THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

OLIVIER DEBARRE

Variétés de Prym, conjecture de la trisécante et ensembles d'Andreotti et Mayer, 1987

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.

63626

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

Olivier DEBARRE

Sujet de la Thèse : VARIETES DE PRYM, CONJECTURE DE LA TRISECANTE ET ENSEMBLES D'ANDREOTTI ET MAYER

Soutenue le 12 juin 1987 *devant le Jury composé de* :

MM. M. RAYNAUD Président
E. ARBARELLO
A. BEAUVILLE
M. HERMAN
G. WELTERS

A Rebecca

Lorsqu'on avoue exercer la profession de chercheur en mathématiques, on est en général confronté à une réaction d'étonnement, assortie d'un commentaire qui se limite généralement à un "Ah ?" peu enthousiaste.

Rares sont ceux qui poussent plus loin leur enquête : les mathématiques, que tout le monde connaît, ou croit connaître, suscitent plus fréquemment l'indifférence que la curiosité. Leur évocation ramène à la surface des souvenirs enfouis d'additions interminables et d'obscures propriétés du triangle, ou plus récemment de flèches entre formes patatoïdales affublées de noms bizarres. Car si les thèmes abordés et les méthodes d'enseignement ont souvent changé ces dernières années, le résultat est hélas souvent resté le même.

Ceci fait qu'il est bien difficile de communiquer la fascination que peuvent exercer les mathématiques. On se retrouve ainsi victime de la vieille image du savant un peu lunatique perdu dans son monde de symboles mystérieux et le plus souvent incapable de répondre à la simple question : " A quoi ça sert ? ".

S'il est vrai que les mathématiciens sont parfois plus à l'aise dans leurs équations que dans la vie, cette vision des choses ne reflète qu'une partie de la réalité : les mathématiques sont un monde en perpétuelle évolution où l'on est en contact avec des gens souvent prêts à vous consacrer leur temps sans compter et à s'enthousiasmer pour les progrès de leur discipline, des gens passionnés par leur travail.

C'est ainsi que j'ai eu la chance de rencontrer, par ordre chronologique, Daniel Bennequin, dont l'enthousiasme pour les "Principles of Algebraic Geometry" de Phillip Griffiths et Joseph Harris n'a sans doute pas été étranger à mon choix de cette spécialité. Joseph Le Potier m'a ensuite initié à un domaine qui lui est cher : les fibrés vectoriels sur les espaces projectifs. Arnaud Beauville, qui a dirigé cette thèse, a, depuis bientôt huit ans, toujours été disponible pour répondre avec compétence et précision à mes questions. Il a aussi su me proposer des thèmes de recherche passionnants - et abordables... Je le remercie sincèrement de son aide. J'ai ensuite pu, grâce à une bourse de Harvard University, profiter au cours de longues discussions des vastes connaissances

de Phillip Griffiths, dont tous ceux qui le connaissent apprécient la gentillesse et la disponibilité. L'école italienne est personnifiée pour moi par Fabrizio Catanese. A l'époque des leçons de cuisine italienne dans sa maison de Princeton - foreigners never put enough water for pasta - puis au cours de mes séjours à Pise, nous avons décortiqué ensemble les passionnantes propriétés des surfaces de type général avec $K^2 = 2$, $p_g = 1$ *et* $q = 0$. *Je lui exprime ici toute mon amitié. A mon retour des Etats-Unis, j'ai fait connaissance avec le rude climat du plateau du Moulon au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, dirigé par Michel Demazure. L'atmosphère y était heureusement réchauffée par l'entrain de Marie-Jo Lécuyer, qui m'a rendu service à de multiples occasions. J'ai ensuite déménagé au Centre d'Orsay de l'Université Paris-Sud; si l'architecture est austère, le cadre est agréable et son personnel accueillant. Je remercie tout particulièrement Luc Illusie de m'avoir accepté dans son équipe.*

Enrico Arbarello a accepté de venir de Rome pour faire partie du jury de cette thèse, et Gerald Welters, qui m'aide depuis longtemps sans le savoir par la clarté de ses articles, de Barcelone. Je les en remercie tous les deux. Je suis aussi reconnaissant à Michel Herman d'avoir accepté de diriger ma seconde thèse. Il a su, avec Jean-Christophe Yoccoz, m'expliquer les subtiles propriétés des difféomorphismes du cercle. Merci aussi à Michel Raynaud, qui a accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont enfin à Mesdames Bonnardel et Le Bronnec qui ont, comme on peut le constater en feuilletant cette thèse, réussi brillamment le passage de l'antique machine à écrire au traitement de texte informatique.

I N T R O D U C T I O N

Une variété abélienne principalement polarisée est un couple (A,Θ), où A est un tore complexe et Θ un diviseur ample sur A, défini à translation près, tel que $H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta))$ soit de dimension 1. La variété de Kummer associée est l'image du morphisme défini par les sections globales du faisceau inversible $\mathcal{O}_A(2\Theta)$. Elle est donc plongée dans l'espace projectif $\mathbb{P}H^0(A,\mathcal{O}_A(2\Theta))^*$, de dimension $2^{\dim A} - 1$.

Un exemple de variétés abéliennes principalement polarisées est celui des jacobiennes de courbes lisses projectives. On a remarqué que dans ce cas, beaucoup de droites de l'espace projectif coupaient la variété de Kummer associée en au moins trois points - on les appellera des trisécantes. Ce phénomène a conduit Mumford à conjecturer que l'existence de suffisamment de trisécantes à la variété de Kummer pourrait caractériser les jacobiennes de courbes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées.

Cette question a suscité de nombreux travaux, dus entre autres à E. Arbarello, C. De Concini, B.A. Dubrovin, R. C. Gunning, Z. Ran, T. Shiota et G. Welters, d'où il ressort en particulier qu'on ne connaît aucune variété abélienne principalement polarisée dont la variété de Kummer admette une trisécante et qui ne soit pas une jacobienne de courbe. Ceci a conduit G. Welters à préciser la formulation de Mumford en conjecturant qu'une variété abélienne principalement polarisée est une jacobienne de courbe si et seulement si la variété de Kummer associée admet *une* trisécante. La version infinitésimale de ce problème est la conjecture de Novikov, démontrée récemment par T. Shiota. Il est utile de remarquer que l'existence d'une trisécante équivaut à celle d'une inclusion du type $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$, où Θ_a désigne le translaté de Θ par l'élément a de la variété abélienne A et où x, y et a sont

distincts non nuls. Ceci entraîne en particulier que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible.

Après un premier chapitre consacré à la terminologie et aux notations, on démontre dans le second la conjecture de la trisécante pour une classe de variétés abéliennes principalement polarisées plus large que celle des jacobiennes : celle des variétés de Prym, attachées à des revêtements doubles de courbes lisses (ou éventuellement stables). En dimension inférieure ou égale à 5, toute variété abélienne principalement polarisée est une variété de Prym : on a donc démontré la conjecture dans ce cas.

Notre démarche est la suivante. Après une brève introduction (II.A), on reprend en II.B en la simplifiant la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes, basée sur la détermination des cas où l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible dans une jacobienne.

Dans la partie II.C, écrite en collaboration avec A. Beauville, nous montrons que l'existence d'une trisécante entraîne la condition d'Andreotti et Mayer $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \geq \dim A - 4$. Ces deux auteurs ont montré en 1963 que la famille des jacobiennes était une composante irréductible de la famille N_{g-4} des variétés abéliennes principalement polarisées vérifiant cette condition. On en déduit donc une forme faible de la conjecture de la trisécante, à savoir que les jacobiennes forment une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer admet une trisécante.

On se tourne alors, en II.D et II.E, vers l'étude de la variété N_{g-4}. Les travaux de Beauville permettent de décrire les variétés de Prym qui sont dans N_{g-4} . Certaines d'entre elles sont des cas particuliers d'une construction très simple (détaillée dans l'Appendice 1), qui fournit de nouvelles composantes irréductibles de N_{g-4} , formées de variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à des produits ; l'étude fine de $\mathrm{Sing}\,\Theta$ pour les autres permet de montrer qu'elles forment aussi des composantes de N_{g-4} , composées donc de variétés de Prym.

On a alors réuni tous les ingrédients pour montrer, en II.F, la conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym. On procède par

récurrence sur la dimension, en s'appuyant pour démarrer sur des travaux de Z. Ran en dimension 4.

Dans le chapitre III, on exploite les résultats de II.D et II.E en dimension 4. Plus précisément, on obtient pour cette dimension des descriptions des sous-variétés de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées où un certain nombre de thêtaconstantes s'annulent. Le fait le plus remarquable est qu'en dehors des jacobiennes hyperelliptiques, il existe une seule variété abélienne principalement polarisée de dimension 4 avec 10 thêtaconstantes nulles. Elle avait été découverte par R. Varley. On décrit aussi les variétés abéliennes principalement polarisées qui ont respectivement 2,3 ou 9 thêtaconstantes nulles.

On passe dans le quatrième et dernier chapitre aux relations entre variétés de Prym, ensembles N_{g-6} des variétés abéliennes principalement polarisées (A,Θ) de dimension g avec $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \geq g-6$, et existence d'un plan quadrisécant à la variété de Kummer. On adapte tout d'abord la méthode d'Andreotti et Mayer pour montrer en IV.A que la famille des variétés de Prym est une composante de N_{g-6} pour $g \geq 7$. La partie IV.B est le pendant de II.C pour les variétés de Prym. La variété de Kummer d'une variété de Prym n'a pas en général de droite trisécante, mais des plans quadrisécants. Puisqu'on dispose d'un théorème du type Andreotti-Mayer (IV.A), on peut prouver que les variétés de Prym forment une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer admet un plan quadrisécant. On peut noter pour finir que si on ne connaît aucun contre-exemple à la conjecture de la trisécante, on sait construire des variétés abéliennes qui ne sont pas des variétés de Prym, mais dont la variété de Kummer admet néanmoins un plan quadrisécant (elle contient en fait une conique).

ABSTRACT :

The trisecant conjecture states that a complex indecomposable principally polarized abelian variety is the Jacobian of an algebraic curve if and only if the associated Kummer variety (i.e. the image of the morphim associated to the linear system of divisors linearly equivalent to twice the theta divisor), embedded in the projective space, has a line which meets it in at least three points. We prove this conjecture in case where the principally polarized abelian variety under consideration is a (generalized) Prym variety. This proves in particular the conjecture in dimension less or equal to 5. Our techniques also yield a description of the family of principally polarized abelian varieties of dimension 4 for which the theta divisor has a given number of singular points of order 2 (so-called "vanishing thetanulls"). In particular, we show that only one indecomposable principally polarized abelian variety of dimension 4 has 10 vanishing thetanulls, except of course for hyperelliptic Jacobians. Finally, we show that in dimension at least 7, Prym varieties form an irreducible component of the family of principally polarized abelian varieties for which the singular locus of the theta divisor is of codimension at most 6. It follows that, still in dimension at least 7, Prym varieties form an irreducible component of the family of principally polarized abelian varieties whose Kummer variety has a quadrisecant plane (result obtained in collaboration with A. Beauville).

CHAPITRE I

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Dans ce chapitre, on se propose de fixer les notations qui seront employées dans la suite de ce travail. On passe aussi en revue les quelques résultats de base relatifs aux courbes algébriques et aux variétés abéliennes dont nous aurons besoin.

1. Généralités.

1.1. Nous travaillerons uniquement sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, sauf dans la partie II.C, où il est précisé que le corps de base est seulement algébriquement clos. On adoptera la convention qu'un ensemble de dimension < 0 est vide.

1.2. Le lieu singulier d'un schéma X est noté $\mathrm{Sing}\, X$, le lieu des points de multiplicité n, $\mathrm{Sing}_n X$.

On notera aussi $X^{(d)}$ le produit symétrique de d copies de X, c'est-à-dire le quotient de X^d par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$.

1.3. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent sur une variété projective X, on notera $h^i(X,\mathscr{F}) = \dim H^i(X,\mathscr{F})$ pour $i \geq 0$.

1.4. Si $\mathscr{F}$ est de plus inversible et si X est réduite, on note $|\mathscr{F}|$ l'ensemble des diviseurs de Cartier effectifs D tels que $\mathscr{O}_X(D) \simeq \mathscr{F}$; c'est un ouvert de $\mathbb{P}H^0(X,\mathscr{F})$, qui peut en être distinct si X est réductible.

On peut associer à $\mathscr{F}$ une application rationnelle $\phi_{|\mathscr{F}|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X,\mathscr{F})^\vee$ définie par $\phi_{|\mathscr{F}|}(x) = \{s \in H^0(X,\mathscr{F}) \mid s(x)=0\}$.

1.5. Si X est un schéma projectif Cohen-Macaulay de type fini sur $\mathbb{C}$, on notera ω_X son faisceau dualisant.

2. Courbes.

2.1. Une courbe sera pour nous une variété projective réduite C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1-\chi(\mathscr{O}_C)$. On ne considérera que des courbes connexes avec au plus des points doubles

comme singularités. La jacobienne JC de C est alors un groupe algébrique lisse commutatif de dimension $g(C)$, extension d'une variété abélienne par un tore, dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante est de degré 0. On supposera toujours choisi un ordre sur l'ensemble des composantes de C. On notera alors $\mathrm{Pic}(C)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Pic}^{\underline{d}}(C)$, où $\underline{d} = (d_1,\dots,d_r)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à la j-ième composante est d_j (i.e. de multidegré $\underline{d}$). Le degré total d'un faisceau est $d = \Sigma d_j$.

Le faisceau dualisant de C est un faisceau inversible de degré total $2g(C)-2$.

2.2. Une courbe stable ([De-M], Definition 1.1) est une courbe (au sens (2.1)) telle que toute composante rationnelle lisse rencontre les autres composantes en au moins 3 points.

Il existe un espace de modules $\bar{\mathcal{M}}_g$ pour les courbes stables de genre g, qui est une variété projective irréductible de dimension $3g-3$ pour $g\geq 2$, g pour $g\leq 1$. Elle contient comme ouvert de Zariski dense l'espace des modules $\mathcal{M}_g$ des courbes lisses de genre g.

2.3. Une courbe hyperelliptique est une courbe admettant un morphisme de degré 2 sur $\mathbb{P}^1$.

Une courbe trigonale est une courbe admettant un morphisme de degré 3 sur $\mathbb{P}^1$.

Une courbe superelliptique est une courbe lisse admettant un morphisme de degré 2 sur une courbe elliptique.

2.4. Lorsque C est lisse, $C^{(d)}$ (cf. 1.2) est l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C. On note aussi :

$$C_d^r = \{D\in C^{(d)} \mid h^o(C,\mathcal{O}(D))\geq r+1\}$$
$$W^d = \{L\in J^dC \mid h^o(C,L)>0\}$$
$$W_d^r = \{L\in J^dC \mid h^o(C,L)\geq r+1\}.$$

Il existe un morphisme naturel $C_d^r \longrightarrow W_d^r$ qui induit un isomorphisme $C_d^r - C_d^{r+1} \xrightarrow{\sim} W_d^r - W_d^{r+1}$.

Il existe sur les W_d^r et C_d^r des structures naturelles de schéma (cf. par exemple [A-C-G-H 1], Chapitre IV), pour lesquelles on a :

• Si $L\in W^r_d - W^{r+1}_d$, l'espace tangent $T_L W^r_d \subset T_L J^d C \simeq H^0(C,\omega_C)$ est l'orthogonal de l'image de l'application naturelle :

$$H^0(C,L)\otimes H^0(C,\omega_C\otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(C,\omega_C) .$$

• Si C est une courbe générale de genre g, W^r_d est de dimension $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$, irréductible si $\rho>0$, lisse en dehors de W^{r+1}_d, Cohen-Macaulay (cf. [A-C-G-H 1], Chapitre VII).

2.5. Si p est un point d'une courbe lisse C et Z une sous-variété de $J^d C$, on définit $Z_p \subset J^{d+1}C$ comme l'ensemble $\{L\otimes \mathcal{O}_C(p) \mid L\in Z\}$. De même, si $p,q\in C$, on pose $Z_{p,q} = (Z_p)_q$. Si Z est une sous-variété de $C^{(d)}$, on définit aussi $Z_p = \{D\in C^{(d+1)} \mid (D-p)\in Z\}$.

Si D est un diviseur effectif sur C, on notera s_D la section canonique de $\mathcal{O}_C(D)$ de diviseur D. Si $p,q\in C$, on écrira s_{pq} au lieu de s_{p+q}.

2.6. Un revêtement double $\pi:\tilde{C} \longrightarrow C$ de courbes projectives lisses connexes est un morphisme fini de degré 2. Sa donnée est équivalente à celle de la classe d'un diviseur δ sur C non équivalent à 0 et d'un diviseur lisse $\Delta\in|2\delta|$.
On a :

$$K_{\tilde{C}} \equiv \pi^*(K_C+\delta)$$
$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C\oplus\mathcal{O}_C(-\delta)$$
$$\forall L\in \mathrm{Pic}(C) \qquad H^i(\tilde{C},\pi^*L) \simeq H^i(C,L)\oplus H^i(C,L\otimes\mathcal{O}_C(-\delta)) .$$

On a un morphisme norme $\mathrm{Nm}_\pi : \mathrm{Pic}\,\tilde{C} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,C$, qui satisfait à $\mathrm{Nm}_\pi \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x) = \mathcal{O}_C(\pi x)$ pour $x\in\tilde{C}$.

3. Variétés abéliennes.

3.1. Une variété abélienne est un groupe algébrique complet. On désigne le groupe des points d'ordre $n\geq 2$ d'une variété abélienne X par $X[n]$. On notera $\hat{X} = \mathrm{Pic}^0 X$ le groupe des classes d'isomorphisme des faisceaux inversibles sur X algébriquement équivalents à 0. C'est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de X ([Mu 6] page 74). A tout morphisme $f:X \longrightarrow Y$, on associe de façon fonctorielle un morphisme dual $\hat{f}:\hat{Y} \longrightarrow \hat{X}$.

3.2. Pour tout élément x d'une variété abélienne X, on note τ_x l'automorphisme $z \longrightarrow z+x$ de X. Pour toute sous-variété Z de X, on notera Z_x la sous-variété $\tau_x(Z)$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on écrira aussi $\mathcal{F}_x = \tau_{-x}^*(\mathcal{F})$.

3.3. Tout faisceau inversible M sur une variété abélienne X définit un morphisme de groupes ([Mu 6] page 59) :

$$\begin{aligned} \phi_M : X &\longrightarrow \hat{X} \\ M &\longrightarrow M_x \otimes M^{-1} \end{aligned}$$

dont le noyau est noté $H(M) = \{x \in X \mid M \simeq M_x\}$.

L'ensemble $\mathcal{G}(M) = \{(x,\alpha) \mid x \in X,\ \alpha : M \xrightarrow{\sim} M_x\}$ admet une structure de groupe naturelle ([Mu 5] page 289) pour laquelle on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{G}(M) \xrightarrow{p} H(M) \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.4}$$

On définit une application bilinéaire alternée par :

$$\begin{aligned} e^M : H(M) \times H(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (x_1,x_2) &\longrightarrow \tilde{x}_1.\tilde{x}_2.\tilde{x}_1^{-1}.x_2^{-1} \quad \text{où} \quad p(\tilde{x}_j) = x_j \ . \end{aligned}$$

Par exemple, si $M \in \mathrm{Pic}^0 X$ alors $H(M) = X$ ([Mu 6] page 74), $\mathcal{G}(M)$ est un groupe commutatif et $e^M \equiv 1$.

A l'opposé, si M est ample, $H(M)$ est fini, le centre de $\mathcal{G}(M)$ est $\mathbb{C}^*$ et e^M est non-dégénérée ([Mu 5] Theorem 1 page 293). Il existe une suite d'entiers $\delta = (d_1,\ldots,d_k)$, $k \leq g$, $1 < d_1 | d_2 | \ldots | d_k$, appelée type de M, telle que la suite (3.4) soit isomorphe à ([Mu 5] Corollary page 294) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{G}(\delta) \longrightarrow H(\delta) \longrightarrow 0$$

où $$K(\delta) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \quad , \quad \widehat{K(\delta)} = \mathrm{Hom}(K(\delta),\mathbb{C}^*)$$

$$H(\delta) = K(\delta) \oplus \widehat{K(\delta)} \quad , \quad \mathcal{G}(\delta) = \mathbb{C}^* \times K(\delta) \times \widehat{K(\delta)}$$

avec $(\alpha,x,\ell).(\alpha',x',\ell') = (\alpha\alpha'\ell'(x),x+x',\ell\ell')$.

L'entier $d = d_1 \ldots d_k$ est le degré de M et vérifie, avec $g = \dim X$:

(3.5) $\forall n, i>0 \qquad h^0(X,M^{\otimes n}) = dn^g \ , \ h^i(X,M^{\otimes n}) = 0 \ .$

(3.6) $\text{Si} \quad M = \sigma_X(D) \ , \ D^g = d.g! \ .$

(3.7) $d^2 = \text{Card } H(M) = \text{Degré } \phi_M \ .$

On notera $\sim$ l'équivalence algébrique entre faisceaux inversibles sur X. Toutes les constructions précédentes, à savoir ϕ_M, $H(M)$, $\mathcal{G}(M)$, e^M, ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de M.

3.8. Si M est ample, les faisceaux inversibles algébriquement équivalents à M sont les translatés M_x, pour x élément de X. Une polarisation de type δ sur X est une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles amples de type δ. Par abus de langage, on notera encore M la polarisation définie par la classe de M. Une polarisation principale est une polarisation L de degré 1. On notera alors généralement Θ le seul élement de $|L|$ (cf. 3.5), défini donc à translation près.

3.9. Soit ι l'automorphisme $x \longrightarrow -x$ de X. Un faisceau inversible M sur X est dit symétrique si $\iota^*M \simeq M$. Tout faisceau inversible ample sur X a un translaté symétrique. Toute polarisation sur X est donc la classe d'un faisceau inversible symétrique (non uniquement déterminé).

3.10. Si (X_1,M_1) et (X_2,M_2) sont deux variétés abéliennes polarisées, on notera $M_1 \boxtimes M_2$ la polarisation $pr_1^*M_1 \otimes pr_2^*M_2$ sur $X_1 \times X_2$, où $pr_j : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_j$, $j = 1,2$, sont les deux projections. C'est la polarisation produit de M_1 et de M_2.

Une variété abélienne polarisée est dite irréductible si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles muni de la polarisation produit.

Une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) est irréductible si et seulement si le diviseur Θ est irréductible ([Cl-G]).

3.11. Si (A,Θ) est une variété abélienne principalement polarisée, le système linéaire $|2\Theta|$ est sans point base. Il induit donc un morphisme $\phi_{|2\Theta|} : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ avec $N = 2^{\dim A}-1$, dont l'image est la <u>variété de Kummer</u> $K(A)$ de (A,Θ). Lorsque (A,Θ) est irréductible, elle est isomorphe au quotient A/ι (cf. (3.9)).

3.12. Les variétés abéliennes polarisées de type δ admettent un espace de modules grossier $\mathcal{A}_{g,\delta}$, qui est une variété

quasi-projective normale de dimension $g(g+1)/2$. On notera $\mathcal{A}_{g,\delta}^{irr}$ l'ouvert constitué des variétés irréductibles. Dans le cas d'une polarisation principale, ces espaces seront notés respectivement $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_g^{irr}$.

L'ensemble $\mathcal{J}_g$ des jacobiennes de courbes lisses de genre g est un fermé de $\mathcal{A}_g^{irr}$ qui lui est égal pour $g\leq 3$.

On utilisera aussi beaucoup les fermés suivants de $\mathcal{A}_g$, introduits par Andreotti et Mayer dans [An-M] :

$$N_k^g = \{(A,\Theta) \in \mathcal{A}_g \mid \dim \operatorname{Sing} \Theta \geq k\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq g-2 .$$

3.13. On pose $\mathcal{H}_g = \{\tau \in \mathcal{M}_{g\times g}(\mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau \ , \ \operatorname{Im}\tau > 0\}$ et on note, pour tout "type" $\delta = (d_1,\ldots,d_k)$ (cf. (3.3)), Δ_δ la matrice diagonale de diagonale δ .

Toute variété abélienne complexe polarisée de type δ est isomorphe à un tore complexe $\mathbb{C}^g/\Delta_\delta\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g$, pour un élément τ de $\mathcal{H}_g$. Le groupe :

$$\Gamma_g(\delta) = \{M \in GL_g(\mathbb{Z}) \mid {}^tM\begin{bmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{bmatrix}\}$$

agit sur $\mathcal{H}_g$ et le quotient est l'espace de modules $\mathcal{A}_{g,\delta}$.

3.14. Les fonctions $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau)$ sont définies pour $a,b \in \mathbb{R}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathcal{H}_g$ par :

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp \pi i[{}^t(n+a)\tau(n+a)+2{}^t(n+a)(z+b)] .$$

Elles satisfont aux "équations de la chaleur" :

$$\frac{\partial^2\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}{\partial z_j \partial z_k}(z,\tau) = 2\pi i(1+\delta_{jk}) \frac{\partial\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}{\partial \tau_{jk}}(z,\tau) \quad ,$$

pour $1 \leq j,k \leq g$. La fonction $\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau)$ sera simplement notée $\theta(z,\tau)$; c'est <u>la</u> fonction thêta.

Si (X,M) est la variété abélienne polarisée de type δ correspondant à $\tau\in\mathcal{H}_g$, une base de $H^0(X,M)$ est donnée par :

$$\{\theta[{}^{r}_{0}](.,\tau) \mid r\in\Delta_\delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g\} .$$

4. Variétés de Prym.

4.1. Soit $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale de degré deux de courbes projectives lisses connexes. Le noyau du morphisme $Nm_\pi : J\tilde{C} \longrightarrow JC$ (cf. (2.6)) a deux composantes connexes. La composante neutre P, est la variété de Prym associée à π ; la seconde sera notée P^-. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit le double d'une polarisation principale sur P, qu'on notera généralement Ξ.

L'espace des modules $\mathcal{R}_{g+1}$ des courbes C lisses de genre $g+1$ munies d'un tel revêtement π est irréductible de dimension $3g$ (pour $g\geq 1$) et on a une appplication Prym $Pr : \mathcal{R}_{g+1} \longrightarrow \mathcal{A}_g$. On note $\mathcal{P}_g$ l'adhérence de son image.

