XAVIER SAINT RAYMOND

Unicité de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles analytiques ou $\mathbb{C}^{\infty}$. Conditions nécessaires et conditions suffisantes, 1986

63857

ORSAY
n° d'ordre :
3150

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR D'ETAT

ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Xavier SAINT RAYMOND

SUJET : *Unicité de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles analytiques ou C^{∞}.*
Conditions nécessaires et conditions suffisantes.

soutenue le Lundi 28 Avril 1986 devant la Commission d'examen

MM. BONY J.-M. Président
PHONG D.H.
ALINHAC S.
METIVIER G.
ZUILY C.
PEYRIERE J.

ABSTRACT

Necessary conditions and sufficient conditions for the uniqueness in the Cauchy problem are given here in the case of analytic or C^∞ partial differential equations. For an equation (E) near $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and a time function, we attempt to characterize the following property : for any pair u_1 , u_2 of solutions of (E), $u_1 = u_2$ in the past implies $u_1 = u_2$ in the future (locally : u_1 and u_2 are germs at x_0).

We bring up a detailed study of first order linear equations where structure conditions, suggested by the definition of Hörmander's principally normal operators, are discussed, and results extending Hörmander's notion of pseudo-convexity for different classes of linear equations : characteristic analytic equations (in that framework, nonlinear first-order equations are also treated), first order (C^∞) equations, second order equations of real principal type, principally normal equations of biprincipal type.

In the proofs, our tools are traditional Carleman inequalities and geometrical optics mixed with analytic Cauchy problem techniques and ideas from other domains of analysis.

Key-Words : Partial differential equations, Cauchy problem, Uniqueness, Principally normal operators, Pseudo-Convexity.

Remerciements

Au moment d'écrire cette page traditionnelle, ma première pensée va à Jean-Michel Bony, Johannes Sjöstrand et Claude Zuily. Sans doute parce que le premier d'entre eux a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse, et le dernier en rehausser le prestige par sa compétence bien connue dans ce domaine de l'unicité de Cauchy ; mais surtout parce qu'ils furent les premiers à m'introduire dans le monde des équations aux dérivées partielles et de ses nouveaux développements qu'on appelle aujourd'hui l'analyse microlocale. Il y a des rencontres qui font des vocations. Qu'ils trouvent ici tous trois l'expression de ma profonde reconnaissance.

Bien entendu, je pense aussi à mon directeur Serge Alinhac qui a passé tant de temps, surtout dans les premiers moments, à lire et relire des rédactions qui ne parvenaient pas à se faire concises. Mon travail doit beaucoup à son dynamisme singulièrement stimulant bien connu de ses nombreux élèves, et je tiens à l'en remercier tout particulièrement.

C'est un plaisir de remercier également le professeur Phong qui m'a fait l'amitié de bien vouloir affronter ma soutenance au lendemain d'un voyage avec un rude décalage horaire ; et aussi Guy Métivier qui a dû venir de Rennes pour cette occasion.

Je ne puis taire la gentillesse avec laquelle Jacques Peyrière m'a proposé un second sujet de thèse si passionnant, et la patience avec laquelle il m'a écouté lui exposer ce que j'en avais compris.

Il est bien difficile de s'arrêter, tant il faudrait citer de monde : toute l'équipe d'équations aux dérivées partielles d'Orsay et en particulier Hajer Bahouri, Belhassen Dehman, Hella Ounaïes, Luc Robbiano, et naturellement Nicolas Lerner dont j'ai eu le plaisir de partager le bureau pendant plusieurs années, et qui a toujours discuté très volontiers sur toutes sortes de sujets.

Enfin, je n'oublie pas non plus madame Bardot qui a eu le courage d'assurer la frappe des manuscrits en restant soumise au feu croisé des corrections et contre-corrections ; ni madame Zielinski qui s'est occupée de l'impression de cette thèse.

Xavier Saint Raymond.

Cette thèse est dédiée à tous mes maîtres, et en particulier à

Saab ABOU-JAOUDE, Serge ALINHAC, Robert AZENCOTT, Daniel BENNEQUIN, Aline BONAMY, Léon BONTE, Jean-Michel BONY, Louis BOUTET de MONVEL, Monique BRESCHARD, François BRUHAT, Yves COLIN de VERDIERE, Geneviève CONSTANT, Jack-Michel CORNIL, Jacqueline COUSIN, Didier DACUNHA-CASTELLE, Adrien DOUADY, Michel DUFLO, Roger GODEMENT, Charles GOULAOUIC, Alain GRIGIS, Yûsaku HAMADA, Marie-France HARTMANN, Michel HERVE, Christian HOUZEL, Philippe JOURDAN, LÊ Dũng Tráng, Nicolas LERNER, Jacques MENNY, Yves MEYER, Ngaiming MOK, Jacques PEYRIERE, Elie RONDEL, Lucien ROUX, Jean-Jacques SANSUC, Nessim SIBONY, Johannes SJÖSTRAND, Raymond SOUERES, Jean-Pierre TASSON, Jean VAILLANT, Eric VAN der OORD, Jean-Louis VERDIER, Michel ZISMAN & Claude ZUILY.

Unicité de Cauchy

pour des équations aux dérivées partielles analytiques ou C^∞ Conditions nécessaires et conditions suffisantes.

par Xavier Saint Raymond

— o —

Thèse de Doctorat d'État

— o —

" En toute phase du développement de son travail, l'homme rencontre le fait que tout lui est principalement *donné* par la « nature », autrement dit, en définitive, par le Créateur. Au début du travail humain, il y a le mystère de la création ".

" Si, dans le processus du travail, on découvre quelque dépendance, il s'agit de celle qui lie au donateur de toutes les ressources de la création, et qui devient à son tour dépendance envers d'autres hommes, envers ceux qui, par leur travail et leurs initiatives, ont donné à notre propre travail des possibilités déjà perfectionnées et accrues ".

Jean-Paul II, Laborem exercens, n[os] 12 & 13.

TABLE DES MATIÈRES

PRESENTATION GENERALE.

Un problème hérité des physiciens ...

Considérons une grandeur physique complexe u dépendant de n paramètres réels $y_1,\dots,y_{n-1},t$, où la lettre t désigne le temps. On suppose que cette grandeur u vérifie une équation aux dérivées partielles d'ordre m et que ses m premières traces sur l'hypersurface du présent, d'équation $t=0$, sont fixées (par "les m premières traces de u sur $t=0$", nous entendons la restriction de la fonction u à $t=0$ ainsi que celles de ses dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre m exclus). C'est la forme habituelle des problèmes que l'on rencontre en physique, et qui est connue sous le nom de problème de Cauchy car c'est à ce mathématicien que nous devons le premier résultat général d'existence de solution pour ce problème.

Il arrive fréquemment que l'on sache construire par différentes méthodes, méthodes asymptotiques voire numériques, des solutions pour un problème de Cauchy donné. La question qui intéresse le physicien est alors de savoir si la solution construite est bien "la bonne" solution, c'est-à-dire celle qui correspond au phénomène physique étudié. Ce sera assurément le cas si nous savons prouver que le problème de Cauchy admet au plus une solution.

Dans cette thèse, nous donnons des conditions nécessaires et des conditions suffisantes (les plus proches possibles les unes des autres de manière à disposer d'un critère) pour avoir une telle propriété "d'unicité de Cauchy" c'est-à-dire pour que le problème de Cauchy admette au plus une solution. Pour énoncer des résultats invariants par changement de variables, les n paramètres réels dont dépend la fonction complexe u seront désormais rebaptisés $x_1,\dots,x_n$, et le temps $\varphi(x)$, où $x=(x_1,\dots,x_n)$ et la fonction réelle φ vérifie $d\varphi \neq 0$. Nous étudions une équation qui, en toute généralité, est de la forme

$$F\left(x\,,\,(\partial^\alpha u(x))_{\alpha\in A}\right)=0$$

où A est une partie finie de $\mathbb{N}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\partial^\alpha u=(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\dots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}u$, et F est une fonction sur laquelle nous ferons plus loin des hypothèses ; posant $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, l'ordre de l'équation est par définition l'entier $m=\max\limits_{\alpha\in A}|\alpha|$. La propriété que nous cherchons à caractériser est la suivante : pour toute paire u_1, u_2 de solutions de l'équation,

$u_1=u_2$ dans le passé	$\Rightarrow$	$u_1=u_2$ dans le futur
(i.e. $u_1(x)=u_2(x)$ pour		(i.e. $u_1(x)=u_2(x)$ pour
tout x tel que $\varphi(x)<0$)		tout x tel que $\varphi(x)>0$) ;

cette propriété, équivalente dans la plupart des cas (notamment pour les problèmes non-caractéristiques) à la propriété "d'unicité de Cauchy" telle que nous l'avons présentée plus haut, sera étudiée de façon purement locale, c'est-à-dire dans les germes de fonctions en un point $x_0\in\mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(x_0)=0\neq d\varphi(x_0)$.

En réalité, pour que l'équation ait un sens pour une fonction complexe u, il faut que la fonction $F(x,(\zeta_\alpha)_{\alpha\in A})$ soit holomorphe en $(\zeta_\alpha)_{\alpha\in A}$. Si l'on met à part les quelques pages composant [St R 4], qui traite l'équation analytique (non-linéaire) du premier ordre, nous avons étudié ici l'unicité lorsque F est linéaire, c'est-à-dire lorsque

$$F(x,(\partial^\alpha u(x))_{\alpha\in A})=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x)-f(x)=P(x,D)\,u(x)-f(x)$$

où les fonctions a_α sont de classe C^∞ à valeurs complexes et $D^\alpha=(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$. Par linéarité, la propriété à caractériser devient alors : pour toute fonction u $(=u_1-u_2)$ solution de l'équation $P(x,D)\,u(x)=0$,

$$u = 0 \text{ dans le passé} \quad \Rightarrow \quad u = 0 \text{ dans le futur}$$

(dans les germes en x_o) . Les critères d'unicité et de non-unicité que nous discuterons sont de nature algébrique, portent sur les propriétés mutuelles, près de x_o, de la fonction temps φ et du symbole principal de l'équation, qui est la fonction p , polynômiale en ξ , définie sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par la formule

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha ,$$

ne dépendent pas des coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ choisies et s'expriment à l'aide d'invariants symplectiques tels que le crochet de Poisson $\{q,r\}$ de deux fonctions q et r définies sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, qui est donné par la formule

$$\{q,r\} = (\partial q/\partial\xi) \cdot (\partial r/\partial x) - (\partial q/\partial x) \cdot (\partial r/\partial\xi) \; ;$$

enfin, ces critères ne dépendent pas non plus de la fonction φ elle-même, mais seulement de l'hypersurface orientée d'équation $\varphi(x) = 0$, de sorte que les résultats obtenus s'énoncent de façon purement géométrique.

<u>... pour lequel tous les résultats, ou presque, sont récents ...</u>

Il n'y a à notre connaissance aucun résultat d'unicité antérieur à celui de Cauchy lui-même ([Cau] (1842), cf. aussi [Kow] (1875)), et encore doit-on préciser que le théorème de Cauchy est avant tout un théorème d'existence, l'unicité parmi les solutions analytiques étant triviale.

Le premier véritable résultat d'unicité a été obtenu en 1901 par Holmgren [Hol] pour les équations linéaires à coefficients analytiques ; étendu par John [Joh] (1949) puis Hörmander [Hör 3, th. 5.3.1] (1963), il établit l'unicité parmi les solutions distributions pour les problèmes non caractéristiques (i.e. sous la condition $p(x_0,d\varphi(x_0)) \neq 0$). Bien entendu, il suffit de perturber l'un des coefficients de l'équation, fût-ce de façon C^∞, pour que le théorème ne s'applique plus, et nous sommes donc encore très loin du problème que nous nous sommes proposé de traiter.

Puis en 1937, étendant des estimations d'énergie obtenues pour les équations du deuxième ordre par Friedrichs & Lewy [Fri Lew] (1928), Petrowsky [Pet] montre que le problème de Cauchy est toujours bien posé (i.e. existence et unicité de la solution) pour les équations strictement hyperboliques, même lorsque les coefficients ne sont plus analytiques, ce qui coiffe toute une série de résultats dont les premiers remontent à Hadamard [Had] (1903) ; l'unicité se trouve ainsi prouvée pour les équations <u>à symbole principal réel</u> dès qu'on fait l'hypothèse

$$(1) \qquad p(x_0,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x_0)) = 0 \Rightarrow \tau = 0 \quad \text{et} \quad \{p,\varphi\}(x_0,\xi) \neq 0$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^n \smallsetminus 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$. En réalité, l'hypothèse $\tau = 0$ n'a rien à voir avec notre problème puisqu'elle est destinée, comme l'a montré Lax [Lax] (1957), à assurer l'existence d'une solution pour tout second membre f de l'équation $Pu = f$ et toutes données de Cauchy sur l'hypersurface $\varphi(x) = 0$. Par la suite, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit bien posé ont été affinées, et ont conduit à des théorèmes d'unicité du genre de celui qu'on trouve dans Hörmander [Hör 6, th. 4.4.2] (1977) ; malgré l'intérêt que présentent de tels résultats, il convient de souligner que l'hypothèse d'hyperbolicité ne constitue pas le bon cadre pour l'étude de l'unicité de la solution indépendamment de son existence pour un second membre et des données de Cauchy arbitraires.

Le troisième résultat à noter est celui de Carleman [Car] qui montre en 1939 l'unicité pour les équations <u>à symbole principal réel</u> en deux variables indépendantes sous l'hypothèse

$$(2) \qquad p(x_o, \xi - i\,\tau d\varphi(x_o)) = 0 \;\Rightarrow\; \{p,\varphi\}(x_o, \xi - i\,\tau d\varphi(x_o)) \neq 0$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Bien que la portée du résultat de Carleman se trouve limitée du fait de la restriction sur le nombre de variables, ce travail constitue une étape importante de la petite histoire que nous retraçons ; c'est là en effet que se trouve forgé l'outil qui va désormais servir dans toutes les démonstrations d'unicité : l'inégalité a priori pondérée dans laquelle figure un grand paramètre destiné à tendre vers l'infini, et qui a pris aujourd'hui le nom d'inégalité de Carleman.

A part quelques travaux ultérieurs portant sur des équations particulières, tous les autres résultats concernant l'unicité de Cauchy ont été obtenus dans les trente dernières années.

Ce fut d'abord l'exhibition, certes moins spectaculaire que celle des équations non localement résolubles, mais qui étonna cependant, d'équations à second membre nul, à coefficients C^∞, à partie principale réelle et possédant des solutions C^∞ nulles d'un seul côté d'une hypersurface non-caractéristique, ce qui justifiait a posteriori l'hypothèse (2) de Carleman, non vérifiée dans le cas de ces équations ; cette découverte fut l'oeuvre de Pliś [Pli 1] (1954) et de De Giorgi [De G] (1955) sur une idée de Myškis [Myš] (1947) consistant à combiner, en vue de construire une équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$, des fonctions trigonométriques de la variable d'espace avec des fonctions de troncature de la variable de temps ; à cette idée, ils ajoutèrent l'astuce de discrétiser la fonction $\exp(1/\varphi)$ de Myškis en une suite de paramètres λ_k tendant vers l'infini pour ensuite recoller entre elles les équations ainsi obtenues dans des bandes $\delta_{k+1} \leqslant \varphi(x) \leqslant \delta_k$, δ_k étant une suite décroissante de réels tendant vers zéro, ce qui assurait la régularité des coefficients et de la solution de l'équation. Ces techniques, améliorées par Cohen [Coh] (1960), permirent à

Hörmander [Hör 3, th. 8.9.3 & 8.9.4] (1963) d'énoncer les premiers résultats de non-unicité à hypothèses géométriques simples.

Peu de temps après les premiers exemples de non-unicité, Calderón [Cal 1] (1958), utilisant pour établir ses inégalités de Carleman la toute nouvelle théorie des intégrales singulières qu'il venait de créer avec Zygmund [Cal Zyg] (1957), généralisa le théorème de Carleman aux cas de quatre variables indépendantes ou plus (le cas de trois variables se heurtait alors à des difficultés de nature topologique). Ce théorème de Calderón fit ensuite l'objet d'un grand nombre d'extensions : Pederson [Ped 1] (1958), Mizohata [Miz] (1958), Hörmander [Hör 1] (1958/59), Calderón [Cal 2] (1961), Hörmander [Hör 3, th. 8.9.1] (1963), Pederson [Ped 2] (1966), Nirenberg [Nir 1] (1972), Watanabe & Zuily [Wat Zui] (1977), Watanabe [Wat] (1979), Alinhac & Baouendi [Ali Baw 2] (1980), Zuily [Zui 1] (1981), Ounaïes [Oun 1] (1982), Hörmander [Hör 8, th. 28.1.8 & 28.3.4] (1985) ; parmi celles-ci, la plus remarquable par la simplicité des hypothèses et la généralité du résultat est certainement celle de Hörmander [Hör 3, th. 8.9.1] (1963), qui, remaniée par Lerner [Ler 2] (1985) puis Hörmander [Hör 8, th. 28.3.4] (1985), établit l'unicité pour les équations principalement normales, c'est-à-dire dont le symbole principal possède la propriété

$$\{\overline{p},p\} \,/\, p \in L^{\infty}_{loc}\ (T^*\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

(ce qui comprend non seulement le cas du symbole principal réel, mais aussi les équations elliptiques ou à coefficients constants dans la partie principale), sous l'hypothèse de pseudo-convexité suivante

$$p(x_0,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x_0)) = \{p,\varphi\}(x_0,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x_0)) = 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{F}_{\varphi}(x_0,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x_0)) > 0 \tag{4}$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, où la fonction $\mathcal{F}_{\varphi}$ est un invariant (dépendant de p) linéaire et décroissant en φ'' (cf. [St R 6] pour une définition précise de $\mathcal{F}_{\varphi}$ avec ces notations), d'où la terminologie de pseudo-convexité qui désigne cette propriété géométrique ne dépendant que de l'hypersurface orientée d'équation $\varphi(x) = 0$.

Pendant ce temps, Pliś [Pli 2] (1961) renouvelait les techniques de démonstration des théorèmes de non-unicité en établissant de nouvelles estimations pour les recollements ; amplifiant cette idée à l'aide des puissantes méthodes de l'optique géométrique et du théorème d'extension de Whitney [Whi] (1934), Hörmander [Hör 5] (1975) établit toute une série de résultats pour les équations à coefficients constants dans la partie principale. Ces techniques, standardisées par Alinhac & Zuily [Ali Zui] (1981) ont ensuite permis à Alinhac [Ali 1] (1983) de montrer partiellement la nécessité des hypothèses (3) et (4) dans le théorème de Hörmander.

Il ne saurait être question, en si peu de place, de citer tous ceux qui ont participé aux progrès de la théorie, aussi avons-nous omis de très nombreux travaux, et non des moindres. Signalons toutefois que la recherche s'est orientée aujourd'hui dans plusieurs directions : quête des hypothèses minimales de régularité pour les coefficients (Aronszajn, Krzywicki & Szarski [Aro Krz Sza] (1962), Pliś [Pli 3] (1963), Agmon [Agm] (1966), Hörmander [Hör 5] (1975) & [Hör 7] (1983), Jerison & Kenig [Jer Ken] (1985)), extension des hypothèses (3) et (4) du théorème de Hörmander, et nécessité de telles hypothèses (Strauss & Treves [Str Tre] (1974), Alinhac [Ali 1] (1983), Lerner [Ler 1] (1984) & [Ler 2] (1985), St Raymond [St R 1] (1984), Robbiano [Rob 1] (1985), Lerner & Robbiano [Ler Rob] (1985), Hörmander [Hör 8, th. 28.4.3] (1985), Saint Raymond [St R 3], [St R 5] & [St R 6] (1986), Robbiano [Rob 2] (1986)), rôle des termes d'ordres inférieurs pour les équations dont le symbole principal admet des points critiques (en plus des références figurant comme extensions du théorème de Calderón, citons Pliś [Pli 2] (1961), Bahouri [Bah] (1982/83), Nirenberg [Nir 2] (1983), Alinhac [Ali 2] (1984), Bahouri & Robbiano [Bah Rob](1986)), étude des équations quasi-homogènes (Alinhac & Zuily [Ali Zui] (1981), Lascar & Zuily [Las Zui] (1982), Alinhac [Ali 1] (1983), Dehman [Deh] (1982/83), Ounaïes [Oun 2] (1986)), des équations analytiques, voire non-linéaires (Hörmander [Hör 3, th. 5.2.1, 5.2.2 & 5.3.2] (1963), Zachmanoglou [Zac 1] (1968) & [Zac 2] (1969), Bony [Bon 2] (1969), Zachmanoglou [Zac 3] (1970), Hörmander [Hör 4] (1971), Bony [Bon 3] (1976), Baouendi, Treves & Zachmanoglou [Baw Tre Zac] (1979), Baouendi & Treves [Baw Tre] (1981), Sjöstrand [Sjö] (1982), Saint Raymond [St R 2] (1984), Baouendi, Goulaouic & Treves [Baw Gou Tre] (1985), Saint Raymond [St R 4] (1984), Métivier [Mét] (1985)). Pour une vue d'ensemble sur les résultats et sur les méthodes d'approche du problème, nous renvoyons le lecteur à Alinhac [Ali 3] et à Zuily [Zui 2] dont les bibliographies sont très complètes.

<u>... a fourni la matière de cette thèse</u>.

Le paragraphe précédent nous a fait comprendre comment, au fur et à mesure que les résultats s'affinaient, deux méthodes se sont imposées dans le domaine étudié : la méthode des inégalités de Carleman pour les démonstrations d'unicité (on trouvera une discussion de cette méthode au chapitre 28 de Hörmander [Hör 8]), et pour les démonstrations de non-unicité, les techniques de recollement de solutions presque nulles bien expliquées dans Alinhac & Zuily [Ali Zui].

Dans cette thèse, nous nous sommes efforcé d'aborder le problème avec des arguments différents de ces méthodes standard, souvent inspirés des techniques développées pour le problème analytique, ou pour d'autres questions d'équations aux dérivées partielles (résolubilité locale). Pour cette raison, on ne trouvera guère ici de résultat définitif du genre "condition nécessaire et suffisante " comme en fournissent parfois des méthodes bien rodées ; les nôtres nous ont permis au contraire de mettre en lumière des phénomènes nouveaux et inattendus, et en tous cas d'obtenir des résultats inaccessibles aux méthodes traditionnelles (citons par exemple l'unicité dans des situations pseudo-concaves [St R 3, th. 5.2] cf. condition (6) ci-dessous, ou dans des situations instables [St R 5, th. 2.1] & [St R 6, th. 1.3] cf. condition (7) ci-dessous).

Dans [St R 1], nous démontrons la nécessité de l'hypothèse (4) du théorème de Hörmander dans le cas d'un zéro réel pour une équation principalement normale de type biprincipal ; plus précisément nous obtenons un théorème de non-unicité sous l'hypothèse (3) en supposant que

$$(5)\qquad p(x_o,\xi_o) = \{p,\varphi\}(x_o,\xi_o) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_\varphi(x_o,\xi_o) < -\,|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o,\xi_o)|$$

pour un $\xi_o \in \mathbb{R}^n$ tel que $(d_\xi\bar{p} \wedge d_\xi p)(x_o,\xi_o) \neq 0$. Ce résultat est prouvé par des constructions de phases permettant d'adapter une précédente démonstration d'Alinhac & Baouendi [Ali Baw 1] qui traitait un cas où $\mathcal{F}_\varphi(x_o,\xi_o) = \{p,\{p,\varphi\}\}(x_o,\xi_o) = 0$.

Reprenant ces méthodes de construction de phases en y introduisant des idées de Zachmanoglou [Zac 1] & [Zac 3], nous établissons dans [St R 2] un théorème de non-unicité pour le problème analytique (caractéristique) qui fournit une réciproque au théorème de Sjöstrand [Sjö, th. 8.9] ; ces méthodes, ainsi que celles de Sjöstrand, sont également étendues à l'étude de certains problèmes C^∞, notamment aux équations localement résolubles du premier ordre (classe d'équations plus large que celle des équations du premier ordre vérifiant (3)) pour lesquelles Strauss & Treves [Str Tre] ont montré que l'hypothèse (2) de Calderón-Carleman, qui s'écrit alors $\{p,\varphi\}(x_o) \neq 0$, assure l'unicité ; afin de donner une idée des résultats obtenus dans cette direction, précisons que pour de telles équations, les fonctions $\{p,\varphi\}$, $\mathcal{F}_\varphi$ et $\{p,\{p,\varphi\}\}$ ne dépendent plus de ξ , si bien que la condition (4) peut s'écrire " $\{p,\varphi\}(x_o) \neq 0$ ou $\mathcal{F}_\varphi(x_o) > 0$ " de même que la condition (5) devient " $\{p,\varphi\}(x_o) = 0$ et $\mathcal{F}_\varphi(x_o) < -\,|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o)|$ " ; une conséquence de notre travail (i) est alors l'unicité pour les équations localement résolubles du premier ordre sous la condition

(6) $$\{p,\varphi\}(x_o) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{F}_\varphi(x_o) > -\,|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o)|\ ,$$

ce qui justifie dans ce cas qu'il nous ait fallu l'hypothèse (5) dans [St R 1] pour obtenir un théorème de non-unicité ; on notera au passage qu'un tel résultat, qui inclut des situations pseudo-concaves (ii) (i.e. où $\{p,\varphi\}(x_o) = 0$ et $\mathcal{F}_\varphi(x_o) < 0$) ne pouvait être obtenu par la méthode des inégalités de Carleman puisque celle-ci, d'après Hörmander [Hör 8, th. 28.2.1] requiert $\{p,\varphi\}(x_o) \neq 0$ ou $\mathcal{F}_\varphi(x_o) \geqslant 0$. Toujours dans ce contexte, nous montrons encore un théorème de non-unicité sous l'hypothèse (5) (iii) pourvu qu'on vérifie une propriété de régularité moins restrictive que $(d_\xi\overline{p} \wedge d_\xi p)(x_o) \neq 0$ (qui était l'hypothèse faite dans [St R 1]) ; une telle propriété de régularité n'est pas ici une hypothèse surperflue car nous donnons enfin, pour traiter des cas non-réguliers sans l'hypothèse (6), un théorème d'unicité dont la démonstration, tout-à-fait originale, repose sur le calcul de la dimension de Hausdorff du fibré des normales à un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$ (iv).

(i) qui traite aussi les cas où $\mathcal{F}_\varphi(x_o) = -\,|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o)|$, cf. exposé n°XVII au Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz (1983/84).

(ii) Toutefois, il serait vain d'espérer que l'unicité sous la condition (6) puisse s'étendre aux équations d'ordres plus élevés ; en effet Alinhac [Ali 1, th. 3] a montré qu'il ne pouvait y avoir unicité si

$$p(x_o,\zeta_o) = \{p,\varphi\}(x_o,\zeta_o) = 0 \neq \{p,\{p,\varphi\}\}(x_o,\zeta_o) \cdot \{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_o,\zeta_o)$$

pour un $\zeta_o = \xi_o - i\,\tau_o\, d\varphi(x_o)$, $\tau_o \neq 0$, tel que $d_\xi\, \overline{p(x_o,\zeta_o)} \wedge d_\xi\, p(x_o,\zeta_o) \neq 0$ sous une condition supplémentaire (hypothèse (iv) d'Alinhac) qui entraîne que $\mathcal{F}_\varphi(x_o,\zeta_o) = 0$; c'est seulement l'hypothèse $\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_o,\zeta_o) \neq 0$ qui empêche que ce résultat s'applique aux équations du premier ordre.

(iii) Ce théorème traite aussi des cas où $\mathcal{F}_\varphi(x_o) = -\,|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o)|$, cf. note(i).

(iv) Ce fibré a été introduit par Bony [Bon 1] & [Bon 2] pour traiter le problème analytique.

Dans [St R 3] nous avons repris les principaux résultats existant dans la littérature pour les équations non-caractéristiques du premier ordre (i.e. vérifiant $\{p,\varphi\}(x_0) \neq 0$) en les étendant de manière à pouvoir les comparer plus aisément entre eux. Nous avons ainsi mis en évidence le rôle, jusqu'alors jamais signalé, joué par l'algèbre de Lie engendrée par les parties réelle et imaginaire de la partie principale de l'équation (qui est ici un champ tangent complexe) : si le rang de cette algèbre de Lie est supérieur à trois, il ne peut y avoir unicité (ce qui étend les résultats d'Alinhac [Ali 1, th. 1] et de Robbiano [Rob 1]), tandis que si ce rang reste inférieur à deux, l'unicité est assurée moyennant une hypothèse supplémentaire de feuilletage ou de résolubilité locale (ce qui développe les résultats de Strauss & Treves [Str Tre]). Puis, sur le modèle $\partial_t + i\,b(t)\,\partial_y$ dans $\mathbb{R}^2$, nous montrons qu'une telle hypothèse supplémentaire s'avère nécessaire pour obtenir un résultat d'unicité ; ce dernier point est établi par une méthode de construction apparentée à celle d'Alinhac & Zuily [Ali Zui], mais dans laquelle nous avons profondément modifié les arguments de recollement afin de subordonner le découpage de l'axe des temps aux propriétés de la partie principale donnée. Tous ces résultats doivent être considérés comme des extensions, dans le cadre donné, de l'hypothèse (3) du théorème de Hörmander. Enfin, passant à l'étude du problème caractéristique, nous montrons que la propriété d'unicité subsiste pour les équations qui la possédaient déjà dans le cas non-caractéristique si l'on ajoute des hypothèses de convexité du type (6), résultat qui admet également des réciproques lorsque l'algèbre de Lie est de rang constant.

Avec [St R 4], nous passons à l'étude du problème analytique non-linéaire du premier ordre. Nous plaçant dans le cadre défini par Baouendi, Goulaouic & Treves [Baw Gou Tre], nous étendons leur résultat d'unicité aux équations caractéristiques sous une condition de convexité dont la nécessité est aussi prouvée.

Les méthodes utilisées dans ce travail sont inspirées des méthodes linéaires dûes à Bony [Bon 1, th. 2.1] et Hörmander [Hör 3, th. 5.2.1].

Nous inspirant à nouveau des méthodes analytiques, nous étudions dans [St R 5] les équations non caractéristiques du deuxième ordre de type principal réel à la manière dont Hörmander [Hör 3, th. 5.2.1 & 5.3.2] puis Zachmanoglou [Zac 1] & [Zac 2] ont traité le problème analytique caractéristique. Nous obtenons ainsi un théorème d'unicité par une méthode de déformation de surface dans la situation instable où x_0 se trouve sur le bord d'un domaine de pseudo-convexité d'équation $\psi(x) > \psi(x_0)$, ce qui s'écrit plus précisément, en posant $(x,\zeta) = (x,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x))$,

$$(7)\begin{cases} \psi(x) \geqslant \psi(x_0) \text{ et } \varphi(x) = p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \geqslant \varepsilon\, [\psi(x) - \psi(x_0)]^k \\ \text{localement, et } p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) = 0 \Rightarrow \{p,\psi\}(x_0,\zeta) \neq 0 \end{cases} ,$$

où $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. L'instabilité de ce résultat, soulignée par des exemples, empêche l'utilisation standard (i.e. avec des poids dont le gradient est proportionnel à $d\varphi$ en x_0) de la méthode des inégalités de Carleman qui fournit toujours un résultat d'unicité stable. Après avoir précisé les liens entre l'hypothèse (7) et la position des bicaractéristiques par rapport à l'hypersurface du présent, d'équation $\varphi(x) = 0$, nous donnons aussi des résultats de non-unicité dans des situations où les trois fonctions p , $\{p,\varphi\}$ et $\mathcal{F}_\varphi$ s'annulent en un même point (x_0,ζ_0) .

Dans [St R 6] enfin, nous définissons la classe des équations principalement normales de type biprincipal comme la classe des équations vérifiant (3) et telles que $d_\xi \overline{p(x_0,\zeta)} \wedge d_\xi\, p(x_0,\zeta) \neq 0$ aux points $(x_0,\zeta) = (x_0,\xi - i\tau\, d\varphi(x_0))$ où les trois fonctions p , $\{p,\varphi\}$ et $\mathcal{F}_\varphi$ s'annulent simultanément. Pour ces équations, nous prouvons deux résultats d'unicité : le premier, inspiré par le travail de Lerner & Robbiano [Ler Rob] et la démonstration de résolubilité locale de Hörmander [Hör 2], est un résultat d'unicité compacte obtenu sous une hypothèse de faible pseudo-convexité de la famille d'hypersurfaces définie par φ, hypothèse qui s'exprime par les deux conditions (8) et (9) suivantes

$$(8) \qquad p(x,\zeta) = \{p,\varphi\}(x,\zeta) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) \geqslant \varepsilon \, |\mathcal{G}_\varphi(x,\zeta)|^2 \text{ localement}$$

pour x voisin de x_0, où $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{G}_\varphi$ est un nouvel invariant défini explicitement à partir de p et de φ, et

$$(9) \qquad p(x_0,\zeta) = \{p,\varphi\}(x_0,\zeta) = \mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta) = 0 \Rightarrow \{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_0,\zeta) \neq 0 \ ;$$

notre second résultat, qui reprend la méthode de déformation de surface que nous avions introduite dans [St R 5], prouve l'unicité (ordinaire) sous les deux hypothèses (7) et (9) ci-dessus (dans [St R 5], l'hypothèse (9) était implicite puisque nous traitions des équations non caractéristiques du deuxième ordre).

Bibliographie.

Nous laissant entraîner par l'évocation historique du problème, nous avons été amené à mettre ici beaucoup de titres ; en aucun cas cependant cette bibliographie ne peut être considérée comme exhaustive, et elle gagnerait à être complétée par celles de [Zui 2] et de [Ali 3] (auxquelles elle doit beaucoup).

[Agm] Agmon S. : *Unicité et convexité dans les problèmes différentiels*, Sém. Math. Sup. n° 13, Les Presses de l'Univ. de Montréal 1966.

[Ali 1] Alinhac S. : *Non-unicité du problème de Cauchy*, Annals of Math. 117, 77-108 (1983).

[Ali 2] Alinhac S. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 34 (2), 89-109 (1984).

[Ali 3] Alinhac S. : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Contemporary Mathematics 27, 1-22 (1984).

[Ali Baw 1] Alinhac S. & Baouendi M.S. : *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Sém. Goulaouic-Schwartz, 1978/79, exposé n° XXII (Ecole Polytechnique, Paris).

[Ali Baw 2] Alinhac S. & Baouendi M.S. : *Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities*, Amer. J. of Math. 102, 179-217 (1980).

[Ali Zui] Alinhac S. & Zuily C. : *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles*, Comm. in P.D.E. 6, 799-828 (1981).

[Aro Krz Sza] Aronszajn N., Krzywicki A. & Szarski J. : *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds*, Ark. för Mat. 4, 417-453 (1962).

[Bah] Bahouri H. : *(Unicité et) Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Thèse de 3ème cycle, Orsay 1982, et Comm. in P.D.E. 8, 1521-1547 (1983).

[Bah Rob] Bahouri H. & Robbiano L. : à paraître (il s'agit de nouveaux résultats pour des opérateurs non effectivement hyperboliques).

[Baw Gou Tre] Baouendi M.S., Goulaouic C. & Treves F. : *Uniqueness in certain first-order nonlinear complex Cauchy problems*, Comm. on Pure & Appl. Math. 38, 109-123 (1985).

[Baw Tre] Baouendi M.S. & Treves F. : *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Annals of Math. 113, 387-421 (1981).

[Baw Tre Zac] Baouendi M.S., Treves F. & Zachmanoglou E.C. : *Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients*, Duke Math. J. 46, 409-440 (1979).

[Bon 1] Bony J.-M. : *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 19 (1), 277-304 (1969).

[Bon 2] Bony J.-M. : *Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy*, C.R. Acad. Sci. Paris 268, 1103-1106 (1969).

[Bon 3] Bony J.-M. : *Extensions du théorème de Holmgren*, Sém. Goulaouic-Schwartz, 1975/76, exposé n° XVII (Ecole Polytechnique, Paris).

[Cal 1] Calderón A.P. : *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations*, Amer. J. of Math. 80, 16-36 (1958).

[Cal 2] Calderón A.P. : *Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations*, Fluid Dynamics and Applied Mathematics (Proc. Symp. Univ. of Maryland 1961), 147-195, Gordon & Breach, New-York 1962.

[Cal Zyg] Calderón A.P. & Zygmund A. : *Singular integral operators and differential equations*, Amer. J. of Math. 79, 901-921 (1957).

[Car] Carleman T. : *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. för Mat., Astr. och Fys. 26 B n° 17, 1-9 (1939).

[Cau] Cauchy A. : *Mémoire sur un théorème fondamental dans le calcul intégral*, C.R. Acad. Sci. Paris XIV, 1020, & XV, 44, 85 & 131 (1842).

[Coh] Cohen P. : *The non-uniqueness of the Cauchy problem*, O.N.R. Techn. Report 93, Stanford 1960.

[De G] De Giorgi E. : *Un esempio di non-unicitá della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico*, Rendic. di Mat. e della sua Applic. 5ème sér. 14, 382-387 (1955).

[Deh] Dehman B. : *Unicité (et non unicité) du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes*, Thèse de 3ème cycle, Orsay 1982, et J. Math. Kyoto Univ. 24, 453-471 (1984).

[Fri Lew] Friedrichs K. & Lewy H. : *Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen*, Math. Ann. 98, 192-204 (1928).

[Had] Hadamard J. : *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Note I & n° 171, Hermann, Paris 1903.

[Hol] Holmgren E. : *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förh. 58, 91-105 (1901).

[Hör 1] Hörmander L. : *On the uniqueness of the Cauchy problem I,II*, Math. Scand. 6, 213-225 (1958) & 7, 177-190 (1959).

[Hör 2] Hörmander L. : *Differential operators of principal type*, Math. Ann. 140, 124-146 (1960).

[Hör 3] Hörmander L. : *Linear partial differential operators*, Springer V., Berlin 1963.

[Hör 4] Hörmander L. : *A remark on Holmgren's uniqueness theorem*, J. of Diff. Geom. 6, 129-134 (1971).

[Hör 5] Hörmander L. : *Non-uniqueness for the Cauchy problem*, Fourier integral operators and partial differential equations, Springer Lecture notes in Math. 459, 36-72 (1975).

[Hör 6] Hörmander L. : *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics*, J. d'Analyse Math. 32, 118-196 (1977).

[Hör 7] Hörmander L. : *Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations*, Comm. in P.D.E. 8, 21-64 (1983).

[Hör 8] Hörmander L. : *The analysis of linear partial differential operators IV*, Springer V., Berlin 1985.

[Jer Ken] Jerison D. & Kenig C.E. : *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators*, Annals of Math. 121, 463-488 (1985).

[Joh] John F. : *On linear partial differential equations with analytic coefficients. Unique continuation of data*, Comm. on Pure & Appl. Math. 2, 209-253 (1949).

[Kow] Kowalevsky S. von : *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, J. für die reine und angew. Math. (J. de Crelle) LXXX, 1-32 (1875).

[Las Zui] Lascar R. & Zuily C. : *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles*, Duke Math. J. 49, 137-162 (1982).

[Lax] Lax P.D. : *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. J. 24, 627-646 (1957).

[Ler 1] Lerner N. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques*, Ann. Sci. de l'E.N.S. (Paris) 4ème série 17, 469-505 (1984).

[Ler 2] Lerner N. : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux*, J. des Math. Pures et Appl. 64, 1-11 (1985).

[Ler Rob] Lerner N. & Robbiano L. : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, J. d'Analyse Math. 44, 32-66 (1984/85).

[Mét] Métivier G. : *Uniqueness and approximation of solutions of first order non linear equations*, Sém. Bony-Meyer, 1985/86 (Ecole Polytechnique, Paris), et article à paraître.

[Miz] Mizohata S. : *Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre,* Proc. of the Jap. Acad. 34, 687-692 (1958).

[Myš] Myškis A. : *O metode A. Haar' a v voprose o edinstvennosti rešenia zadači Cauchy dla sistem differencialnyh uravnenií v častnyh proizvodnyh,* Doklady Akad. Nauk SSSR 58, 21-24 (1947).

[Nir 1] Nirenberg L. : *Lectures on linear partial differential equations,* Amer. Math. Soc. Regional Conf. Ser. in Math. 17, 27-41 (1972).

[Nir 2] Nirenberg L. : *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation,* Preprint 1983.

[Oun 1] Ounaïes H. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à caractéristiques non régulières,* Thèse de 3ème cycle, Orsay 1982.

[Oun 2] Ounaïes H. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs quasi-homogènes,* à paraître.

[Ped 1] Pederson R. : *On the unique continuation theorem for certain second and fourth order elliptic equations,* Comm. on Pure & Appl. Math. 11, 67-80 (1958).

[Ped 2] Pederson R. : *Uniqueness in the Cauchy problem for elliptic equations with double characteristics,* Ark. för Mat. 6, 535-549 (1966).

[Pet] Petrowsky I. : *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen,* Mat. Sbornik nouv. sér. 2, 815-870 (1937).

[Pli 1] Pliś A. : *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations,* Bull. Acad. Pol. Sci. 2, 55-57 (1954).

[Pli 2] Pliś A. : *A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere,* Comm. on Pure & Appl. Math. 14, 599-617 (1961).

[Pli 3] Pliś A. : *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation,* Bull. Acad. Pol. Sci. 11, 95-100 (1963).

[Rob 1] Robbiano L. : *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes,* J. of Diff. Equ. 57, 200-223 (1985).

[Rob 2] Robbiano L. : *Sur les conditions de pseudo-convexité et l'unicité de de Cauchy,* à paraître.

[Sjö] Sjöstrand J. : *Singularités analytiques microlocales,* Astérisque 95, 1982.

[St R 1] Saint Raymond X. : *Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux,* Indiana Univ. Math. J. 33, 847-858 (1984).

[St R 2] Saint Raymond X. : *Autour du théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy*, J. of Diff. Geom. 20, 121-135 (1984).

[St R 3] Saint Raymond X. : *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris 299, 495-498 (1984) et article à paraître à l'Ens. Math.

[St R 4] Saint Raymond X. : *Non-unicité pour certains problèmes de Cauchy complexes non-linéaires du premier ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris 299, 927-930 (1984) et Prépublications Orsay 1984.

[St R 5] Saint Raymond X. : *Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère*, à paraître.

[St R 6] Saint Raymond X. : *Unicité de Cauchy à partir de surfaces faiblement pseudo-convexes*, à paraître.

[Str Tre] Strauss M. & Treves F. : *First-order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem*, J. of Diff. Equ. 15, 195-209 (1974).

[Wat] Watanabe K. : *Sur l'unicité dans le problème de Cauchy pour les opérateurs différentiels à caractéristiques de multiplicité constante*, Tohoku Math. J. 31, 151-164 (1979).

[Wat Zui] Watanabe K. & Zuily C. : *On the uniqueness of the Cauchy problem for elliptic differential operators with smooth characteristics of variable multiplicity*, Comm. in P.D.E. 2, 831-855 (1977).

[Whi] Whitney H. : *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 36, 63-89 (1934).

[Zac 1] Zachmanoglou E.C. : *Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rat. Mech. Anal. 27, 373-384 (1967/68).

[Zac 2] Zachmanoglou E.C. : *Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 136, 517-526 (1969).

[Zac 3] Zachmanoglou E.C. : *Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 38, 178-188 (1970).

[Zui 1] Zuily C. : *Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels*, Comm. in P.D.E. 6, 153-196 (1981).

[Zui 2] Zuily C. : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Math. 33, Birkhäuser, Boston 1983.

Orsay, décembre 1985.

Non-Unicité de Cauchy pour des Opérateurs Principalement Normaux

PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL

Vol. 33

pp. 847 - 858

(1984)

1

Non-Unicité de Cauchy pour des Opérateurs Principalement Normaux

XAVIER SAINT RAYMOND

I. Introduction

Ce papier est une contribution à l'étude de l'unicité de Cauchy pour les problèmes C^∞, étude qui a suscité de nombreux travaux récents (Alinhac [1] et [2], Bahouri [4], Dehman [6], Lerner [9] et [10], Nirenberg [11], Ounaîes [13], Robbiano [14]). Pour un panorama des résultats sur la question, on pourra consulter Zuily [20] et sa très riche bibliographie.

Pour le point de vue où nous nous plaçons, les travaux essentiels sont dûs à Hörmander, Alinhac, Robbiano et Lerner. Hörmander établit ([7], chapitre 8) son fameux théorème d'unicité sous la conjonction de deux hypothèses de natures différentes:

1. Une hypothèse ne concernant que l'opérateur: opérateurs elliptiques ou "principalement normaux."
2. Une hypothèse de convexité faisant intervenir le symbole principal de l'opérateur ainsi que la variété portant les données de Cauchy: surfaces "fortement pseudo-convexes."

Ces deux conditions, sous une forme légèrement plus faible, sont en outre nécessaires pour obtenir les inégalités de Carleman qui restent à ce jour l'unique méthode utilisée pour démontrer l'unicité de Cauchy C^∞; cela ne prouve cependant pas qu'elles sont nécessaires à l'unicité de Cauchy elle-même.

La condition 1 sur l'opérateur seul est apparue, sous deux formes proches l'une de l'autre, comme étant à la fois suffisante (moyennant la condition 2 de convexité: Lerner [10]) et nécessaire (Alinhac [1], théorème 1 et Robbiano [14]) pour l'unicité de Cauchy. Il reste donc à examiner la condition 2 de convexité pour laquelle on possède déjà quelques résultats de nécessité (Alinhac [1], théorèmes 2 et 3, Saint Raymond [15], Bahouri [4]).

Nous proposons ici un nouveau résultat de non-unicité pour des problèmes ne vérifiant pas la condition 2 de convexité, l'opérateur étant principalement normal au sens de Lerner [10] (hypothèse du type condition 1 sur l'opérateur seul). Il concerne un opérateur à partie principale complexe admettant un zéro réel, situation qui n'était pas traitée dans Alinhac [1]. Enfin, à la suite de notre précédent travail [15] dont nous reprenons les méthodes, nous nous sommes efforcés d'inclure dans nos résultats les problèmes caractéristiques; ce point de vue nous a

Indiana University Mathematics Journal ©, Vol. 33, No. 6 (1984)

alors conduit à formuler une réciproque du théorème 8.9 de Sjöstrand [16] sur l'unicité de Cauchy pour des problèmes analytiques.

II. Notations et Enoncés des Résultats

1. Le problème. Soient Y une sous-variété de codimension 1 de la variété $X = \mathbf{R}^{n+1}$ (où $n \geq 1$), et 0 un point de Y; nous noterons $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ le point courant de X et poserons $D = -i\partial_x = (-i(\partial/\partial x_0), \ldots, -i(\partial/\partial x_n))$ où $i = \sqrt{-1}$; soit enfin $P(x,D)$ un *opérateur différentiel linéaire* d'ordre $m \geq 1$ à *coefficients (complexes)* C^∞. Nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy correspondant, c'est-à-dire, via réduction par linéarité, à l'existence d'une fonction u C^∞ non triviale au voisinage de 0, et solution du problème:

$$\begin{cases} P(x,D)u(x) = 0 \text{ et} \\ \text{u est plate sur } Y \text{ (i.e. toutes les dérivées de u sont nulles sur } Y). \end{cases}$$

Toute notre étude est locale (au voisinage de 0).

2. Notations. Nous noterons T^*X le fibré cotangent à X dont les vecteurs seront $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$. Le symbole principal de P sera noté $p(x,\xi)$ et son gradient en x (resp. en ξ) $p_x(x,\xi)$ (resp. $p_\xi(x,\xi)$). L'ensemble

$$\text{Char } P = \{(x,\xi) \in T^*X : p(x,\xi) = 0\}$$

est appelé le lieu caractéristique de P. Le champ hamiltonien de p sera noté:

$$H_p = p_\xi(x,\xi) \cdot \partial_x - p_x(x,\xi) \cdot \partial_\xi = H_{\mathrm{Re}\,p} + iH_{\mathrm{Im}\,p}.$$

Etant donnée une fonction $\Xi(x)$, nous noterons avec un d droit la dérivée suivante:

$$\frac{d}{dx_j} p(x, \Xi(x)) = \frac{\partial p}{\partial x_j}(x,\xi)|_{\xi = \Xi(x)} + p_\xi(x, \Xi(x)) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial x_j}(x).$$

Comme Y est de codimension 1, il existe au voisinage de 0 une fonction $C^\infty t$ telle que:

$$Y = \{x \in X : t(x) = 0\} \text{ et } t_x(0) \neq 0.$$

Nous en déduisons des systèmes de coordonnées locales en utilisant des paramétrages y de Y:

$$x = (t,y) \in X \text{ avec } y \in \mathbf{R}^n \text{ et éventuellement } y = (y_1, y_2, y'').$$

Les vecteurs cotangents seront alors notés

$$\xi = (\tau, \eta) \text{ avec au besoin } \eta = (\eta^1, \eta^2, \eta'').$$

3. Le théorème C^∞

Théorème 1. *Supposons qu'il existe* $\rho_1 \in T_Y^* X \cap \text{Char } P$ *tel que*

(H1) $\begin{cases} \text{Re } p_\xi(\rho_1) \textit{ et } \text{Im } p_\xi(\rho_1) \textit{ linéairement indépendantes et } \text{Char } P \textit{ (qui est alors} \\ \textit{une variété de codimension 2) est involutive au voisinage de } \rho_1. \end{cases}$

$$\text{(H2)} \quad \begin{cases} H_p t(\rho_1) = 0, \textit{ et la matrice} \\ K = \begin{pmatrix} H^2_{\text{Re}p} t(\rho_1) & H_{\text{Re}p} H_{\text{Im}p} t(\rho_1) \\ H_{\text{Re}p} H_{\text{Im}p} t(\rho_1) & H^2_{\text{Im}p} t(\rho_1) \end{pmatrix} \\ \textit{est la matrice d'une forme quadratique définie positive sur } \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage Ω de 0, un opérateur Q à coefficients C^∞ d'ordre $m - 1$ et une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} (P(x,D) + Q(x,D))\, u(x) = 0 \textit{ dans } \Omega \textit{ et} \\ 0 \in \text{supp}\, u \subset \{x \in \Omega : t(x) \geq 0\} \end{cases}$$

De plus, l'opérateur Q peut être remplacé par une fonction plate sur $Y = \{x : t(x) = 0\}$ dans chacun des deux cas suivants:

$$\text{(H3a)} \quad \begin{cases} \textit{Il existe des constantes } k \in [0,\infty[\textit{ et } C > 0 \textit{ telles que} \\ \qquad |p(x,t_x(x))| \geq C|t(x)|^k \end{cases}$$

$$\text{(H3b)} \quad \begin{cases} \textit{Les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées avec} \\ \rho_1 = (0,t_x(0)) \textit{ (la normale à } Y \textit{ en } 0). \end{cases}$$

Commentaires. *(i)* **L'hypothèse (H1) décrit la situation géométrique générique de Char P au voisinage d'un zéro réel pour des opérateurs principalement normaux au sens de Lerner [10]; avec $H_p t(\rho_1) = 0$, cela implique $n \geq 2$; pour des situations moins génériques, se reporter au paragraphe 6.**

On remarquera que lorsque $m = 1$, (H2) implique que le problème est caractéristique (on a même alors (H3b)); cela est à relier au théorème 1 de Strauss-Trèves [17] qui contient que la condition (H1) (pour tous les $\rho \in T^*X \cap \text{Char } P$) jointe à l'hypothèse "$Y$ non caractéristique pour P en 0" entraîne l'unicité; notre théorème est donc une réciproque de ce résultat.

***(ii)* L'hypothèse (H2) sur la matrice K peut être décomposée en deux: tr $K > 0$ et dét $K > 0$.(1)**

***(a)* La condition tr $K > 0$ est à relier à la notion de forte pseudo-convexité d'Hörmander qui se compose d'une condition sur les caractéristiques complexes et d'une autre sur les caractéristiques réelles qui, avec nos notations, s'écrit:**

$$\forall \rho \in (T^*X \setminus 0) \cap \text{Char } P, \quad H_p t(\rho) = 0 \Rightarrow H^2_{\text{Re}p} t(\rho) + H^2_{\text{Im}p} t(\rho) < 0.$$

Le théorème 8.9.1 d'Hörmander [7], étendu par Lerner [10], montre que cette condition, jointe à l'hypothèse (H1) (pour tous les $\rho \in T^*X \cap \text{Char } P$) entraîne l'unicité; notre théorème en est donc une réciproque.

***(b)* En revanche, la condition dét $K > 0$ semble superflue; en effet, lorsque la matrice K possède une valeur propre négative (mais toujours sous les conditions (H1) et tr $K > 0$), nous savons encore, sur certains exemples, construire des**

---

(1) Avec les notations de la présentation générale de cette thèse, ρ_1 s'écrit (x_o,ξ_o) et t s'écrit φ ; de plus, on a alors tr K = $-\mathcal{F}_\varphi(x_o,\xi_o)$ et dét K = $[\mathcal{F}_\varphi(x_o,\xi_o)]^2 - |\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o,\xi_o)|^2$, si bien que les hypothèses $\rho_1 \in$ Char P et (H2) s'écrivent

$$p(x_o,\xi_o) = \{p,\varphi\}(x_o,\xi_o) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\varphi(x_o,\xi_o) < -|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o,\xi_o)|,$$

ce qui justifie la formulation de ces hypothèses que nous avons adoptée dans notre présentation générale (condition (5)).

solutions de $(P + a)u = 0$ avec $0 \in \operatorname{supp} u \subset \{x : t(x) \geq 0\}$; cependant, cela requiert des constructions de phases complexes que nous ne savons pas faire dans le cas général.

(iii) L'hypothèse (H3a) concerne les problèmes qui sont "moralement" non-caractéristiques; elle est notamment vérifiée par tous les opérateurs dont le terme en D_t^m est $t^k D_t^m$ avec $k < \infty$.

(iv) Au contraire l'hypothèse (H3b) concerne des problèmes caractéristiques; la condition $H_p t(\rho_1) = 0$ est alors une conséquence de $\rho_1 \in \operatorname{Char} P$; de plus, "Re $p_\xi(\rho_1)$ et Im $p_\xi(\rho_1)$ linéairement indépendantes" est à son tour une conséquence de l'hypothèse (H2) si on suppose que $\{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(\rho_1) = 0$, et on pourrait donc affaiblir, dans ce cas, les hypothèses du théorème; en outre, la situation géométrique est très particulière; nous montrerons tout cela au lemme 3.

Cette situation géométrique fournit en outre un théorème pour l'unicité de Cauchy analytique: le théorème 2 ci-dessous.

(v) Les exemples suivants vérifient les hypothèses de notre théorème 1; le premier d'entre eux vérifie (H3a), le deuxième (H3b) et le troisième ne vérifie ni (H3a) ni (H3b):

$$P_1 = D_t^2 + 2y_2 D_t D_{y_1} + 2D_{y_1} D_{y_2} + i[D_t^2 + 2y_3 D_t D_{y_1} + 2D_{y_1} D_{y_3}]$$

dans $\mathbf{R}^4$ au point $\rho_1 = (0,0,0,0;0,1,0,0)$.

$$P_2 = y_1 D_t^2 + D_t D_{y_1} + D_{y_1}^2 + i[y_2 D_t^2 + D_t D_{y_2} - 2D_{y_2}^2]$$

dans $\mathbf{R}^3$ au point $\rho_1 = (0,0,0;1,0,0)$.

$$P_3 = y_1 D_t D_{y_3} + D_{y_1}^2 - D_{y_3}^2 + i[y_2 D_t D_{y_3} + D_{y_2}^2 - D_{y_3}^2]$$

dans $\mathbf{R}^4$ au point $\rho_1 = (0,0,0,0;0,1,1,1)$.

4. Le théorème analytique. Lorsque les coefficients de P sont analytiques, on peut aborder le problème de l'unicité de Cauchy sans perturber l'opérateur; nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 2. *Supposons que les coefficients de P soient analytiques, que $(0, t_x(0)) \in \operatorname{Char} P$ et que*

(H1a) $\{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(\rho) = 0$ *pour tout* $\rho \in \operatorname{Char} P$ *voisin de* $(0, t_x(0))$.

(H2a) $\forall z \in \mathbf{C}$ *avec* $|z| = 1$, $H^2_{\operatorname{Re}(zp)} t(0, t_x(0)) > 0$.

Alors il existe un voisinage Ω de 0 et une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant:

$$(*) \qquad \begin{cases} P(x,D)u(x) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et} \\ 0 \in \operatorname{supp} u \subset \{x \in \Omega : t(x) \geq 0\}. \end{cases}$$

De plus, u est analytique à l'intérieur de son support.

Commentaires. Ce théorème est une réciproque du théorème 8.9 de Sjöstrand [16]; en effet:

(vi) D'après le A. du théorème de Sjöstrand, pour qu'il existe une solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ au problème $(*)$, il est nécessaire que $\operatorname{Re} p(x,\xi)$ et $\operatorname{Im} p(x,\xi)$ s'annulent au point $(0,t_x(0))$ ainsi que tous leurs crochets itérés; notre hypothèses (H1a) est cette condition A. légèrement renforcée.

(vii) De même, d'après le B. du théorème de Sjöstrand, il est nécessaire que pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, les projections sur la base des bicaractéristiques de $\operatorname{Re}(zp)$ issues de $(0,t_x(0))$ restent localement dans $\{x : t(x) \geq 0\}$; là encore, notre hypothèse (H2a) (qui est exactement la même que l'hypothèse de positivité de la matrice K en (H2) du théorème 1 ci-dessus) est cette condition B., que nous avons renforcée en demandant aux bicaractéristiques de rencontrer Y avec un contact au plus double.

5. Plan de la démonstration. Pour démontrer le théorème 1, nous nous ramenons en fait à trois situations géométriques standard pour lesquelles il existe déjà dans la littérature des constructions de solutions non triviales de l'équation $(P + Q)u = 0$. Pour cela, nous construisons dans un voisinage Ω de 0 deux fonctions φ (avec $\varphi_x(0) \neq 0$) et ψ, C^∞ à valeurs réelles telles que:

$$p(x,\psi_x(x)) = 0 \quad \text{et} \quad p_\xi(x,\psi_x(x)) \cdot \varphi_x(x) = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \forall q \in C^\infty(\Omega),\ \forall \beta \in C^\infty(\Omega),\ \forall \alpha_0 \in \mathbf{C},\ \exists \alpha \in C^\infty(\Omega): \\ p_\xi(x,\psi_x(x)) \cdot \alpha_x(x) + q(x)\alpha(x) = \beta(x) \quad \text{et} \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous en déduisons l'existence d'une solution à support dans $\{x \in \Omega : \varphi(x) \geq 0\}$ en distinguant les trois cas suivants:

a. Sous l'hypothèse (H3a), nous pouvons adapter la démonstration du théorème 2 d'Alinhac-Baouendi [3] en remplaçant les hypothèses "p réel" et "$p_\xi(x,\psi_x(x)) \cdot \partial_x \neq 0$" par la condition (2.2) ci-dessus.

b. Sous l'hypothèse (H3b), nous pouvons choisir $\varphi = \psi$ dans les conditions précédentes, et nous pouvons adapter de la même façon la démonstration du théorème 2 de Saint Raymond [15].

c. Enfin, lorsque (H1) et (H2) sont vérifiées avec $\rho_1 \neq (0,t_x(0))$, nous pouvons choisir φ et ψ telles que $(\varphi_x^*(0),\psi_x(0))$ soient linéairement indépendants, et la condition (2.1) permet d'utiliser le théorème 8.9.4 d'Hörmander [7].

