978.

[ℓ 3] R.M. LEWIS - Definitions of order and junction conditions in singular optimal control problems - SIAM J. Contr. Optimization, 18, 1980, pp. 21-32.

[ℓ 4] C. LOBRY - Controllability of nonlinear control dynamical systems, dans Control Theory and Topics in Functional Analysis, International Atomic Energy Agency, Vienna (1976) pp. 361-383.

[m 1] C. MARCHAL et P. CONTENSOU - Singularities in optimization of deterministic dynamic systems - J. Guidance and Control, 4, 1980, pp. 240-252.

[m 2] J.P. Mc DANELL et W.F. POWERS - Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs. SIAM J. Control., 9, 1971, pp. 161-173.

[p 1] L. PONTRIAGUINE, V. BOLTIANSKI, R. GANKRELIDZE et E. MICHTCHENKO - Théorie mathématiques des processus optimaux, Moscou, MIR, 1974.

[p 2] W.F. POWERS -On the order of singular optimal control problems, JOTA 32, 1980, pp. 479-489.

[r 1] H.M. ROBBINS -A generalized Legendre - Clebsch condition for the singular cases of optimal control - IBM Jl Res. Dev., 3, 1967, pp. 361-372.

[r2] W.J. RUGH - Nonlinear System Theory - Baltimore, MD, The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.

[s1] M. SCHETZEN - The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems - New York, Wiley, 1980.

[s2] I.T. SKORODINSKII - Third variation of a functional on singular controls-Diff. Equations, 16, 1980, pp. 923-928.

[s3] V.A. SROCHKO - Investigation of the second variation on singular controls - Diff. Equations, 10, 1974, pp. 809-822.

[s4] H.J. SUSSMANN - Lie brackets, real analyticity and geometric control, in Differential Geometric Control Theory (R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann, eds.), Progress in Mathematics, 27, 1983, pp. 1-116.

[s5] H.J. SUSSMANN - Lie brackets and local controlability:a sufficient condition for scalar-input systems, SIAM J. Contr. and Optimization,

[s6] A.P. SAGE - Optimum Systems Control ,Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall ,1968.

[t1] K.S. TAIT - Singular problems in optimal control, Ph. D. dissertation, Harvard Univ., Cambridge MA, 1965.

[v1] N.X. VINH - Optimal trajectories in atmospheric flight. Studies in Astronautic 2, Amsterdam, Elsevier, 1981.

[v2] V. VOLTERRA- Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, Gauthier-Villars 1913.

[v3] V. VOLTERRA et J. PERES - Théorie générale des fonctionnelles, Paris, Gauthier- Villars, 1936.