Beauville a introduit dans [Be 1] la notion de revêtement admissible d'une courbe stable (cf. IV.A.4). Ceci lui permet de prolonger l'application Prym en un morphisme propre $\bar{\mathcal{R}}_{g+1} \longrightarrow \mathcal{A}_g$ ($\bar{\mathcal{R}}_{g+1}$ est l'espace de modules de ces revêtements) d'image $\mathcal{P}_g$ contenant $\mathcal{J}_g$. On notera $\mathcal{P}_g^{irr}$ l'ouvert de $\mathcal{P}_g$ constitué des variétés irréductibles (cf. (3.10)).

CHAPITRE II

CONJECTURE DE LA TRISECANTE, ENSEMBLES $\mathcal{N}^g_{g-4}$ ET VARIETES DE PRYM

II.A. Introduction.

§1. La conjecture de la trisécante.

Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g\geq 2$. On supposera le diviseur Θ symétrique (cf. I.3.9). Le système linéaire $|2\Theta|$ est sans point base et induit un morphisme $\varphi : A \longrightarrow |2\Theta|^\vee \simeq \mathbb{P}^N$, avec $N = 2^g-1$ (cf. I.3.5). Par [Mu 2] page 335, il existe une forme bilinéaire non dégénérée sur $H^0(A,2\Theta)$, qui induit un isomorphisme $B : |2\Theta|^\vee \xrightarrow{\sim} |2\Theta|$ qui fait commuter le diagramme :

(1.1)
$$\begin{array}{ccc} & & |2\Theta|^\vee \\ & \overset{\varphi}{\nearrow} & \downarrow B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & |2\Theta| \end{array}$$
$$x \longrightarrow \Theta_x + \Theta_{-x} \quad .$$

Lorsque (A,Θ) est <u>irréductible</u> (cf. I.3.10), le morphisme φ est de degré 2 et son image $K(A)$, la variété de Kummer de A , est isomorphe à $A/\pm 1$. Cette variété est lisse en dehors des images des points d'ordre 2 de A .

Nous nous intéressons à l'existence de trisécantes à cette variété $K(A)$ c'est-à-dire, au sens le plus naïf, de droites de $\mathbb{P}^N$ coupant $K(A)$ en trois points.

L'origine de ce problème est la suivante. Pour une jacobienne JC de courbe lisse, il existe une famille de dimension 4 de trisécantes à la variété de Kummer $K(JC)$. Il est donc tentant de conjecturer, en suivant Mumford dans [Mu 8], que l'existence de suffisamment de trisécantes à la variété de Kummer caractérise les jacobiennes parmi les variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles.

Avant d'indiquer les progrès récents dans cette direction, il est utile d'indiquer une interprétation classique de l'existence d'une trisécante en termes d'intersections du diviseur thêta avec ses translatés.

On se donne donc une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ), supposée irréductible, c'est-à-dire que le diviseur Θ est irréductible. On note θ un générateur de $H^0(A,\Theta)$ et, pour tout élément x de A, Θ_x le translaté de Θ par x (cf. I.3.2) et θ_x un générateur de $H^0(A,\Theta_x)$.

Soient a,b,c et d des éléments non nuls de A tels que $a+b = c+d = x$ et $\{a,b\}\cap\{c,d\} = \phi$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(1.2). Pour tout $y\in A$ tel que $2y=x$, les 3 points $\Phi(y)$, $\Phi(y-a)$ et $\Phi(y-c)$ de $K(A)$ sont colinéaires.

(1.3). Les trois éléments $\theta\theta_x$, $\theta_a\theta_b$ et $\theta_c\theta_d$ de $H^0(A,\Theta+\Theta_x)$ sont linéairement dépendants, de sorte qu'il existe des complexes non nuls λ, μ et ν tels que :

$$\lambda\theta\theta_x + \mu\theta_a\theta_b + \nu\theta_c\theta_d = 0 .$$

(1.4). On a une inclusion schématique :

$$\Theta.\Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d .$$

Indiquons rapidement les démonstrations.
(1.2) $\Longleftrightarrow$ (1.3). Par (1.1), les points $\Psi(y)$, $\Psi(y-a)$ et $\Psi(y-c)$ de $\mathbb{P}^N$, distincts par hypothèse, sont alignés si et seulement si les éléments $\theta_y\theta_{-y}$, $\theta_{y-a}\theta_{a-y}$ et $\theta_{y-c}\theta_{c-y}$ de $H^0(A,2\Theta)$ sont linéairement dépendants. On obtient le résultat en translatant par y. Les complexes λ, μ et ν sont non nuls à cause de l'irréductibilité de Θ.
(1.3) $\Longrightarrow$ (1.4). Evident.
(1.4) $\Longrightarrow$ (1.3). La restriction de $\theta_c\theta_d$ à $\bar{\Theta}_a = \Theta.\Theta_a$ est donc nulle. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(\Theta,\sigma(\Theta_b)) \xrightarrow{.\theta_a} H^0(\Theta,\sigma(\Theta_c+\Theta_d)) \longrightarrow H^0(\bar{\Theta}_a,\sigma(\Theta_c+\Theta_d)) .$$

De plus, comme b est non nul, on a :

$$H^0(A,\sigma(\Theta_b)) \xrightarrow{\sim} H^0(\Theta,\sigma(\Theta_b)) .$$

On en déduit qu'il existe $\mu\in\mathbb{C}$ tel que la restriction de $\mu\theta_a\theta_b + \theta_c\theta_d$ à Θ soit nulle. On utilise alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(A,\mathcal{O}(\Theta_x)) \xrightarrow{\cdot\theta} H^0(A,\mathcal{O}(\Theta_x+\Theta)) \longrightarrow H^0(\Theta,\mathcal{O}(\Theta_x+\Theta)) ,$$

pour conclure.

En particulier, l'existence d'une trisécante entraîne qu'il existe une intersection $\Theta.\Theta_a$, avec $a\neq 0$, non intègre. C'est une condition très contraignante sur la variété abélienne (A,Θ) (cf. II.C).

Il est facile de décrire maintenant les trisécantes à la variété de Kummer de la jacobienne (JC,Θ) d'une courbe lisse C . Si x et y sont deux points de C on notera $x-y$ le point de JC correspondant au faisceau inversible $\mathcal{O}_C(x-y)$. Il est facile de voir (cf. II.B) que les intersections $\Theta.\Theta_{x-y}$ ne sont pas intègres et qu'on a :

$$\forall x,y,z,t \in C \qquad \Theta.\Theta_{x-y} \subset \Theta_{x-t} \cup \Theta_{z-y} .$$

On en déduit par (1.2) que pour tous points x,y,z et t de C et tout $\zeta\in J^{-1}C$ tel que $2\zeta \equiv t-x-y-z$, les points $\Psi(\zeta+x)$, $\Psi(\zeta+y)$ et $\Psi(\zeta+z)$ de $\mathbb{P}^N$ sont alignés.

On montrera en II.B.4 qu'on obtient ainsi toutes les trisécantes à $K(JC) \subset \mathbb{P}^N$.

On peut remarquer que les 3 points $\Psi(\zeta+x)$, $\Psi(\zeta+y)$ et $\Psi(\zeta+z)$ sont distincts si et seulement si les 4 points x,y,z et t de C sont distincts deux à deux.

Il est intéressant de regarder ce que devient la trisécante quand certains des points x,y,z et t sont confondus : on obtient des droites de $\mathbb{P}^N$ tangentes en un point à la variété de Kummer et la recoupant en un autre, des droites ayant un contact d'ordre 3 avec $K(JC)$ (droites d'inflexion), ou d'autres cas dégénérés dont la liste est faite en II.C.2.8.

En particulier, il est facile de voir qu'il existe une famille de dimension 2 de droites d'inflexion (cas $x=y=z$).

Enfin, lorsque les 4 points x,y,z et t coïncident, on obtient une "trisécante" en le point singulier $\Psi(0)$, dont la description géométrique n'est pas claire. Cependant, cette propriété est équivalente au fait que la fonction $\theta(z,\tau)$ associée à JC (cf. I.3.14) vérifie une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation K-P (cf. II.C.2.10). Welters donne une interprétation géométrique de cette équation dans [We 8] . En II.C.2.11, on en donne une conséquence du type (1.4) (cette remarque m'a été communiquée par E. Arbarello,, que je remercie).

Toutes ces propriétés satisfaites par les jacobiennes de courbes donnent lieu à autant de conjectures cherchant à les caractériser parmi les variétés abéliennes principalement polarisées. Ces questions ont donné lieu à de nombreux travaux, dus entre autres à E. Arbarello, C. De Concini, B.A. Dubrovin, R.C. Gunning, Z. Ran, T. Shiota et G. Welters.

La place d'honneur revient bien sûr au théorème de Shiota (ex-conjecture de Novikov), qui énonce qu'une variété abélienne principalement polarisée irréductible dont la fonction thêta satisfait à l'équation K-P est une jacobienne de courbe. La démonstration originale de [Sh] a été simplifiée dans [Ar-D 2] (voir aussi [Ar]).

Viennent ensuite les résultats de Welters, dont on retiendra en particulier : toute variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) sur laquelle il existe une famille de dimension 1 d'éléments a vérifiant la propriété (1.4), et satisfaisant à la condition supplémentaire $\dim \mathrm{Sing}\ \Theta \leq \dim X-4$, est une jacobienne de courbe (malgré les apparences, cette dernière condition n'est pas anodine, comme le montre le Théorème II.C.2.9). Ce résultat est montré dans [We 6]. On pourra aussi consulter [We 7], qui permet d'aboutir à la même conclusion sans cette condition, mais en supposant qu'on a une famille de dimension 1 de relations du type (1.3) avec a et c fixés. Les cas dégénérés sont aussi traités.

Il est alors tentant de conjecturer, comme l'a fait Welters dans [We 7], que l'existence d'une trisécante caractérise les jacobiennes.

Nous laisserons de côté les cas dégénérés pour énoncer :

Conjecture de la trisécante :

Toute variété abélienne principalement polarisée irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante "propre" (c'est-à-dire satisfaisant à l'une des conditions équivalentes (1.2), (1.3) ou (1.4), pour des éléments a,b,c,d non nuls, vérifiant $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \phi$) est une jacobienne de courbe.

§2. Méthodes et résultats.

Après avoir examiné en détail la réductibilité des intersections $\Theta.\Theta_a$ sur les jacobiennes dans la partie II.B, on attaque en II.C la conjecture elle-même en montrant (en collaboration avec A. Beauville) que l'existence d'une trisécante, c'est-à-dire l'existence d'une inclusion non triviale $\Theta.\Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d$ (cf. (1.4)) entraîne l'inégalité
$\dim \Theta_a \cap \mathrm{Sing}\,\Theta \geq \dim X-4$. On en déduit, par [An-M], une version faible de la conjecture, à savoir que la famille des jacobiennes est une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes irréductibles dont la variété de Kummer admet une trisécante.

On s'intéresse dans la suite de cette section aux variétés de Prym (cf. I.4) dont la variété de Kummer admet une trisécante. En II.D et II.E, on décrit les variétés de Prym (P,Ξ) satisfaisant à la condition - nécessaire par II.C - $\dim \mathrm{Sing}\,\Xi \geq \dim P-4$. On obtient par la même occasion des composantes irréductibles des ensembles d'Andreotti et Mayer N^g_{g-4} (cf. I.3.12), autres que $\bar{\mathcal{J}}_g$ (voir aussi l'appendice 1).

En II.F, soit en étudiant les éléments a de P satisfaisant à $\dim \Xi_a \cap \mathrm{Sing}\,\Xi \geq \dim P-4$, soit en partant de l'identité (1.4) dans certains cas, on montre la conjecture des trisécantes pour les variétés de Prym (généralisées), c'est-à-dire en particulier pour toutes les variétés abéliennes de dimension ≤ 5 .

II.B. Réductibilité des intersections $\Theta.\Theta_a$ pour les jacobiennes[1].

A. Weil a été le premier à étudier systématiquement, dans l'article [W], la réductibilité des intersections $\Theta.\Theta_a$ pour une jacobienne.

Il y démontrait que dans la jacobienne d'une courbe lisse C de genre ≥ 5, $\Theta.\Theta_a$ est intègre sauf si $a \in C-C$, c'est-à-dire $a = \mathcal{O}_C(p-q)$ pour $p,q \in C$, et dans un cas particulier (cas 2) de notre théorème). Cette caractérisation de la surface $C-C$ dans la jacobienne lui permettait alors de démontrer le théorème de Torelli.

Cette partie est consacrée à une démonstration géométrique élémentaire des résultats de A. Weil, valable en tout genre ≥ 3, qui permet aussi de décrire les composantes de $\Theta.\Theta_a$ dans tous les cas.

On rappelle (cf. Chapitre I pour les autres notations) qu'on note par "$\cdot$" les intersections schématiques. Si C est une courbe lisse de genre g, on note "$-$" l'involution $L \longmapsto \omega_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$, W^d l'image de $C^{(d)} \longrightarrow J^dC$ et, pour $p \in C$, W^d_p l'image de W^d par $L \longmapsto L \otimes \mathcal{O}_C(p)$.

Notre résultat est :

Théorème 1. *Soient C une courbe projective lisse de genre g supérieur ou égal à 3, Θ le diviseur thêta canonique de $J^{g-1}C$, a un diviseur de degré 0 sur C, non équivalent à zéro. On note $\Theta_a = \Theta + a$. Alors $\Theta.\Theta_a$ est intègre sauf dans les cas suivants :*

1) *Il existe deux points p et q de C tels que $a \equiv p-q$.*

2) *Il existe une courbe elliptique lisse E, un morphisme fini de degré deux $\pi : C \longrightarrow E$ et un diviseur e sur E tels que $a \equiv \pi^*e$.*

Remarque 2. Dans le premier cas, $\Theta.\Theta_a$ est réunion des espaces irréductibles W^{g-2}_p et $-(W^{g-2}_q)$. En particulier, $\Theta.\Theta_a$ est réduit sauf si C est hyperelliptique et (p,q) est une paire involutive.

Dans le second cas, $\Theta.\Theta_a$ est réduit et a en général deux composantes que l'on peut décrire explicitement (Remarques 8 et 9), sauf dans un cas particulier au genre trois (Remarque 9), où il y a trois composantes.

---

(1) Cette partie a été publiée, avec quelques modifications, sous le titre "Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes" dans Compositio Mathematica (référence [D1]).

On peut déduire de ce théorème le théorème de Torelli, de façon analogue à celle employée dans [Ci].

Corollaire 3. Soient C et C' deux courbes projectives lisses de même genre g supérieur ou égal à 3. On suppose qu'il existe un isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées $v : JC \longrightarrow JC'$. Alors il existe un isomorphisme $u : C' \longrightarrow C$ tel que $v = \pm u^*$.

■ L'ensemble $Z_C = \{a \in JC | \Theta.\Theta_a \text{ n'est pas intègre}\}$ ne dépend pas du diviseur Θ choisi dans JC pour le définir. En particulier :

$$v(Z_C) = \{v(a) \in JC' | \Theta.\Theta_a \text{ non intègre}\}$$

$$= \{v(a) \in JC' | v(\Theta).v(\Theta)_{v(a)} \text{ non intègre}\} = Z_{C'} .$$

Or il découle du théorème que Z_C est la réunion de $C-C$ et de, éventuellement, la ou les courbes elliptiques $\pi^*JE \subset JC$. Comme $C-C$ est de dimension 2 dans JC, on en déduit que dans tous les cas, $v(C-C) = C'-C'$. Pour $L \in J^{g-1}C$, on définit le diviseur thêta $\Theta_L \subset JC$ par $\Theta_L = \{M \in JC | H^0(M \otimes L) \neq 0\}$. On obtient ainsi, pour $H^0(L) \neq 0$, tous les diviseurs thêta passant par 0. Si $h^0(L) > 1$, on a $h^0(L \otimes \mathcal{O}_C(p-q)) \geq 1$ pour tous p, q sur C, donc $\Theta_L \supset C-C$. Si par contre $h^0(L) = 1$, alors $h^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = 1$, et si on note $|L| = \{x_1+\ldots+x_{g-1}\}, |\omega_C \otimes L^{-1}| = \{y_1+\ldots+y_{g-1}\}$, on a :

$$\Theta_L \cap (C-C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} [(C-x_i) \cup (y_i-C)] .$$

On choisit $L \in J^{g-1}C$ avec $h^0(L) = 1$. Alors $v(\Theta_L \cap (C-C)) = \Theta_{L'} \cap (C'-C')$ est réductible donc, par ce qui précède, réunion de $(g-1)$ translatés de C' et de $(g-1)$ translatés de $(-C')$. On en déduit :

$$\exists x \in C , \exists x' \in C' , v(C-x) = \pm(C'-x') ,$$

ce qui prouve le corollaire. ■

Une autre conséquence est la caractérisation des trisécantes à la variété de Kummer d'une jacobienne de courbe (annoncée en II.A.1).

Corollaire 4. Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 3$. On suppose qu'il existe trois éléments non nuls a, c et d de JC tels que :

$$\{0,a\} \cap \{c,d\} = \emptyset , \quad \Theta.\Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d .$$

Alors il existe quatre points x,y,z et t de C tels que :

$$a = \mathcal{O}(x-y) \quad , \quad \{c,d\} = \{\mathcal{O}(x-t),\mathcal{O}(z-y)\} .$$

■ Les intersections $\Theta.\Theta_a$, $\Theta.\Theta_c$, $\Theta.\Theta_d$ sont toutes réductibles. On va comparer, à l'aide des remarques 2, 8 et 9, les composantes possibles, et montrer que le cas 2) du théorème ne peut se produire pour aucun des éléments a, c, d de JC .

On suppose d'abord $g \geq 4$. Si on est dans le cas 2) du théorème, on note σ l'involution de C associée à π et Z_σ^a , Z_σ les deux composantes de $\Theta \cap \Theta_a$, pour $a \in \pi^*\mathrm{Pic}\, E$ (cf. Remarque 8).

Par le lemme 5, un élément générique L de Z_σ ou Z_σ^a vérifie $h^0(L) = 1$, donc Z_σ et Z_σ^a sont distincts de tous les W_p^{g-2} , $p \in C$. On a $-Z_\sigma = Z_\sigma$, d'où $-Z_\sigma^a = Z_\sigma^{-a}$, donc Z_σ et Z_σ^a sont aussi distincts de tous les $-(W_q^{g-2})$, $q \in C$.

D'autre part, si on avait $Z_\tau = Z_\sigma^a$ pour une autre involution τ , on aurait pour $(x_1,\ldots,x_{g-2})$ générique dans C^{g-2} , $\mathcal{O}_C(x_1+\ldots x_{g-2}+\sigma\tau x_{g-2}) \in Z_\tau$, ce qui est impossible. De même, Z_σ est distinct de Z_τ si σ l'est de τ . On a montré que les W_p^{g-2}, $-(W_q^{g-2})$, Z_σ , Z_τ , Z_σ^a , Z_σ^b sont distincts pour $\sigma \neq \tau$, $a \neq b$, $g \geq 3$. Ceci permet de conclure pour $g \geq 4$.

Le cas $g = 3$ se traite de façon similaire : les composantes sont du type Z_σ (cas 1 et 2 de la Remarque 9) ou Z_σ^a (cas 3). Si a relève du cas 1 de la remarque, de sorte que $\Theta.\Theta_a = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_{\sigma_3}$, deux de ces composantes sont par exemple dans $\Theta.\Theta_c$. Donc c relève aussi du cas 1 et $\Theta.\Theta_c = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_\tau$. Les groupes de Galois de $\phi_{|K+a|}$ et $\phi_{|K+c|}$, tous deux engendrés par σ_1 et σ_2 , sont alors égaux et $K+a \equiv K+c$. Le cas 2 se traite de façon identique : si a relève du cas 3 de la remarque, Z_σ^a est composante de $\Theta.\Theta_c$, donc c relève aussi de ce cas, pour la même involution σ , et $a \equiv c$. ■

■ Démonstration du théorème : L'idée de base, due à Weil, est de considérer le système linéaire $|K_C+a|$. Si $a \notin C-C$, il est sans point base donc définit un morphisme $\phi : C \longrightarrow |K+a|^\vee \simeq \mathbb{P}^{g-2}$.

Soit $p : \Theta \cap \Theta_a \dashrightarrow |K+a|$ l'application rationnelle définie de la façon suivante : pour tout L de $\Theta \cap \Theta_a$ tel que $h^0(L) = h^0(L-a) = 1$, on a $h^0(K-L+a) = 1$ et on pose, si $|L| = \{D\}$ et $|K-L+a| = \{D'\}$, $p(L) = D+D'$.

Lemme 5. L'application p est définie sur un ouvert dense de $\Theta \cap \Theta_a$ et sa restriction à chaque composante est dominante. L'intersection $\Theta.\Theta_a$ est réduite.

■ Comme $\Theta \cap \Theta_a$ est défini localement par deux équations dans $J^{g-1}C$, chacune de ses composantes est de dimension $g-2$. Or on a $\dim(\mathrm{Sing}\,\Theta \cup \mathrm{Sing}\,\Theta_a) \leq g-3$, donc, pour toute composante Z de $\Theta \cap \Theta_a$ et L générique dans Z, L est lisse sur Θ et sur Θ_a, i.e. $h^0(L) = h^0(L-a) = 1$. L'application p est génériquement finie, donc $p_{|Z}$ est dominante. Il existe donc $L \in Z$ tel que $p(L)$ se compose de $2g-2$ points distincts. L'espace tangent $T_L\Theta$ correspond au point $D+D^*$ de $|K| \simeq \mathbb{P}T^v_L(JC)$, où $D^* \in |K-L|$, et l'espace $T_L\Theta_a$ à $D'+D'^*$, où $D'^* \in |L-a|$. Comme a est non nul, D n'est pas égal à D'^* et, par construction, D et D' sont sans point commun. Les espaces $T_L\Theta$ et $T_L\Theta_a$ sont distincts et Z est réduit. ■

On se restreint donc à l'étude de l'ensemble $\Theta \cap \Theta_a$, que l'on va décrire de façon géométrique. Son image réciproque par l'application naturelle $C^{(g-1)} \twoheadrightarrow \Theta \subset J^{g-1}C$ est, par Riemann-Roch, le diviseur $\bar{W} = \{D \in C^{(g-1)} \mid H^0(K_C+a-D) \neq 0\}$.

L'espace $\bar{W}$ est donc l'ensemble des $x_1+\ldots+x_{g-1}$ dans $C^{(g-1)}$ tels que les $(g-1)$ points $\phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1}$ soient "sur" un même hyperplan. Plus précisément, soit U l'ouvert de $|K+a|$ des hyperplans de $|K+a|^v$ coupant la courbe $\phi(C) = C'$ transversalement, en des points au-dessus desquels ϕ est égale. Grâce au lemme précédent, l'étude des composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ se ramène à celle de :

$W = \{x_1+\ldots+x_{g-1} \in C^{(g-1)} \mid$ Les x_i sont deux à deux distincts, ϕ est lisse au-dessus des ϕx_i, et il existe un élément H de U tel que $\phi x_i \in H$ pour tout $i\}$.

On note encore $\phi : C \longrightarrow C'$ le morphisme induit par ϕ de C sur son image. A cause des formules $2g-2 = \deg \phi . \deg C'$, $\deg C' \geq g-2$, on est dans l'un des cas suivants :

- ϕ est birationnelle
- ϕ est de degré 2
- ϕ est de degré 3 et $g = 4$
- $g = 3$

que l'on analyse dans cet ordre.

(a) ϕ birationnelle.

L'espace W, donc aussi l'espace $\Theta \cap \Theta_a$, est irréductible grâce au théorème suivant, tiré de [A-C-G-H 1], dont on reproduit ici la démonstration.

Théorème 6. Soient C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^r$ et U l'ouvert de $(\mathbb{P}^r)^\vee$ formé des hyperplans coupant C transversalement. Alors, pour tout entier positif m,

$$I(m) = \{(x_1,\dots,x_m,H) \in C^m \times U \mid x_i \text{ deux à deux distincts et } x_i \in H\}$$

est irréductible.

■ La projection $pr^m : I(m) \longrightarrow U$ est un revêtement étale. On choisit un point base H_0 de U, et on note F_m sa fibre $(pr^m)^{-1}(H_0)$. L'irréductibilité de $I(m)$ est alors équivalente au fait que $\pi_1(U,H_0)$ opère transitivement sur F_m par monodromie, c'est-à-dire que $\pi_1(U,H_0)$ opère m fois transitivement sur F_1 par la monodromie de $pr^1 : I(1) \longrightarrow U$. Le théorème sera démontré si on montre que le groupe de Galois G de pr^1 est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, où d est le degré de C. Or cela résulte des deux remarques suivantes :

• G est 2 fois transitif : c'est équivalent par ce qui précède à l'irréductibilité de $I(2)$. Or la projection $pr_1 : I(2) \longrightarrow C \times C$ est dominante et les fibres sont des ouverts denses d'espaces projectifs de dimension $r-2$, donc $I(2)$ est irréductible.

• G contient une transposition : si H_1 est un hyperplan simplement tangent à C en un point et si $\{H\}_{t\in\mathbb{C},|t-1|<\varepsilon}$ est une famille à un paramètre d'hyperplans avec $H_t \in U$ si $t \neq 1$, on voit que $H_t \cap C$ contient deux points qui se confondent en le point de tangence de H_1 avec C quand t tend vers 1. Ces deux points sont interchangés quant t tourne autour de 1. ■

Il suffit alors de remarquer que $W \simeq pr(I(g-1))$, où

$$pr : C^{g-1} \times U \longrightarrow C^{g-1} \longrightarrow C^{(g-1)} .$$

(b) ϕ est de degré 2.

Lemme 7. Si ϕ est de degré 2, ou plus généralement s'il existe une involution σ sur C telle que ϕ se factorise par $\pi : C \longrightarrow C/\sigma$, alors C/σ est une courbe elliptique lisse E et il existe un diviseur e sur E tel que $a \equiv \pi^* e$.