De la même façon que dans le cas *b* ci-dessus, nous prouvons le théorème 2 en nous ramenant à une situation traitée par Baouendi-Trèves-Zachmanoglou [5].

6. Situations dégénérées. Lorsque les parties réelle et imaginaire de $p_\xi(\rho_1)$ ne sont pas indépendantes, on pourrait envisager (comme dans Strauss-Trèves [17]) de remplacer l'hypothèse (H1) par la condition (P) de résolubilité locale de Nirenberg-Trèves [12]; par ailleurs, on dispose déjà de quelques résultats concernant les opérateurs à symbole principal réel (Alinhac [1] et [2], Bahouri [4], Nirenberg [11]) qui traitent même certains cas où $p_\xi(\rho_1) = 0$. Nous nous contenterons de donner ici un résultat se déduisant facilement de Saint Raymond [15]; c'est l'équivalent du théorème 1 lorsque les parties réelle et imaginaire de p_ξ restent liées dans un voisinage de ρ_1:

Proposition 1. *Supposons qu'il existe* $\rho_1 \in T_0^*X \cap \mathrm{Char}\, P$ *tel que*

(H1b) $p_\xi(\rho_1) \neq 0$ *et* Char P *est, au voisinage de* ρ_1, *une variété de codimension 1.*

(H2b) $H_p t(\rho_1) = 0$ *et* $H^2_{\mathrm{Re}\,p} t(\rho_1) + H^2_{\mathrm{Im}\,p} t(\rho_1) > 0$.

Alors nous avons les mêmes conclusions qu'au théorème 1, y compris l'amélioration lorsque l'une des hypothèses (H3a) ou (H3b) est vérifiée.

Commentaires. Ici l'hypothèse (H2b) donne une meilleure réciproque au théorème d'Hörmander (pas de condition dét $K > 0$). Par ailleurs, on pourrait sans doute affaiblir (H1b) en requérant seulement l'existence de suffisamment de "courbes bicaractéristiques monodimensionnelles" (cf. Hörmander [8]) au voisinage de ρ_1, mais nous serions encore loin d'avoir envisagé toutes les situations telles qu'elles apparaissent à la dissection du lieu caractéristique pratiquée, sous la condition (P) de Nirenberg-Trèves [12], par Hörmander [8]. Enfin, nous laissons le soin au lecteur d'énoncer un théorème analytique correspondant à la proposition 1.

Eléments de démonstration pour la proposition 1. Sous les hypothèses de la proposition 1, il existe $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| = 1$ tel que

$$\mathrm{Char}\, P = \{(x,\xi) \in T^*X : \mathrm{Re}[zp(x,\xi)] = 0\}$$

au voisinage de ρ_1, $\mathrm{Re}(zp_\xi(\rho_1)) \neq 0$ et $H^2_{\mathrm{Re}(zp)} t(\rho_1) > 0$.

Nous avons montré dans [15] comment construire alors des fonctions φ et ψ vérifiant (2.1) et (2.2) avec $\mathrm{Re}(zp)$ à la place de p. Mais cela implique le même résultat avec p (puisque H_p est alors proportionnel à $H_{\mathrm{Re}(zp)}$) et on peut terminer la démonstration comme il est indiqué au paragraphe 5 ci-dessus.

III. Démonstration des Théorèmes

Rappelons d'abord que sous l'hypothèse (H1) du théorème 1, la variété Char P est naturellement feuilletée au voisinage de ρ_1 (cf. par exemple Hörmander [8] ou Trèves [18], p. 386). C'est à ce feuilletage naturel que nous faisons référence dans la propriété (3.3) ci-dessous.

Lemme 1. *Sous l'hypothèse (H1) du théorème 1, il existe un voisinage* Ω *de* 0, *une sous-variété* Σ *de* X *de codimension* 2 *passant par* 0, *et une application* $C^\infty \psi_0 : \Omega \to \mathbf{R}$ *tels que:*

(3.1) $(0, \psi_x^0(0)) = \rho_1$;

(3.2) $p(x, \psi_x^0(x)) = 0$ *sur* Σ;

(3.3) $\left\{\text{\textit{Les projections sur la base } } X \text{ \textit{des feuilles passant par} } (x,\psi_x^0(x)) \text{ \textit{pour} } x \in \Sigma \text{ \textit{forment une famille} } \mathcal{F} \text{ \textit{de variétés de dimension} 2 \textit{transverses à} } \Sigma, \text{ \textit{deux à deux disjointes et dont la réunion contient} } \Omega.\right.$

Démonstration du lemme 1. Choisissons des coordonnées locales (t,y); comme $\mathrm{Re}\, p_\xi(\rho_1)$ et $\mathrm{Im}\, p_\xi(\rho_1)$ sont linéairement indépendantes et que $H_p t(\rho_1) = 0$, Re $p_\eta(\rho_1)$ et Im $p_\eta(\rho_1)$ sont également linéairement indépendantes et il existe alors au voisinage de 0 des coordonnées locales (t,y) telles que:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \tau}(\rho_1) = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \eta^1}(\rho_1) = 1, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \eta^2}(\rho_1) = i, \\ \text{et pour } j \geq 3, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \eta^j}(\rho_1) = 0. \end{cases}$$

Ecrivant $\rho_1 = (0,0;\tau_1,\eta_1)$, nous posons:

$$\psi^0(t,y) = t\tau_1 + y\cdot\eta_1 + \lambda y_1^2 + \mu y_2^2$$

où λ et μ sont des constantes réelles à fixer; (3.1) est ainsi vérifiée et $p(0,\psi_x^0(0)) = 0$. Grâce à (3.4), nous calculons que

$$\frac{d}{dy_1}p(0,\psi_x^0(0)) = \frac{\partial p}{\partial y_1}(\rho_1) + 2\lambda$$

et

$$\frac{d}{dy_2}p(0,\psi_x^0(0)) = \frac{\partial p}{\partial y_2}(\rho_1) + 2i\mu$$

et il suffit d'attribuer à λ et μ les valeurs 0 ou 1 suivant que

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial p}{\partial y_1}(\rho_1)\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial p}{\partial y_2}(\rho_1) - \mathrm{Im}\,\frac{\partial p}{\partial y_1}(\rho_1)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial p}{\partial y_2}(\rho_1),$$

$\mathrm{Re}(\partial p/\partial y_1)(\rho_1)$ et $\mathrm{Im}(\partial p/\partial y_2)(\rho_1)$ sont nulles ou non pour que l'on ait

$$(3.5)\qquad \begin{cases} (d/dy_1)p(0,\psi_x^0(0)) \text{ et } (d/dy_2)p(0,\psi_x^0(0)) \text{ sont } \mathbf{R}\text{-linéairement indépendantes} \\ \text{(dans le } \mathbf{R}\text{-espace vectoriel } \mathbf{C}\text{, de dimension 2).} \end{cases}$$

La variété Σ définie par

$$\Sigma = \{x \in X : p(x,\psi_x^0(x)) = 0\}$$

est alors de codimension 2; elle passe par 0 et nous avons (3.2).

Il reste donc à vérifier (3.3). Comme nous le rappelions en commençant, la variété Char P est naturellement feuilletée au voisinage de ρ_1; de plus, ces feuilles sont transverses aux fibres à cause de l'hypothèse d'indépendance de Re $p_\xi(\rho_1)$ et Im $p_\xi(\rho_1)$; leurs projections sont donc des variétés de dimension 2. Elles sont transverses à Σ à cause de (3.4) et (3.5), et par continuité; enfin, c'est encore pour des raisons de continuités, transversalités et dimensions qu'elles sont deux à deux disjointes et que leur réunion remplit Ω, à condition que celui-ci soit assez petit.

Lemme 2. Sous les hypothèses (H1) et (H2) du théorème 1, il existe deux voisinages $\omega \subset \Omega$ de l'origine, et deux fonctions φ et ψ définies dans Ω, C^∞ et à valeurs réelles telles que

(3.6) $(0,\psi_x(0)) = \rho_1$ *et* $p(x,\psi_x(x)) = 0$ *dans* Ω;

(3.7) $$\begin{cases} \forall q \in C^\infty(\Omega),\ \forall\beta \in C^\infty(\Omega),\ \forall\alpha_0 \in \mathbf{C},\ \exists\alpha \in C^\infty(\Omega) \textit{ telle que} \\ p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\alpha_x(x) + q(x)\alpha(x) = \beta(x) \textit{ dans } \omega, \textit{ et } \alpha(0) = \alpha_0; \end{cases}$$

(3.8) $p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\varphi_x(x) = 0$ *dans* Ω;

(3.9) $\varphi_x(0) = t_x(0) \neq 0$ *et* $0 \in \{x \in \Omega : \varphi(x) \geq 0\} \subset \{x \in \Omega : t(x) \geq 0\}$.

Démonstration du lemme 2. Nous continuons à utiliser les notations du lemme 1.

a. Construction de la fonction ψ. La variété décrite par $(x,\psi_x^0(x))$ pour $x \in \Sigma$ est une variété isotrope (pour la forme symplectique) de dimension $n - 1$. Les feuilles étant également isotropes, la réunion de celles d'entre elles qui passent par les points $(x,\psi_x^0(x))$ pour $x \in \Sigma$ est une variété lagrangienne contenue dans Char P qui, de plus, est transverse aux fibres puisque sa projection sur la base remplit Ω (cf. (3.3)). Cela implique qu'il existe une fonction ψ vérifiant (3.6) (pour une construction plus détaillée, voir par exemple Trèves [18] p. 389).

Nous changeons de coordonnées locales pour démontrer (3.7): $x = (x_0,x_1,x')$ de telle façon que les éléments de $\mathcal{F}$ soient définis par les équations $x' =$ constante. L'opérateur $p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\partial_x$ dérivant le long des feuilles, nous pouvons, grâce à l'hypothèse (H1), modifier (x_0,x_1) de telle sorte que:

$$p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\partial_x = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + a(x)\frac{\partial}{\partial x_0} + b(x)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

où a et b sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes s'annulant en 0. Nous voyons sur cette expression que $p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\partial_x$ est un "opérateur de force constante" au sens d'Hörmander [7], définition 7.1.1; le corollaire 7.3.2 du même ouvrage nous dit qu'il existe alors un voisinage Ω de l'origine tel que pour toute $f \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, il existe une solution $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant:

$$p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot u_x(x) = f(x) \qquad \text{dans } \Omega,$$

Nous choisissons alors un voisinage ω de l'origine, relativement compact dans Ω; pour toute fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ nous pouvons définir une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ coïncidant avec f dans $\bar{\omega}$: en effet, il suffit de prendre une extension fournie par le théorème 1 de Whitney [19] de la restriction à $\bar{\omega}$ de f. Pour des données $\beta \in C^\infty(\Omega)$ et $\alpha_0 \in \mathbf{C}$, nous utilisons alors deux fois de suite le corollaire d'Hörmander rappelé ci-dessus pour définir deux fonctions γ et δ appartenant à $C^\infty(\Omega)$ et vérifiant dans Ω:

$$p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\gamma_x(x) = \tilde{q}(x), \text{ puis } p_\xi(x,\psi_x(x))\cdot\delta_x(x) = e^{\gamma(x)}\tilde{\beta}(x).$$

Nous pouvons alors prendre comme solution du problème (3.7) la fonction $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ définie par

$$\alpha(x) = e^{-\gamma(x)}[\delta(x) - \delta(0) + \alpha_0 e^{\gamma(0)}].$$

b. Construction de la fonction φ. Commençons par choisir des coordonnées locales (t,y) telles que Σ ait pour équation $y_1 = y_2 = 0$ au voisinage de 0 (ce qui est possible puisque (3.1) et (3.3) impliquent que Σ coupe Y transversalement en 0), puis définissons φ par

$$\varphi(t,y) = t - C|y''|^2 \text{ sur } \Sigma \qquad \text{et } \varphi \text{ est constante le long des éléments de } \mathcal{F},$$

où C est une constante positive que nous fixerons plus loin, et $|y''|^2 = \sum_{j=3}^{n} y_j^2$. Comme φ est constante le long des éléments de $\mathcal{F}$, (3.8) est aussitôt vérifiée; de plus, $\varphi_x(0) = t_x(0) \neq 0$. Pour montrer (3.9), il suffit alors de vérifier que $\varphi^{-1}(0) \subset \{x \in \Omega : t(x) \geq 0\}$; or $\varphi^{-1}(0)$ est la réunion de la sous-famille $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathcal{F}$ qui coupent Σ le long de sa sous-variété d'équation $t = C|y''|^2$.

Ecrivons les équations de Hamilton-Jacobi sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,s) = \operatorname{Re} p_\xi(x(r,s),\xi(r,s)) \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial s}(r,s) = \operatorname{Im} p_\xi(x(r,s),\xi(r,s)) \\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial r}(r,s) = -\operatorname{Re} p_x(x(r,s),\xi(r,s)) \\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial s}(r,s) = -\operatorname{Im} p_x(x(r,s),\xi(r,s)). \end{cases}$$

(Ces équations sont intégrables grâce à l'hypothèse (H1)). Nous pouvons alors définir la fonction $\tilde{t}(r,s,t,y'')$ qui est l'expression de la fonction $t(x)$ dans le système de coordonnées locales choisi de la façon suivante: (t,y'') sont les coordonnées sur Σ de l'intersection avec Σ de l'unique feuille appartenant à $\mathcal{F}$ et passant par x, et (r,s) sont les coordonnées de x sur cette feuille. La matrice K que donne l'hypothèse (H2) du théorème 1 est alors la matrice des dérivées secondes par rapport à (r,s) de la fonction $\tilde{t}$ en 0. Par cette hypothèse (H2), nous pouvons déterminer un voisinage Ω de l'origine en chaque point duquel la forme quadratique définie par les dérivées secondes de $\tilde{t}$ par rapport à (r,s) et calculée en un vecteur (R,S) reste supérieure à $\varepsilon(R^2 + S^2)$ pour un $\varepsilon > 0$. Nous pouvons donc écrire en tout point de Ω:

$$\tilde{t}(r,s,t,y'') \geq \varepsilon(r^2+s^2)/2 + r\frac{\partial \tilde{t}}{\partial r}(0,0,t,y'') + s\frac{\partial \tilde{t}}{\partial s}(0,0,t,y'') + \tilde{t}(0,0,t,y''). \tag{3.10}$$

La fonction $(\partial\tilde{t}/\partial r)(0,0,C|y''|^2,y'')$ est une fonction C^∞ de y'' s'annulant pour $y'' = 0$, d'où:

$$\left|\frac{\partial \tilde{t}}{\partial r}(0,0,C|y''|^2,y'')\right| \leq 2\nu|y''|, \qquad \text{et de même} \tag{3.11}$$
$$\left|\frac{\partial \tilde{t}}{\partial s}(0,0,C|y''|^2,y'')\right| \leq 2\nu|y''|$$

où $\nu > 0$, comme norme de la dérivée *première* de $(\partial\tilde{t}/\partial r)(0,0,C|y''|^2,y'')$ en $y'' = 0$, est *indépendante de* C. Comme $\tilde{t}(0,0,C|y''|^2,y'') = C|y''|^2$, pour les points de Ω par lesquels passe un élément de $\mathcal{G}$, (3.10) entraîne que:

$$\tilde{t}(r,s,C|y''|^2,y'') \geq \varepsilon(r^2+s^2)/2$$
$$-\left(\left|\frac{\partial\tilde{t}}{\partial r}(0,0,C|y''|^2,y'')\right| + \left|\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}(0,0,C|y''|^2,y'')\right|\right)(r^2+s^2)^{1/2} + C|y''|^2,$$

dont le membre de droite est un trinôme du deuxième degré en $(r^2 + s^2)^{1/2}$ admettant pour discriminant

$$\Delta = \left(\left|\frac{\partial\tilde{t}}{\partial r}(0,0,C|y''|^2,y'')\right| + \left|\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}(0,0,C|y''|^2,y'')\right|\right)^2 - 2C\varepsilon|y''|^2$$
$$\leq (16\nu^2 - 2C\varepsilon)|y''|^2$$

par (3.11). Si donc nous choisissons $C > 8\nu^2/\varepsilon$, nous aurons $\Delta \leq 0$, d'où $t(x) \geq 0$ en tout point de $\varphi^{-1}(0) \cap \Omega$. Ceci termine la démonstration de (3.9) ainsi que celle du lemme 2.

Etude des différentes situations: **Sous l'hypothèse (H3a), et compte tenu des résultats du lemme 2, nous pouvons adapter la démonstration du théorème 2 d'Alinhac-Baouendi [3] pour obtenir la conclusion du théorème 1, comme nous l'annoncions au paragraphe II.5; à plus forte raison, lorsque les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées avec $\rho_1 \neq (0,t_x(0))$, le lemme 2 donne que les deux fonctions φ et ψ vérifient $(\varphi_x(0),\psi_x(0))$ linéairement indépendants, et on peut donc appliquer le théorème 8.9.4 d'Hörmander [7]. Il nous reste alors à montrer le théorème sous l'hypothèse (H3b). Pour cela, nous commençons par choisir des coordonnées locales (sous des hypothèses apparemment plus faibles qu'au théorème 1).**

Lemme 3. *Supposons que* $\rho_1 = (0,t_x(0)) \in \operatorname{Char} P$, *que* $\{\operatorname{Re} p,\operatorname{Im} p\}(\rho_1) = 0$ *et que la matrice*

$$K = \begin{pmatrix} H^2_{\operatorname{Re}p}t(\rho_1) & H_{\operatorname{Re}p}H_{\operatorname{Im}p}t(\rho_1) \\ H_{\operatorname{Re}p}H_{\operatorname{Im}p}t(\rho_1) & H^2_{\operatorname{Im}p}t(\rho_1) \end{pmatrix}$$

soit la matrice d'une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^2$. *Alors il existe près de* 0 *un système de coordonnées locales* (t,y) *d'origine* 0 *tel que*

$$p(t,y;\tau,\eta) = (y_1 + iy_2)\tau^m + q(t,y;\tau,\eta)$$

où le degré en τ *du polynôme* q *est inférieur à* $m-1$ *et*

$$\operatorname{Re} q_\eta(0,0;1,0) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} q_\eta(0,0;1,0) \qquad \textit{linéairement indépendantes.}$$

Démonstration du lemme 3. **Choisissons d'abord un système quelconque de coordonnées locales (t,z) et notons $y_1(t,z) + iy_2(t,z)$ le coefficient de τ^m dans p:**

$$p = (y_1 + iy_2)\tau^m + \sum_{j=1}^{n}[\alpha_j(t,z) + i\beta_j(t,z)]\zeta^j\tau^{m-1} + r(t,z;\tau,\zeta).$$

La condition $\rho_1 \in \operatorname{Char} P$ signifie alors $y_1(0,0) = y_2(0,0) = 0$. Notons ∇y_1 (resp. ∇y_2) le gradient en z au point $(0,0)$ de la fonction y_1 (resp. y_2) et α (resp. β) le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont les composantes sont $(\alpha_j(0,0))_{j=1,\ldots,n}$ (resp. $(\beta_j(0,0))_{j=1,\ldots,n}$). On calcule alors que

$$\begin{cases} \{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(\rho_1) = \alpha \cdot \nabla y_2 - \beta \cdot \nabla y_1 \\ H^2_{\operatorname{Re} p} t(\rho_1) = \alpha \cdot \nabla y_1 \\ H^2_{\operatorname{Im} p} t(\rho_1) = \beta \cdot \nabla y_2 \\ H_{\operatorname{Re} p} H_{\operatorname{Im} p} t(\rho_1) = m\beta \cdot \nabla y_1 - (m-1)\alpha \cdot \nabla y_2. \end{cases}$$

La condition $\{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\}(\rho_1) = 0$ entraîne que $\alpha \cdot \nabla y_2 = \beta \cdot \nabla y_1$, et on peut alors écrire

$$K = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \nabla y_1 & \beta \cdot \nabla y_1 \\ \alpha \cdot \nabla y_2 & \beta \cdot \nabla y_2 \end{pmatrix};$$

la condition de positivité de cette matrice entraîne que dét $K > 0$, ce qui a deux conséquences; d'une part, ∇y_1 et ∇y_2 sont linéairement indépendants et on peut donc compléter (t, y_1, y_2) en un système de coordonnées locales (t, y) dans lequel p s'écrit $(y_1 + iy_2)\tau^m + q$; d'autre part, α et β sont linéairement indépendants, ce qui entraîne la dernière affirmation du lemme 3.

Moyennant une adaptation de la démonstration de Saint-Raymond [15], il nous suffit pour terminer de démontrer le:

Lemme 4. *Sous l'hypothèse (H3b) du théorème 1, il existe dans un voisinage* Ω *de* 0 *une fonction* $C^\infty \varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ *telle que les propriétés (3.6) à (3.9) du lemme 2 soient vérifiées avec* $\psi = \varphi$.

Démonstration du lemme 4. Utilisant les coordonnées locales fournies par le lemme 3, nous avons les résultats du lemme 1 avec

$$\Sigma = \{x \in \Omega : y_1(x) = y_2(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \psi^0(t, y) = t;$$

grâce à la positivité de la matrice K, la fonction $\tilde{t}(r, s, t, y'')$ introduite dans la démonstration du lemme 2 est convexe sur $\mathbf{R}^2$ à (t, y'') fixés, et puisque

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial r}(0,0,t,y'') = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial s}(0,0,t,y'') = 0$$

pour toutes valeurs de (t, y'') (dans Ω), on a:

$$\forall (r,s,t,y'') \qquad \tilde{t}(r,s,t,y'') \geq \tilde{t}(0,0,t,y'') = t. \tag{3.12}$$

Nous construisons alors φ comme nous avions construit ψ au lemme 2, ce qui nous assure que $p(x, \varphi_x(x)) = 0$; (3.9) découle de (3.12), et tout le reste se vérifie immédiatement.

Démonstration du théorème 2. Les lemmes 3 et 4 ci-dessus montrent comment construire une phase φ vérifiant:

$$p(x,\varphi_x(x)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad 0 \in \{x \in \Omega : \varphi(x) \geq 0\} \subset \{x \in \Omega : t(x) \geq 0\}$$

sous les seules hypothèses du théorème 2; de plus, cette fonction φ est analytique dès que les coefficients de p le sont; enfin, la surface $\varphi^{-1}(0)$ est partout caractéristique, mais simplement caractéristique puisque $p_\xi(0,\varphi_x(0)) \neq 0$. Nous pouvons donc appliquer le corollaire 1.1 de Baouendi-Trèves-Zachmanoglou [5] qui nous donne la conclusion du théorème 2.

Bibliographie

1. S. Alinhac, *Non unicité du problème de Cauchy,* Ann. of Math. **117** (1983), 77–108.
2. S. Alinhac, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symbole principal réel,* (à paraître).
3. S. Alinhac & M. S. Baouendi, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal,* Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978–79, exposé no. XXII, Ecole Polytechnique, Paris.
4. H. Bahouri, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel,* Thèse de 3ème cycle, Orsay 1982, (à paraître).
5. M. S. Baouendi, F. Trèves & E. C. Zachmanoglou, *Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients,* Duke Math. J. **46** (1979), 409–440.
6. B. Dehman, *Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes,* Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1982, (à paraître).
7. L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators,* Springer-Verlag, Berlin, 1963.
8. L. Hörmander, *Propagation of singularities and semi-global theorems for (pseudo)-differential operators of principal type,* Ann. of Math. **108** (1978), 569–609.
9. N. Lerner, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques,* (à paraître).
10. N. Lerner, *Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux,* (à paraître).
11. L. Nirenberg, *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation,* (à paraître).
12. L. Nirenberg & F. Trèves, *On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary conditions; Part II: Sufficient conditions; Correction,* Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 1–38 et 459–509: **24** (1971), 279–288.
13. H. Ounaïes, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à caractéristiques non régulières,* Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1982.
14. L. Robbiano, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non-elliptiques à symboles complexes,* Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1983.
15. X. Saint Raymond *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques,* Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 559–579.
16. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales,* Astérisque **95** (1982).
17. M. Strauss & F. Trèves, *First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem,* J. Differential Equations **15** (1974), 195–209.
18. F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators,* Plenum Press, New York, 1980.
19. H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.
20. C. Zuily, *Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem,* Prog. Math. 33, Birkhäuser, Boston, 1983.

Université de Paris-Sud—91405 Orsay Cédex, France

Received May 31, 1983

AUTOUR DU THEOREME DE HOLMGREN

SUR L'UNICITE DE CAUCHY

par

Xavier Saint Raymond

Journal
Of Differential
Geometry

20, 121-135 (1984)

(Résumé dans Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84, exposé n° XVII)

2

J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
20 (1984) 121–135

AUTOUR DU THÉORÈME DE HOLMGREN SUR L'UNICITÉ DE CAUCHY

XAVIER SAINT RAYMOND

Dans le présent travail, nous nous proposons d'améliorer certains résultats sur l'unicité de Cauchy pour des problèmes analytiques ainsi que pour quelques problèmes analogues. Les principaux travaux établissant des théorèmes d'unicité se succèdent historiquement de la façon suivante: Cauchy [7], Kowalevsky [14], Holmgren [10], John [13], Hörmander [11, Theorems 5.3.1 and 5.3.2], Bony [6], et enfin Sjöstrand [17, Théorème 8.9] dont le théorème contient tous les précédents. Pour les réciproques, la littérature est moins riche; à part le cas des coefficients constants (Hörmander [11, Theorem 5.2.2]) et celui des équations du premier ordre (Zachmanoglou [20]), nous ne connaissons, aux variantes près, qu'un seul théorème de non-unicité dont les premières versions semblent remonter à Goursat [9], et qu'on peut trouver dans Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4, Corollary 1.1]; c'est ce théorème qui est utilisé dans Zachmanoglou [19] pour obtenir des conditions nécessaires à l'unicité dans le cas d'un symbole réel.

Le premier résultat que nous présentons ici, le Corollaire 2.2, est un résultat d'unicité qui prolonge celui de Bony [6]. Ne sachant pas s'il est contenu dans les théorèmes de Sjöstrand, nous l'avons mis ici surtout à cause de l'originalité de la démonstration qui repose sur le calcul de la dimension de Hausdorff du fibré des normales à un fermé (Théorème 2.1).

Puis nous donnons avec le Théorème 2.4 l'équivalent pour un symbole principal complexe du théorème de non-unicité de Zachmanoglou [19]. Ce résultat, ainsi que les Théorèmes 2.9 et 2.10 qui lui sont parallèles, apparaît comme une réciproque aux théorèmes d'unicité précédents; toutefois, dans le cas analytique, il nous a fallu ajouter des hypothèses en vue d'obtenir une solution dont le support soit un demi-espace: c'est le sens des Théorèmes 2.5 et 2.6.

Received November 5, 1983.

1. Notations. Théorie de Bony-Sjöstrand

Nous nous donnons, au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, une fonction $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $\xi_0 = d\varphi(x_0) \neq 0$. La question de l'unicité de Cauchy peut être posée dans les termes suivants: existe-t-il au voisinage de x_0 une distribution $u \in \mathscr{H}$ telle que:

$$(1.1) \qquad \begin{array}{l} Pu = 0 \quad \text{et} \\ x_0 \in \operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}? \end{array}$$

Si la réponse est négative, on dira qu'il y a unicité de Cauchy.

Nous envisagerons les trois situations suivantes:

Cas n°1. P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques au voisinage de x_0 et $\mathscr{H} = \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Cas n°2. P est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients (complexes) C^∞ et vérifiant la condition de résolubilité locale (P) (cf. Strauss et Trèves [18]) dans un voisinage de x_0; $\mathscr{H} = H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. (Pour les cas où la condition (P) n'est pas vérifiée, on pourra consulter Alinhac [1, Théorème 1] et Robbiano [15].)

Cas n°3. $P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + c$, où $X_1, \ldots, X_r$ sont des champs réels C^∞ linéairement indépendants en x_0 et vérifiant la condition de Frobenius au voisinage de x_0, X_0 et c sont des termes d'ordres inférieurs complexes et C^∞, et X_0 est combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_r$; $\mathscr{H} = H^{(n-r+4)/2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. (Pour les cas où la condition de Frobenius n'est pas vérifiée, on pourra consulter Bahouri [3].)

Dans ces trois situations, nous disposons d'un "théorème de Holmgren" qui s'énonce: si $p(x_0, \xi_0) \neq 0$, le problème (1.1) n'admet pas de solution (ici, p désigne le symbole principal de l'opérateur P); dans le Cas 1, c'est le théorème de Holmgren classique, dans le Cas 2, c'est le Théorème 1 de Strauss et Trèves [18], et dans le Cas 3, on le démontre facilement à partir du théorème de Aronszajn et Cordes, cf. Aronszajn [2]. Nous pouvons donc leur appliquer la théorie de Bony et Sjöstrand que nous rappelons brièvement ici pour fixer les notations. Pour les démonstrations, nous renvoyons le lecteur à Sjöstrand [17, Chapitre 8] ou Hörmander [12, Chapters 8.5 and 8.6].

Définition 1.1. *Soit F une partie fermée d'une variété C^2 notée X; le fibré des normales à F, N^*F, est l'ensemble des $(x, \xi) \in T^*X$ tels qu'il existe $f \in C^2(X)$ avec:*

(i) $x \in F$;

(ii) $\xi = \pm df(x) \neq 0$;

(iii) $y \in F \Rightarrow f(y) \leqslant f(x)$.

Théorème 1.2 (*d'après Sjöstrand*). *Soient F un fermé de $\mathbf{R}^n$, Ω un voisinage conique d'un point $(x_0, \xi_0) \in N^*F$ et Σ une variéte contenant $N^*F \cap \Omega$. Alors il existe une variété $\Sigma^* \subset N^*F$ passant par (x_0, ξ_0) et telle qu'en tout point $\sigma \in \Sigma^*$, $T_\sigma\Sigma^* = (T_\sigma\Sigma)^\perp$.*

Corollaire 1.3. *Si F est un fermé de $\mathbf{R}^n$ et Ω un ouvert conique de $T^*\mathbf{R}^n$, $\mathcal{N}_F(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega)/f_{|N^*F\cap\Omega} = 0\}$ est un idéal de $C^\infty(\Omega)$ (fonctions à valeurs* ***réelles****) stable par crochets de Poisson.*

Ce Corollaire 1.3 peut être combiné avec le "théorème de Holmgren" pour obtenir le Théorème 1.5 ci-dessous; pour l'énoncer, nous aurons besoin des:

Définitions 1.4. *Soit Ω un ouvert conique de $T^*\mathbf{R}^n$; si I est un idéal de $C^\infty(\Omega)$, nous noterons $V_\Omega(I)$ la plus grande partie conique de Ω sur laquelle tous les éléments de I s'annulent; puis nous noterons $I(p, \Omega)$ le plus petit idéal I de $C^\infty(\Omega)$ contenant $\mathcal{R}e\, p_{|\Omega}$ et $\mathcal{I}m\, p_{|\Omega}$ et tel que:*

(i) $f_{|V_\Omega(I)} = 0 \Rightarrow f \in I$,

(ii) $f \in I$ *et* $g \in I \Rightarrow \{f, g\} \in I$;

enfin nous poserons $\Sigma(p, \Omega) = V_\Omega[I(p, \Omega)]$.(1)

Remarque. $\Sigma(p, \Omega)$ est une partie fermée conique contenue dans $p^{-1}(0)$; si c'est une variété, elle est involutive à cause de (i) et (ii).

Théorème 1.5. *Pour tout ouvert conique Ω de $T^*\mathbf{R}^n$ et toute distribution $u \in \mathcal{H}$ telle que $Pu = 0$, $N^* \operatorname{supp} u \cap \Omega \subset \Sigma(p, \Omega)$.*

Corollaire 1.6 (*d'après Bony*). *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que $(x_0, \xi_0) \notin \Sigma(p, \Omega)$, alors le problème (1.1) n'admet pas de solution.*

Corollaire 1.7 (*d'après Sjöstrand*). *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) et une variété involutive $\Sigma \supset \Sigma(p, \Omega)$ telle que tout voisinage de (x_0, ξ_0) sur la feuille bicaractéristique $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ passant par (x_0, ξ_0) rencontre le demi-espace d'équation $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, alors le problème (1.1) n'admet pas de solution.*(2)

Exemple 1.8. Notons (t, x_1, x_2) les points de $\mathbf{R}^3$, et considérons au voisinage de l'origine le symbole $p = \tau\xi_1 + x_2^2\tau^2 + \xi_2^2 + it\tau^2$ et la fonction $\varphi = t$ (exemple relevant du Cas $n^\circ 1$); ξ_0 sera donc défini par $\tau = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, et nous pourrons prendre $\Omega = \{\tau > 0\}$; $\mathcal{R}e\, p_{|\Omega}$ et $\mathcal{I}m\, p_{|\Omega} \in I(p, \Omega)$, puis (i) $\Rightarrow t \in I(p, \Omega)$; (ii) $\Rightarrow \xi_1$, x_2^2, $x_2\xi_2$ et $\xi_2^2 \in I(p, \Omega)$; (i) $\Rightarrow x_2$ et $\xi_2 \in I(p, \Omega)$; enfin, (ii) $\Rightarrow 1 \in I(p, \Omega)$ d'où $I(p, \Omega) = C^\infty(\Omega)$ et $\Sigma(p, \Omega) = \varnothing$. Il y a donc unicité de Cauchy par application du Corollaire 1.6.

2. Enoncés des résultats et commentaires

Le Théorème 1.2 a pour conséquence que si N^*F est contenu dans une sous-variété de dimension k, alors il contient une sous-variété de dimension $2n - k$ (et donc $k \geqslant n$); on peut préciser ces questions de dimension en

---

(1) Pour une définition plus simple de $\Sigma(p,\Omega)$, se reporter à notre exposé (n° XVII) au Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84.

(2) Comme dans l'exposé cité en (1), détaillons ces résultats dans le cas où l'opérateur s'écrit $X + iY + c$ où X et Y sont deux champs réels C^∞ linéairement indépendants en x_o et qui commutent au voisinage (cas particulier du cas n° 2) : le corollaire 1.6 dit qu'il y a unicité si $\{p,\varphi\}(x_o) \neq 0$, et le corollaire 1.7 permet de conclure dans le cas $\{p,\varphi\}(x_o) = 0$ dès que, par exemple, il existe deux réels a et b et un entier k tels que

$$(aX + bY)^j\varphi(x_o) = 0 \text{ pour } j < k, \quad \text{et} \quad (aX + bY)^k\varphi(x_o) < 0.$$

Pour relier cela aux résultats cités dans la présentation générale de cette thèse, ajoutons que

$$\mathcal{F}_\varphi = -X^2\varphi - Y^2\varphi \quad \text{et que} \quad \{p,\{p,\varphi\}\} = X^2\varphi - Y^2\varphi + 2iXY\varphi ;$$

la condition précédente est donc réalisée avec k = 2 si et seulement si $\mathcal{F}_\varphi(x_o) > -|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_o)|$ (cf. condition (6) de la présentation générale de cette thèse).

utilisant le concept de dimension de Hausdorff en un point q(ce que nous noterons $\dim_q$, cf. §3); nous obtenons:

Théorème 2.1. *Soient F un fermé de $\mathbf{R}^n$ et $(x_0, \xi_0) \in N^*F$. Alors $\dim_{(x_0,\xi_0)} N^*F = n$.*

Commentaire. Avec le Théorème 1.2, cette propriété permet de considérer N^*F un peu comme une lagrangienne.

Corollaire 2.2. *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p,\Omega) < n$, le problème* (1.1) *n'admet pas de solution.*

Commentaire. Si $\Sigma(p, \Omega)$ était une variété, elle serait involutive (cf. la remarque suivant les Définitions 1.4); deux cas pourraient alors se produire: soit $(x_0, \xi_0) \notin \Sigma(p, \Omega)$ et le Corollaire 1.6 suffisait pour conclure, soit $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p, \Omega) \geqslant n$ et on ne peut pas appliquer ce Corollaire 2.2. Ce dernier ne peut donc apporter quelque chose de nouveau que lorsque $\Sigma(p, \Omega)$ n'est pas une variété.

Exemple 2.3. On peut facilement construire une fonction $f(x)$ positive C^∞ paire et telle que $f_{|\mathbf{R}_+}$ s'annule exactement sur l'ensemble "de Cantor" (i.e., l'ensemble de tous les réels de $[0, 1]$ admettant au moins une écriture en base 3 n'utilisant pas le chiffre 1). Avec cette fonction f, nous considérons près de l'origine de $\mathbf{R}^2$, dont les points seront notés (t, x), la fonction $\varphi = t + x^2$ et le symbole $p = \xi + i(t^2 + f(x))\tau$ (exemple relevant du cas $n°2$); si $\Omega \subset \{\tau > 0\}$, $I(p, \Omega)$ est l'idéal engendré par ξ, $g(x)$ et t où g décrit l'ensemble des fonctions plates sur l'ensemble de Cantor: on ne peut donc pas appliquer les corollaires 1.6 et 1.7; enfin, $\Sigma(p, \Omega) = \{\xi = t = f(x) = 0\}$, d'où $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p, \Omega) = 1 + \dfrac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 3} < 2$: on obtient l'unicité par le corollaire 2.2.

Pour les réciproques, nous distinguerons les cas.

Théorème 2.4. *Supposons que nous sommes dans le Cas $n°1$, que $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ et qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que*:

(Rg) $\Sigma(p, \Omega)$ *est une variété* (*involutive*) *analytique passant par* (x_0, ξ_0);

(Tr) *la feuille bicaractéristique passant par* (x_0, ξ_0), $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$, *est transverse aux fibres* (*i.e.*, $\dim T_{(x_0,\xi_0)}\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \dim \pi_{T_{x_0}\mathbf{R}^n} T_{(x_0,\xi_0)}\Sigma^*(x_0, \xi_0)$);

(Sj) $\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega/\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$;

(Za) *il existe $C > 0$ telle que $|d\varphi \wedge \xi \cdot dx| \leqslant C|\varphi - \varphi(x_0)|^{1/2}$ sur $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$.*

Sous les hypothèses précédentes, il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ solution du problème (1.1). *De plus, u est analytique à l'intérieur de* $\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n/\psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$ *avec ψ analytique et $d\psi(x_0) \neq 0$.*

Commentaire. Les hypothèses sont géométriques et indépendantes de l'équation φ choisie pour le demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$. L'hypothèse $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ remplit la fonction technique de nous ramener à la construction du Corollaire 1.1 de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4]; elle n'est pas nécessaire (cf. Hörmander [11, Theorem 5.2.2]). L'hypothèse (Rg) empêche l'application des Corollaires 1.6 et 2.2; l'hypothèse (Sj) est nécessaire à cause du Corollaire 1.7; les hypothèses (Tr) (qui s'énonce encore: $\forall f \in I(p, \Omega)$, $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow df(x_0, \xi_0) = 0$) et (Za) ont été ajoutées afin que le support de la solution soit un demi-espace (notre technique ne nous permet d'obtenir que de telles solutions !); en effet on peut démontrer les deux résultats suivants:

Théorème 2.5. *Supposons qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) et $f \in I(p, \Omega)$ telle que $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0$ mais $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, \xi_0) \neq 0$. Alors le problème* (1.1) *n'admet aucune solution dont le support soit $\{x \in \mathbf{R}^n | \psi(x) \geq \psi(x_0)\}$ avec $\psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ et $d\psi(x_0) \neq 0$.*

Théorème 2.6. *Supposons qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que* (Rg), (Tr) *et* (Sj) *soient vérifiées, mais* (Za) *n'est vérifiée dans aucun voisinage de (x_0, ξ_0) sur $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$. Alors, même conclusion qu'au théorème* 2.5.

Exemple 2.7. Lorsque $d_\xi(\mathcal{R}e\, p)$ et $d_\xi(\mathcal{I}m\, p)$ sont linéairement indépendants et que $\{\mathcal{R}e\, p, \mathcal{I}m\, p\} = 0$ sur $p^{-1}(0)$, l'idéal $I(p, \Omega)$ est l'idéal engendré par $\mathcal{R}e\, p$ et $\mathcal{I}m\, p$, et les propriétés (Rg) et (Tr) sont vérifiées; si l'on ajoute que la matrice

$$\begin{pmatrix} H^2_{\mathcal{R}e\, p}\varphi & H_{\mathcal{I}m\, p}H_{\mathcal{R}e\, p}\varphi \\ H_{\mathcal{R}e\, p}H_{\mathcal{I}m\, p}\varphi & H^2_{\mathcal{I}m\, p}\varphi \end{pmatrix}(x_0, \xi_0)$$

est définie positive, la propriété (Sj) est vérifiée pourvu que Ω soit suffisamment petit, et la propriété (Za) aussi; c'était le cas étudié dans Saint Raymond [16, Théorème 2].

Les théorèmes de Zachmanoglou [19] sont également contenus dans celui-ci: en effet, si p est réel et $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$, alors (Rg) et (Tr) sont vérifiées; puis on peut montrer facilement que les hypothèses sur la bicaractéristique de p entraînent (Sj) et (Za).

Exemple 2.8. Qui ne rentre dans aucun des deux cadres ci-dessus. Notons (t, x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbf{R}^4$, et considérons au voisinage de l'origine le symbole $p = \tau\xi_1 + i\xi_2^2$; si $\Omega \subset \{\tau > 0\}$, $d_\xi p \neq 0$, et (Rg) et (Tr) sont vérifiées; si $\varphi = t + x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2x_3$, toutes les hypothèses du Théorème 2.4 sont vérifiées, mais si $\varphi = t + x_1^4 + x_1x_2x_3$ le Théorème 2.6 est applicable.

Théorème 2.9. *Supposons que nous sommes dans le Cas n°2, que $d_\xi p(x_0) \neq 0$, et qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que*:

(Rg) *$\Sigma(p, \Omega)$ est une variété (involutive) C^∞ passant par (x_0, ξ_0)*;

(Tr) *$\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ est transverse aux fibres*;

(Sj) *$\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.*

Sous les hypothèses précédentes, et pour tout $s \geq 1$, il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ solution du problème (1.1).[3]

(3) Notons que dans le cas détaillé dans la note (2) de la page ②-3- et sous l'hypothèse $\{p,\varphi\}(x_0) = 0$, les conditions (Rg) et (Tr) sont naturellement vérifiées, et la condition (Sj) l'est notamment lorsque $\mathcal{F}_\varphi(x_0) < -|\{p,\{p,\varphi\}\}(x_0)|$ (cf. condition (5) de la présentation générale de cette thèse).

Commentaire. Signalons que, bien que le problème soit C^∞, nous traitons l'opérateur P lui-même sans le perturber. Pour les hypothèses (Rg) et (Sj), nous renvoyons au commentaire suivant le Théorème 2.4; l'exemple $p = \xi_1 + ix_2\tau$, $\varphi = t$ montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse (Tr): en effet, on peut prouver à l'aide du Théorème 1.5 que $\operatorname{supp} u \subset \{x_2 = 0\}$, et 0 est la seule fonction H^1_{loc} possédant un tel support ! C'est parce que l'opérateur P est du premier ordre que nous avons pu supprimer l'hypothèse (Za): dans le Cas $n^\circ 1$, si P est du premier ordre, on pourrait aussi se passer de cette hypothèse (Za) (on perdrait seulement $d\psi(x_0) \neq 0$ dans la conclusion).

Théorème 2.10. *Supposons que nous sommes dans le Cas $n^\circ 3$ et qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que:*

(Rg) $(x_0, \xi_0) \in \Sigma(p, \Omega)$ *(qui est alors une variété involutive C^∞ pourvu que Ω soit suffisamment petit)*;

(Sj) $\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega/\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$. *Alors il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ solution du problème* (1.1).

Commentaire. Par les hypothèses du Cas $n^\circ 3$, (Rg) et (Tr) sont vérifiées et donc il s'agit essentiellement du même théorème que le Théorème 2.9.

3. Calcul de la dimension de Hausdorff de N^*F

Avant d'entreprendre la démonstration du Théorème 2.1, rappelons quelques propriétés élémentaires de la dimension de Hausdorff; pour plus de détails, consulter Federer [8, pp. 169 & seq.].

Pour toute partie A de $\mathbf{R}^k$, la limite suivante est bien définie

$$v_d(A) = \lim_{\rho \to 0^+} \inf_{\substack{\text{rec. de } A \text{ tq} \\ r_i \leqslant \rho}} \Big(\sum_i r_i^d\Big),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des recouvrements de A par des boules de rayons $r_i \leqslant \rho$; on peut facilement montrer qu'il existe alors un unique réel $d_0 \in [0, k]$ tel que

$$d > d_0 \Rightarrow v_d(A) = 0 \quad \text{et} \quad d < d_0 \Rightarrow v_d(A) = \infty$$

appelé dimension de Hausdorff de A, et que nous noterons $\dim_H A$. On peut vérifier que la dimension de Hausdorff d'une sous-variété de $\mathbf{R}^k$ n'est autre que sa dimension ordinaire. Comme $A \subset B$ entraîne $\dim_H A \leqslant \dim_H B$, on peut définir pour un point $q \in A$ le nombre suivant

$$\dim_q A = \lim_{r \to 0^+} \dim_H [A \cap B(q; r)]$$

qui est appelé dimension de Hausdorff de A au point q. C'est le concept qui intervient dans notre Théorème 2.1.

Démonstration de $\dim_{(x_0,\xi_0)} N^*F \geqslant n$. Soit f telle que l'on ait les trois propriétés de la Définition 1.1 avec $df(x_0) = \xi_0$. Prenons $x_n = \frac{2}{3}[f(x) - f(x_0)]$ et $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ pour compléter le système de coordonnées.

Pour $|x'| \leqslant \frac{1}{2}$, on pose $\delta(x') = \inf\{\delta \in \mathbf{R}/F \cap B((x', \delta); 1) = \varnothing\}$; on a $0 < \delta(x') \leqslant 1$. On note alors $y(x')$ l'un des points $y \in F \cap \partial B((x', \delta(x')); 1)$ et $\eta(x') = (x', \delta(x')) - y(x')$; enfin, on définit une application ψ: $B(x_0; \frac{1}{2}) \subset \mathbf{R}^n \to N^*F$ par

$$\psi: (x', x_n) \mapsto \big(y(x'), (\tfrac{3}{2} + x_n)\eta(x')\big).$$

Cette application est continue en x_0 car $\psi(x_0) = (x_0, \xi_0)$ et

$$|x'| < \varepsilon \Rightarrow |y(x')| < 2\varepsilon \quad \text{et} \quad |\delta(x') - 1| < \varepsilon^2.$$

Si donc Ω est un voisinage de (x_0, ξ_0) dans N^*F, il existe un voisinage ω de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\psi(\omega) \subset \Omega$.

Nous montrerons plus loin que ψ vérifie en outre

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} |x_1 - x_2|, \tag{3.1}$$

où les valeurs absolues désignent la norme euclidienne dans les coordonnées locales choisies. Pour deux points $\psi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ situés dans une même boule B_i de rayon r_i, on a donc $|x_1 - x_2| \leqslant 2\sqrt{2}\, r_i$, et on peut écrire

$$\{x \in \mathbf{R}^n/\psi(x) \in B_i\} \subset \tilde{B}_i = B\big(*\,; 2\sqrt{2}\, r_i\big) \subset \mathbf{R}^n.$$

Pour tout recouvrement de Ω par des boules B_i de rayons $r_i \leqslant \rho$, les $\tilde{B}_i$ recouvrent ω, et on a pour tout $d \in [0, 2n]$

$$\sum_i (2\sqrt{2}\, r_i)^d \geqslant \inf_{\substack{\text{rec. de } \omega \ tq \\ \tilde{r}_i \leqslant 2\sqrt{2}\rho}} \Big(\sum_i \tilde{r}_i^{\,d}\Big),$$

d'où

$$\inf_{\substack{\text{rec. de } \Omega \ tq \\ r_i \leqslant \rho}} \Big(\sum_i r_i^d\Big) \geqslant (2\sqrt{2})^{-d} \inf_{\substack{\text{rec. de } \omega \ tq \\ \tilde{r}_i \leqslant 2\sqrt{2}\rho}} \Big(\sum_i \tilde{r}_i^{\,d}\Big).$$

Lorsque $d < n$ et ρ tend vers 0, le membre de droite tend vers ∞, donc le membre de gauche aussi, d'où $\dim_H \Omega \geqslant n$. Si donc $\Omega = N^*F \cap B((x_0, \xi_0); r)$, on obtient le résultat en passant à la limite lorsque r tend vers 0.

Démonstration de l'inégalité (3.1). Si les coordonnées de $y(x')$ sont $(y'(x'), y_n(x'))$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &|\psi(x_1) - \psi(x_2)|^2 \\ &\qquad \geqslant |y'(x_1') - y'(x_2')|^2 + |(\tfrac{3}{2} + x_{n,1})\eta(x_1') - (\tfrac{3}{2} + x_{n,2})\eta(x_2')|^2. \end{aligned}$$

Or $|\eta(x_1')|^2 = |\eta(x_2')|^2 = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\tfrac{3}{2} + x_{n,1}\right)\eta(x_1') - \left(\tfrac{3}{2} + x_{n,2}\right)\eta(x_2')\right|^2 \\
&\qquad = (x_{n,1} - x_{n,2})^2 + |\eta(x_1') - \eta(x_2')|^2 \\
&\qquad\quad + \left[\left(\tfrac{1}{2} + x_{n,1}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + x_{n,2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + x_{n,1}\right)\left(\tfrac{1}{2} + x_{n,2}\right)\right]|\eta(x_1') - \eta(x_2')|^2 \\
&\qquad \geqslant (x_{n,1} - x_{n,2})^2 + |\eta(x_1') - \eta(x_2')|^2.
\end{aligned}$$

Comme $\eta(x') = (x' - y'(x'), \eta_n(x'))$,

$$|\eta(x_1') - \eta(x_2')|^2 \geqslant |x_1' - y'(x_1') - x_2' + y'(x_2')|^2$$

et

$$\begin{aligned}
&|\psi(x_1) - \psi(x_2)|^2 \\
&\quad \geqslant |y'(x_1') - y'(x_2')|^2 + |x_1' - y'(x_1') - x_2' + y'(x_2')|^2 + (x_{n,1} - x_{n,2})^2 \\
&\quad = \left|\sqrt{2}\,(y'(x_1') - y'(x_2')) - (x_1' - x_2')/\sqrt{2}\,\right|^2 + \tfrac{1}{2}|x_1' - x_2'|^2 + (x_{n,1} - x_{n,2})^2 \\
&\quad \geqslant \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|^2,
\end{aligned}$$

d'où (3.1).

Démonstration de $\dim_H N^*F \leqslant n$. Le lecteur uniquement intéressé par les applications au problème de Cauchy pourra se passer de cette partie de la démonstration puisque le Corollaire 2.2 ne découle que de l'inégalité déjà prouvée.

Choisissons des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ et notons avec des valeurs absolues les normes euclidiennes dans ce système de coordonnées. $B(\omega;\, \rho)$ désignant la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre ω et de rayon ρ, nous posons pour $\varepsilon \neq 0$

$$N_\varepsilon = \{(x, \xi) \in N^*F / B(x + 3\varepsilon\xi;\, 3|\varepsilon\xi|) \cap F = \varnothing\}.$$

Par définition de N^*F, on a $N^*F = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^*} N_{1/k}$. Admettons provisoirement (cf. plus loin) que pour tout $\varepsilon \neq 0$, $\dim_H N_\varepsilon \leqslant n$; soient $d > n$ et $\alpha > 0$; pour tout k, $v_d(N_{1/k}) = 0$ et on peut donc trouver un recouvrement de $N_{1/k}$ par des boules de rayons $r_{i,k}$ tel que $\sum_i r_{i,k}^d < \alpha 2^{-|k|-1}$; si nous réunissons tous ces recouvrements, nous obtenons un recouvrement de N^*F tel que $\sum_{i,k} r_{i,k}^d < \alpha$, donc $v_d(N^*F) = 0$, d'où finalement

$$\dim_H N^*F \leqslant n.$$

Démonstration de $\dim_H N_\varepsilon \leqslant n$. Comme dans la démonstration de $\dim_{(x_0,\xi_0)} N^*F \geqslant n$, nous obtenons cette propriété en construisant une application qui ne rapproche pas trop les points: nous posons

$$\psi : \begin{array}{l} N_\varepsilon \to \mathbf{R}^n \\ (x, \xi) \mapsto x + \varepsilon\xi; \end{array}$$

nous allons montrer que

$$|\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)| \geqslant |\varepsilon|\,|(x_1, \xi_1) - (x_2, \xi_2)|.$$

En effet,

$$|\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + \varepsilon^2|\xi_1 - \xi_2|^2 + 2\varepsilon(x_1 - x_2)\cdot(\xi_1 - \xi_2).$$

Mais $(x_1, \xi_1) \in N_\varepsilon$ et $x_2 \in F$ entraîne que

$$\begin{aligned} &|x_2 - (x_1 + 3\varepsilon\xi_1)| \geqslant 3|\varepsilon\xi_1| \\ &\qquad \Rightarrow |x_2 - x_1|^2 - 6\varepsilon(x_2 - x_1)\cdot\xi_1 + 9\varepsilon^2|\xi_1|^2 \geqslant 9\varepsilon^2|\xi_1|^2 \\ &\qquad \Rightarrow 2\varepsilon(x_1 - x_2)\cdot\xi_1 \geqslant -\tfrac{1}{3}|x_1 - x_2|^2. \end{aligned}$$

De même $(x_2, \xi_2) \in N_\varepsilon$ et $x_1 \in F$ entraîne que $-2\varepsilon(x_1 - x_2).\ \xi_2 \geqslant -\frac{1}{3}|x_1 - x_2|^2$, d'où finalement, si $\varepsilon^2 \leqslant \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} |\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)|^2 &\geqslant \tfrac{1}{3}|x_1 - x_2|^2 + \varepsilon^2|\xi_1 - \xi_2|^2 \\ &\geqslant \varepsilon^2|(x_1, \xi_1) - (x_2, \xi_2)|^2. \end{aligned}$$

4. Non-unicité dans le cas analytique

Comme nous allons utiliser, au cours de la démonstration du Théorème 2.4, l'invariance de ses hypothèses par changement de fonction φ, il convient de la vérifier dès maintenant.

Soient donc φ et ψ deux fonctions C^2 définissant le même demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\} = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$, et telles que $\xi_0 = d\varphi(x_0) \neq 0 \neq d\psi(x_0) = \eta_0$. Il existe alors une fonction $\lambda \in C^1(\mathbf{R}^n)$ telle que $\psi(x) = \psi(x_0) + \lambda(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$ avec $\lambda(x_0) > 0$. Remarquons déjà que $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ dépend de φ par l'intermédiaire de ξ_0; mais comme $\Sigma(p, \Omega)$ est conique, $\Sigma^*(x_0, \eta_0) = \{(x, \lambda(x_0)\xi) \in T^*\mathbf{R}^n / (x, \xi) \in \Sigma^*(x_0, \xi_0)\}$, et donc les conditions (Tr) et (Sj) sont invariantes par changement de fonction φ (pour (Rg), c'était évident).

Enfin, pour constater que (Za) est, elle aussi, invariante par changement de fonction φ, il suffit d'écrire

$$d\psi \wedge \xi \cdot dx = \lambda\, d\varphi \wedge \xi \cdot dx + (\varphi - \varphi(x_0))\, d\lambda \wedge \xi \cdot dx$$

et de remarquer que

$$(d\varphi \wedge \xi \cdot dx)(x, \lambda(x_0)\xi) = \lambda(x_0)(d\varphi \wedge \xi \cdot dx)(x, \xi).$$

Démonstration du Théorème 2.4. En utilisant les hypothèses (Rg) et (Tr), on peut trouver des coordonnées locales analytiques $x' = (x_1, \ldots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_{n-1})$ et x_n telles que $(x_0, \xi_0) = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$ et

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{x'' = x_n = \xi' = \xi'' = 0; \xi_n = 1\}$$

($r = \dim \Sigma^*(x_0, \xi_0)$; (Tr) $\Rightarrow r < n$ et donc la seule dégénérescence possible est l'absence de variables x''; le lecteur vérifiera facilement que tout ce qui suit reste correct sans variables x'').

Avec ces coordonnées, nous posons

$$\psi(0, x'', x_n) = x_n - 2C\left(|x''|^2 + x_n^2\right), \qquad C > 0 \text{ à fixer,} \tag{4.1}$$

puis nous prolongeons ψ analytiquement à un voisinage de l'origine en requérant que $(x, d\psi(x)) \in \Sigma(p, \Omega)$, ce qui est classiquement possible sous l'hypothèse (Tr) (cf. par exemple Hörmander [11, p. 32] ou [12, p. 156]); comme $\Sigma(p, \Omega)$ est conique, on obtient par la formule d'Euler

$$\psi(x', 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad d\psi(x', 0, 0) = (0, 0, 1). \tag{4.2}$$

Comme $\Sigma(p, \Omega)$ est contenu dans $p^{-1}(0)$, $p(x, d\psi(x)) = 0$; grâce à l'hypothèse $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$, on peut utiliser la construction du Corollaire 1.1 de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4] pour obtenir une solution de $Pu = 0$ dont le support soit localement supp $u = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant 0\}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ce support est contenu dans $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$.