■ Au revêtement ramifié $\pi : C \longrightarrow C/\sigma = E$ est associé un élément δ de Pic E défini par $\pi_* \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-\delta)$. Le morphisme ϕ se factorise par π si et seulement si il existe un diviseur e sur E, de degré 0, et tel que :

$$a \equiv \pi^* e \quad \text{et} \quad (H^0(E, K_E + e) = 0 \quad \text{ou} \quad H^0(E, K_E + \delta + e) = 0) .$$

Comme δ est de degré positif ou nul, le théorème de Riemann-Roch donne g(E) égal à 0 ou 1. Comme a n'est pas équivalent à 0, il en est de même pour e et E n'est pas rationnelle. ■

Remarque 8. Dans le cas où ϕ est de degré 2, les composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ sont :

$$\{\mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-1}) \mid \phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1} \text{ distincts, sur un hyperplan élément de } U\}^-$$

et $\{\mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-2} + \sigma x_{g-2}) \mid x_i \in C \text{ quelconques}\}$.

■ Il suffit de montrer que le premier ensemble est irréductible. Comme en A3.1.2, on introduit le groupe de Galois G de la projection étale $pr : I = \{(x,H) \in C \times U \mid \phi x \in H\} \longrightarrow U$, qui opère sur une fibre $\{a_1^+, \ldots, a_{g-1}^+, a_1^-, \ldots, a_{g-1}^-\}$, où $a_i^+ = \sigma a_i^-$. Il ressort de A3.1.2 qu'il y a au plus deux orbites pour l'action de G sur l'ensemble des $(a_{\tau(1)}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{\tau(g-1)}^{\varepsilon_{g-1}})$, $\varepsilon_j \in \{-1,+1\}$, $\tau \in \mathfrak{S}_{g-1}$: celle de $(a_1^+, \ldots, a_{g-1}^+)$ et celle de $(a_1^+, \ldots, a_{g-2}^+, a_{g-1}^-)$. Comme dans la démonstration du théorème 6, on considère alors une famille d'hyperplans $(H_t)_{t \in \mathbb{C}, |t-1| < \varepsilon}$ vérifiant $H_t \in U$ si $t \neq 1$, H_1 passe par un point de C' au-dessus duquel ϕ est ramifié. Lorsque $t \neq 1$, $\phi^{-1}(H_t \cap C')$ contient deux points qui se confondent en le point de ramification lorsque t tend vers 1. Ceci montre que G contient une transposition (a_i^+, a_i^-), et termine la démonstration de la remarque.

(c) Cas g = 4 et ϕ de degré 3.

L'image de ϕ est une conique Q dans $\mathbb{P}^2$. On rappelle que :

$$W = \{x_1 + x_2 + x_3 \in C^{(3)} \mid \text{Les } x_i \text{ sont deux à deux distincts, } \phi \text{ est étale sur}$$
$$\phi^{-1}\phi x_i \text{, et } \phi x_1 \text{, } \phi x_2 \text{, } \phi x_3 \text{ sont alignés}\} .$$

Le morphisme $f : C \times C \longrightarrow C^{(3)}$ qui à (x,y) associe $(\phi^{-1}\phi x - x) + y$ induit une surjection d'un sous-ensemble dense irréductible de $C \times C$ sur W, ce qui prouve l'irréductibilité de W donc celle de $\Theta \cap \Theta_a$.

(d) Cas $g = 3$.

Le morphisme ϕ est de degré 4 sur $\mathbb{P}^1$, avec ramification Δ sur $\mathbb{P}^1$. On choisit un point base $p_0 \in \mathbb{P}^1 - \Delta$, de fibre $F = \phi^{-1} p_0$.

Le groupe de Galois G de ϕ , qui est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, F \simeq \mathfrak{S}_4$, opère transitivement sur F puisque $C - \phi^{-1}(\Delta)$ est connexe. On rappelle que :

$$W = \{x_1 + x_2 \in C^{(2)} \mid x_1 \neq x_2 \ , \ \phi x_1 = \phi x_2 \notin \Delta\} \ .$$

Les composantes irréductibles de W sont en bijection avec les orbites dans $(F^{(2)}\text{-diag})$ sous l'action de G . En particulier, W est irréductible si G est 2 fois transitif.

Passons en revue rapidement les sous-groupes G de $\mathfrak{S}_4$ opérant transitivement. On remarque que $\mathrm{Card}\, G$ est alors divisible par 4 :

(1) $G \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$. On voit facilement que G ne peut contenir de transposition (sans quoi il ne serait pas transitif) ; donc G est nécessairement le groupe de Klein $\{\mathrm{id} ; (1,2)(3,4) ; (1,3)(2,4) ; (1,4)(2,3)\}$.

(2) $G \simeq \mathbb{Z}/4$. Alors G est conjugué au sous-groupe engendré par $(1,2,3,4)$.

(3) G est d'ordre 8. Ces sous-groupes sont les 2-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$ donc sont conjugués par exemple au sous-groupe D_4 engendré par $(1,2,3,4)$ et $(1,3)$.

(4) G est d'ordre 12. Alors G est d'indice 2, donc distingué et égal à A_4 .

On rappelle enfin que si $x \in F$ et si G_x est le stabilisateur de x dans G , on a :

$$\mathrm{Aut}\, C/\mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{Norm}_G G_x / G_x \ .$$

Les résultats dont on a besoin sont résumés dans le tableau page suivante. Il en ressort que soit W est irréductible, soit le groupe $\mathrm{Aut}\, C/\mathbb{P}^1$ contient un élément d'ordre 2. Ceci, joint au lemme 7, achève la démonstration du théorème.

Remarque 9. L'étude ci-dessus permet de préciser les composantes irréductibles de $\Theta.\Theta_a$ lorsqu'on est dans le cas 2 du théorème et que $g = 3$. Le revêtement double $\pi : C \longrightarrow C/\sigma = E$ est associé à la donnée de $\delta \in \mathrm{Pic}^2 E$ et de $\Delta \in |2\delta|$, sans point multiple. On note σ' l'involution de E associée au morphisme de degré deux $\phi_{|\delta+e|} : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$, où $a = \pi^* e$, et R la ramification de $\phi_{|\delta+e|}$ sur E . On rappelle

que $\phi = \phi_{|\delta+e|} \circ \pi$ (Lemme 7). On est alors dans un seul des cas suivants :

G	Stabilisateur de 1	Aut $C/\mathbb{P}^1$	Nombre d'orbites dans $F^{(2)}$-diag.
$(\mathbb{Z}/2)^2$	id	$(\mathbb{Z}/2)^2$	3
$\mathbb{Z}/4$	id	$\mathbb{Z}/4$	2
D_4	(2,4)	$\mathbb{Z}/2$	2
$A_4, \mathfrak{S}_4$	2-transitifs		1

(1) $\Delta = x+y+\sigma' x+\sigma' y$, où $x,y \notin \mathrm{Supp}\ R$. Alors a est d'ordre 2, le groupe de Galois G de ϕ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$. Si on note $G = \{id,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, les trois composantes de $\Theta.\Theta_a$ sont :

$$\{\mathcal{O}_C(x+\sigma_i x) \mid x \in C\} \qquad i = 1,2,3 \ .$$

(2) $\Delta = R$. Alors a est d'ordre 2, le groupe de Galois G de ϕ est isomorphe $\mathbb{Z}/4$. Les deux composantes de $\Theta.\Theta_a$ sont $\{\mathcal{O}_C(x+\sigma x) \mid x \in C\}$ et $\{\mathcal{O}_C(x+\sigma^2 x) \mid x \in C\}$, où σ engendre G .

(3) Si Δ n'est pas de l'un des types ci-dessus, le groupe de Galois de ϕ est isomorphe à D_4 . Le groupe des automorphismes de C sur $\mathbb{P}^1$ est engendré par une involution σ et :

$$\Theta.\Theta_a = \{\mathcal{O}_C(x+\sigma x) \mid x \in C\} \cup \{\mathcal{O}_C(x_1+x_2) \mid \pi x_2 = \sigma' \pi x_1\} \ .$$

II.C. Une relation entre deux approches du problème de Schottky : une condition nécessaire de réductibilité de $\Theta.\Theta_a$ dans une variété abélienne (en collaboration avec A. Beauville).[1]

Le problème de Schottky est la question de caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes. Plus précisément, soit A_g l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Les jacobiennes forment une sous-variété J_g de A_g, et il s'agit de trouver des équations de J_g (ou de son adhérence $\bar{J}_g$) dans A_g.

Parmi les approches géométriques de ce problème, deux méthodes se sont révélées particulièrement fructueuses :

1) L'approche d'Andreotti-Mayer, qui utilise les singularités du diviseur Θ. Ces auteurs prouvent que $\bar{J}_g$ est une composante irréductible de la sous-variété N_{g-4} de A_g formée des variétés abéliennes principalement polarisées (A,Θ) telles que $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$ [An-M].

2) L'approche basée sur la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$. Elle repose sur l'observation, déjà utilisée par Weil, que pour la jacobienne (JC,Θ) d'une courbe C l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible lorsque a est de la forme $p-q$, avec $p,q \in C$. Plus précisément, pour p,q,r,s distincts dans C, on a $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$. Ceci conduit à considérer, pour une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ), un certain nombre de conditions, qui sont satisfaites lorsque (A,Θ) est une jacobienne :

(i) Il existe un élément non nul a de A tel que $\Theta \cap \Theta_a$ soit réductible.

(ii) Il existe trois éléments distincts non nuls a,x,y de A tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer de (A,Θ) admet une trisécante.

(iv) La fonction thêta associée à (A,Θ) vérifie une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation K-P (voir (2.10) pour une formulation précise).

---

[1] Cette partie a été publiée sous le titre "Une relation entre deux approches du problème de Schottky" dans Inventiones Mathematicae (référence [Be-D 1]).

Ces conditions et leurs relations mutuelles ont été beaucoup étudiées récemment, notamment dans [We 6], [We 7], [Ar-D] (plus exactement, ces auteurs renforcent les conditions (ii) et (iii) en imposant l'existence de familles de dimension un de trisécantes ou de triplets (a,x,y) satisfaisant à (ii)).

Le but de cet article est de mettre en évidence un lien entre les deux approches que nous venons d'évoquer. Nous démontrons en effet que chacune des conditions (ii), (iii) et (iv) ci-dessus entraîne la condition d'Andreotti-Mayer $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$. De plus, une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) qui vérifie (i) satisfait à la condition d'Andreotti-Mayer ou contient une courbe elliptique E avec $(\Theta.E) = 2$. On déduit immédiatement de ces résultats et du théorème d'Andreotti-Mayer que $\bar{J}_g$ est une composante de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées satisfaisant à l'une des conditions (i) à (iv).

Le point de départ de la démonstration consiste à remarquer que la condition $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) < g-4$ implique que la variété Θ est localement factorielle ; la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ se traduit alors par une décomposition de $\Theta_{a|\Theta}$ en somme de diviseurs de Cartier effectifs dans Θ . A cause de l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\Theta)$, l'existence d'une telle décomposition est très contraignante : on montre au §1 qu'elle équivaut à dire que A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta.E) = 2$ et $a \in E$. On en déduit au §2 les résultats énoncés ci-dessus.

Nous remercions E. Arbarello de nous avoir signalé que la condition (iv) ci-dessus entraînait une forme de (i) et était donc justiciable de notre méthode.

Notations et conventions.

Les variétés que nous considérons sont définies sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque.

(0) Soient V une variété algébrique, Z une sous-variété de V, L un faisceau inversible sur V ; supposons donnés un champ de vecteurs X sur V et une section s de $H^0(V,L)$ s'annulant sur Z. Il existe alors une unique section Xs de $H^0(Z,L_{|Z})$ possédant la propriété suivante : pour tout ouvert U de V et tout isomorphisme $\lambda : \mathcal{O}_U \longrightarrow L_{|U}$, on a $Xs = \lambda(X\lambda^{-1}(s))_{|Z}$ dans $Z \cap U$.

Soit maintenant (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit θ une section de $H^0(A,\Theta)$ de diviseur Θ ; on déduit de ce qui précède un homomorphisme $\tau : H^0(A,T_A) \longrightarrow H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta))$ défini par $\tau(X) = X\theta$. Via l'identification $T_0(A) = H^0(A,T_A)$, on associe ainsi à tout vecteur non nul a de $T_0(A)$ une section de $H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta))$; par abus de langage on notera $\Theta \cap \Theta_a$ le schéma des zéros de cette section dans Θ.

Si a est un élément non nul de A ou de $T_0(A)$, la sous-variété $\Theta \cap \Theta_a$ définit un diviseur (de Cartier) de Θ, que l'on notera $\Theta.\Theta_a$.

§1. Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ dans Pic Θ .

(1.0) Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit E une sous-variété abélienne de A . Notons K le noyau de l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\varphi_\Theta} \hat{A} \longrightarrow \hat{E}$; c'est une sous-variété abélienne de A , qui s'identifie à $(A/E)^\wedge$. Soit $\pi : E \times K \longrightarrow A$ l'isogénie définie par $\pi(e,k) = e+k$. Notons Θ_E et Θ_K les restrictions de Θ à E et K respectivement. On déduit du théorème du carré la relation

$$\pi^*\Theta \equiv pr_1^*\Theta_E + pr_2^*\Theta_K \ ;$$

l'image réciproque sur $E \times K$ de la polarisation de A est donc la polarisation produit. On a

$$H(\Theta_E) = H(\Theta_K) = E \cap K \ ,$$

tandis que $\operatorname{Ker} \pi$ est l'ensemble des éléments $(e,-e)$ pour $e \in E \cap K$. Les polarisations induites Θ_E et Θ_K ont donc même degré d . Le lemme suivant, démontré en A1.1.1, résulte facilement de la théorie des groupes thêta de Mumford :

Lemme 1.1. *Soit θ une section non nulle de $H^0(A,\Theta)$. Il existe des bases $(s_1,\dots,s_d)$ et $(t_1,\dots,t_d)$ de $H^0(E,\Theta_E)$ et $H^0(K,\Theta_K)$ respectivement telles qu'on ait* $\pi^*\theta = \sum_{i=1}^{d} s_i \otimes t_i$.

(1.2) Le cas $\dim(E) = 1$ jouera un rôle particulier dans la suite. Posons $(\Theta.E) = d$; alors la polarisation induite sur E est la polarisation de degré d . Le groupe $E \cap K$ est le groupe E_d des points d'ordre d de E ; le noyau de π est donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/d)^2$.

Si par exemple (A,Θ) est la jacobienne d'une courbe C , on déduit du plongement $C \subset JC$ et de l'homomorphisme $A \longrightarrow \hat{E} = E$ un morphisme $r : C \longrightarrow E$; on a $(C.K) = \deg r = d$. Inversement, si E est une courbe elliptique et $r : C \longrightarrow E$ un morphisme de degré d , on déduit de r un homomorphisme (non nécessairement injectif) $\bar{r} : E \longrightarrow JC$ et on a $\deg(\bar{r}^*\Theta) = d$.

PROPOSITION 1.3. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et E une sous-variété abélienne de A telle que la polarisation induite Θ_E soit de degré 2. Soit e un élément non nul de E ou de $T_0(E)$. Il existe alors des diviseurs de Weil effectifs C et C' dans Θ tels qu'on ait $\Theta.\Theta_e = C+C'$. Si de plus $\dim(E) = 1$, C et C' sont des diviseurs de Cartier dans Θ .*

(La notation $\Theta.\Theta_e$ est expliquée au début de cette section en (0)).

■ Traitons d'abord le cas $e \in E$. Nous utilisons les notations de (1.0). D'après le lemme 1.1 il existe des bases (s_1,s_2) de $H^0(E,\Theta_E)$ et (t_1,t_2) de $H^0(K,\Theta_K)$ telles que $\pi^*\Theta$ soit le diviseur de la section $(x,y) \longmapsto s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y)$.

La sous-variété $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est définie dans $E \times K$ par les équations

$$(*) \quad \begin{cases} s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y) = 0 \\ s_1(x-e)t_1(y) + s_2(x-e)t_2(y) = 0 . \end{cases}$$

Elle est donc réunion des sous-variétés de codimension 2

$\begin{cases} \widetilde{C} = E \times B , \text{ où } B \text{ est le lieu fixe du système linéaire } |\Theta_K| \text{ (défini par } t_1 = t_2 = 0), \\ \widetilde{C}' \text{ définie par les équations } (*) \text{ et } s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0 . \end{cases}$

Ces sous-variétés sont stables par $\operatorname{Ker}\pi$; il existe donc des diviseurs de Weil effectifs C et C' dans Θ tels qu'on ait $\widetilde{C} = \pi^*C$, $\widetilde{C}' = \pi^*C'$ et $\Theta.\Theta_e = C+C'$.

Supposons maintenant $\dim(E) = 1$. L'équation $s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0$ définit un diviseur $\sum \varepsilon_i$ sur E linéairement équivalent à $\Theta_E + (\Theta_E)_e$, donc de degré 4. On a $\widetilde{C}' = \sum_{i=1}^{4} \{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$, où Δ_i est le diviseur de la section $s_1(\varepsilon_i)t_1 + s_2(\varepsilon_i)t_2$ de $H^0(K,\Theta_K)$. Ainsi $\widetilde{C}'$ est l'image réciproque par la projection $\pi^{-1}(\Theta) \longrightarrow E$ du diviseur $\sum \varepsilon_i$; c'est donc un diviseur de Cartier dans $\pi^{-1}(\Theta)$. Par suite C' est un diviseur de Cartier dans Θ, et il en est de même de $C = \Theta.\Theta_e - C'$.

Le cas où e est un vecteur tangent à E se traite de façon identique : la seconde équation de $(*)$ est remplacée par

$$s_1'(x)t_1(y) + s_2'(x)t_2(y) = 0 ,$$

où le signe $'$ indique la dérivation par rapport à un paramètre local. Alors $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est réunion de $\widetilde{C} = E \times B$ et de $\widetilde{C}'$ définie par les équations $(*)$ et $s_1(x)s_2'(x) - s_2(x)s_1'(x) = 0$. On en déduit comme ci-dessus la décomposition $\Theta.\Theta_e = C+C'$. Si $\dim(E) = 1$, C est un diviseur de Cartier dans Θ d'après le cas précédent, et il en est donc de même de C'.

(1.4) Précisons la structure de $\Theta.\Theta_e$ lorsque $\dim(E) = 1$. Désignons par $s : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme $x \longmapsto (s_1(x), s_2(x))$. L'équation $s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0$ (resp. $s_1(x)s_2'(x) - s_2(x)s_1'(x) = 0$) s'écrit $s(x) = s(x-e)$ (resp. $s'(x) = 0$), soit $[x] + [x-e] \equiv \Theta_E$ (resp. $2[x] \equiv \Theta_E$). Si $\Theta_E \equiv [0] + [f]$, avec $f \in E$, cette équation équivaut à $2x = e+f$ (resp. $2x = f$). Ainsi les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ sont permutés par l'action de E_2 . Par suite les sous-variétés $\{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$ de $\widetilde{C}'$ sont permutées par $\operatorname{Ker} \pi$. Posant $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $\Delta = \Delta_1$, on a donc $C' = \pi(\{\varepsilon\} \times \Delta) = \Delta_\varepsilon$, et $\Theta.\Theta_e = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon$.

(1.5) Avant d'énoncer la réciproque de la prop. 1.3 il nous faut rappeler les résultats de Mumford et Kempf [Mu 9] sur la cohomologie des faisceaux inversibles sur une variété abélienne A . On dit qu'un faisceau inversible L sur A est <u>non dégénéré</u> si le groupe $H(L)$ (I.3.3) est fini. Il existe dans ce cas un unique entier i tel que $H^i(A,L) \neq 0$: c'est <u>l'indice</u> de L , que l'on note $i(L)$.

Soit maintenant L un faisceau inversible quelconque sur A ; notons K la composante neutre de $H(L)$, et $p : A \longrightarrow A/K$ la projection canonique. Il existe alors un faisceau inversible non dégénéré M sur A/K , bien défini à translation près, tel que L soit algébriquement équivalent à p^*M . On pose

$$i_-(L) = i(M) \quad ; \quad i_+(L) = i(M) + \dim(K) .$$

Si la cohomologie de L n'est pas nulle, on peut choisir M de façon que $L = p^*M$. On a alors pour tout entier i un isomorphisme canonique

$$H^i(A,L) \xrightarrow{\sim} H^{i(M)}(A/K,M) \otimes H^{i-i(M)}(K,\mathcal{O}_K) .$$

En particulier, on a

$$H^i(A,L) \neq 0 \iff i_-(L) \leq i \leq i_+(L) .$$

Il résulte de la définition que $i_-(L)$ et $i_+(L)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L . Par ailleurs, si L et L' sont deux faisceaux inversibles sur A , on a $i_-(L \otimes L') \leq i_-(L) + i_-(L')$. En effet le raisonnement de [Mu 6], p. 159, step C , qui établit cette inégalité dans le cas où L et L' sont non dégénérés, s'étend immédiatement au cas général.

(1.6) La proposition 1.3 admet la réciproque suivante. Nous écarterons le cas des variétés produits, pour lesquelles le diviseur Θ lui-même est réductible. Nous dirons qu'une variété abélienne polarisée est <u>irréductible</u> si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non triviales.

PROPOSITION 1.7. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible, de dimension ≥ 4 . On suppose qu'il existe un élément non nul a de A (resp. de $T_0(A)$) et des diviseurs de Cartier effectifs C , C' dans Θ tels qu'on ait $\Theta.\Theta_a = C+C'$. Alors A contient une courbe elliptique E telle que $(\Theta.E) = 2$, et on a $a \in E$ (resp. $a \in T_0(E)$).

Traitons d'abord le cas $a \in A$. D'après le théorème de Lefschetz version Grothendieck [Gro 3, Exp. XII, cor. 3.6][1], il existe des diviseurs D et D' sur A tels que $D_{|\Theta} \equiv C$, $D'_{|\Theta} \equiv C'$, et $D+D' \equiv \Theta_a$. Considérons la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(D-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_A(D) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(C) \longrightarrow 0 \ ;$$

puisque C est effectif, on en déduit que l'un des espaces $H^0(A,D)$ ou $H^1(A,D-\Theta)$ n'est pas nul. On a la même alternative pour D'.

Si $H^0(A,D)$ et $H^0(A,D')$ sont non nuls, Θ_a est réductible, ce qui contredit l'hypothèse. Si ces deux espaces sont nuls, on a $i_-(D-\Theta) \leq 1$ et $i_-(D'-\Theta) \leq 1$ (1.5) ; mais $\mathcal{O}_A(D+D'-2\Theta) = \mathcal{O}_A(\Theta_{-a})^{-1}$ est un faisceau non dégénéré d'indice $g \geq 4$, ce qui contredit l'inégalité $i_-(D+D'-2\Theta) \leq i_-(D-\Theta) + i_-(D'-\Theta)$ (1.5).

Nous supposerons donc désormais que $H^1(A,D'-\Theta)$ est non nul, tandis que $H^1(A,D-\Theta)$ est nul ; on peut alors supposer que D est effectif et que sa restriction à Θ est égale à C . Par dualité, on a $H^{g-1}(A,\Theta-D') \neq 0$, ou encore, en notant $\hat{a}$ le diviseur algébriquement équivalent à zéro $\Theta_a-\Theta$, $H^{g-1}(A,D-\hat{a}) \neq 0$. On déduit alors de (1.5) qu'on a

$$i_-(D) = i_-(D-\hat{a}) = 0 \quad \text{et} \quad i_+(D) = i_+(D-\hat{a}) = g-1 \ ;$$

de plus, posons $K = H(D)^0 = H(D-\hat{a})^0$, $E = A/K$, et notons $p : A \longrightarrow E$ l'homomorphisme canonique. On a $\dim K = i_+(D) - i_-(D) = g-1$ et $\dim(E) = 1$; il existe des diviseurs $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ sur E tels que $D \equiv p^*\mathfrak{d}$ et $\hat{a} \equiv p^*\mathfrak{e}$. Identifions E à une sous-variété abélienne de A à l'aide de l'homomorphisme $\hat{p}$ et des polarisations principales sur A et E ; le diviseur de degré zéro $\mathfrak{e}$ sur E correspond à un point e de E , et l'égalité $\hat{a} = p^*\mathfrak{e}$ s'écrit simplement $a = e$ (d'où $a \in E$).

[1] L'annulation de $H^i(\Theta,-n\Theta)$ pour $i = 1,2$ et $n \geq 1$, nécessaire pour appliquer loc. cit., résulte immédiatement du fait qu'on a $H^i(A,-n\Theta) = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$ (puisque la dimension de A est ≥ 4).

On est maintenant dans la situation de (1.0), dont nous reprenons les notations. Il reste à déterminer le degré d des polarisations induites Θ_E et Θ_K. Soit θ une section non nulle de $H^0(A,\Theta)$. Considérons sur $E\times K$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathcal{O}_A(D'-\Theta) \xrightarrow{\cdot\pi^*\theta} \pi^*\mathcal{O}_A(D') \longrightarrow \pi^*\mathcal{O}_\Theta(C') \longrightarrow 0 .$$

Comme aucun diviseur algébriquement équivalent à D' n'est effectif (sans quoi Θ serait réductible), on a $H^0(E\times K,\pi^*\mathcal{O}_A(D')) = 0$. Puisque C' est effectif, on en déduit que l'homomorphisme

$$H^1(\pi^*\theta) : H^1(E\times K,\pi^*\mathcal{O}_A(D'-\Theta)) \longrightarrow H^1(E\times K,\pi^*\mathcal{O}_A(D'))$$

n'est pas injectif.

Notons φ la restriction à E de $p : A \longrightarrow E$ (φ n'est autre que la multiplication par d dans E) ; posons $\Delta = \varphi^*(\mathfrak{d}-\mathfrak{e})$.

On a alors

$$\pi^*(D'-\Theta) \equiv \pi^*(\hat{a}-D) \equiv \pi^*p^*(\mathfrak{e}-\mathfrak{d}) = -pr_1^*(\Delta) ,$$

d'où des isomorphismes

$$H^1(E\times K,\pi^*\mathcal{O}_A(D'-\Theta)) = H^1(E\times K,-pr_1^*(\Delta)) \simeq H^1(E,-\Delta)$$

$$H^1(E\times K,\pi^*\mathcal{O}_A(D')) = H^1(E\times K,pr_1^*(\Theta_E-\Delta)+pr_2^*(\Theta_K)) \simeq H^1(E,\Theta_E-\Delta)\otimes H^0(K,\Theta_K) .$$

Soient $(s_1,\dots,s_d)$ et $(t_1,\dots,t_d)$ des bases de $H^0(E,\Theta_E)$ et $H^0(K,\Theta_K)$ respectivement telles qu'on ait $\pi^*\theta = \sum_{i=1}^{d} s_i\otimes t_i$ (lemme 1.1). L'homomorphisme $H^1(\pi^*\theta)$ s'identifie via les isomorphismes précédents à l'application

$$u : H^1(E,-\Delta) \longrightarrow H^1(E,\Theta_E-\Delta)\otimes H^0(K,\Theta_K)$$

définie par $u(x) = \sum_{i=1}^{d} (s_i.x)\otimes t_i$.