Par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que $\varphi_0(0, 0) = 0$; la condition sur le support de u sera vérifiée si nous montrons l'inégalité

$$\psi(x) \leqslant x_n + \varphi_0(x', x'') \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0. \tag{4.3}$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi_0(x', x'') = \varphi_0(x', 0) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x''}(x', 0) \cdot x'' + O\left(|x''|^2\right).$$

L'hypothèse (Sj) nous dit que $\varphi_0(x', 0) \geqslant 0$, et l'hypothèse (Za) que $|d\varphi_0(x', 0)| \leqslant C_0[\varphi_0(x', 0)]^{1/2}$, d'où

$$\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial x''}(x', 0) \cdot x''\right| \leqslant C_0[\varphi_0(x', 0)]^{1/2}|x''| \leqslant \varphi_0(x', 0) + C_1|x''|^2,$$

et donc

$$\varphi_0(x', x'') \geqslant -C|x''|^2$$

pour une constante $C > 0$ ne dépendant que de φ, de p et du choix des coordonnées (mais pas de ψ) et que nous reportons dans la formule (4.1) définissant ψ. Nous avons donc

$$x_n + \varphi_0(x', x'') - \psi(x) = \varphi_0(x', x'') + 2C\left(|x''|^2 + x_n^2\right) - \psi_0(x)$$

en posant $\psi_0(x) = \psi(x) + 2C(|x''|^2 + x_n^2) - x_n$, d'où

$$x_n + \varphi_0(x', x'') - \psi(x) \geqslant C\left(|x''|^2 + x_n^2\right) - |\psi_0(x)|. \tag{4.4}$$

Or, on peut écrire

$$\begin{cases} \psi_0(0, x'', x_n) = 0 & \text{à cause de (4.1), et} \\ \psi_0(x', 0, 0) = d\psi_0(x', 0, 0) = 0 & \text{à cause de (4.2).} \end{cases}$$

Il en résulte que suffisamment de dérivées de ψ_0 sont nulles à l'origine pour que

$$|\psi_0(x)| \leqslant K|x'|\left(|x''|^2 + x_n^2\right)$$

pour une constante $K > 0$. Si donc nous restreignons le voisinage de telle sorte que $|x'| < C/K$, nous obtenons (4.3) à partir de (4.4) ce qui termine notre démonstration.

5. Réciproques 2.5 et 2.6

Nous démontrerons ces résultats par l'absurde en supposant que le problème (1.1) admet une solution u dont le support soit $\{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$ avec $\psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ et $d\psi(x_0) \neq 0$. Nous établirons qu'alors l'hypersurface d'équation $\psi(x) = \psi(x_0)$ possède des points arbitrairement proches de x_0 et tels que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, ce qui constituera la contradiction.

Avant de distinguer les cas, nous pouvons déjà remarquer que par le Théorème 1.5 nous savons que N^* supp $u \cap \Omega \subset \Sigma(p, \Omega)$, soit

$$\{(x, \lambda\, d\psi(x)) \in \Omega / \psi(x) = \psi(x_0) \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}^*\} \subset \Sigma(p, \Omega). \tag{5.1}$$

Démonstration du Théorème 2.5. Puisque $f \in I(p, \Omega)$, f s'annule sur $\Sigma(p, \Omega)$, et par (5.1)

$$\psi(x) = \psi(x_0) \Rightarrow f(x, d\psi(x)) = f(x_0, d\psi(x_0)) = 0,$$

et donc, par développement de Taylor

$$d_x f(x_0, \xi_0) \cdot (x - x_0) + d_\xi f(x_0, \xi_0) \cdot (d\psi(x) - d\psi(x_0)) \\ + O\left(|x - x_0|^2 + |d\psi(x) - d\psi(x_0)|^2\right) = 0$$

et, puisque $d\psi \in C^1$ et que $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0$,

$$\psi(x) = \psi(x_0) \Rightarrow d_x f(x_0, \xi_0) \cdot (x - x_0) = O\left(|x - x_0|^2\right)$$

ce qui prouve que $d_x f(x_0, \xi_0)$ est normal à l'hypersurface d'équation $\psi(x) = \psi(x_0)$. Nous tirons alors notre contradiction de l'hypothèse $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, \xi_0) \neq 0$.

Démonstration du Théorème 2.6. Comme dans la démonstration du Théorème 2.4, nous utilisons les hypothèses (Rg) et (Tr) pour trouver des coordonnées locales y', y'', y_n telles que $(x_0, \xi_0) = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$ et

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{ y'' = y_n = \eta' = \eta'' = 0; \eta_n = 1 \}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, $\psi(x) \geqslant \psi(x_0)$ équivaut à $y_n + \psi_0(y', y'') \geqslant 0$ pour une fonction $\psi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$. En appliquant le Théorème 1.2 à la situation décrite en (5.1), on voit que $\psi_0(y', 0) = 0$ et $d\psi_0(y', 0) = 0$; on peut donc changer de coordonnées C^2 en posant

$$x' = y', \qquad x'' = y'', \qquad x_n = y_n + \psi_0(y', y'')$$

sans changer l'équation de $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{ x'' = x_n = \xi' = \xi'' = 0; \xi_n = 1 \}.$$

De nouveau par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$; pour obtenir la contradiction cherchée, nous allons montrer

(5.2) Il existe des points $m = (x', x'')$ arbitrairement proches de l'origine tels que $\varphi_0(m) < 0$.

Supposons maintenant que (Za) n'est vérifiée dans aucun voisinage de (x_0, ξ_0) sur $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$; compte tenu des coordonnées locales utilisées cela signifie qu'il existe une suite de points $m_j \in \Sigma^*(x_0, \xi_0)$ tendant vers 0 et tels que $|d\varphi_0(m_j)| > j[\varphi_0(m_j)]^{1/2}$; en extrayant au besoin une sous-suite, on peut trouver une direction v tangente à $x_n = 0$ telle que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m_j) > j\left[\varphi_0(m_j)\right]^{1/2}. \tag{5.3}$$

Par la formule de Taylor, il existe alors une constante C telle que pour tous m et ε suffisamment petits

$$\left|\varphi_0(m - \varepsilon v) - \varphi_0(m) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m)\right| \leqslant C\varepsilon^2,$$

d'où nous tirons, si m_j et ε sont suffisamment petits

$$\varphi_0(m_j - \varepsilon v) \leqslant \varphi_0(m_j) - \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m_j) + C\varepsilon^2.$$

En extrayant au besoin une sous-suite, nous sommes alors dans l'un des deux cas suivants: soit $\varphi_0(m_j) > 0$ pour tout j (mais $\varphi_0(m_j)$ tend vers 0 car φ_0 est continue), soit $\varphi_0(m_j) = 0$ pour tout j. Dans le premier cas, grâce à (5.3), on tire de l'expression précédente que les points $m_j - (\varphi_0(m_j))^{1/2}v$ vérifient (5.2) pour j assez grand. Dans le deuxième cas, il suffit de choisir $\varepsilon_j \to 0$ tel que $0 < \varepsilon_j < C^{-1}\partial\varphi_0(m_j)/\partial v$, ce qui est possible d'après (5.3), pour obtenir des points $m_j - \varepsilon_j v$ vérifiant (5.2).

6. Non-unicité dans les cas C^∞

Démonstration du Théorème 2.9. De par sa définition, $\Sigma(p, \Omega)$ est involutive et donc feuilletée, et grâce à l'hypothèse (Tr) on peut en déduire un feuilletage de la base $\mathbf{R}^n$ par projection (plusieurs feuilletages sont en principe possibles); on tire de l'hypothèse (Sj) que la feuille passant par x_0 est tangente à l'hypersurface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et donc on peut trouver des coordonnées locales $C^\infty(x', x'', x_n)$ avec $(x_0, \xi_0) = (0,0,0; 0,0,1)$ et telles que les feuilles de la base aient pour équations: $x'' =$ constante et $x_n =$ constante.

Ecrivons maintenant $P = X + c$; X étant la projection sur $T\mathbf{R}^n$ de H_p, c'est un champ tangent aux feuilles, et $X\psi = 0$ si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Si nous prenons $v \in H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ telle que $Xv = c$ (ce qui est possible pour tout s puisque par $d_\xi p(x_0) \neq 0$ et par la condition (P), X est localement résoluble, cf. Beals et Fefferman [5, Theorem 1]), nous pouvons choisir comme solution la fonction $u(x)$ définie par

$$u(x) = \exp(-v(x) - [1/\psi(x)]) \quad \text{si } \psi(x) > 0,$$
$$u(x) = 0 \quad \text{si } \psi(x) \leqslant 0.$$

Clairement, on a $u \in H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ dès que $s > n/2$, $Pu = 0$ et $\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant 0\}$.

Par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$, et $\varphi_0(x', 0) \geqslant 0$ grâce à l'hypothèse (Sj); par développement de Taylor on en déduit que $\varphi_0(x', x'') \geqslant -C|x''|$ pour une constante $C > 0$. Si donc $|x''| \leqslant C^{-3}$,

$$\psi(x) \geqslant 0 \Rightarrow x_n \geqslant |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0,$$

et u est solution du problème (1.1).

Démonstration du Théorème 2.10. La démonstration est parfaitement identique à la démonstration précédente à ceci près qu'il faut remplacer la fonction $w = \exp(-v)$ par la fonction w fournie par le lemme suivant:

Lemme 6.1. *Supposons que nous sommes dans le Cas n°3. Alors il existe au voisinage de x_0 une fonction $w \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $Pw = 0$ et $w(x_0) \neq 0$.*

Bien que nous n'ayons pas trouvé dans la littérature de démonstration de ce lemme, il semble pourtant bien connu, et nous ne ferons qu'en esquisser une démonstration.

On commencera par résoudre approximativement $Pw = 0$ en trouvant deux fonctions C^∞ u et f telles que $Pu = f$, $u(x_0) = 1$ et f est plate en x_0; cela peut se prouver en choisissant une hypersurface non caractéristique pour P passant par x_0, en y calculant les dérivées normales de u exigées par l'équation $Pu = 0$, et en fabriquant u par le théorème de Whitney.

Puis, profitant simultanément de la résolubilité locale de P et de la petitesse de f (qui est plate en x_0), on trouvera, par exemple en utilisant le Théorème 7.3.1 de Hörmander [11], une fonction $C^\infty v$ petite et vérifiant $Pv = f$ près de x_0; si on a bien choisi les normes, on pourra, grâce aux injections de Sobolev, obtenir que $\|v\|_{L^\infty} \leqslant 1/2$.

Il suffit alors de prendre $w = u - v$.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983) 77–108.

[2] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957) 235–249.

[3] H. Bahouri, *Sur la propriété de prolongement unique pour les opérateurs de L. Hörmander*, Journées Edp de Saint Jean de Monts 1983, exposé n°15, Ecole Polytechnique, Paris, à paraître.

[4] M. S. Baouendi, F. Trèves & E. C. Zachmanoglou, *Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients*, Duke Math. J. **46** (1979) 409–440.

[5] R. Beals & C. Fefferman, *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973) 482–498.

[6] J. M. Bony, *Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy*, C. R.. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **268** (1969) 1103–1106.

[7] A. Cauchy, *Mémoire sur un théorème fondamental dans le calcul intégral*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **XIV** (1842) 1020; **XV** (1842) 44, 85 & 131.

[8] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.

[9] E. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Vol. II, Hermann, Paris, 1896, 303–308.

[10] E.. Holmgren, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps—Akad. Förh. **58** (1901) 91–105.

[11] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin, 1963.

[12] ______, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. I, Springer, Berlin, 1983.

[13] F. John, *On linear partial differential equations with analytic coefficients. Unique continuation of data*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949) 209–253.

[14] S. von Kowalevsky, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, J. Reine Angew. Math., **80** (1875) 1–32.

[15] L. Robbiano, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1983, à paraître.

[16] X. Saint Raymond, *Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, à paraître.

[17] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n°95, 1982.

[18] M. Strauss & F. Trèves, *First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem*, J. Differential Equations **15** (1974) 195–209.

[19] E. C. Zachmanoglou, *Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal. **27** (1968) 373–384.

[20] ______, *Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **38** (1970) 178–188.

UNIVERSITY OF PARIS

L'UNICITE POUR LES PROBLEMES DE CAUCHY LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

À paraître dans

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

(Principaux résultats annoncés dans C.R. Acad. Sc. Paris 299, 495-498 (1984))

3

L'UNICITE POUR LES PROBLEMES DE CAUCHY LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

par Xavier Saint Raymond

Depuis une trentaine d'années, l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy linéaires a fait l'objet d'un grand nombre de publications. Bien vite, les études successives sont devenues très techniques et difficiles à comparer. Pour remédier à cette situation, dans un livre publié récemment, Zuily [28] donne des démonstrations détaillées d'un grand nombre de résultats ; par ailleurs, Alinhac [2] a décrit sans démonstration l'ensemble de la théorie en groupant les théorèmes suivant les différentes classes de problèmes traités.

C'est dans ce même esprit que nous proposons ici une étude détaillée de la question pour les problèmes de Cauchy du premier ordre. Nous avons choisi de nous restreindre au premier ordre pour les deux raisons suivantes : d'une part le problème reste alors suffisamment simple pour que nous puissions donner des preuves complètes des résultats énoncés, et d'autre part, une telle étude fait déjà apparaître les critères d'unicité que l'on rencontre lorsqu'on traite les problèmes de Cauchy généraux.

En effet, si nous ne présentons pas ici les résultats les plus généraux obtenus sur l'unicité de Cauchy (Calderón [6], Hörmander [9,th. 8.9.1]-Lerner [13], Alinhac [1], Robbiano [19], Lerner [12], Saint Raymond [20], Lerner et Robbiano [14]), nos théorèmes en donnent des prolongements dans le cas du premier ordre ; ainsi, nous mettons en évidence l'importance pour l'unicité de Cauchy des conditions suivantes :

1. Conditions de crochet (ou de structure) analogues aux hypothèses du théorème de Calderón [6] ou à la principale normalité d'Hörmander [9,chap. 8] ; ainsi, le théorème 1.2 peut être considéré comme une extension du théorème de Calderón pour le premier ordre, et réciproquement, le théorème 1.1 étend Alinhac [1,th. 1] et Robbiano [19].

2. Conditions de convexité du genre de la pseudo-convexité d'Hörmander [9,chap. 8] ; là encore, nos résultats étendent les théorèmes généraux classiques de l'ordre m : le théorème 5.2 non seulement contient Hörmander [9,th. 8.9.1] dans le cas du premier ordre, mais prouve également l'unicité dans des situations où on ne peut espérer obtenir d'inégalité de Carleman (cas pseudo-concave) ; quant au théorème 5.3, il étend Alinhac [1,th. 2] et Saint Raymond [20].

3. Conditions sur le terme d'ordre inférieur, abordées au chapitre 6.

Pour limiter la complexité technique des démonstrations, nous avons choisi, outre le cadre du premier ordre, de ne traiter que le cas des coefficients C^∞, et de n'étudier l'unicité que parmi les solutions classiques (c'est-à-dire de classe C^1) ; pour la même raison, nous ne nous sommes intéressés essentiellement qu'à l'unicité stable (pour un sens précis de cette expression, voir le paragraphe 1.1, l'énoncé des théorèmes et la remarque 4 du paragraphe 1.4). Grâce à ce choix, notre texte ne fait appel à des démonstrations extérieures que pour utiliser des résultats généraux bien connus en analyse (théorème de Borel, cf. Hörmander [11,th. 1.2.6], théorème d'extension de Whitney [26], etc.). D'autre travaux sur le premier ordre sortent du cadre que nous venons de définir ; il s'agit notamment de Zachmanoglou [27], Baouendi et Goulaouic [4], Cardoso et Hounie [7], Baouendi et Trèves [5].

*
* *

Les résultats présentés ici ne sont pour la plupart que de légères améliorations de résultats déjà connus : ainsi le théorème 1.1 améliore les résultats d'Alinhac [1,th. 1] et de Robbiano [19], tandis que le théorème 1.2 améliore les résultats de Strauss et Trèves [24]. Ces raffinements ont pour essentiel mérite de mieux permettre la comparaison des théorèmes entre eux. Les méthodes utilisées dans les démonstrations sont classiques : inégalités de Carleman pour l'unicité, et construction de contre-exemples à base d'optique géométrique et de recollement.

Le théorème 4.2 doit cependant être mis à part car c'est un résultat entièrement nouveau. Bien qu'il s'agisse d'une construction de contre-exemple ressemblant aux constructions standard, c'est-à-dire du type décrit dans le chapitre 2, nous voudrions en souligner ici les caractères spécifiques.

Comme un seul changement de signe de la fonction b ne suffit pas à faire perdre l'unicité, c'est bien l'accumulation de ces changements de signe qui nous permet de construire le contre-exemple. Il nous faut donc recoller des fonctions u_k dont le comportement n'est bien connu qu'au voisinage des changements de signe. Ainsi, d'une part les valeurs de δ_k nous sont imposées (dans la construction standard, il est important de pouvoir choisir ces valeurs d'une manière appropriée), et d'autre part, nous ne possédons pas de développement limité du type (2.1) commun à tous les u_k, formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres λ_k tellement grands que l'on n'a plus $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$ (contrairement à la situation standard où λ_k est une puissance de k), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k a_k \neq \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{k+1} a_k$ en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions u_k, la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase $B(t) + iy$: c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphes 2.3 & 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes ; nous lui en sommes très reconnaissant.

*
*   *

Dans le texte, nous suivrons le plan suivant :

CHAPITRE 1 : NOTATIONS ET RESULTATS PRINCIPAUX.

1.1. Comment formuler le problème.

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $x_o \in \mathbb{R}^n$; l'une des coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_o) \neq 0$ (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de x_o).

On étudie un " phénomène physique " représenté par une fonction $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes qui est connue dans le passé $(u(x) = u_o(x)$ si $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_o))$ et qui satisfait une équation d'évolution $Lu + c_o u = f$, avec $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ où les $a_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro $c_o \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ici, $u_o(x)$ et $f(x)$ sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en x_o : étant données deux solutions u_1 et u_2 du problème, coïncident-elles dans tout un voisinage de x_o ? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée : de

$$\begin{cases} Lv + c_o v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o) \end{cases},$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_o ?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité "stable" dans le sens suivant : sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_o, ou si l'on se place en un point voisin de x_o sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_o)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues ; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses.

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons "lire" la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition : Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0)=0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité : l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \mathcal{R}e\, L$, $Y = \mathcal{I}m\, L$ et de tous leurs commutateurs : $[X,Y] = XY - YX$, $[X,[X,Y]]$ etc.. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbb{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ au point x et que nous noterons $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x) \in \{1,\ldots,n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathcal{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.

A cette algèbre de Lie sont associées des variétés appelées variétés intégrales de $\mathcal{L}$. La variété $\mathcal{V}$ sera une telle variété si pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'espace vectoriel $T_x\mathcal{V}$ coïncide avec le sous-espace de $T_x\mathbb{R}^n$ défini par $\mathcal{L}$. L'existence de variétés intégrales de $\mathcal{L}$ n'est pas automatique, et nous devrons la supposer pour obtenir certains résultats. Nous introduisons donc deux conditions "techniques" destinées à nous fournir de telles variétés intégrales, ou des variétés se comportant un peu comme des variétés intégrales.

Nous dirons que la propriété (R) est vérifiée dans l'ouvert Ω si par tout point de Ω passe une variété intégrale de $\mathcal{L}$; Sussmann [25] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété soit vérifiée ; rappelons que c'est classiquement le cas dans chacune des deux situations suivantes (qui constituent des critères aisément vérifiables sur un champ L donné) :

1. Lorsque le rang de $\mathcal{L}$ est constant dans Ω (théorème "de Frobenius", cf. Sternberg [23, p. 132]).

2. Lorsque les coefficients a_j de L sont analytiques dans Ω (théorème de Nagano [16]).

Nous dirons que L vérifie la condition (P) dans $\omega \subset \Omega$ s'il existe des coordonnées locales $(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, un ouvert v de $\mathbb{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que $\omega \subset v \times]-T,T[\subset \Omega$, que L s'écrive

$$L = a(y,t) \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right] \text{ avec } a \neq 0 \text{ dans } v \times]-T,T[\ ,$$

et que pour tout $y \in v$, il existe un vecteur unitaire $d(y) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$b(y,t) = |b(y,t)|\, d(y) \text{ pour tout } t \in]-T,T[\ .$$

Cette condition (P) a été introduite par Nirenberg et Trèves [17] pour étudier la résolubilité locale de L, et ces auteurs ont montré que si (η,τ) était un autre choix de coordonnées locales tel que

$$L = \alpha(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + i\,\beta(\eta,\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right],\quad \beta \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^{n-1},$$

l'existence d'un vecteur $d(y)$ tel que $b(y,t) = |b(y,t)|\, d(y)$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\delta(\eta)$ tel que $\beta(\eta,\tau) = |\beta(\eta,\tau)|\, \delta(\eta)$. Nous verrons au paragraphe 1.5 comment trouver à partir d'un champ L non dégénéré des coordonnées locales dans lesquelles $L = a(\partial_t + i\, b\cdot\partial_y)$, b à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-1}$, si bien que par cette propriété d'invariance, la condition (P) est aisément vérifiable sur un champ L donné.

Le lecteur remarquera que si L vérifie la condition (P) dans ω, alors $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}_{|\overline{\omega}} \leqslant 2$; cependant, la condition (P) dit plus que cela : elle implique l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathcal{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L .

1.3. Enoncé des résultats principaux.

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

THEOREME 1.1. : Posons $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ et } \mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \overline{S_3}$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (L + c_0 + a)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \mathrm{Supp}\, u = \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}, \text{ et} \\ \mathrm{Supp}\, a \subset \omega_+ . \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\mathrm{rg}\,\mathcal{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses "techniques" introduites au paragraphe précédent :

<u>THEOREME 1.2.</u> : Posons $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) = \varphi(x_o)$ *et* $\mathrm{rg}\, \mathcal{L}\,(x) \geqslant 3\}$ *; supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_o \notin \overline{S_3}$ *; supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_o *tel que l'une des deux hypothèses "techniques" suivantes soit vérifiée : soit* L *vérifie la condition (R) dans* Ω*, soit* L *vérifie la condition (P) dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) > \varphi(x_o)\}$*. Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_o *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2)\qquad \begin{cases} (L + c_o)\, u(x) = 0 \ \text{ dans } \ \omega, \text{ et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o)\}\ , \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_o*.*

1.4. <u>Commentaires sur les théorèmes.</u>

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1. s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i \left[t^{k_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + t^{k_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right], \ k_1 \neq k_2 \ , \ \varphi = t\ .$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre m quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition $k_1 = 0$.

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans $\mathbb{R}^2$:

$$L_{(R)} = \frac{\partial}{\partial t} + it(t+y)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad L_{(P)} = \frac{\partial}{\partial t} + i\, e^{-1/t^2} \frac{\partial}{\partial y}\ , \ \varphi = t\ ,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition $\mathrm{rg}\, \mathcal{L}\,(x_o) = 2$ dans $\mathbb{R}^2$ (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que L vérifie la condition (P) dans tout un voisinage Ω de x_o .

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses "techniques" ou même si nous supposons seulement que L vérifie la condition (R) dans $\mathring{\Omega}_+$; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\begin{cases} L = \frac{\partial}{\partial t} + i\ e^{-1/t}\ \sin\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial y} & \text{si} \quad t > 0\ , \\ L = \frac{\partial}{\partial t} & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à $t = 0$ pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}_{|\{t>0\}} \equiv 2$.

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert ω ne contient pas nécessairement le point x_0 ; le théorème 1.1 signifie donc ceci : si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de x_0, nous savons du moins le faire au voisinage de x_1 pour un point x_1 arbitrairement proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en x_0, elles le sont en tout point suffisamment proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur ; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité "stable" dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant : le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de x_0 où $\mathrm{rg}\,\mathcal{L} \leqslant 2$ et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer de la façon suivante : par tout point $x \in \Omega$ tel que $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathcal{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \overline{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \overline{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \overline{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse "technique".

6. Plan de l'ensemble. Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons "génériquement" répondu à la question posée ; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants : au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque $\operatorname{rg} \mathcal{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses "techniques" ne sont pas vérifiées ; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique ; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_o.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques.

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés au chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

LEMME 1.3. : *Supposons que le problème soit non caractéristique ; alors il existe près de x_o un système de coordonnées $(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tel que :*

1. $x_o = (0,0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_o) = t$
3. $L + c_o = a(y,t)\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)\right]$

où $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sont des fonctions C^∞ au voisinage de $(0,0)$ et $a(y,t) \neq 0$ au voisinage de $(0,0)$.

Démonstration : Commençons par choisir des coordonnées $x_1,\dots,x_n$ telles que $x_o = (0,\dots,0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_o)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0,\dots,0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_o = a_n(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(x) + i\,\beta_j(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} + c_1(x) \right]$$

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1,..,n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x',0) = x_k \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial x_n}(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x) = 0 . \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\frac{\partial(y,t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0,\dots,0)$, nous pouvons utiliser (y,t) comme nouvelles coordonnées locales ; nous obtenons

$$L + c_o = (L\,t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1} (L\,y_k) \frac{\partial}{\partial y_k} + c_o = a_n(x) \left[\frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_k} + c_1(x) \right]$$

d'où le lemme.

Remarque : Grâce à ce lemme, nous pourrons supposer que pour les problèmes non caractéristiques, $L + c_o$ s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$, puisque $(L+c_o)u = 0$ est localement équivalent à $\frac{\partial u}{\partial t} + i\, b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + c\, u = 0$.

CHAPITRE 2 : CONSTRUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE.

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique ; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_o) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_o$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_o et telle que u et $a = -(L + c_o)u/u$ soient régulières : c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que

1. $x_o = (0,0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_o) = t$
3. $L + c_o = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_o \in \overline{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_3) \geq 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_o$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. : Supposons que $L+c_0=\frac{\partial}{\partial t}+i\,b(y,t)\cdot\frac{\partial}{\partial y}+c(y,t)$ *et que* $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x_3)\geq 3$ *pour un point* $x_3\in S=\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. *Alors, pour tout voisinage* Ω *de* x_3, *il existe un point* $x_2\in\Omega\cap S$, *un voisinage* ω *de* x_2 *et des entiers* $k_1\geq 0$ *et* $k_2>0$ *tels que* $b(y,t)=t^{k_1}b_1(y,t)$ *et* $b_1(y,t)=b_1(y,0)+t^{k_2}b_2(y,t)$ *dans* ω *avec* $(b_1(x_2),b_2(x_2))$ *linéairement indépendants.*

Démonstration : On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de $\mathcal{L}$ reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega\cap S$.

Soit $k_1=\inf\{k\geq 0\mid \exists x\in\Omega\cap S : (\frac{\partial}{\partial t})^k b(x)\neq 0\}$. Alors $k_1<\infty$ car $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x_3)\geq 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega\cap S$ tel que $(\frac{\partial}{\partial t})^{k_1}b(x_1)\neq 0$, et soit $\omega\subset\Omega$ un voisinage de x_1 tel que $(\frac{\partial}{\partial t})^{k_1}b(x)\neq 0$ pour tout $x\in\omega\cap S$. Dans ω, on a $b(y,t)=t^{k_1}b_1(y,t)$ avec $b_1(x)\neq 0$ si $x\in S$.

Soit maintenant $k_2=\inf\{k>0\}\mid\exists x\in\omega\cap S : (\frac{\partial}{\partial t})^k b_1(x)$ et $b_1(x)$ soient linéairement indépendants$\}$. Alors $k_2<\infty$ car $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}(x_1)\geq 3$. On peut donc écrire dans ω, $b_1(y,t)=b_1(y,0)+t^{k_2}b_2(y,t)$ et il existe un point $x_2\in\omega\cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THEOREME 2.2 : Supposons que $L+c_0=\frac{\partial}{\partial t}+i\,b(y,t)\cdot\frac{\partial}{\partial y}+c(y,t)$, *que* $b:\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $c:\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* $x_0=(y_0,0)$ *et qu'il existe des entiers* $k_1\geq 0$ *et* $k_2>0$ *tels que* $b(y,t)=t^{k_1}b_1(y,t)$ *et* $b_1(y,t)=b_1(y,0)+t^{k_2}b_2(y,t)$ *dans* Ω *avec* $(b_1(x_0),b_2(x_0))$ *linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u\in C^\infty(\omega)$ *et* $a\in C^\infty(\omega)$ *vérifiant (1.1).*

2.2. Optique géométrique.

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ si $w(x,\delta)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times [0,\infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.

PROPOSITION 2.3 : Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de $(y_o, 0, 0)$ *deux fonctions* φ *et* $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *telles que*

$$(2.1)\quad \begin{cases} \mathcal{R}e\, \varphi(y,t,\delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2\, \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \quad \text{pour } \delta > 0 \\ \beta(y_o, 0, 0) = \beta_o > 0 \end{cases}$$

et telles que pour toute fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, *il existe une fonction* $w(y,s,\varepsilon) \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ *telle que* $w(y,0,0) = 1$ *et*

$$(2.2)\quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall \nu \in \mathbb{N},\ \exists \delta_{\alpha,\nu} : \text{pour } 0 < \delta < \delta_{\alpha,\nu} \text{ et} \\ \text{pour } (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \text{ dans un voisinage fixe de } (y_o, 0) \text{ (indépendant de } \alpha \text{ et } \nu) \\ |\partial^\alpha[(L + c_o)h/h]| \leqslant 2\,\delta^\nu \end{cases}$$

où on a posé :

$$(2.3)\quad h(y,t,\delta) = w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp\left[-\delta^{-5/3}\gamma(y,\delta) + \delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y,t,\delta)\right]$$

(dans (2.2), ∂^α *désigne la dérivation d'ordre* α *par rapport à* y *et* t*).*

Démonstration : en trois parties.

1. Construction de φ et de β.

Choisissons $\eta_o \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $b_1(x_o) \cdot \eta_o = 0$ et $b_2(x_o) \cdot \eta_o < 0$ (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction ψ_1 C^∞ à valeurs réelles telle que

$$\left\{\begin{array}{l} b_1(y,\delta)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)=0 \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y_o,0)=\eta_o \end{array}\right.$$

et on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_2(y,t,\delta)=\int_\delta^t b(y,r)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)\,dr \\ \varphi(y,t,\delta)=\psi_2(y,t,\delta)+i\,\psi_1(y,\delta)\,. \end{array}\right.$$

On calcule alors que :

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_2(y,\delta,\delta)=0 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}(y,\delta,\delta)=b(y,\delta)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)=0 \quad \text{par choix de } \psi_1\text{, et} \\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}(y,t,\delta)=\frac{\partial b}{\partial t}(y,t)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)= \\ =\left[k_1\,t^{k_1-1}\,b_1(y,0)+(k_1+k_2)t^{k_1+k_2-1}\,b_2(y,t)+t^{k_1+k_2}\frac{\partial b_2}{\partial t}(y,t)\right]\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)= \\ =\left[-k_1\,t^{k_1-1}\,\delta^{k_2}\,b_2(y,\delta)+(k_1+k_2)t^{k_1+k_2-1}\,b_2(y,t)+t^{k_1+k_2}\frac{\partial b_2}{\partial t}(y,t)\right]\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)= \\ =\delta^{k_1+k_2-1}\left[-k_1\left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1-1}b_2(y,\delta)+(k_1+k_2)\left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2-1}b_2(y,t)+\delta\left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2}\frac{\partial b_2}{\partial t}(y,t)\right]\cdot \\ \qquad\qquad\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)\,. \end{array}\right.$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R}e\,\varphi(y,t,\delta)=\psi_2(y,t,\delta)=-\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2\,\beta(y,\delta^{-1}(t-\delta),\delta) \quad \text{où} \\ \beta(y,\sigma,\delta)=\int_0^1(\theta-1)\left[-k_1(1+\theta\sigma)^{k_1-1}\,b_2(y,\delta)+(k_1+k_2)(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1}\,b_2(y,\delta(1+\theta\sigma))+\right. \\ \qquad\left.+\,\delta\,(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2}\frac{\partial b_2}{\partial t}(y,\delta(1+\theta\sigma))\right]\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y,\delta)\,d\theta \end{array}\right.$$

ce qui donne (2.1) puisque $\beta(y_o,0,0) = -\frac{1}{2}\, k_2\, b_2(y_o,0)\cdot\eta_o > 0$ grâce à notre choix de η_o.

Notons que

$$L\varphi(y,t,\delta) = \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\,(y,t,\delta) + ib(y,t)\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\,(y,t,\delta) - b(y,t)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,(y,\delta) =$$

$$= i\, b\,(y,t)\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\,(y,t,\delta) = -i\,\delta^{k_1+k_2-1}\,(t-\delta)^2\, b(y,t)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y}\,(y,\delta^{-1}(t-\delta),\delta)$$

par (2.1), et si on pose $s = \delta^{-2}(t-\delta)$,

$$L\left[\delta^{-4-k_1-k_2}\,\varphi(y,t,\delta)\right] = -i\,\delta^{-1}\, s^2\, b(y,t)\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y}\,(y,\delta s,\delta)\ .$$

2. Construction de w.

Définissons l'opérateur M par la relation $(Mw/w) = ((L+c_o)h/h)$ où h est donnée par (2.3) ; on calcule alors que :

$$\begin{cases} Mw = \delta^{-2}\left[\dfrac{\partial w}{\partial s} + \varepsilon\, N w\right] \quad \text{avec} \\[2ex] Nw = i\,\tilde{b}\,(y,s,\varepsilon)\cdot\dfrac{\partial w}{\partial y} + \tilde{c}(y,s,\varepsilon)\, w \end{cases}$$

où $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$ sont des fonctions de l'espace $B^\infty(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ définies par :

$$\begin{cases} \tilde{b}(y,s,\varepsilon) = \varepsilon^5\, b(y,\varepsilon^3+\varepsilon^6 s) \\[2ex] \tilde{c}(y,s,\varepsilon) = -\,i\, b(y,\varepsilon^3+\varepsilon^6 s)\cdot\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\,(y,\varepsilon^3) - i\,\varepsilon^2 s^2\, b\,(y,\varepsilon^3+\varepsilon^6 s)\cdot\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\,(y,\varepsilon^3 s,\varepsilon^3) + \\ \qquad + \varepsilon^5\, c\,(y,\varepsilon^3+\varepsilon^6 s)\ . \end{cases}$$

Définissons une suite de fonctions w_j de l'espace $B^\infty(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$\begin{cases} w_o(y,s,\varepsilon) = 1 \\[2ex] w_{j+1}(y,s,\varepsilon) = \displaystyle\int_0^s -N\,w_j\,(y,r,\varepsilon)\,dr\ , \ \text{pour}\ \ j\geqslant 0\ . \end{cases}$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant $w = \sum_j \varepsilon^j w_j$. Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $[0,1]$, $\chi = 0$ sur $[2,+\infty[$ et $\chi(\varepsilon) \in [0,1]$ pour $\varepsilon \in [0,+\infty[$. Nous posons

$$w(y,s,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y,s,\varepsilon) ,$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs λ_j telle que cette formule définisse une fonction w de l'espace $B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. <u>Construction de la suite λ_j</u>.

Nous allons montrer qu'il suffit que la suite λ_j croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les $\chi(\lambda_j \varepsilon)$ soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient k un voisinage compact de y_0, $s_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que les fonctions w_j soient bien définies dans $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0,\varepsilon_0]$. Pour obtenir que $w \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, il suffit d'imposer pour tout $J \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_J > (J+1) \sup\left\{ |\partial^\alpha w_j(y,s,\varepsilon)| \,/\, (y,s,\varepsilon) \in K ,\ |\alpha| \leq J \text{ et } j \leq J+1 \right\}$$

où ∂^α désigne la dérivation d'ordre α en y et s. En effet, si $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$,

$$w(y,s,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{J} \varepsilon^j w_j(y,s,\varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) w_{J+1}(y,s,\varepsilon)$$

donc si $0 < |\alpha| \leq J$, $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ et $(y,s,\varepsilon) \in K$,

$$|\partial^\alpha w(y,s,\varepsilon)| \leq \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon \,|\partial^\alpha w_j(y,s,\varepsilon)| \leq 1 .$$

Il en résulte que $w \in B^{\infty}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K.

On a $w(y,0,0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \frac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés) ; il en résulte que $|(\tilde{\partial}^{\gamma} w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $\tilde{\partial}^{\alpha}(N w_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $\left[(\tilde{\partial}^{\beta} N w_j)/w\right]\left[(\tilde{\partial}^{\gamma_1} w)/w\right]\ldots\left[(\tilde{\partial}^{\gamma_{|\alpha|}} w)/w\right]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|\tilde{\partial}^{\alpha}(N w_j/w)| \leqslant (|\alpha|+1)!\, 2^{|\alpha|+2} \sup\{|\tilde{\partial}^{\beta} N w_j| / \beta \leqslant \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\lambda_J > (J+1)!\ 2^{J+2} \sup\{|\tilde{\partial}^{\alpha} N w_j(y,s,\varepsilon)| / (y,s,\varepsilon) \in K,\ |\alpha| \leqslant J \text{ et } j \leqslant J+1\},$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{-6}\left[\sum_{j=0}^{J} \left(\varepsilon^j \frac{\partial w_j}{\partial s} + \varepsilon^{j+1} N w_j\right) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) \frac{\partial w_{J+1}}{\partial s} + \varepsilon^{J+2} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) N w_{J+1}\right] =$$

$$= \varepsilon^{-6}\left[\sum_{j=1}^{J} -\varepsilon^j N w_{j-1} + \sum_{j=0}^{J} \varepsilon^{j+1} N w_j - \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) N w_J + \varepsilon^{J+2} \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon) N w_{J+1}\right] =$$

$$= \varepsilon^{J-5}\left[N w_J (1 - \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + N w_{J+1}\, \varepsilon\, \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)\right]$$

d'où $|\tilde{\partial}^{\alpha}(M w/w)| \leqslant 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leqslant J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y,s,\varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J, on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\nu \in \mathbb{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1 + |\alpha|) + 3\nu$, que pour $(y,s,\varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_o)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha} t\, \tilde{\partial}^\alpha(M\,w/w)| \leqslant 2\,\varepsilon^{3\nu} = 2\,\delta^\nu .$$

2.3. Ajustement des fonctions u_k.

Nous posons $\delta_k = k^{-3/4}$, $\ell_k = \delta_k - \delta_{k+1}$ $(\sim \frac{3}{4} k^{-7/4})$ et $m_k = \frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1}$. Puis nous considérons les fonctions $h_k(y,t) = h(y,t,\delta_k)$ définies par (2.3) ; ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2}\,\ell_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2}\,\ell_k \sim \frac{3}{4} k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_o)u/u$ est C^∞, il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).

PROPOSITION 2.4 : *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage Y de y_o, une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ à valeurs réelles telle que $\gamma(y,0) > 0$ pour $y \in Y$, et trois suites de fonctions $e_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, f_k et $g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ à valeurs réelles telles que les fonctions $h_k(y,t) = h(y,t,\delta_k)$ définies en (2.3) (avec la fonction γ ci-dessus) vérifient $h_k/h_{k+1} = exp[f_k + i\,g_k]$ avec*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_Y |f_k(y,m_k)|\right) = 0 , \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_k}{\partial t}(y,t) > \frac{\beta_o k^2}{2} \quad \text{sur} \quad Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[\; ; \tag{2.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } \nu_\alpha \in \mathbb{N} \text{ tels que sur } Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[, \\ |\partial^\alpha f_k(y,t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha g_k(y,t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \; ; \end{array} \right. \tag{2.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |h_k(y,t)| = |h_{k+1}(y,t)| \Longleftrightarrow t = m_k + e_k(y) \\ \text{et } \; e_k(y) = o(\ell_k) \;\; (\text{pour } k \to \infty). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Démonstration : en trois parties.

1. Construction de γ.

Nous allons choisir la fonction γ de telle sorte que

$$\mathrm{Log}|h_k(y,m_k)| - \mathrm{Log}|h_{k+1}(y,m_k)| = 0 \ ,$$

du moins si on néglige l'influence de w dans la formule (2.3). Nous posons donc

$$I_k(y) = \delta_k^{-4-k_1-k_2} \,\mathcal{R}e\,\varphi(y,m_k,\delta_k) - \delta_{k+1}^{-4-k_1-k_2} \,\mathcal{R}e\,\varphi(y,m_k,\delta_{k+1}) .$$

Alors, en utilisant (2.1),

$$\begin{aligned} I_k(y) &= -\delta_k^{-5}(m_k-\delta_k)^2\,\beta(y,\delta_k^{-1}(m_k-\delta_k),\delta_k) + \delta_{k+1}^{-5}(m_k-\delta_{k+1})^2\,\beta(y,\delta_{k+1}^{-1}(m_k-\delta_{k+1}),\delta_{k+1}) = \\ &= \Big[\beta(y,0,0) + o(1)\Big]\Big[-\tfrac{4}{9}\,\delta_k^{-5}\,\ell_k^2 + \tfrac{1}{9}\,\delta_{k+1}^{-5}\,\ell_k^2\Big] \quad (\text{pour } k\to\infty) \end{aligned}$$

et donc, si on a choisi Y de telle façon que $\beta(y,0,0) > 0$ pour $y \in Y$ (ce qui est possible grâce à (2.1)),

$$I_k(y) \sim -\frac{1}{3}\,\beta(y,0,0)\,\delta_k^{-5}\,\ell_k^2 \sim -\frac{3}{16}\,\beta(y,0,0)\,k^{\frac{1}{4}} \quad \text{pour} \quad y \in Y .$$

Remarquons que de même, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$,

$$|\partial^\alpha I_k(y)| \leqslant C_\alpha k^{1/4} .$$

Nous posons alors, pour k_o assez grand, $\gamma_k(y) = -\sum_{j=k_o}^{k-1} I_j(y)$; nous avons :

$$\begin{cases} \gamma_k(y) \sim \dfrac{3}{20}\,\beta(y,0,0)\,k^{5/4} = \dfrac{3}{20}\,\beta(y,0,0)\,\delta_k^{-5/3} \ , \ \text{et} \\ |\partial^\alpha \gamma_k(y)| \leqslant C_\alpha\,\delta_k^{-5/3} \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{N}^{n-1} , \end{cases}$$

et il existe donc une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que pour tout $k \geqslant k_o$, $\gamma_k(y) = \delta_k^{-5/3}\,\gamma(y,\delta_k)$ et que $\gamma(y,0) = \frac{3}{20}\,\beta(y,0,0) > 0$ pour $y \in Y$.

2. Construction des suites f_k et g_k.

Comme $\delta_k^{-2}\,\ell_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, la fonction w fournie par la proposition 2.3 vérifie

$$(2.7) \qquad \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{Y\times\,]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[}\;|w(y,\delta_k^{-2}(t-\delta_k),\delta_k^{1/3})-1|\right)=0\;;$$

nous utiliserons donc la détermination principale du logarithme de w, qui possède les mêmes propriétés de régularité que w; nous posons

$$\begin{cases} f_k(y,t) = \mathcal{R}e\ \mathrm{Log}\, w(y,\delta_k^{-2}(t-\delta_k),\delta_k^{1/3}) - \mathcal{R}e\ \mathrm{Log}\, w(y,\delta_{k+1}^{-2}(t-\delta_{k+1}),\delta_{k+1}^{1/3}) - \\ \qquad - \delta_k^{-5/3}\,\gamma(y,\delta_k) + \delta_{k+1}^{-5/3}\,\gamma(y,\delta_{k+1}) + \\ \qquad + \delta_k^{-4-k_1-k_2}\,\mathcal{R}e\,\varphi(y,t,\delta_k) - \delta_{k+1}^{-4-k_1-k_2}\,\mathcal{R}e\,\varphi(y,t,\delta_{k+1}) \\ \\ g_k(y,t) = \mathcal{I}m\ \mathrm{Log}\, w(y,\delta_k^{-2}(t-\delta_k),\delta_k^{1/3}) - \mathcal{I}m\ \mathrm{Log}\, w(y,\delta_{k+1}^{-2}(t-\delta_{k+1}),\delta_{k+1}^{1/3}) + \\ \qquad + \delta_k^{-4-k_1-k_2}\,\mathcal{I}m\,\varphi(y,t,\delta_k) - \delta_{k+1}^{-4-k_1-k_2}\,\mathcal{I}m\,\varphi(y,t,\delta_{k+1})\,. \end{cases}$$

Nous avons donc (cf. (2.3)) $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + i\,g_k]$, et grâce au choix de γ et à (2.7), nous obtenons la première moitié de (2.4) soit $\lim_{k\to\infty}\left(\sup_Y |f_k(y,m_k)|\right)=0$. De plus, il est facile de vérifier (2.5) sur les formules ci-dessus définissant f_k et g_k.

3. Construction de la suite e_k.

Compte tenu de ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à montrer la minoration de $\partial f_k/\partial t$ (deuxième moitié de (2.4)) et (2.6). Mais (2.6) découle de (2.4) parce que $|h_{k+1}(y,t)| = |h_k(y,t)|$ équivaut à $f_k(y,t)=0$ et que $k^2\,\ell_k$ $(\sim \frac{3}{4}\,k^{1/4})$ tend vers l'infini avec k.

En reprenant l'expression de f_k ci-dessus, calculons-en la dérivée par rapport à t

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}(y,t) = \delta_k^{-2}\,\mathcal{R}e\left(\frac{\partial w/\partial s}{w}(y,\delta_k^{-2}(t-\delta_k),\delta_k^{1/3})\right) - \delta_{k+1}^{-2}\,\mathcal{R}e\left(\frac{\partial w/\partial s}{w}(y,\delta_{k+1}^{-2}(t-\delta_{k+1}),\delta_{k+1}^{1/3})\right) +$$

$$+\ \delta_k^{-4-k_1-k_2}\frac{\partial\,\mathcal{R}e\,\varphi}{\partial t}(y,t,\delta_k) - \delta_{k+1}^{-4-k_1-k_2}\frac{\partial\,\mathcal{R}e\,\varphi}{\partial t}(y,t,\delta_{k+1})\ .$$

Les deux premiers termes sont $O(\delta_k^{-2})$ lorsque k tend vers l'infini (cf. (2.7)) ; pour estimer les deux autres, on écrit, grâce à (2.1)

$$\delta^{1-k_1-k_2}\frac{\partial\,\mathcal{R}e\varphi}{\partial t}(y,t,\delta) = -2(t-\delta)\,\beta(y,\delta^{-1}(t-\delta),\delta) - \delta^{-1}(t-\delta)^2\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}(y,\delta^{-1}(t-\delta),\delta) \leqslant$$

$$\leqslant -\beta_o(t-\delta)$$

pourvu que $|y-y_o|$, $\delta^{-2}(t-\delta)$ et δ soient suffisamment petits. On obtient donc

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}(y,t) \geqslant \beta_o\,\delta_k^{-5}(\delta_k-t) + \beta_o\,\delta_{k+1}^{-5}(t-\delta_{k+1}) + O(\delta_k^{-2}) \geqslant$$

$$\geqslant \beta_o\,\delta_k^{-5}(\delta_k-\delta_{k+1}) + \beta_o(t-\delta_{k+1})(\delta_{k+1}^{-5}-\delta_k^{-5}) + O(\delta_k^{-2}) \geqslant$$

$$\geqslant \beta_o\,\delta_k^{-5}\ell_k + O(\delta_k^{-5}\ell_k k^{-1}) + O(\delta_k^{-2}) \quad (\text{pour } k\to\infty).$$

Enfin, $\delta_k^{-5}\ell_k \sim \frac{3}{4}k^2$ et $\delta_k^{-2} = k^{3/2}$, d'où (2.4) puis (2.6).

Maintenant que nous avons circonscrit le lieu où u s'annule (par (2.6)), il faut nous assurer que $(L+c_o)u$ s'annule suffisamment en ce même lieu pour que $(L+c_o)u/u$ soit régulière. Pour cela, nous devons modifier les fonctions h_k.

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*2.5.*</u> *: Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* Y *de* y_o*, un entier* k_o *et trois suites de fonctions* $u_k \in C^\infty(Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[)$ *à valeurs complexes et* F_k *et* $G_k \in C^\infty(Y\times]\delta_{k+1},\delta_k[)$ *à valeurs réelles tels que si l'on pose*

$$\begin{cases} r_k(y,t) = (L+c_o)\, u_k(y,t)/u_k(y,t) \\ v_k(y,t) = u_k(y,t)/u_{k+1}(y,t) \end{cases}$$

on ait $v_k = exp[F_k + i\, G_k]$, *et* r_k, F_k *et* G_k *possèdent les propriétés suivantes pour* $k \geq k_o$:

(2.8) $\begin{cases} r_k(y,t) \text{ et } r_{k+1}(y,t) \text{ sont "plates" sur } t = m_k + e_k(y) \\ \text{(ce qui signifie que toutes leurs dérivées s'y annulent) ;} \end{cases}$

(2.9) *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et tout* $\nu \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\sup\limits_{Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} |k^\nu \partial^\alpha r_k(y,t)| \right) = 0$;

(2.10) $F_k(y, m_k + e_k(y)) = 0$ *et* $\dfrac{\partial F_k}{\partial t}(y,t) \geq \dfrac{\beta_o k^2}{3}$ *sur* $Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[$;

(2.11) $\begin{cases} \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } \nu_\alpha \in \mathbb{N} \text{ tels que sur } Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[, \\ |\partial^\alpha F_k(y,t)| \leq C_\alpha k^{\nu_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha G_k(y,t)| \leq C_\alpha k^{\nu_\alpha}. \end{cases}$

Démonstration : en deux parties.

1. Construction de la suite u_k.

Nous choisissons les fonctions $u_k(y,t)$ par la formule

$$u_k(y,t) = h_k(y,t)\ \ (1 + \varepsilon(y, \ell_k^{-1}(t-\delta_k), \delta_k))$$

où la fonction $\varepsilon(y,\tau,\delta)$ est à choisir. Pour obtenir (2.8), il faudra que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha \left[\frac{(L+c_o)h_k}{h_k}(y,t) + \frac{L\varepsilon}{1+\varepsilon}(y, \ell_k^{-1}(t-\delta_k), \delta_k) \right] = 0$$

sur $t = m_k + e_k(y)$ et sur $t = m_{k-1} + e_{k-1}(y)$. Si nous demandons de plus à la fonction

ε de s'annuler sur les fermés Φ_k et Ψ_k définis ci-dessous, ces conditions sont encore équivalentes à la suite d'équations suivante :

$$(2.12)\quad \begin{cases} \text{pour tout } j \geqslant 1 \text{ et tout } k \geqslant k_o , \\ (\frac{\partial}{\partial\tau})^j\ \varepsilon(y,\tau,\delta) = \varphi_{j,k}(y) \\ \text{sur } \Phi_k = \{(y,\tau,\delta) \,/\, y \in \overline{Y} ,\ \delta = \delta_k \text{ et } \tau = \ell_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)\} \\ (\frac{\partial}{\partial\tau})^j\ \varepsilon(y,\tau,\delta) = \psi_{j,k}(y) \\ \text{sur } \Psi_k = \{(y,\tau,\delta) \,/\, y \in \overline{Y} ,\ \delta = \delta_k \text{ et } \tau = \ell_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k)\} \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi_{j,k}(y)$ et $\psi_{j,k}(y)$ s'expriment en fonction des dérivées de $(L + c_o)h_k/h_k$ et sont donc à décroissance rapide en k ainsi que toutes leurs dérivées grâce à (2.2). Nous demanderons aussi à la fonction ε de vérifier

$$(2.13)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \ell > 0 \text{ et tout } j \geqslant 0 , \text{ ainsi que pour } j=\ell=0, \text{ et pour tout } k \geqslant k_o , \\ (\frac{\partial}{\partial\tau})^j\ (\frac{\partial}{\partial\delta})^\ell\ \varepsilon(y,\tau,\delta) = 0 \quad \text{sur } \Phi_k \text{ et } \Psi_k , \text{ et} \end{cases}$$

$$(2.14)\qquad (\frac{\partial}{\partial\delta})^\ell\ \varepsilon(y,\tau,0) = 0 \quad \text{pour tout } \ell \geqslant 0 .$$

Il existe une fonction $\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vérifiant (2.12), (2.13) et (2.14) : elle nous est fournie par le théorème d'extension de Whitney [26] appliqué au fermé

$$\{(y,\tau,\delta) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \delta = 0\} \cup (\bigcup_{k \geqslant k_o} \Phi_k) \cup (\bigcup_{k \geqslant k_o} \Psi_k) .$$

Les conditions de compatibilité requises pour pouvoir utiliser ce théorème sont trivialement vérifiées puisque les fonctions $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ sont à décroissance rapide en k ainsi que leurs dérivées, et que $\ell_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k) = -\frac{2}{3} + O(k^{-1})$ et

$\ell_k^{-1}(m_{k-1}+e_{k-1}(y)-\delta_k)=\frac{1}{3}+O(k^{-1})$ (pour $k\to\infty$).

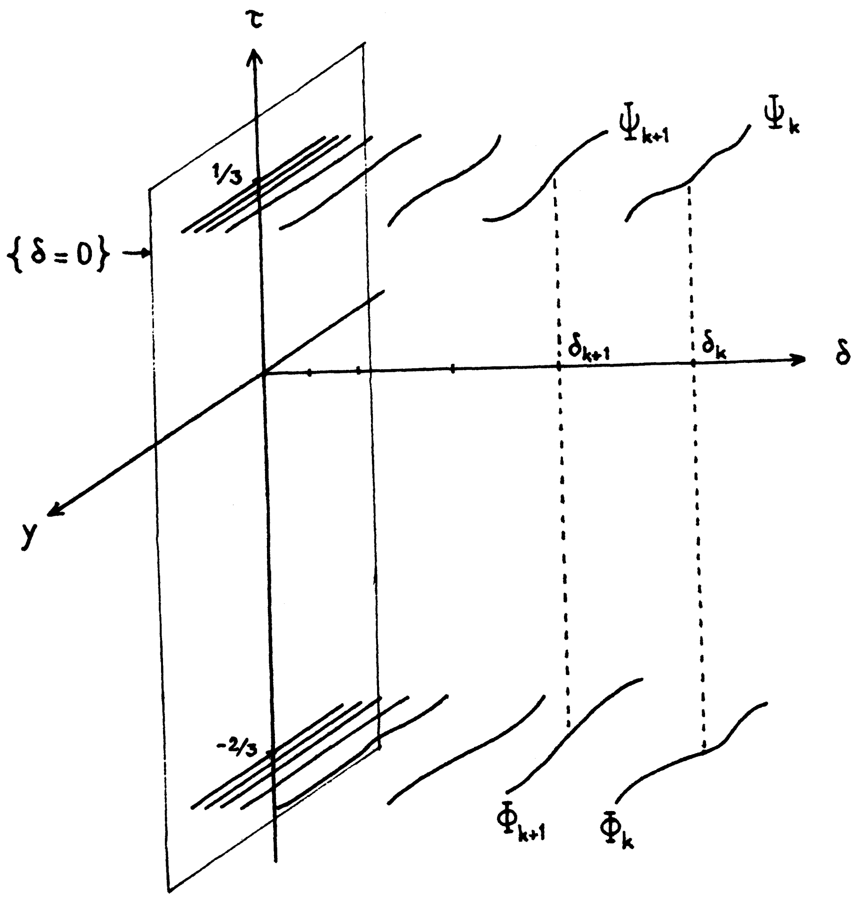


Fig. 2.1 : le fermé auquel on applique le théorème de Whitney.

2. Construction des suites F_k et G_k.

Les équations (2.12) ont été choisies pour que r_k et r_{k+1} soient plates sur $t=m_k+e_k(y)$: la propriété (2.8) est donc acquise. De la condition (2.14) nous tirons que pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$ et tout $\nu\in\mathbb{N}$,

$$(2.15)\qquad \lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[}|k^\nu\partial^\alpha\varepsilon(y,\ell_k^{-1}(t-\delta_k),\delta_k)|\Big)=0,$$

et par conséquent, on obtient (2.9) en utilisant (2.2) et la formule

$$\partial^\alpha r_k(y,t)=\partial^\alpha\Big[\frac{(L+c_o)h_k}{h_k}(y,t)\Big]+\partial^\alpha\Big[\frac{L\varepsilon}{1+\varepsilon}(y,\ell_k^{-1}(t-\delta_k),\delta_k)\Big].$$

L'estimation (2.15) permet aussi d'utiliser la détermination principale du logarithme de $1+\varepsilon$; nous posons donc :

$$F_k(y,t) = f_k(y,t) + \mathcal{R}e\, \mathrm{Log}\left[1+\varepsilon(y,\ell_k^{-1}(t-\delta_k),\delta_k)\right] - \mathcal{R}e\, \mathrm{Log}\left[1+\varepsilon(y,\ell_{k+1}^{-1}(t-\delta_{k+1}),\delta_{k+1})\right]$$

$$G_k(y,t) = g_k(y,t) + \mathcal{J}m\, \mathrm{Log}\left[1+\varepsilon(y,\ell_k^{-1}(t-\delta_k),\delta_k)\right] - \mathcal{J}m\, \mathrm{Log}\left[1+\varepsilon(y,\ell_{k+1}^{-1}(t-\delta_{k+1}),\delta_{k+1})\right]$$

Nous avons alors $v_k = \exp[F_k + i\,G_k]$, et F_k et G_k vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) ($j=\ell=0$) et (2.15).

2.4. Construction des fonctions u et a.

Par un calcul élémentaire nous voyons que (pour $k\to\infty$)

$$\begin{cases} \delta_{k+1}/\delta_k = 1 - 12/16\,k + o(k^{-1}) , \\ (\delta_k - \frac{3}{4}\ell_k) / \delta_k = 1 - 9/16\,k + o(k^{-1}) , \\ (m_k + e_k(y)) / \delta_k = m_k/\delta_k + o(k^{-1}) = 1 - 8/16\,k + o(k^{-1}) \ \text{d'après (2.6), et} \\ (\delta_{k+1} + \frac{3}{4}\ell_{k+1}) / \delta_k = 1 - 3/16\,k + o(k^{-1}) , \end{cases}$$

et donc pour $y\in Y$ et k assez grand, $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4}\ell_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4}\ell_{k+1} < \delta_k$.
Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(\tau)=1$ pour $\tau\in\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$, $\operatorname{supp}\chi\subset[-1,1]$ et $\chi(\tau)\in[0,1]$ pour $\tau\in[-1,1]$; puis nous posons

$$\begin{cases} u(y,t) = \sum\limits_{k\geq k_0} \chi\left(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}\right) u_k(y,t) & \text{pour} \quad (y,t)\in Y\times\,]0,\delta_{k_0}[\ , \\ u(y,t) = 0 & \text{pour} \quad (y,t)\in Y\times\,]-\delta_{k_0},0] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a(y,t) = -(L+c_0)\,u(y,t)/u(y,t) & \text{pour} \quad u(y,t)\neq 0 , \\ a(y,t) = 0 & \text{pour} \quad u(y,t) = 0 \end{cases}$$

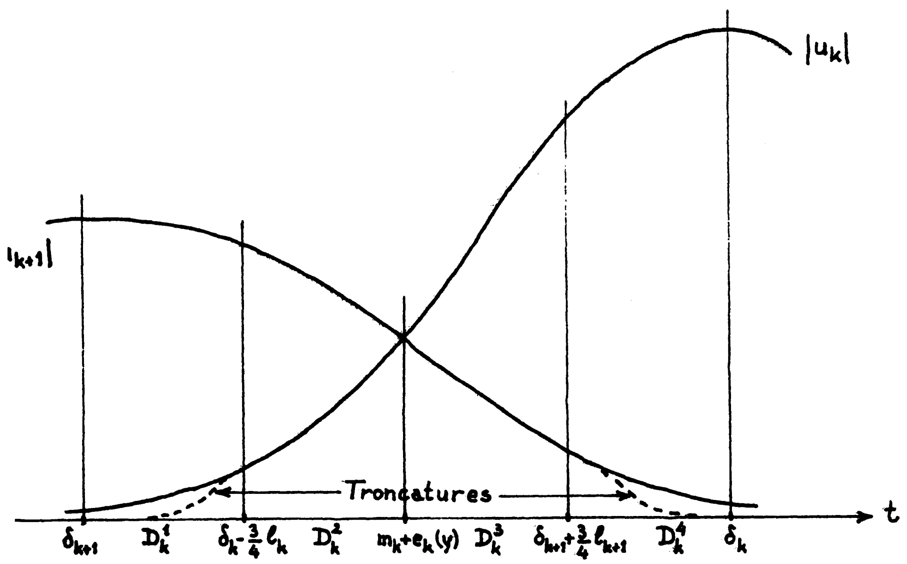


Fig. 2.2 : profils des fonctions u_k et u_{k+1} pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$.