Pour que $u(x)$ soit nul, il faut et il suffit qu'on ait $s.x = 0$ pour toute section s de $H^0(E,\Theta_E)$. Par dualité, cela signifie que l'image de l'application naturelle

$$v : H^0(E,\Delta-\Theta_E)\otimes H^0(E,\Theta_E) \longrightarrow H^0(E,\Delta)$$

est contenue dans le noyau de x (considérée comme forme linéaire sur $H^0(E,\Delta)$). Ainsi l'injectivité de u équivaut à la surjectivité de v. Or on a

$\deg(\Theta_E) = d$

$\deg(\Delta) = d^2 \deg \mathfrak{a} \geq d^2$, d'où $\deg(\Delta-\Theta_E) \geq d^2-d$.

On a $d \geq 2$ puisque (A,Θ) est supposée irréductible. Mais il est bien connu que si L et M sont deux faisceaux inversibles de degré ≥ 3 sur E , la flèche $H^0(E,L) \otimes H^0(E,M) \longrightarrow H^0(E,L \otimes M)$ est surjective [Mu9, thm. 6]. On conclut qu'on a $d = 2$, d'où la proposition dans ce cas.

Traitons enfin le cas $a \in T_0(A)$. La démonstration précédente s'applique identiquement en remplaçant a par 0 ; on obtient encore que A contient une courbe elliptique E avec $\deg(\Theta_E) = 2$, d'où une isogénie $\pi : E \times K \longrightarrow A$. Reste à prouver que a est tangent à E . Notons encore a le champ de vecteurs sur A qui prolonge a , et considérons les applications

$$H^0(A,T_A) \xrightarrow{\tau} H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \xrightarrow{\partial} H^1(A,\mathcal{O}_A) ,$$

où τ est l'homomorphisme défini en (0), et où ∂ est le cobord de la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A(\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \longrightarrow 0 .$$

D'après [Gr 1, 2.10], le composé $\partial\tau$ est le cup-produit avec la classe $c_1(\Theta) \in H^1(A,\Omega^1_A)$. Comme $\pi^*\Theta \equiv pr_1^*\Theta_E + pr_2^*\Theta_K$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(A,T_A) & \xrightarrow{c_1(\Theta)} & H^1(A,\mathcal{O}_A) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle H^1(\pi)} \\ H^0(E,T_E) \oplus H^0(K,T_K) & \xrightarrow{c_1(\Theta_E) \oplus c_1(\Theta_K)} & H^1(E,\mathcal{O}_E) \oplus H^1(K,\mathcal{O}_K) \end{array} ;$$

il s'agit donc de prouver que l'image de $\partial\tau(a)$ par l'isomorphisme canonique $H^1(\pi)$ appartient à $H^1(E,\mathcal{O}_E)$. Soit t une section de $H^0(A,D)$ de diviseur D , et soit $\bar{t}$ sa restriction à Θ ; soit d'autre part $\bar{t}'$ une section de $H^0(\Theta,C')$ de diviseur C'. Quitte à multiplier t par un scalaire, on a $\bar{t}.\bar{t}' = \tau(a)$. Le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_A(-D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_A(\Theta-D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Theta(C') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{t}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_A & \longrightarrow & \mathcal{O}_A(\Theta) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Theta(\Theta) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donne lieu à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(C')) & \longrightarrow & H^1(A,\mathcal{O}_A(-D)) \\ \downarrow \bar{t} & & \downarrow t \\ H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(A,\mathcal{O}_A) \end{array}$$

d'où l'on déduit que $\partial\tau(a)$ appartient à l'image de $H^1(A,\mathcal{O}_A(-D)) \xrightarrow{.t} H^1(A,\mathcal{O}_A)$. On a $D \equiv p^*\grave{a}$, et les homomorphismes p^* de $H^0(E,\grave{a})$ dans $H^0(A,D)$ et de $H^1(E,-\grave{a})$ dans $H^1(A,-D)$ sont bijectifs (1.5). Il existe donc une section $u \in H^0(E,\grave{a})$ telle que $p^*u = t$. L'application $.t$ ci-dessus s'identifie à l'application $(.2u,0)$ de $H^1(E,\mathcal{O}_E(-\grave{a}))$ dans $H^1(E,\mathcal{O}_E) \oplus H^1(K,\mathcal{O}_K)$, d'où notre assertion.

§2. Application au problème de Schottky.

THÉORÈME 2.1. *Soit* (A,Θ) *une variété abélienne principalement polarisée de dimension* g . *On suppose qu'il existe un élément non nul* a *de* A (*resp. de* $T_0(A)$) *tel que la variété* $\Theta \cap \Theta_a$ *ne soit pas intègre. On est alors dans l'un des cas suivants* :

(i) $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$;

(ii) A *contient une courbe elliptique* E *telle que* $(\Theta.E) = 2$, *et* a *appartient à* E (*resp. à* $T_0(E)$).

Par hypothèse on a une décomposition $\Theta.\Theta_a = C+C'$, où C et C' sont des diviseurs de Weil effectifs dans Θ . Supposons $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) < g-4$. Les anneaux locaux de la variété Θ sont alors réguliers en codimension ≤ 3 ; un théorème de Grothendieck ("conjecture de Samuel", [Gro 3, Exp. XI, Cor. 3.14]) entraîne qu'ils sont factoriels. Par suite C et C' sont des diviseurs de Cartier, et le théorème résulte de la prop. 1.6.

(2.2) *Remarques*. 1) On peut remplacer la conclusion (i) par l'assertion plus forte suivante : si $\Theta.\Theta_a = C+C'$, où C et C' sont des cycles effectifs non nuls, alors $\dim(C \cap C' \cap \mathrm{Sing}\ \Theta) \geq g-4$. En effet, posons $Z = C \cap C' \cap \mathrm{Sing}\ \Theta$. Dans $\Theta - Z$, C et C' sont des diviseurs de Cartier ; pour prouver qu'il en est de même dans Θ , il suffit de montrer que les anneaux locaux du schéma Θ aux points de Z sont parafactoriels [Gro 3, Exp. XI, n° 3]. Or si $\dim(Z) \leq g-5$, cela résulte du th. 3.13 (ii) de *loc. cit.*

En particulier si $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) = g-4$, on conclut que $C \cap C'$ contient une composante de $\mathrm{Sing}(\Theta)$.

2) On a vu (prop. 1.3) qu'inversement dans la situation (ii) du théorème, la variété $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible. On décrit en II.D les composantes de N_{g-4} connues à ce jour (cf. Introduction) : outre $\tilde{J}_g$, toutes ces composantes sauf une sont formées de variétés (A,Θ) contenant une sous-variété abélienne dont la polarisation induite est de degré 2. D'après la prop. (1.3), ces variétés admettent effectivement des intersections $\Theta \cap \Theta_a$ réductibles.

3) On prouve dans **A1** que pour une variété (A,Θ) assez générale satisfaisant à (ii), le diviseur Θ est lisse. On ne peut donc pas éliminer le cas (ii). Par contre, si (A,Θ) contient une sous-variété abélienne E dont la polarisation induite est de degré 2, avec $1 < \dim(E) < g-1$, on a $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$ (A1.1.5).

THÉORÈME 2.3. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g . On suppose qu'il existe trois éléments distincts non nuls a , x , y de A tels que $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$. On a alors $\dim \Theta_a \cap \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$.

L'hypothèse entraîne que $\Theta \cap \Theta_a$ n'est pas intègre ; il suffit donc d'éliminer, par la remarque 2.2.1, le cas (ii) du th. 2.1. Nous supposons désormais que nous sommes dans ce cas, et de plus que $\dim \Theta_a \cap \mathrm{Sing}(\Theta) \leq g-5$. Notant comme d'habitude $\pi : E \times K \longrightarrow A$ l'isogénie de degré 4, on a (1.4)

$$\Theta.\Theta_a = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon ,$$

où B est le lieu de base du système $|\Theta_K|$, Δ est un diviseur de $|\Theta_K|$ et $\varepsilon \in E$. Plus précisément, si $\pi^*\Theta$ admet pour équation $s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y) = 0$, B est défini par $t_1 = t_2 = 0$ et Δ par $s_1(\varepsilon)t_1 + s_2(\varepsilon)t_2 = 0$; de plus ε satisfait à $s_1(\varepsilon)s_2(\varepsilon-a) - s_2(\varepsilon)s_1(\varepsilon-a) = 0$.

Lemme 2.4. Les sous-variétés B et Δ de K sont irréductibles.

Nous allons montrer, plus précisément, que ces variétés sont lisses en codimension un. Notons Δ' le diviseur de la section $s_1'(\varepsilon)t_1 + s_2'(\varepsilon)t_2$ de $H^0(K,\Theta_K)$. Pour $y \in \Delta' \cap \mathrm{Sing}(\Delta)$, le critère jacobien montre que $\varepsilon+y$ est un point singulier de Θ . On vérifie que $\varepsilon+y$ est aussi dans Θ_a . On a donc :

$$\dim \mathrm{Sing}(\Delta) - 1 \leq \dim \Delta' \cap \mathrm{Sing}(\Delta) \leq \dim \Theta_a \cap \mathrm{Sing}(\Theta) \leq g-5 ,$$

d'où notre assertion. On procède de même pour B .

(2.5) Revenons à la démonstration du th. 2.3. Puisque Δ_ε est irréductible, on peut supposer $\Delta_\varepsilon \subset \Theta_x$. Si $x = \pi(e,k)$, ceci s'écrit

$$s_1(\varepsilon-e)t_1(y-k) + s_2(\varepsilon-e)t_2(y-k) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \Delta .$$

Observons que cette équation n'est pas triviale car s_1 et s_2 ne s'annulent pas simultanément. Elle entraîne que Δ_k est linéairement équivalent à Δ , donc que k appartient à $H(\Theta_K) = E \cap K$; ainsi on a $x \in E$. L'équation ci-dessus montre alors qu'on a

$$(s_1(\varepsilon-x) : s_2(\varepsilon-x)) = (s_1(\varepsilon) : s_2(\varepsilon)) \in \mathbb{P}^1 .$$

Mais le morphisme $s : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ défini par (s_1,s_2) est de degré 2, et on a déjà $s(\varepsilon-a) = s(\varepsilon)$ (1.4). On conclut qu'on a $x = 0$ ou $x = a$, ce qui contredit l'hypothèse.

Le th. 2.3 s'étend au cas où certains des points a , x , y sont infiniment proches de 0 . Pour l'énoncer commodément, introduisons la variété $\tilde{A}$ obtenue en éclatant 0 dans A : les points de $\tilde{A}$ sont les points $\neq 0$ de A et les directions tangentes à l'origine.

PROPOSITION 2.6. Soient a , x , y trois points distincts de $\tilde{A}$; la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_x) \cup (\Theta \cap \Theta_y)$ entraîne $\dim \Theta_a \cap \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$.

■ On arrive comme précédemment à $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$. Si x est un point de A et a une direction tangente à l'origine, on obtient comme ci-dessus $s(\varepsilon - x) = s(\varepsilon)$, alors que ε est un point de ramification de s , d'où une contradiction.

Supposons donc que x soit une direction tangente à l'origine, correspondant à un vecteur $e+k$, avec $e \in T_0(E)$ et $k \in T_0(K)$. Notons $\frac{\partial}{\partial e}$ et $\frac{\partial}{\partial k}$ les champs de vecteurs associés. La condition $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$ se traduit par

$$\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon)t_1(y) + \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)t_2(y) + s_1(\varepsilon)\frac{\partial t_1}{\partial k}(y) + s_2(\varepsilon)\frac{\partial t_2}{\partial k}(y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \Delta .$$

Posons $t = s_1(\varepsilon)t_1 + s_2(\varepsilon)t_2 \in H^0(K,\Theta_K)$. Soit t' une section de $H^0(K,\Theta_K)$ non proportionnelle à t , et soit $(\partial_1,\ldots,\partial_{g-1})$ une base de $H^0(K,T_K)$. L'argument de [Gr, p. 92-93] montre que les images dans $H^0(\Delta,\mathcal{O}_\Delta(\Delta))$ de $t',\partial_1 t,\ldots,\partial_{g-1}t$ forment une base de cet espace. On déduit alors de l'équation précédente qu'on a $k=0$ et $(\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon) : \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)) = (s_1(\varepsilon) : s_2(\varepsilon))$. Ainsi ε doit être un point de ramification de s , ce qui n'est possible que si a est la direction tangente à E en 0 ; on conclut qu'on a $a = x$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

(2.7) On peut prouver de même certaines variantes du th. 2.3. Soient par exemple a et v des éléments non nuls de A et $T_0(A)$ respectivement. Alors la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_a$ entraîne $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$. En effet, en supposant la conclusion non satisfaite, on obtient d'abord que A contient une courbe elliptique E , avec $(\Theta.E) = 2$ et $a \in E$, puis qu'on a $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_v$ ou $\Delta_{\varepsilon-a} \subset \Theta \cap \Theta_v$. Le raisonnement de (2.6) conduit alors à une contradiction.

(2.8) Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible. Soit $\psi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ le morphisme associé au système linéaire $|2\Theta|$; il induit un isomorphisme de $A/\{\pm 1\}$ sur une sous-variété W de $\mathbb{P}^N$, la variété de Kummer associée à (A,Θ). Nous appellerons trisécante de W toute droite ℓ de $\mathbb{P}^N$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) ℓ contient (au moins) trois points distincts de W ;

(ii) ℓ est tangente à W en un point lisse, et contient un autre point de W ;

(iii) ℓ est tangente à W en un point singulier (c'est-à-dire contenue dans le cône tangent de W en ce point), et contient un autre point de W ;

(iv) ℓ a un contact d'ordre 3 avec W en un point lisse.

THÉORÈME 2.9. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension g, dont la variété de Kummer admet une trisécante. On a alors $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$.

■ L'existence d'une trisécante entraîne des conditions du type (2.3) (cf. par exemple [We 7] ou [Mu 10]). Plus précisément :

(i) Si ℓ contient les points distincts $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi(c)$, on a

$$\Theta \cap \Theta_{b-a} \subset \Theta_{c-a} \cup \Theta_{-c-a} .$$

(ii) Si ℓ est tangente à W en $\psi(a)$ (avec $2a \neq 0$) et passe par $\psi(b)$, on a $\Theta \cap \Theta_{2a} \subset \Theta_{a+b} \cup \Theta_{a-b}$.

(iii) Si ℓ est tangente à W en $\psi(0)$ suivant le vecteur $v \in T_0(A)$, et passe par $\psi(b)$, on a $\Theta \cap \Theta_v \subset \Theta_b \cup \Theta_{-b}$.

(iv) Si ℓ a un contact d'ordre 3 en $\psi(a)$, suivant le vecteur $v \in T_a(A)$, on a $\Theta \cap \Theta_{2a} \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_{2a}$ (via l'identification $T_a(A) = T_0(A)$).

La conclusion résulte alors du th. 2.3, de la prop. 2.6 et de (2.7). ■

(2.10) Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, nous supposons dans cette section $k = \mathbb{C}$. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée ; nous supposons Θ symétrique. Soit $r : V \longrightarrow A$ le revêtement universel de A, et θ la fonction thêta sur V de diviseur $r^*\Theta$. Nous dirons que (A,Θ) satisfait à la propriété de Novikov s'il existe des champs de vecteurs constants x, y, z sur V, avec $x \neq 0$, et une constante $c \in \mathbb{C}$, tels que la fonction $u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta + c$ vérifie l'équation de Kadomtsev-Petviashvili

$$\text{(K-P)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx} + 12uu_x - 4u_t) + 3u_{yy} = 0 ;$$

on a posé comme d'habitude $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc...

Un calcul sans difficultés [Du] montre que lorsque (A,Θ) est irréductible, cette équation équivaut à la suivante, où d désigne une autre constante :

$$(K\text{-}P') \quad \theta_x 4\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3\theta_{xx}^2 + 4\theta_x\theta_t - 4\theta_{xt}\theta + 3\theta_{yy}\theta - 3\theta_y^2 + 12c(\theta_{xx}\theta - \theta_x^2) + d\theta^2 = 0 .$$

Novikov a conjecturé que les jacobiennes sont les seules variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles satisfaisant à la propriété de Novikov. Cette conjecture vient d'être démontrée par T. Shiota [Sh]. Nous obtenons à l'aide du th. 2.1 un résultat plus faible :

THÉORÈME 2.11. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à la propriété de Novikov. On a alors $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$.

■ Sur la sous-variété $\Theta \cap \Theta_x$ de A , l'équation (K-P') se réduit à

$$0 = \theta_{xx}^2 - \theta_y^2 = (\theta_{xx}+\theta_y)(\theta_{xx}-\theta_y) .$$

Posons $X = \Theta \cap \Theta_x$. Les fonctions $\theta_{xx} \pm \theta_y$ sur V définissent deux sections de $H^0(X,\mathcal{O}_X(\Theta))$ dont le produit est nul. Nous montrons ci-dessous (lemme 2.12) que ces sections ne sont pas identiquement nulles ; on en déduit que X est réunion de deux sous-variétés échangées par l'involution $a \mapsto -a$. En particulier X n'est pas intègre ; si $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) < g-4$, on est donc dans le cas (ii) du th. 2.1. Or dans ce cas il résulte de (1.4) et du lemme 2.4 que X a deux composantes irréductibles, qui sont stables par l'involution $a \mapsto -a$, ce qui contredit la description précédente.

Le théorème résultera donc du lemme suivant :

Lemme 2.12. La section $\theta_{xx}+\theta_y$ de $H^0(X,\mathcal{O}_X(\Theta))$ n'est pas identiquement nulle.

■ La suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_\Theta \xrightarrow{\theta_x} \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \to \mathcal{O}_X(\Theta) \to 0$$

fournit en cohomologie une suite exacte

$$H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \to H^0(X,\mathcal{O}_X(\Theta)) \xrightarrow{\partial} H^1(\Theta,\mathcal{O}_\Theta) .$$

Puisque θ_y définit une section de $H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta))$, on a $\partial(\theta_y) = 0$. Nous allons prouver que $\partial(\theta_{xx})$ n'est pas nul. Nous noterons D la dérivation par rapport à x .

Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement de A par des ouverts au-dessus desquels $\mathcal{O}_A(\Theta)$ est trivial, et soient $(\xi_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition associées. La section θ

de $H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta))$ correspond à des fonctions θ_α sur U_α satisfaisant à $\theta_\alpha = \xi_{\alpha\beta}\,\theta_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Sur cet ouvert on a donc

$$D\theta_\alpha = D\xi_{\alpha\beta}.\theta_\beta + \xi_{\alpha\beta}.D\theta_\beta$$

$$D^2\theta_\alpha = D^2\xi_{\alpha\beta}.\theta_\beta + 2D\xi_{\alpha\beta}.D\theta_\beta + \xi_{\alpha\beta}.D^2\theta_\beta\ ,$$

et la section θ_{xx} de $H^0(X,\mathcal{O}_X(\Theta))$ correspond aux fonctions $D^2\theta_\alpha$. Par construction l'image de cette section dans $H^1(\Theta,\mathcal{O}_\Theta)$ est la classe du cocycle

$$(\alpha,\beta) \longmapsto c_{\alpha\beta} = (D^2\theta_\alpha - \xi_{\alpha\beta}D^2\theta_\beta)/D\theta_\alpha\ ;$$

mais les formules ci-dessus entraînent dans $\Theta \cap U_\alpha \cap U_\beta$ l'égalité

$$c_{\alpha\beta} = 2D\xi_{\alpha\beta}/\xi_{\alpha\beta} = 2\left\langle D, \frac{d\xi_{\alpha\beta}}{\xi_{\alpha\beta}}\right\rangle .$$

Ainsi on a $\partial(\theta_{xx}) = 4\pi i\, r(D.c_1(\Theta))$, où r désigne l'homomorphisme de restriction $H^1(A,\mathcal{O}_A) \longrightarrow H^1(\Theta,\mathcal{O}_\Theta)$. Celui-ci est injectif pour $g \geq 2$, et le cup-produit $H^0(A,T_A) \xrightarrow{.c_1(\Theta)} H^1(A,\mathcal{O}_A)$ est bijectif, d'où le lemme. ■

■

Nous terminerons en appliquant les résultats qui précèdent au problème de Schottky (cf. Introduction). Nous revenons au cas d'un corps algébriquement clos quelconque k, mais nous supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Si A est une variété abélienne, nous noterons comme en (2.6) $\tilde{A}$ l'ensemble des points $\neq 0$ de A et des directions tangentes à A en 0.

THÉORÈME 2.13. *Dans l'espace des modules A_g des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, la variété J_g des jacobiennes est une composante irréductible de l'ensemble des variétés (A,Θ) irréductibles possédant l'une des propriétés suivantes :*

(i) *Il existe $a \in \tilde{A}$ tel que la variété $\Theta \cap \Theta_a$ ne soit pas intègre.*

(ii) *Il existe trois éléments distincts a, x, y de $\tilde{A}$ tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_x) \cup (\Theta \cap \Theta_y)$.*

(iii) *La variété de Kummer de (A,Θ) admet une trisécante.*

(iv) *(A,Θ) satisfait à la propriété de Novikov (lorsque $k = \mathbb{C}$).*

■ Il suffit de traiter le cas (i), puisque chacune des autres conditions entraîne (i). Soit N_{g-4} (resp. E_g) la sous-variété de A_g formée des (A,Θ) irréductibles telles que $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$ (resp. contenant une courbe elliptique E avec

$(\Theta.E) = 2)$. Le th. 2.1 implique que les (A,Θ) vérifiant (i) sont dans N_{g-4} ou E_g. On sait par [An-M] (et [We 5] en caractéristique positive) que J_g est une composante irréductible de N_{g-4}. Comme J_g n'est pas contenue dans E_g (1.2), le théorème en résulte. ∎

La condition (i) ne semble pas beaucoup plus forte que la condition d'Andreotti-Mayer (cf. remarque (2.2.2)). Par contre nous ne connaissons aucun exemple de variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à (ii) ou (iii) qui ne soit pas une jacobienne ; il est tentant de conjecturer que chacune de ces conditions caractérise les jacobiennes.

II.D. Variétés de Prym éléments de N^g_{g-4} pour $g \geq 5$ (1).

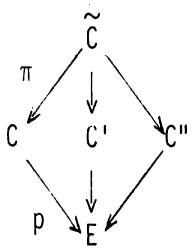
Comme l'indique son titre, cette section est consacrée à la description des variétés de Prym (P,Ξ) de dimension $g \geq 5$ satisfaisant à $\dim \operatorname{Sing} \Xi \geq g-4$.

Elle est basée sur des résultats de Beauville, qui, complétant des résultats de Mumford ([Mu 2]), donne dans [Be 1] la liste des revêtements admissibles dont la variété de Prym est dans N^g_{g-4} et qui satisfont de plus à deux conditions : la condition (*) de la page 157 de loc. cit. et la stabilité de la courbe C (cf. [De-M] page 76). Il ressort de 4.11.3 et 5.4 de [Be 1] que les variétés de Prym associées aux revêtements de cette liste recouvrent $(N^g_{g-4} - \bar{J}_g) \cap P^{irr}_g$, où P^{irr}_g désigne l'ensemble des variétés de Prym irréductibles.

Cette liste se compose d'un certain nombre de familles, dont nous allons maintenant décrire les éléments génériques.

1. La courbe C est lisse superelliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de degré 2, $p : C \longrightarrow E$ de C sur une courbe elliptique. Le groupe de Galois de $p\pi : \tilde{C} \longrightarrow E$ est le groupe diédral D_4 . La famille S_{g+1} obtenue est de dimension $2g$.

2. La courbe C est superelliptique, mais le groupe de Galois de $p\pi : \tilde{C} \longrightarrow E$ est $(\mathbb{Z}/2)^2$. On a un diagramme commutatif :



La famille $S_{g+1,t}$ est la famille des revêtements pour lesquels $g-t+1 = g(C'') \geq g(C') = t+1$. Elle est de dimension $2g$ et l'entier t prend les valeurs $0,1,\ldots, g/2$. La famille $\Pr(S_{g+1,t})$ de variétés de Prym correspondante sera notée $E^2_{t,g-t}$ (on notera aussi $E^2_g = \Pr(S_{g+1,0})$).

---

(1) Cette partie sera publiée, avec quelques modifications et avec l'Appendice 1, sous le titre "Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3" dans Duke Mathematical Journal (référence [D2]).

3. La courbe C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-1$ en identifiant deux paires de points. La famille $H_{g+1,0}$ obtenue est de dimension $2g+1$

4. La courbe C est réunion d'une courbe rationnelle lisse et d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-2$ se coupant en 4 points. La famille $H_{g+1,1}$ obtenue est de dimension $2g$.

5. La courbe C est réunion d'une courbe lisse de genre $t-1 \geq 1$ et d'une courbe lisse de genre $g-t-1 \geq t-1$ se coupant en 4 points. Les familles obtenues, pour $2 \leq t \leq g/2$, sont notées $H_{g+1,t}$. Elles sont de dimension $3g-4$.

6. Dans le cas où $g=5$, C est réunion d'une courbe rationnelle lisse coupant une courbe lisse de genre 3 en les 4 points d'un diviseur canonique. La famille T_6 obtenue est de dimension 9.

7. Dans tous les autres cas cités par Beauville, la variété de Prym obtenue est une jacobienne. (Le seul cas restant, à savoir le cas e) des revêtements "pairs" des quintiques planes est traité dans [Be 2], [Mas], [Tj 1], [Tj 2]).

Remarque. En utilisant des arguments du type de ceux de [H-M] page 29, il est facile de voir que les adhérences des familles ci-dessus dans l'espace des modules des revêtements admissibles contiennent les familles de la liste de Beauville.

D'autre part, toutes ces familles sont irréductibles. Faisons d'abord la remarque suivante. Soit $C \longrightarrow S$ une famille irréductible de courbes lisses. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $C_S^d = C_S \times \ldots \times_S C$ (d fois) et $J^d = \underline{\mathrm{Pic}}^d(C/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d. On a un morphisme canonique $C_S^d \longrightarrow J^d$. Soit $m : J^d \longrightarrow J^{2d}$ le morphisme induit par l'élévation au carré. Alors le S-schéma $J^d \times_{J^{2d}} C_S^{2d}$ est irréductible puisque la fibre de tout point de S est irréductible de dimension $2d$ (Ex. G.8 page 202 de [A-C-G-H 1]). On en déduit aussitôt l'irréductibilité de $S_{g+1,0}$ (irréductibilité de la famille des courbes elliptiques avec structure de niveau 2 et remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d=g$), celle de $S_{g+1,t}$, $0 < t \leq g/2$ (remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d=t,g-t$), celle de $H_{g+1,t}$, $t=0,1$ (courbes hyperelliptiques de genre $g-1$, $g-2$ et $d=2$) et celle de $H_{g+1,t}$, $2 \leq t \leq g/2$ (courbes de genre t et $g-t$ avec $d=2$).

L'irréductiblité de T_6 se montre de façon analogue, celle de S_{g+1} découle de l'existence d'une application dominante $H_{g+1,0} \dashrightarrow S_{g+1}$ fournie par la construction tétragonale (3.2.4).

Le théorème ci-dessous rassemble les résultats de cette section et mentionne aussi les paragraphes où l'on peut trouver les démonstration.

Théorème. Pour $g \geq 5$, on a :

. $\overline{E^2_g} = \Pr(\overline{S_{g+1,0}}) = \Pr(\overline{H_{g+1,0}}) = \Pr(\overline{S_{g+1}})$ (cf. 3.2.3, 3.2.4) est de dimension $2g$ dans A_g (cf. 1.4.2). C'est une composante irréductible de N^g_{g-4} (cf. 1.4.5) qui contient les jacobiennes hyperelliptiques (cf. 3.1.2).

. $\overline{E^2_{1,g-1}} = \Pr(\overline{S_{g+1,1}}) = \Pr(\overline{H_{g+1,1}})$ (cf. 3.2.3) est de dimension $2g-1$ dans A_g (cf. 1.4.2). C'est une composante irréductible de N^g_{g-4} (cf. 1.6.1, 4.2) qui contient les jacobiennes superelliptiques (cf. 1.5.3, 3.1.2). On a aussi $\Pr(T_6) \subset E_{1,4}$ (cf. 2.2).

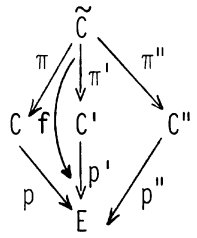
. Pour $2 \leq t \leq g/2$, on a $E^2_{t,g-t} \subset \Pr(\overline{H_{g+1,t}}) = P^2_{t,g-t} \subset A^2_{t,g-t}$ (cf. 3.2.3, 2.1 et A1.1.3, A2.3.5 pour les définitions de $A^2_{t,g-t}$ et de $P^2_{t,g-t}$).

En tenant compte des résultats de l'appendice 1 (en particulier A1.4.5), on a ainsi mis en évidence $2+[g/2]$ composantes irréductibles distinctes de N^g_{g-4} pour $g \geq 5$, à savoir $\overline{J_g}$, $\overline{E^2_g}$, $\overline{E^2_{1,g-1}}$ et les $A^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq g/2$. Chacune de ces composantes, sauf $\overline{J_g}$, est contenue dans le diviseur θ_{null} de A_g , constitué des variétés abéliennes principalement polarisées (A,Θ) avec Θ symétrique et $A[2] \cap \mathrm{Sing}\ \Theta \neq \emptyset$. On en déduit immédiatement (cf. 4.2) que N^5_1 a 5 composantes irréductibles, à savoir $\overline{J_5}$; $A_{1,4}$; $\overline{E^2_5}$; $\overline{E^2_{1,4}}$ et $A^2_{2,3}$, de dimensions respectives 12, 11, 10, 9 et 9 ($A_{1,4}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit d'une courbe elliptique par une variété abélienne de dimension 4).

Signalons que Donagi a annoncé dans [Do] des résultats sur le même sujet, qui diffèrent des nôtres : il fait erreur sur la dimension de E^2_5 (9 au lieu de 10) et oublie $A_{1,4}$. Il semble qu'il n'ait pas vu l'inclusion $\Pr(T_6) \subset \overline{E^2_{1,4}}$.

1. Etude des familles $S_{g+1,t}$.

1.1. Notations. On est dans la situation suivante : la courbe C est lisse de genre $g+1 \geq 6$. Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme de degré 2 , $p : C \longrightarrow E$ auquel on associe sa ramification $\Delta = P_1+\ldots+P_{2g}$ sur E , $\delta \in \mathrm{Pic}^g E$ tel que $\Delta \equiv 2\delta$, et une involution τ de C (I.2.6). Il existe un diagramme commutatif :



On note :

$$g(C") = g-t+1 \geq g(C') = t+1 .$$

Au morphisme p' sont associés sa ramification $\Delta' = P_1+\ldots+P_{2t}$, $\delta' \in \mathrm{Pic}^t E$ tel que $\Delta' \equiv 2\delta'$, et une involution τ' de C'.

A $p"$ sont associés $\Delta" = \Delta-\Delta'$, $\delta" = \delta-\delta'$ et une involution $\tau"$ de $C"$.

Soient $Q_1,\ldots,Q_{2g}$ les points de ramification de p sur C . Le morphisme étale π est associé à l'élément suivant d'ordre 2 dans $\mathrm{Pic}^0 C$:

$$\eta \equiv Q_1+\ldots+Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1}+\ldots+Q_{2g} - p^*\delta" .$$

On note σ l'involution sans point fixe de $\tilde{C}$ induite par π . Le morphisme π' (resp. $\pi"$) est ramifié sur $p'^*(\Delta")$ (resp. $p"^*(\Delta')$) et induit une involution σ' (resp. $\sigma" = \sigma\sigma'$) sur $\tilde{C}$.

1.2. Etude du lieu singulier du diviseur thêta.

La variété de Prym (P,Ξ) associée à π peut être définie par ([Mu 2] Proposition p. 242) :

$$P = \{L \in \mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C} \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C \ , \ h^0(L) \text{ pair}\}$$

$$\Xi = \{L \in P \mid h^0(L) \geq 2\} .$$

Proposition 1.2.1. On a :

$$\Xi = \{\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid L' \in \mathrm{Pic}^t C' \ , \ L'' \in \mathrm{Pic}^{g-t} C'' \ , \ h^0(L') \geq 1 \ , \ h^0(L'') \geq 1 \ ,$$

$$\mathrm{Nm}_{p'} L' \otimes \mathrm{Nm}_{p''} L'' = \mathcal{O}(\delta)\} \ .$$

■ Soit $L \in \Xi$. On considère $\pi_* : |L| \longrightarrow |\omega_C|$. Comme $\dim |L| \geq 1$, son image rencontre l'hyperplan $p^*|\delta|$ de $|\omega_C|$, et :

$$\exists D \in |L| \qquad \pi_* D = p^* M \quad \text{avec} \quad M \in |\delta| \ .$$

On peut alors écrire $D = \pi'^* D' + \pi''^* D''$ avec D' et D'' effectifs. L'espace Ξ est donc recouvert par les fermés :

$$Z_a = \{\pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'') \mid D' \ (\text{resp. } D'') \text{ diviseur effectif de degré } t+a$$
$$(\text{resp. } g-t-a) \text{ vérifiant } p'_* D' + p''_* D'' \equiv \delta\} \ ,$$

pour $-t \leq a \leq g-t$.

Or, pour $L \in Z_{g-t}$, on a :

$$h^0(L) = h^0(\pi'^*\mathcal{O}(D')) = h^0(D') + h^0(D' - p'^*\delta'')$$

$$= h^0(D') + h^0(K_{C'} - D' + p'^*\delta'') + t - g$$

$$= h^0(D') + h^0(p'^*\delta - D') + t - g$$

$$= h^0(D') + h^0(\tau'^* D') + t - g = 2h^0(D') + t - g \ .$$

On déduit de [Mu 3] page 187 que :

$$Z_a \subset P \iff a \text{ est pair.}$$

On remarque alors que pour $|a| \geq 2$, on a par Riemann Roch $h^0(D') \geq 2$ ou $h^0(D'') \geq 2$. Or on a :

$$\dim Z_a \leq \dim |\delta| - \min_{L \in Z_a} (\dim |D'| + \dim |D''|) \ ,$$

donc $\dim Z_a < g-1 = \dim \Xi$ pour $|a| \geq 2$.

Le diviseur Ξ est donc égal à Z_0 . ■

Le lieu singulier du diviseur Ξ est réunion des deux ensembles suivants ([Mu 2], §6) :

$$\{L \in \Xi \mid h^0(L) \geq 4\}$$

et $\{L \in \Xi \mid L = \pi^*M \otimes N$ avec $M \in \mathrm{Pic}\, C$, $N \in \mathrm{Pic}\, \widetilde{C}$, $h^0(M) \geq 2$, $h^0(N) \geq 1\}$.

Les points du premier ensemble seront dits singularités stables (elles existent sur toute variété de Prym de dimension au moins 6 par 1.2.5), ceux du second, singularités exceptionnelles (elles n'existent pas sur une variété de Prym générale).

Une singularité peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnelle.

Proposition 1.2.2. Soit (P,Ξ) la variété de Prym associée à un revêtement élément de $S_{g+1,t}$. Lorsque $g \geq 5$, on a :

. Le lieu singulier de Ξ est réunion de V , W_{-2} , W_0 , W_2 , avec :

$$V = \{\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \mid \mathrm{Nm}_{p'}L' = \mathcal{O}(\delta')\ ,\ \mathrm{Nm}_{p''}L'' = \mathcal{O}(\delta'')\ ,\ h^0(L') \geq 2\ ,\ h^0(L'') \geq 2\}$$

$$W_a = \{\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \otimes f^*M \mid L' \in \mathrm{Pic}^{t-2+a}C'\ ,\ L'' \in \mathrm{Pic}^{g-t-2-a}C''\ ,\ M \in \mathrm{Pic}^2 E\ ,$$
$$h^0(L') \geq 1\ ,\ h^0(L'') \geq 1\ ,\ \mathrm{Nm}_{p'}L' \otimes \mathrm{Nm}_{p''}L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta)\}\ ,$$

et éventuellement d'un nombre fini de points d'ordre 2 de P .

. L'ensemble V est toujours de dimension au plus $g-5$. Pour un élément générique de $S_{g+1,t}$, il est vide pour $t \leq 2$, non vide de dimension pure $g-6$ et non inclus dans W_a pour $t \geq 3$; ses composantes irréductibles sont au nombre de 4 pour $t=3$, $g=6$; de 2 pour $t=3$, $g>6$; de 1 pour $t>3$.

. L'ensemble W_2 est vide pour $(t,g) = (2,5)$ ou $(3,6)$, irréductible de dimension $g-4$ sinon.

. L'ensemble W_0 est vide pour $t \leq 1$, irréductible de dimension $g-4$ pour $t \geq 2$.

. L'ensemble W_{-2} est vide pour $t \leq 3$, irréductible de dimension $g-4$ pour $t \geq 4$.

Remarque 1.2.3. Avec les notations 1.1, si on fait l'hypothèse supplémentaire, satisfaite génériquement sur $S_{g+1,t}$, que Δ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$, le lieu singulier de Ξ est égal à $V \cup W_{-2} \cup W_0 \cup W_2$ (cf. 1.2.9).

On déduit de la proposition les deux résultats suivants :

Corollaire 1.2.4. Pour $g \geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $Pr(S_{g+1,t})$ est irréductible dans les seuls cas suivants :

i) $t = 0$ ou 1 . On a $\mathrm{Sing}\ \Xi = W_2$.

ii) $t = 2$ et $g = 5$. On a $\mathrm{Sing}\ \Xi = W_0$.

Corollaire 1.2.5. Pour $g \geq 6$ et toute variété de Prym (P,Ξ) de dimension g , on a $\dim \mathrm{Sing}\ \Xi \geq g-6$.

■ Il ressort de la proposition que pour $g \geq 6$ et (P,Ξ) élément de $Pr(S_{g+1,3})$, $\mathrm{Sing}\ \Xi$ a une composante irréductible de dimension $g-6$ correspondant à des singularités stables, à savoir V .

Or il est connu (IV.A.4.5) que pour toute famille de revêtements doubles $\tilde{C} \longrightarrow C \longrightarrow T$, à laquelle correspond une famille de variétés de Prym $P \longrightarrow T$, l'ensemble :

$$\bigcup_{t \in T} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\}$$

est soit vide, soit de codimension au plus 6 dans P . Or, si on prend une telle famille contenant notre exemple, cet ensemble est de codimension 6 en un point d'une fibre, donc se projette surjectivement sur T . ■

Remarque 1.2.6. Il ressort de [We 1] et de 1.2.5 que pour une variété de Prym générique (P,Ξ) de dimension $g \geq 6$, $\mathrm{Sing}\ \Xi$ est de dimension pure $g-6$ et que ses composantes connexes sont ses composantes irréductibles. Or une jacobienne générique est simple, donc aussi une variété de Prym générique. On déduit de [Ba] que, pour $g \geq 12$, $\mathrm{Sing}\ \Xi$ est génériquement irréductible de dimension $g-6$.

■ Démonstration de la proposition 1.2.2.

On commence par la définition suivante. Soit $p : C \longrightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses, D un diviseur effectif sur C . On dira que D est p-simple s'il n'existe pas de diviseur effectif E sur B tel que $D-p^*E$ soit effectif. On a alors ([Mu 2] page 338) :

Proposition 1.2.7. Soient $p : C \longrightarrow B$ un revêtement double de courbes lisses et $\mathcal{O}(-\delta) = \Lambda^2 p_* \mathcal{O}_C$; L un faisceau inversible sur B , D un diviseur effectif p-simple sur C . On pose $M = p^*L \otimes \mathcal{O}(D)$. On a alors une suite exacte de $\mathcal{O}_B$-modules :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow p_*M \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_B(p_*D-\delta) \longrightarrow 0 .$$

Corollaire 1.2.8. Dans notre situation, on considère $L = \pi'^*\mathcal{O}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}(D'')$ où D' et D'' sont effectifs, D' est p'-simple et $\mathrm{Nm}_\pi L = \omega_C$. Alors :

$$h^0(\tilde{C},L) \leq 2h^0(C'',D'') + g - t - \deg D'' .$$

■ Le diviseur π'^*D' est π''-simple donc la proposition 1.2.7 donne :

$$h^0(L) \leq h^0(D'') + h^0(D''+\pi''_*\pi'^*D'-p''^*\delta') .$$

Or on a $p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta$, donc :

$$D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta' \equiv D'' + \tau''^*D'' + p''^*p'_*D' - \tau''^*D'' - p''^*\delta'$$

$$\equiv p''^*(\delta-\delta') - \tau''^*D'' \equiv \tau''^*(K_{C''}-D'') .$$

On en déduit par Riemann-Roch l'inégalité cherchée. ■

Soit L un élément de Ξ correspondant à une singularité de Ξ. Par 1.2.1, on peut écrire :

$$L = \pi'^*[\mathcal{O}(D') \otimes p'^*\mathcal{O}(F')] \otimes \pi''^*[\mathcal{O}(D'') \otimes p''^*\mathcal{O}(F'')]$$

avec D', D'', F', F'' effectifs, D' p'-simple, D'' p''-simple et $\deg D' + 2\deg F' = t = g(C') - 1$, $\deg D'' + 2\deg F'' = g-t = g(C'') - 1$.

Supposons d'abord cette singularité exceptionnelle non stable. Tout élément de $|L|$ s'écrit alors $\pi^*D + G$, avec $h^0(D) \geq 2$ et G π-simple. On applique 1.2.7 à D et p. On est dans l'un des cas suivants :

i) Il existe F de degré 2 sur E tel que $p^*F \leq D$. On a alors $F \leq F'+F''$ et on est dans W_{-2}, W_0, ou W_2.

ii) D est p-simple, $G = 0$ et $p_*D \equiv \delta$. On a alors $\pi^*D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$, ce qui n'est possible que si $D' \leq \mathrm{Ram}\, p'$ et $D'' \leq \mathrm{Ram}\, p''$. On en déduit :

$$|\delta| \ni p_*D = p'_*D' + p''_*D'' \leq \Delta'+\Delta'' = \Delta .$$

(1.2.9) En particulier, le diviseur Δ est somme de deux éléments de $|\delta|$, ce qui n'est pas le cas pour un élément générique de $S_{g+1,t}$. On a aussi $L = \pi^*\mathcal{O}(D)$, soit $L \simeq \sigma^*L$ et $L^2 \simeq \omega_{\tilde{C}}$. C'est donc un point d'ordre 2 de P.

On suppose maintenant $h^0(L) \geq 4$. Si $\deg F' \geq 1$, le corollaire 1.2.8 donne :

$$4 \leq h^0(L) \leq 2h^0(D''+p''^*F''+p''^*F') - 2\deg F' ,$$

soit $h^0(D''+p''^*F''+p''^*F') \geq 3$.

On applique 1.2.7 :

$$\begin{aligned} 3 &\leq h^0(F'+F'') + h^0(p''_*D''+F'+F''-\delta'') \\ &\leq \deg(F'+F'') + \max(\deg(F'-F''),0) \\ &\leq 2\max(\deg F',\deg F'') , \end{aligned}$$

de sorte que soit F', soit F'' est de degré au moins deux, et qu'on est soit dans W_2 , soit dans W_{-2} .

Le cas $\deg F'' \geq 1$ se traite de façon identique.

Si $\deg F' = \deg F'' = 0$, le corollaire 1.2.8 donne $h^0(D') \geq 2$ et $h^0(D'') \geq 2$. Par ([We 2], 3.4), on est dans V .

Ceci termine la démonstration de la première partie de la proposition.

L'ensemble V est évidemment vide pour $t = \deg L' \leq 1$. Pour $t = 2$, il est vide si C' n'est pas hyperelliptique, ce qui est le cas génériquement. Les assertions sur le nombre de composantes irréductibles découlent de [We 2], Proposition 3.6 pour $t \geq 5$, de [Te] pour $t = 4$ et, pour $t = 3$, du fait que les deux g^1_3 de C' (supposée non-hyperelliptique), image l'un de l'autre par τ'^*, satisfont à $\mathrm{Nm}_{p'}\, g^1_3 = \mathcal{O}(\delta')$ (utiliser 1.2.7). Enfin, l'ensemble V n'est contenu dans aucun W_a ; en effet, un élément générique s'écrit :

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \quad , \quad \mathrm{Nm}\, L' = \mathcal{O}(\delta') \quad , \quad \mathrm{Nm}\, L'' = \mathcal{O}(\delta''), \text{ avec } h^0(L') = h^0(L'') = 2 .$$

De plus, tous les diviseurs de $|L'|$ (resp. $|L''|$) sont p'-simples (resp. p''-simples). Un tel fibré ne peut être dans un W_a , $a \in \mathbb{Z}$.

Enfin, les assertions d'irréductibilité et de dimension sur les W_a sont conséquences de :

Lemme 1.2.10. *Soient $p : C \rightarrow E$ une courbe superelliptique et $G \in \mathrm{Pic}^d E$ fixé. Alors pour $5 \leq d \leq g(C)+1$, l'ensemble :*

$$\{p^*M \otimes \mathcal{O}_C(D) \mid M \in \mathrm{Pic}^2 E \, , \, D \in C^{(d-4)} \, , \, \mathcal{O}(p_*D) \otimes M^2 \simeq G\}$$

est irréductible de dimension $d-4$.

■ On pose :

$$Z(G) = \{(x_1,\dots,x_{d-4},M) \in C^{d-4} \times \mathrm{Pic}^2 E \mid \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{d-4} px_i) \otimes M^{\otimes 2} = G\} .$$

On remarque tout d'abord que $Z(G)$ est irréductible de dimension $d-4$ pour $d \geq 5$: c'est évident pour $d=5$ et la première projection $pr_1 : Z(G) \longrightarrow C$ a pour fibre $Z(G \otimes \mathcal{O}(-px_1))$. Pour un élément générique $(x_1,\dots,x_{d-4},M)$ de $Z(G)$, le diviseur $D = \sum x_i$ est p-simple (cf. 1.2.7) et on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(E,M) \longrightarrow H^0(C,\mathcal{O}(D) \otimes p^*M) \longrightarrow H^0(E,\mathcal{O}(p_*D-\delta) \otimes M) \longrightarrow 0 .$$

Ce dernier espace est nul lorsque :

$$0 \geq \deg[\mathcal{O}(p_*D-\delta) \otimes M] = d-1-g(C)$$

sauf si :
$$\mathcal{O}(p_*D-\delta) \otimes M = \mathcal{O}_E$$

$$\Longleftrightarrow M = G \otimes \mathcal{O}(-\delta) .$$

Sous l'hypothèse $d \leq g(C)+1$, on en déduit que pour un élément générique $(x_1,\dots,x_{d-4},M)$ de $Z(G)$, $D = \sum x_i$ est fixe dans $|\mathcal{O}(D) \otimes p^*M|$, donc que l'application :

$$Z(G) \longrightarrow \mathrm{Pic}^d C$$

$$(x_1,\dots,x_{d-4},M) \longmapsto \mathcal{O}_C(\sum_{i=1}^{d-4} x_i) \otimes p^*M$$

est génériquement finie. Son image est donc irréductible de dimension $d-4$. ■

■

1.3. Les quadriques associées aux points doubles du diviseur thêta.

On est toujours dans la situation 1.1, mais on s'intéresse ici aux seuls cas $t=0$ et $t=1$.

Commençons par quelques rappels sur les singularités stables de multiplicité 2 de Ξ ([Mu 2], [Tj 3]). Une telle singularité correspond à un faisceau inversible L sur $\widetilde{C}$ tel que $h^0(L)=4$ et $\mathrm{Nm}\, L = \omega_C$.

On a une application :

$$\phi : \Lambda^2 H^0(L) \longrightarrow H^0(C,K_C+\eta)$$

$$s \wedge t \longmapsto s\sigma t - t\sigma s .$$

Si $\{s_1,\dots,s_4\}$ est une base de $H^0(L)$, on pose :

$$Q_L = \phi(s_1\wedge s_2).\phi(s_3\wedge s_4) - \phi(s_1\wedge s_3).\phi(s_2\wedge s_4) + \phi(s_1\wedge s_4).\phi(s_2\wedge s_3) \in S^2H^0(C,K_C+\eta) .$$

Lorsque Q_L est non nul, c'est une équation du cône tangent à Ξ en L dans P (on rappelle que $T_0P \simeq H^0(C,K_C+\eta)^\vee$). De plus, la quadrique d'équation Q_L dans $\mathbb{P}H^0(C,K_C+\eta)^\vee$ contient l'image X de C par le morphisme associé au système linéaire $|K_C+\eta|$ (appelée courbe semi-canonique).

On déduit facilement de 1.4.1 par exemple que :

. Pour $t=0$, X est la courbe elliptique $\phi_{|\delta''|}(E)$.

. Pour $t=1$, X est tracée sur le cône Σ de sommet un point S et de base $\phi_{|\delta''|}(E)$. Elle a un point double en S et toute quadrique contenant X contient Σ .

Proposition 1.3.1. Soit (P,Ξ) un élément générique de $E^2_{t,g-t}$, avec $g\geq 5$. Alors :

1) Si $t=0$, l'intersection des quadriques correspondant aux singularités quadratiques de Ξ est la courbe semi-canonique X . L'espace vectoriel qu'elles engendrent dans $S^2T_0^\vee P$ est de codimension $2g$.

2) Si $t=1$, l'intersection des quadriques est le cône Σ . L'espace vectoriel engendré est de codimension $3g-2$.

■ Par 1.2.4 i), il nous suffit de calculer les quadriques Q_L pour les éléments L de W_2 , qui s'écrivent :

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L''$$

avec $L' = \mathcal{O}(D') \otimes p'^*M$, $D'\geq 0$, $\deg L' = t+4$, $\deg M = 2$

$L'' = \mathcal{O}(D'')$, $D''\geq 0$.

Si D' est p'-simple, 1.2.7 donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(E,M) \xrightarrow{\alpha} H^0(C',L') \xrightarrow{\beta} H^0(E,M\otimes\mathcal{O}(p'_*D'-\delta')) \longrightarrow 0 .$$

Les morphismes α et β peuvent être définis comme suit :

$\forall v\in H^0(E,M)$ $\alpha(v) = p'^*(v)u'$ où $\mathrm{div}(u') = D'$

$\forall u\in H^0(C',L')$ $u\tau'(u')-\tau'(u)u' = t'p'^*(\beta(u))$ où $\mathrm{div}(t')$ est la ramification de p' sur C'.

On prend une base $\{v_1,v_2\}$ de $H^0(E,M)$ et une base $\{v_3,v_4\}$ de $H^0(E,M\otimes\mathcal{O}(p'_*D'-\delta'))$. Il existe alors une base $\{u'_1,\dots,u'_4\}$ de $H^0(C',L')$ telle que :

$$u'_1 = \alpha(v_1)\ ,\ u'_2 = \alpha(v_2)\ ,\ \beta(u'_3) = v_3\ ,\ \beta(u'_4) = v_4\ .$$

Une base de $H^0(L)$ est alors $\{s_j = \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\}_{1\leq j\leq 4}$, où $div(u'') = D''$. On a :

$$\begin{aligned}\pi^*(\phi(s_j\wedge s_k)) &= \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\pi'^*(\tau'^*u'_k)\pi''^*(\tau''^*u'')\\ &\quad -\pi'^*(\tau'^*u'_j)\pi''^*(\tau''^*u'')\pi'^*(u'_k)\pi''^*(u'')\\ &= f^*(v'')\pi'^*(\phi(u'_j\wedge u'_k)) \quad \text{où} \quad div(v'') = p''_*D''\ .\end{aligned}$$

Donc $\phi(s_1\wedge s_2) = 0$.

$$\begin{aligned}\pi^*(\phi(s_1\wedge s_3)) &= f^*(v'').\pi'^*[u'.p'^*(v_1)\tau'^*u'_3-\tau'^*u'.p'^*(v_1).u'_3]\\ &= f^*(v''v_1v_3).\pi'^*(t')\ .\end{aligned}$$

Dans l'identification 1.4.1, cela s'écrit :

$$\phi(s_1\wedge s_3) = p^*(v''v_1v_3).s'\ .$$

On a donc :

$$Q_L = -(v_1v_3v'')s'.(v_2v_4v'')s' + (v_1v_4v'')s'.(v_2v_3v'')s'\ .$$

On veut montrer que les quadriques ainsi obtenues engendrent l'espace des quadriques de $\mathbb{P}^{g-t-1}$ contenant $\phi_{|\delta''|}(E)$. C'est un exercice facile, dont on laisse la démonstration au lecteur (qui pourra la trouver dans [D2]).