Régularité de la fonction u.

Remarquons d'abord qu'une telle fonction u est C^∞. En effet, pour $t > 0$, u est somme d'au plus deux termes non nuls qui sont des fonctions C^∞, et u est donc C^∞ dans $Y \times]0, \delta_{k_0}[$; pour voir que u est C^∞ au voisinage de $t = 0$, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\sup_{Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} \left| \partial^\alpha \left[\chi\left(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}\right) u_k(y,t) \right] \right| \right) = 0 . \tag{2.16}$$

Or tous les éléments ayant servi à la construction de u_k se comportent comme des puissances de k ainsi que leurs dérivées ; on peut donc écrire

$$\left|\partial^\alpha \left[\chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k})\, u_k(y,t)\right]\right| \leqslant C_\alpha\, k^{\nu_\alpha} \exp\left[-\delta_k^{-5/3}\, \gamma(y,\delta_k) + \delta_k^{-4-k_1-k_2}\, \mathcal{R}e\,\varphi(y,t,\delta_k)\right].$$

Mais $-\delta_k^{-5/3}\, \gamma(y,\delta_k) \sim -\frac{3}{20}\, \beta(y,0,0)\, k^{5/4}$, et

$$\left|\delta_k^{-4-k_1-k_2}\, \mathcal{R}e\,\varphi(y,t,\delta_k)\right| \leqslant \frac{4}{3}\, \delta_k^{-5}\, \ell_k^2\, \beta(y,0,0) \leqslant k^{1/4}\, \beta(y,0,0)$$

pour k suffisamment grand et $y \in Y$; comme $\beta(y,0,0) > 0$ pour $y \in Y$, cela donne (2.16)

Détermination des supports des fonctions u et a.

D'après (2.10), nous savons que $|v_k(y,t)| < 1$ pour $t \in [\delta_{k+1}, m_k + e_k(y)[$, et comme dans ce même domaine $u(y,t) = u_{k+1}(y,t) + \chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k})\, u_k(y,t)$, soit $u = u_{k+1}(1+\chi\, v_k)$, on en déduit que u ne s'annule pas ; on démontrerait de même que u ne s'annule pas pour $t \in]m_{k+1} + e_{k+1}(y), \delta_{k+1}]$, ni donc dans le domaine $D = \{(y,t) \in Y \times]-\delta_{k_o}, \delta_{k_o}[\;/\; t>0$ et $t \neq m_k + e_k(y)$ pour tout $k \geqslant k_o\}$ qui est dense dans $Y \times [0, \delta_{k_o}[$; il en résulte que $\operatorname{supp} u = Y \times [0, \delta_{k_o}[$, et par définition de a, on a $\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u$. Pour obtenir (1.1), il ne nous reste plus qu'à montrer que a est C^∞ dans $Y \times]-\delta_{k_o}, \delta_{k_o}[$.

Régularité de la fonction a.

Dans le domaine D défini ci-dessus, $u \neq 0$ donc la fonction a est définie par la formule $a = -(L+c_o)u/u$; il en résulte que a est C^∞ dans D. Pour t voisin de $m_k + e_k(y)$, $u = u_{k+1} + u_k$, donc pour $u_{k+1} + u_k \neq 0$, $a = -(L+c_o)u/u = -(r_{k+1}\, u_{k+1} + r_k u_k) / (u_{k+1} + u_k)$; en particulier,

$$\begin{cases} a = -(r_{k+1} + r_k\, v_k) / (1 + v_k) & \text{si } t < m_k + e_k(y) \; (\Longleftrightarrow |v_k| < 1) \\ a = -(r_{k+1}\, v_k^{-1} + r_k) / (1 + v_k^{-1}) & \text{si } t > m_k + e_k(y) \; (\Longleftrightarrow |v_k^{-1}| < 1) . \end{cases}$$

Dans la première de ces deux formules, le numérateur est plat sur $t = m_k + e_k(y)$ à cause de (2.8), et le dénominateur vérifie

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \frac{\beta_o k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t)$$

d'après (2.10) et en utilisant l'inégalité $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$ pour $F \in [-2,0]$. L'expression $(r_{k+1} + r_k v_k) / (1 + v_k)$ définit donc une fonction plate sur $t = m_k + e_k(y)$, et comme il en est de même pour l'autre expression, nous avons obtenu que, même si u s'annule en certains points de $t = m_k + e_k(y)$ (ce qui entraîne que $a = 0$ par définition de a), la fonction a est C^∞ dans $Y \times]0, \delta_{k_o}[$.

Pour montrer que a est C^∞ pour t voisin de 0, il nous faut estimer les dérivées de a sur $Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]$ lorsque k tend vers l'infini. Pour cela, nous étudions a successivement sur les quatre intervalles schématisés sur la figure 2.2

1. Sur $D_k^1 = \{(y,t) \,/\, \delta_{k+1} \leq t \leq \delta_k - \frac{3}{4} \ell_k\}$, on a

$$F_k(y,t) \leq \frac{\beta_o k^2}{3} (\delta_k - \frac{3}{4} \ell_k - m_k - e_k(y)) \leq -\frac{\beta_o}{50} k^{1/4}$$

pour k assez grand d'après (2.10). En utilisant aussi (2.11), on obtient que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\sup_{D_k^1} |k^\nu \partial^\alpha v_k| \right) = 0 \, .$$

Sur D_k^1 , u et a sont données par les formules $u = u_{k+1} + \chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) u_k$ et $a = -(L+c_o)u/u$, d'où

$$a = -\left[(L+c_o)u_{k+1} + \chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) (L+c_o)u_k + \ell_k^{-1} \chi'(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) u_k \right] / u$$

$$= -\left(r_{k+1} + \left[\chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) r_k + \ell_k^{-1} \chi'(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) \right] v_k \right) / \left(1 + \chi(\frac{t-\delta_k}{\ell_k}) v_k \right) .$$

On en déduit, à l'aide de l'estimation précédente et de (2.9) que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{D_k^1} |\partial^\alpha a|\right) = 0 .$$

2. Sur $D_k^2 = \{(y,t) \,/\, \delta_k - \frac{3}{4}\ell_k \leqslant t < m_k + e_k(y)\}$, on a $F_k(y,t) < 0$ d'après (2.10) d'où $|v_k| < 1$. Comme $u = u_{k+1} + u_k \neq 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a &= -(L+c_o)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_k u_k) \,/\, (u_{k+1} + u_k) \\ &= -(r_{k+1} + r_k v_k) \,/\, (1 + v_k) , \end{aligned}$$

et toutes les dérivées d'une telle expression peuvent être estimées par des sommes de puissances de k avec des coefficients de la forme $(\partial^\alpha r_k) \,/\, (1+v_k)^\nu$. Mais grâce à (2.10)

$$|1 + v_k| \geqslant 1 - |v_k| \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\beta_o k^2}{12}\,(m_k + e_k(y) - t)\right\}$$

car $e^F \leqslant \frac{1}{2}$ pour $F \in]-\infty,-1]$ et $e^F \leqslant 1 + \frac{F}{4}$ pour $F \in [-2,0]$, et le théorème des accroissements finis donne pour $(y,t) \in D_k^2$

$$|(\partial^\alpha r_k(y,t)) \,/\, (m_k + e_k(y) - t)^\nu| \leqslant \sup\{|\partial^{\alpha+\beta} r_k(y,t)| \,/\, (y,t) \in D_k^2 \text{ et } |\beta| \leqslant \nu\}$$

puisque r_k est plate sur $t = m_k + e_k(y)$ (cf. (2.8)). On obtient donc en utilisant (2.9) que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{D_k^2} |\partial^\alpha a|\right) = 0 .$$

3. Sur $D_k^3 = \{(y,t) \,/\, m_k + e_k(y) < t \leqslant \delta_{k+1} + \frac{3}{4}\ell_{k+1}\}$ on procède comme sur D_k^2 en échangeant les rôles de u_k et u_{k+1}, et donc en utilisant v_k^{-1} à la place de v_k.

4. Sur $D_k^4 = \{(y,t) \,/\, \delta_{k+1} + \frac{3}{4}\ell_{k+1} \leqslant t \leqslant \delta_k\}$ on procède comme sur D_k^1 en échangeant les rôles de u_k et u_{k+1}.

CHAPITRE 3 : TECHNIQUES D'UNICITE.

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment prouver certaines inégalités de Carleman, et comment les utiliser pour obtenir l'unicité de Cauchy. En guise d'exemple, nous donnons une démonstration complète pour le cas elliptique (3.1).

Pour démontrer le théorème 1.2, nous suivrons le schéma proposé par Strauss et Trèves [24] sauf au paragraphe 3.2 où nous nous inspirons de Zuily [28]. Il faut dans la démonstration distinguer les étapes suivantes : tout d'abord une étape purement locale où nous établissons un lemme technique copié sur le cas elliptique (3.2) ; puis nous effectuons par deux fois un passage du local au global afin d'obtenir le théorème 1.2 sous la condition (R) d'abord dans $\mathbb{R}^2$ (3.3), puis dans $\mathbb{R}^n$ (3.4) ; enfin, c'est de nouveau en "globalisant" le résultat donné par le lemme du paragraphe 3.2 que nous obtenons le théorème 1.2 sous la condition (P) (3.5).

3.1. Le problème elliptique.

Un champ L de $\mathbb{R}^2$ est dit elliptique en x_0 si les champs réels $X = \mathcal{R}e\, L$ et $Y = \mathcal{I}m\, L$ sont linéairement indépendants en x_0. Pour toute fonction φ telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$, le problème associé à un champ elliptique est non caractéristique. Le champ L sera dit elliptique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ s'il est elliptique en chacun de ses points.

THEOREME 3.1. : Soit L un champ elliptique en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système

$$(3.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) < \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0.

<u>Démonstration</u> : Posons $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) + |x - x_0|^2$ et $\Psi(x) = -(\psi(x) - \varepsilon_0)^2$ pour un $\varepsilon_0 > 0$ que nous choisirons ultérieurement. Remarquons que pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \,/\, \psi(x) \leqslant \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$ (on a posé $\omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$).

Le point clé de la démonstration, que nous établirons plus loin, est l'obtention de l'inégalité suivante (dite inégalité de Carleman) : il existe des constantes $\tau_0 < \infty$ et $C < \infty$, et un opérateur R (du premier ordre) tels que $\forall v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, $\forall \tau \geqslant \tau_0$,

$$(3.2) \qquad \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leqslant C \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} \, |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|) .$$

Montrons pour le moment comment obtenir l'unicité à partir d'une telle inégalité. Des valeurs ε_1 et ε_2 étant fixées de telle manière que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, nous choisissons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\chi = 1$ sur K_{ε_1} et $\operatorname{supp} \chi \cap \omega_+ \subset K_{\varepsilon_0}$:

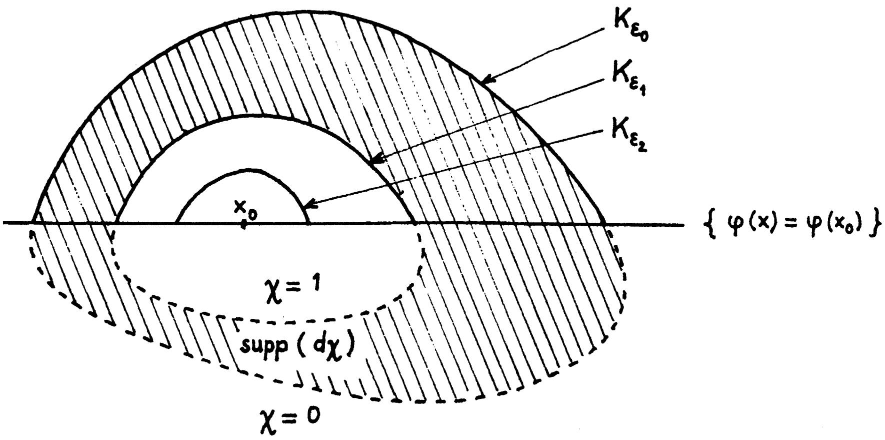


Fig. 3.1 : le support de χ et les compacts K_{ε_0}, K_{ε_1} et K_{ε_2}.

Soit u une solution du système (3.1) ; formons $v = \chi u$ le produit de u par χ : $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, donc on peut appliquer l'inégalité (3.2) à v. Mais d'une part

$$e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |u|^2 = \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 ,$$

et d'autre part, $(L+c_0)v = \chi(L+c_0)u + [L,\chi]u = (L\chi)u = 0$ sur K_{ε_1}, d'où

$$\int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|) = \int_{K_{\varepsilon_0} \setminus K_{\varepsilon_1}} e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|) \leqslant$$

$$\leqslant e^{2\tau(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|) .$$

L'inégalité (3.2) donne donc pour $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant C \, e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v| \, (|Rv| + |v|) ,$$

et comme $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2) < 0$, il suffit de laisser τ tendre vers l'infini pour savoir que $u = 0$ dans K_{ε_2} donc au voisinage de x_0.

<u>Démonstration de l'inégalité (3.2)</u> :

Comme $d\psi(x_0) = d\varphi(x_0) \neq 0$ et que L est elliptique en x_0, le problème (avec ψ) est non caractéristique et nous pouvons d'après le lemme 1.3 trouver des coordonnées $(y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telles que

1. $x_0 = (0,0)$
2. $\psi(x) = t$
3. $L + c_0 = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

Comme L est elliptique en x_o, nous supposerons que $b(0,0) > 0$ (sinon, changer y en -y), et prendrons ε_o suffisamment petit pour que $b \geq \delta > 0$ dans K_{ε_o}.

En vue d'écrire $w = e^{-\tau\Psi} v$, posons $L_\tau = e^{-\tau\Psi}(L+c_o)e^{\tau\Psi}$, et $c = c_1 + i\, c_2$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles ; d'après les points 2 et 3 ci-dessus, on calcule que :

$$L_\tau = \frac{\partial}{\partial t} - 2\tau(t-\varepsilon_o) + i\, b\frac{\partial}{\partial y} + c_1 + i\, c_2 = M + i\, N \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} M = \dfrac{\partial}{\partial t} + i\, c_2 \\[2ex] N = b\dfrac{\partial}{\partial y} + i\,(2\tau(t-\varepsilon_o) - c_1)\,. \end{cases}$$

Dans le découpage ci-dessus, nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe pour pouvoir effectuer des intégrations par parties. En effet, pour $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} w \subset K_{\varepsilon_o}$,

$$\mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} = \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{ib} Mw \overline{Nw} + \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{|Nw|^2}{b} \geq \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{ib} Mw \overline{Nw}$$

puisque $b > 0$ dans K_{ε_o} ; puis

$$\mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{ib} Mw\overline{Nw} = \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + i\, c_2 w\right) \left(\frac{1}{i}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} - \frac{2\tau(t-\varepsilon_o) - c_1}{b}\, \overline{w}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\tau(t-\varepsilon_o) - c_1}{b}\right) |w|^2 - \frac{1}{2}\int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{\partial c_2}{\partial y}\, |w|^2$$

par intégrations par parties. On obtient donc :

$$\int_{K_{\varepsilon_o}} |w|^2 \left[\tau\left(\frac{b-(t-\varepsilon_o)\partial b/\partial t}{b^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial (c_1/b)}{\partial t}\right)\right] \leq$$

$$\leq \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} \leq \int_{K_{\varepsilon_o}} |L_\tau w| \left|\frac{Nw}{b}\right|.$$

Choisissons donc ε_o assez petit pour que $|(t-\varepsilon_o)\,\partial b/\partial t| \leqslant \delta/2$ dans K_{ε_o}, puis τ_o suffisamment grand pour que $\left|\frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial(c_1/b)}{\partial t}\right| \leqslant \frac{\delta\,\tau_o}{2 \sup_{K_{\varepsilon_o}} b^2} = \frac{2\,\tau_o}{C_o}$ dans K_{ε_o} ; alors, pour $\tau \geqslant \tau_o$,

$$\frac{\tau}{C_o}\int_{K_{\varepsilon_o}} |w|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_o}} |L_\tau w|\,\left|\frac{Nw}{b}\right| .$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_o}$, posons $w = e^{-\tau\Psi} v$, et reportons cette expression dans l'inégalité précédente ; on obtient :

$$\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\Psi}\,|v|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_o}{\tau}\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\Psi}\,|(L+c_o)v|\,\left|\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{c_1}{b}\right)v\right| + C_o\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\Psi}\,|(L+c_o)v|\,\left|\frac{2(t-\varepsilon_o)}{b}\,v\right|$$

d'où l'inégalité (3.2) si nous posons $R = \frac{\partial}{\partial y} - i\frac{c_1}{b}$ et $C = \max\left\{\frac{C_o}{\tau_o}, C_o \sup_{K_{\varepsilon_o}}\left|\frac{2(t-\varepsilon_o)}{b}\right|\right\}$.

<u>Remarques</u> : Il existe pour les champs elliptiques des inégalités de Carleman meilleures que l'inégalité (3.2) ; nous avons fait ce choix parce que ce résultat s'étend à des champs non elliptiques comme nous le verrons plus loin. L'introduction du facteur $\frac{1}{b}$ dans les intégrales a pour but de remplacer $\int \frac{\partial w}{\partial t}\, b\,\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}$ qui nécessite des calculs pour être estimée, par $\int \frac{\partial w}{\partial t}\,\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}$ dont la partie imaginaire est nulle ; c'est là que nous utilisons l'ellipticité de L. Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer qu'un tel calcul est encore possible sous des hypothèses plus faibles sur L. Avant cela, donnons un corollaire du théorème 3.1.

<u>COROLLAIRE</u> <u>3.2.</u> : *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ dans lequel le champ L est elliptique. Si $u \in C^1(\Omega)$ vérifie $(L+c_o)u(x) = 0$ dans Ω et s'annule dans un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, alors u est nulle dans Ω.*

Démonstration : Notons $F = \operatorname{supp} u$ et supposons que $F \neq \mathring{F}$.

Alors il existe $x_0 \in F \setminus \mathring{F}$. Comme $x_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte centrée en x_0, $B(x_0,\delta)$, qui soit contenue dans Ω. Comme $x_0 \notin \mathring{F}$, il existe un point $x_1 \in B(x_0,\delta/2)$ tel que $x_1 \notin F$. Soit alors $\varepsilon = \sup\{r / B(x_1,r) \cap F = \emptyset\}$; on a $0 < \varepsilon \leqslant \delta/2$ puisque F est fermé et que $x_0 \in F$, donc $B(x_1,\varepsilon) \subset B(x_0,\delta) \subset \Omega$. De plus, par compacité il existe $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1,\varepsilon)}$.

Soit $\varphi(x) = |x - x_1|^2$; alors u est nulle dans $\{x \in \Omega / \varphi(x) \leqslant \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1,\varepsilon)}$ puisque $B(x_1,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ par définition de ε ; or le problème est elliptique en x_2 et $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$, donc par le théorème 3.1, $u=0$ au voisinage de x_2, ce qui contredit le fait que $x_2 \in F = \operatorname{supp} u$.

Cette contradiction prouve que le support de u est à la fois ouvert et fermé. Mais $\operatorname{supp} u \neq \Omega$ puisque $\omega \neq \emptyset$ est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme Ω est connexe, c'est que $\operatorname{supp} u = \emptyset$.

3.2. Un lemme technique.

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans $\mathbb{R}^2$ copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

LEMME 3.3. : Soient $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞. Supposons qu'il existe un voisinage convexe ω de $(y_0, \theta(y_0))$ tel que b soit positive sur $\omega_+ = \{(y,t) \in \omega / t \geqslant \theta(y)\}$ et $b(y_0,t_0) > 0$ pour un t_0 tel que $(y_0,t_0) \in \omega_+$. Alors pour toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + i\, b \dfrac{\partial u}{\partial y} + c\, u = 0 \ \text{ dans } \omega, \text{ et} \\[2mm] u = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- = \{(y,t) \in \omega / t \leqslant \theta(y)\} \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de $(y_0, \theta(y_0))$.

Démonstration : Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids ψ fabriqué de telle manière que l'opérateur $n = N/b$ soit encore bien défini.

Si $b(y_0,\theta(y_0)) > 0$, nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1 ; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que $b(y_0,\theta(y_0)) = 0$. Le t_0 de l'hypothèse vérifie donc $t_0 > \theta(y_0)$, et il existe un voisinage de (y_0,t_0) contenu dans ω_+ tel que $b \geqslant \delta > 0$ dans ce voisinage (et nous supposerons $\delta \leqslant 1$ dans la suite) ; nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme $]y_0-\alpha\, ,\, y_0+\alpha[\times]t_0-\alpha\, ,\, t_0+\alpha[$. Nous posons alors

$$\psi(y,t) = (y-y_0)^2 + \int_{\theta(y)}^{t} b(y,s)\ (t_0+\alpha-s)\, ds\,. \tag{3.4}$$

Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \alpha^2\delta$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leqslant \varepsilon\}$ est un compact tel que x_0 soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$, ce qui nous permettra de déduire l'unicité d'une inégalité de Carleman comme dans la démonstration du théorème 3.1. En effet, ε_1 et ε_2 étant fixés de telle façon que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, l'inégalité (3.5) (cf. plus loin) permet de montrer que si $u \in C^1(\omega)$ est une solution du problème (3.3),

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant C\, e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} \int_{K_{\varepsilon_0}} \left|\frac{\partial v}{\partial t} + i\, b\frac{\partial v}{\partial y} + c\, v\right| \left(\left|\frac{\partial v}{\partial y} + c_1\, v\right| + |v|\right)$$

et il suffit pour conclure de laisser tendre τ vers l'infini. Montrons donc cette inégalité de Carleman.

Soit $0 < \varepsilon_0 \leqslant \alpha^2\delta$ que nous fixerons plus loin. En vue d'écrire $w = v\exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^{t} c(y,s)ds)$, posons

$$L_\tau = \left[\exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^{t} c(y,s)ds)\right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\, b\, \frac{\partial}{\partial y} + c\right] \left[\exp(\tau\psi - \int_{t_0}^{t} c(y,s)ds)\right].$$

Grâce à (3.4), et en posant $\int_{t_o}^{t} \frac{\partial c}{\partial y}(y,s)ds = c_1(y,t) + i\,c_2(y,t)$ où c_1 et c_2 sont à valeurs réelles, on calcule que :

$$\begin{aligned} L_\tau &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + \tau\, b\,(t_o+\alpha-t) - c\right] + i\,b\left[\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial\psi}{\partial y} - (c_1 + i\,c_2)\right] + c \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\,\tau\, b\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\,b\,c_1\right] + i\,b\left[\frac{\partial}{\partial y} - i\,\tau\,(t_o+\alpha-t) - i\,c_2\right] \\ &= M + i\,N = M + i\,b\,n \end{aligned}$$

où nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe :

$$\begin{cases} M = \dfrac{\partial}{\partial t} + i\,\tau\, b\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - i\,b\,c_1 \\ n = \dfrac{\partial}{\partial y} - i\,\tau\,(t_o+\alpha-t) - i\,c_2 \,. \end{cases}$$

Alors, pour $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} w \subset K_{\varepsilon_o}$,

$$\mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{i} L_\tau w\,\overline{nw} = \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{i} Mw\,\overline{nw} + \int_{K_{\varepsilon_o}} b|n\,w|^2 \geqslant \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{i} Mw\,\overline{nw}$$

puisque $b \geqslant 0$ dans K_{ε_o} ; puis,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{i} Mw\,\overline{nw} &= \mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + i(\tau\, b\frac{\partial\psi}{\partial y} - b\,c_1)\, w\right]\left[\frac{1}{i}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y} + (\tau(t_o+\alpha-t) + c_2)\overline{w}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{\partial}{\partial t}(\tau(t_o+\alpha-t) + c_2)\,|w|^2 - \frac{1}{2}\int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{\partial}{\partial y}(\tau\, b\frac{\partial\psi}{\partial y} - b\,c_1)\,|w|^2 \end{aligned}$$

par intégrations par parties. On obtient donc

$$\begin{aligned} &\int_{K_{\varepsilon_o}} |w|^2\left[\tau\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right) + \left(\frac{\partial(b\,c_1)}{\partial y} - \frac{\partial\, c_2}{\partial t}\right)\right] \leqslant \\ &\leqslant 2\,\mathcal{R}e \int_{K_{\varepsilon_o}} \frac{1}{i} L_\tau w\,\overline{nw} \leqslant 2\int_{K_{\varepsilon_o}} |L_\tau w|\,|nw| \,. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas. Pour cela, posons $\theta_o = \sup\{t > \theta(y_o) \mid \forall s \in [\theta(y_o),t]\ , b(y_o,s) = 0\}$; alors $\theta(y_o) \leqslant \theta_o < t_o$. Si $\theta_o = \theta(y_o)$, alors pour tout voisinage de $(y_o,\theta(y_o))$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage ; en revanche, si $\theta_o > \theta(y_o)$, alors ψ est nulle sur $K_o = \{y_o\} \times [\theta(y_o),\theta_o]$, et c'est seulement pour tout voisinage de K_o qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans ce voisinage. Cette distinction de cas nous permet d'écrire :

1. Si $\theta_o = \theta(y_o)$, calculons $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ par la formule (3.4) :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2(y-y_o) + \int_{\theta(y)}^{t} \frac{\partial b}{\partial y}\ (y,s)\ (t_o+\alpha-s)ds + \theta'(y)\ b(y,\theta(y))\ (t_o+\alpha-\theta(y))$$

et donc $b(y_o,\theta(y_o)) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\ (y_o,\theta(y_o)) = 0$; d'où $\frac{\partial}{\partial y}\ (b\ \frac{\partial\psi}{\partial y})\ (y_o,\theta(y_o)) = 0$, ce qui fait qu'on peut trouver ε_o assez petit pour que $\left|\frac{\partial}{\partial y}\ (b\ \frac{\partial\psi}{\partial y})\right| \leqslant \frac{1}{2}$ dans K_{ε_o} .

2. Si $\theta_o > \theta(y_o)$, alors b est nulle sur K_o , et comme b est positive dans ω_+ , $\frac{\partial b}{\partial y}$ est également nulle dans $\{y_o\} \times]\theta(y_o),\theta_o]$, donc dans K_o ; d'où $\frac{\partial}{\partial y}\ (b\frac{\partial\psi}{\partial y}) = 0$ dans K_o , ce qui fait qu'on peut trouver ε_o assez petit pour que $\left|\frac{\partial}{\partial y}\ (b\frac{\partial\psi}{\partial y})\right| \leqslant \frac{1}{2}$ dans K_{ε_o} .

Le nombre $\varepsilon_o > 0$ étant choisi, oublions maintenant cette distinction des deux cas, et choisissons τ_o suffisamment grand pour que $\left|\frac{\partial(b\,c_1)}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial t}\right| \leqslant \frac{\tau_o}{4}$ dans K_{ε_o} ; alors, pour $\tau \geqslant \tau_o$

$$\frac{\tau}{4} \int_{K_{\varepsilon_o}} |w|^2 \leqslant 2 \int_{K_{\varepsilon_o}} |L_\tau w|\ |nw|\ .$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_o}$, posons $w = v \exp(-\tau\psi + \int_{t_o}^{t} c(y,s)ds)$ et reportons cette expression dans l'inégalité précédente ; on obtient :

$$\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\psi}\, e^{2\mathcal{R}e\int c}\, |v|^2 \leqslant \frac{8}{\tau}\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\psi}\, e^{2\mathcal{R}e\int c} \left|\frac{\partial v}{\partial t} + i\, b\frac{\partial v}{\partial y} + c\, v\right| \left|\frac{\partial v}{\partial y} + c_1\, v\right| +$$

$$+\, 8\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\psi}\, e^{2\mathcal{R}e\int c} \left|\frac{\partial v}{\partial t} + i\, b\frac{\partial v}{\partial y} + c\, v\right| \left|\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + i(t_o+\alpha-t)\right) v\right| .$$

Si donc nous posons $C_o = \exp\left(2 \sup\limits_{K_{\varepsilon_o}} |\mathcal{R}e \int_{t_o}^{t} c(y,s)ds|\right)$, puis

$$C = \max\left\{\frac{8\, C_o^2}{\tau_o} ,\ 8\, C_o^2 \sup_{K_{\varepsilon_o}} \left|\frac{\partial \psi}{\partial y} + i(t_o+\alpha-t)\right|\right\} ,$$

alors pour toute $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_o}$ et tout $\tau \geqslant \tau_o$,

$$\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\psi}\, |v|^2 \leqslant C\int_{K_{\varepsilon_o}} e^{-2\tau\psi} \left|\frac{\partial v}{\partial t} + i\, b\frac{\partial v}{\partial y} + c\, v\right| \left(\left|\frac{\partial v}{\partial y} + c_1\, v\right| + |v|\right). \tag{3.5}$$

3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R).

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est $\mathbb{R}^2$.

THEOREME 3.4. : Supposons que $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_o) = 2$ *en un point* $x_o \in \mathbb{R}^2$. *Si le problème est non caractéristique (en* x_o*), alors pour tout voisinage* ω *de* x_o *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\begin{cases} (L+c_o)\, u(x) = 0 \ \text{ dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 \ \text{ dans } \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) < \varphi(x_o)\} , \end{cases} \tag{3.6}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_o.

Démonstration : D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur $\mathbb{R}^2$ des coordonnées (y,t) telles que :

1. $x_o = (0,0)$.

2. $\varphi(x) - \varphi(x_o) = t$.

3. $L + c_o = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0,0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse rg $\mathcal{L}(x_o) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $(\frac{\partial}{\partial t})^k\, b(0,0) \neq 0$ tandis que $(\frac{\partial}{\partial t})^j\, b(0,0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y,t) \in\,]-Y,Y[\times]-T,T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y,t) = a(y,t)\ (t^k + a_{k-1}(y) t^{k-1} + \ldots + a_o(y))$$

avec $a, a_o, \ldots, a_{k-1}$ des fonctions C^∞ à valeurs réelles telles que $a(y,t) \neq 0$ dans $]-Y,Y[\times]-T,T[$, et $a_j(0) = 0$ pour $j = 0,\ldots,k-1$. Nous allons maintenant découper le domaine $]-Y,Y[\times]-T,T[$ en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3 ; ce découpage nous est donné par le lemme suivant :

<u>LEMME</u> <u>3.5.</u> : *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints* $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *dont la réunion est dense dans* $]-Y,Y[$, *et pour chaque* $i \in \mathbb{N}$, *un nombre fini de fonctions* C^∞ $\theta_{i,j} : I_i \to \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $y \in I_i$:

1. $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$.

2. $b(y,t) = 0 \Leftrightarrow \exists j$ *tel que* $t = \theta_{i,j}(y)$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Avec les notations précédentes, posons

$$P(y,t) = t^k + a_{k-1}(y)\, t^{k-1} + \ldots + a_o(y)$$

qui est un polynôme en t à coefficients réels et réguliers en y.

Soit $\mathcal{O}_k$ l'ouvert de $]-Y,Y[$ tel que $P(y,t)$ possède k racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_k$; notons $\mathcal{O}'_k$ l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_k$ dans $]-Y,Y[$. Si $\mathcal{O}'_k$ est vide, c'est que $\mathcal{O}_k$ est dense dans $]-Y,Y[$ et nous arrêtons là notre construction ; sinon $P(y,t)$ possède au plus $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}'_k$. Nous définissons alors $\mathcal{O}_{k-1}$ comme l'ouvert de $\mathcal{O}'_k$ tel que $P(y,t)$ possède exactement $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_{k-1}$, puis $\mathcal{O}'_{k-1}$ comme l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_{k-1}$ dans $\mathcal{O}'_k$. Et ainsi de suite ; l'ouvert $\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{O}_j$ est alors dense dans $]-Y,Y[$. Nous appelons $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les composantes connexes des ouverts $\mathcal{O}_j$.

Dans chaque intervalle I_i, les racines en t de $P(y,t)$ sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions C^∞ de y ; de plus, P étant à coefficients réels, θ est racine si et seulement si $\bar{\theta}$ est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand y décrit I_i. Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions C^∞ $\theta_{i,j} : I_i \to \mathbb{R}$ vérifiant 1. et 2.

<u>Démonstration du théorème 3.4 (fin)</u> : Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de $]-Y,Y[\times]0,T[$; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il existe un point $(y_o,t_o) \in \operatorname{supp} u$ avec $y_o \in I_i$ pour un $i \in \mathbb{N}$. L'intervalle I_i étant ouvert, il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $[y_o-\varepsilon, y_o+\varepsilon] \subset I_i$.

Posons $\psi(y,t) = t + t_o\left(\frac{y-y_o}{\varepsilon}\right)^2$ et considérons les paraboles P_τ d'équations $\psi(y,t) = \tau$. La fonction u est nulle en dessous de la parabole P_o puisque $P_o \subset \{t \leq 0\}$, mais P_{t_o} coupe le support de u et $P_{t_o} \cap \{t \geq 0\} \subset I_i \times [0,T[$. Par compacité, il existe donc un point $(y_1,t_1) \in \operatorname{supp} u \cap (I_i \times [0,T[)$ tel que $u = 0$ dans $\{(y,t) \in \omega \,/\, \psi(y,t) \leq \psi(y_1,t_1)\}$. Nous distinguerons alors deux cas :

1. Si $b(y_1,t_1) \neq 0$, le problème est elliptique en (y_1,t_1) et $d\psi(y_1,t_1) \neq 0$; donc par le théorème 3.1, $u=0$ au voisinage de (y_1,t_1) ce qui contredit le fait que $(y_1,t_1) \in \operatorname{supp} u$.

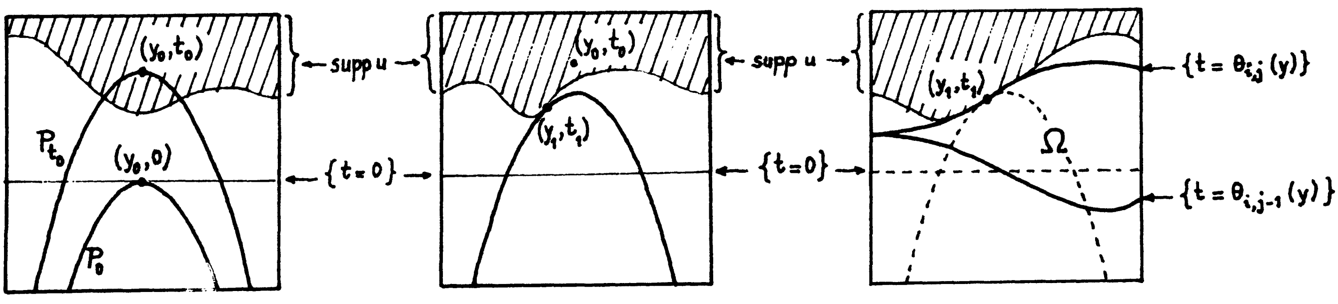
2. Si $b(y_1,t_1) = 0$, par le lemme 3.5 il existe j tel que $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$. En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

   α. $\Omega = \{(y,t) \in I_i \times \mathbb{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$ est un ouvert connexe ;

   β. b ne s'annule pas dans Ω, donc L est elliptique dans Ω .

Comme u s'annule dans $\{(y,t) \in \omega \,/\, \psi(y,t) < \psi(y_1,t_1)\}$, elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec Ω, qui est une partie ouverte non vide de Ω . Par le corollaire 3.2, u est nulle dans Ω .

De même, la fonction b ne s'annule pas dans $\{(y,t) \in I_i \times \mathbb{R} / \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$, et on peut donc supposer, quitte à changer y en -y, que b est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe w de (y_1,t_1) tel que b soit positive sur $w_+ = \{(y,t) \in w \,/\, t \geqslant \theta_{i,j}(y)\}$, strictement positive en un point $(y_1,t_2) \in w_+$, et tel que $u=0$ dans $w_- = \{(y,t) \in w \,/\, t \leqslant \theta_{i,j}(y)\}$. Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point (y_1,t_1) : nous obtenons u=0 au voisinage de (y_1,t_1), ce qui contredit le fait que $(y_1,t_1) \in \operatorname{supp} u$.



Les paraboles P_0 et P_{t_0}. Cas 1. Cas 2.

Fig. 3.2 : *les paraboles P_τ.*

3.4. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (R).

Dans ce paragraphe, l'espace est $\mathbb{R}^n$, n entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) ; le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales (y,t) telles que :

1. $x_0 = (0,0)$.

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$.

3. $L + c_0 = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert ω avec le domaine dans lequel la propriété (R) est vérifiée contient un voisinage de $(0,0)$ de la forme $v \times]-T,T[$ où $T > 0$ et v est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ suffisamment petit pour que $\operatorname{rg} \mathcal{L}_{|S} \leqslant 2$ avec $S = \{(y,0) \in \mathbb{R}^n / y \in v\}$. On a $\operatorname{rg} \mathcal{L}_{|S} \geqslant 1$ puisque $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{L}$, ce qui entraîne encore que :

1. Pour un point $(y_0,0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathcal{L}\,(y_0,0) = 1$, la variété intégrale passant par $(y_0,0)$ est $\{y_0\} \times]-T,T[$.

2. Pour un point $(y_0,0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathcal{L}\,(y_0,0) = 2$, si la courbe $\gamma \subset S$ est la trace sur S de la variété intégrale passant par $(y_0,0)$, cette dernière est $\gamma \times]-T,T[$.

Comme la réunion des traces sur S des variétés intégrales de $\mathcal{L}$ est égale à S par la propriété (R), la réunion des variétés intégrales de $\mathcal{L}$ coupant S est égale au voisinage $v \times]-T,T[$ tout entier.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point $(y_0,t_0) \in v \times]0,T[$ tel que $u(y_0,t_0) \neq 0$. Ce point (y_0,t_0) est donc situé sur une variété intégrale de $\mathcal{L}$ coupant S. Si (y_0,t_0) est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que $b(y_0,t)=0$ pour tout $t \in]-T,T[$, et u vérifie donc l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y_0,t)+c(y_0,t)\,u(y_0,t)=0 \quad \text{pour} \quad t\in]-T,T[$$

où y_0 n'est plus qu'un paramètre ; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que $u(y_0,t)=0$ pour $t \in]0,T[$ puisque c'est vrai pour $t\in]-T,0]$, ce qui contredit le fait que $u(y_0,t_0) \neq 0$.

Il s'ensuit donc que (y_0,t_0) est sur une variété intégrale de $\mathcal{L}$ de dimension 2 que nous noterons $\mathcal{V}$. Utilisons (z,t) comme coordonnées sur $\mathcal{V}$ où z est l'abscisse curviligne sur $\mathcal{V}\cap S$, et désignons par z_0 l'abscisse du point (y_0,t_0) dans les coordonnées (z,t). Alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $[z_0-\varepsilon\,,\,z_0+\varepsilon]\times]-T,T[$ soit contenu dans $\mathcal{V}$. Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons $\psi(z,t) = t+t_0(\frac{z-z_0}{\varepsilon})^2$ et introduisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z,t)=\tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1,t_1) du support de la trace de u sur $\mathcal{V}$ tel que $u=0$ dans $\{(z,t)\in \mathcal{V}/\psi(z,t)\leqslant\psi(z_1,t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1,t_1) et $\operatorname{rg}\mathcal{L}\,(z_1,t_1)=2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathcal{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1,t_1) sur $\mathcal{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1,t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathcal{V}$.

Cette dernière contradiction montre qu'il n'existe pas de point $(y_0,t_0)\in v\times]0,T[$ où u ne s'annule pas ; nous avons donc obtenu

$$u=0 \quad \text{dans} \quad v\times]-T,T[.$$

3.5. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (P).

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y,t)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et un nombre $T>0$ tels que

1. $x_0 = (0,0)$.

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$.

3. $L + c_0 = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ dans $v \times]-T,T[$ à un facteur non nul près.

4. $v \times]-T,T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0,t_0) \in v \times]0,T[$ tel que $u(y_0,t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0,t) = 0$ pour tout $t \in]0,t_0[$, l'équation se réduirait à

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y_0,t) + c(y_0,t)\, u(y_0,t) = 0$$

où y_0 n'est plus qu'un paramètre. La théorie des équations différentielles ordinaires nous conduirait à conclure que $u(y_0,t_0) = 0$ ce qui est contradictoire.

Il existe donc $t_1 \in]0,t_0[$ tel que $b(y_0,t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y,t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = \frac{b(y,t_1)}{|b(y,t_1)|}$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0. Le champ réel $d(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ engendrant une algèbre de Lie de rang constant égal à 1 autour de y_0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, il existe par le théorème de Frobenius (cf. 1.2) une courbe intégrale de ce champ, que nous noterons γ, passant par y_0.

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0,T[$, nous avons $b(y,t) = |b(y,t)|\, d(y)$ pour tout $(y,t) \in \gamma \times]0,T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0,T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T,T[$ qui contient le point (y_0,t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z,t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0,t_0).

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\Upsilon \times]-T,T[$ se présente de la façon suivante :

1. $\mathcal{V} =]z_o-\varepsilon\, , z_o+\varepsilon[\times]-T,T[\subset \Upsilon \times]-T,T[$;

2. $u(z,t_o) \neq 0$ pour $z \in]z_o-\varepsilon\, , z_o+\varepsilon[$;

3. $L + c_o = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(z,t) \frac{\partial}{\partial z} + c(z,t)$ dans $\mathcal{V}_+ =]z_o-\varepsilon\, , z_o+\varepsilon[\times [0,T[$;

4. $b(z,t) \geqslant 0$ dans $\mathcal{V}_+$ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z,t) = t + t_o(\frac{z-z_o}{\varepsilon})^2$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z,t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2,t_2) du support de la trace de u sur $\mathcal{V}_+$ tel que $t_2 < t_o$ et $u = 0$ dans $\{(z,t) \in \mathcal{V} / \psi(z,t) \leqslant \psi(z_2,t_2)\}$.

Comme tout-à-l'heure, si on avait $b(z_2,t) = 0$ pour tout $t \in]t_2,T[$, on prouverait que $u(z_2,t_o) = 0$ ce qui contredit le point 2. ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2,T[$ tel que $b(z_2,t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure :

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta\,(z) = t_2 + t_o(\frac{z_2-z_o}{\varepsilon})^2 - t_o(\frac{z-z_o}{\varepsilon})^2$ (en sorte que $t \geqslant \theta(z) \Longleftrightarrow \psi(z,t) \geqslant \psi(z_2,t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2,t_2) contenant (z_2,t_3) (où $b > 0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z,t) \in w \mid t \geqslant \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z,t) \in w \mid t \leqslant \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2,t_2) ce qui contredit le fait que (z_2,t_2) est un point du support de la trace de u sur $\mathcal{V}_+$.

2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2,t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

CHAPITRE 4 : ETUDE D'UN MODELE DANS $\mathbb{R}^2$.

Lorsque nous supprimons les hypothèses "techniques", le théorème 1.2 devient faux ; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits : le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9,th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans $\mathbb{R}^2$ (ce qui assure que $\operatorname{rg} \mathcal{L} \leqslant 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite ; c'est l'objet de ce chapitre.

Pour traiter le problème non caractéristique général dans $\mathbb{R}^2$, nous savons d'après le lemme 1.3 qu'il suffit d'étudier le champ $L = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \frac{\partial}{\partial y}$ où b est à valeurs réelles. Nous allons examiner ici le cas où la fonction b est indépendante de y, c'est-à-dire que L prend la forme

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(t) \frac{\partial}{\partial y} .$$

Pour un tel modèle, la condition (R) dans un voisinage de l'origine entraîne la condition (P) dans un ouvert $\mathring{\Omega}_+$, Ω étant un autre voisinage de l'origine, si bien que le théorème 1.2 s'énonce plus simplement de la façon suivante : s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $b(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $]0,T[$, alors il y a unicité (au sens de la conclusion du théorème 1.2, et pour tout terme c d'ordre zéro).

Dans le lemme ci-dessous (que nous ne démontrons pas car nous ne l'utiliserons pas), nous analysons la condition précédente.

<u>LEMME 4.1.</u> : *Soient $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et $B(t) = \int_0^t b(s)\, ds$. Alors il est équivalent de dire :*

(i) $\forall T > 0$, b change de signe dans l'intervalle $]0,T[$.

(ii) Il existe une suite de réels δ_k décroissante et tendant vers 0 telle que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], \quad (-1)^k B(\delta_k) \geqslant (-1)^k B(t), \text{ et} \\ (-1)^k B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) > 0 . \end{cases}$$

Dans cette situation, nous allons montrer que l'on peut modifier le terme d'ordre zéro c en sorte que l'opérateur $L+c$ ne possède pas la propriété d'unicité, à condition toutefois de faire l'hypothèse supplémentaire que la suite $(-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$ ne tend pas trop vite vers zéro.

<u>THEOREME</u> <u>4.2.</u> : *Soient $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ deux fonctions C^∞ ; posons $B(t) = \int_0^t b(s)\,ds$, et supposons qu'il existe une suite de réels δ_k décroissante et tendant vers 0, et un réel $\varepsilon_1 > 0$ tels que si l'on pose $\varepsilon_{k+1} = \exp[-\varepsilon_k^{-1}]$ pour tout $k \geqslant 1$ on ait*

$$\begin{cases} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], \quad (-1)^k B(\delta_k) \geqslant (-1)^k B(t), \text{ et} \\ (-1)^k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \geqslant \varepsilon_k . \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage ω de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, $u \in C^\infty(\omega)$ et $a \in C^\infty(\omega)$ tels que

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} + i\, b(t) \dfrac{\partial}{\partial y} + c(y,t) + a(y,t)\right] u(y,t) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ \operatorname{supp} u = \omega_+ = \{(y,t) \in \omega \mid t \geqslant 0\}, \text{ et} \\ \operatorname{supp} a \subset \omega_+ . \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : Le lecteur vérifiera facilement que la fonction

$$\begin{cases} b(t) = e^{-1/t} \sin \frac{1}{t} & \text{pour } t > 0 , \\ b(t) = 0 & \text{pour } t \leqslant 0 \end{cases}$$

satisfait les hypothèses du théorème (on prendra $\delta_k = \frac{1}{k\pi}$).

La démonstration du théorème 4.2 s'effectue en deux étapes : d'abord nous construisons cinq suites de paramètres λ_k, m_k, p_k, q_k, γ_k possédant de bonnes propriétés asymptotiques ; la deuxième étape, plus standard, utilise ces paramètres pour construire les fonctions u et a par une technique de recollement analogue à la méthode de Cohen [8] (cf. aussi les calculs du paragraphe 2.4).

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*4.3.*</u> *: Sous les hypothèses du théorème 4.2, il existe cinq suites de réels positifs λ_k, m_k, p_k, q_k et γ_k telles que*

$$(4.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta_{k+1} < p_k < m_k < q_k < \delta_k\,, \\ \forall t \in [\delta_{k+1}, p_k]\,,\ (-1)^k\,(B(t)-B(m_k)) \leqslant -\frac{1}{2}\,(-1)^k\,(B(m_k)-B(\delta_{k+1})) \\ \text{et}\quad (-1)^k\,(B(t)-B(\delta_k)) \leqslant -\frac{7}{8}\,(-1)^k\,(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\,, \\ \text{et}\quad \forall t \in [q_k, \delta_k]\,,\ (-1)^k\,(B(t)-B(m_k)) \geqslant \frac{1}{2}\,(-1)^k\,(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))\,. \end{array}\right.$$

$$(4.3)\quad \left[-\gamma_k + (-1)^k\,\lambda_k\,(B(m_k)-B(\delta_k))\right] = \left[-\gamma_{k+1} + (-1)^{k+1}\,\lambda_{k+1}\,(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))\right].$$

$$(4.4)\quad \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}\lambda_k}{\gamma_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(\delta_k-q_k)}{\gamma_{k+1}} = 0\,.$$

$$(4.5)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(\lambda_k+\lambda_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))} = \\ = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(\delta_k-q_k)}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))} = 0\,. \end{array}\right.$$

<u>Démonstration</u> : en quatre parties.

1. <u>Construction de la suite λ_k</u>.

Nous choisissons $\lambda_k = \varepsilon_k^{-3}$; on peut alors écrire

$$\frac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\lambda_k |B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})|} \leqslant \frac{-3 \operatorname{Log} \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^{-3} \ \varepsilon_k} = -3\, \varepsilon_k^2 \ \operatorname{Log} \varepsilon_{k+1} = 3\, \varepsilon_k \ , \text{ d'où}$$

(4.6) $$\lim_{k \to \infty} \frac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} = 0 \, .$$

En outre, comme $\varepsilon_{k+1}^{-3} \geqslant e^3\, \varepsilon_k^{-3}$ (car $e^x \geqslant e\, x \Rightarrow (e^x)^3 \geqslant e^3 x^3$), nous savons que

(4.7) $$\lambda_{k+1} \geqslant 2\, \lambda_k \, .$$

2. <u>Construction des suites m_k, p_k et q_k.</u>

En utilisant (4.7), nous pouvons écrire

$$0 < \frac{1}{2} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} (-1)^k \ (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) < (-1)^k \ (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$$

et donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, nous obtenons l'existence d'un point $m_k \in]\delta_{k+1}, \delta_k[$ tel que

(4.8) $$(-1)^k \ (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} (-1)^k \ (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \ .$$

Nous posons ensuite :

$$\begin{cases} p_k = \sup \{ p > \delta_{k+1} \mid \forall t \in [\delta_{k+1}, p] \ , \ (-1)^k \ (B(t) - B(\delta_{k+1})) \leqslant \frac{1}{2} \ (-1)^k \ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\} \\ q_k = \inf \{ q < \delta_k \mid \forall t \in [q, \delta_k] \ , \ (-1)^k \ (B(t) - B(\delta_{k+1})) \geqslant \frac{3}{2} \ (-1)^k \ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\} \ . \end{cases}$$

La propriété (4.2) se déduit facilement de cette définition et de (4.8). Nous aurons en outre besoin d'estimations sur $p_k - \delta_{k+1}$ et $\delta_k - q_k$. Or $B(p_k) - B(\delta_{k+1}) = \frac{1}{2} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$; par le théorème des accroissements finis, il existe donc $\theta_k \in]\delta_{k+1}, p_k[$ tel que

$$(p_k - \delta_{k+1})\ b(\theta_k) = \frac{1}{2}\ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$$

et comme b est bornée au voisinage de 0, on obtient pour un $C > 0$

$$(p_k - \delta_{k+1}) \geqslant C\ (-1)^k\ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\ .$$

En multipliant cette inégalité par λ_{k+1} et en utilisant (4.8) il vient

$$\lambda_{k+1}(p_k - \delta_{k+1}) \geqslant \frac{C}{2}\ (-1)^k\ \lambda_k\ (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))\ .$$

Enfin, λ_k ayant été choisi de telle sorte que $(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))$ tende vers l'infini avec k, on a pour k assez grand

$$|\mathrm{Log}\ (p_k - \delta_{k+1})| \leqslant \mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}\ .$$

De même, on calcule que $B(\delta_k) - B(q_k) = (\frac{2\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{3}{2})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$ d'où l'existence d'un $\theta_k \in]q_k, \delta_k[$ tel que

$$(\delta_k - q_k)\ b(\theta_k) = (\frac{2\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \frac{3}{2})\ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$$

puis en utilisant (4.7)

$$(\delta_k - q_k) \geqslant C\ (-1)^k\ (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$$

et enfin, nous concluons comme dans le cas précédent ; nous avons donc obtenu

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \text{pour } k \text{ suffisamment grand ,} \\ |\mathrm{Log}\ (p_k - \delta_{k+1})| \leqslant \mathrm{Log}\ \lambda_{k+1} \quad \text{et} \\ |\ \mathrm{Log}\ (\delta_k - q_k)\ | \leqslant \mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}\ . \end{cases}$$

3. Construction de la suite γ_k.

Pour construire γ_k nous prenons la propriété (4.3) comme définition, c'est-à-dire que nous posons

$\gamma_1 = 0$, puis pour $k \geqslant 1$,

$\gamma_{k+1} = \gamma_k - (-1)^k \lambda_k (B(m_k) - B(\delta_k)) + (-1)^{k+1} \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))$.

De (4.7) et (4.8) nous tirons

$$(-1)^k \; (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \leqslant \frac{1}{4} (-1)^k \; (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \text{ , d'où}$$

$$(-1)^k \; (B(\delta_k) - B(m_k)) \geqslant \frac{3}{4} (-1)^k \; (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \text{ , puis}$$

$$\frac{(-1)^{k+1} \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1}))}{(-1)^k \lambda_k (B(m_k) - B(\delta_k))} \leqslant \frac{2}{3} .$$

En reportant cette estimation dans la définition de γ_k, on obtient

$$\gamma_{k+1} \geqslant \gamma_k + \frac{1}{2} (-1)^k \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) . \tag{4.10}$$

4. Calcul des limites (4.4) et (4.5).

De (4.8) et (4.10) nous tirons que

$$\gamma_{k+1} \geqslant \frac{1}{2} (-1)^k \lambda_{k+1} (B(m_k) - B(\delta_{k+1})) = \frac{1}{4} (-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})) \text{ , d'où}$$

$$\frac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} \leqslant \frac{4 \operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{(-1)^k \lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} .$$

Grâce à (4.6), nous en déduisons que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\operatorname{Log} \lambda_k}{\gamma_k} = 0 .$$

De plus, en utilisant (4.9) nous pouvons écrire

$$\left| \frac{\operatorname{Log}(p_k - \delta_{k+1})}{\lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leqslant \left| \frac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\lambda_k (B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \text{ , et}$$

$$\left| \frac{\operatorname{Log} (\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} \right| \leqslant \frac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}}$$

d'où (4.4) en utilisant (4.6) et le résultat précédent.

Grâce à (4.7) et (4.9) on a

$$\begin{cases} \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ (\lambda_k + \lambda_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leqslant \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}\ (1 + o(1))}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| , \\ \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ (p_k - \delta_{k+1})}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leqslant \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| , \quad \text{et} \\ \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ (\delta_k - q_k)}{(\lambda_k + \lambda_{k+1})(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \leqslant \left| \dfrac{\mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} \right| \end{cases}$$

puis d'après (4.8),

$$\frac{\mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))} = \frac{2\ \mathrm{Log}\ \lambda_{k+1}}{\lambda_k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))}$$

ce qui implique (4.5) en utilisant (4.6).

<u>Démonstration du théorème 4.2.</u>

Etant donnée une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant : $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $\chi = 1$ sur $[1, +\infty[$, nous définissons dans $\omega = \mathbb{R} \times]-\infty, \delta_1[$ les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u_k(y,t) = \exp\left[-\gamma_k + (-1)^k \lambda_k\ (B(t) - B(\delta_k) + i\,y) \right] \\ \begin{cases} u_o(y,t) = \chi\left(\dfrac{t-\delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) u_k(y,t) + \chi\left(\dfrac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right) u_{k+1}(y,t) & \text{pour} \quad t \in [\delta_{k+1}, \delta_k] , \\ u_o(y,t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_o(y,t) = \left(\dfrac{\partial u_o}{\partial t}\ (y,t) + i\, b(t)\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y}\ (y,t)\right) / u_o(y,t) & \text{si} \quad u_o(y,t) \neq 0 , \\ a_o(y,t) = 0 & \text{si} \quad u_o(y,t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1(y,t) = b(t) \displaystyle\int_0^t \frac{\partial c}{\partial y}(y,s)\,ds & \text{pour} \quad t > 0 , \\ a_1(y,t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 . \end{array}\right.$$

Puis enfin nous posons

$$\left\{\begin{array}{l} a(y,t) = -a_o(y,t) + i\, a_1(y,t) , \quad \text{et} \\ u(y,t) = u_o(y,t) \exp\left[- \displaystyle\int_0^t c(y,s)\,ds\right] . \end{array}\right.$$

Comme $\exp\left[- \int_0^t c(y,s)\,ds\right]$ est C^∞ et non nulle, il suffit, pour montrer que a et u sont solutions du problème (4.1), d'établir les quatre points suivants :

1. <u>La fonction u_o est C^∞ dans ω</u>.

La fonction u_o est clairement C^∞ pour $t > 0$ ainsi que pour $t < 0$. Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de u_o pour les petites valeurs de t.

Comme $(-1)^k\,(B(t) - B(\delta_k)) \leqslant 0$ et $(-1)^{k+1}\,(B(t) - B(\delta_{k+1})) \leqslant 0$ pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, et que $\chi\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) = 1$ pour $t \in [p_k, \delta_k]$, on peut écrire les estimations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left|\partial^\alpha\left[\chi\left(\dfrac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) u_k(y,t)\right]\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\beta\, \lambda_k^{|\beta|}\, e^{-\gamma_k} & \text{pour} \quad t \in [p_k, \delta_k] , \quad \text{et} \\ \left|\partial^\alpha\left[\chi\left(\dfrac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right) u_{k+1}(y,t)\right]\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma}\, (\delta_k - q_k)^{-|\gamma|}\, \lambda_{k+1}^{|\beta|}\, e^{-\gamma_{k+1}} & \text{pour} \quad t \in [\delta_{k+1}, \delta_k] \end{array}\right.$$

où les constantes C_β et $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α , de χ et de b , mais pas de k. Or le logarithme de chacun de ces termes vaut

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Log} C_\beta + |\beta| \operatorname{Log} \lambda_k - \gamma_k = \gamma_k\left[\dfrac{\operatorname{Log} C_\beta}{\gamma_k} + |\beta| \dfrac{\operatorname{Log} \lambda_k}{\gamma_k} - 1\right] , \quad \text{et} \\ \operatorname{Log} C_{\beta\gamma} - |\gamma| \operatorname{Log}(\delta_k - q_k) + |\beta| \operatorname{Log} \lambda_{k+1} - \gamma_{k+1} = \\ \qquad = \gamma_{k+1}\left[\dfrac{\operatorname{Log} C_{\beta\gamma}}{\gamma_{k+1}} - |\gamma| \dfrac{\operatorname{Log}(\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} + |\beta| \dfrac{\operatorname{Log} \lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} - 1\right] \end{array}\right.$$

et tend vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4) ; donc les quantités de départ tendent vers 0.

Reste à estimer le terme $\partial^\alpha \left[\chi \left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) u_k(y,t)\right]$ pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$; dans ce domaine, $(-1)^k (B(t)-B(\delta_k)) \leqslant -\frac{7}{8}(-1)^k (B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))$ d'après (4.2), d'où l'estimation

$$\left|\partial^\alpha\left[\chi\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) u_k(y,t)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma}\, (p_k-\delta_{k+1})^{-|\gamma|}\, \lambda_k^{|\beta|} \exp\left[-\gamma_k - \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k\, (B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right]$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α, de χ et de b, mais pas de k ; comme ci-dessus, on calcule le logarithme des termes de cette somme

$$\mathrm{Log}\, C_{\beta\gamma} - |\gamma|\, \mathrm{Log}(p_k-\delta_{k+1}) + |\beta|\, \mathrm{Log}\,\lambda_k - \left[\gamma_k + \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k\, (B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[\gamma_k + \frac{7}{8}(-1)^k \lambda_k\, (B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right]\left[\left|\frac{\mathrm{Log}\, C_{\beta\gamma}}{\gamma_k}\right| + |\gamma| \left|\frac{8\,\mathrm{Log}\,(p_k-\delta_{k+1})}{7\lambda_k\,(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| + |\beta|\, \frac{\mathrm{Log}\,\lambda_k}{\gamma_k} - 1\right]$$

et cette expression tend à son tour vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4). Nous avons donc démontré :

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\mathbb{R}\times[\delta_{k+1},\delta_k]} |\partial^\alpha u_o(y,t)|\right) = 0 .$$

2. <u>Le support de a est contenu dans $\mathrm{supp}\, u_o = \{(y,t)\in\omega \,/\, t\geqslant 0\}$.</u>

Posons pour $t\in[\delta_{k+1},\delta_k]$

$$v_k(y,t) = \frac{u_k(y,t)}{u_{k+1}(y,t)} .$$

En utilisant (4.3), on peut écrire :

$$v_k(y,t) = \exp\Big[(-1)^k \ (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \ (B(t) - B(m_k) + i\,y) \Big]. \tag{4.11}$$

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, on a grâce à (4.2) $|v_k| < 1$, et comme

$$u_o(y,t) = \chi\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) u_k(y,t) + u_{k+1}(y,t) =$$

$$= u_{k+1}(y,t)\left[1 + \chi\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) v_k(y,t)\right],$$

on a $u_o(y,t) \neq 0$. De même pour $t \in [q_k, \delta_k]$, $|v_k^{-1}| < 1$ et

$$u_o(y,t) = u_k(y,t) + \chi\left(\frac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right) u_{k+1}(y,t) =$$

$$= u_k(y,t) \left[1 + \chi\left(\frac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right) \Big(v_k(y,t)\Big)^{-1}\right] \neq 0.$$

Enfin, pour $t \in [p_k, q_k]$, $u_o(y,t) = u_k(y,t) + u_{k+1}(y,t)$, et donc $u_o(y,t) = 0$ équivaut à $v_k(y,t) = -1$, ce qui entraîne d'après (4.11) que

$$\exp\Big[(-1)^k \ (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \ i\,y\Big] = -1,$$

soit $y \in \left\{\frac{(2n+1)\pi}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}$; cet ensemble étant discret, on obtient que $\operatorname{supp} u_o = \{(y,t) \in \omega \mid t \geq 0\}$.

Par définition de a_o, $\operatorname{supp} a_o \subset \operatorname{supp} u_o$, et par définition de a_1, $\operatorname{supp} a_1 \subset \{(y,t) \in \omega \mid t \geq 0\}$, d'où finalement

$$\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u_o .$$

3. <u>La fonction a_o est C^∞ dans ω</u>.

Pour tout k, on a $\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\,b\frac{\partial u_k}{\partial y} = 0$, et donc pour $t \in [p_k, q_k]$,

$$u_o(y,t) = u_k(y,t) + u_{k+1}(y,t) \Longrightarrow a_o(y,t) = \frac{\partial u_o}{\partial t}(y,t) + i\, b(t) \frac{\partial u_o}{\partial y}(y,t) = 0 \ ;$$

pour $t \in [q_{k+1}, p_k]$, $u_o(y,t) \neq 0$ donc

$$a_o(y,t) = \left(\frac{\partial u_o}{\partial t}(y,t) + i\, b(t) \frac{\partial u_o}{\partial y}(y,t)\right) / u_o(y,t)$$

est une fonction C^∞. Il en résulte que la fonction a_o est C^∞ dans les domaines d'équations $t > 0$ et $t < 0$.

Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de a_o pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$ et $t \in [q_k, \delta_k]$ (a_o est nulle en dehors de ces intervalles).

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, $|v_k(y,t)| < 1$, et on peut écrire

$$a_o(y,t) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\, b(t) \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\chi\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) u_k(y,t) + u_{k+1}(y,t)\right)}{\chi\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) u_k(y,t) + u_{k+1}(y,t)} =$$

$$= \frac{(p_k - \delta_{k+1})^{-1}\, \chi'\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) v_k(y,t)}{1 + \chi\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) v_k(y,t)} .$$

Pour montrer que les dérivées de cette expression tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour les fonctions

$$\begin{cases} w_k(y,t) = (p_k - \delta_{k+1})^{-1}\, \chi'\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) v_k(y,t) \quad \text{et} \\[2ex] x_k(y,t) = \chi\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) v_k(y,t) . \end{cases}$$

En utilisant (4.2) et (4.11), on obtient les majorations

$$\begin{cases} |\partial^\alpha w_k(y,t)| \leqslant \\ \leqslant \sum\limits_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma} \, (p_k-\delta_{k+1})^{-1-|\gamma|} \, (\lambda_k+\lambda_{k+1})^{|\beta|} \exp\left[-\frac{1}{2}\,(-1)^k\,(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))\right] \\ |\partial^\alpha x_k(y,t)| \leqslant \\ \leqslant \sum\limits_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma} \, (p_k-\delta_{k+1})^{-|\gamma|} \, (\lambda_k+\lambda_{k+1})^{|\beta|} \exp\left[-\frac{1}{2}\,(-1)^k\,(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))\right] \end{cases}$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α, de X et de b, mais pas de k. Comme tout-à-l'heure, on montre que ces expressions tendent vers 0 en calculant leurs logarithmes et en utilisant (4.5). Nous obtenons donc

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{\mathbb{R}\times[\delta_{k+1},p_k]} |\partial^\alpha a_o(y,t)| \right) = 0 \, .$$

De même, pour $t\in[q_k,\delta_k]$, on peut écrire à l'aide de (4.2) et (4.11)

$$\begin{cases} a_o(y,t) = \dfrac{(q_k-\delta_k)^{-1}\,X'\left(\dfrac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right)\left(v_k(y,t)\right)^{-1}}{1+X\left(\dfrac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right)\left(v_k(y,t)\right)^{-1}} \, , \quad \text{et} \\ \mathrm{Log}\left| (v_k(y,t))^{-1} \right| \leqslant -\frac{1}{2}\,(-1)^k\,(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1})) \end{cases}$$

puis on montre comme ci-dessus que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{\mathbb{R}\times[q_k,\delta_k]} |\partial^\alpha a_o(y,t)| \right) = 0 \, .$$

4. La fonction a_1 est C^∞ dans ω.

Pour obtenir cette dernière propriété, il suffit de remarquer que toutes les dérivées de la fonction b tendent vers 0 lorsque $t>0$ tend vers 0. En effet, comme pour tout k $b(\delta_k) = 0$, nous obtenons par application répétée du théorème de Rolle que pour tous j et k entiers positifs, il existe un point $\theta_k^j \in]\delta_{k+j}, \delta_k[$ tel que

$$(\frac{\partial}{\partial t})^j \, b(\theta_k^j) = 0 \; ;$$

la limite annoncée en résulte.

CHAPITRE 5 : LE PROBLEME CARACTERISTIQUE.

Dans ce chapitre, nous donnons deux résultats : l'un d'unicité, l'autre de non-unicité.

Au paragraphe 5.1, nous regardons ce qui subsiste du théorème 1.2 lorsque nous supprimons l'hypothèse que le problème est non caractéristique. Le résultat d'unicité (théorème 5.2) résultera d'un théorème sur la géométrie du support d'une solution (théorème 5.1) qui est dû à J-M. Bony (cf. Sjöstrand [22, th. 8.7]).

Puis au paragraphe suivant (5.2) nous construisons un contre-exemple à l'unicité sous la condition que le rang de $\mathcal{L}$ est constant. Ce dernier résultat est dû à Saint Raymond [21, th. 2.9].

5.1. Résultat d'unicité lorsque $\operatorname{rg}\mathcal{L} \leqslant 2$.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2, mais sans nous donner de fonction φ ni supposer que le problème est non caractéristique. Cela signifie que nous sommes dans l'un des deux cas suivants :

1. L vérifie la condition (R) dans un ouvert Ω et $\operatorname{rg}\mathcal{L}_{|\Omega} \leqslant 2$ (cf. 1.2).
2. L vérifie la condition (P) dans un ouvert Ω (cf. 1.2).

Donnons-nous de plus une solution $u \in C^1(\Omega)$ de l'équation $(L+c_0)u(x) = 0$ dans Ω. Alors, pour paraphraser le théorème 1.2, chaque fois que l'on trouvera $x_0 \in \Omega$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles tels qu'il existe un voisinage ω de x_0 avec

$$x_0 \in (\operatorname{supp} u \cap \omega) \subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\},$$

on pourra affirmer que le problème en x_0 est caractéristique, c'est-à-dire que $L\varphi(x_0) = 0$ ou encore que $X\varphi(x_0) = Y\varphi(x_0) = 0$ (si $X = \mathcal{R}e\,L$ et $Y = \mathcal{I}m\,L$). Cette remarque nous donne une relation entre les champs réels X et Y et le fermé $F = \operatorname{supp} u$ dont nous allons analyser les conséquences dans le prochain théorème.

Avant de l'énoncer, rappelons qu'un champ réel X (éventuellement dégénéré) défini dans un ouvert Ω vérifie toujours la propriété (R). En effet, pour les points x où X s'annule, $\{x\}$ est une variété intégrale, et dans l'ouvert où X ne s'annule pas, le rang est constamment égal à 1 d'où la propriété grâce au théorème de Frobenius (cf. 1.2). Si $X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, nous noterons $e^{tX}x_o$ la solution $x(t)$ du système différentiel ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt}(t) = a_j(x(t)) \\ x(0) = x_o . \end{cases}$$

Si $X = 0$ en x_o, $e^{tX}x_o$ reste égal à x_o, tandis que si $X \neq 0$ en x_o, $e^{tX}x_o$ décrit la courbe intégrale de X passant par x_o.

__THEOREME__ __5.1.__ : Soient X un champ réel défini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et $F \subset \Omega$ une partie fermée dans Ω. Supposons que pour tout $x_o \in \Omega$ et toute $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles,

$$[\exists\, \omega \text{ ouvert de } \Omega : x_o \in (F \cap \omega) \subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geq \varphi(x_o)\}] \Rightarrow X\varphi(x_o) = 0 .$$

Alors, pour tout compact K de Ω, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$x_o \in F \cap K \text{ et } |t| < \varepsilon \Rightarrow e^{tX}x_o \in F .$$

__Démonstration__ : Pour un compact K fixé, choisissons un voisinage compact W de K (i.e. $K \subset \overset{\circ}{W}$, W compact de Ω) ; il existe alors $\varepsilon_1 > 0$ ne dépendant que de K, de W et de X tel que pour $x_o \in K$ et $t \in]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$, $e^{tX}x_o$ soit bien défini et reste dans W ; par la suite, chaque ε que nous choisirons sera plus petit que le précédent, et ne dépendra que de K, W, X et F.

Pour tout $x_o \in K$, le système

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + X\varphi(t,x) = 0 \\ \varphi(0,x) = |x - x_o|^2 \end{cases}$$

admet une solution φ (dépendant de x_o) définie dans $]-\varepsilon_2,\varepsilon_2[\times W$ pour un $\varepsilon_2>0$. La dérivée par rapport à t de $\varphi(t,e^{tX}x_o)$ est nulle à cause de l'équation (5.1), d'où $\varphi(t,e^{tX}x_o)=\varphi(0,x_o)=0$. Puis dérivons la fonction $\varphi_j(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,e^{tX}x_o)$; nous obtenons (en utilisant (5.1)) :

$$\frac{d\varphi_j}{dt}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\right] + X\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,x)\right]\right)\Big|_{x=e^{tX}x_o} =$$

$$= \left[X,\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\varphi(t,x)\Big|_{x=e^{tX}x_o} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}(e^{tX}x_o)\,\varphi_k(t)$$

d'où $\varphi_j(t)=0$ puisque c'est vérifié en $t=0$. Comme $\varphi(0,x)=|x-x_o|^2$, il existe un $\varepsilon_3>0$ tel que si $x_o\in K$, $x\in W$ et $|t|<\varepsilon_3$,

$$\varphi(t,x) \geqslant \frac{1}{2}\,|x-e^{tX}x_o|^2 . \tag{5.2}$$

Pour $x_o\in F\cap K$, nous avons $0=\inf_{x\in F\cap W}\varphi(0,x)<\inf_{x\in F\cap\partial W}\varphi(0,x)$ et donc cette inégalité reste vraie lorsque $|t|<\varepsilon$ pour un $\varepsilon>0$. Pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ fixé, il existe donc un point $x_t\in F\cap\overset{\circ}{W}$ où $\varphi(t,x)$ atteint sa borne inférieure, soit :

$$x_t\in(F\cap\overset{\circ}{W})\subset(\overset{\circ}{W})_+=\left\{x\in\overset{\circ}{W}\mid\varphi(t,x)\geqslant\varphi(t,x_t)\right\}.$$

En utilisant l'hypothèse du théorème on obtient $X\varphi(t,x_t)=0$, et en utilisant l'équation (5.1), $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x_t)=0$. Nous avons donc pour tous $|t|<\varepsilon$ et $|s|<\varepsilon$,

$$0((t-s)^2)=\varphi(t,x_t)-\varphi(s,x_t)\leqslant\varphi(t,x_t)-\varphi(s,x_s)\leqslant\varphi(t,x_s)-\varphi(s,x_s)=0((t-s)^2)$$

d'où $\varphi(t,x_t)=\varphi(0,x_o)=0$. Par (5.2) nous en déduisons que pour $x_o\in F\cap K$ et $|t|<\varepsilon$, $e^{tX}x_o=x_t\in F$.

Pour pouvoir tirer les conséquences pour l'unicité de ce théorème, il nous faut introduire un nouvel objet géométrique.

Si L vérifie la condition (P) dans un voisinage Ω d'un point $x_o \in \mathbb{R}^n$, choisissons des coordonnées (lemme 1.3) dans lesquelles L s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} + i\, b \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ à un facteur non nul près, et notons $\mathcal{V}_1$ la courbe intégrale du champ réel $\frac{\partial}{\partial t}$ passant par x_o. Si le rang de $\mathcal{L}$ reste égal à 1 au voisinage de x_o sur $\mathcal{V}_1$, nous dirons que $\mathcal{V}_1$ est la "feuille de $\mathcal{L}$ passant par x_o". Si au contraire on peut trouver des points de $\mathcal{V}_1$ arbitrairement proches de x_o où le rang de $\mathcal{L}$ est égal à 2, nous savons par la propriété (P) qu'il existe une variété $\mathcal{V}_2$ de dimension 2 contenant $\mathcal{V}_1$ et à laquelle le champ L reste tangent au voisinage de x_o ; dans ce deuxième cas, nous dirons que $\mathcal{V}_2$ est la "feuille de $\mathcal{L}$ passant par x_o" (on remarquera que $\mathcal{V}_2$ n'est pas nécessairement une variété intégrale de $\mathcal{L}$, et que dans les deux cas la feuille de $\mathcal{L}$ passant par x_o est une notion géométrique indépendante des coordonnées choisies).

De même, pour n'énoncer qu'un seul théorème, si L vérifie la condition (R) dans un voisinage Ω d'un point $x_o \in \mathbb{R}^n$, nous appellerons "feuille de $\mathcal{L}$ passant par x_o" la variété intégrale de $\mathcal{L}$ passant par x_o.

Dans l'énoncé suivant, $\mathcal{V}$ désigne la feuille de $\mathcal{L}$ passant par x_o.

<u>THEOREME</u> <u>5.2.</u> : *Supposons qu'il existe un voisinage Ω de x_o tel que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :*

1. *L vérifie la condition (R) dans Ω et $rg\, \mathcal{L}_{|\Omega} \leqslant 2$.*
2. *L vérifie la condition (P) dans Ω.*

Si de plus, pour tout voisinage ω de x_o, $(\mathcal{V} \cap \omega) \not\subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_o)\}$, alors pour tout voisinage ω de x_o et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système

$$(5.3) \qquad \begin{cases} (L + c_o)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_o.

<u>Démonstration</u> : Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (5.3) ; supposons que $x_0 \in \operatorname{supp} u$. Nous allons montrer qu'il existe alors un voisinage de x_0 sur $\mathcal{V}$ entièrement contenu dans $\operatorname{supp} u$. En utilisant ensuite l'hypothèse sur $\mathcal{V}$ du théorème, nous en déduisons qu'il existe des points $x \in \operatorname{supp} u$ tels que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ ce qui contredit le fait que $u = 0$ dans ω_-. C'est donc que $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, c'est-à-dire que $u = 0$ au voisinage de x_0.

Montrons donc que si $x_0 \in \operatorname{supp} u$, il existe un voisinage de x_0 sur $\mathcal{V}$ entièrement contenu dans $\operatorname{supp} u$. Le champ L étant non dégénéré, nous pouvons trouver (lemme 1.3) des coordonnées locales (y,t) telles que

1. $x_0 = (0,0)$
2. $L + c_0 = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

Comme $(L + c_0)\, u(x) = 0$ dans ω, nous pouvons affirmer grâce au théorème 1.2 que les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées dans ω avec $F = \operatorname{supp} u$ et chacun des deux champs réels $X = \frac{\partial}{\partial t}$ et $Y = b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y}$. Nous devons alors distinguer deux cas :

1. Si $\dim \mathcal{V} = 1$, il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec X et $K = \{x_0\}$ pour obtenir un voisinage de x_0 sur $\mathcal{V}$ entièrement contenu dans $\operatorname{supp} u$.

2. Si $\dim \mathcal{V} = 2$, nous pouvons trouver un voisinage de x_0 inclus dans ω qui soit de la forme $\{(y,t) \in \mathbb{R}^n / |y| < \delta$ et $|t| \leqslant T\}$ pour un $\delta > 0$ et un $T > 0$ avec $b(y,T) \neq 0$ pour tout y tel que $|y| < \delta$ (sinon, changer t en $-t$). Prenons alors sur $\mathcal{V}$ les coordonnées (z,t) où z est l'abscisse curviligne associée au champ $b(y,T) \cdot \frac{\partial}{\partial y}$; on notera z_0 l'abscisse de x_0. Il existe alors un $\alpha > 0$ tel que $K = [z_0 - \alpha\, ,\ z_0 + \alpha] \times [-T,T]$ soit un voisinage compact de x_0 dans $\mathcal{V}$ contenu dans le voisinage précédent.

Dans ces conditions, tout point de K est dans le support de u ; en effet, $(z_0, 0) = x_0 \in \operatorname{supp} u$ par hypothèse, puis étant donné $(z,t) \in K$, on obtient par l'utilisation répétée du théorème 5.1 avec tantôt X, tantôt Y :

$$(z_o,0) \in \operatorname{supp} u \cap K \Rightarrow (z_o,T) = e^{TX}\,(z_o,0) \in \operatorname{supp} u \cap K$$

$$\Rightarrow (z,T) \;= e^{(z-z_o)Y}\,(z_o,T) \in \operatorname{supp} u \cap K$$

$$\Rightarrow (z,t) \;= e^{(t-T)X}\,(z,T) \in \operatorname{supp} u \cap K\,.$$

Remarque : Le théorème de J-M. Bony (théorème 5.1 ci-dessus) permet aussi de démontrer des théorèmes d'unicité globale. A titre d'exemple, énonçons le résultat pour un problème mi-local, mi-global : dans $\Omega = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + t^2 < 2\}$, considérons le champ

$$\begin{cases} L = \dfrac{\partial}{\partial y} + i\, e^{\frac{1}{y+1}} \dfrac{\partial}{\partial t} \quad \text{si} \quad y < -1\,, \\ L = \dfrac{\partial}{\partial y} \quad \text{si} \quad y \geqslant -1\,. \end{cases}$$

Alors, pour tout voisinage ω de $(0,0)$ et toute $u \in C^1(\Omega)$ solution du système

$$\begin{cases} (L + c_o)u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega_- = \{(y,t) \in \omega \,/\, t \leqslant 0\}\,, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de $(0,0)$.

(On remarquera que ce problème ne possède pas la propriété d'unicité locale ; en effet, dans $\omega = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + t^2 < 1\}$, la fonction

$$\begin{cases} u(y,t) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^y c_o(z,t)dz - \frac{1}{t}\right) \quad \text{si} \quad t > 0\,, \\ u(y,t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0\,, \end{cases}$$

est C^∞, solution de $(L + c_o)\,u(x) = 0$ dans ω, et vérifie $\operatorname{supp} u = \omega_+ = \{(y,t) \in \omega \,/\, t \geqslant 0\}$).

5.2. Contre-exemple à l'unicité lorsque le rang de $\mathcal{L}$ est constant.

Lorsque le rang de $\mathcal{L}$ est constant, le champ L vérifie la condition (R) d'après le théorème de Frobenius (cf. 1.2). Dans l'énoncé suivant, $\mathcal{V}$ désigne la variété intégrale de $\mathcal{L}$ passant par x_o .

__THEOREME__ __5.3.__ : Supposons qu'il existe un voisinage Ω *de* x_0 *tel que le rang de* $\mathcal{L}$ *soit constant dans* Ω *et que* $(\mathcal{V} \cap \Omega) \subset \Omega_+ = \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$. *Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(5.4) \qquad \begin{cases} (L + c_0 + a)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ (\mathcal{V} \cap \omega) \subset \operatorname{supp} u \subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}, \quad \text{et} \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha\, a(x_0) = 0 \quad (a \text{ est "plate" en } x_0). \end{cases}$$

De plus, si $c_0 = 0$, *on peut choisir* $a = 0$.

__Démonstration__ : Le rang de $\mathcal{L}$ étant constant, on peut trouver des coordonnées locales dans un voisinage ω de x_0 qui redressent les variétés intégrales de $\mathcal{L}$, ou plus précisément, des coordonnées $x = (x', x'', x_n)$ avec $x' = (x_1, \dots, x_r)$ et $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$, telles que :

1. $x_0 = (0,0,0)$.

2. $d\varphi(x_0) = (0,0,1)$.

3. Les variétés intégrales de $\mathcal{L}$ ont pour équations $x'' = \text{Cte}$, $x_n = \text{Cte}$ (en particulier, $\mathcal{V}$ a pour équation $x'' = 0$, $x_n = 0$).

Dans ce qui va suivre, nous aurons éventuellement besoin de réduire le voisinage ω. Le nombre d'étapes étant fini, et les propriétés obtenues restant vraies si on réduit le voisinage, nous utiliserons toujours la même lettre ω sans préciser les modifications de ce dernier.

Comme L reste tangent aux variétés intégrales de $\mathcal{L}$, nous avons $L\psi(x) = 0$ dans ω si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Posons

$$(5.5) \qquad \begin{cases} u_0(x) = \exp\,(-1/\psi(x)) \quad \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) > 0, \text{ et} \\ u_0(x) = 0 \quad \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Alors $u_o \in C^\infty(\omega)$, $L u_o(x) = 0$ dans ω et $(\mathcal{V} \cap \omega) \subset \operatorname{supp} u_o$ puisque $u_o(x',0,\varepsilon) > 0$ pour tout x' et tout $\varepsilon > 0$ tels que $(x',0,\varepsilon) \in \omega$. Pour voir que $\operatorname{supp} u_o \subset \omega_+$, il faut exprimer φ dans les coordonnées (x',x'',x_n).

Par le théorème des fonctions implicites (cf. le point 2. ci-dessus), il existe une fonction $\varphi_o \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_o)$ équivaut dans ω à $x_n + \varphi_o(x',x'') \geqslant 0$. L'hypothèse sur $\mathcal{V}$ du théorème nous indique que $\varphi_o(x',0) \geqslant 0$ dans ω (cf. le point 3. ci-dessus), donc par développement de Taylor en x'' à l'ordre zéro, $\varphi_o(x',x'') \geqslant -C\,|x''|$ dans ω pour une constante $C < \infty$ $(C > 0)$. Si donc on a choisi ω assez petit pour que $|x''| < C^{-3}$ dans ω ,

$$u_o(x) \neq 0 \Rightarrow \psi(x) > 0 \Rightarrow x_n > |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_o(x',x'') > 0 \Rightarrow \varphi(x) \geqslant 0$$

d'où $\operatorname{supp} u_o \subset \omega_+$.

Nous avons donc donné une solution du problème (5.4) lorsque $c_o = 0$. Sinon, le champ L étant non dégénéré, choisissons (lemme 1.3) des coordonnées (y,t) telles que

1. $x_o = (0,0)$.

2. $L + c_o = \frac{\partial}{\partial t} + i\, b(y,t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)$ à un facteur non nul près.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons alors

$$b_j(y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j b(y,0) \quad \text{et} \quad c_j(y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j c(y,0) \quad ,$$

puis par récurrence,

$$(5.6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_o(y) = 0 \\ v_{j+1}(y) = - \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k \, b_k(y) \cdot \dfrac{\partial v_{j-k}}{\partial y}(y) - c_j(y) \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0 \, . \end{array} \right.$$

Par le théorème de Borel (cf. Hörmander [11, th. 1.2.6]), il existe une fonction $v \in C^\infty(\omega)$ telle que $(\frac{\partial}{\partial t})^j\ v(y,0) = v_j(y)$. Par (5.6), nous obtenons que la fonction

$$a(y,t) = -\left(\frac{\partial v}{\partial t}(y,t) + i\,b(y,t)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(y,t) + c(y,t)\right)$$

est plate en $(0,0)$.

La fonction $u(x) = e^{v(x)}\ u_0(x)$, où u_0 est donnée par (5.5) et v par ce qui précède est alors solution du problème (5.4).

Remarques : 1 - Pour une discussion du rôle du terme d'ordre zéro, on se reportera au chapitre suivant.

2 - On notera que par les théorèmes 5.2 et 5.3 nous avons complètement élucidé la question de l'unicité pour les problèmes caractéristiques de rang constant. En effet, distinguons les deux situations suivantes :

α - Le rang de $\mathcal{L}$ est inférieur ou égal à 2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait unicité (pour toute perturbation a plate en x_0) est alors que la variété intégrale de $\mathcal{L}$ passant par x_0 ne reste pas localement dans $\{\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$ (c'est nécessaire par le théorème 5.3, et suffisant par le théorème 5.2).

β - Le rang de $\mathcal{L}$ est supérieur ou égal à 3. Alors il n'y a jamais unicité "stable". En effet, deux cas peuvent se produire : s'il existe des points arbitrairement proches de x_0 dans $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ où le problème n'est pas caractéristique, nous pouvons appliquer le théorème 1.1 ; si le problème est caractéristique en tous les points de S, c'est que la variété intégrale de $\mathcal{L}$ passant par x_0 reste localement dans S, et nous pouvons appliquer le théorème 5.3.

CHAPITRE 6 : ROLE DU TERME D'ORDRE ZERO.

Aux théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 et 5.3, nous avons dû modifier le terme d'ordre zéro pour montrer qu'il n'y avait pas unicité de Cauchy. Il est alors naturel de se demander si de tels problèmes possèdent tout de même la propriété d'unicité pour certains termes d'ordre zéro. La réponse à cette question est positive comme nous le verrons ci-dessous.

Cependant, le rôle du terme d'ordre zéro est encore mal connu. Nous nous bornerons ici à énoncer deux remarques qui suggèrent la nature des conditions à imposer. La première d'entre elles (théorème 6.1) est dûe à Lewy [15].

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons que la résolubilité locale d'un champ complexe non dégénéré a été étudiée par Nirenberg et Trèves [17], et que sous les hypothèses du théorème 2.2, ainsi que sous les hypothèses du théorème 5.3 si rg $\mathcal{L} \geq 3$, le champ L n'est localement résoluble en aucun point d'un voisinage de x_o ; de même, les hypothèses des théorèmes 1.1 et 4.2 entraînent qu'il existe de nombreux points voisins de x_o où L n'est pas localement résoluble. Il en résulte qu'il existe des fonctions C^∞ c telles que l'équation $Lv - c = 0$ ne possède pas de solution v au voisinage de ces points.

__THEOREME__ __6.1.__ : *Soit $\mathcal{N}_j(c_o)$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ au voisinage desquels l'équation $Lv(x) + c_o(x) = 0$ ne possède pas de solution $v \in C^j$. S'il existe un voisinage Ω de x_o tel que $\overline{\mathcal{N}_j(c_o)} \supset \Omega_+ = \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \geq \varphi(x_o)\}$, alors pour tout voisinage ω de x_o et toute $u \in C^j(\omega)$ solution du système*

$$(6.1) \qquad \begin{cases} (L + c_o)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \leq \varphi(x_o)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_o.

Démonstration : Soit $u \in C^j(\omega)$ une solution du problème (6.1).

Supposons qu'elle n'est pas nulle dans $\omega \cap \Omega$. Alors, comme $u(x)=0$ dans ω_-, il existe un ouvert contenu dans $\omega \cap \Omega_+$ où u ne prend pas la valeur 0 ; cet ouvert contient donc un point $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_o)$ et une boule ω_1 de centre x_1 : $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega_1$. Dans ω_1, on peut alors écrire $u(x) = e^{v(x)}$ pour une fonction $v \in C^j(\omega_1)$. Or (6.1) implique que $Lv(x) + c_o(x) = 0$ dans ω_1, ce qui contredit le fait que $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_o)$.

Donc $u=0$ dans $\omega \cap \Omega$.

Dans le théorème suivant, nous nous plaçons résolument dans une situation où l'on a déjà montré qu'il n'y avait pas unicité pour un terme d'ordre zéro donné c_o (situation fournie par exemple par l'un des théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 ou 5.3), et nous cherchons pour quels autres termes d'ordre zéro c l'opérateur $L+c$ ne possède toujours pas la propriété d'unicité.

Pour un fermé F, nous noterons $C^j(F)$ l'ensemble des fonctions $v \in C^j(\mathring{F})$ possédant la propriété suivante : pour tout $x \in F$ et tout multi-indice α de longueur inférieure à j, il existe un voisinage ω_α de x tel que $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha v$ reste bornée dans $\omega_\alpha \cap \mathring{F}$.

THEOREME 6.2. : Supposons qu'il existe un voisinage ω de x_o et des fonctions $u_o \in C^j(\omega)$ et $c_o \in C^\infty(\omega)$ tels que

$$\begin{cases} (L+c_o)\, u_o(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \text{ et} \\ x_o \in \operatorname{supp} u_o \subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geq \varphi(x_o)\} \,. \end{cases}$$

Si de plus l'équation $Lv(x) + c(x) - c_o(x) = 0$ possède une solution $v \in C^j(\operatorname{supp} u_o)$, alors il existe une fonction $u \in C^j(\omega)$ telle que

$$\begin{cases} (L+c)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega, \text{ et} \\ x_o \in \operatorname{supp} u \subset \omega_+ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prendre $u(x) = e^{v(x)}\, u_o(x)$.

<u>Application</u> : Comme illustration de ce dernier théorème, reprenons un problème abordé au chapitre 5.

Supposons qu'il existe un voisinage Ω d'un point $x_o \in \mathbb{R}^n$ dans lequel le champ L vérifie la condition (P) et $\mathcal{J}$ est de rang constant. Deux exemples d'une telle situation sont fournis par le cas où L est un champ réel (non dégénéré en x_o) et le cas où $X = \mathcal{R}e\, L$ et $Y = \mathcal{J}m\, L$ sont linéairement indépendants en x_o et commutent au voisinage de x_o $([X,Y] = 0)$.

Notons $\mathcal{V}$ la variété intégrale de $\mathcal{L}$ passant par x_o ; alors, en rassemblant les résultats des théorèmes 5.2, 5.3 et 6.2, et en rappelant que sous la condition (P), L est localement résoluble (cf. Nirenberg et Trèves [17]), on s'aperçoit qu'on a démontré l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1. Unicité locale en x_o : pour tout voisinage ω de x_o,

$$\left\{\begin{array}{l} u \in C^1(\omega)\ , \\ (L + c_o)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega\text{, et} \\ u(x) = 0 \quad \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o)\} \end{array}\right. \Rightarrow u = 0 \ \text{ au voisinage de } x_o .$$

2. Pour tout voisinage ω de x_o, $\mathcal{V} \cap \omega \not\subset \omega_+ = \{x \in \omega \,/\, \varphi(x) \geqslant \varphi(x_o)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALINHAC S. :
Non unicité du problème de Cauchy ,
Annals of Math. 117, 77-108 (1983).

[2] ALINHAC S. :
Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem ,
Contemporary Mathematics, Vol. 27, 1-22 (1984).

[3] ALINHAC S. et ZUILY C. :
Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles ,
Comm. in Pde's, 6 (7), 799-828 (1981).

[4] BAOUENDI M.S. et GOULAOUIC C. :
Cauchy problems with characteristic initial hypersurface ,
Comm. on Pure and Appl. Math., 26, 455-475 (1973).

[5] BAOUENDI M.S. et TREVES F. :
A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields ,
Annals of Math., 113, 387-421 (1981).

[6] CALDERON A.P. :
Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations ,
Proc. Symp. Fluid Dynamics and applied Math., (Univ. of Maryland 1961), 147-195, Gordon and Breach, New-York 1962.

[7] CARDOSO F. et HOUNIE J. :
First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem ,
J. of diff. equ., 33, 239-248 (1979).

[8] COHEN P. :
The non-uniqueness of the Cauchy problem ,
O.N.R. Techn. Report 93, Stanford 1960.

[9] HÖRMANDER L. :
Linear partial differential operators ,
Springer Verlag, Berlin 1963.

[10] HÖRMANDER L. :
Non-uniqueness for the Cauchy problem ,
Lecture notes in Math. (Springer Verlag) n° 459, Fourier integral operators and pde's, 36-72 (1975).

[11] HÖRMANDER L. :
The analysis of linear partial differential operators ,
T. I, Springer Verlag, Berlin 1983.

[12] LERNER N. :
Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques ,
A paraître dans Ann. de l'Ecole Normale Supérieure.

[13] LERNER N. :
Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux ,
A paraître dans J. des Math. pures et appliquées.

[14] LERNER N. et ROBBIANO L. :
Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal ,
Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84, exposé n° IX (Ecole Polytechnique, Paris), et article à paraître.

[15] LEWY H. :
An example of a smooth linear partial differential equation without solution ,
Annals of Math. 66, 155-158 (1957).

[16] NAGANO T. :
Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras ,
J. of the Math. Soc. of Japan, 18, 398-404 (1966).

[17] NIRENBERG L. et TREVES F. :
Solvability of a first order linear partial differential equation ,
Comm. on Pure and Appl. Math., 16, 331-351 (1963).

[18] PLIS A. :

A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere ,

Comm. on Pure and Appl. Math., 14, 599-617 (1961) ; voir aussi la bibliographie de [10].

[19] ROBBIANO L. :

Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non-elliptiques à symboles complexes ,

Thèse de 3ème cycle, Université de Paris XI-Orsay, 1983, et article à paraître dans J. of diff. equ. (1984).

[20] SAINT RAYMOND X. :

Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux ,

A paraître dans Indiana Univ. Math. J. (1984).

[21] SAINT RAYMOND X. :

Autour du théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy ,

A paraître dans J. of diff. geom.

[22] SJÖSTRAND J. :

Singularités analytiques microlocales ,

Astérisque n° 95 (1982).

[23] STERNBERG S. :

Lectures on differential geometry ,

2nd edition, Chelsea Publishing Company, New-York 1983.

[24] STRAUSS M. et TREVES F. :

First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem ,

J. of diff. equ., 15, 195-209 (1974).

[25] SUSSMANN H.J. :

Orbits of families of vector fields and integrability of distributions ,

Trans. of the Am. Math. Soc., 180, 171-188 (1973).

[26] WHITNEY H. :

Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets ,

Trans. of the Am. Math. Soc., 36, 63-89 (1934).

[27] ZACHMANOGLOU E.C. :

Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations ,

Arch. Rat. Mech. Anal., 38, 178-188 (1970).

[28] ZUILY C. :

Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem ,

Progress in mathematics vol. 33, Birkhäuser, Boston 1983.

PREPUBLICATIONS

NON-UNICITE POUR CERTAINS PROBLEMES DE CAUCHY COMPLEXES NON-LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

84 T 58

Résumé dans
C.R. Acad. Sc. Paris
299, 927-930 (1984)

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique
Bât. 425
91405 ORSAY France

4

NON-UNICITE POUR CERTAINS PROBLEMES DE CAUCHY COMPLEXES NON-LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

Dans un travail récent [1], Baouendi Goulaouic et Trèves ont étendu le classique théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy à certains problèmes complexes non-linéaires du premier ordre. Dans chacune des trois classes de problèmes introduites dans cet article [1], il est facile de voir qu'en utilisant les arguments de Sjöstrand [6,th. 8.7](1), on peut remplacer l'hypothèse selon laquelle le problème est non-caractéristique par une hypothèse de convexité sur la surface portant les données de Cauchy.

Dans le travail que nous présentons ici, nous montrons, toujours dans le cadre des trois classes de [1], que de telles hypothèses (problème non-caractéristique ou convexité) sont nécessaires pour avoir la propriété d'unicité. Nous étendons ainsi un résultat similaire qui avait été obtenu pour les équations linéaires par Zachmanoglou [7] (cf. aussi Saint Raymond [5] où les solutions construites sont plus régulières).

Pour le principe de la démonstration, nous nous sommes inspirés de Hörmander [2,th. 5.2.1]. Par ailleurs, nous tenons à remercier Nicolas Lerner pour d'utiles conversations.

1. NOTATIONS ET ENONCES DES RESULTATS.

Près d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, nous donnons :

---

(1) dus, pour la version que nous utilisons, à Bony : Principe du maximum, inégalités de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier Grenoble 19(1), 277-304 (1969), cf. note (2) page 4 - 4 -.

(i) une fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$ (dans la suite, nous noterons $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$ et $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$) ;

(ii) une fonction F holomorphe au voisinage de (x_0,ζ_0,ξ_0), (ζ_0,ξ_0) étant un point de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, telle que $F(x_0,\zeta_0,\xi_0) = 0$ et $d_\xi F(x_0,\zeta_0,\xi_0) \neq 0$;

(iii) une fonction $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, telle que $v(x_0) = \zeta_0$ et $\partial_x v(x_0) = \xi_0$, et solution de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire $F(x,v(x),\partial_x v(x)) = 0$.

La question qui se pose est alors la suivante : existe-t-il localement d'autres solutions $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

(1.1) $$F(x,u(x), \partial_x u(x)) = 0$$

coïncidant avec v dans $\mathbb{R}^n_-$? Baouendi, Goulaouic et Trèves [1] ont étudié cette question dans les trois cas suivants :

<u>Cas n° 1</u> : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ (équations à deux variables indépendantes) et $k \geqslant m = 2$ (k mesure la régularité de v, et m la régularité minimum exigée des solutions).

<u>Cas n° 2</u> : v est analytique au voisinage de x_0 et $m = 2$.

<u>Cas n° 3</u> : $F(x,\zeta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\xi_j + f(x,\zeta)$, où les fonctions a_j sont analytiques au voisinage de x_0 et f est holomorphe au voisinage de (x_0,ζ_0), et $m = 1$.

Dans chacun de ces trois cas, ces auteurs ont établi que si

(1.2) $$\partial_\xi F(x_0,\zeta_0,\xi_0) \cdot \partial_x \varphi(x_0) \neq 0 ,$$

toute solution de classe C^m de l'équation (1.1) coïncidant avec v dans $\mathbb{R}^n_-$ coïncide avec v dans tout un voisinage de x_0. Nous reprenons ici l'étude de ces trois cas, et après avoir affaibli la condition (1.2) en une nouvelle condition suffisante pour l'unicité, nous allons montrer que cette dernière condition est aussi nécessaire (du moins " génériquement ").

Avant d'énoncer les théorèmes, précisons que le problème posé ainsi que les résultats obtenus sont purement locaux, même si nous ne mentionnons pas toujours le voisinage de x_o dans lequel nous travaillons.

*

* *

Pour énoncer les théorèmes, nous utiliserons les deux champs réels suivants :

$$X = \mathcal{R}e[\partial_\xi F(x,v(x),\partial_x v(x))] \cdot \partial_x \quad \text{et} \quad Y = \mathcal{I}m[\partial_\xi F(x,v(x),\partial_x v(x))] \cdot \partial_x .$$

Remarquons que dans le cas n° 1, X et Y ont la même régularité que la fonction $\partial_x v$, soit C^{k-1} $(k \geqslant 2)$, tandis que dans les cas n^{os} 2 et 3, ces champs sont analytiques ; nous serons donc amenés à distinguer les cas. Ajoutons que d'après l'hypothèse (ii) ci-dessus, nous pouvons supposer que $X \neq 0$ en x_o quitte à multiplier F par un nombre complexe non nul ; dans l'énoncé qui suit, il est sous-entendu que $X \neq 0$.

<u>THEOREME 1.</u> : *Supposons que nous sommes dans le cas n° 1, et notons Σ la courbe intégrale de X passant par x_o. Alors : (U) si tout voisinage de x_o sur Σ possède des points de $\mathbb{R}^2_-$ ou encore des points où X et Y sont linéairement indépendants, alors toute solution de classe C^2 de (1.1) coïncidant avec v dans $\mathbb{R}^2_-$ coïncide avec v dans tout un voisinage de x_o ; (Non-U) s'il existe un voisinage de x_o sur Σ entièrement contenu dans $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ et sur lequel Y reste proportionnel à X, alors il existe une infinité de solutions de classe C^k de (1.1) coïncidant avec v dans $\mathbb{R}^2_-$, mais distinctes dans tout voisinage de x_o.*

Dans les cas n^{os} 2 et 3, les champs X et Y sont analytiques. Nous noterons $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie qu'ils engendrent, et nous rappelons que d'après Nagano [4], par tout point de $\mathbb{R}^n$ passe une variété intégrale de $\mathcal{L}$.

<u>THEOREME 2.</u> : *Supposons que nous sommes dans l'un des deux cas n° 2 ou n° 3, et notons* $\mathcal{N}$ *la variété intégrale de* $\mathcal{L}$ *passant par* x_o. *Alors : (U) si tout voisinage de* x_o *sur* $\mathcal{N}$ *possède des points de* $\mathbb{R}^n_-$ *, alors toute solution de classe* C^m *de (1.1) coïncidant avec* v *dans* $\mathbb{R}^n_-$ *coïncide avec* v *dans tout un voisinage de* x_o *; (Non-U) s'il existe un voisinage de* x_o *sur* $\mathcal{N}$ *entièrement contenu dans* $\overline{\mathbb{R}^n_+}$*, et si le rang de* $\mathcal{L}$ *est constant ou strictement supérieur à* $n-2$ *en* x_o*, alors il existe une infinité de solutions de classe* C^k *(dans le cas n° 2 : pour tout* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*) de (1.1) coïncidant avec* v *dans* $\mathbb{R}^n_-$*, mais distinctes dans tout voisinage de* x_o.

*

* *

Les propriétés d'unicité ci-dessus s'obtiennent facilement en combinant les résultats de Baouendi Goulaouic et Trèves [1] avec Sjöstrand [6, th. 8.7] appliqué au fermé supp (u-v) (dans le cas n° 1, les champs X et Y étant peu réguliers, il faudra plutôt utiliser la version du théorème de Sjöstrand donnée par Hörmander [3, th. 8.5.11])(2) .

Pour démontrer les résultats de non-unicité, nous procéderons en trois étapes :

(i) Construction d'une hypersurface Σ (éventuellement singulière) caractéristique pour X et Y, et coupant l'espace $\mathbb{R}^n$ en deux domaines dont l'un sera contenu dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ (cette partie géométrique est tirée de Saint Raymond [5 , §.6]).

(ii) Résolution d'un problème de Cauchy à partir de la variété $\{x_1 = 0\}$ (transverse et non-caractéristique) fournissant des solutions u_t de (1.1), $t \in \mathbb{C}$, coïncidant à l'ordre k avec la fonction v sur $\Sigma \cap \{x_1 = 0\}$ (ces deux premières étapes seront traitées dans le prochain paragraphe).

(iii) Démonstration de $u_t = v$ sur Σ, ce qui permettra de recoller ces deux solutions le long de Σ.

(2) J'ai appris, après avoir rédigé ce texte, que ce résultat était en réalité dû à Bony, op. cit., théorème 2.1.

2. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE u_t, $t \in \mathbb{C}$, DE SOLUTIONS DE L'EQUATION (1.1).

Plaçons-nous dans les hypothèses des théorèmes de non-unicité du paragraphe précédent.

Dans le cas n° 1, nous choisissons des coordonnées locales (analytiques) telles que $x_0 = (0,0)$ et $d\varphi(x_0) = (0,1)$. Alors on a $\partial F / \partial \xi_1 (x_0, \zeta_0, \xi_0) \neq 0$, et la courbe intégrale de X, Σ, a pour équation $x_2 = f(x_1)$ où $f \in C^k(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et s'annule en 0. Avec $\sigma(x_1,x_2) = x_2 - f(x_1)$, posons $\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 / \sigma(x) > 0\}$ et $\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^2 / \sigma(x) < 0\}$; alors par hypothèse, $\overline{\Sigma_+} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Dans les cas n^{os} 2 et 3 et si r, le rang de $\mathcal{L}$ en x_0, est égal à $n-1$, nous pouvons trouver des coordonnées locales (analytiques) (x',x_n) avec $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ telles que $x_0 = (0,0)$, $d\varphi(x_0) = (0,1)$, $\partial F / \partial \xi_1 (x_0,\zeta_0,\xi_0) \neq 0$ et $\mathcal{N} = \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}$. Avec $\sigma(x',x_n) = x_n$ nous posons donc $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) = 0\} = \mathcal{N}$, $\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) > 0\}$ et $\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) < 0\}$; alors par hypothèse, $\overline{\Sigma_+} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Dans les cas n^{os} 2 et 3 et si le rang de $\mathcal{L}$ est constamment égal à $r < n-1$, nous pouvons trouver des coordonnées locales (analytiques) (x',x'',x_n) avec $x' = (x_1,\dots,x_r)$ et $x'' = (x_{r+1},\dots,x_{n-1})$ telles que $x_0 = (0,0,0)$, $d\varphi(x_0) = (0,0,1)$, $\partial F / \partial \xi_1 (x_0,\zeta_0,\xi_0) \neq 0$ et toutes les variétés intégrales de $\mathcal{L}$ ont pour équations $x'' = \mathrm{Cte}$, $x_n = \mathrm{Cte}$ (en particulier, $\mathcal{N} = \{(x',x'',x_n) \in \mathbb{R}^n / x'' = x_n = 0\}$). Avec $\sigma(x',x'',x_n) = x_n^3 - |x''|^2 = x_n^3 - \sum_{j=r+1}^{n-1} x_j^2$, nous posons alors $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) = 0\}$, $\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) > 0\}$ et $\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) < 0\}$. On remarquera que Σ est l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$ de la sous-variété analytique $\Sigma_0 = \{(x',x'',x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 < x_n = |x''|^{2/3}\}$.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que

$$x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \iff x_n \geqslant \psi(x',x'') \;;$$

grâce à l'hypothèse $\mathcal{N} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$, cette fonction ψ vérifie $\psi(x',0) \leqslant 0$, donc par développement de Taylor, il existe $C > 0$ telle que dans un voisinage de x_0, $\psi(x',x'') \leqslant C\,|x''|$. Alors tous les points de $\overline{\Sigma_+}$ tels que $|x''| \leqslant C^{-3}$ vérifient

$$x_n \geqslant |x''|^{2/3} \geqslant C\,|x''| \geqslant \psi(x',x'') \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}.$$

Nous avons donc ici encore $\overline{\Sigma_+} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Pour nous résumer : sous les hypothèses des théorèmes de non-unicité du paragraphe précédent, nous avons construit localement une partition de $\mathbb{R}^n$ en un fermé Σ et deux ouverts Σ_+ et Σ_- telle que :

(i) $\overline{\Sigma_-} \cap \overline{\Sigma_+} = \Sigma$, et $\overline{\Sigma_+} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$;

(ii) il existe des coordonnées locales (analytiques) $(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_1,x_*)$ pour lesquelles $\partial F/\partial\xi_1\,(x_0,\zeta_0,\xi_0) \neq 0$, ce qui permet, en utilisant le théorème des fonctions implicites, d'écrire l'équation (1.1) sous la forme

$$\partial_1 u(x) = G(x\,,u(x)\,,\partial_* u(x)) \tag{2.1}$$

où $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_* = (\partial_2,\dots,\partial_n)$ et G est une fonction holomorphe de ses arguments ;

(iii) Σ est soit une variété, soit l'adhérence d'une variété (de classe C^k dans le cas n° 1, analytique dans les autres cas) à laquelle les champs X et Y restent tangents ; de plus, dans les coordonnées précédentes, $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / \sigma(x) = 0\}$ où $\sigma(0,x_*)$ est une fonction analytique de x_*, et on a $x_0 \in \operatorname{supp}\left(\sigma\big|_{\overline{\Sigma_+} \cap \{x_1=0\}}\right)$.

PROPOSITION : *Avec les constructions effectuées ci-dessus, il existe une famille u_t, $t \in \mathbb{C}$, de solutions de classe C^k de (1.1) telles que*

$$t \neq s \Rightarrow x_o \in supp\left[\, (u_t - u_s)_{|\Sigma_+}\right]$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1} \;\; avec \;\; |\alpha| \leqslant k \;, \;\; \left(\partial_*^\alpha\left[\, (u_t - v\,)_{|\{x_1=0\}}\right]\right)_{|\Sigma \cap \{x_1=0\}} = 0 .$$

Démonstration : Nous utiliserons la forme (2.1) de l'équation (1.1) et ferons une démonstration séparée pour chacun des trois cas.

Cas n° 1 : nos solutions u_t , $t \in \mathbb{C}$, nous sont fournies par le théorème de Cauchy-Kowalevsky appliqué au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_1 u_t(x) = G(x, u_t(x) \;, \partial_2 u_t(x)\,) \\ u_t(0,x_2) = \sum\limits_{j=0}^{k} (x_2^j / j!)\partial_2^j v\,(0,0) + t[\sigma(0,x_2)]^{k+1} . \end{cases}$$

Cas n° 2 : de même ici, u_t sera la solution analytique donnée par le théorème de Cauchy-Kowalevsky de

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \partial_1 u_t\,(x) = G(x, u_t(x) \;, \partial_* u_t\,(x)) \\ u_t(0,x_*) = v(0,x_*) + t[\sigma(0,x_*)]^{k+1} . \end{cases}$$

Cas n° 3 : dans ce dernier cas, $a_1 = \partial F / \partial \xi_1 \neq 0$ et nous pouvons écrire

$$\text{(2.3)} \qquad G(x,\zeta,\xi_*) = b_*(x) \cdot \xi_* + g(x,\zeta)$$

où $\xi_* = (\xi_2,\dots,\xi_n)$, $b_*(x) = (b_2(x),\dots,b_n(x))$ avec $b_j(x) = -a_j\,(x) / a_1(x)$, et $g(x,\zeta) = -f(x,\zeta) / a_1(x)$; nous posons alors

$$\text{(2.4)} \qquad u_t(x) = w_t(x,v(x)) + v(x)$$

où $w_t(x,z)$ est la solution (toujours obtenue par le théorème de Cauchy-Kowalevsky) près de (x_o,ζ_o) du problème de Cauchy suivant

$$(2.5)\quad \begin{cases} \partial_1 w_t(x,z) = b_*(x)\cdot \partial_* w_t(x,z) - g(x,z)\,\partial_z w_t(x,z) + g(x,z+w_t(x,z)) - g(x,z) \\ w_t(0,x_*,z) = t[\sigma(0,x_*)]^{k+1}\ . \end{cases}$$

Nous allons montrer maintenant que cette fonction u_t, qui possède la même régularité que v soit C^k, est solution du problème (2.2). Pour la trace sur $\{x_1=0\}$, c'est évident ; puis

$$\partial_1 u_t(x) = \partial_1 w_t(x,v(x)) + \partial_1 v(x)\,[\partial_z w_t(x,v(x)) + 1]$$

et en utilisant d'une part (2.5) et d'autre part que v est solution de (2.1) avec G donnée par (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}\partial_1 u_t(x) &= b_*(x)\cdot \partial_* w_t(x,v) - g(x,v)\,\partial_z w_t(x,v) + g(x,v+w_t(x,v)) - g(x,v) + \\ &\quad + [b_*(x)\cdot \partial_* v(x) + g(x,v)][\partial_z w_t(x,v) + 1] = \\ &= b_*(x)\cdot[\partial_* w_t(x,v) + \partial_* v(x)\,\partial_z w_t(x,v) + \partial_* v(x)] + g(x,w_t(x,v)+v) = \\ &= b_*(x)\cdot \partial_* u_t(x) + g(x,u_t(x))\end{aligned}$$

ce qui achève notre démonstration d'après (2.3).

3. RECOLLEMENT DES SOLUTIONS.

Pour achever la démonstration des théorèmes 1 et 2, il suffit maintenant d'effectuer la construction suivante : pour chaque $t\in\mathbb{C}$, nous prenons comme solution la fonction qui coïncide avec u_t dans $\overline{\Sigma}_+$ et avec v dans Σ_-. Il est clair que cette fonction vérifie l'équation (1.1) sauf éventuellement sur Σ ; mais cette fonction est de classe C^k comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION : Les fonctions u_t, $t\in\mathbb{C}$, construites au paragraphe précédent vérifient :

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha|\leq k\ ,\ \left[\partial_x^\alpha (u_t - v)\right]\Big|_\Sigma = 0\ .$$

<u>Démonstration</u> : pour un $t \in \mathbb{C}$ fixé, posons $w(x) = u_t(x) - v(x)$; d'après (2.1), w est solution de l'équation

$$\partial_1 w(x) = H(x, w(x), \partial_* w(x)) \tag{3.1}$$

où H est définie par

$$\begin{aligned} H(x,\zeta,\xi_*) &= G(x, v(x)+\zeta, \partial_* v(x)+\xi_*) - \partial_1 v(x) = \\ &= G(x, v(x)+\zeta, \partial_* v(x)+\xi_*) - G(x, v(x), \partial_* v(x)) \end{aligned}$$

car v est aussi une solution de (2.1). La fonction H est donc de classe C^{k-1} en x (analytique dans le cas n° 2) et holomorphe en (ζ,ξ_*). On notera qu'on a

$$H(x,0,0) = 0 \tag{3.2}$$

près de x_0. Distinguons maintenant les différents cas.

<u>Cas n° 1</u> : avec les notations précédentes, et en écrivant H_{ξ_2} pour $\partial H/\partial \xi_2$, dire que X et Y restent tangents à Σ, c'est dire que

$$H_{\xi_2}(x_1, f(x_1), 0, 0) = -f'(x_1) . \tag{3.3}$$

Posons $\delta(x_1) = w(x_1, f(x_1))$ et $\varepsilon(x_1) = \partial_2 w(x_1, f(x_1))$; alors

$$\delta'(x_1) = \partial_1 w(x_1, f(x_1)) + f'(x_1)\, \partial_2 w(x_1, f(x_1)) = H(x_1, f(x_1), \delta(x_1), \varepsilon(x_1)) + f'(x_1)\, \varepsilon(x_1).$$

Un développement de Taylor du premier terme avec reste intégral nous donne donc

$$\begin{aligned} \delta'(x_1) &= H(x_1,f,0,0) + \delta(x_1) \int_0^1 H_\zeta(x_1,f,\theta\delta,\theta\varepsilon)d\theta + \varepsilon(x_1)\left[\int_0^1 H_{\xi_2}(x_1,f,\theta\delta,\theta\varepsilon)d\theta + f'(x_1)\right] = \\ &= a(x_1)\, \delta(x_1) + b(x_1)\, \varepsilon(x_1) \end{aligned}$$

grâce à (3.2) ; ici, a et b sont des fonctions continues de x_1 à valeurs complexes.