1.4. Rang de l'application Prym sur $S_{g+1,t}$. Le théorème d'Andreotti et Mayer.

On rappelle ([Be 2] Proposition 7.5) que la codifférentielle de l'application $Pr : R_{g+1} \longrightarrow A_g$ en un point $(C,\eta)\in R^0_{g+1}$ est :

$$T^v_{(C,\eta)}Pr : S^2H^0(C,K_C+\eta) \longrightarrow H^0(C,2K_C)\ .$$

On s'intéresse à la différentielle de la restriction Pr_t de Pr à $S_{g+1,t}\subset R^0_{g+1}$. Soient s' et s'' deux sections telles que :

$$\mathrm{div}(s') = Q_1+\ldots+Q_{2t} \qquad \text{(notations 1.1)}$$

$$\mathrm{div}(s'') = Q_{2t+1}+\ldots+Q_{2g}$$

$$s = s's'' \ , \ \mathrm{div}(s) = Q_1+\ldots+Q_{2g} \ .$$

On a alors les décompositions suivantes :

$$T^v_{(C,\eta)}\, R_{g+1} \simeq H^0(C,2K_C) \simeq p^*H^0(E,2\delta) \oplus p^*H^0(E,\delta)s \ .$$
$$(\tau = \mathrm{id}) \qquad (\tau = -\mathrm{id})$$

La partie τ-invariante correspond au lieu dans l'espace des déformations de C où l'involution τ se prolonge, c'est-à-dire à $T^v_{(C,\eta)}\, S_{g+1,t}$. On a aussi :

Lemme 1.4.1. $H^0(C,K_C+\eta) \simeq p^*H^0(E,\delta'')s' \oplus p^*H^0(E,\delta')s''$.

■ On a (cf. 1.1) :

$$\eta \equiv Q_1+\ldots+Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1}+\ldots+Q_{2g} - p^*\delta''$$

$$K_C+\eta \equiv \mathrm{div}(s') + p^*\delta'' \equiv \mathrm{div}(s'') + p^*\delta' \ .$$

On a donc un morphisme :

$$H^0(E,\delta'') \oplus H^0(E,\delta') \longrightarrow H^0(C,K_C+\eta)$$

$$(u'',u') \longmapsto p^*u''.s' + p^*u'.s''$$

dont le noyau est isomorphe à :

$$H^0(p^*\delta''-\mathrm{div}(s'')) = H^0(p^*\delta'-\mathrm{div}(s')) = H^0(C,\eta) = 0 \ . \qquad ■$$

On peut donc écrire :

$$S^2H^0(C,K_C+\eta) \simeq [p^*S^2H^0(E,\delta'')s'^2 \oplus p^*S^2H^0(E,\delta')s''^2]$$

$$\oplus\, [p^*H^0(E,\delta'') \otimes p^*H^0(E,\delta')]s's'' \ .$$

Si $s_{\Delta'}$ (resp. $s_{\Delta''}$) est une section de diviseur Δ' (resp. Δ'') telle que $p^*s_{\Delta'} = s'^2$ (resp. $p^*s_{\Delta''} = s''^2$), on peut écrire T^vPr comme la somme de :

$$T^vPr_t : S^2H^0(E,\delta') \oplus S^2H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta)$$

$$(u'.v',u''.v'') \longmapsto u'v's_{\Delta''} + u''v''s_{\Delta'}$$

et de : $$H^0(E,\delta') \otimes H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,\delta)$$

$$u' \otimes u'' \longmapsto u'u''$$

Proposition 1.4.2. Pour $g \geq 4$, $(g,t) \neq (4,2)$ et (C,η) générique dans $S_{g+1,t}$, on a :

$$\dim \operatorname{Ker} T_{(C,\eta)}Pr_t = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \\ 1 & \text{pour } 0 < t \leq g/2 . \end{cases}$$

En particulier :

$$\dim E^2_{t,g-t} = \begin{cases} 2g & \text{pour } t = 0 \\ 2g-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■ On rappelle que $t = \deg \delta'$. Si $t = 0$, $\dim \operatorname{Ker} TPr_0$ est le corang de $S^2H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta'') = H^0(E,2\delta)$, qui est surjective pour $g = \deg \delta'' \geq 3$ ([Mu 4] page 55). On suppose $t > 0$. On peut écrire T^vPr_t comme la composée de :

$$\phi' \oplus \phi'' : S^2H^0(E,\delta') \oplus S^2H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta') \oplus H^0(E,2\delta'')$$

et $$\phi : H^0(E,2\delta') \oplus H^0(E,2\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta)$$

$$(u',u'') \longmapsto u's_{\Delta''} + u''s_{\Delta'} .$$

Comme Δ' et Δ'' sont à supports disjoints, le noyau de ϕ est engendré par $(s_{\Delta'} - s_{\Delta''})$.

Si $t = 1$, on a :

$$\operatorname{Im}(\phi' \oplus \phi'') \cap \operatorname{Ker} \phi = [\mathbb{C}s^2_{\delta'} \oplus H^0(2\delta'')] \cap \mathbb{C}(s_{\Delta'} - s_{\Delta''}) = 0 ,$$

puisque Δ' est somme de deux points distincts (ϕ'' est surjective puisque $\deg \delta'' = g-1 \geq 3$). On a donc :

$$\operatorname{Rang} T^vPr_1 = \operatorname{Rang}(\phi' \oplus \phi'') = 1 + 2(g-1) = 2g-1 .$$

Si $t = 2$, le même raisonnement s'applique sauf si Δ' est somme de deux éléments de $|\delta'|$, ce qui n'est pas le cas génériquement, ou si $\deg \delta'' = g-2 < 3$, cas qu'on a exclu.

Si $t \geq 3$, ϕ' et ϕ'' sont surjectives et :

$$\operatorname{Rang} T^vPr_t = \operatorname{Rang} \phi = 2g-1 . \qquad ■$$

On peut maintenant montrer que $\overline{E^2_g} = Pr(\overline{S}_{g+1,o})$ est une composante irréductible de N^g_{g-4}. On rappelle le théorème d'Andreotti-Mayer dont on peut trouver la démonstration, sinon l'énoncé, dans [An-M].

Théorème 1.4.3 (Andreotti-Mayer). Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On suppose que :

- $\mathrm{Sing}\,\Theta$ est de dimension pure k.

- L'ensemble $\mathrm{Sing}_2\Theta$ des points de multiplicité deux sur Θ est dense dans $\mathrm{Sing}\,\Theta$ et l'image de chaque composante de $\mathrm{Sing}_2\Theta$ par l'application :

$$\mathrm{Sing}_2\Theta \longrightarrow \mathbb{P}S^2T^v_oA$$

$$x \longmapsto \tau^*_x \quad (\text{cône tangent à } \Theta \text{ en } x) \tag{1.4.4}$$

engendre un espace linéaire de dimension $\geq N$. Alors la codimension de N^g_k en (A,Θ) est $\geq N$.

Corollaire 1.4.5. L'ensemble $\overline{E^2_g}$ est, pour $g\geq 5$, une composante irréductible de N^g_{g-4} de dimension $2g$.

■ En effet, pour un élément générique (P,Ξ) de E^2_g, $\mathrm{Sing}\,\Xi$ est irréductible pour $g\geq 5$ par 1.2.4. L'image de 1.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - 2g$ (1.3.1) et $\dim E^2_g = 2g$ (1.4.2). Le théorème 1.4.3 permet de conclure. ■

Remarque 1.4.6. Bien que, pour un élément générique (P,Ξ) de $E^2_{1,g-1}$, $\mathrm{Sing}\,\Xi$ soit irréductible (1.2.4), l'image de 1.4.4 engendre un espace linéaire de dimension $\binom{g+1}{2} - (3g-2)$ (1.3.1) et $\dim E^2_{1,g-1} = 2g-1$ (1.4.2). On ne peut appliquer 1.4.3. Pourtant, $\overline{E^2_{1,g-1}}$ est bien une composante de N^g_{g-4} (1.6.1 et 4.2).

1.5. Quelques remarques. La famille $\overline{E^2_{1,g-1}}$ contient les jacobiennes superelliptiques.

On garde toujours les mêmes notations, auxquelles on ajoute :

$$P' = \mathrm{Ker}(JC' \xrightarrow{Nm} JE)$$

$$P'' = \mathrm{Ker}(JC'' \xrightarrow{Nm} JE)\ .$$

La polarisation de JC' (resp. JC'') induit sur P' (resp. P'') une polarisation $L_{P'}$ (resp. $L_{P''}$) telle que ([Mu 2] Corollary 1, page 332 ; et 1.) $H(L_{P'}) \simeq p'^*JE[2]$ (resp. $H(L_{P''}) \simeq p''^*JE[2]$). Cette polarisation est de type (2) et $(P',L_{P'}) \in A_{t,(2)}$ (resp. $(P'',L_{P''}) \in A_{g-t,(2)}$).

Proposition 1.5.1.

• Pour $t = 0$, on a une isogénie :

$$g : P'' \xrightarrow{\pi''^*} P = \mathrm{Prym}(\tilde{C}/C)$$

de noyau $\{0, p''^*\mathcal{O}(\delta')\}$ telle que $g^*L_P \sim L_{P''}$.

• Pour $0 < t \leq g/2$, on a une isogénie :

$$g : P' \times P'' \longrightarrow P$$

$$(x', x'') \longmapsto \pi'^*x' - \pi''^*x''$$

de noyau $(p'^*, p''^*)(JE[2])$ telle que $g^*L_P \sim L_{P'} \boxtimes L_{P''}$ (Notations I.3.10). En particulier, $E^2_{t,g-t} \subset A^2_{t,g-t}$ (cf. définition A1.1.3).

■ Il est facile de vérifier que g est bien à valeurs dans P et que $\mathrm{Ker}\, g \subset P'[2] \times P''[2]$, donc que g est une isogénie. Pour les polarisations, il faut montrer que :

$$\hat{\pi}'^* \phi_{L_P} \pi'^* = \phi_{L_{P'}} \quad \text{et} \quad \hat{\pi}''^* \phi_{L_P} \pi'^* = 0 .$$

On montre par exemple la première égalité. On pose :

$$i : P \hookrightarrow J\tilde{C} \qquad i' : P' \hookrightarrow JC'$$

$$\phi : J\tilde{C} \xrightarrow{\sim} \widehat{J\tilde{C}} \qquad \phi' : JC' \xrightarrow{\sim} \widehat{JC'}$$

$\forall p' \in P'$

$$\hat{\pi}'^* \phi_{L_P} \pi'^*(2p') = \hat{\pi}'^* \phi_{L_P^{\otimes 2}} \pi'^*(p')$$

$$= \hat{\pi}'^* \hat{i} \phi i \pi'^*(p') = \hat{i}' \hat{\pi}'^* \phi \pi'^* i'(p')$$

$$= \hat{i}' \phi' i'(2p') = \phi_{L_{P'}}(2p') . \qquad ■$$

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas du genre de E . Si E est de genre $b \geq 2$, on obtient des variétés de Prym qui sont dans $A^{\delta}_{t,g-t}$, où δ est la polarisation $(2,\ldots,2)$ de degré 2^b et $b-1 \leq t \leq g-(b-1)$.

Regardons de plus près les cas $t = 0$ et $t = 1$. Soit $E_{g,(2)}$ l'ensemble des variétés de Prym (au sens de [Mu 2]) associées aux courbes superelliptiques lisses de genre $g+1$. C'est un sous-ensemble irréductible de $A_{g,(2)}$.

Proposition 1.5.2.

1) Pour tout $(P,M) \in \overline{E}_{g,(2)}$ et $a \in H(M)$, $a \neq 0$, la variété abélienne principalement polarisée $P/\{0,a\}$ est dans $\overline{E}^2_g$.

2) Pour $g \geq 4$ et tout $(P,M) \in \overline{E}_{g-1,(2)}$, toute courbe elliptique F et tout isomorphisme $\psi : H(M) \xrightarrow{\sim} F[2]$, la variété abélienne principalement polarisée $P \times F/\{(a,\psi a) \mid a \in H(M)\}$, élément de $A^2_{1,g-1}$ (cf. A1.1.3) est dans $\overline{E}^2_{1,g-1}$.

■ Le premier point découle immédiatement de 1.5.1. Pour le second, on remarque d'abord que la famille $F^2_{1,g-1}$ ainsi construite est irréductible puisque la famille :

$\{p : C \longrightarrow E$ structure superelliptique, C de genre g, avec un isomorphisme $E[2] \xrightarrow{\sim} H(2)\}$

est irréductible. De plus, $\dim F^2_{1,g-1} \leq 2g-2+1$. Par 1.5.1 et A1.1.1, $E^2_{1,g-1} \subset F^2_{1,g-1}$ et par 1.4.2, $\dim E^2_{1,g-1} = 2g-1$ pour $g \geq 4$. On en déduit $\overline{E}^2_{1,g-1} = F^2_{1,g-1}$. ■

Corollaire 1.5.3. Pour $g \geq 4$, $\overline{E}^2_{1,g-1}$ contient les jacobiennes superelliptiques.

■ En effet ([Mu 2] Corollary 1 b)), pour $p : C \longrightarrow E$ structure superelliptique, on a une isogénie $P \times JE \longrightarrow JC$ de noyau $(p^*,id)(JE[2])$. ■

1.6. L'espace $\overline{E}^2_{1,g-1}$ est une composante de N^g_{g-4}.

On ne considère dans cette section que le cas $g \geq 6$. Le résultat est encore vrai pour $g = 5$ et sera montré en 4.2.

Théorème 1.6.1. Pour $g \geq 6$, $\overline{E}^2_{1,g-1}$ est une composante irréductible de dimension $2g-1$ de N^g_{g-4}.

■ On rappelle que la méthode d'Andreotti et Mayer ne s'applique pas à $\overline{E}^2_{1,g-1}$ (1.4.6). On va utiliser les variétés quasi-abéliennes de rang 1 (appelées "rank 1 degenerations of abelian varieties" dans [Mu 1], page 350). Expliquons rapidement de quoi il s'agit. Les variétés quasi-abéliennes de rang 1 et de dimension g sont en correspondance biunivoque avec les extensions de groupes commutatifs des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g-1$ par un tore de dimension 1. Par [Mu 6], page 227, ces extensions sont toutes du type :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{j} G(L_a \otimes L^{-1}) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

où $(A,L) \in A_{g-1}$, $a \in A$ ([Mu 5] page 290). Si on change a en $-a$, j est changé en $-j$ et les groupes obtenus sont isomorphes.

Il existe ([Ig 1], [Mu 1] page 351, [Mu 7], [Na]) un espace de modules grossier $A_g^{(1)}$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées ou quasi-abéliennes de rang 1, et de dimension g, qui est réunion disjointe de A_g et d'un diviseur ∂A_g. Ce dernier est fibré sur A_{g-1} par $\rho_g : \partial A_g \longrightarrow A_{g-1}$. La fibre de $(A,L) \in A_{g-1}$ est isomorphe à $A/Aut(A,L)$ par la correspondance ci-dessus. Si Z est un fermé de A_g, on notera ∂Z l'intersection de l'adhérence de Z dans $A_g^{(1)}$ avec ∂A_g.

On aura besoin d'un calcul d'extension, fait dans [Fr-S 2] Theorem 5.2, relatif à la situation suivante. Soit $\pi_0 : \widetilde{N} \longrightarrow N$ un revêtement étale connexe de degré 2, où N est lisse de genre g. On note σ l'involution induite sur $\widetilde{N}$ et $(P_0,L_0) \in A_{g-1}$ la variété de Prym associée. Soit C (resp. $\widetilde{C}$) la courbe singulière obtenue à partir de N (resp. $\widetilde{N}$) en identifiant deux points p et q (resp. $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$, et $\sigma\widetilde{p}$ et $\sigma\widetilde{q}$ où $\pi_0(\widetilde{p}) = p$, $\pi_0(\widetilde{q}) = q$). On a un revêtement étale induit $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ qui n'est pas admissible. La variété de Prym $P = Ker(J\widetilde{C} \xrightarrow{Nm} JC)^0$ est extension de P_0 par un tore de dimension 1. Plus précisément :

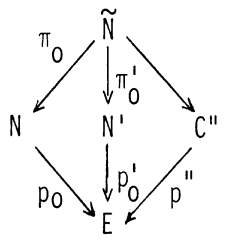
Lemme 1.6.2 (Friedman-Smith). L'extension canonique $1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow P \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ correspond à l'élément $\mathcal{O}_{\widetilde{N}}(\pm(\widetilde{q}-\widetilde{p}-\sigma\widetilde{q}+\sigma\widetilde{p}))$ de P_0.

On considère maintenant un revêtement $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ dans $S_{g,o}$, qui est donc associé à $\eta = p^*\delta'$, où $\mathcal{O}(\delta')$ est d'ordre 2 dans $Pic^0 E$. Si $f = p\pi : \widetilde{C} \longrightarrow E$, on notera $f^*(JE[2]) = \{0,\varepsilon\}$ (puisque $f^*\delta' \equiv 0$).

Lemme 1.6.3. Soient $(P,L) \in Pr(S_{g,o}) = E^2_{g-1}$ et ε le seul élément non nul de $f^*(JE[2])$. Alors l'extension de P par ε est dans $\partial E^2_{1,g-1}$.

■ On considère un élément de $S_{g+1,1}$, avec les notations 1.1. Si on fait "tendre" P_1 vers P_2 sur E, la courbe C' dégénère en $N'/Q' \sim \tau_0' Q'$ où N' est lisse, revêtement étale de E de degré 2 par $p_0' : N' \longrightarrow E$ et $p_0'(Q') = P_1 = P_2$.

On a un diagramme :



et le revêtement π_0 est dans $S_{g,o}$. On a :

$$C = N/Q \sim \tau_0 Q \text{ , où } p_0(Q) = P_1 = P_2$$

$$\tilde{C} = \tilde{N}/\tilde{Q} \sim \sigma_0''\tilde{Q} \text{ et } \sigma_0\tilde{Q} \sim \sigma_0'\tilde{Q} \text{ , où } \pi_0(\tilde{Q}) = Q \text{ .}$$

Si on note P (resp. P_0) la variété de Prym associée à $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ (resp. $\pi_0 : \tilde{N} \longrightarrow N$), on est dans la situation de 1.6.2. On a donc une extension :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow P \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

correspondant à $a = \mathcal{O}_{\tilde{N}}(\pm(\tilde{Q}-\sigma_0''\tilde{Q}-\sigma_0\tilde{Q}+\sigma_0'\tilde{Q}))$.

Or $a = \pi_0'^*\mathcal{O}_{N'}(\pm(Q'-\tau_0'Q'))$, où $Q' = \pi_0'(\tilde{Q})$, et $\mathcal{O}_{N'}(x'-\tau_0'x')$ est, pour tout $x' \in N'$, le seul élément non nul de $\mathrm{Ker}(JN' \xrightarrow{Nm} JE)$, c'est-à-dire $p_0'^*\alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, \mathcal{O}(\delta')\}$.

Comme $P_0 \in \mathrm{Pr}(S_{g,o})$ et $P \in \partial E^2_{1,g-1}$, la démonstration est terminée. ∎

On a ainsi mis en évidence une composante irréductible $\partial' E^2_{1,g-1}$ de $\partial E^2_{1,g-1}$, de dimension $2g-2$, telle que ρ_g induise un morphisme $\phi_g : \partial' E^2_{1,g-1} \longrightarrow \overline{E^2_{g-1}}$ avec $\phi_g^{-1}((P_o,L_o)) = \{\varepsilon\}$, pour $(P_o,L_o) \in \mathrm{Pr}(S_{g,o}) \subset \overline{E^2_{g-1}}$.

D'autre part, Mumford a étudié dans [Mu 1] les espaces ∂N^g_k . Il en ressort ([Mu 1] page 364) que ∂N^g_k est contenu dans la réunion de :

- $\rho_g^{-1}(N^{g-1}_k)$
- $\partial N^g_{k,1} = \{((A,\Theta),a) \in \partial A_g$, avec $(A,\Theta) \in A_{g-1}$ et $a \in A \mid \dim \mathrm{Sing}(\Theta.\Theta_a) \geq k\}$
- $\partial N^g_{k,2} = \{((A,\Theta),a) \in \partial A_g \mid \dim(\mathrm{Sing}\ \Theta.\mathrm{Sing}\ \Theta_a) \geq k-1\}$.

Soient C_g une composante irréductible de N^g_{g-4} contenant $E^2_{1,g-1}$ et $\partial' C_g$ une composante irréductible de ∂C_g contenant $\partial' E^2_{1,g-1}$. On a :

- $\dim \partial' C_g = \dim C_g - 1$
- $\partial' E^2_{1,g-1} \subset \partial' C_g \subset \rho_g^{-1}(N^{g-1}_{g-4}) \cup \partial N^g_{g-4,1} \cup \partial N^g_{g-4,2}$.

On admet provisoirement le résultat suivant :

Lemme 1.6.4. Soient $p : C \longrightarrow E$ une courbe superelliptique de genre $g \geq 6$ et $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale élément de $S_{g,o}$. On note (P_o,Ξ) la variété de Prym associée et ε le seul élément non nul de $(\pi p)^*(JE[2]) \subset P_o$. On a alors :

$$\mathrm{Sing}(\Xi.\Xi_\varepsilon) = \mathrm{Sing}\,\Xi = \mathrm{Sing}\,\Xi_\varepsilon \ .$$

En particulier, comme $\dim \mathrm{Sing}\,\Xi = g-5$ (1.2.4 i)), l'extension $P \in \partial' E^2_{1,g-1}$ P_0 correspondant à ε n'est ni dans $\rho_g^{-1}(N^{g-1}_{g-4})$, ni dans $\partial N^g_{g-4,1}$. On a donc :

$$\partial' E^2_{1,g-1} \subset \partial' C_g \subset \partial N^g_{g-4,2} \ .$$

En prenant les images par ρ_g , on obtient :

$$\overline{E^2_{g-1}} \subset \rho_g(\partial' C_g) \subset \rho_g(\partial N^g_{g-4,2}) \subset N^{g-1}_{g-5} \ .$$

Or, pour $g-1 \geq 5$, $\overline{E^2_{g-1}}$ est une composante irréductible de N^{g-1}_{g-5} (1.4.5). On en déduit :

$$\overline{E^2_{g-1}} = \rho_g(\partial' C_g) \ .$$

Pour montrer que $C_g = \overline{E^2_{1,g-1}}$, il suffit de montrer que $\dim C_g = 2g-1$, ou que $\dim \partial' C_g = 2g-2 = \dim E^2_{g-1}$.

C'est une conséquence du lemme suivant, qui termine donc la démonstration du théorème. ∎

Lemme 1.6.5. Avec les hypothèses et notations de 1.6.4, on a :

$$\{a \in P_0 \mid \dim(\mathrm{Sing}\,\Xi.\mathrm{Sing}\,\Xi_a) \geq g-5\} = \{0,\varepsilon\} \ .$$

∎ Démonstration de 1.6.4 et 1.6.5.

On écrira P au lieu de P_0 et on remplace g par $g+1 \geq 6$ pour rester dans le cadre habituel.

On rappelle qu'on a (1.2.1, 1.2.2, 1.2.4) :

$$\Xi = \{\pi''^* L'' \mid L'' \in \mathrm{Pic}^g C'' \ , \ h^0(L'') \geq 1 \ , \ \mathrm{Nm}_{p''} L'' = \mathcal{O}(\delta)\}$$

$$\mathrm{Sing}\,\Xi = \{\pi''^*(L'' \otimes p''^* M) \mid L'' \in \mathrm{Pic}^{g-4} C'' \ , \ h^0(L'') \geq 1 \ , \ M \in \mathrm{Pic}^2 E \ , \ \mathrm{Nm}_{p''} L'' \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta)\} \ .$$

On note $\varepsilon = f^*\alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, \mathcal{O}(\delta')\}$. Si $L = \pi''^* L''$ est dans Ξ , on a :

$$h^0(L \otimes \varepsilon) = h^0(L'' \otimes p''^*\alpha) + h^0(L'' \otimes p''^*\alpha \otimes p''^*\mathcal{O}(\delta')) \ .$$

Si $L'' = \mathcal{O}(D'')$ où D'' est effectif p''-simple, on a par 1.2.7 :

$$h^0(L'' \otimes p''^*\alpha) \leq h^0(E,\alpha) + h^0(\mathrm{Nm}\, L'' \otimes \alpha \otimes \mathcal{O}(-\delta'')) = h^0(\mathcal{O}(\delta') \otimes \alpha) = 0 \ .$$

Donc $L \notin \Xi_\varepsilon$. On en déduit :

$$\Xi.\Xi_\varepsilon = \{\pi"^*(L" \otimes p"^*M) \mid L" \in \mathrm{Pic}^{g-2}C",\ h^0(L") \geq 1,\ M \in \mathrm{Pic}^1E,\ \mathrm{Nm}_{p"}L" \otimes M^{\otimes 2} = \mathcal{O}(\delta)\} .$$

Pour un élément L de $(\Xi.\Xi_\varepsilon)$ - Sing Ξ (c'est-à-dire avec $L" = \mathcal{O}(D")$, $D"$ effectif $p"$-simple), on a par 1.2.7 :

$$0 \longrightarrow H^0(E,M) \longrightarrow H^0(L" \otimes p"^*M) \longrightarrow H^0(M \otimes \mathrm{Nm}\, L" \otimes \mathcal{O}(-\delta")) = 0 .$$

Si on note $s_{D"}$ une section de diviseur $D"$ et s_N une base de $H^0(E,N)$ pour tout $N \in \mathrm{Pic}^1E$, on a :

$$H^0(\tilde{C},L) = \langle \pi"^*(s_{D"}.p"^*s_M), \pi"^*(s_{D"}.p"^*s_{M\otimes\delta'}) \rangle .$$

De même :

$$H^0(\tilde{C},L\otimes\varepsilon) = \langle \pi"^*(s_{D"}.p"^*s_{M\otimes\alpha}), \pi"^*(s_{D"}.p"^*s_{M\otimes\delta'\otimes\alpha}) \rangle .$$

Si $G : \Xi_{\text{lisse}} \longrightarrow \mathbb{P}T^v_0P \simeq \mathbb{P}H^0(K_C+\eta) \simeq \mathbb{P}H^0(\delta")$ est l'application de Gauss, on en déduit :

$$G(L) = p"_*(D") + \mathrm{div}(s_M) + \mathrm{div}(s_{M\otimes\delta'}) \in |\delta|"$$

$$G(L_\varepsilon) = p"_*(D") + \mathrm{div}(s_{M\otimes\alpha}) + \mathrm{div}(s_{M\otimes\delta'\otimes\alpha}) \in |\delta|" .$$

En particulier, $G(L) \neq G(L_\varepsilon)$ et $\Xi.\Xi_\varepsilon$ est lisse en L , ce qui démontre 1.6.4.