De même on calcule que :

$$\varepsilon'(x_1) = \partial_1 \partial_2 w(x_1, f(x_1)) + f'(x_1)\, \partial_2^2 w(x_1, f(x_1)) .$$

L'expression de $\partial_1 \partial_2 w$ s'obtient en dérivant (3.1) :

$$\partial_1 \partial_2 w(x_1, f(x_1)) = \partial_2 H(x_1, f, \delta, \varepsilon) + \varepsilon(x_1) H_\zeta(x_1, f, \delta, \varepsilon) + \partial_2^2 w(x_1, f(x_1)) H_{\xi_2}(x_1, f, \delta, \varepsilon) ,$$

et en écrivant des formules de Taylor pour le premier et le dernier termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon'(x_1) = {} & \partial_2 H(x_1, f, 0, 0) + \delta(x_1) \int_0^1 \partial_2 H_\zeta(x_1, f, \theta\delta, \theta\varepsilon) d\theta + \varepsilon(x_1) \int_0^1 \partial_2 H_{\xi_2}(x_1, f, \theta\delta, \theta\varepsilon) d\theta + \\ & + \varepsilon(x_1) H_\zeta(x_1, f, \delta, \varepsilon) + \delta(x_1) \int_0^1 H_{\zeta\xi_2}(x_1, f, \theta\delta, \theta\varepsilon)\, \partial_2^2 w(x_1, f) d\theta + \\ & + \varepsilon(x_1) \int_0^1 H_{\xi_2^2}(x_1, f, \theta\delta, \theta\varepsilon)\, \partial_2^2 w(x_1, f) d\theta + \partial_2^2 w(x_1, f) \left[H_{\xi_2}(x_1, f, 0, 0) + f'(x_1) \right] = \\ = {} & c(x_1)\, \delta(x_1) + d(x_1)\, \varepsilon(x_1) \end{aligned}$$

grâce à (3.2) et (3.3) ; c et d sont ici encore des fonctions continues de x_1. Comme par construction de u_t on a $\delta(0) = \varepsilon(0) = 0$, on en déduit par le théorème de Cauchy-Lipschitz que $\delta(x_1) = \varepsilon(x_1) = 0$. On a donc obtenu que

$$(u_t - v)_{|\Sigma} = [\partial_2(u_t - v)]_{|\Sigma} = 0 .$$

Pour obtenir ce résultat pour les dérivées suivantes, nous procédons par récurrence. Supposons que nous avons montré que $\partial_2^j w(x_1, f(x_1)) = 0$ pour tout $j < k$; si nous dérivons $k-1$ fois l'équation (3.1) par rapport à x_2 et ajoutons $f'(x_1) \partial_2^k w$, nous obtenons :

$$(3.4)\quad \begin{cases} \partial_2^{k-1}\,\partial_1\, w(x_1,x_2) + f'(x_1)\,\partial_2^k w(x_1,x_2) = \\[2mm] = \partial_2^{k-1}\, H(x_1,x_2,w,\partial_2 w) + \sum\limits_{j=1}^{k-2} \partial_2^j\, w(x_1,x_2)\, h_{k,j}(x_1,x_2) + \\[2mm] + \partial_2^{k-1}\, w(x_1,x_2)\Big[H_\zeta(x_1,x_2,w,\partial_2 w) + (k-1)\partial_2 H_{\xi_2}(x_1,x_2,w,\partial_2 w)\Big] + \\[2mm] + \partial_2^k\, w(x_1,x_2)\,\Big[H_{\xi_2}(x_1,x_2,w,\partial_2 w) + f'(x_1)\Big]\,, \end{cases}$$

où les fonction $h_{k,j}$ sont de classe C^j, en particulier C^1 (la formule précédente doit être légèrement modifiée lorsque $k=2$ ou 3, mais cela n'affecte pas les raisonnements ultérieurs). Si la fonction v était de classe C^{k+1} (ce qui impliquerait que $w \in C^{k+1}$ et $H \in C^k$), il suffirait de dériver encore une fois cette équation par rapport à x_2 et de remplacer x_2 par $f(x_1)$ pour obtenir directement l'équation (3.7) ci-dessous ; comme nous savons seulement que v est de classe C^k, il nous faut prendre quelques précautions.

Nous affirmons d'abord que le membre de droite de (3.4) est dérivable par rapport à x_2 en $x_2 = f(x_1)$; en effet, écrivons pour le premier terme

$$\Delta_h = h^{-1}\Big[\partial_2^{k-1}\, H(x_1,f+h,w(x_1,f+h)\,,\,\partial_2 w(x_1,f+h)) - \partial_2^{k-1}\, H(x_1,f,w(x_1,f),\partial_2\, w(x_1,f))\Big]\ ;$$

nous avons montré plus haut que $\delta(x_1) = \varepsilon(x_1) = 0$, donc d'après (3.2), le dernier terme de cette expression est nul ; comme $\partial_2^{k-1}\, H(x_1,f+h,0,0)$ est nul encore grâce à (3.2), un développement de Taylor avec reste intégral donne

$$\Delta_h = h^{-1}\Big[w(x_1,f+h)\int_0^1 \partial_2^{k-1}\, H_\zeta(x_1,f+h,\theta\, w(x_1,f+h)\,,\,\theta\,\partial_2 w(x_1,f+h))d\theta + $$
$$+ \partial_2\, w(x_1,f+h)\int_0^1 \partial_2^{k-1}\, H_{\xi_2}(x_1,f+h,\theta\, w(x_1,f+h),\theta\,\partial_2 w(x_1,f+h))d\theta\Big]\,,$$

d'où finalement, en utilisant que $\delta(x_1) = \varepsilon(x_1) = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h = \partial_2^2 w(x_1,f)\, \partial_2^{k-1} H_{\xi_2}(x_1,f,0,0) .$$

Les dérivées des deux termes suivants dans (3.4) se calculent aisément grâce à l'hypothèse de récurrence ; écrivons enfin pour le dernier terme

$$E_h = h^{-1}\Big[\partial_2^k w(x_1,f+h)\Big\{H_{\xi_2}(x_1,f+h,w(x_1,f+h)\ ,\partial_2 w(x_1,f+h)) + f'(x_1)\Big\} -$$
$$- \partial_2^k w(x_1,f)\Big\{H_{\xi_2}(x_1,f,w(x_1,f)\ ,\partial_2 w(x_1,f)) + f'(x_1)\Big\}\Big] ;$$

la dernière accolade étant nulle à cause de $\delta(x_1) = \varepsilon(x_1) = 0$ et de (3.3), on peut écrire, en utilisant encore (3.3),

$$E_h = \partial_2^k w(x_1,f+h)\ h^{-1}\Big[H_{\xi_2}(x_1,f+h,w(x_1,f+h)\ ,\partial_2 w(x_1,f+h)) - H_{\xi_2}(x_1,f,0,0)\Big]$$

d'où (toujours en utilisant $\delta(x_1) = \varepsilon(x_1) = 0$)

$$\lim_{h\to 0} E_h = \partial_2^k w(x_1,f)\Big[\partial_2 H_{\xi_2}(x_1,f,0,0) + \partial_2^2 w(x_1,f)\ H_{\xi_2^2}(x_1,f,0,0)\Big] .$$

Les calculs précédents montrent que les fonctions continues

$$W_h(x_1) = h^{-1}\Big[\partial_2^{k-1}\partial_1 w(x_1,f+h) + f'(x_1)\,\partial_2^k w(x_1,f+h) - \partial_2^{k-1}\partial_1 w(x_1,f) - f'(x_1)\,\partial_2^k w(x_1,f)\Big]$$

convergent, lorsque h tend vers 0, vers la fonction continue

$$\text{(3.5)}\qquad W_0(x_1) = \partial_2^k w(x_1,f(x_1))\Big[H_\zeta(x_1,f,0,0) + k\,\partial_2 H_{\xi_2}(x_1,f,0,0)\Big]$$

(dans le cas $k = 2$, seule l'expression à l'intérieur du crochet est différente). Un examen attentif de ces mêmes calculs montre qu'on dispose en outre d'une majoration, uniforme en h, de la forme

$$\text{(3.6)}\qquad |W_h(x_1)| \leqslant C .$$

L'effet de la distribution W_o sur la fonction test χ sera donc

$$<W_o,\chi> = \int \left\{ \lim_{h\to 0} W_h(x_1) \right\} \chi(x_1)\, dx_1 \ ,$$

et grâce à la majoration (3.6), il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$<W_o,\chi> = \lim_{h\to 0} h^{-1} \left[\int \left\{ \partial_2^{k-1} \partial_1 w(x_1,f+h) + f'(x_1)\, \partial_2^k w(x_1,f+h) \right\} \chi(x_1)\, dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int \left\{ \partial_2^{k-1} \partial_1 w(x_1,f) + f'(x_1)\, \partial_2^k w(x_1,f) \right\} \chi(x_1)\, dx_1 \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1} \left[\int \left\{ \partial_2^{k-1} w(x_1,f+h) \right\}' \chi(x_1)\, dx_1 - \int \left\{ \partial_2^{k-1} w(x_1,f) \right\}' \chi(x_1) dx_1 \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int - \left\{ \partial_2^{k-1} w(x_1,f+h) - \partial_2^{k-1}(x_1,f) \right\} \chi'(x_1) d x_1 =$$

$$= \int - \partial_2^k w(x_1,f)\, \chi'(x_1) d x_1 = < \left\{ \partial_2^k w(\cdot,f(\cdot)) \right\}' ,\chi> \ ;$$

en rapprochant ce calcul de (3.5), on en déduit que la fonction $\partial_2^k w(x_1,f(x_1))$ est une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\text{(3.7)} \qquad \left[\partial_2^k w(x_1,f(x_1)) \right]' = \partial_2^k w(x_1,f(x_1)) \left[H_\zeta(x_1,f,0,0) + k\, \partial_2 H_{\xi_2}(x_1,f,0,0) \right] \ ;$$

comme de plus $\partial_2^k w(0,f(0)) = 0$ par construction de u_t, on en déduit par le théorème de Cauchy-Lipschitz que $\partial_2^k w(x_1,f(x_1)) = 0$.

Enfin, pour $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant k$ et $\alpha_1 > 0$, on peut écrire par récurrence sur α_1 :

$$\partial_1^{\alpha_1 - 1} \partial_2^{\alpha_2} w(x_1,f(x_1)) = 0 \Longrightarrow \left[\partial_1^{\alpha_1 - 1} \partial_2^{\alpha_2} w(x_1,f(x_1)) \right]' = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} w(x_1,f(x_1)) + f'(x_1) \partial_1^{\alpha_1 - 1} \partial_2^{\alpha_2 + 1} w(x_1,f(x_1)) = 0 \Longrightarrow \partial_x^\alpha w(x_1,f(x_1)) = 0 \ ,$$

et donc pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ avec $|\alpha| \leqslant k$, $[\partial_x^\alpha(u_t - v)]_{|\Sigma} = 0$.

<u>Cas n° 2 avec $r = n-1$</u> : nous traduisons que X et Y sont tangents à $\Sigma = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}$ par

$$H_{\xi_n}((x',0),0,0) = 0 . \tag{3.8}$$

Comme dans le cas précédent, nous posons $\delta(x') = w(x',0)$ et $\varepsilon(x') = \partial_n w(x',0)$. Remarquons qu'ici w est analytique comme différence de deux fonctions analytiques, et que δ et ε aussi comme traces de fonctions analytiques sur une sous-variété analytique. Par des calculs identiques à ceux du cas précédent, nous pouvons établir à l'aide de (3.2) et (3.8) que

$$\begin{cases} \partial_1 \delta(x') = a_1(x')\,\delta(x') + \sum\limits_{j=2}^{n-1} a_j(x')\,\partial_j \delta(x') + b(x')\,\varepsilon(x') \\ \partial_1 \varepsilon(x') = c_1(x')\,\delta(x') + \sum\limits_{j=2}^{n-1} c_j(x')\,\partial_j \delta(x') + d_1(x')\,\varepsilon(x') + \sum\limits_{j=2}^{n-1} d_j(x')\,\partial_j \varepsilon(x') \\ \delta(0,x_2,\dots,x_{n-1}) = \varepsilon(0,x_2,\dots,x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

où les coefficients a_j, b, c_j, et d_j sont des fonctions analytiques de x'. Par le théorème de Cauchy-Kowalevsky (on sait que δ et ε sont analytiques), on a $\delta = \varepsilon = 0$ au voisinage de x_o sur Σ, d'où

$$(u_t - v)_{|\Sigma} = [\partial_n(u_t - v)]_{|\Sigma} = 0 .$$

Pour obtenir les dérivées suivantes, on procède comme dans le cas précédent, mais sans aucune précaution puisque tout est analytique ; on montre d'abord par récurrence que $\partial_n^j w(x',0) = 0$ pour $j \leqslant k$ (en remplaçant le théorème de Cauchy-Lipschitz par celui de Cauchy-Kowalevsky), les autres identités à obtenir se déduisant trivialement de celles-là.

Cas n° 2 avec $r < n-1$: ici encore, les traces de $\partial_x^\alpha w$ sur Σ_o (qui est une variété analytique à une ou deux composantes connexes) sont analytiques. Le raisonnement précédent peut s'appliquer au voisinage d'un point quelconque de $\Sigma_o \cap \{x_1=0\}$, et par le théorème du prolongement analytique, il en résulte que $\partial_x^\alpha w_{|\Sigma_o} = 0$ pour $|\alpha| \leqslant k$. Comme $\Sigma = \overline{\Sigma}_o$, on a donc $[\partial_x^\alpha(u_t - v)]_{|\Sigma} = 0$ pour $|\alpha| \leqslant k$.

Cas n° 3 avec $r = n-1$: dans ce cas-ci, nous reprenons les notations des formules (2.3), (2.4) et (2.5) ; nous traduisons le fait que X et Y restent tangents à $\Sigma = \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}$ par $b_n(x',0) = 0$, puis nous posons $\delta(x',z) = w_t(x',0,z)$. En reportant dans l'équation (2.5), nous en déduisons que la fonction δ est l'unique (d'après le théorème de Cauchy-Kowalevsky) solution analytique du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_1 \delta(x',z) = \sum\limits_{j=2}^{n-1} b_j(x',0)\partial_j \delta(x',z) - g(x',0,z)\partial_z \delta(x',z) + g(x',0,z+\delta(x',z)) - g(x',0,z) \\ \delta(0,x_2,\dots,x_{n-1},z) = 0 \end{cases}$$

Comme 0 est clairement une solution analytique de ce problème, on a obtenu que $\delta(x',z) = 0$.

Puis pour $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $|\beta| \leqslant k$, posons $\varepsilon_\beta(x',z) = \partial_{x,z}^\beta w_t(x',0,z)$. Alors on peut montrer par récurrence que ε_β est l'unique solution analytique du problème

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_\beta(x',z) = \sum\limits_{j=2}^{n-1} b_j(x',0)\partial_j \varepsilon_\beta(x',z) - g(x',0,z)\partial_z \varepsilon_\beta(x',z) + g_\zeta(x',0,z)\, \varepsilon_\beta(x',z) \\ \varepsilon_\beta(0,x_2,\dots,x_{n-1},z) = 0\,, \end{cases}$$

d'où $\varepsilon_\beta(x',z) = 0$.

Enfin, nous pouvons écrire d'après (2.4)

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leqslant k\,,\quad \partial_x^\alpha(u_t - v)(x) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \partial_{x,z}^\beta w_t(x,v(x))v_\beta(x)$$

où les fonctions v_β sont des sommes de produits de dérivées de la fonction v. Cela nous donne encore sur Σ

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leqslant k\,,\quad \partial_x^\alpha(u_t - v)(x',0) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} \varepsilon_\beta(x',v(x',0))\, v_\beta(x',0)\,,$$

expression qui vaut 0 d'après ce qui précède.

Cas n° 3 avec $r < n-1$: ici encore, les traces de $\partial_{x,z}^\beta w_t$ sur $\Sigma_o \times \mathbb{C}$ (qui est une variété analytique à une ou deux composantes connexes) sont analytiques. Le raisonnement précédent peut s'appliquer au voisinage d'un point quelconque de $(\Sigma_o \times \mathbb{C}) \cap \{x_1 = 0\}$, et par le théorème du prolongement analytique, il en résulte que $\partial_{x,z}^\beta w_t{}_{|\Sigma_o \times \mathbb{C}} = 0$ pour $|\beta| \leqslant k$. On a donc $\partial_{x,z}^\beta w_t{}_{|\Sigma \times \mathbb{C}} = 0$ par continuité, et en tenant le même raisonnement que dans le cas précédent, on en déduit que $[\partial_x^\alpha(u_t - v)]_{|\Sigma} = 0$ pour $|\alpha| \leqslant k$.

Remarque : Les démonstrations que nous venons de donner pour chacun des trois cas parviennent au résultat par le même chemin ; dans le cas semi-linéaire cependant (cas n° 3), il aurait été sans doute plus rapide d'utiliser la bijection locale $w(x) = G(x,u(x))$ établie par Baouendi Goulaouic et Trèves [1 , th. 3] entre les solutions de l'équation semi-linéaire $F(x,u(x)\,,\,\partial_x u(x)) = 0$ et celles de l'équation linéaire $(X + iY)\,w(x) = 0$, en la combinant avec des résultats de non-unicité pour les équations linéaires (cf. Saint Raymond [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI M.S., GOULAOUIC C. & TREVES F. :
Uniqueness in certain first-order nonlinear complex Cauchy problems ,
à paraître.

[2] HÖRMANDER L. :
Linear partial differential operators ,
Springer-Verlag, Berlin 1963.

[3] HÖRMANDER L. :

The analysis of linear partial differential operators ,

Springer-Verlag, Berlin 1983.

[4] NAGANO T. :

Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras ,

J. of the Math. Soc. of Japan 18 , 398-404 (1966).

[5] SAINT RAYMOND X. :

Autour du théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy ,

à paraître dans J. of Diff. Geom.

[6] SJÖSTRAND J. :

Singularités analytiques microlocales ,

Astérisque n° 95 (1982).

[7] ZACHMANOGLOU E.C. :

Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations ,

Arch. Rat. Mech. Anal. 38 , 178-188 (1970).

5

RESULTATS D'UNICITE DE CAUCHY INSTABLE
DANS DES SITUATIONS OU
LA CONDITION DE PSEUDO-CONVEXITE DEGENERE
PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

À paraître

5

RESULTATS D'UNICITE DE CAUCHY INSTABLE DANS DES SITUATIONS OU LA CONDITION DE PSEUDO-CONVEXITE DEGENERE

PAR

XAVIER SAINT RAYMOND

Depuis une trentaine d'années, l'étude de l'unicité de Cauchy locale pour les problèmes C^∞ linéaires a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Un panorama des résultats obtenus est présenté dans Alinhac [3], et Zuily [15] en fournit des preuves d'une bonne partie.

Pour les opérateurs de type principal, Hörmander [7, chap. 8] a montré l'importance d'une propriété de convexité de la surface S portant les données de Cauchy, la pseudo-convexité, qui correspond au signe de certaines dérivées secondes de l'équation de S calculées aux zéros réels et complexes du symbole principal p de l'opérateur. Dans ce travail, nous avons cherché à préciser le rôle de cette condition de pseudo-convexité, mais, afin de limiter la complexité des phénomènes, nous nous sommes contentés d'examiner un cas où l'on sait bien que cette condition ne dépend que des zéros réels du symbole principal p (auxquels nous associons les bicaractéristiques correspondantes) : lorsque <u>l'opérateur est du deuxième ordre</u> (le premier ordre est traité dans Saint Raymond [12]) <u>de type principal réel</u> (voir Bahouri [5], Nirenberg [10] et Alinhac [2] lorsque ce n'est plus de type principal), et que <u>la surface S n'est pas caractéristique</u> (dans le cas contraire, se reporter à Saint Raymond [11]).

La littérature contient déjà de nombreux résultats pour cette catégorie de problème. D'abord, Calderón [6] a montré qu'il y avait unicité en $x_0 \in S$ si toutes les bicaractéristiques passant par x_0 sont transverses à S. Hörmander [7, th. 8.9.1] a étendu ce résultat au cas où l'ordre de contact des bicaractéristiques avec S ne dépasse pas 2, en ajoutant l'hypothèse qu'aucune bicaractéristique passant par x_0 n'est entièrement située, localement, dans le futur (hypothèse de pseudo-convexité). Alinhac [1, th. 2] a complété ce résultat en montrant que cette restriction était nécessaire à l'unicité (en supposant toujours que l'ordre de contact est au plus égal à 2). Enfin, Lerner et Robbiano [9], puis Hörmander [8, th. 28.4.3] qui en a simplifié les hypothèses, ont prouvé une propriété d'unicité compacte sans aucune restriction sur l'ordre de contact des bicaractéristiques en supposant que, dans tout un voisinage de x_0, aucune bicaractéristique d'ordre de contact égal à 2 n'est entièrement contenue dans le futur (pour les conséquences géométriques de ces hypothèses, voir le Corollaire 2.7. ci-dessous).

Tous les résultats précédents possèdent la propriété de stabilité suivante : lorsque les hypothèses sont vérifiées en x_0, elles le sont aussi en tout point x suffisamment proche de x_0 sur S et donc il y a unicité également en ces points-là. Ici, nous abordons des situations qui ne possèdent plus cette propriété de stabilité. Dans un premier théorème (théorème 2.1) nous établissons l'unicité en un point x_0 de la frontière d'un domaine où S est pseudo-convexe. Nous relions ensuite les hypothèses de ce théorème à la position par rapport à S des bicaractéristiques passant par x_0 : nous montrons qu'aucune d'entre elles n'est alors entièrement située, localement, dans le futur. Enfin, nous prouvons (au théorème 2.9) que cette dernière propriété est nécessaire à l'unicité même lorsque l'ordre de contact est strictement supérieur à 2.

Les méthodes que nous utilisons ici nous ont été inspirées par celles introduites par Hörmander [7, th. 5.2.1 & th. 5.3.2] puis développées par Zachmanoglou [13] & [14] pour étudier les problèmes analytiques. Ainsi nous démontrons le théorème d'unicité par une technique de déformation de surface qui se combine avec le théorème d'unicité de Hörmander ([7, th. 8.9.1], cf.

th. 1.1 ci-dessous) ; de l'autre côté, nous déduisons notre théorème de non-unicité de celui d'Alinhac & Baouendi ([4, th. 2], cf. th. 1.4 ci-dessous) après construction de phases.

1. HYPOTHESES. NOTATIONS. RESULTATS ANTERIEURS.

1.1. Hypothèses générales sur l'opérateur P et la surface S.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et, avec $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$,

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

un opérateur <u>différentiel linéaire du deuxième ordre</u> où les fonctions a_α sont C^∞ à valeurs complexes au voisinage de x_0. Nous noterons p le symbole principal de cet opérateur qui est la fonction définie sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par la formule :

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \ .$$

Nous supposerons tout au long de ce papier que l'opérateur P est <u>de type principal réel</u>, c'est-à-dire que p est à valeurs réelles et que $d_\xi p \neq 0$ sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Considérons maintenant une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^n$, S , passant par x_0 ; nous supposerons que cette hypersurface <u>S n'est pas caractéristique en x_0</u> , c'est-à-dire que si $\varphi(x) = 0$ en est une équation, où φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi(x_0) = 0$ et $d\varphi(x_0) \neq 0$,

$$p(x_0\, , d\varphi(x_0)) \neq 0 \ . \tag{1.1}$$

Avec ces hypothèses, nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy avec données sur S , ce qui se ramène classiquement par linéarité à la question : est-ce-que

$$P(x,D)\, u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0$$

au voisinage de x_o impliquent que u est nulle au voisinage de x_o ?

Signalons dès maintenant que dans les différents théorèmes que nous montrons ici ces hypothèses générales peuvent être affaiblies. Ainsi : (i) au théorème 2.1 et au corollaire 2.4, nous pouvons remplacer la condition " $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ " par " $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ " pour $|\alpha| < 2$; (ii) au corollaire 2.12 et dans tous les résultats du paragraphe 5, nous pouvons remplacer les hypothèses " P d'ordre 2 et S non caractéristique " par "P d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et $H_\varphi^2 p \neq 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$ " (pour les notations, voir le paragraphe suivant) ; (iii) enfin, dans le théorème 2.9, nous pouvons remplacer les hypothèses " P d'ordre 2 et de type principal " par " P d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et $d_\xi\, p(x_o,\xi_o) \neq 0$ " ; on peut aussi y supprimer l'hypothèse " S non caractéristique " à condition de perturber l'opérateur à l'ordre $m-1$ dans la conclusion (cf. Hörmander [7, th. 8.9.4] et Saint Raymond [11, §.II]).

1.2. Ordre de contact avec S des bicaractéristiques.

Pour toute fonction q appartenant à l'anneau des fonctions C^∞ à valeurs réelles définies sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, noté $C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$, le champ hamiltonien de q est donné par la formule

$$H_q = q_\xi(x,\xi) \cdot \partial_x - q_x(x,\xi) \cdot \partial_\xi \ .$$

Ainsi, à la fonction φ définissant S (considérée comme fonction sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ en posant $\varphi(x,\xi) = \varphi(x)$), correspond le champ $-\varphi_x(x) \cdot \partial_\xi$; la condition (1.1) peut alors être réécrite sous la forme

$$H_\varphi^2\, p\, (x_o) \neq 0 \tag{1.2}$$

puisque la fonction $H_{\varphi}^2 p(x,\xi)$ ne dépend plus de ξ.

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, notons $\mathcal{H}_p^k(S)$ l'idéal de $C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \smallsetminus 0)$ engendré par les fonctions p et $H_p^j \varphi$ pour $0 \leq j < k$. La formule

(1.3) $$H_p^j(\lambda\varphi) = \sum_{\ell=0}^{j} C_j^\ell (H_p^{j-\ell}\lambda)(H_p^\ell \varphi)$$

montre que cet idéal ne dépend pas de la fonction φ mais seulement de l'hypersurface S. Notons encore $\mathcal{C}ar_p^k(S)$ $(\subset T^*\mathbb{R}^n \smallsetminus 0)$ l'ensemble des zéros de $\mathcal{H}_p^k(S)$, puis

$$\mathcal{C}ar_p^k(S,x_0) = \left\{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^k(S) \,/\, x = x_0\right\} .$$

En un point de $\mathcal{C}ar_p^k(S)$, le signe de la quantité $H_p^k \varphi$ ne dépend que de l'hypersurface <u>orientée</u> S car (1.3) montre que

$$H_p^k(\lambda\varphi) = \lambda\, H_p^k \varphi \mod. \mathcal{H}_p^k(S) .$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, il est clair que $\mathcal{C}ar_p^{k+j}(S) \subset \mathcal{C}ar_p^k(S)$, et on notera $\mathcal{C}ar_p^o$ la variété caractéristique $\mathcal{C}ar_p^o(S) = p^{-1}(0)$ qui est indépendante de S. Le champ H_p est tangent à $\mathcal{C}ar_p^o$, et on appelle bicaractéristiques les courbes intégrales de H_p dessinées sur $\mathcal{C}ar_p^o$. Comme $H_p^j \varphi$ représente la j-ème dérivée de la fonction φ le long de la bicaractéristique, il est clair que si $(x_0,\xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^k(S) \smallsetminus \mathcal{C}ar_p^{k+1}(S)$, la projection sur la base de la bicaractéristique issue de (x_0,ξ_0) possède un contact d'ordre k exactement avec l'hypersurface S. $\mathcal{C}ar_p^k(S)$ représente donc l'ensemble des bicaractéristiques dont l'ordre de contact avec S est au moins égal à k.

1.3. <u>Résultats classiques</u>.

Les deux résultats classiques concernant le problème que nous étudions ici sont les suivants :

Théorème 1.1. (Hörmander [7, th. 8.9.1]) : Supposons que $H_p^2\varphi<0$ *sur* $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$. *Alors toute fonction à valeurs complexes* $u\in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant au voisinage de* x_o

$$P(x,D)\,u(x)=0 \qquad \text{et} \qquad u(x)=0 \ \text{ pour } \ \varphi(x)<0$$

s'annule au voisinage de x_o.

Théorème 1.2. (Alinhac [1, th. 2]) : Supposons qu'il existe $(x_o,\xi_o)\in \mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$ *tel que* $H_p^2\,\varphi(x_o,\xi_o)>0$. *Alors il existe deux fonctions* C^∞ *à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de* x_o

$$[P(x,D)+a(x)]u(x)=0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} a\subset \operatorname{supp} u=\{x\in\mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x)\geqslant 0\}\ .$$

Définition 1.3. : La condition $H_p^2\varphi<0$ *sur* $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$ *a été introduite dans un cadre plus général par Hörmander [7, chap. 8] ; lorsqu'elle est vérifiée, on dit que l'hypersurface S est pseudo-convexe en* x_o.

Avec ces deux résultats, qui règlent la question si $\mathscr{C}ar_p^3(S,x_o)=\emptyset$, nous en citons un troisième qui nous servira au paragraphe 4 (cf. aussi Hörmander [7, th. 8.9.4]) :

Théorème 1.4. (Alinhac & Baouendi [4, th. 2]) : Supposons qu'il existe deux fonctions C^∞ *à valeurs réelles* Φ *et* Ψ *définies au voisinage de* x_o *telles que :*

(i) $p(x,d\Phi(x))=0$;

(ii) $X=p_\xi(x,d\Phi(x))\cdot\partial_x\neq 0$ *et* $X\Psi(x)=0$;

(iii) $p(x_o,d\Psi(x_o))\neq 0$.

Alors il existe deux fonctions C^∞ *à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de* x_o

$$[P(x,D)+a(x)]u(x)=0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} a\subset\operatorname{supp} u=\{x\in\mathbb{R}^n \,/\, \Psi(x)\geqslant\Psi(x_o)\}\ .$$

Commentaire 1.5. : Afin de comparer ce théorème avec les précédents, supposons que $\Psi(x) = \Psi(x_o) + \varphi(x)$ auquel cas (iii) équivaut à (1.1) ; alors les conditions (i) et (ii) entraînent que $(x_o, d\Phi(x_o)) \in \mathscr{C}ar_p^\infty(S, x_o)$, et même que la bicaractéristique issue de ce point reste dans S.

2. ENONCE DES RESULTATS.

2.1. Le théorème d'unicité.

Théorème 2.1. : Supposons qu'il existe au voisinage de x_o une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que :

(i) pour tout point $(x_o, \xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^2(S, x_o)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $c > 0$ et un voisinage de (x_o, ξ_o) sur lequel :

$$\left\{\begin{array}{l} (x,\xi) \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \\ \text{et} \quad \psi(x) \geqslant \psi(x_o) \end{array}\right. \Rightarrow H_p^2\, \varphi(x,\xi) \leqslant -c\,[\psi(x) - \psi(x_o)]^k \;;$$

(ii) $H_p\,\psi \neq 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^3(S, x_o)$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant au voisinage de x_o

$$P(x,D)\,u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0$$

s'annule au voisinage de x_o.

Commentaires 2.2. : L'hypothèse (i) signifie qu'on suppose que S est pseudo-convexe dans le domaine $\psi(x) > \psi(x_o)$ au bord duquel se trouve x_o ; en réalité cette hypothèse est un peu plus forte puisqu'elle réclame aussi un contrôle de $H_p^2\varphi$ en fonction de la distance au bord. L'hypothèse (ii) signifie que les bicaractéristiques ayant un contact strictement supérieur à 2 sont obligatoirement transverses au bord du domaine $\psi(x) > \psi(x_o)$. L'exemple suivant montre que si les hypothèses du théorème sont vérifiées en x_o, elles ne le sont pas nécessairement en tout point voisin de x_o (instabilité).

Exemple 2.3. : Soient $x=(t,y_1,y_2)$ les points de $\mathbb{R}^3$, $x_o=(0,0,0)$, $\varphi(x)=t$ et $p(t,y_1,y_2\,;\tau,\eta_1,\eta_2)=\tau^2+\eta_1\eta_2+t\eta_1^2+t\,y_1^{k-2}\eta_2^2$ où $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On calcule que

$$H_p\varphi=2\tau\,,\quad \mathscr{C}ar_p^2(S)=\{t=\tau=\eta_1\eta_2=0\,,\ \eta_1^2+\eta_2^2\neq 0\}\,,$$

$$H_p^2\varphi=-2\eta_1^2-2y_1^{k-2}\eta_2^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{C}ar_p^3(S,x_o)=\{t=y_1=y_2=\tau=\eta_1=0\,,\ \eta_2\neq 0\}$$

si $k>2$, $\mathscr{C}ar_p^3(S,x_o)=\emptyset$ si $k=2$. Les hypothèses du théorème 1.1. sont donc vérifiées avec $\psi(x)=y_1$. Dans cet exemple, $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$ possède deux éléments (aux équivalences projectives près) dont l'un fournit une bicaractéristique d'ordre de contact 2 tangente au bord, et l'autre fournit une bicaractéristique d'ordre de contact k transverse au bord ; on remarquera en outre que si k est impair, le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus) peut s'appliquer en n'importe quel point x voisin de x_o sur S tel que $\psi(x)<\psi(x_o)$, ce qui illustre bien l'instabilité du théorème 2.1.

Lorsqu'il n'y a pas de bicaractéristique d'ordre de contact strictement supérieur à 3, il suffit de vérifier que S est pseudo-convexe dans un domaine $\psi(x)>\psi(x_o)$. Précisément :

Corollaire 2.4. : Supposons que $\mathscr{C}ar_p^4(S,x_o)=\emptyset$ et qu'il existe au voisinage de x_o une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que $(d\varphi\wedge d\psi)(x_o)\neq 0$ et $H_p^2\varphi\leq 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^2(S,x)$ pour tout x voisin de x_o tel que $\psi(x)>\psi(x_o)$. Alors, même conclusion qu'au théorème 2.1.

2.2. Conséquences géométriques des hypothèses du théorème 2.1.

Il est intéressant de relier les hypothèses du théorème 2.1. à la position (par rapport à S) des bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_o.

Proposition 2.5. : *Sous les hypothèses du théorème 2.1, toutes les bi-caractéristiques dont la projection sur la base passe par* x_o *possèdent au moins une branche localement contenue dans* $\{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^o \,/\, \varphi(x) < 0\}$ *(demi-espace du passé).*

On pourrait démontrer directement cette proposition en précisant les arguments donnés au paragraphe 5.4. Ici, nous la déduirons de la proposition suivante qui est plus délicate à obtenir :

Proposition 2.6. : *Supposons qu'il existe au voisinage de* x_o *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles* ψ *telle que* $H_p^2\,\varphi \leqslant 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S,x)$ *pour tout* x *voisin de* x_o *tel que* $\psi(x) > \psi(x_o)$. *Alors pour tout* $(x_o,\xi_o) \in \mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$, *il existe* $s_o > 0$ *tel que*

$$\varphi\left(e^{sH_p}(x_o,\xi_o)\right) \leqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < s\,H_p\,\psi(x_o,\xi_o) < s_o \; .$$

La proposition 2.6. fournit en outre l'énoncé suivant :

Corollaire 2.7. : *Supposons que* $H_p^2\,\varphi \leqslant 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S)$ *au voisinage de* x_o. *Alors toutes les bicaractéristiques issues des points de* $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$ *sont localement contenues dans* $\{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^o \,/\, \varphi(x) \leqslant 0\}$.

Commentaires 2.8. : Ce corollaire, dont une première version avait été démontrée par Lerner & Robbiano [9, 1. 2.2.1] conduit notamment aux deux constatations suivantes : (i) dans le théorème d'unicité compacte de Hörmander [8, th. 28.4.3], les hypothèses impliquent que toutes les bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_o plongent dans le domaine où on suppose que u est nulle ; (ii) chaque fois qu'une bicaractéristique issue d'un point de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$ n'est pas entièrement contenue dans le domaine $\varphi(x) \leqslant 0$ (par exemple lorsque son ordre de contact est impair et supérieur à 2), on peut trouver des points x arbitrairement proches de x_o et des points $(x,\xi) \in \mathscr{C}ar_p^2(S,x)$ tels que $H_p^2\varphi(x,\xi) > 0$, où l'on peut donc appliquer le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus) ; ceci prolonge la remarque sur l'instabilité que nous avions faite à propos de l'exemple 2.3 lorsque k est impair.

2.3. Le théorème de non-unicité.

D'après la proposition 2.5 et le commentaire 2.8 (i), tous les résultats d'unicité connus dans notre contexte supposent que les bicaractéristiques plongent dans le domaine où u est supposée nulle. Lorsque ce n'est plus le cas, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.9. : Supposons qu'il existe un entier $k > 0$ *et un point* $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^{2k}(S)$ *tel que* $H_p^{2k}\varphi(x_o,\xi_o) > 0$ *, et ajoutons les deux hypothèses suivantes :*

(i) $\forall q_1$ *et* $q_2 \in \mathscr{H}_p^k(S)$,

$$H_{q_1}\varphi(x_o,\xi_o) = H_{q_2}\varphi(x_o,\xi_o) = 0 \Rightarrow H_{q_1}q_2(x_o,\xi_o) = 0 \ ;$$

(ii) $\forall q \in \mathscr{H}_p^k(S)$,

$$d_\xi q(x_o,\xi_o) = 0 \Rightarrow (dq \wedge d\varphi)(x_o,\xi_o) = 0 \ .$$

Alors il existe deux fonctions C^∞ *à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de* x_o

$$[P(x,D) + a(x)]\,u(x) = 0\ ,\quad x_o \in \mathrm{supp}\, u \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) \geq 0\},\quad \text{et}\quad \mathrm{supp}\, a \subset \mathrm{supp}\, u\ .$$

Commentaires 2.10. : (i) on notera que nos hypothèses ne portent que sur les valeurs en (x_o,ξ_o) des dérivées de p et de φ sans aucune hypothèse au voisinage ; (ii) pour les cas où on dispose d'une bicaractéristique d'ordre de contact infini, il y a un résultat de Bahouri ([5, th. 2.1]) qui prolonge le théorème d'Alinhac & Baouendi (th. 1.4 ci-dessus).

<u>Exemple 2.11.</u> : Soient $x=(t,y_1,y_2)$ les points de $\mathbb{R}^3$, $x_o=(0,0,0)$, $\varphi(x)=t$, $p(t,y_1,y_2\,;\tau,\eta_1,\eta_2)=\tau^2+\eta_1\eta_2+t\eta_1^2-t\,y_1^{2k-2}\eta_2^2$ où $k\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, et $\xi_o=(0,0,1)$. On calcule que

$$H_p\varphi=2\tau\ ,\quad H_p^2\varphi=-2\eta_1^2+2y_1^{2k-2}\eta_2^2,\quad \text{puis pour}\quad 3\leqslant j\leqslant 2k\ ,$$

$$H_p^j\varphi=2\frac{(2k-2)!}{(2k-j)!}\,y_1^{2k-j}\,\eta_2^j+O([\,|x-x_o|+|\xi-\xi_o|\,]^{2k+1-j})\ .$$

Il en résulte que $(x_o,\xi_o)\in\mathcal{C}ar_p^{2k}(S,x_o)$ et que $H_p^{2k}\varphi(x_o,\xi_o)=2[(2k-2)!]>0$. Les autres hypothèses du théorème 2.9 sont également vérifiées car :

(i) d'après les formules précédentes,

- pour $j<2k$, $H_{H_p^j\varphi}\varphi(x_o,\xi_o)=0\Longleftrightarrow j\neq 1$;
- pour $0\leqslant j,\ell<k$, $j\neq 1$ et $\ell\neq 1$, $H_pH_p^j\varphi=H_p^{j+1}\varphi$, et $H_{H_p^j\varphi}H_p^\ell\varphi=O([\,|x-x_o|+|\xi-\xi_o|\,]^{k+1})$.

(ii) pour $1<j<2k-1$, et donc pour $1<j<k$, $(dH_p^j\varphi)(x_o,\xi_o)=0$; il suffit alors d'écrire

$$d_\xi(\alpha p+\beta\varphi+\gamma H_p\varphi)(x_o,\xi_o)=0\Rightarrow\alpha(x_o,\xi_o)d\eta_1+\gamma(x_o,\xi_o)d\tau=0$$

$$\Rightarrow\alpha(x_o,\xi_o)=\gamma(x_o,\xi_o)=0\Rightarrow[d(\alpha p+\beta\varphi+\gamma H_p\varphi)\wedge d\varphi](x_o,\xi_o)=0\ .$$

Dans [1] (cf. th. 1.2 ci-dessus), Alinhac avait montré que lorsque $k=1$, il suffit de supposer $(x_o,\xi_o)\in\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$ et $H_p^2\varphi(x_o,\xi_o)>0$ pour obtenir le résultat. C'est également vrai si $k=2$:

<u>*Corollaire*</u> <u>*2.12.*</u> *: Supposons qu'il existe un point* $(x_o,\xi_o)\in\mathcal{C}ar_p^4(S,x_o)$ *tel que* $H_p^4\varphi(x_o,\xi_o)>0$. *Alors même conclusion qu'au théorème 2.9.*

3. DEMONSTRATION DES RESULTATS D'UNICITE.

3.1. Principe de la déformation de surface.

Lemme 3.1. : Supposons qu'il existe un ouvert Ω *de* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in \Omega$, *et une fonction* $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ *à valeurs réelles telle que* $d\varphi_1 \neq 0$ *dans* Ω *et*

(i) $K = \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \geqslant 0$ *et* $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x_o)\}$ *est compact ;*

(ii) $H_p^2 \varphi_1 < 0$ *sur* $\{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^o \,/\, x \in K$ *et* $H_p \varphi_1(x,\xi) = 0\}$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ *vérifiant* $P(x,D)u(x)=0$ *dans* Ω *et* $u(x) = 0$ *dans* $\{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) < 0\}$ *s'annule au voisinage de* x_o.

Démonstration : Soit $k = \{x \in \operatorname{supp} u \,/\, \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x_o)\}$; comme $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \geqslant 0\}$, on a $k \subset K$ et k est compact grâce à (i).

Raisonnons par l'absurde : supposons que $x_o \in \operatorname{supp} u$; alors $x_o \in k \neq \emptyset$, et la fonction φ_1 atteint son minimum sur k en un point $x_1 \in k$ $(\subset K)$. On a donc

$$x_1 \in \operatorname{supp} u \ , \tag{3.1}$$

$$x_1 \in K \ , \tag{3.2}$$

$$\varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_1(x_o) \qquad \text{et} \qquad k \subset \{x \in \Omega \,/\, \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_1)\} \tag{3.3}$$

par définitions de k et de x_1. Or

$$\operatorname{supp} u \subset (k \cup \{x \in \Omega \,/\, \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_o)\}) \subset \{x \in \Omega \,/\, \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_1)\}$$

grâce à (3.3) ; de plus, grâce à (3.2) et à l'hypothèse (ii) du lemme, l'hypersurface orientée $\{x \in \Omega \,/\, \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)\}$ est pseudo-convexe en x_1 : on ne peut donc avoir (3.1) à cause du théorème d'unicité de Hörmander (th. 1.1 ci-dessus).

3.2. Démonstration du théorème 2.1 : choix de la déformation et compacité.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2.1 en nous ramenant à la situation décrite ci-dessus ; le présent paragraphe est consacré au choix de la déformation φ_1 et à la vérification de l'hypothèse (i) du lemme 3.1 ; la démonstration du théorème sera ensuite complétée au paragraphes 3.3 & 3.4.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 2.1 et remarquons que si $\mathcal{C}ar_p^3(S,x_o) = \emptyset$, l'hypothèse (i) entraîne que $H_p^2\varphi < 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$, et il n'y a donc plus rien à démontrer puisque ce sont là les hypothèses du théorème 1.1. Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{C}ar_p^3(S,x_o) \neq \emptyset$ et d'après l'hypothèse (ii), il existe donc un point (x_o,ξ_o) où $H_p\varphi = 0$ et $H_p\psi \neq 0$; cela nous permet d'une part de conclure que $(d\varphi\wedge d\psi)(x_o) \neq 0$ et d'autre part d'utiliser les résultats du lemme 5.2 dont la démonstration sera donnée au paragraphe 5.1.

Choisissons comme coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$: $x_n = \varphi(x)$, $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_o)$, et complétons avec $x' = (x_1,\dots,x_{n-2})$. Si q est un voisinage compact de x_o dans $\mathbb{R}^n$ où tout est défini et où on peut appliquer les résultats du lemme 5.2, posons $Q = \{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^o \,/\, x\in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$ avec $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. En utilisant l'hypothèse (i) du théorème 2.1 et la compacité de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)\cap Q$, on a, avec des constantes $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $c_o>0$, une estimation (uniforme)

$$(3.4)\qquad H_p^2\varphi \leqslant -c_o\, x_{n-1}^k \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}ar_p^2(S)\cap\{(x,\xi)\in Q \,/\, x_{n-1}\geqslant 0\}$$

pourvu que l'on ait choisi q assez petit. Si nous notons $C_o = \sup\limits_Q |H_p\psi|$, notre déformation de surface sera définie par la formule

$$(3.5)\qquad \varphi_\varepsilon(x) = x_n - \varepsilon^{k+1} x_{n-1} - \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{c_o}{C_o^2}\frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \varepsilon^{k+1}|x'|^2$$

où le réel $\varepsilon > 0$ reste à choisir.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule

$$f(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{c_o}{C_o^2} \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \quad ;$$

cette fonction vérifie

$$f(0) = 0 \ , \ f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = -\infty \ ;$$

il existe donc trois réels α, β et γ tels que $\alpha < 0 < \beta < \gamma$ et

(3.6) $$\{t \in]\alpha,\gamma[\ / \ f(t) \geqslant 0\} = [0,\beta] \ ;$$

nous posons alors :

$$\Omega_\varepsilon = \{ (x', x_{n-1}, x_n) \ / \ |x'| < \varepsilon^{1/3} \ , \alpha\varepsilon < x_{n-1} < \gamma\varepsilon \quad \text{et} \quad |x_n| < \varepsilon\}$$

$$\text{et} \quad K_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon \ / \ \varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon(x) \leqslant 0\} \ .$$

D'après (3.5),

$$K_\varepsilon = \left\{x \in \Omega_\varepsilon \ / \ 0 \leqslant x_n \leqslant \varepsilon^{k+1} \ x_{n-1} + \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_o}{C_o^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \varepsilon^{k+1} \ |x'|^2\right\}$$

$$\subset \left\{x \in \Omega_\varepsilon \ / \ 0 \leqslant \varepsilon^{k+1} \ x_{n-1} + \varepsilon^k \ \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_o}{C_o^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \varepsilon^{k+2} \ f\left(\frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right)\right\} .$$

D'après (3.6), on a donc $K_\varepsilon \subset \{x \in \Omega_\varepsilon \ / \ x_{n-1} \in [0,\beta\varepsilon]\}$, puis on montre de même que pour $x \in K_\varepsilon$, $|x'| \leqslant (\beta + \frac{\beta^2}{2})^{1/2} \ \varepsilon^{1/2}$ et $0 \leqslant x_n \leqslant (\beta + \frac{\beta^2}{2})\varepsilon^{k+2}$. Il existe alors clairement un $\varepsilon_o > 0$ tel que

(3.7) $$\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_o[\ , \ \Omega_\varepsilon \subset q \quad \text{et} \quad K_\varepsilon \quad \text{est compact dans} \ \Omega_\varepsilon \ .$$

3.3. Démonstration du théorème 2.1 : propriété de pseudo-convexité.

Lemme 3.2. : Sous les hypothèses du théorème 2.1 et avec les notations précédentes, il existe $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_0[$ *tel que pour tout* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1[$, $H_p^2 \varphi_\varepsilon < 0$ *sur* $\{(x,\xi) \in Q \,/\, x \in K_\varepsilon$ *et* $H_p \varphi_\varepsilon (x,\xi) = 0\}$.

Démonstration : Comme toutes les fonctions ne dépendant que de p, de φ et de ψ envisagées ici sont continues sur le compact Q, les différentes constantes C_j apparaissant ci-dessous en désigneront des bornes (indépendantes de ε et de $(x,\xi) \in Q$).

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.1 entraînent que $H_p^2 \varphi < 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_0) \cap \{(x,\xi) \in Q \,/\, H_p \psi (x,\xi) = 0\}$, et donc il existe $c_1 > 0$ telle que $H_p^2 \varphi \leqslant -2c_1$ sur ce compact, puis il en existe un voisinage ouvert U tel que $H_p^2 \varphi \leqslant -c_1$ dans $U \cap Q$. Si nous posons

$$\delta = \inf_{Q \setminus U} \max \{ |x - x_0| \,,\, |H_p \varphi (x,\xi)| \,,\, |H_p \psi (x,\xi)| \} ,$$

$\delta > 0$ par continuité des fonctions considérées et définition de U, et on a

$$\text{(3.8)} \qquad \forall (x,\xi) \in Q , \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta , \\ |H_p \varphi (x,\xi)| < \delta \quad \text{et} \\ |H_p \psi (x,\xi)| < \delta \end{array} \right. \Rightarrow \quad H_p^2 \varphi (x,\xi) \leqslant -c_1 .$$

Comme $x_n = \varphi(x)$ et $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_0)$, la formule (3.5) donne

$$\text{(3.9)} \left\{ \begin{array}{l} H_p \varphi_\varepsilon = H_p \varphi - H_p \psi \left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \dfrac{c_0}{C_0^2} \dfrac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1} \right) + \varepsilon^{k+1} H_p |x'|^2 , \qquad \text{et} \\ H_p^2 \varphi_\varepsilon = H_p^2 \varphi - H_p^2 \psi \left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \dfrac{c_0}{C_0^2} \dfrac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1} \right) - (H_p \psi)^2 \left(\varepsilon^k - \dfrac{c_0}{C_0^2} x_{n-1}^k \right) + \varepsilon^{k+1} H_p^2 |x'|^2 . \end{array} \right.$$

La première de ces deux formules prouve que pour $(x,\xi) \in Q$ et $x \in K_\varepsilon$,

$$|H_p\varphi_\varepsilon - H_p\varphi| \leqslant C_1\,\varepsilon^{k+1} \quad ,$$

et nous avons donc un $\varepsilon_2 > 0$ ne dépendant que de p, de φ et de ψ tel que

(3.10) $\forall\,\varepsilon \in \,]0,\varepsilon_2[$, $|x-x_o| < \delta$ et $|H_p\varphi_\varepsilon - H_p\varphi| < \delta$ pour $(x,\xi) \in Q$ et $x \in K_\varepsilon$.

Dans la suite, nous supposerons que $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_o,\varepsilon_2\}$.

Soit maintenant un point $(x,\xi) \in Q$ tel que $x \in K_\varepsilon$ et $H_p\varphi_\varepsilon(x,\xi) = 0$. Nous distinguerons deux cas :

a) <u>Si $|H_p\psi(x,\xi)| < \delta$</u> , alors grâce à (3.10) et à (3.8), on a $H_p^2\varphi(x,\xi) \leqslant -c_1$ d'où, d'après (3.9),

$$H_p^2\varphi_\varepsilon(x,\xi) \leqslant -c_1 + C_2\,\varepsilon^k \; .$$

Il existe donc un $\varepsilon_3 > 0$ ne dépendant que de c_1 et de C_2 (i.e. que de p, de φ et de ψ) tel que $H_p^2\varphi_\varepsilon(x,\xi) \leqslant -c_1/2$ pourvu que $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$.

b) <u>Si $|H_p\psi(x,\xi)| \geqslant \delta$</u> , la formule (3.9) donne

$$H_p^2\varphi_\varepsilon(x,\xi) \leqslant H_p^2\varphi(x,\xi) + c_o\,x_{n-1}^k - \delta^2\varepsilon^k + C_3\,\varepsilon^{k+1} \; .$$

Comme (x,ξ) est ici tel que $|\varphi(x)| \leqslant (\beta + \frac{\beta^2}{2})\varepsilon^{k+2}$ et $|H_p\varphi(x,\xi)| \leqslant C_1\,\varepsilon^{k+1}$, nous pouvons, grâce au lemme 5.2, trouver un point $(y,\eta) \in Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S)$ tel que

$$\psi(y) = \psi(x) \qquad \text{et} \qquad |H_p^2\varphi(y,\eta) - H_p^2\varphi(x,\xi)| \leqslant C_4\,\varepsilon^{k+1} \quad ;$$

nous pouvons alors appliquer l'estimation (3.4) au point (y,η) qui vérifie $y_{n-1} = \psi(y) - \psi(x_o) = \psi(x) - \psi(x_o) = x_{n-1} \geqslant 0$, ce qui donne finalement

$$H_p^2\varphi_\varepsilon(x,\xi) \leqslant -\delta^2\varepsilon^k + C_5\,\varepsilon^{k+1}$$

qui est le résultat cherché pourvu qu'on choisisse $\varepsilon < \varepsilon_4 = \delta^2/C_5$.

Nous obtenons donc le lemme 3.2 en prenant $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

3.4. Démonstration du théorème 2.1 : choix de ε.

Soit $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que, au voisinage de x_0

$$P(x,D)u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0 .$$

Il existe alors un $\varepsilon_u > 0$ tel que ces propriétés aient lieu dans l'ouvert Ω_ε dès que $\varepsilon < \varepsilon_u$. Si donc nous choisissons $\varepsilon = 1/2 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_u\}$, nous pouvons appliquer le lemme 3.1 avec $\Omega = \Omega_\varepsilon$ et $\varphi_1 = \varphi_\varepsilon$ puisque la compacité est assurée par (3.7) et la pseudo-convexité par le lemme 3.2. La démonstration du théorème est donc complète.

3.5. Démonstration du corollaire 2.4.

Quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_0)$, nous pouvons supposer que $\psi(x_0) = 0$. D'après le théorème 2.1, et comme les hypothèses du corollaire 2.4 entraînent que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_0)$, il nous suffit d'établir que pour tout $(x_0,\xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^3(S,x_0)$: (i) $H_p \psi(x_0,\xi_0) \neq 0$; (ii) il existe une constante $c > 0$ telle que dans un voisinage de (x_0,ξ_0),

$$(x,\xi) \in \mathcal{C}ar_p^2(S) \quad \text{et} \quad \psi(x) \geq 0 \Rightarrow H_p^2 \varphi(x,\xi) \leq -c\,\psi(x) .$$

Soit donc un point $(x_0,\xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^3(S,x_0)$.

(i) Supposons que $H_p \psi(x_0,\xi_0) = 0$. Comme p est de type principal, on pourra trouver une autre fonction ψ_2 telle que $\psi_2(x_0) = 0$ et $H_p \psi_2(x_0,\xi_0) = 1$. Alors $(d\varphi \wedge d\psi \wedge d\psi_2)(x_0) \neq 0$ puisque par hypothèse $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et que $H_p \varphi = H_p \psi = 0 \neq H_p \psi_2$ en (x_0,ξ_0). D'après le lemme 5.1 (propriété (5.2)), nous pouvons donc utiliser φ, $H_p \varphi$, ψ et ψ_2 comme coordonnées sur $\mathcal{C}ar_p^0$ près de

(x_o,ξ_o). Plus précisément, nous choisirons des coordonnées $(t,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-4} \times \mathbb{R}^2$ définies de la façon suivante : comme $H_p \psi_2 (x_o,\xi_o) \neq 0$, il existe, pour tout (x,ξ) dans un voisinage, un unique réel t tel que

$$\psi_2\left(e^{-t H_p}(x,\xi)\right) = 0 \ ;$$

comme $H_p \psi_2 (x_o,\xi_o) = 1$, cette formule nous assure que $\psi_2 \sim t$ et que $H_p t \equiv 1$; nous prenons ensuite $y_1 = \psi$, $z_1 = \varphi$, $z_2 = H_p \varphi$, et nous complétons ce système de coordonnées par des fonctions $y_2, \dots, y_{2n-4}$ choisies arbitrairement sur $\{t=0\}$, puis prolongées au voisinage avec la condition $H_p y_j \equiv 0$.

Par ce choix de coordonnées, on a $\mathscr{C}ar_p^2(S) = \{(t,y,z) \in \mathscr{C}ar_p^o \,/\, z=0\}$ et $\omega(s) = e^{s H_p}(x_o,\xi_o) = (s \,;\psi[\omega(s)], 0, \dots, 0 \,;\varphi[\omega(s)], H_p\varphi[\omega(s)])$. Grâce à une formule de Taylor, on peut donc écrire

$$H_p^2 \varphi[\omega(s)] = H_p^2 \varphi(s,0,0) + \psi[\omega(s)]\, f(s) + \varphi[\omega(s)]\, g(s) + H_p \varphi[\omega(s)]\, h(s) \ ,$$

d'où en dérivant : $\partial_t H_p^2 \varphi(0,0,0) = H_p^3 \varphi(x_o,\xi_o) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne donc

$$H_p^2 \varphi(t,y,0) = c(t,y)\,(t + a(y)) \tag{3.11}$$

où $c(0,0) = c_o \neq 0$ et $a(0) = 0$. Si donc nous posons $\omega_\varepsilon = (c_o\,\varepsilon \,; \varepsilon^2, 0, \dots, 0 \,; 0,0)$, ω_ε tend vers (x_o,ξ_o) quand ε tend vers 0, et

$$\omega_\varepsilon \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \ , \quad \psi(\omega_\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0 \ , \quad \text{mais} \quad H_p^2 \varphi(\omega_\varepsilon) = c_o^2\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0$$

pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit, ce qui contredit l'hypothèse du corollaire 2.4.

(ii) Maintenant que nous savons que $H_p \psi(x_o,\xi_o) = \lambda \neq 0$, nous reprenons la construction de coordonnées locales donnée ci-dessus avec des modifications évidentes de façon à obtenir

$$H_p t \equiv 1 \ , \ \psi \sim \lambda t \ , \ H_p y_j \equiv 0 \quad \text{pour} \quad j = 1 , \ldots , 2n-4 \ ,$$

$$z_1 = \varphi \ , \ z_2 = H_p \varphi \quad \text{et} \quad \mathscr{C}ar_p^2(S) = \{ (t,y,z) \in \mathscr{C}ar_p^o \ / \ z = 0\} \ .$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on établit la formule (3.11) ; l'hypothèse du corollaire 2.4 nous assure que pour $\lambda t \geqslant 0$, $H_p^2 \varphi(t,y,0) \leqslant 0$, d'où on tire, en remplaçant y par 0 puis t par 0 , que $c_o/\lambda < 0$ puis que $c_o\, a(y) \leqslant 0$, ce qui donne finalement que pour $\lambda t \geqslant 0$,

$$H_p^2 \varphi(t,y,0) \leqslant c(t,y)t \leqslant \frac{1}{2} (c_o/\lambda)(\lambda t) \ ;$$

comme $\psi \sim \lambda t$ et que $\mathscr{C}ar_p^2(S) = \{ (t,y,z) \in \mathscr{C}ar_p^o \ / \ z = 0\}$, cela signifie que

$$(x,\xi) \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \quad \text{et} \quad \psi(x) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad H_p^2 \varphi(x,\xi) \leqslant \frac{1}{3} (c_o/\lambda)\, \psi(x) \ ,$$

d'où le corollaire 2.4.

4. DEMONSTRATION DES RESULTATS DE NON-UNICITE.

Le théorème 2.9 s'obtient par application directe du théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus) ; il reste toutefois à construire les phases Φ et Ψ permettant d'utiliser ce résultat.

4.1. Démonstration du théorème 2.9 : construction de la phase Φ.

Lemme 4.1. : Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe une application linéaire symétrique $F : T_{x_o} \mathbb{R}^n \to T^*_{x_o} \mathbb{R}^n$ *telle que*

(4.1) $$d_x p(x_o,\xi_o) + F[d_\xi p(x_o,\xi_o)] = 0 \ ;$$

(4.2) $$\forall q \in \mathscr{H}_p^k(S) \ , \ (d_x q(x_o,\xi_o) + F[d_\xi q(x_o,\xi_o)]) \wedge d\varphi(x_o) = 0 \ .$$

Démonstration : Choisissons sur $\mathbb{R}^n$ des coordonnées locales (x',x'',x_n) avec $x' = (x_1,\ldots,x_{r-1})$, $x'' = (x_r,\ldots,x_{n-1})$ et $x_n = \varphi(x)$ telles que $d_\xi p(x_o,\xi_o) = d\xi_{n-1}$ et

$$\{d_\xi q(x_o,\xi_o)\ /\ q\in\mathcal{K}_p^k(S)\} = \begin{cases}\{\sum_j X_j\, d\xi_j\ /\ X'=0\} & \text{s'il existe } q_o\in\mathcal{K}_p^k(S) \text{ tel} \\ \text{que } H_{q_o}\varphi(x_o,\xi_o)\neq 0 & \underline{\text{(cas n° 1)}}\ , \text{ ou} \\ \{\sum_j X_j\, d\xi_j\ /\ X'=X_n=0\} & \text{si } \forall q\in\mathcal{K}_p^k(S)\ , \\ H_q\varphi(x_o,\xi_o)=0 & \underline{\text{(cas n° 2)}}. \end{cases}$$

Puis nous choisissons des éléments $q_j\in\mathcal{K}_p^k(S)$ pour $r\leqslant j\leqslant n$ (cas n° 1) ou $r\leqslant j<n$ (cas n° 2) tels que $q_{n-1}=p$ et

$$d_\xi\, q_j\,(x_o,\xi_o) = d\,\xi_j\ ; \tag{4.3}$$

nous posons alors pour $r\leqslant j\leqslant n$ (ou $r\leqslant j<n$ suivant le cas)

$$F_{j,\ell} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_\ell}\,(x_o,\xi_o) \quad \text{pour} \quad 1\leqslant \ell<n\ , \tag{4.4}$$

et de plus, si nous sommes dans le cas n° 2 ,

$$F_{n,n-1} = -\frac{\partial p}{\partial x_n}\,(x_o,\xi_o)\ . \tag{4.5}$$

Les quantités $F_{j,\ell}$ et $F_{\ell,j}$ ne sont simultanément définies que pour $r\leqslant j,\ell<n$, et on a alors d'après (4.3) et (4.4)

$$H_{q_j}\,\varphi\,(x_o,\xi_o) = H_{q_\ell}\,\varphi\,(x_o,\xi_o) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_{j,\ell}-F_{\ell,j} = H_{q_j}\,q_\ell\,(x_o,\xi_o)\ ,$$

d'où $F_{j,\ell}=F_{\ell,j}$ grâce à l'hypothèse (i) du théorème 2.9 ; nous pouvons donc compléter le tableau des $F_{j,\ell}$ en une matrice symétrique, et nous définissons l'application linéaire F par la formule

$$F\left[\sum_{j=1}^n X_j\, d\xi_j\right] = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{j=1}^n F_{j,\ell}\,X_j\right) dx_\ell\ ;$$

nous obtenons alors en utilisant (4.3) et (4.4) que pour $r\leqslant j\leqslant n$ (ou $r\leqslant j<n$ suivant le cas)

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_\ell}\,(x_o,\xi_o) + (F[d_\xi\, q_j\,(x_o,\xi_o)])_\ell = \frac{\partial q_j}{\partial x_\ell}\,(x_o,\xi_o) + F_{j,\ell} = 0 \tag{4.6}$$
$$\text{pour} \quad 1\leqslant \ell<n\ .$$

Le même calcul, pour $j=n-1$ et $\ell=n$ donne

$$\frac{\partial p}{\partial x_n}(x_o,\xi_o)+\Big(F[d_\xi p(x_o,\xi_o)]\Big)_n=\begin{cases}0 & \text{d'après (4.5) dans le cas n° 2, ou}\\ -H_p\, q_n\,(x_o,\xi_o) & \text{dans le cas n° 1 ,}\end{cases}$$

et cette dernière expression est nulle puisque $H_p\, q_n \in \mathcal{H}_p^{k+1}(S)$ et que $(x_o,\xi_o)\in \mathcal{C}ar_p^{2k}(S)\subset \mathcal{C}ar_p^{k+1}(S)$; avec les équations (4.6), cela nous donne donc (4.1).

Enfin, si $q\in\mathcal{H}_p^k(S)$, il existe grâce à notre choix des q_j des coefficients $X_j\in\mathbb{R}$ tels que

$$d_\xi\, q\,(x_o,\xi_o)=\sum_{j=r}^{n(-1)} X_j\, d_\xi\, q_j\,(x_o,\xi_o)\ , \tag{4.7}$$

et on calcule alors qu'en (x_o,ξ_o)

$$d_x\, q+F\,[d_\xi\, q\,]=d_x\, q+\sum X_j\, F\,[d_\xi\, q_j\,]=d_x\, q-\sum X_j\, d_x q_j+\alpha_o\, d\, x_n$$

d'après (4.6), puis

$$\Big(d_x q(x_o,\xi_o)+F[d_\xi q(x_o,\xi_o)]\Big)\wedge d\varphi(x_o)=\Big(d_x[q-\sum X_j\, q_j](x_o,\xi_o)\Big)\wedge d\varphi(x_o)$$

d'où (4.2) grâce à (4.7) et à l'hypothèse (ii) du théorème 2.9.

<u>Lemme</u> <u>4.2</u>. : *Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe au voisinage de x_o une fonction Φ de classe C^∞ à valeurs réelles telle que*

$$d\Phi(x_o)=\xi_o \quad \text{et} \quad p(x,d\Phi(x))=0 \quad \text{près de } x_o\ ; \tag{4.8}$$

$$\forall\, q\in\mathcal{H}_p^k(S)\ ,\quad (dQ\wedge d\varphi)(x_o)=0 \quad \text{où on a posé} \quad Q(x)=q(x,d\Phi(x))\ . \tag{4.9}$$

<u>Démonstration</u> : En reprenant les notations de la démonstration précédente, nous posons $\xi_o=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ puis

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{n-2},0,x_n) = \sum_{j\neq n-1} x_j\Big(\xi_j + \frac{1}{2}\sum_{\ell\neq n-1} F_{j,\ell}\, x_\ell\Big). \tag{4.10}$$

Par un théorème classique (cf. Hörmander [7, th. 1.8.2]) nous pouvons étendre cette fonction en une solution de (4.8) car $d_\xi p(x_o,\xi_o) = d\,\xi_{n-1}$ (cf. (4.3)). En dérivant (4.10) lorsque j et ℓ sont différents de $n-1$, et en dérivant (4.8) et en comparant avec (4.1) dans les autres cas, on obtient que

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\,\partial x_\ell}(x_o) = F_{j,\ell} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j,\ell \leqslant n\ ,$$

ce qui entraîne que pour $q \in \mathcal{H}_p^k(S)$,

$$(dQ \wedge d\varphi)(x_o) = (d_x q(x_o,\xi_o) + F[d_\xi q(x_o,\xi_o)]) \wedge d\varphi(x_o)$$

d'où (4.9) grâce à (4.2).

4.2. Démonstration du théorème 2.9 : construction de la phase Ψ.

Lemme 4.3. : Soient Φ une solution C^∞ de l'équation $p(x,d\Phi(x)) = 0$ et $X = p_\xi(x,d\Phi(x))\cdot\partial_x$ le champ de transport correspondant ; alors pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout entier $j \in \mathbb{N}$, $X^j\psi(x) = H_p^j\psi(x,d\Phi(x))$.

Démonstration : Par récurrence. Pour $j = 0$ ou 1, c'est bien clair ; puis

$$X[H_p^j\psi(x,d\Phi(x))] = p_\xi(x,d\Phi(x)) \cdot ([H_p^j\psi(x,\xi)]_x + \Phi_{xx}(x)[H_p^j\psi(x,\xi)]_\xi)_{\xi = d\Phi(x)} =$$

$$= (p_\xi(x,d\Phi(x)) \cdot [H_p^j\psi(x,\xi)]_x - p_x(x,d\Phi(x)) \cdot [H_p^j\psi(x,\xi)]_\xi)_{\xi=d\Phi(x)} = H_p^{j+1}\psi(x,d\Phi(x))$$

où l'on a utilisé que $p_\xi(x,d\Phi(x)) \cdot \Phi_{xx}(x) = -p_x(x,d\Phi(x))$, résultat qui s'obtient en dérivant l'équation $p(x,d\Phi(x)) = 0$.

D'après le théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus), le théorème 2.9 résulte maintenant du :

Lemme 4.4. : Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe deux fonctions C^∞ à valeurs réelles Φ et Ψ définies au voisinage de x_o et possédant les propriétés suivantes :

(4.11) $$p(x,d\Phi(x)) = 0 \;;$$

(4.12) $$X = p_\xi(x,d\Phi(x))\cdot\partial_x \neq 0 \quad \text{et} \quad X\Psi(x) = 0 \;;$$

(4.13) $$x_o \in \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \Psi(x) \geqslant 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x) \geqslant 0\} \;.$$

Démonstration : Comme fonction Φ, nous prenons celle qui nous est fournie par le lemme 4.2. La propriété (4.8) entraîne la propriété (4.11), et aussi que $X \neq 0$ et $X\varphi(x_o) = 0$. Nous pouvons donc trouver des coordonnées locales (x',x_{n-1},x_n), avec $x' = (x_1,\dots,x_{n-2})$, qui redressent le champ X en

(4.14) $$X = \partial_{n-1}$$

et telles que $x_o = (0,0,0)$ et $d\varphi(x_o) = d\,x_n$. Grâce au théorème des fonctions implicites, S possède une équation de la forme $\varphi_1(x) = 0$ avec $\varphi_1(x',x_{n-1},x_n) = x_n + \varphi_o(x',x_{n-1})$ où φ_o est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi_o(0,0) = 0$ et $d\varphi_o(0,0) = 0$. Les hypothèses du théorème étant invariantes par changement d'équation de S, nous pouvons supposer que c'est φ elle-même qui s'écrit ainsi. Un développement de Taylor en x' nous donne donc

(4.15) $$\varphi(x',x_{n-1},x_n) = x_n + \varphi(0,x_{n-1},0) + x'\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x'}(0,x_{n-1},0) + O(|x'|^2)$$

où $|x'|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2$.

Utilisons maintenant l'hypothèse : $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^{2k}(S)$ et $H_p^{2k}\varphi(x_o,\xi_o) > 0$; avec (4.8), le lemme 4.3 et (4.14), cela entraîne que $\partial_{n-1}^j\varphi(0,0,0) = 0$ pour $0 \leqslant j < 2k$ et $\partial_{n-1}^{2k}\varphi(0,0,0) = 2c > 0$; il en résulte que pour $|x_{n-1}|$ suffisamment petit

(4.16) $$\varphi(0,x_{n-1},0) \geq c\, x_{n-1}^{2k} \ ;$$

puis, toujours d'après le lemme 4.3 et (4.14), $\partial_{n-1}^{j}\varphi(x) = q_j(x, d\Phi(x))$ pour des fonctions $q_j \in \mathcal{H}_p^k(S)$ pourvu que $0 \leq j < k$; grâce à (4.9), nous obtenons ainsi que $\partial_{x'}\, \partial_{n-1}^{j}\varphi(0,0,0) = 0$ pour $0 \leq j < k$ d'où

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x'}(0,x_{n-1},0)\right| \leq C_1\, |x_{n-1}|^k, \quad \text{puis} \quad x' \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x'}(0,x_{n-1},0) \geq -c\, x_{n-1}^{2k} - \frac{C_1^2}{4c}\,|x'|^2 \ .$$

En rapprochant cette estimation de (4.15) et (4.16), nous obtenons

$$\varphi(x',x_{n-1},x_n) \geq x_n - C_2\, |x'|^2 \ .$$

Si donc nous posons $\Psi(x',x_{n-1},x_n) = x_n - C_2\,|x'|^2$, (4.14) entraîne (4.12), et l'estimation précédente entraîne (4.13).

4.3. Démonstration du corollaire 2.12.

Il nous suffit de vérifier que pour $k = 2$, les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.9 sont automatiquement vérifiées dès qu'on suppose que $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^4(S,x_o)$. Rappelons que $\mathcal{H}_p^2(S)$ est l'idéal formé des fonctions de la forme $q = \alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p\varphi$, α,β et $\gamma \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

(i) La condition

$$H_{q_j}\varphi(x_o,\xi_o) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q_j = \alpha_j\, p + \beta_j\,\varphi + \gamma_j\, H_p\varphi$$

entraîne que $\gamma_j(x_o,\xi_o) = 0$ puisque $H_p\,\varphi(x_o,\xi_o) = H_\varphi\,\varphi(x_o,\xi_o) = 0$ et que $H_{H_p\varphi}\,\varphi(x_o,\xi_o) = H_\varphi^2\, p(x_o) \neq 0$ d'après (1.2). Si $\gamma_1(x_o,\xi_o) = \gamma_2(x_o,\xi_o) = 0$, tous les termes de la forme $H_r\, s$ obtenus en développant $H_{q_1} q_2$ apparaissent avec des coefficients nuls en (x_o,ξ_o) à l'exception des termes $H_p p$, $H_p\,\varphi$ et $H_\varphi\,\varphi$ qui sont eux-mêmes nuls en (x_o,ξ_o) ; nous avons donc montré que

$$H_{q_1}\,\varphi(x_o,\xi_o) = H_{q_2}\,\varphi(x_o,\xi_o) = 0 \Rightarrow H_{q_1}\, q_2\,(x_o,\xi_o) = 0 \ .$$

(ii) La condition

$$d_\xi(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p\varphi)(x_o,\xi_o) = 0$$

entraîne que $\alpha(x_o,\xi_o) = \gamma(x_o,\xi_o) = 0$ puisque $d_\xi\varphi = 0$ et que $d_\xi p(x_o,\xi_o)$ et $d_\xi H_p\varphi(x_o,\xi_o)$ sont linéairement indépendants d'après la propriété (5.1) du lemme 5.1 ; pour un tel élément de $\mathcal{H}_p^2(S)$ on a donc

$$\left(d(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p\varphi)\wedge d\varphi\right)(x_o,\xi_o) = \beta(x_o,\xi_o)(d\varphi\wedge d\varphi)(x_o) = 0 ,$$

tous les autres produits extérieurs apparaissant avec des coefficients nuls en (x_o,ξ_o). Les hypothèses du théorème 2.9 sont donc vérifiées, et le corollaire 2.12 en résulte.

5. LEMMES TECHNIQUES.

5.1. Conséquences des hypothèses générales sur p et S.

Nous donnons ici les démonstrations de deux lemmes que nous avons utilisés au cours des démonstrations précédentes, et qui figurent déjà sous une forme voisine dans Lerner & Robbiano [9].

Lemme 5.1. : Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, et qu'on s'est donné k fonctions C^∞ à valeurs réelles $\psi_1,\ldots,\psi_k$ telles que $(d\varphi\wedge d\psi_1\wedge\ldots\wedge d\psi_k)(x_o) \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_o tel que, avec $Q = \{(x,\xi)\in \mathcal{C}ar_p^o / x\in q$ et $|\xi|^2 = 1\}$, on ait pour tout $(x_1,\xi_1)\in Q\cap \mathcal{C}ar_p^2(S)$:

(5.1) *$d_\xi p$, $d_\xi(|\xi|^2 - 1)$ et $d_\xi(H_p\varphi)$ sont linéairement indépendants en (x_1,ξ_1) ;*

(5.2) *dp, $d(|\xi|^2-1)$, $d\varphi$, $d(H_p\varphi)$, $d\psi_1,\ldots,d\psi_k$ sont linéairement indépendants en (x_1,ξ_1).*

<u>Démonstration</u> : (i) <u>Si q est assez petit</u>, $H^2_\varphi p(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$ d'après (1.2). Si nous supposons que

$$X = \alpha\, d_\xi p(x_1,\xi_1) + \beta\, d_\xi (|\xi|^2 - 1)(x_1,\xi_1) + \gamma\, d_\xi (H_p \varphi)(x_1,\xi_1) = 0 ,$$

nous obtenons successivement que

$$\left[\begin{array}{l} \beta = (2\alpha p(x_1,\xi_1) + 2\beta|\xi_1|^2 + \gamma H_p\varphi(x_1,\xi_1))/2 = X \cdot \xi_1/2 = 0 , \\ \gamma = (\alpha H_p\varphi(x_1,\xi_1) + \gamma H^2_\varphi p(x_1)) / H^2_\varphi p(x_1) = X \cdot d\varphi(x_1) / H^2_\varphi p(x_1) = 0 , \quad \text{et} \\ \alpha = \alpha\, |d_\xi p(x_1,\xi_1)|^2 / |d_\xi p(x_1,\xi_1)|^2 = X \cdot d_\xi p(x_1,\xi_1) / |d_\xi p(x_1,\xi_1)|^2 = 0 \end{array}\right.$$

car $d_\xi p(x_1,\xi_1) \neq 0$ puisque p est de type principal ; ceci donne la propriété (5.1).

(ii) <u>De nouveau si q est assez petit</u>, $(d\varphi \wedge d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_k)(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$; la propriété (5.2) résulte donc de la propriété (5.1) puisque $d_\xi \varphi = d_\xi \psi_1 = \ldots = d_\xi \psi_k = 0$.

<u>Lemme 5.2.</u> : Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, et qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ et un point de $\mathcal{C}ar^2_p(S,x_o)$ où $H_p \psi \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_o et une constante $C > 0$ tels qu'avec $Q = \{(x,\xi) \in \mathcal{C}ar^o_p / x \in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$ on ait

$$\forall (x,\xi) \in Q , \quad \exists (y,\eta) \in Q \cap \mathcal{C}ar^2_p(S) :$$

$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H^2_p \varphi(y,\eta) - H^2_p \varphi(x,\xi)| \leq C(|\varphi(x)| + |H_p \varphi(x,\xi)|) .$$

<u>Démonstration</u> : L'existence du point (x_o,ξ_o) où $H_p\varphi = 0$ et $H_p \psi \neq 0$ prouve que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_o) \neq 0$: nous pouvons donc utiliser les résultats du lemme 5.1, et nous demanderons en outre que le voisinage q soit tel que $\forall\, x \in q$, $\exists\, y \in q \cap S$ tel que $\psi(y) = \psi(x)$.

D'après la propriété (5.1), nous avons $p = |\xi|^2 - 1 = H_p\varphi = 0$, et $d_\xi p$, $d_\xi(|\xi|^2 - 1)$, $d_\xi(H_p\varphi)$ linéairement indépendants en $(x_o, \xi_o/|\xi_o|)$; nous pouvons donc utiliser le théorème des fonctions implicites pour en déduire que $\forall y \in q \cap S$, $Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S,y) \neq \emptyset$, et donc

$$\forall (x,\xi) \in Q, \quad \exists (y,\eta) \in Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S) : \psi(y) = \psi(x) ; \tag{5.3}$$

il ne reste plus qu'à prouver l'estimation de $|H_p^2\varphi(y,\eta) - H_p^2\varphi(x,\xi)|$.

La propriété (5.2) montre que les fonctions φ, $H_p\varphi$ et ψ peuvent être prises comme coordonnées sur la variété Q près de n'importe quel point de $Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S)$; chaque point de $Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S)$ possède donc un voisinage dans lequel l'estimation a lieu comme on le voit en écrivant une formule de Taylor. Par compacité, $Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S)$ possède lui-même un voisinage ouvert U vérifiant avec une constante uniforme C_1 :

$$\forall (x,\xi) \in Q \cap U, \quad \exists (y,\eta) \in Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S) :$$
$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2\varphi(y,\eta) - H_p^2\varphi(x,\xi)| \leqslant C_1(|\varphi(x)| + |H_p\varphi(x,\xi)|) .$$

Enfin, comme $\inf_{Q \smallsetminus U} (|\varphi| + |H_p\varphi|) = c > 0$ par définition de U, on a aussi (cf. (5.3)) :

$$\forall (x,\xi) \in Q \smallsetminus U, \quad \exists (y,\eta) \in Q \cap \mathscr{C}ar_p^2(S) :$$
$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2\varphi(y,\eta) - H_p^2\varphi(x,\xi)| \leqslant (2 \sup_Q |H_p^2\varphi|/c)\,(|\varphi(x)| + |H_p\varphi(x,\xi)|) ,$$

d'où le lemme.

5.2. Choix de la fonction φ.

Dans la démonstration de la proposition 2.6., nous aurons besoin d'une version précisée du lemme 28.4.2 de Hörmander [8] ; nous en donnons ici la démonstration.

<u>Lemme</u> <u>5.3.</u> : *Prenons les mêmes hypothèses qu'au lemme 5.2 et supposons en outre que* $H_p^2\varphi \leqslant 0$ *sur* $\mathscr{C}ar_p^2(S,x)$ *pour tout* x *voisin de* x_o *tel que* $\psi(x) > \psi(x_o)$. *Alors il existe un voisinage* ω *de* x_o *et un nombre* $A > 0$ *tels qu'avec* $\varphi_1(x) = (1 - A|x - x_o|^2)\,\varphi(x)$ *on ait*

$$(5.4)\qquad \forall\,(x,\xi) \in T^*\omega\,,\quad \begin{cases} p(x,\xi) = H_p\,\varphi_1\,(x,\xi) = 0\;, \\ \varphi_1(x) \geqslant 0 \quad et \quad \psi(x) \geqslant \psi(x_o) \end{cases} \Rightarrow\; H_p^2\,\varphi_1\,(x,\xi) \leqslant 0\;.$$

<u>Démonstration</u> : Supposons pour simplifier que $x_o = 0$; nous pouvons utiliser le résultat du lemme 5.2 qui fournit un voisinage compact q de x_o et une constante $C > 0$ tels que, compte tenu de l'hypothèse supplémentaire que nous avons ici,

$$(5.5)\qquad \forall\,(x,\xi) \in Q\,,\;\; \psi(x) \geqslant \psi(x_o) \Rightarrow H_p^2\,\varphi\,(x,\xi) \leqslant C(|\varphi(x)| + |H_p\,\varphi\,(x,\xi)|)\;.$$

Par ailleurs on calcule que

$$\begin{cases} H_p\,\varphi_1 = \varphi H_p(1 - A\,|x|^2) + (1 - A\,|x|^2)\,H_p\varphi\;, \\ H_p^2\,\varphi_1 = \varphi H_p^2(1 - A\,|x|^2) + 2\,H_p\varphi\,H_p(1 - A\,|x|^2) + (1 - A\,|x|^2)\,H_p^2\varphi\;, \\ H_p(1 - A\,|x|^2) = -\,2\,A\,x \cdot p_\xi\;, \quad \text{et} \\ H_p^2(1 - A\,|x|^2) = -\,2\,A\,|p_\xi|^2 - 2\,A\,x \cdot H_p^2\,x\;. \end{cases}$$

Plaçons-nous en un point de Q où $H_p\,\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 \geqslant 0$ et $\psi \geqslant \psi(x_o)$; $H_p\,\varphi_1 = 0$ entraîne que

$$H_p\,\varphi = -\frac{\varphi}{1 - A|x|^2}\,H_p(1 - A\,|x|^2) = \frac{2\,A\,\varphi(x \cdot p_\xi)}{1 - A\,|x|^2}\;,\quad \text{d'où}$$

$$H_p^2\,\varphi_1 = \varphi\,[-2\,A\,|p_\xi|^2 - 2\,A\,x \cdot H_p^2\,x\,] + 2\,\frac{2\,A\varphi\,x \cdot p_\xi}{1 - A\,|x|^2}\,(-2\,A\,x \cdot p_\xi) + (1 - A\,|x|^2)\,H_p^2\,\varphi\;;$$

le dernier terme se majorant grâce à (5.5), on obtient

$$H_p^2\varphi_1 \leqslant 2A\varphi\Big[-|p_\xi|^2 - x\cdot H_p^2 x - \frac{4A(x\cdot p_\xi)^2}{1-A|x|^2}\Big] + C(1-A|x|^2)\varphi + 2CA\varphi|x\cdot p_\xi| \ ,$$

puis enfin, à condition de prendre $|x|^2 < 1/2A$,

$$H_p^2\varphi_1 \leqslant 2A\varphi\Big[-|p_\xi|^2 + \frac{C}{2A} + C_A|x|\Big] \ .$$

Comme p est de type principal, $\inf\limits_Q |p_\xi|^2 = c > 0$; on obtient donc (4.4) en prenant $A > C/c$, puis $\omega \subset q$ tel que $|x| < c/2C_A$ et $|x| < (2A)^{-1/2}$ dans ω.

5.3. Démonstration de la proposition 2.6.

Comme dans la démonstration du corollaire 2.4, nous pouvons supposer que $\psi(x_o) = 0$ quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_o)$.

Soit $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$. Si $H_p\psi(x_o,\xi_o) = 0$, il n'y a rien à démontrer ; nous pouvons donc supposer que

(5.6) $$H_p\psi(x_o,\xi_o) > 0$$

quitte à changer p en $-p$. Ceci nous permet alors d'utiliser le lemme 5.3 : nous supposerons que (5.4) est vérifiée avec φ à la place de φ_1. De même, comme $H_p^2\varphi(x_o,\xi_o) \neq 0$ entraîne que $H_p^2\varphi(x_o,\xi_o) < 0$ auquel cas le résultat est évident, nous pouvons supposer (cf. (1.2)) que

(5.7) $$H_p\varphi(x_o,\xi_o) = H_p^2\varphi(x_o,\xi_o) = 0 \qquad \text{et} \qquad H_\varphi^2 p(x_o,\xi_o) \neq 0 \ .$$

La démonstration s'effectuera en trois étapes.

(i) Choix de coordonnées microlocales : soit

$$q_o(x,\xi) = \varphi(x) + H_p\varphi(x,\xi) + \frac{H_\varphi H_p\psi(x_o,\xi_o)}{H_p\psi(x_o,\xi_o)}\, p(x,\xi) \ ;$$

alors en utilisant (5.7) :

(5.8) $$H_{q_o} p(x_o,\xi_o) = H_{q_o} \psi(x_o,\xi_o) = 0 \ , \qquad \text{et}$$

(5.9) $$H_{q_o} \varphi(x_o,\xi_o) = - H_{q_o} H_p \varphi(x_o,\xi_o) = H_\varphi^2 p(x_o,\xi_o) \neq 0 \ .$$

D'après (5.8), on peut trouver une fonction $q(x,\xi)$ définie au voisinage de (x_o,ξ_o) telle que

(5.10) $$H_p q(x,\xi) = 0 \qquad \text{et} \qquad dq(x_o,\xi_o) = d\, q_o(x_o,\xi_o) \ ;$$

nous posons alors

$$\omega(s,t) = e^{sH_p + tH_q}(x_o,\xi_o) \ ;$$

la relation (5.10) entraîne que pour s et t voisins de 0, $\omega(s,t) \in \mathcal{C}ar_p^o$ et que les relations (5.8) et (5.9) sont encore vraies avec q à la place de q_o. Comme $\partial_t(\varphi[\omega(s,t)]) = H_q \varphi(x_o,\xi_o)$ et $\partial_t(H_p \varphi[\omega(s,t)]) = H_q H_p \varphi(x_o,\xi_o)$ en $s = t = 0$, il existe, d'après (5.9) et le théorème des fonctions implicites, deux fonctions $\tau(s)$ et $\theta(s)$ telles que $\tau(0) = \theta(0) = 0$ et

(5.11) $$\begin{cases} \varphi[\omega(s,t)] = 0 & \Longleftrightarrow t = \tau(s) \ , \\ H_p \varphi[\omega(s,t)] = 0 & \Longleftrightarrow t = \theta(s) \ . \end{cases}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans un voisinage $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$ où les fonctions τ et θ sont bien définies et tel que $(H_q \varphi[\omega(s,t)])(H_q H_p \varphi[\omega(s,t)]) \neq 0$. Remarquons enfin qu'à cause de (5.9),

(5.12) $$(\varphi[\omega(s,t)])(H_p \varphi[\omega(s,t)]) > 0 \Rightarrow (\tau(s) - t)(\theta(s) - t) < 0 \ .$$

(ii) <u>La fonction φ est négative le long de la courbe $t = \theta(s)$</u>.

<u>*Lemme 5.4.*</u> *: Sous les hypothèses de la proposition 2.6 et avec les notations précédentes,* $\varphi[\omega(s,\theta(s))] \leqslant 0$ *pour* $s \geqslant 0$.

<u>Démonstration</u> : Posons

$$f(s) = \varphi[\omega(s,\theta(s))] \quad \text{et} \quad g(s) = \psi[\omega(s,\theta(s))] \ ;$$

par dérivation nous obtenons :

$$\begin{cases} f'(s) = H_p\,\varphi[\omega(s,\theta(s))] + \theta'(s)\,H_q\varphi[\omega(s,\theta(s))] = \theta'(s)\,H_q\varphi[\omega(s,\theta(s))]\ , \quad \text{et} \\ g'(0) = H_p\,\psi\,(x_o,\xi_o) + \theta'(0)\,H_q\psi(x_o,\xi_o) = H_p\,\psi\,(x_o,\xi_o) > 0 \end{cases}$$

d'après (5.11), (5.8) et (5.6). Cela nous donne déjà

$$(5.13) \qquad \psi[\omega(s,\theta(s))] \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad s \geqslant 0\ .$$

Pour avoir une expression de $\theta'(s)$, dérivons l'identité $H_p\,\varphi[\omega(s,\theta(s))] = 0$:

$$0 = H_p^2\,\varphi[\omega(s,\theta(s))] + \theta'(s)\,H_q H_p\,\varphi[\omega(s,\theta(s))]\ , \quad \text{d'où}$$

$$f'(s) = -\left(H_q\,\varphi[\omega(s,\theta(s))]\,/\,H_q H_p\varphi[\omega(s,\theta(s))]\right) H_p^2\varphi[\omega(s,\theta(s))]\ .$$

Dans l'expression précédente, la grande parenthèse renferme une fonction strictement négative à cause de (5.9), et d'après (5.13) et (5.4), nous avons donc écrit $f'(s)$ comme une fonction qui est négative là où $f(s)$ et s sont positives ; le lemme 5.4 résulte donc du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

<u>Lemme</u> : *Soit f une fonction C^1 à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$ et $f'(s) \leqslant 0$ si $f(s) \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$. Alors $f(s) \leqslant 0$ pour $s \geqslant 0$.*

(iii) <u>Fin de la démonstration</u> : Posons $f(s) = \varphi(e^{sH_p}(x_o,\xi_o))$; alors :

$$(5.14) \qquad f(s) = \varphi[\omega(s,0)] \quad \text{et} \quad f'(s) = H_p\,\varphi[\omega(s,0)]\ .$$

Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants :

a) <u>S'il existe $s_o > 0$ tel que $\theta(s_o) = 0$</u>, alors pour tout $s \in [0,s_o]$, $f(s) \leqslant 0$. En effet, si $s_1 \in [0,s_o]$ est tel que $\theta(s_1) = 0$, cela découle du lemme 5.4 ; sinon, posons $s_2 = \sup\{s < s_1 / \theta(s) = 0\}$ et $s_3 = \inf\{s > s_1 / \theta(s) = 0\}$; on a $0 \leqslant s_2 < s_1 < s_3 \leqslant s_o$, et sur $]s_2, s_3[$, $\theta(s) \neq 0$ donc d'après (5.11) et (5.14), f est monotone ; comme on tire du lemme 5.4 que $f(s_2) \leqslant 0$ et $f(s_3) \leqslant 0$, il en résulte que $f(s_1) \leqslant 0$.

b) Si $\forall s \in]0,\varepsilon[$, $\theta(s) \neq 0$, f est encore strictement monotone d'après (5.11) et (5.14), et comme $f(0) = 0$, on a $f(s) \;\; f'(s) > 0$ pour $0 < s < \varepsilon$; en utilisant (5.14) et (5.12) nous en déduisons que $\tau(s)\,\theta(s) < 0$, avec (5.11) que $f(s) \;\; \varphi[\omega(s,\theta(s))] > 0$, puis enfin que $f(s) < 0$ grâce au lemme 5.4, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.6.

5.4. Démonstration de la proposition 2.5.

D'après la proposition 2.6, la proposition 2.5 résulte du

Lemme 5.5. : Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\mathscr{C}ar_p^{\infty}(S,x_o) = \emptyset$.

Démonstration : Nous supposerons comme précédemment que $\psi(x_o) = 0$.

Soit $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^{\infty}(S,x_o)$; d'après l'hypothèse (ii) du théorème 2.1, $H_p\,\psi\,(x_o,\xi_o) = \lambda \neq 0$. Comme dans la démonstration du corollaire 2.4 (partie (ii)) nous choisissons sur $\mathscr{C}ar_p^{o}$ près de (x_o,ξ_o) des coordonnées locales $(t,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-4} \times \mathbb{R}^2$ telles que

$$(5.15) \qquad \begin{cases} H_p\, t = 1 \,,\ \psi \sim \lambda\, t\,, & H_p\, y_j = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,2n-4\,, \\ z_1 = \varphi\,,\quad z_2 = H_p\,\varphi \quad \text{et} & \mathscr{C}ar_p^2(S) = \{(t,y,z) \in \mathscr{C}ar_p^{o} \,/\, z = 0\}\,. \end{cases}$$

Ces propriétés entraînent que $\omega(s) = e^{s H_p}(x_o,\xi_o) = (s;0,\dots,0;\varphi[\omega(s)],H_p\varphi[\omega(s)])$; comme $(x_o,\xi_o) \in \mathscr{C}ar_p^{\infty}(S,x_o)$, on a

$$\varphi[\omega(s)] = O(|s|^{\infty})\,,\quad H_p\,\varphi[\omega(s)] = O(|s|^{\infty}) \quad \text{et} \quad H_p^2\,\varphi[\omega(s)] = O(|s|^{\infty})\ ;$$

par développement de Taylor

$$H_p^2\,\varphi[\omega(s)] = H_p^2\,\varphi(s,0,0) + \varphi[\omega(s)]\,g(s) + H_p\,\varphi[\omega(s)]\,h(s) \quad ,$$

$$\text{d'où} \qquad H_p^2\,\varphi(s,0,0) = O(|s|^\infty) \ .$$

Si donc nous posons pour $\varepsilon > 0$ $\omega_\varepsilon = (\lambda\varepsilon,0,0)$, ω_ε tend vers (x_o,ξ_o) quand ε tend vers 0 , et d'après (5.15),

$$\omega_\varepsilon \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \ , \ \psi(\omega_\varepsilon) > \frac{\lambda^2\varepsilon}{2} > 0 \ , \quad \text{mais} \ \ H_p^2\,\varphi(\omega_\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty) = O(\psi(\omega_\varepsilon)^\infty) \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse (i) du théorème 2.1.

6. BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALINHAC S. : *Non unicité du problème de Cauchy,* Annals of Math. 117, 77-108 (1983).

[2] ALINHAC S. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels,* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 34 (2), 89-109 (1984).

[3] ALINHAC S. : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem,* Contemporary Mathematics, Vol. 27, 1-22 (1984).

[4] ALINHAC S. & BAOUENDI M.S. : *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal,* Sém. Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n° XXII (Ecole Polytechnique, Paris).

[5] BAHOURI H. : *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel,* Thèse de 3ème cycle, Orsay 1982, et Comm. in PDE's 8, 1521-1547 (1983).

[6] CALDERÓN A.P. : *Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations,* Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Univ. of Maryland 1961), Gordon & Breach, New-York, 147-195 (1962).

[7] HÖRMANDER L. : *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin 1963.

[8] HÖRMANDER L. : *The analysis of linear partial differential operators,* Vol. IV, Springer Verlag, Berlin 1985.

[9] LERNER N. & ROBBIANO L. : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84, exposé n° IX (Ecole Polytechnique, Paris), et article à paraître au Journal d'analyse Mathématique.

[10] NIRENBERG L. : *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation*, Preprint.

[11] SAINT RAYMOND X. : *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques*, Comm. in PDE's 7, 559-579 (1982).

[12] SAINT RAYMOND X. : *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, à paraître dans l'Ens. Math.

[13] ZACHMANOGLOU E.C. : *Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rat. Mech. Anal 27, 373-384 (1968).

[14] ZACHMANOGLOU E.C. : *Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Trans. of the A.M.S. 136, 517-526 (1969).

[15] ZUILY C. : *Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in mathematics, vol. 33, Birkhäuser, Boston 1983.

UNICITE DE CAUCHY

A PARTIR DE

SURFACES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES

par XAVIER SAINT RAYMOND

À paraître

6

UNICITE DE CAUCHY
A PARTIR DE
SURFACES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES

par XAVIER SAINT RAYMOND

La question de l'unicité de Cauchy a fait l'objet d'un grand nombre de publications depuis une trentaine d'années ; nous renvoyons le lecteur à Alinhac [2] et à Zuily [11] pour une vue d'ensemble sur les résultats et les méthodes développées pour les obtenir. Le résultat fondamental de la théorie demeure le théorème de Hörmander [3, th. 28.3.4] qui établit l'unicité en supposant que l'opérateur est principalement normal et que la surface initiale est fortement pseudo-convexe ; la nécessité de ces hypothèses a été étudiée notamment par Alinhac [1], Robbiano [7] et Saint Raymond [8].

Par la suite, il a été observé que dans bien des cas, la propriété d'unicité subsiste si l'on affaiblit l'hypothèse de pseudo-convexité ; de tels résultats ont été obtenus par Lerner [4] pour les opérateurs elliptiques et par Lerner & Robbiano [6] et Saint Raymond [10] pour les opérateurs de type principal réel du deuxième ordre. Dans ces deux derniers travaux, les auteurs s'appuyaient essentiellement sur la propriété suivante des opérateurs étudiés : la pseudo-convexité ne dépend alors que des zéros <u>réels</u> doubles du symbole principal p de l'opérateur (i.e. des solutions de $p = \{p,\varphi\} = 0$, $\varphi(x) = 0$ étant une équation de l'hypersurface S portant les données de Cauchy) qui forment une sous-variété régulière de $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ à condition de supposer que S est non caractéristique.

Dans ce papier, nous donnons de nouveaux résultats d'unicité sous des hypothèses affaiblies de pseudo-convexité, mais cette fois pour une large classe d'opérateurs principalement normaux. Nous définissons cette classe de telle manière que les zéros doubles, éventuellement complexes, du symbole principal p de l'opérateur forment une variété régulière, du moins près des points où la condition de pseudo-convexité dégénère, ce qui généralise de façon assez naturelle, sans toutefois la contenir, la classe des opérateurs de type principal réel du deuxième ordre. Pour de tels opérateurs, nous établissons deux résultats : le premier, inspiré de Lerner & Robbiano [6] et obtenu par inégalité de Carleman, prouve une propriété d'unicité compacte sous une hypothèse de faible pseudo-convexité portant sur toute une famille d'hypersurfaces ; le second, qui reprend la méthode de déformation de surface introduite dans Saint Raymond [10], montre l'unicité en un point situé sur le bord d'un domaine où S est fortement pseudo-convexe.

1. NOTATIONS ET ENONCE DES RESULTATS.

1.1. Enoncé du problème. Soient $x_o \in \mathbb{R}^n$ et, avec $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$,

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre m où les fonctions a_α sont C^∞ à valeurs complexes au voisinage de x_o. Nous noterons p le symbole principal de cet opérateur qui est la fonction (polynômiale et homogène en ξ) définie sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par la formule

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \ .$$

Nous nous donnons ensuite une fonction C^∞ à valeurs réelles φ définie sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_o telle que $\varphi(x_o) = 0$ et $d\varphi(x_o) \neq 0$. Avec tous ces ingrédients, nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy avec données sur l'hypersurface orientée $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\}$, ce qui se ramène classiquement par linéarité à la question : est-ce que pour toute solution locale de $P(x,D)\,u(x)=0$, la condition "$u(x)=0$ si $\varphi(x)<0$ (près de x_o)" entraîne que u s'annule dans tout un voisinage de x_o ?

1.2. Invariance vis-à-vis de la fonction φ. Nos hypothèses seront, dans une certaine mesure, indépendantes de la fonction φ utilisée.

Dans le théorème 1.2, elles ne dépendront que de la famille orientée d'hypersurfaces $\mathcal{S}$ définie par φ, c'est-à-dire qu'elles resteront inchangées si on remplace la fonction φ par une fonction φ_1 vérifiant au voisinage de x_o : $d\varphi_1(x)=\lambda(x)\,d\varphi(x)$, et $\lambda(x_o)>0$ (cf. Lerner & Robbiano [6] ; il résulte de cette définition que la fonction λ est C^∞ et que les hypersurfaces $S_t=\{x\in\mathbb{R}^n/\varphi(x)=t\}$ sont conservées).

Au théorème 1.3, nos hypothèses ne dépendront plus que de l'hypersurface orientée S, c'est-à-dire qu'elles resteront inchangées si on remplace la fonction φ par une fonction φ_1 vérifiant au voisinage de x_o : $\varphi_1(x)=\lambda(x)\varphi(x)$, $\lambda\in C^\infty$ et $\lambda(x_o)>0$ (ce qui implique aussi que $d\varphi_1(x)=\lambda(x)\,d\varphi(x)$, mais seulement sur S).

Les fonctions définies sur $T^*\mathbb{R}^n$ que nous aurons à considérer étant polynômiales en ξ, elles s'étendent naturellement au complexifié (dans la fibre) de $T^*\mathbb{R}^n$. Pour deux fonctions C^∞ à valeurs complexes q et r définies sur $T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$, nous noterons $\{q,r\}=q_\xi\cdot r_x-q_x\cdot r_\xi$ leur crochet de Poisson. Nous posons :

$$\mathcal{C}ar^o(\mathcal{S})=\left\{(x,\zeta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^n\setminus 0\,/\,\zeta=\xi-i\tau\,d\varphi(x)\ ,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \tau\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\mathcal{C}ar_p^1(\mathcal{S})=\left\{(x,\zeta)\in\mathcal{C}ar^o(\mathcal{S})\,/\,p(x,\zeta)=0\right\},\qquad \text{et}$$

$$\mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})=\left\{(x,\zeta)\in\mathcal{C}ar_p^1(\mathcal{S})\,/\,\{p,\varphi\}(x,\zeta)=0\right\}.$$

On vérifie facilement que ces ensembles, qui sont contenus dans

$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} (T^*\mathbb{R}^n|_{S_t} + i N^* S_t)$, ce qui traduit leur invariance par changement de coordonnées, sont également indépendants de l'équation φ de $\mathcal{S}$ utilisée.

De même, nous posons :

$$\mathscr{C}ar_p^2(S) = \left\{(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^2(\mathcal{S}) \,/\, \varphi(x) = 0\right\} \qquad \text{et}$$
$$\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o) = \left\{(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \,/\, x = x_o\right\}$$

qui sont indépendants des coordonnées et de l'équation φ de S utilisée. Enfin, les points des ensembles précédents vérifiant $\mathfrak{Im}\,\zeta = 0$ seront dits réels.

1.3. Le théorème de Hörmander. Nous rappelons ici le résultat classique duquel nous sommes parti et qui est dû à Hörmander.

Définition (Hörmander [3, déf. 28.2.4]) : L'opérateur P est dit principalement normal (près de x_o) si pour tout $(x_o,\xi_o) \in T^*_{x_o}\mathbb{R}^n \setminus 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\{\bar{p},p\}| \leq C\,|p|$ sur $T^*\mathbb{R}^n$ près de (x_o,ξ_o).

Exemples : Les opérateurs elliptiques (et en particulier les fonctions non nulles en x_o, considérées comme opérateurs elliptiques d'ordre zéro), les opérateurs à partie principale réelle ou les opérateurs à coefficients constants sont tous des opérateurs principalement normaux ; on peut encore fabriquer d'autres opérateurs principalement normaux à partir de ceux qui précèdent en utilisant la remarque (b) ci-dessous.

Tous les opérateurs que nous considérerons à partir de maintenant seront supposés principalement normaux. Si $(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ et si φ est une équation de $\mathcal{S}$, il existe un unique couple $(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que $\zeta = \xi - i\tau\, d\varphi(x)$; posant $p_{\tau\varphi}(x,\xi) = p(x,\xi - i\tau\, d\varphi(x))$, nous définissons alors sur $\mathscr{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ une fonction à valeurs réelles $\mathcal{F}_\varphi$ par les formules suivantes

$$\mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) = \{\overline{p_{\tau\varphi}}\,, p_{\tau\varphi}\}(x,\xi) \,/\, 2i\tau \quad \text{si} \quad \tau \neq 0 \;,$$

$$\mathcal{F}_\varphi(x,\xi) = -\{\,\overline{p}\,,\{p,\varphi\}\}(x,\xi) \qquad \text{si} \quad \tau = 0 \;.$$

Hörmander [3, ℓ. 28.2.5] a montré que la normalité de l'opérateur P entraîne la continuité de cette fonction sur $\mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})$. Bien entendu, $\mathcal{F}_\varphi$ dépend de l'équation φ de $\mathcal{S}$ utilisée, mais si on change d'équation, on obtient la formule $\mathcal{F}_{\varphi_1}(x,\zeta) = \lambda(x)\ \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta)$, où λ désigne la fonction telle que $d\varphi_1(x) = \lambda(x)\ d\varphi(x)$, ce qui prouve que la définition suivante concerne une propriété de S qui est bien indépendante de son équation.

<u>Définition</u> *(Hörmander [3, déf. 28.3.1]) : P étant un opérateur principalement normal, on dit que S est fortement pseudo-convexe (relativement à P) en x_o si $\mathcal{F}_\varphi > 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$.*

On obtient alors l'énoncé suivant :

<u>Théorème</u> <u>1.1</u>. *(Hörmander [3, th. 28.3.4]) : Supposons que P est un opérateur principalement normal et que S est fortement pseudo-convexe en x_o. Alors pour toute fonction $u \in H^m_{loc}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes solution locale de l'équation $P(x,D)\,u(x) = 0$, la condition "$u(x) = 0$ si $\varphi(x) < 0$ (près de x_o) " entraîne que u s'annule dans tout un voisinage de x_o.*

<u>Remarques</u> : (a) Alinhac [1, th. 1] puis Robbiano [7] ont montré, en construisant des solutions de $(P+a)\,u = 0$ nulles d'un seul côté de S, que l'hypothèse de normalité est pratiquement nécessaire pour avoir une propriété d'unicité stable. En revanche, la nécessité de l'hypothèse de pseudo-convexité est encore mal connue : dans [9], nous avons montré qu'on pouvait obtenir l'unicité stable, dans le cas du premier ordre, même lorsque $\mathcal{F}_\varphi < 0$ en certains points de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$; c'est toutefois le seul exemple de cette nature que nous connaissions ; dans [8], nous avons établi qu'il ne pouvait y avoir uni-

cité dans certaines situations où $\mathcal{F}_\varphi < 0$ en un point <u>réel</u> de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$ (cf. aussi Alinhac [1, th. 2] pour le cas des opérateurs à partie principale réelle) ; enfin, Alinhac [1, th. 3] a obtenu un théorème de non-unicité, que nous commenterons plus précisément au paragraphe suivant, en partant d'un point <u>non réel</u> de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$ où $\mathcal{F}_\varphi$ s'annule.

(b) Comme dans Lerner [5], nous pouvons établir une propriété de passage au produit des définitions précédentes : <u>supposons que $\mathcal{C}ar^1_{p_1}(S,x_o) \cap \mathcal{C}ar^1_{p_2}(S,x_o) = \emptyset$</u> (dans [5], P_1 et P_2 sont alors dits "en position (relative) générale") ; alors, si P_1 et P_2 sont principalement normaux, il en est de même pour tout opérateur de symbole principal $p_1 p_2$; de plus, $\mathcal{C}ar^2_{p_1}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{C}ar^2_{p_2}(\mathcal{S}) = \emptyset$, $\mathcal{C}ar^2_{p_1 p_2}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}ar^2_{p_1}(\mathcal{S}) \cup \mathcal{C}ar^2_{p_2}(\mathcal{S})$, et si nous notons $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ la fonction $\mathcal{F}_\varphi$ associée à p_1 (resp. $\mathcal{F}_{2,\varphi}$ celle associée à p_2, et $\mathcal{F}_\varphi$ celle associée à $p_1 p_2$), nous avons

$$\mathcal{F}_\varphi = |p_2|^2\, \mathcal{F}_{1,\varphi} \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}ar^2_{p_1}(\mathcal{S}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_\varphi = |p_1|^2\, \mathcal{F}_{2,\varphi} \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}ar^2_{p_2}(\mathcal{S})$$

si bien que la forte pseudo-convexité de S relativement à P_1 et à P_2 entraîne cette même propriété relativement à tout opérateur de symbole principal $p_1 p_2$.

1.4. <u>Nouveaux résultats</u>. Nous cherchons maintenant à traiter les cas où $\mathcal{F}_\varphi$ s'annule sur $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$; à cet effet, nous introduisons

$$\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o) = \left\{(x,\zeta) \in \mathcal{C}ar_p^2(S,x_o) \,/\, \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta) = 0\right\}.$$

<u>*Définition*</u> *: L'opérateur principalement normal P sera dit de type biprincipal (relativement à S, en x_o) si les parties réelle et imaginaire de $d_\xi\, p(x,\zeta)$ sont linéairement indépendantes en tout point de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$.*

<u>Remarques</u> : (a) Si S est fortement pseudo-convexe en x_o, alors P est automatiquement de type biprincipal (cas où $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o) = \emptyset$) ; si $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ n'est pas vide, le type biprincipal entraîne que $n \geqslant 3$.

(b) Avec les notations et les hypothèses de la remarque (b) du paragraphe précédent, nous pouvons prouver que si P_1 et P_2 sont de type biprincipal relativement à la même surface S en x_o, il en est de même de tout opérateur de symbole principal $p_1 p_2$.

(c) Si P est un opérateur principalement normal de type biprincipal, on peut écrire $\{\overline{p},p\} = 2i\,\mathcal{R}e(\overline{q}p)$ sur $T^*\mathbb{R}^n$ près de tout point réel de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$, formule où q désigne une fonction C^∞ à valeurs complexes définie sur $T^*\mathbb{R}^n$; on notera que cette fonction q, qui apparaîtra dans l'expression de la fonction $\mathcal{G}_\varphi$ ci-dessous, est définie sans ambiguïté aux points réels de $\mathcal{C}ar_p^1(\mathcal{S})$ suffisamment proches de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$.

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1.3, nous définissons pour les opérateurs principalement normaux de type biprincipal une fonction à valeurs complexes $\mathcal{G}_\varphi$ par les formules suivantes

$$\mathcal{G}_\varphi(x,\zeta) = \left[\{\overline{p_{\tau\varphi}}, \{p_{\tau\varphi},\varphi\}\}(x,\xi) + \mathcal{F}_\varphi(x,\zeta)\right] / i\tau \qquad \text{si} \quad \tau \neq 0,$$

$$\mathcal{G}_\varphi(x,\xi) = i\,\overline{q}(x,\xi)\,\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi) - \{\overline{p},\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x,\xi) \qquad \text{si} \quad \tau = 0.$$

Nous verrons plus loin que le type biprincipal entraîne que $\mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{G}_\varphi$ sont bien définies et C^∞ sur $\mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ près de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$; la formule de changement d'équation de $\mathcal{S}$, qui s'écrit $\mathcal{G}_{\varphi_1}(x,\zeta) = (\lambda(x))^2\,\mathcal{G}_\varphi(x,\zeta)$ si $d\varphi_1(x) = \lambda(x)\,d\varphi(x)$, nous permet de poser la définition suivante :

Définition : P étant un opérateur principalement normal de type biprincipal on dit que la famille orientée d'hypersurfaces $\mathcal{S}$ est faiblement pseudo-convexe (relativement à P) près de x_o si :

(i) $\mathcal{F}_\varphi \geq 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o)$;

(ii) $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$;

(iii) Pour tout point $(x_o,\zeta_o) \in \mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ *, il existe une constante* $c>0$ *telle que* $\mathcal{F}_\varphi \geqslant c\,|\mathcal{G}_\varphi|^2$ *sur* $\mathscr{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ *près de* (x_o,ζ_o).

<u>Remarques</u> : (a)' Si S est fortement pseudo-convexe en x_o, alors pour toute équation φ de S, la famille orientée d'hypersurfaces correspondant à φ est faiblement pseudo-convexe près de x_o ; en revanche, on trouvera au paragraphe 1.5 ci-dessous des exemples où $\mathcal{S}$ est faiblement pseudo-convexe sans que S le soit fortement, d'où la terminologie adoptée. Si $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ n'est pas vide, la propriété (ii) de la faible pseudo-convexité entraîne que $m \geqslant 2$; si $m=2$, (ii) est vérifiée si et seulement si S n'est pas caractéristique en x_o.

(b)' En reprenant <u>les hypothèses</u> et notations des remarques (b) ci-dessus, on peut calculer que $\mathcal{G}_\varphi = |p_2|^2\,\mathcal{G}_{1,\varphi} + 2\,\bar{p}_2\{p_2,\varphi\}\,\mathcal{F}_{1,\varphi}$ sur $\mathscr{C}ar_{p_1}^2(\mathcal{S})$ ainsi que la même formule en échangeant les indices 1 et 2 sur $\mathscr{C}ar_{p_2}^2(\mathcal{S})$, si bien que si la famille $\mathcal{S}$ est faiblement pseudo-convexe à la fois relativement à P_1 et à P_2, elle le sera aussi relativement à tout opérateur de symbole principal $p_1\,p_2$.

Un premier résultat, semblable à celui obtenu par Lerner & Robbiano [6] pour les opérateurs du deuxième ordre de type principal réel, établit une propriété d'unicité compacte sous des hypothèses très faibles mais portant sur toute la famille $\mathcal{S}$ d'hypersurfaces définie par φ.

<u>Théorème</u> <u>1.2</u> : Supposons que P *est un opérateur principalement normal de type biprincipal, que* $d_\xi p$ *ne s'annule en aucun point* *<u>réel</u>* *de* $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$ *et que la famille* $\mathcal{S}$ *est faiblement pseudo-convexe près de* x_o*. Alors il existe un voisinage* Ω *de* x_o *tel que pour tout voisinage ouvert de* x_o*,* $\omega\subset\Omega$*, et toute fonction* $u\in H^m_{loc}(\omega)$ *à valeurs complexes solution dans* ω *de l'équation* $P(x,D)\,u(x)=0$*, la condition "*$\mathrm{supp}\,u\cap\{x\in\omega/\varphi(x)\leqslant 0\}$ *est un compact contenu dans* $S\cap\omega$*" entraîne que* u *s'annule dans tout un voisinage de* x_o.

Remarques : (d) Alinhac [1, th. 3] a montré qu'on ne pouvait espérer une propriété d'unicité stable sous les seules hypothèses (i) et (ii) (ni même une propriété d'unicité compacte puisque les énoncés (i) et (ii) sont stables par perturbation de φ à l'ordre 4) ; bien que nous ne soyons pas parvenu à établir en général de lien direct entre notre fonction $\mathcal{G}_\varphi$ et le terme $H_p^2\varphi$ intervenant dans l'hypothèse (iii) de [1, th. 3], il apparaît que, dans le cas de l'exemple fourni par Alinhac pour illustrer son théorème, la non-unicité pour $P+a$ est prouvée à partir d'un point (non réel) de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ où $\mathcal{G}_\varphi \neq 0$, ce qui empêche notre hypothèse (iii) d'être vérifiée.

(e) Il est difficile de comparer nos hypothèses avec celles introduites dans Lerner [4] pour les opérateurs elliptiques car la propriété visée n'est pas la même (unicité de Cauchy chez Lerner et unicité compacte ici). Toutefois, si l'opérateur elliptique considéré est de type biprincipal, on peut montrer que les trois premières conditions de l'hypothèse $H(1,2)$ de [4] entraînent la faible pseudo-convexité de toute famille $\mathcal{S}$ associée à une équation quelconque φ de S (la dernière condition composant l'hypothèse $H(1,2)$ de [4] est destinée à convexifier le support de la solution pour obtenir de l'unicité de Cauchy ; elle entraîne que $d_\xi p=0$ sur $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$, ce qui est incompatible avec le type biprincipal, sauf si S est fortement pseudo-convexe en x_o). Les autres hypothèses $H(K,\ell)$ de [4] correspondent à des situations où notre hypothèse (ii) n'est plus vérifiée.

(f) Lorsque $\varphi(x)=x_n$ et que $p(x,\xi)=\xi_n^2+r(x,\xi')$ où r est une forme quadratique de type principal réel en $\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, on peut choisir $q=0$ dans la formule $\{\bar{p},p\}=2i\,\mathcal{R}e(\bar{q}\,p)$, et alors $\mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ ne possède que des points réels et on a $\mathcal{F}_\varphi=-H_p^2\varphi$ et $\mathcal{G}_\varphi=0$, si bien que la faible pseudo-convexité s'énoncerait :

$$p=\{p,\varphi\}=0 \Rightarrow H_p^2\varphi \leq 0$$

ce qui était la condition d'unicité compacte de Lerner & Robbiano [6] (en réalité, comme dans ce cas P ne peut pas être de type biprincipal, la fonction q puis la fonction $\mathcal{G}_{\varphi}$ sont ici mal définies).

(g) On pourrait imaginer faire, comme Hörmander [3, chap. 28.4], une hypothèse ne portant que sur S et non sur toute la famille $\mathcal{S}$; cependant, bien que l'analogue du lemme 28.4.2 de [3] soit encore vrai dans le présent contexte, nous n'avons pas su établir les inégalités de Carleman en séparant la variable $x_n = \varphi(x)$ des autres variables.

(h) Bien entendu, le théorème 1.2 ci-dessus permet aussi d'obtenir un résultat de véritable unicité de Cauchy qui s'énonce de la façon suivante : "supposons qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles φ_1 telle que $\varphi_1(x_0) = 0$, $\varphi_1(x) > 0$ sur S pour x voisin de x_0 $(x \neq x_0)$, $d\varphi_1(x_0) \neq 0$, et telle que la famille orientée d'hypersurfaces $\mathcal{S}_1$ définie par φ_1 vérifie les hypothèses du théorème 1.2 ; alors même conclusion qu'au théorème 1.1".

Nous arrivons maintenant à notre deuxième résultat, semblable à celui que nous avons obtenu dans [10] pour les opérateurs du deuxième ordre de type principal réel, et qui donne l'unicité dans la situation instable où x_0 est situé sur le bord d'un domaine de forte pseudo-convexité pour S.

Théorème 1.3 : Supposons que P est un opérateur principalement normal de type biprincipal, et qu'il existe au voisinage de x_0 une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que :

(i) $\mathcal{F}_\varphi \geq 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_0)$;

(ii)' $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \cdot \{p,\psi\} \neq 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_0)$;

(iii)' Pour tout point $(x_0,\zeta_0) \in \mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_0)$ *, il existe deux constantes* $c > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *telles qu'au voisinage de* (x_0,ζ_0)

$$(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^2(S) \quad et \quad \psi(x) \geqslant \psi(x_o) \Rightarrow \mathfrak{F}_\varphi(x,\zeta) \geqslant c\,[\,\psi(x) - \psi(x_o)\,]^k \ .$$

Alors, même conclusion qu'au théorème 1.1.