Il reste à montrer 1.6.5.

Soit $a \in P$ tel que $\dim(\mathrm{Sing}\ \Xi.\mathrm{Sing}\ \Xi_a) \geq g-4$. Comme Sing Ξ est irréductible de dimension $g-4$ (1.2.4), on a Sing Ξ_a = Sing Ξ . On écrit $a = \pi"^*a"$, où $a" \in P"$ (1.5.1) et on note $T"_2$ l'ensemble $\{p"^*M \otimes \mathcal{O}_{C"}(D") \mid M \in \mathrm{Pic}^2E, D" \in C"^{(g-4)}\}$. Comme :

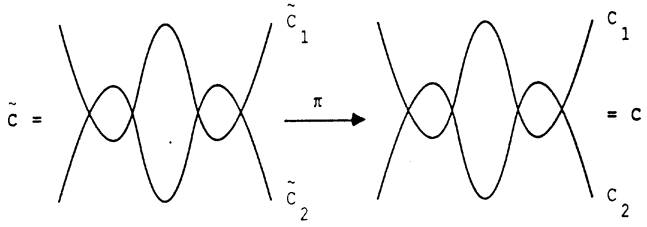
$$\{L" \in T"_2 \mid \mathrm{Nm}\, L" = \delta\} = (\pi"^*)^{-1}(\mathrm{Sing}\ \Xi) ,$$

on en déduit $T"_2 + a" = T"_2$. On conclut par A4.2 que $a" \in P" \cap p"^*JE = p"^*JE[2]$, soit $a \in \{0,\varepsilon\}$.

II.D ■

2. Etude des familles $H_{g+1,t}$ et de la famille T_6 .

On s'intéresse dans cette partie aux revêtements admissibles du type :

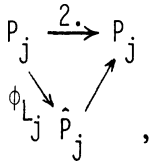


où $g(C_1) = t-1$, $g(C_2) = g-t-1$, C_1 et C_2 lisses, $1 \leq t \leq g/2$.

Les revêtements $\pi_j : \tilde{C}_j \longrightarrow C_j$ sont ramifiés en 4 points. On note $P_j = \mathrm{Ker}(J\tilde{C}_j \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JC_j)$. La polarisation de $J\tilde{C}_j$ induit une polarisation L_j sur P_j et on a ([Mu 2] Corollary 1 page 332 et I.3.3) :

$$H(L_j) \simeq \pi_j^*(JC_j[2]) .$$

Ces polarisations sont donc de type $(2,\ldots,2)$ (dim P_j-1 fois). On a des factorisations :



,

qui induisent des polarisations $\hat{L}_j$ sur $\hat{P}_j$, de type (2).

On note (P,L) la variété de Prym (principalement polarisée) associée au revêtement admissible π .

Proposition 2.1. Il existe une isogénie de degré 4, $g : \hat{P}_1 \times \hat{P}_2 \longrightarrow P$ telle que $g^*L \sim \hat{L}_1 \boxtimes \hat{L}_2$.

En particulier $\mathrm{Pr}(H_{g+1,t}) \subset P^2_{t,g-t} \subset A^2_{t,g-t}$ pour $1 \leq t \leq g/2$ (cf. définitions A1.1.3 et A2.3.5).

■ D'après [Be 1] page 159, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{T}[2] & \to & P\times\mathbb{Z}/2 & \to & P_1\times P_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{C}^{*3}\simeq\tilde{T} & \to & J\tilde{C} & \to & J\tilde{C}_1\times J\tilde{C}_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow Nm & & \downarrow Nm & & \\
0 & \to & \mathbb{C}^{*3}\simeq T & \to & JC & \to & JC_1\times JC_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Il existe donc une isogénie de degré 4, $f : P \to P_1 \times P_2$ qui vérifie $f^*(L_1 \boxtimes L_2) \simeq L^{\otimes 2}$.

On pose $g = \phi_L^{-1} \hat{f} : \hat{P}_1 \times \hat{P}_2 \to \hat{P} \xrightarrow{\sim} P$. Il est facile de vérifier que $\hat{g}\phi_L g = \phi_{\hat{L}_1} \times \phi_{\hat{L}_2}$, ce qui prouve la proposition. ∎

(2.2) On s'intéresse maintenant à la famille T_6 , pour laquelle $C = C_1 \cup C_2$, C_1 rationnelle lisse, $C_1 \cap C_2 = \{u_1,\dots,u_4\}$, $\omega_{C_2} \simeq \mathcal{O}_{C_2}(u_1+\dots+u_4)$. On supposera C_2 lisse non hyperelliptique (de genre 3).

Par 2.1, il existe une isogénie :

$$f : F \times \hat{P}_2 \to P = \mathrm{Prym}(\tilde{C}/C) , \tag{2.3}$$

où $F \simeq J\tilde{C}_1$ est une courbe elliptique. Elle vérifie :

$$f^*L \sim L_F \boxtimes \hat{L}_2 ,$$

où L_F est une polarisation de degré 2 sur F .

On rappelle qu'on veut montrer que $\mathrm{Pr}(T_6) \subset \overline{E_5^2}$. On utilise pour cela A1.1.1 et 1.5.2 avec ses notations : il suffit de montrer que $(\hat{P}_2,\hat{L}_2) \in \bar{E}_{4,(2)} \subset A_{4,(2)}$. La courbe C_1 ne joue plus aucun rôle : la courbe C_2 est plongée dans $\mathbb{P}^2$ par $|\omega_{C_2}|$, le revêtement $\pi_2 : \tilde{C}_2 \to C_2$ est ramifié le long d'une section par une droite D et on veut montrer que la variété de Prym duale $(\hat{P}_2,\hat{L}_2)$ est dans $\bar{E}_{4,(2)}$.

Considérons le cas particulier $C = D \cup C_2$ d'élément de T_6 . La courbe C est une quintique plane. Le revêtement $\pi : \tilde{C} \to C$ est pair au sens de [Ma] puisque sa variété de Prym (P,L) est dans N_1^5 . Cette dernière est donc isomorphe à la jacobienne (JN,Θ) d'une courbe N lisse de genre 5 ([Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2]). Le lieu

singulier du diviseur θ est isomorphe à la courbe $\tilde{C}$ donc est réductible. Il ressort de l'analyse de [Te] qu'il existe un morphisme de degré 2, $p : N \longrightarrow E$, où E est la courbe elliptique revêtement double de D ramifié sur $D \cap C_2$. Si on note $(Q, L_Q) \in \bar{E}_{4,(2)}$ la variété de Prym associée à p, on a deux isogénies :

$$f : E \times \hat{P}_2 \longrightarrow P \qquad \text{(par 2.3)}$$

$$g : E \times Q \longrightarrow JN \simeq P \qquad \text{(cf. 1.5.3)}$$

et $f^*L \sim L_E \boxtimes \hat{L}_2$, $g^*L \sim L_E \boxtimes L_Q$.

On va maintenant montrer que $(\hat{P}_2, \hat{L}_2)$ est isomorphe à (Q, L_Q), ce qui terminera la démonstration. Pour cela, on utilise A1.1.1 et ses notations. Les injections $j_E(f) : E \hookrightarrow JN$ (déduite de f) et $j_E(g) : E \hookrightarrow JN$ (déduite de g) induisent toutes deux des morphismes de degré 2 de N sur E. Comme C_2 est irréductible, il découle de [Te] que la structure superelliptique de N est unique. Quitte à modifier f par un automorphisme de E et de N, on peut supposer que $j_E(f) = j_E(g)$. La conclusion est alors une conséquence directe de l'unicité de X'' dans A1.1.1.

3. La construction de Recillas. La construction tétragonale de Donagi.

3.1. La construction de Recillas.

Rappelons la construction suivante, exposée dans [Re] et précisée dans [Do-S] pages 47-49.

Soit X une courbe lisse de genre g munie d'un g^1_4, $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. La courbe $\tilde{C} = S^2_{\mathbb{P}^1} X$ a au plus des points doubles comme singularités et admet un morphisme de degré 6, $f^{(2)} : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Il y a sur $\tilde{C}$ une involution naturelle ι qui à $(a+b)$ associe $f^{-1}f(a) - (a+b)$. On note $\pi : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}/\iota = C$ le morphisme induit, par lequel $f^{(2)}$ se factorise. La courbe C est trigonale.

Théorème 3.1.1. Le revêtement $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ est admissible et sa variété de Prym est isomorphe à la jacobienne de X.

Corollaire 3.1.2.

1) Les variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes obtenues en identifiant deux points d'une courbe hyperelliptique sont des jacobiennes hyperelliptiques (comparer [Be 1] Theorem 4.10 cas b)).

2) Le lieu des jacobiennes hyperelliptiques de genre g est contenu dans $Pr(\overline{H}_{g+1,0})$.

3) Le lieu des jacobiennes superelliptiques de genre g est contenu dans $Pr(\overline{H}_{g+1,1})$.

■ Soit X une courbe hyperelliptique ou superelliptique de genre g. On a donc un morphisme de degré 2, $p: X \longrightarrow B$, d'involution associée σ sur X, de ramification Δ_p sur B, avec $g(B) = 0$ ou 1. On choisit un g^1_2, $q: B \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de ramification Δ_q sur $\mathbb{P}^1$, d'involution τ. Si $\tau(\Delta_p) \neq \Delta_p$, le groupe de Galois de $f = qp: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est le groupe D_4. La courbe $\tilde{C}$ associée par la construction de Recillas est :

$$\tilde{C} = \{x+\sigma x \mid x \in X\} \cup \{x+y \mid px = \tau py\} \simeq B \cup \tilde{H}$$

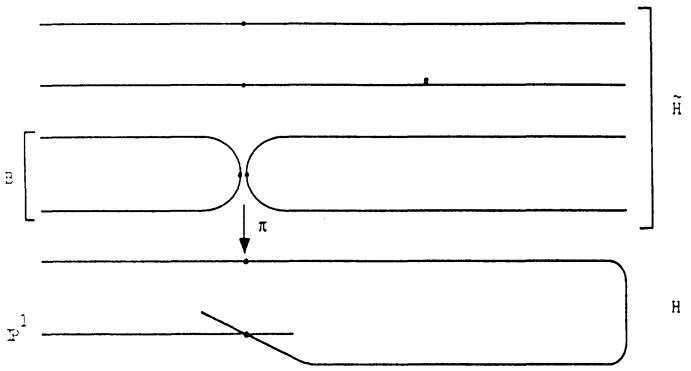
$$C = \tilde{C}/\iota \simeq \mathbb{P}^1 \cup H$$

et H est hyperelliptique.

Au-dessus de $Q \in \Delta_q \subset \mathbb{P}^1$, la fibre de $f^{(2)}$ est

- sur B $x+\sigma x$ deux fois $(f(x) = Q)$
- sur $\tilde{H}$ $x+x$, $x+\sigma x$, $\sigma x+x$, $\sigma x+\sigma x$.

La figure locale est donc :

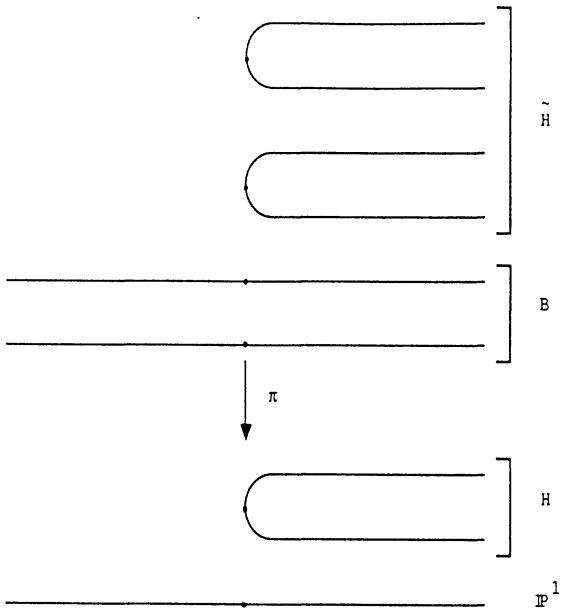


Donc H rencontre $\mathbb{P}^1$ en un point au-dessus de Q.

Au-dessus de $q(P)$, où $P \in \Delta_p \subset B$, la fibre est :

- sur B $2x$, $y+\sigma y$ $(p(x) = P,\ p(y) = \tau P)$
- sur $\tilde{H}$ $x+y$ deux fois, $x+\sigma y$ deux fois.

La figure locale est :



Donc H ne coupe pas $\mathbb{P}^1$ mais le morphisme $H \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1$ est ramifié. On a donc :

- $H \cap \mathbb{P}^1$ s'envoie par ϕ sur Δ_q et est Δ_q sur $\mathbb{P}^1$
- ϕ est ramifié sur $q(\Delta_p)$.

Si $g(B) = 0$, H coupe $\mathbb{P}^1$ en 2 points quelconques. Il est facile de voir qu'on peut obtenir ainsi toutes les courbes hyperelliptiques H de genre g. En inversant la construction de Recillas ([Be 2] page 389), on a la réciproque, ce qui prouve 1) (utiliser [Be 1] 4.11.3). Si $\Delta_p = P_1 + \ldots + P_{2g+2}$, on peut choisir q de façon que $\tau P_i = P_j \iff i = 1$, $j = 2$. La courbe H acquiert un point singulier au-dessus de $q(P_1)$. Ceci prouve 2).

Si $g(B) = 1$, H coupe $\mathbb{P}^1$ en 4 points, donc C est dans $H_{g+1,1}$. ∎

3.2. La construction tétragonale de Donagi.

On part d'un revêtement double étale connexe $\pi : \tilde{C} \to C$ d'une courbe lisse C admettant un g^1_4, $h : C \to \mathbb{P}^1$. On a donc un morphisme $\mathbb{P}^1 \to C^{(4)}$ qui à $P \in \mathbb{P}^1$ associe sa fibre $h^{-1}(P)$.

On pose :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} = \mathbb{P}^1 \times_{C^{(4)}} \tilde{C}^{(4)} & \to & \tilde{C}^{(4)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \to & C^{(4)} \end{array}$$

L'involution σ induit une involution γ sur $\tilde{S}$.

Théorème 3.2.1 (Donagi) ([Do] et [Be 3] §3, c)). La courbe $\widetilde{S}$ est réunion disjointe de deux courbes $\widetilde{C}_1$ et $\widetilde{C}_2$, stables par γ. Les revêtements $\widetilde{C}_j \to \widetilde{C}_j/\gamma$, $j=1,2$ sont admissibles et leurs variétés de Prym sont isomorphes à la variété de Prym de $\pi: \widetilde{C} \to C$.

On va maintenant appliquer cette construction aux revêtements de $S_{g+1,t}$ et de S_{g+1}, pour lesquels la courbe C admet des g^1_4.

3.2.2. Le cas des familles $S_{g+1,t}$.

On prend les notations 1.1, et on choisit un g^1_2, $\phi : E \to \mathbb{P}^1$, d'involution associée ι. On pose $h = \phi p : C \to \mathbb{P}^1$. La fibre de $P \in \mathbb{P}^1$ sous $h\pi = \phi f : \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1$ est $\{x,\sigma x,\sigma' x,\sigma'' x,y,\sigma y,\sigma' y,\sigma'' y\}$ où $f(x) = \iota f(y)$ et $\phi f(x) = P$.

Avec les notations ci-dessus, on a :

$\widetilde{C}_1 = \{x+\sigma''x+y+\sigma'y\ ,\ \sigma x+\sigma''\sigma x+y+\sigma'y\ ,\ x+\sigma''x+\sigma y+\sigma'\sigma y\ ,\ x+\sigma'x+y+\sigma''y$ et images par $\sigma\}$

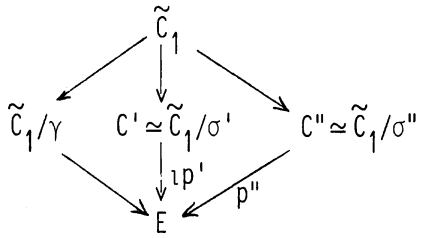
$\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}'_2 \cup \widetilde{C}''_2$ où :

$\widetilde{C}'_2 = \{x+\sigma'x+y+\sigma'y\ ,\ \sigma x+\sigma'\sigma x+y+\sigma'y$ et images par $\sigma\}$

$\simeq \{a'+b' \in C'^{(2)} \mid p'a' = \iota p'b'\}$

$\widetilde{C}''_2 \simeq \{a''+b'' \in C''^{(2)} \mid p''a'' = \iota p''b''\}$.

1) On suppose que $\iota P_i \neq P_j$ pour $1 \leq i \leq 2t < j \leq 2g$. On voit facilement (en utilisant [Be 3] Proposition 3, qui est un résultat de Welters ([We 3])) que $\widetilde{C}_1$ est lisse et que γ y opère sans point fixe. Le groupe $\{1,\sigma,\sigma',\sigma''\}$ opère sur $\widetilde{C}_1$. On vérifie qu'il induit un diagramme commutatif :



Le revêtement étale $\widetilde{C}_1 \to \widetilde{C}_1/\gamma$ est donc dans $S_{g+1,t}$. On peut remarquer que pour $t=0$ (i.e. $2\delta' \equiv 0$), on a toujours $\iota\delta' \equiv \delta'$ et le revêtement obtenu est isomorphe à π. C'est d'ailleurs le seul cas où les fibres de $Pr|_{S_{g+1,t}}$ sont de dimension 0 (1.4.2).

2) Les courbes $\tilde{C}_2'$ et $\tilde{C}_2''$ se coupent en 4 points situés au-dessus de la ramification de ϕ sur $\mathbb{P}^1$. Si $\iota P_i \neq P_j$ pour $1 \leq i,j \leq 2t$ (resp. $2t < i,j \leq 2g$) alors $\tilde{C}_2'$ (resp. $\tilde{C}_2''$) est lisse. On a des morphismes de degré 2 :

$$\tilde{C}_2'/\gamma \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en} \quad \phi P_1,\ldots,\phi P_{2t}$$

$$\tilde{C}_2''/\gamma \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en} \quad \phi P_{2t+1},\ldots,\phi P_{2g} .$$

Plus précisément, on distingue les cas :

i) $t = 0$. L'involution ι se remonte à C' et $\tilde{C}_2'$ est réunion disjointe de deux courbes rationnelles lisses stables par γ. La courbe $C_2 = \tilde{C}_2/\gamma$ est réunion de la courbe hyperelliptique C_2''/γ de genre $g-1$ et de deux courbes rationnelles la coupant chacune en deux points. Sa réduction stable est dans $\overline{H}_{g+1,0}$. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les courbes de $H_{g+1,0}$.

ii) $t = 1$. La courbe C_2 est réunion de la courbe hyperelliptique $\tilde{C}_2''/\gamma$ de genre $g-2$ et d'une courbe rationnelle la coupant en 4 points. On est donc dans $\overline{H}_{g+1,1}$. Toute courbe hyperelliptique lisse de genre $g-2$ peut être ainsi obtenue. Les quatre points d'intersection sont aussi quelconques sur cette courbe. Enfin, ils sont aussi quelconques sur $\mathbb{P}^1$ puisque, pour tous $R_1,\ldots,R_4,S_1,\ldots,S_4 \in \mathbb{P}^1$ tels que $[R_1:R_2:R_3:R_4] \neq [S_1:S_2:S_3:S_4]$, il existe un morphisme de degré 2, $\psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $\psi(S_j) = R_j$, $1 \leq j \leq 4$.

iii) $t \geq 2$. On obtient deux courbes hyperelliptiques se coupant en 4 points. On est dans $\overline{H}_{g+1,t}$. On a montré :

Théorème 3.2.3. Pour tout g et $0 \leq t \leq g/2$, on a $\overline{E}^2_{t,g-t} \subset \mathrm{Pr}(\overline{H}_{g+1,t})$ avec égalité pour $t = 0$ et 1.

3.2.4. La famille S_{g+1}. On rappelle que c'est le cas où la courbe C est lisse et admet une structure superelliptique $p : C \longrightarrow E$ de ramification $\Delta_p = P_1+\ldots+P_{2g}$ sur E, et d'involution associée τ, mais où le morphisme $f = p\pi : \tilde{C} \longrightarrow E$ est de groupe de Galois D_4. On choisit un g^1_2, $\phi : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sur E, de ramification $\Delta_\phi = R_1+\ldots+R_4$ sur $\mathbb{P}^1$, et d'involution associée ι. On a donc un g^1_4 $h = \phi p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sur C, qu'on suppose de groupe de Galois D_4 (par exemple $\iota(\Delta_p) \neq \Delta_p$) et auquel on applique la construction tétragonale.

Soit $P \in \mathbb{P}^1$. On écrit sa fibre sous $\pi : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de la façon suivante :

$$\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{p} E \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1$$

$$\left.\begin{array}{l} x,\sigma x \mapsto a \\ y,\sigma y \mapsto \tau a \end{array}\right\} \mapsto e$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x},\sigma\bar{x} \mapsto b \\ \bar{y},\sigma\bar{y} \mapsto \tau b \end{array}\right\} \mapsto \iota e \Big\} \mapsto P$$

Avec les notations précédentes, les fibres de $\tilde{C}_1$ et de $\tilde{C}_2$ au-dessus de P sont respectivement :

$(\tilde{C}_1)_P = \{x+\bar{x}+y+\bar{y}\ ,\ \sigma x+\sigma\bar{x}+y+\bar{y}\ ,\ \sigma x+\bar{x}+\sigma y+\bar{y}\ ,\ \sigma x+\bar{x}+y+\sigma\bar{y}\ ,$ + images par $\sigma\}$

$(\tilde{C}_2)_P = \{\sigma x+\bar{x}+y+\bar{y}\ ,\ x+\sigma\bar{x}+y+\bar{y}\ ,\ x+\bar{x}+\sigma y+\bar{y}\ ,\ x+\bar{x}+y+\sigma\bar{y}\ ,$ + images par $\sigma\}$.

On peut montrer par un calcul d'action de groupes que $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont irréductibles. On remarque aussi que τ induit une involution sur C_1 (et sur C_2), qui envoie $[t+u+v+w] \in C_1$ où $f(t) = f(v)$, sur $[\sigma t+u+\sigma v+w]$ (encore une fois, ceci peut être prouvé rigoureusement par un calcul d'action de groupes que nous ne ferons pas).

Par exemple, $[x+\bar{x}+y+\bar{y}]$ est envoyé sur $[\sigma x+\bar{x}+\sigma y+\bar{y}] = [x+\sigma\bar{x}+y+\sigma\bar{y}]$. On note $D_j = C_j/\tau$ et on a :

$(D_1)_P = \{[x+\bar{x}+y+\bar{y}] = [\sigma x+\bar{x}+\sigma y+\bar{y}] =$ images par σ , $[\sigma x+\sigma\bar{x}+y+\bar{y}] = [\sigma x+\bar{x}+y+\sigma\bar{y}] =$ images par $\sigma\}$

$(D_2)_P = \{[\sigma x+\bar{x}+y+\bar{y}] = [x+\bar{x}+\sigma y+\bar{y}] =$ images par σ , $[x+\sigma\bar{x}+y+\bar{y}] = [x+\bar{x}+y+\sigma\bar{y}] =$ images par $\sigma\}$.

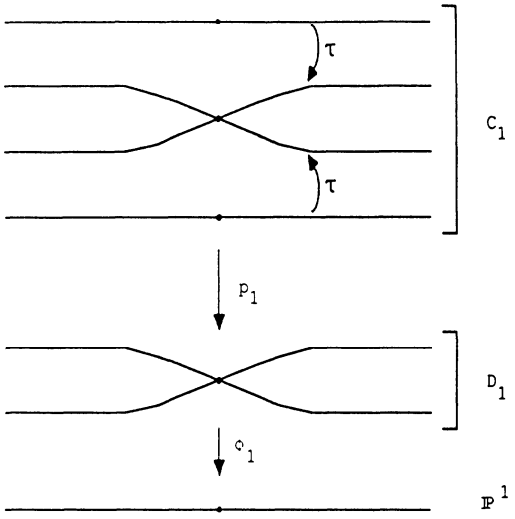
On a donc des morphismes :

$$\tilde{C}_j \xrightarrow{\pi_j} C_j \xrightarrow{p_j} D_j \xrightarrow{\phi_j} \mathbb{P}^1 \quad \text{pour} \quad j = 1,2 \ .$$

On remarque qu'au-dessus de R_i , $i = 1,\ldots,4$, il n'y a qu'un seul point sur D_1 et sur D_2 . Donc soit ϕ_j est ramifié en ce point, soit D_j y est singulière. Que se passe-t-il sur C_j au-dessus d'un R_i ? On a alors $x+y = \bar{x}+\bar{y}$ et :

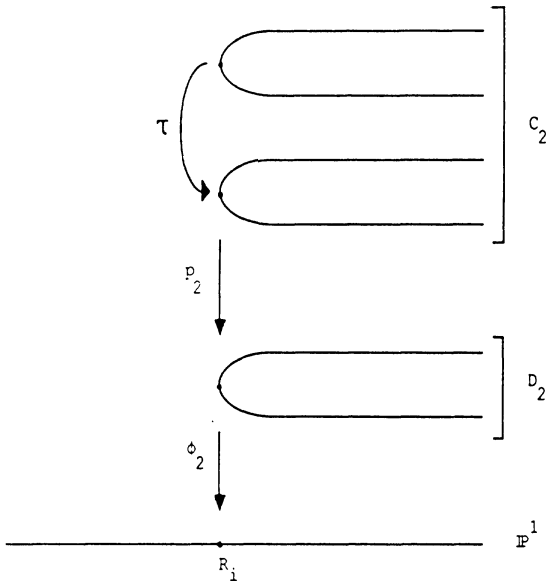
• soit $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ et $(C_1)_{R_i} = \{[2x+2y],\ [2\sigma x+2y],\ [x+\sigma x+y+\sigma y]\}$.