Remarques : (j) nous pouvons commenter les hypothèses de ce théorème comme dans [10, th. 2.1] : les hypothèses (i) et (iii)' signifient que la surface S est fortement pseudo-convexe en chacun de ses points situé dans le domaine défini par l'inégalité $\psi(x) > \psi(x_o)$ au bord duquel se trouve x_o, avec le contrôle de $\mathfrak{F}_\varphi$ par une puissance de la distance au bord ; l'hypothèse (ii)' signifie en plus de l'hypothèse (ii) de faible pseudo-convexité, que le champ hamiltonien de p est transverse au bord du domaine précédent en tout point de $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$.

(k) Les hypothèses du théorème 1.3 n'empêchent pas que l'on puisse trouver, dans certains cas, des points de S arbitrairement proches de x_o et qui ne possèdent pas la propriété d'unicité ; cette instabilité du résultat fourni par le théorème 1.3 sera mise en évidence sur des exemples à la fin du paragraphe suivant.

1.5. Exemples. Dans chacun des exemples donnés ci-dessous, on remarquera que la surface S définie par la fonction $\varphi(x) = x_4$ n'est pas fortement pseudo-convexe en $x_o = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$; on ne peut donc obtenir l'unicité comme conséquence du théorème 1.1. Nous posons pour $k \geqslant 1$

$$p_\infty(x,\xi) = \xi_4^2 - \xi_3^2 + \xi_2^2 + 2\,\xi_1\,\xi_3 + 2i\,\xi_1\,\xi_2 \quad , \quad p_k(x,\xi) = p_\infty(x,\xi) + x_3^k\,x_4\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \ ,$$

et laissons au lecteur le soin de vérifier que ces symboles définissent des opérateurs principalement normaux de type biprincipal, et que $\mathfrak{F}_\varphi \geqslant 0$ et $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^2(S,x_o)$.

Pour le symbole p_∞, on peut calculer que

$$\mathfrak{F}_\varphi = \mathscr{G}_\varphi = 0 \qquad \text{sur} \qquad \mathscr{C}ar_p^2(\mathscr{S})$$

où $\mathcal{S}$ est définie par la fonction $\varphi(x) = x_4$. Ainsi, la famille $\mathcal{S}$ est faiblement pseudo-convexe près de x_o (il en est d'ailleurs de même pour le symbole p_k si $k \in 2\mathbb{N}$), et on peut donc appliquer le théorème 1.2. Si l'on s'intéresse à la véritable unicité de Cauchy, on peut encore noter que le résultat précédent permet de déduire l'unicité pour tout opérateur de symbole principal p_∞ à travers l'hypersurface d'équation $\varphi(x) = x_4 - \exp(-1/|x|^2)$ (qui n'est toujours pas fortement pseudo-convexe en x_o, et à laquelle on ne peut pas non plus appliquer le théorème 1.3).

Pour le symbole p_k, on obtient

$$\mathcal{T}_\varphi(x,\zeta) = 2\, x_3^k \, (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \qquad \text{sur} \qquad \mathcal{C}ar_p^2(S)$$

où S est définie par la fonction $\varphi(x) = x_4$, et comme $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 > 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S)$, cela prouve que l'hypothèse (iii)' est vérifiée avec $\psi(x) = x_3$; enfin $\{p_k, \psi\} = -2\xi_3 + 2\xi_1 \neq 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S)$ ce qui prouve que l'hypothèse (ii)' est également vérifiée. Le théorème 1.3 peut donc s'appliquer à cet exemple.

Signalons enfin qu'en tout point x_o' de la surface S d'équation $\varphi(x) = x_4$ vérifiant $x_3 < 0$, les méthodes développées dans [8] permettent de montrer qu'il n'y a unicité stable pour aucun opérateur de symbole principal p_1 (et plus généralement de symbole principal p_k, $k \notin 2\mathbb{N}$) ; en effet, ces symboles admettent des phases $\Psi(x) = x_2 + \Psi_o(x_3, x_4)$ avec $d\Psi_o(x_o') = d\,x_3$, ce qui permet ensuite de construire une fonction Φ telle que

$$\begin{cases} p_\xi(x, d\Psi(x)) \cdot \Phi_x(x) = 0 \qquad \text{et} \\ x_o' \in \{x \in \mathbb{R}^4 / \Phi(x) \geqslant 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^4 / \varphi(x) \geqslant 0\} \ , \end{cases}$$

puis de démontrer un théorème de non-unicité ; cela illustre bien l'instabilité du résultat établi au théorème 1.3. On remarquera aussi que cette méthode permet également de construire une solution à support <u>égal</u> à $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_4 \geqslant 0\}$ pour tout opérateur de symbole principal p_∞ convenablement perturbé à l'ordre zéro, ce qui montre qu'on ne peut espérer mieux que l'unicité <u>compacte</u> dans la conclusion du théorème 1.2 (dans le cas de p_∞, on prend $\Psi(x) = x_2 + x_3$ et $\Phi(x) = x_4$).

2. <u>REGULARITE DES VARIETES ET DES FONCTIONS INTRODUITES</u>.

Nous supposerons tout au long de ce paragraphe que <u>P est un opérateur principalement normal de type biprincipal et que $\{\{p,\varphi\},\varphi\} \neq 0$ sur $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$</u> (cf. §§. 1.3 & 1.4) ; de plus, comme certains de nos calculs dépendront du choix des coordonnées, nous supposerons que celles-ci sont fixées, et de telle façon que <u>$\varphi(x) = x_n$</u> .

Dans la démonstration du théorème 1.3, il nous faudra considérer des ensembles $\mathscr{C}ar_p^2(\Sigma_t)$ pour des hypersurfaces Σ_t proches de S ; à cet effet, nous posons

$$\mathscr{C}ar_p^1 = \left\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / p(x,\xi - i\,\tau N) = 0\right\} \quad \text{et}$$
$$\mathscr{C}ar_p^2 = \left\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^1 / p_\xi(x,\xi - i\,\tau N) \cdot N = 0\right\}.$$

Si le choix d'une équation φ_1 de la famille $\mathcal{S}$ (resp. d'une hypersurface Σ_t proche de S) est fixé, on identifiera $\mathscr{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ à $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2 / N = d\varphi_1(x)\}$ (resp. $\mathscr{C}ar_p^2(\Sigma_t)$ à $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2 / \varphi_1(x) = t$ et $N = d\varphi_1(x)\}$) et on étend la fonction $\mathcal{F}_{\varphi_1}$ à l'ensemble des points <u>non réels</u> de $\mathscr{C}ar_p^1$ en posant, avec $\zeta = \xi - i\,\tau N$ $(\tau \neq 0)$,

$$F_{\varphi_1}(x,\xi,\tau,N) = \mathcal{I}m(p_\xi(x,\zeta) \cdot \overline{p_x(x,\zeta)}/\tau) - \varphi_1''(x)(p_\xi(x,\zeta)\,,\overline{p_\xi(x,\zeta)}) \ .$$

<u>Remarque</u> : S'il est vrai que la fonction $(x,\xi,\tau) \to F_{\varphi_1}(x,\xi,\tau,d\varphi_1(x))$, comme fonction définie sur $T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, est indépendante des coordonnées choisies

sur $\mathbb{R}^n$, il n'en va pas de même pour la fonction F_{φ_1}, même si N est considéré comme un vecteur cotangent, et c'est pourquoi nous avons supposé dès le début du paragraphe que les coordonnées étaient fixées.

Notre premier lemme exprime la régularité des objets que nous venons d'introduire.

Lemme 2.1 : *Sous les hypothèses précisées au début du paragraphe,* $\mathcal{C}ar_p^1$ *est une sous-variété de codimension 2 de* $\mathbb{R}^{3n+1}$ *dont* $\mathcal{C}ar_p^2$ *est à son tour une sous-variété de codimension 2 sur laquelle* x *et* N *peuvent être choisies comme coordonnées indépendantes, du moins près de* $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ *identifié à* $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}ar_p^2 / x = x_o\,,\ N = d\varphi \text{ et } \mathcal{F}_\varphi(x,\xi - i\tau N) = 0\}$. *De plus, la fonction* F_φ *reste bornée au voisinage de tout point de* $\mathcal{C}ar_p^1$, *et s'étend sur* $\mathcal{C}ar_p^2$ *en une fonction continue, et sur* $\mathcal{C}ar_p^1$ *en une fonction* C^∞ *près de* $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$.

Démonstration : Pour obtenir la première affirmation, il suffit de vérifier que les gradients en (ξ,τ) des parties réelles et imaginaires des fonctions $p(x,\xi - i\tau N)$ et $p_\xi(x,\xi - i\tau N)\cdot N$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$. Or sur $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big[p(x,\xi - i\tau N)\Big] = i\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[p(x,\xi - i\tau N)\Big] = \{p,\varphi\}(x,\xi - i\tau N) = 0\,, \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big[p_\xi(x,\xi - i\tau N)\cdot N\Big] = i\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[p_\xi(x,\xi - i\tau N)\cdot N\Big] = \{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi - i\tau N) \neq 0\,,$$

ce qui donne le résultat puisque P est de type biprincipal.

Pour la régularité de F_φ, il est clair qu'elle est assurée par sa définition tant que $\tau \neq 0$. Pour écrire une formule de Taylor près d'un point réel, calculons la dérivée de $\mathcal{I}m(p_\xi(x,\zeta)\cdot p_x(x,\zeta))$ par rapport à τ :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)) = \mathscr{I}m(\overline{-i[p_\xi(x,\zeta)\cdot N]_\xi}\cdot p_x(x,\zeta) - i\,\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot[p_\xi(x,\zeta)\cdot N]_x) =$$

$$= - \mathscr{R}e\ G_N(x,\zeta)$$

où l'on a posé $G_N(x,\zeta) = \overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot[p_\xi(x,\zeta)\cdot N]_x - \overline{p_x(x,\zeta)}\cdot[p_\xi(x,\zeta)\cdot N]_\xi$; on notera que cette fonction G_N vérifie l'identité suivante

$$G_{d\varphi}(x,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x)) = \{\overline{p_{\tau\varphi}}, \{p_{\tau\varphi}, \varphi\}\}(x,\xi)\ .$$

Près d'un point <u>réel</u> de $\mathscr{C}ar_p^1$, une formule de Taylor nous donne donc, avec $\zeta = \xi - i\,\tau N$ et $\zeta_\theta = \xi - i\,\theta\tau N$,

$$\mathscr{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)) = \{\bar{p},p\}(x,\xi)/2i - \tau\int_0^1 \mathscr{R}e\ G_N(x,\zeta_\theta)\,d\theta\ ;$$

comme $\varphi''(x) = 0$ puisque $\varphi(x) = x_n$, on obtient en utilisant la normalité de P

$$\left|F_\varphi(x,\xi,\tau,N) + \int_0^1 \mathscr{R}e\ G_N(x,\zeta_\theta)d\theta\right| \leqslant \frac{C}{2}\left|\frac{p(x,\xi)}{\tau}\right|\ .$$

Une nouvelle formule de Taylor permet d'écrire que $p(x,\xi) = p(x,\zeta) + i\tau\int_0^1 p_\xi(x,\zeta_\theta)\cdot N\,d\theta$; on obtient donc sur $\mathscr{C}ar_p^1$

$$\left|F_\varphi(x,\xi,\tau,N) + \int_0^1 \mathscr{R}e\ G_N(x,\zeta_\theta)d\theta\right| \leqslant \frac{C}{2}\left|\int_0^1 p_\xi(x,\zeta_\theta)\cdot N\,d\theta\right|$$

ce qui prouve que F_φ reste bornée et qu'elle se prolonge continûment en un point <u>réel</u> de $\mathscr{C}ar_p^2$ à condition d'y poser $F_\varphi(x,\xi,0,N) = - \mathscr{R}e\ G_N(x,\xi)$.

Enfin, près d'un point <u>réel</u> de $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$, on a une expression $\{\bar{p},p\} = 2i\,\mathscr{R}e(\bar{q}\,p)$ sur $T^*\mathbb{R}^n$ grâce à l'hypothèse de type principal ; en reprenant le calcul précédent, nous obtenons donc la formule

$$F_\varphi(x,\xi,\tau,N) = -\int_0^1\left[\mathscr{I}m(\bar{q}(x,\xi)\ p_\xi(x,\zeta_\theta)\cdot N) + \mathscr{R}e\ G_N(x,\zeta_\theta)\right]d\theta$$

valable sur $\mathscr{C}ar_p^1$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.1.

Un deuxième lemme, qui s'appuie sur le précédent, nous permettra de démontrer le théorème 1.2.

<u>Lemme</u> <u>2.2.</u> : *Sous les hypothèses précisées au début du paragraphe, on a au voisinage de* x_o :

(iv) <u>*Sur*</u> $\underline{\mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S})}$ *identifié à* $\{(x,\xi,\tau,N)\in \mathcal{C}ar^1_p / N = d\varphi\}$, *la fonction* F_φ *reste localement bornée, et si* φ_1 *est une équation de* $\mathcal{S}$ *et* $\tau_1 \in \mathbb{R}$, $d_\xi\, \mathcal{R}e\, p_{\tau_1\varphi_1} \wedge d_\xi\, \mathcal{I}m\, p_{\tau_1\varphi_1} \neq 0$ *en tout point* (x,ξ) *tel que* $(x,\xi - i\tau_1 d\varphi_1(x)) \in \mathcal{C}ar^{2,0}_p(S,x_o)$;

(v) <u>*Sur*</u> $\underline{\mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})}$ *identifié à* $\{(x,\xi,\tau,N)\in \mathcal{C}ar^2_p / N = d\varphi\}$, *on a, près de* $\mathcal{C}ar^{2,0}_p(S,x_o)$: $d_{\xi_n,\tau}\, \mathcal{R}e\{p,\varphi\} \wedge d_{\xi_n,\tau}\, \mathcal{I}m\{p,\varphi\} \neq 0$ *tandis que* $\partial/\partial\xi_n$ *et* $\partial/\partial\tau$ *sont des champs tangents à* $\mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S})$; *de plus on a* $\mathcal{F}_\varphi(x,\xi - i\tau\, d\varphi(x)) = F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi)$, *et, près de* $\mathcal{C}ar^{2,0}_p(S,x_o)$, $\mathcal{G}_\varphi(x,\xi - i\tau\, d\varphi(x)) = (\partial F_\varphi/\partial\xi_n + i\,\partial F_\varphi/\partial\tau)(x,\xi,\tau,d\varphi)$.

<u>Démonstration</u> : La propriété (iv) et la première partie de la propriété (v) découlent trivialement du lemme 2.1. En un point <u>non réel</u> de $\mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$, il est clair que $\mathcal{F}_\varphi(x,\xi - i\tau\, d\varphi(x)) = F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi)$; en un point <u>réel</u> de $\mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$, cela découle des calculs effectués dans la démonstration du lemme 2.1 puisque, par normalité, $d_\xi\{\bar{p},p\} = i\, \mathcal{R}e(\bar{\lambda}\, d_\xi\, p)$ en tout point <u>réel</u> de $\mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S})$ (pour une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ dépendant du point considéré) ce qui entraîne successivement que $\{\{\bar{p},p\},\varphi\} = i\, \mathcal{R}e(\bar{\lambda}\{p,\varphi\})$ puis que $\mathcal{I}m\{\bar{p},\{p,\varphi\}\} = 0$ en tout point <u>réel</u> de $\mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$; on obtient ainsi en particulier que $\mathcal{F}_\varphi$ est continue sur $\mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$, et y est C^∞ près de $\mathcal{C}ar^{2,0}_p(S,x_o)$.

Comme $\varphi(x) = x_n$, on a pour $\tau \neq 0$, $\zeta = \xi - i\tau N$,

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial \xi_n}(x,\xi,\tau,N) = \mathcal{I}m\left(\overline{[\{p,\varphi\}(x,\zeta)]_\xi}\cdot p_x(x,\zeta) + \overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot [\{p,\varphi\}(x,\zeta)]_x\right)/\tau =$$
$$= \mathcal{I}m\left(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot [\{p,\varphi\}(x,\zeta)]_x - \overline{p_x(x,\zeta)}\cdot [\{p,\varphi\}(x,\zeta)]_\xi\right)/\tau ,$$

et

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial \tau}(x,\xi,\tau,N) = -\mathcal{I}m\left(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)/\tau^2\right) - \mathcal{R}e\, G_N(x,\zeta)/\tau \quad ,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \xi_n} + i\,\frac{\partial F_\varphi}{\partial \tau}\right)(x,\xi,\tau,d\varphi) = \frac{(\mathcal{F}_\varphi + G_{d\varphi})(x,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x))}{i\,\tau} = \mathcal{G}_\varphi(x,\xi - i\,\tau\, d\varphi(x)) .$$

Soit maintenant un point <u>réel</u> $(x_1,\xi_1)\in \mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ proche de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$; on peut alors tracer un chemin tangent au champ $\partial/\partial\xi_n$ en (x_1,ξ_1) , contenu dans les points <u>réels</u> de $\mathcal{C}ar_p^1(\mathcal{S})$, et donc le long duquel $F_\varphi = -\mathcal{I}m(\bar{q}\{p,\varphi\}) - \mathcal{R}e\{\bar{p},\{p,\varphi\}\}$ (d'après les calculs de la démonstration du lemme 2.1) ; il en résulte que

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial \xi_n}(x_1,\xi_1,0,d\varphi) =$$
$$= -\mathcal{I}m\Big[\bar{q}(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\Big] - \mathcal{R}e\Big[\{\{\bar{p},\{p,\varphi\}\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\Big] =$$
$$= -\mathcal{I}m\Big[\bar{q}(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\Big] + \mathcal{R}e\Big[\{\{\varphi,\bar{p}\},\{p,\varphi\}\}(x_1,\xi_1) + \{\{\{p,\varphi\},\varphi\},\bar{p}\}(x_1,\xi_1)\Big] =$$
$$= -\mathcal{I}m\Big[\bar{q}(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\Big] - \mathcal{R}e\Big[\{\bar{p},\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\Big] .$$

De même, on peut tracer un chemin contenu dans $\mathcal{C}ar_p^1(\mathcal{S})$, passant par (x_1,ξ_1) et sur lequel $|x-x_1| + |\xi-\xi_1| = O(\tau^2)$; de la formule de Taylor

$$p(x,\zeta) = p(x,\xi) - i\,\tau\,\{p,\varphi\}(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2}\,\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi) + O(\tau^3)$$

on déduit que $p(x,\xi) = \frac{\tau^2}{2}\,\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x,\xi) + O(\tau^3)$ le long de ce chemin ; on calcule alors que

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial\tau}(x_1,\xi_1,0,d\varphi) = \lim_{\tau\to 0}\tau^{-1}\left[\mathcal{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)\cdot p_x(x,\zeta)/\tau}) + \mathcal{R}e\{\bar p,\{p,\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\right] =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\tau^{-2}\left[\frac{1}{2i}\{\bar p,p\}(x,\xi) - \frac{\tau^2}{2}\mathcal{I}m\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x,\xi) + \frac{\tau^2}{2i}\{\{\bar p,\varphi\},\{p,\varphi\}\}(x,\xi) + O(\tau^3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left[\bar q(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\right] - \frac{1}{2}\mathcal{I}m\left[\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\right] + \frac{1}{2i}\left[\{\{\bar p,\varphi\},\{p,\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\right] =$$

$$= \mathcal{R}e\left[\bar q(x_1,\xi_1)\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_1,\xi_1)\right] - \mathcal{I}m\left[\{\bar p,\{\{p,\varphi\},\varphi\}\}(x_1,\xi_1)\right],$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.

Remarque : Comme F_φ est C^∞ sur $\mathcal{C}ar_p^1$ près de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ d'après le lemme 2.1, il résulte de ce qui précède que $\mathcal{G}_\varphi$ est également C^∞ sur $\mathcal{C}ar_p^2(\mathcal{S})$ près de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$; ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement par le calcul.

Pour énoncer le lemme suivant, qui nous permettra de démontrer le théorème 1.3, nous aurons besoin de la fonction

$$H_{\varphi,x_o}(x,\xi,\tau,N) = \max\{|x-x_o|, |N-d\varphi|, |F_\varphi(x,\xi,\tau,N)|\}$$

qui est continue sur $\mathcal{C}ar_p^2$ d'après le lemme 2.1.

Lemme 2.3. : Sous les hypothèses précisées au début du paragraphe et pour toute constante $c_1>0$, il existe deux constantes $c_2>0$ et $C>0$ telles que pour tout point $(x,\xi,\tau,N)\in|\mathcal{C}ar_p^{2,c_2}(S,x_o)| = \{(x,\xi,\tau,N)\in\mathcal{C}ar_p^2/H_{\varphi,x_o}(x,\xi,\tau,N)\leqslant c_2$ et $|\xi - i\tau N| = 1\}$, il existe un point $(y,\zeta)\in\mathcal{C}ar_p^2(S)$ avec les propriétés suivantes

$$y_{n-1} = x_{n-1}\ ,\quad |y-x_o|\leqslant c_1\ ,\quad \frac{1}{2}\leqslant|\zeta|\leqslant 2 \quad\text{et}$$

$$|\mathcal{F}_\varphi(y,\zeta) - F_\varphi(x,\xi,\tau,N)| \leqslant C\,(|\varphi(x)| + |N-d\varphi|)\ .$$

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 2.1, $\mathcal{C}ar_p^2$ est, près de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$, une variété sur laquelle x et N peuvent être prises comme coordonnées indépendantes ; $\mathcal{C}ar_p^2(S)$ en est donc une sous-variété d'équation $\varphi(x) = N - d\varphi = 0$ sur laquelle x_{n-1} peut être prise comme coordonnée.

Au voisinage de tout point $(x_o,\zeta_o) \in |\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)| \subset \mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$, nous pouvons alors écrire pour un point $(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}ar_p^2$ une formule de Taylor en x_n et N (mais à x_{n-1} fixé), à partir d'un point $(y,\zeta) \in \mathcal{C}ar_p^2(S)$ vérifiant $y_{n-1} = x_{n-1}$, qui donne

$$F_\varphi(x,\xi,\tau,N) = \mathcal{F}_\varphi(y,\zeta) + O(|\varphi(x)| + |N - d\varphi|)$$

puisque la fonction F_φ est C^∞ près de $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$. Si le voisinage a été choisi assez petit, on a aussi $|y - x_o| \leqslant c_1$ et $\frac{1}{2} \leqslant |\zeta| \leqslant 2$.

Par compacité, nous pouvons recouvrir $|\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)|$ par de tels voisinages, et il en résulte que la propriété recherchée se trouve établie pour tout (x,ξ,τ,N) appartenant à un voisinage Ω de $|\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)|$. Enfin, comme la fonction H_{φ,x_o} est continue sur $\mathcal{C}ar_p^2$ et que $\mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o) = \{(x,\xi,\tau,N) \in \mathcal{C}ar_p^2 / H_{\varphi,x_o}(x,\xi,\tau,N) = 0\}$, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $|\mathcal{C}ar_p^{2,c_2}(S,x_o)| \subset \Omega$ ce qui achève la démonstration de notre lemme.

3. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2.</u>

3.1. <u>Espaces de symboles et normes utilisés</u>. Choisissons des coordonnées locales telles que $x_o = 0$ et $\varphi(x) = x_n$ de façon à pouvoir utiliser les résultats du paragraphe précédent, et posons $\varphi_1(x) = 1 - e^{-A x_n}$ où la constante $A > 0$ sera fixée ultérieurement, puis

$$P_{\tau_1} = e^{-\tau_1 \varphi_1(x)} P(x,D)\, e^{\tau_1 \varphi_1(x)} \quad ;$$

cet opérateur a pour symbole usuel un polynôme en (ξ,τ_1) de degré m dont la partie homogène de degré m n'est autre que $p_{\tau_1\,\varphi_1}(x,\xi) = p(x,\xi - i\,\tau_1\,d\varphi_1(x))$, et qui appartient clairement à la classe de symboles

$$\Sigma^m = S((|\xi|^2 + \tau_1^2)^{m/2} \quad , \quad |dx|^2 + (|\xi|^2 + \tau_1^2)^{-1}\ |d\xi|^2)$$

de Hörmander [3, déf. 18.4.2] où τ_1 joue le rôle d'un paramètre, les semi-normes des symboles étant indépendantes de ce paramètre. En réalité, nos symboles devraient être définis partout et non pas seulement pour x voisin de x_o, mais tant qu'ils restent polynômiaux en (ξ,τ_1), ils correspondent à des opérateurs différentiels donc locaux, et ce problème devient sans importance ; il n'en sera plus de même au paragraphe 3.3 lorsque nous utiliserons l'inégalité de Fefferman-Phong pour laquelle ces symboles devront être définis sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0$. A ces classes de symboles Σ^k sont attachées les normes suivantes, qui sont des fonctions de τ_1

$$\|u\|_k^2 = \int (|\xi|^2 + \tau_1^2)^k\ |\hat{u}(\xi)|^2\ d\xi \ ;$$

on notera que $\|\ \|_0$ n'est autre que la norme usuelle dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le produit scalaire sera noté (,).

Les propriétés essentielles de ce calcul pseudo-différentiel sont résumées dans l'énoncé suivant (pour les démonstrations, nous renvoyons à Hörmander [3, th. 18.5.4, 18.6.3 & 18.6.8] ou Lerner & Robbiano [6, th. 3.1, 3.4 & 3.5] qui utilisent également un calcul à paramètre de ce type), où l'on adopte la notation : $s_{x\,\cdot\,\xi} = \sum_j \partial^2 s / \partial x_j\, \partial\xi_j$.

Théorème 3.1 : Soit S un opérateur de symbole $s \in \Sigma^k$; alors

(a) Continuité : il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\| S u \|_0 \leqslant C \, \| u \|_k \, ;$$

(b) *Adjoint L^2 et composition :* *S^* est un opérateur de symbole $\bar{s} - i\,\bar{s}_x \cdot \xi + r$ avec $\bar{s} - i\,\bar{s}_x \cdot \xi \in \Sigma^k$ et $r \in \Sigma^{k-2}$; de même si T est un opérateur de symbole $t \in \Sigma^{\ell}$, ST est un opérateur de symbole $st - i\, s_\xi \cdot t_x + r$ avec $st - i\, s_\xi \cdot t_x \in \Sigma^{k+\ell}$ et $r \in \Sigma^{k+\ell-2}$;*

(c) *Inégalité de Fefferman-Phong :* *Si de plus il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour $\tau_1 \geqslant 1$, $\mathcal{R}e(s + (i/2) s_{x \cdot \xi}) + C_1 (|\xi|^2 + \tau_1^2)^{(k-2)/2} \geqslant 0$, alors il existe une autre constante $C_2 > 0$ telle que pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\tau_1 \geqslant 1$,*

$$\mathcal{R}e(S u, u) + C_2 \, \| u \|^2_{(k-2)/2} \geqslant 0 \, .$$

Nous posons ensuite $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < \delta\}$; en utilisant les propriétés énoncées au théorème 3.1, nous avons immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.2 : *δ étant une constante strictement positive, on a $\| u \|_{k-1} \leqslant \delta \, \| u \|_k$ pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tout $\tau_1 \geqslant 1/\delta$ et tout entier $k \geqslant 1$. De plus, si S est un opérateur de symbole $s \in \Sigma^k$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall\, \delta \in \,]0,1[$, $\forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$, $\forall \tau_1 \geqslant 1/\delta$,*

$$\| S(i\, x_j u) \|_0 \leqslant C\, \delta \, \| u \|_k \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}e(i\, x_j u, S u) \leqslant C\, \delta \, \| u \|^2_{k/2}$$

pour $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration : Pour $\tau_1 \geqslant 1/\delta$,

$$(|\xi|^2 + \tau_1^2)^{k-1} \leqslant \frac{|\xi|^2 + \tau_1^2}{\tau_1^2} \, (|\xi|^2 + \tau_1^2)^{k-1} \leqslant \delta^2 \, (|\xi|^2 + \tau_1^2)^k$$

d'où notre première affirmation. On peut ensuite écrire $S(i\, x_j u) = i\, x_j S u + [S, i\, x_j] u$, et $[S, i\, x_j]$ a pour symbole $\partial s / \partial \xi_j \in \Sigma^{k-1}$; on obtient donc

$$\| S(i x_j u)\|_0 \leqslant C_1 \delta \| u\|_k + C_2 \| u\|_{k-1} ,$$

ce qui justifie la première inégalité proposée d'après ce qui précède ; la seconde s'en déduit en écrivant $(i x_j u, S u) \simeq (E^* (i x_j u), E^{-1} S u)$ où E est un opérateur elliptique de symbole $e \in \Sigma^{k/2}$ (dans le cas où S est différentiel et k pair, qui est le seul cas où nous utiliserons cette inégalité, on l'obtient de façon plus élémentaire en effectuant $k/2$ intégrations par parties).

Le théorème 1.2 se déduit classiquement (cf. Hörmander [3, démonstration du th. 28.3.4]) de l'inégalité de Carleman suivante.

Proposition 3.3 : Sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que, avec $\varphi_1 = 1 - e^{-A\varphi}$ et $P_{\tau_1} = e^{-\tau_1 \varphi_1} P e^{\tau_1 \varphi_1}$, on ait : $\forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$, $\forall \tau_1 \geqslant 1/\delta$,

$$\| u\|_{m-1} \leqslant \| P_{\tau_1} u\|_0 .$$

La démonstration de cette proposition comporte essentiellement deux étapes comme dans Lerner & Robbiano [6] : une estimation pour les opérateurs de type principal, et une majoration de $\| P^*_{\tau_1} u\|_0$ par $\| P_{\tau_1} u\|_0$ utilisant l'hypothèse de pseudo-convexité.

3.2. Estimation pour les opérateurs de type principal. Comme tous les opérateurs que nous considérons ici sont différentiels (et donc locaux), les démonstrations que nous proposons seront élémentaires.

Lemme 3.4 : Supposons que P est un opérateur principalement normal de type biprincipal, et que $d_\xi p$ ne s'annule en aucun point réel de $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$. Alors pour tout $A > 0$, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que $\forall \delta \in]0, \delta_0]$, $\forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$, $\forall \tau_1 \geqslant 1/\delta$,

$$\|u\|_{m-1} \leq \frac{\delta}{\delta_0} (\|P_{\tau_1} u\|_0 + \|P^*_{\tau_1} u\|_0) .$$

Démonstration : Montrons d'abord que $d_\xi p \neq 0$ sur $\mathscr{C}ar^0(\mathcal{S})$.

En effet, supposons qu'il existe un point $(x_0,\zeta_0) \in \mathscr{C}ar^0(\mathcal{S})$ où $d_\xi p$ s'annule ; en écrivant $p(x_0,\zeta_0)$ (resp. $\{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0)$) comme le produit scalaire de $d_\xi p$ avec ζ_0/m (resp. avec $d\varphi(x_0)$), nous en déduisons que $(x_0,\zeta_0) \in \mathscr{C}ar^2_p(S,x_0)$, et qu'il ne peut s'agir d'un point réel à cause de la deuxième hypothèse ; on peut donc écrire $\mathcal{F}_\varphi(x_0,\zeta_0) = \mathcal{I}m(p_\xi(x_0,\zeta_0) \cdot p_x(x_0,\zeta_0)/\tau_0) = 0$ d'où $(x_0,\zeta_0) \in \mathscr{C}ar^{2,0}_p(S,x_0)$ ce qui contredit que $d_\xi p(x_0,\zeta_0) = 0$ à cause de l'hypothèse de type biprincipal ; notre première affirmation se trouve donc justifiée.

Par des arguments d'homogénéité et de compacité, nous en déduisons que

$$\sum_j |q_j(x_0,\xi)|^2 \geq c\ (|\xi|^2 + \tau_1^2)^{m-1} \quad , \quad c > 0 ,$$

où $q_j = \partial p_{\tau_1 \varphi_1}/\partial\xi_j$; multiplions les deux côtés par $|\hat{u}(\xi)|^2$ et intégrons en ξ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{m-1} &\leq C_1 \sum_j \|q_j(x_0,D)u\|^2_0 \leq \\ &\leq C_1 \sum_j \|q_j(x,D)u\|^2_0 + C_2\,\delta\,\|u\|^2_{m-1} \end{aligned}$$

car on peut écrire $q_j(x_0,D) = q_j(x,D) + \sum_k x_k\, q_{j,k}(x,D)$ où les opérateurs $q_{j,k}(x,D)$ sont différentiels (donc locaux) et à symboles dans Σ^{m-1}. Comme nous le verrons plus loin, chaque q_j vérifie l'estimation

(1) $$\|q_j(x,D)u\|^2_0 \leq C_3\,\delta\,\|u\|_{m-1}\,(\|P_{\tau_1}u\|_0 + \|P^*_{\tau_1}u\|_0 + \|u\|_{m-1}) ;$$

il en résulte que

$$\|u\|_{m-1} \leqslant \frac{C\delta}{2} (\|P_{\tau_1}u\|_0 + \|P^*_{\tau_1}u\|_0 + \|u\|_{m-1})$$

pour une nouvelle constante $C > 0$, d'où finalement le lemme si on a choisi $\delta_o = 1/C$.

<u>Démonstration de l'inégalité (1)</u> : Pour simplifier les notations, posons $v(x) = i\,x_j\,u(x)$ et $Q = q_j(x,D)$; d'après le théorème 3.1, on a $Q = [P_{\tau_1}, i\,x_j] + R$ où R est un opérateur dont le symbole appartient à Σ^{m-2}, donc

$$\|Qu\|_0^2 = (P_{\tau_1}v\,,Qu) - (i\,x_j\,P_{\tau_1}u\,,Qu) + (Ru,Qu) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{R}e(v,P^*_{\tau_1}Qu) + C_4\,\delta\,\|P_{\tau_1}u\|_0\,\|u\|_{m-1} + C_5\,\|u\|_{m-2}\,\|u\|_{m-1} \;;$$

d'après le lemme 3.2, nous pouvons majorer le dernier terme par $C_5\,\delta\,\|u\|^2_{m-1}$, et le premier terme se majore lui aussi grâce au lemme 3.2 (utilisé deux fois) par $C_6\,\delta\|u\|_{m-1}\,(\|u\|_{m-1} + \|P^*_{\tau_1}u\|_0)$ puisque

$$\mathcal{R}e(v,P^*_{\tau_1}Qu) = \mathcal{R}e(v,[P^*_{\tau_1},Q]u) + \mathcal{R}e(Q^*v\,,P^*_{\tau_1}u)$$

et que le symbole de $[P^*_{\tau_1},Q]$ appartient à Σ^{2m-2} et que celui de Q^* appartient à Σ^{m-1}. Cela achève la démonstration de l'inégalité (1) et celle du lemme 3.4.

3.3. <u>Majoration de $\|P^*_{\tau_1}u\|_0$ par $\|P_{\tau_1}u\|_0$</u>. Nous commençons par utiliser l'hypothèse de faible pseudo-convexité pour établir une estimation sur le symbole de $[P^*_{\tau_1},P_{\tau_1}]$.

<u>Lemme 3.5</u> : Sous les hypothèses du théorème 1.2, il existe trois constantes $A > 0$, $C > 0$ et $\delta_1 > 0$ telles que, avec $\varphi_1 = 1 - e^{-A\varphi}$, on ait : $\forall x \in \Omega_{2\delta_1}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \tau_1 \geqslant 1$,

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C\,(|\xi|^2 + \tau_1^2)^{(m-1)/2}\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geqslant 0\,.$$

<u>Démonstration</u> : Puisque $\varphi_1(x) = 1 - e^{-A x_n}$, on a, pour $(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar^o(\mathcal{S})$, $\zeta = \xi - i\,\tau_1\, d\varphi_1(x) = \xi - i\,\tau\, d\varphi(x)$ avec $\tau = A(1-\varphi_1(x))\,\tau_1$, et

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i =$$

$$= 2\,\mathscr{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)) + 2A^2(1-\varphi_1(x))\tau_1\,|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 =$$

$$= 2[\mathscr{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)) + A\,\tau\,|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2] \;.$$

Nous verrons plus loin que pour tout $(x_o,\zeta_o) \in \mathscr{C}ar^o(\mathcal{S})$, il existe deux constantes $A_o > 0$ et $C_o > 0$ telles que, avec $\varphi_1 = 1 - e^{-A_o\varphi}$, on ait au voisinage de (x_o,ζ_o) et pour $\tau \geqslant 0$

$$\text{(2)} \qquad \{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C_o\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geqslant 0 \;;$$

du calcul précédent, il ressort que si l'estimation (2) est vérifiée en certains points avec deux constantes A_o et C_o, elle le sera a fortiori en ces points pour toutes constantes $A \geqslant A_o$ et $C \geqslant C_o$; ce même calcul permet en outre d'écrire <u>pour tout $(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar^1_p(\mathcal{S})$</u>

$$\text{(3)} \qquad \{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i = 2\tau\,[F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi) + A|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2] \;.$$

Nous utilisons maintenant la compacité de $K = \{(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar^o(\mathcal{S}) / x = x_o$, $\tau \geqslant 0$ et $|\zeta| = 1\}$ pour déduire de ce qui précède l'existence de deux constantes $A > 0$ et $C_1 > 0$ telles qu'au voisinage de K et pour $\tau \geqslant 0$

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C_1\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geqslant 0 \;;$$

en appliquant cette inégalité à $\zeta = (\xi - i\,\tau_1\, d\varphi_1(x))/|\xi - i\,\tau_1\, d\varphi_1(x)|$, on obtient donc l'estimation annoncée avec $C = 2A^{m-1}C_1$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.5.

<u>Démonstration de l'inégalité (2)</u> : Elle sera obtenue par des arguments différents suivant la position du point (x_o,ζ_o).

(a) <u>Si (x_o,ζ_o) est un point réel de $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$</u>, on peut écrire grâce à la propriété (v) du lemme 2.2 une formule de Taylor pour la fonction F_φ à partir d'un point $(x_2,\zeta_2) \in \mathscr{C}ar_p^2(\mathscr{S})$, $\zeta_2 = \xi_2 - i\,\tau_2 d\varphi(x_2)$, qui conduit à l'estimation

$$F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi) \geq F_\varphi(x_2,\xi_2,\tau_2,d\varphi) - C_1 \left|\left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \xi_n} + i\frac{\partial F_\varphi}{\partial \tau}\right)(x_2,\xi_2,\tau_2,d\varphi)\right| |\{p,\varphi\}(x,\zeta)| -$$
$$- C_2 \, |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 ,$$

d'où

$$F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi) \geq \mathfrak{F}_\varphi(x_2,\zeta_2) - c\, |\mathscr{G}_\varphi(x_2,\zeta_2)|^2 - \left(\frac{C_1^2}{4c} + C_2\right)|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2$$

valable pour $(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^1(\mathscr{S})$ proche de (x_o,ζ_o). En utilisant la propriété (iii) de l'hypothèse de faible pseudo-convexité, on en déduit que $F_\varphi(x,\xi,\tau,d\varphi) + A_o\, |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 \geq 0$ au voisinage de (x_o,ζ_o) sur $\mathscr{C}ar_p^1(\mathscr{S})$ si on a choisi $A_o = (C_1^2/4c) + C_2$; dans la suite de l'examen de ce premier cas, on pose $\varphi_1 = 1 - e^{-A_o\varphi}$.

Par ailleurs, on peut écrire $\{\overline{p},p\} = 2i\,\mathcal{R}e(\overline{q}\,p)$ sur <u>$T^*\mathbb{R}^n$</u> près de (x_o,ζ_o); il en résulte (en écrivant une formule de Taylor pour $\mathcal{I}m(p_\xi(x,\zeta)\cdot p_x(x,\zeta))$ puis pour $p(x,\xi)$) que pour $(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar^o(\mathscr{S})$ voisin de (x_o,ζ_o),

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i =$$
$$= 2\,\mathcal{R}e[\overline{q}(x,\xi)\,p(x,\xi)] - 2\tau\int_0^1 \mathcal{R}e\, G_{d\varphi}(x,\zeta_\theta)d\theta + 2A_o\tau\, |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2 =$$
$$= 2\,\mathcal{R}e[\overline{q}(x,\xi)\,p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)] + 2\tau\, I(x,\zeta) ,$$

où $I(x,\zeta) = -\int_0^1 \mathcal{R}e\, G_{d\varphi}(x,\zeta_\theta)d\theta - \int_0^1 \mathcal{I}m[\overline{q}(x,\xi)\{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)]d\theta + A_o|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2$; il découle de l'expression (3) que $I = F_\varphi + A_o\, |\{p,\varphi\}|^2$ sur $\mathscr{C}ar_p^1(\mathscr{S})$, et notre choix de A_o ainsi que la propriété (iv) du lemme 2.2 nous permettent de tirer d'une formule de Taylor l'estimation $I(x,\zeta) \geqslant \mathcal{R}e(q_1(x,\zeta)\overline{p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)})$; on obtient donc pour $\tau \geqslant 0$

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i \geqslant 2\,\mathcal{R}e\left[\overline{(q(x,\xi)+\tau\, q_1(x,\zeta))}\, p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)\right]$$

d'où l'estimation (2) dans ce cas.

(b) <u>Si $(x_o,\zeta_o) \in \mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ avec $\tau_o > 0$</u>, le même choix de la constante A_o que dans le cas précédent suivi d'un raisonnement analogue (sans la difficulté liée à l'annulation de τ) permet d'écrire une estimation $\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}/i \geqslant \mathcal{R}e(\overline{q_1}\, p_{\tau_1\varphi_1})$ qui conduit à l'inégalité (2) de la même manière.

(c) <u>Si (x_o,ζ_o) est un point réel de $\mathcal{C}ar_p^2(S,x_o) \setminus \mathcal{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$</u>, les calculs effectués dans la démonstration du lemme 2.1 permettent d'écrire près de (x_o,ζ_o)

$$\left|\mathcal{I}m(\overline{p_\xi(x,\zeta)}\cdot p_x(x,\zeta)) + \tau\int_0^1 \mathcal{R}e\, G_{d\varphi}(x,\zeta_\theta)d\theta\right| \leqslant \frac{C}{2}\,|p(x,\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{2}\,|p(x,\zeta)| + \frac{C\tau}{2}\left|\int_0^1 \{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)d\theta\right| ;$$

posons $A_o = 1$ (i.e. $\varphi_1 = 1 - e^{-\varphi}$) ; nous déduisons du calcul précédent que pour $\tau \geqslant 0$,

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geqslant 2\tau\, J(x,\zeta) ,$$

où $J(x,\zeta) = -\int_0^1 \mathcal{R}e\, G_{d\varphi}(x,\zeta_\theta)d\theta - \frac{C}{2}\left|\int_0^1 \{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)d\theta\right| + |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2$;

dans le cas que nous étudions, $J(x_o,\zeta_o) > 0$ d'après la propriété (i) de l'hypothèse de faible pseudo-convexité, donc J reste positive au voisinage ce qui justifie l'estimation (2) dans ce cas.

(d) Si (x_0,ζ_0) est un point réel de $\mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$, les mêmes calculs que dans le cas précédent montrent que, au voisinage de (x_0,ζ_0) et pour $\tau \geqslant 0$,

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geqslant 2\tau\,|\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^2\,(K(x,\zeta)+A_0)\,,$$

$$\text{où}\quad K(x,\zeta) = |\{p,\varphi\}(x,\zeta)|^{-2}\left(-\int_0^1 \mathcal{R}e\, G_{d\varphi}(x,\zeta_\theta)d\theta - \frac{C}{2}\left|\int_0^1 \{p,\varphi\}(x,\zeta_\theta)d\theta\right|\right),$$

et comme la fonction K reste bornée au voisinage de (x_0,ζ_0), il suffit de choisir la constante A_0 suffisamment grande pour obtenir l'estimation (2) dans ce cas.

(e) Si $(x_0,\zeta_0) \in \mathcal{C}ar^2_p(S,x_0) \setminus \mathcal{C}ar^{2,0}_p(S,x_0)$ avec $\tau_0 > 0$, l'expression (3) et la propriété (i) de l'hypothèse de faible pseudo-convexité prouvent que pour $A_0 = 1$, la quantité $\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i$ est strictement positive en (x_0,ζ_0) et le reste donc au voisinage, ce qui entraîne l'estimation (2) dans ce cas avec $C_0 = 0$.

(f) Si $(x_0,\zeta_0) \in \mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{C}ar^2_p(\mathcal{S})$ avec $\tau_0 > 0$, c'est encore l'expression (3) qui prouve qu'avec $A_0 = 1 + |F_\varphi(x_0,\xi_0,\tau_0,d\varphi)/(\{p,\varphi\}(x_0,\zeta_0))^2|$, la quantité $\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i$ est strictement positive en (x_0,ζ_0), ce qui permet de conclure comme dans le cas précédent.

(g) Enfin, si $(x_0,\zeta_0) \in \mathcal{C}ar^0(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{C}ar^1_p(\mathcal{S})$, prenons $A_0 = 1$, et comme la fonction $\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i\;|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)|$ reste bornée au voisinage de (x_0,ζ_0), l'estimation (2) est encore vérifiée à condition de choisir la constante C_0 suffisamment grande. L'examen de ce dernier cas achève la démonstration de l'inégalité (2) et celle du lemme 3.5.

Nous pouvons maintenant obtenir la majoration de $\|P^*_{\tau_1}u\|_0$ par $\|P_{\tau_1}u\|_0$.

Lemme 3.6 : Supposons que pour $x \in \Omega_{2\delta_1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ *et* $\tau_1 \geq 1$ *on a*

$$\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}(x,\xi)/i + C\,(|\xi|^2+\tau_1^2)^{(m-1)/2}\,|p_{\tau_1\varphi_1}(x,\xi)| \geq 0 .$$

Alors il existe une constante $C_o > 0$ *telle que* $\forall u \in C_o^\infty(\Omega_{\delta_1})$, $\forall \tau_1 \geq 1$,

$$\|P_{\tau_1}^* u\|_0^2 \leq C_o\,(\|P_{\tau_1} u\|_0^2 + \|u\|_{m-1}^2) .$$

Démonstration : Soient $\chi \in C_o^\infty(\Omega_{2\delta_1})$ une fonction de troncature à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 sur Ω_{δ_1}, $P_1 = \chi(x)\,P_{\tau_1}$ dont le symbole peut s'écrire $\chi\,p_{\tau_1\varphi_1} + r_1$, $r_1 \in \Sigma^{m-1}$, et $S = 3\,P_1^* P_1 - P_1 P_1^*$ dont le symbole, calculé à l'aide des formules du théorème 3.1 (b), vaut

$$s = 2\chi^2\,|p_{\tau_1\varphi_1}|^2 - 2i\,\chi^2\,\overline{(p_{\tau_1\varphi_1})_\xi}\cdot(p_{\tau_1\varphi_1})_x - i\,\chi^2\,\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\} +$$

$$+ \overline{r}_2(\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}) + r_3\,\overline{(\chi p_{\tau_1\varphi_1})} + r_4 ,$$

où $r_2 \in \Sigma^{m-1}$, $r_3 \in \Sigma^{m-1}$ et $r_4 \in \Sigma^{2m-2}$. Ce symbole vérifie donc

$$s + \frac{i}{2}\,s_{x.\xi} = 2|\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}|^2 + 2\chi^2(\{\overline{p_{\tau_1\varphi_1}}, p_{\tau_1\varphi_1}\}/i) + \overline{r_2'}(\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}) + r_3'\,\overline{(\chi\,p_{\tau_1\varphi_1})} + r_4' ,$$

et en utilisant l'estimation fournie par l'hypothèse, on obtient

$$\mathcal{R}e\left(s + \frac{i}{2}\,s_{x.\xi}\right) \geq 2\,|\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}|^2 - 4\,C_1\,(|\xi|^2+\tau_1^2)^{(m-1)/2}|\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}| - C_2(|\xi|^2+\tau_1^2)^{m-1} ,$$

d'où

$$\mathcal{R}e\left(s + \frac{i}{2}\,s_{x.\xi}\right) + (2C_1^2 + C_2)\,(|\xi|^2+\tau_1^2)^{m-1} \geq 2\left(|\chi\,p_{\tau_1\varphi_1}| - C_1(|\xi|^2+\tau_1^2)^{(m-1)/2}\right)^2 \geq 0 .$$

Nous pouvons donc appliquer l'inégalité de Fefferman-Phong rappelée au théorème 3.1 (c) pour obtenir $\mathcal{R}e(S\,u,u) + C_o\,\|u\|_{m-1}^2 \geq 0$, soit

$$3\,\|P_1 u\|_0^2 - \|P_1^* u\|_0^2 + C_o\,\|u\|_{m-1}^2 \geq 0 ,$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme puisque P_{τ_1} étant différentiel et donc local, on a $P_1 u = P_{\tau_1} u$ et $P_1^* u = P_{\tau_1}^* u$ pour toute $u \in C_o^\infty(\Omega_{\delta_1})$.

3.4. <u>Démonstration de la proposition 3.3.</u> Commençons par choisir A et δ_1 tels qu'ils nous sont fournis par le lemme 3.5 ; nous pouvons donc utiliser les résultats des lemmes 3.4 et 3.6 pour les fonctions test $u \in C_o^\infty(\Omega_\delta)$ pourvu que $\delta \leqslant \min\{\delta_o, \delta_1\}$ où la constante δ_o est celle du lemme 3.4. Ainsi, ce dernier lemme nous donne : $\forall u \in C_o^\infty(\Omega_\delta)$, $\forall \tau_1 \geqslant 1/\delta$,

$$\|u\|_{m-1}^2 \leqslant \frac{2\delta^2}{\delta_o^2}\left(\|P_{\tau_1} u\|_0^2 + \|P_{\tau_1}^* u\|_0^2\right) ;$$

en majorant $\|P_{\tau_1}^* u\|_0^2$ à l'aide du lemme 3.6, nous obtenons avec une nouvelle constante $C_1 > 0$

$$\|u\|_{m-1}^2 \leqslant \frac{C_1^2 \delta^2}{2}\left(\|P_{\tau_1} u\|_0^2 + \|u\|_{m-1}^2\right)$$

d'où la proposition 3.3 si on a choisi $\delta = \min\{\delta_o, \delta_1, 1/C_1\}$.

4. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME 1.3.</u>

4.1. <u>Utilisation du principe de la déformation de surface</u>. Comme dans Saint Raymond [10, th. 2.1], nous prouvons le théorème 1.3 grâce au principe de la déformation de surface décrit dans le lemme suivant dont la démonstration, laissée au lecteur, n'est qu'une reproduction de celle du lemme 3.1 de [10] à condition d'utiliser le théorème de Hörmander [3, th. 28.3.4] cité ci-dessus comme théorème 1.1.

<u>Lemme 4.1</u> : *Supposons que* P *est un opérateur principalement normal, qu'il existe un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in \Omega$, *et une fonction* $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ *à valeurs réelles telle que* $d\varphi_1 \neq 0$ *dans* Ω, *et que*

(vi) $K = \{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \geqslant 0$ *et* $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x_o)\}$ *est compact ;*

(vii) $F_{\varphi_1} > 0$ *sur* $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2 \,/\, x \in K$ *et* $N = d\varphi_1(x)\}$.

Alors pour toute fonction $u \in H^m_{loc}(\Omega)$ *à valeurs complexes solution dans* Ω *de l'équation* $P(x,D)\,u(x) = 0$*, la condition "*$u(x) = 0$ *si* $\varphi(x) < 0$ *(dans* Ω*)" entraîne que* u *s'annule dans tout un voisinage de* x_o.

Le schéma de la démonstration du théorème 1.3 est alors le suivant : nous construisons des ouverts Ω_ε et des fonctions $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ à valeurs réelles tels que les Ω_ε constituent une base de voisinage de x_o quand ε tend vers 0 et que pour ε assez petit :

(vi)' $K_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon \,/\, \varphi(x) \geqslant 0$ et $\varphi_\varepsilon(x) \leqslant \varphi_\varepsilon(x_o)\}$ est compact ;

(vii)' $F_{\varphi_\varepsilon} > 0$ sur $\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2 \,/\, x \in K_\varepsilon$ et $N = d\varphi_\varepsilon(x)\}$.

Il suffit alors pour obtenir le théorème d'appliquer le lemme 4.1 dans l'ouvert Ω_ε où u vérifie l'équation et la condition de support.

4.2. <u>Construction des Ω_ε et φ_ε.</u> On peut supposer que $\mathscr{C}ar_p^{2,0}(S,x_o)$ n'est pas vide car sinon l'hypothèse (i) implique que S est fortement pseudo-convexe en x_o, et le résultat découle alors du théorème de Hörmander (th. 1.1 ci-dessus) ; il résulte donc de l'hypothèse (ii)' que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_o) \neq 0$, et on pose $x_n = \varphi(x)$, $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_o)$, puis on complète le système de coordonnées avec $x' = (x_1,\ldots,x_{n-2})$, ce qui nous permettra d'utiliser le résultat du lemme 2.3.

Par un argument de compacité, nous pouvons tirer des hypothèses (i) et (iii)' l'information suivante :

(iii)" $\forall\,(x,\zeta) \in \mathscr{C}ar_p^2(S)$, $x_{n-1} \geqslant 0$, $|x-x_o| \leqslant c_1$ et $\frac{1}{2} \leqslant |\zeta| \leqslant 2 \Rightarrow \mathfrak{F}_\varphi(x,\zeta) \geqslant c_o\, x_{n-1}^k$

pour des constantes uniformes strictement positives c_o, c_1 et k. La constante c_1 étant ainsi fixée, le lemme 2.3 nous fournit une autre constante $c_2 > 0$ que nous utiliserons dans notre démonstration ; quitte à diminuer cette constante c_2, l'hypothèse (ii)' et encore un argument de compacité nous permettent d'écrire

$$\text{(ii)''} \qquad \delta \leqslant |\{p,\psi\}(x,\xi - i\,\tau N)| \leqslant C_o \qquad \text{sur} \qquad |\mathscr{C}ar_p^{2,c_2^2}(S,x_o)|$$

pour deux nouvelles constantes uniformes $\delta > 0$ et $C_o > 0$.

Indiquons maintenant nos choix de φ_ε et de Ω_ε : nous posons

$$\varphi_\varepsilon(x) = x_n - \varepsilon^{k+2}\, f(x_{n-1}/\varepsilon) + \varepsilon^{k+1}\, |x'|^2 ,$$

$$\text{où} \qquad f(t) = t + (t^2/2) - (c_o/C_o^2)\; t^{k+2}/(k+1)(k+2) .$$

Nous avons montré dans [10] qu'il existe alors deux réels α et γ, $\alpha < 0 < \gamma$, tels qu'avec $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / |x'| < \varepsilon^{1/3}, \; \alpha < (x_{n-1}/\varepsilon) < \gamma \;\text{ et }\; |x_n| < \varepsilon\}$ la propriété (vi)' était vérifiée (et notons au passage que $x_{n-1} \geqslant 0$ et $x_n = O(\varepsilon^{k+2})$ dans K_ε). Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier la propriété (vii)', et d'après les homogénéités de $\mathscr{C}ar_p^2$ et de F_{φ_ε}, il suffit de le faire pour les (x,ξ,τ,N) vérifiant $|\xi - i\,\tau N| = 1$.

Soit donc $(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2$ tel que $x \in K_\varepsilon$, $N = d\varphi_\varepsilon(x)$ et $|\xi - i\,\tau N| = 1$; par définition de φ_ε on a

$$N = d\varphi(x) + O(\varepsilon^{k+1}) , \qquad \text{et}$$

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) = F_\varphi(x,\xi,\tau,N) + \varepsilon^k\, |\{p,\psi\}(x,\xi - i\,\tau N)|^2\, f''(x_{n-1}/\varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}) ;$$

on commence alors par imposer $\varepsilon < \varepsilon_o$ en sorte que $|x - x_o| < c_2$, $|N - d\varphi| < c_2$ et $F_\varphi(x,\xi,\tau,N) > - c_2$ (ce qui est possible puisque F_φ est continue sur $\mathscr{C}ar_p^2$ (cf. lemme 2.1) et que d'après l'hypothèse (i), $F_\varphi \geqslant 0$ sur

$\{(x,\xi,\tau,N) \in \mathscr{C}ar_p^2 / x = x_o$ et $N = d\varphi\})$ pour les points qui nous intéressent, puis on distingue les deux cas suivants :

(a) <u>Si $F_\varphi(x,\xi,\tau,N) \geqslant c_2$</u>, alors $F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geqslant c_2 + O(\varepsilon^k)$ d'où le résultat si l'on impose $\varepsilon < \varepsilon_1$ assez petit.

(b) <u>Si $F_\varphi(x,\xi,\tau,N) < c_2$</u>, alors $(x,\xi,\tau,N) \in |\mathscr{C}ar_p^{2,c_2}(S,x_o)|$; la propriété (ii)" permet d'écrire

$$F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geqslant \delta^2 \varepsilon^k + F_\varphi(x,\xi,\tau,N) - c_o x_{n-1}^k + O(\varepsilon^{k+1}) ,$$

et le lemme 2.3 fournit un point (y,ζ) auquel on peut appliquer la propriété (iii)" puisque $x_{n-1} \geqslant 0$ dans K_ε. On obtient ainsi $F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geqslant \delta^2 \varepsilon^k - C(|\varphi(x)| + |d\varphi_\varepsilon(x) - d\varphi(x)|) + O(\varepsilon^{k+1})$, et comme $\varphi(x) = O(\varepsilon^{k+2})$ dans K_ε, cela devient $F_{\varphi_\varepsilon}(x,\xi,\tau,N) \geqslant \delta^2 \varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1})$ d'où le résultat si l'on impose $\varepsilon < \varepsilon_2$ assez petit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALINHAC S. : *Non-unicité du problème de Cauchy*, Annals of Math. <u>117</u>, 77-108, (1983).

[2] ALINHAC S. : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Contemporary Mathematics <u>27</u>, 1-22, (1984).

[3] HÖRMANDER L. : *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. III & IV, Springer V., Berlin 1985.

[4] LERNER N. : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques*, Ann. Sc. de l'E.N.S. (Paris) 4ème série <u>17</u>, 469-505, (1984).

[5] LERNER N. : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux*, J. des Math. Pures et Appl. <u>64</u>, 1-11, (1985).

[6] LERNER N. & ROBBIANO L. : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, J. d'Analyse Math. <u>44</u>, 32-66, (1984/85).

[7] ROBBIANO L. : *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, J. of Diff. Equations 57, 200-223, (1985).

[8] SAINT RAYMOND X. : *Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, Indiana Univ. Math. J. 33, 847-858, (1984).

[9] SAINT RAYMOND X. : *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, à paraître dans l'Ens. Math.

[10] SAINT RAYMOND X. : *Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère*, à paraître.

[11] ZUILY C. : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Math., vol. 33, Birkhäuser, Boston 1983.