Par le critère de Welters ([We 3], [Be 3] Proposition 3), C_1 est lisse en les deux premiers de ces points mais pas en le troisième. La courbe D_1 est singulière au-dessus de R_i et la figure locale est la suivante :



On a :

$(C_2)_{R_i} = \{[x+\sigma x+2y] , [2x+y+\sigma y]\}$ et C_2 est lisse en ces points par le critère de Welters. La courbe D_2 est lisse au-dessus de R_i et ϕ_2 est ramifié en R_i .
La figure locale est la suivante :



• soit $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$ et la situation est inversée.

On en déduit que $\Delta_\phi = R_1+\ldots+R_4$ est réunion disjointe de la ramification de ϕ_1 et de celle de ϕ_2 . Comme les D_j sont irréductibles, on en déduit qu'elles sont toutes deux obtenues à partir de $\mathbb{P}^1$ en identifiant deux paires de points. Les courbes C_j sont donc obtenues en identifiant deux paires de points sur des courbes hyperelliptiques NC_j . On est donc dans $\overline{H}_{g+1,o}$. Enfin, la ramification Δ_j de $NC_j \xrightarrow{p_j} ND_j \simeq \mathbb{P}^1$ satisfait à $\phi_j(\Delta_j) = \phi(\Delta_p)$ donc on voit qu'on obtient ainsi tous les revêtements de $H_{g+1,o}$. On a donc $Pr(\overline{S}_{g+1}) = Pr(\overline{H}_{g+1,o})$.

4. Le mot de la fin.

En dimension $g \geq 6$, on sait maintenant que $\bar{J}_g$, $\overline{E^2_g}$, $\overline{E^2_{1,g-1}}$ et les $A^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq g/2$ sont des composantes irréductibles de N^g_{g-4} ([An-M], 1.4.5, 1.6.1, A1.4.5).

Proposition 4.1. Pour $g \geq 6$, ces composantes sont distinctes deux à deux.

■ Le fermé $\bar{J}_g$ est distinct de $\overline{E^2_{1,g-1}}$ et de $A^2_{t,g-t}$ car une jacobienne générique est simple, et de $\overline{E^2_g}$ car $3g-3 \neq 2g$. La seule coïncidence de dimension qui reste est $\dim E^2_6 = \dim A^2_{3,3} = 12$. Pour un élément générique de E^2_6, l'intersection des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta est une courbe elliptique de degré 6 dans $\mathbb{P}^5$ (cf. 1.3.1 1)). Pour un élément générique de $A^2_{3,3}$, c'est une union disjointe de deux 2-plans projectifs (A1.4.4). Ils sont donc non isomorphes.■

Proposition 4.2. L'espace N^5_1 a cinq composantes irréductibles de dimensions respectives 12, 10, 9, 9 et 11, à savoir $\bar{J}_5$; $\overline{E^2_5}$; $\overline{E^2_{1,4}}$; $A^2_{2,3}$ et $A_{1,4}$ (cf. définition ci-dessous).

■ Comme l'application $Pr : R_6 \longrightarrow A_5$ est surjective ([Be 1]), il ressort de la liste de Beauville, du commentaire qui la précède, et de 2.1, 2.2, 3.2.3 et 3.2.4, que $N^5_1 = \bar{J}_5 \cup \overline{E^2_5} \cup \overline{E^2_{1,4}} \cup A^2_{2,3} \cup A_{1,4} \cup A_{2,3}$; où $A_{t,g-t} \subset A_g$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit de deux variétés abéliennes de dimensions respectives t et $g-t$. Les dimensions respectives sont 12, 10, 9, 9, 11 et 9 (1.4.2, A1.1.3). On remarque tout de suite que $A_{2,3} \subset \bar{J}_5$. Tous ces ensembles sont irréductibles et $\bar{J}_5$, $\overline{E^2_5}$ et $A^2_{2,3}$ sont des composantes de N^5_1 ([An-M], 1.4.5, A1.4.5). Comme $A_{1,4}$ n'est pas inclus dans $\bar{J}_5$, c'est aussi une composante de N^5_1. Il reste à vérifier que $\overline{E^2_{1,4}}$ n'est pas inclus dans $\bar{J}_5 \cup \overline{E^2_5} \cup A^2_{2,3} \cup A_{1,4}$. C'est évident pour $A_{1,4}$, puisque $E^2_{1,4} \not\subset N^3_5 \supset A_{1,4}$.

Si un élément générique (P,Ξ) de $E^2_{1,4}$ est la jacobienne d'une courbe C de genre 5, C est lisse non hyperelliptique puisque $\dim \operatorname{Sing} \Xi = 1$ (1.2.4). On sait que l'espace vectoriel engendré par les équations des cônes tangents aux points doubles de Ξ est $\binom{5+1}{2} - (3.5\text{-}3)$ d'une part car $P \simeq JC$ ([Gr 1]), $\binom{5+1}{2} - (3.5\text{-}2)$ d'autre part par 1.3.1 2). Contradiction.

Si c'est un élément de $A^2_{2,3}$, il est aussi générique dans $A^2_{2,3}$, qui a même dimension que $E^2_{1,4}$. L'intersection des cônes tangents aux points doubles de Ξ devrait être à la fois un cône sur une courbe elliptique de $\mathbb{P}^3$ (1.3.1) et une union disjointe $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^2$ (A1.4.4).

Si c'est un élément de $\overline{E^2_5}$, c'est la variété de Prym d'un revêtement admissible $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ de $\overline{S_{6,o}}$. Comme $\mathrm{Sing}\,\Xi$ est irréductible, on n'est pas dans le cas exceptionnel 1.2.9. Si la courbe C était lisse, on pourrait donc appliquer 1.3.1 et aboutir à une contradiction. Vue la dimension de $E^2_{1,4}$, la courbe C , munie de son involution τ est l'une des courbes suivantes :

1) $C = H/x \sim y$, $\tau x \sim \tau y$ où H est hyperelliptique de genre 4, d'involution hyperelliptique τ . La variété P est isogène à $R = \mathrm{Ker}(J\tilde{H} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JH)$ ([Be 1] Remark 3.6), où $\tilde{H}$ est la normalisée de $\tilde{C}$. Pour la même raison, la variété de Prym $\bar{P}$ du revêtement admissible de $\bar{C} = H/x \sim \tau x$, $y \sim \tau y$ induit est isogène à R . Mais $\bar{C}$ est hyperelliptique donc ([Be 1] Theorem 4.10) $\bar{P}$ est une jacobienne hyperelliptique. Mais c'est impossible puisque $P \in E^2_{1,4}$ n'est pas simple et qu'une jacobienne hyperelliptique générique est simple.

2) $C = N/x \sim \tau x$ où N est superelliptique lisse de genre 5, d'involution τ . Le revêtement $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ ne peut être le revêtement de Wirtinger puisqu'on aurait alors $P \simeq JN$ et que les jacobiennes superelliptiques de genre 5 forment une famille de dimension 8, et $\dim E^2_{1,4} = 9$. Donc $\tilde{C}$ est irréductible, de normalisée $\tilde{N}$ et $\tilde{N} \longrightarrow N$ est ramifié en x et τx . La courbe $\tilde{C}$ a un point double 0 qui est fixe par σ . Comme $p_a(\tilde{C}/\sigma') = 1$ (on est dans $\overline{S_{6,o}}$) et qu'il existe un morphisme de $\tilde{C}/\sigma' = C'$ sur une courbe elliptique lisse, C' est lisse et $p' : C' \longrightarrow E$ est étale. Ceci contredit le fait que $\pi'(0)$ est fixe par τ'. Donc ce revêtement n'est pas dans $\overline{S_{6,o}}$. ∎

II.E. Compléments sur les variétés de Prym éléments de $\mathcal{N}_{g-4}^{g}$.

Le théorème principal de II.D donne la décomposition suivante de la famille des variétés de Prym irréductibles (P,Ξ) de dimension $g\geq 5$ vérifiant $\dim \operatorname{Sing}\Xi \geq g-4$:

$$\mathcal{N}_{g-4}^{g} \cap \mathcal{P}_{g}^{irr} = \mathcal{J}_g \cup \overline{\mathcal{E}_g^2} \cup \overline{\mathcal{E}_{1,g-1}^2} \cup \bigcup_{2\leq t\leq g/2} \mathcal{P}_{t,g-t}^{2,irr}$$

où les adhérences sont prises dans $\mathcal{A}_g^{irr}$ (cf. I.3.12) ; $\mathcal{P}_{t,g-t}^{2,irr}$ est l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathcal{P}_{t,g-t}^{2}$, défini dans A2.3 ; $\mathcal{E}_g^2 = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,0})$ et $\mathcal{E}_{1,g-1}^2 = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,1})$ (la définition de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ est rappelée plus bas).

Les résultats de II.D fournissent de plus une description géométrique précise des éléments de $\mathcal{E}_g^2$ et de $\mathcal{E}_{1,g-1}^2$.

Cette section sera consacrée d'une part à la description des éléments des familles $\overline{\mathcal{S}}_{g+1,t}$ et des variétés de Prym associées, c'est-à-dire de $\overline{\mathcal{E}_{t,g-t}^2}$, d'autre part à l'étude des singularités du diviseur thêta de certains éléments de $\overline{\mathcal{E}_g^2}$.

On étudie aussi brièvement la situation en dimension 4.

§1. Les familles $\overline{\mathcal{E}_{t,g-t}^2}$.

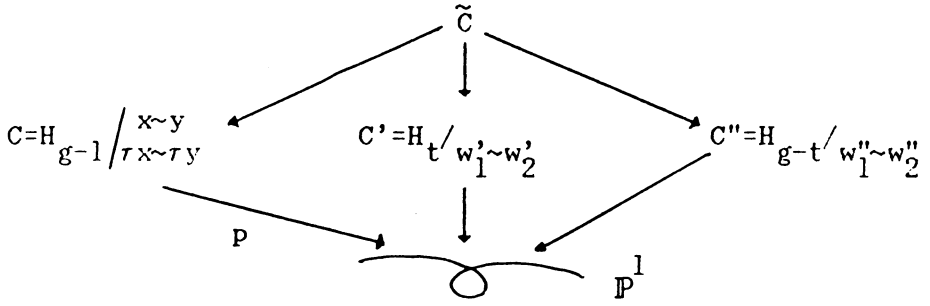
Pour $0\leq t\leq g/2$, la famille $\mathcal{S}_{g+1,t}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{R}_{g+1}$ formé des revêtements doubles étales $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ des courbes lisses connexes C de genre $g+1$ admettant une structure superelliptique $p : C \longrightarrow E$, tels que le groupe de Galois de $p\pi$ soit $\{1,\sigma,\sigma',\sigma''\}$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$, avec $\tilde{C}/\sigma = C$, $C' = \tilde{C}/\sigma'$ de genre $t+1$, $C'' = \tilde{C}/\sigma''$ de genre $g-t+1$. On emploiera les notations de II.D.1.1, en particulier $\mathcal{E}_{t,g-t}^2 = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,t})$.

On étudie les dégénérescences de tels revêtements pour lesquelles π reste admissible.

Si E reste lisse, on déduit de II.D.1.5.1 et du fait que P' et P" restent des variétés abéliennes que JC' et JC" restent des variétés abéliennes. Il s'ensuit que l'on est dans un des cas suivants :

- C' et C" lisses, $\Delta' \cap \Delta'' = \phi$. On est alors toujours dans $\mathcal{P}_{g+1,t}$.
- C' et C" lisses, $\Delta' \cap \Delta'' \neq \phi$. En vertu de II.D.3.2.2, il suffit de faire une construction tétragonale bien choisie pour se ramener -sans changer la variété de Prym !- au premier cas.
- C' est une réunion de deux copies de E se coupant en un point, de sorte que t=1. La variété de Prym P est alors la jacobienne de C".

Si E est irréductible non lisse, on est dans la situation suivante, si t>0 :

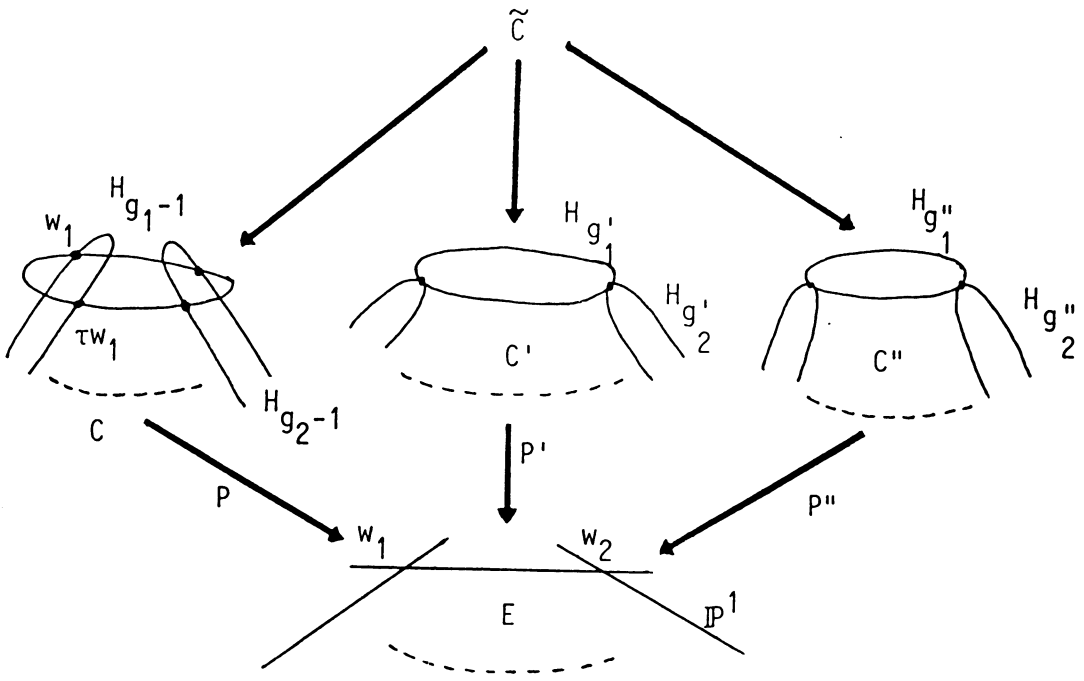


où H_r désigne une courbe hyperelliptique lisse de genre r et où w_1 et w_2 sont des points de Weierstrass.

Avec les notations de A2.4, la variété de Prym associée est dans $\mathcal{H}^2_{t,g-t}$ $(0<t\leq g/2)$.

Si t=0, il faut ajouter au cas précédent le cas où $C' \xrightarrow{p'} E$ est le revêtement de Wirtinger. La variété de Prym associée à π est alors la jacobienne de C".

Si E est réductible, on est dans la situation suivante :



La courbe E est réunion de r copies de $\mathbb{P}^1$. Sur la j-ième copie, il y a $2g'_j$ points de Δ' et $2g''_j$ points de Δ'', soit $2g_j = 2g'_j+2g''_j$ points de Δ, avec $g_j>0$. On a donc $\Sigma\, g'_j=t$, $\Sigma\, g''_j=g-t$.

La variété de Prym associée est alors dans $\mathcal{H}^2_{g'_1,\ldots,g'_r,g''_1,\ldots,g''_s}$, en omettant les indices nuls (notations de A2.4).

On a donc montré :

Théorème 1.1. :

Pour tout g, on a les égalités :

$$\overline{\mathcal{E}^2_g} = \mathcal{E}^2_g \cup \mathcal{H}_g \cup \bigcup_{\substack{1\le g_1\le\ldots\le g_r \\ \Sigma g_i=g}} \mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$$

$$\overline{\mathcal{E}^2_{1,g-1}} = \mathcal{E}^2_{1,g-1} \cup \mathcal{sup}_g \cup \bigcup_{\substack{1\le g_1\le\ldots\le g_r \\ \Sigma g_i=g-1}} \mathcal{H}^2_{1,g_1,\ldots,g_r}$$

$$\overline{\mathcal{E}^2_{t,g-t}} = \mathcal{E}^2_{t,g-t} \cup \bigcup_{\substack{1\le g'_1\le\ldots\le g'_r,\Sigma g'_i=t \\ 1\le g''_1\le\ldots\le g''_s,\Sigma g''_i=g-t}} \mathcal{H}^2_{g'_1,\ldots g'_r,g''_1,\ldots g''_s},$$

où les adhérences sont prises dans l'ensemble des variétés abéliennes irréductibles.

Les familles $\mathcal{E}^2_{t,g-t} = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,t})$ sont définies plus haut, les familles $\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ en A2.4, et la famille $\mathcal{H}_g$ (resp. $\mathcal{SH}_g$) est la famille des jacobiennes des courbes hyperelliptiques (resp. superelliptiques) lisses.

On déduit alors de la décomposition de $\mathcal{N}^g_{g-4} \cap \mathcal{P}^{irr}_g$ donnée en tête de cette section, de A2.4.4, A2.3.8 et A2.3.2 le corollaire suivant.

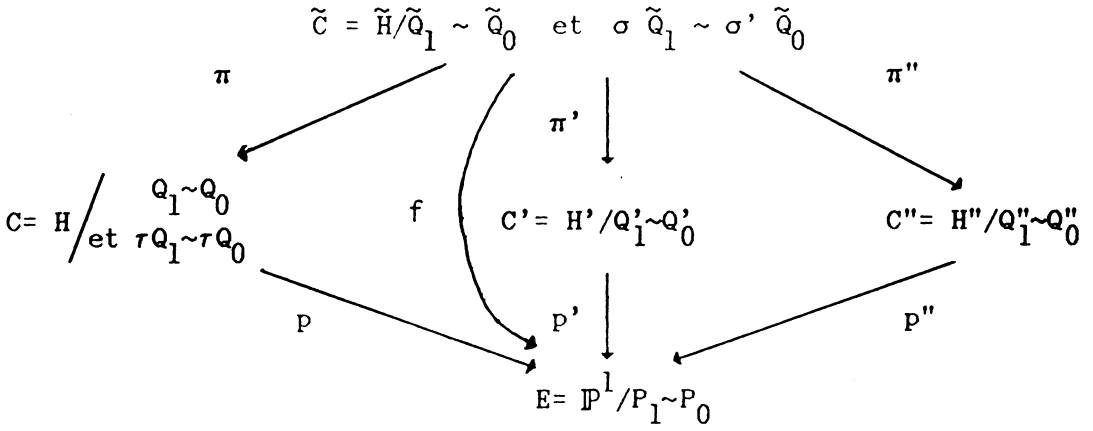
Corollaire 1.2 :

Pour $g \geq 5$, on a :

$$\mathcal{N}^g_{g-4} \cap \mathcal{P}^{irr}_g = \mathcal{J}_g \cup \mathcal{E}^2_g \cup \mathcal{H}^2_g \cup \mathcal{E}^2_{1,g-1} \cup \mathcal{H}^2_{1,g-1} \cup \bigcup_{2 \leq t \leq g/2} \mathcal{P}^{2,irr}_{t,g-t}.$$

§2. Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{H}^2_g$ pour $g \geq 5$.

Les éléments de $\mathcal{H}^2_g$ sont, on le rappelle, les variétés de Prym (P,Ξ) associées aux revêtements $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$, dégénérescences d'éléments de $\mathcal{S}_{g+1,0}$ de la forme suivante :



où $H' \simeq \mathbb{P}^1$

H, H'' et $\tilde{H}$ sont hyperelliptiques de genres respectifs g-1, g, 2g-1.

Q''_0 et Q''_1 sont des points de Weierstrass de H''.

On note $\tilde{n} : \tilde{H} \longrightarrow \tilde{C}$ la normalisation de $\tilde{C}$.

On a les suites exactes suivantes (cf. [Be 1] 3.5 et II.D.1.5.1)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & JH'' & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^*} & & \\ (2.1) \qquad 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\tilde{n}^*} & K = \mathrm{Ker}(J\tilde{H} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JH) & \longrightarrow & 0, \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Proposition 2.2. :

Pour $g \geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément de $\mathcal{H}_g^2$ a une seule composante irréductible de dimension $\geq g-4$, à savoir :

$$W_2 = (\tilde{n}^*)^{-1} \{\pi''^* L'' \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) \mid L'' \in \mathrm{Pic}^{g-4} H'', \ h^0(L'') \geq 1\}$$

■ Il découle de [Be 1] § 4 qu'un faisceau inversible L sur $\tilde{C}$ correspondant à un point générique d'une composante de dimension $\geq g-4$ de $\mathrm{Sing}\, \Xi$ tombe dans l'une des catégories suivantes :

1) Cas c) de la liste de Theorem 4.10 de loc. cit.:

On peut alors écrire $L = (f^* M)(D)$ avec M de degré 2 sur E et D non singulier sur $\tilde{C}$. On a alors $\tilde{n}^* L = f^* \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(D)$, avec $\pi_* D \in |\omega_H \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)|$.

Mais $|\omega_H \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)| = p^* |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g-4)|$. Comme D est non singulier, on peut l'écrire (comme en II.D.1.2.1) $D = \pi'^* D' + \pi''^* D''$ avec D' et D'' effectifs, $\deg D' + \deg D'' = g-4$. Pour que la famille de faisceaux inversibles associée soit de dimension $g-4$, il faut de plus que l'on ait $h^0(H', D') = h^0(H'', D'') = 1$ pour un élément générique L. Comme H' est rationnelle lisse, on a $D' = 0$. On est donc dans la famille de l'énoncé.

2) Cas f) de la liste de loc. cit. :

Un élément générique L satisfait alors à (cf. 4.10.2 de loc. cit) :

$$\tilde{n}^* L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)(D + \tilde{Q}_0 + \tilde{Q}_1 + \sigma' \tilde{Q}_0 + \sigma' \tilde{Q}_1)$$

avec $\pi_* D \in p^* |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(g-4)|$.

Mais, pour tout point $\tilde{x}$ de la courbe hyperelliptique $\tilde{H}$, on a $\sigma_{\tilde{H}}(\tilde{x}+\sigma'\tilde{x}) = \pi'^{*}\sigma_{H'}(1)$, de sorte qu'on a :

$$\tilde{n}^{*}L = f^{*}\sigma(2) \otimes \sigma(D)$$

On en déduit comme ci-dessus qu'on est dans la famille W_2.

Il reste à montrer l'irréductibilité de W_2.

Le diagramme (2.1) se complète en :

(2.3)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^{*}} \\ P & \xrightarrow[\tilde{n}^{*}]{} & K \end{array} ,$$

où $X=\hat{K}$ est polarisée de degré 2, $h = (\pi''^{*})\hat{}$, $q = (\tilde{n}^{*})\hat{}$.

L'isogénie h est associée à l'élément $\epsilon = \sigma_{H''}(Q_o''-Q_1'')$ de $JH''[2]$. La variété $q^{-1}(W_2)$ est isomorphe à l'image inverse par h de la sous-variété W^{g-4} de $J^{g-4}H''$. Elle est irréductible puisque la restriction $\mathrm{Pic}^{o}JH'' \longrightarrow \mathrm{Pic}^{o}W^{g-4}$ est un isomorphisme pour $g-4>0$. ■

On donnera en II.F.3.4 une autre description de W_2.

§3. Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{M}^{2}_{1,g-1}$ pour $g\geq 5$.

La situation est la même que dans le paragraphe précédent, excepté qu'on a maintenant $g(H')=1$, $g(H'')=g-1$ et que $\tilde{H}$ n'est plus hyperelliptique.

Le diagramme 2.3 devient :

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} X' \times X'' & \xrightarrow{h=(h',h'')} & JH' \times JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi'^{*},-\pi''^{*})} \\ P & \xrightarrow{\tilde{n}^{*}} & K \end{array}$$

Le noyau de l'isogénie $(\pi'^*,-\pi''^*)$ est d'ordre deux, engendré par $(\sigma_{H'}(Q'_1-Q'_o),\ \sigma_{H''}(Q''_1-Q''_o))=(\epsilon',\epsilon'')$.

Les isogénies q et h sont de degré 4. L'isogénie q fait de P un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ (définition donnée en A2.4).

Proposition 3.2. :

Pour $g\geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ a deux composantes irréductibles de dimension $\geq g-4$, à savoir :

$$W_2 = (\tilde{n}^*)^{-1}\{\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \otimes f^*\sigma_{\mathbb{P}}(2) \mid L'\in \mathrm{Pic}^1 H',\ L''\in \mathrm{Pic}^{g''-4}H'',\ h^0(L')h^0(L'')>0\}$$

et $$W_1 = \pi'^*\epsilon' + (\tilde{n}^*)^{-1}\{\pi''^*L'' \otimes f^*\sigma_{\mathbb{P}}(2) \mid L''\in \mathrm{Pic}^{g''-3}H'', h^0(L'')>0\}.$$

■ Comme dans la démonstration de 2.2, les seuls cas de la liste de Beauville qui nous concernent sont les cas c) et f).

Un élément générique relevant du cas c) vérifie comme en 2.2 :

$$\tilde{n}^*L = f^*\sigma(2) \otimes \sigma(\pi'^*D' + \pi''^*D'')$$

avec $$h^0(H',D') = h^0(H'',D'') = 1.$$

Si deg D'=0, il est facile de vérifier qu'on a $h^0(\tilde{C},L)=3$. On n'est donc pas dans P.

On a donc deg D'=1 et on est dans la famille W_2.

Un élément générique relevant du cas f) vérifie :

$$\begin{aligned}\tilde{n}^*L &= f^*\sigma_{\mathbb{P}}(1) \otimes \sigma(D+\tilde{Q}_o+\tilde{Q}_1+\sigma'\tilde{Q}_o+\sigma'\tilde{Q}_1)\\ &= f^*\sigma_{\mathbb{P}}(2) \otimes \sigma(D+\tilde{Q}_o-\tilde{Q}_1+\sigma'\tilde{Q}_o-\sigma'\tilde{Q}_1)\\ &= f^*\sigma_{\mathbb{P}}(2) \otimes \pi'^*\epsilon' \otimes \sigma(\pi'^*D'+\pi''^*D'')\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on a soit deg D'=0, auquel cas on est dans W_1, soit deg D'=1, auquel cas on est dans W_2 (qui est stable par translation par $\pi'^*\epsilon'$).

On vérifiera en II.F.5.1 que W_1 correspond effectivement à des singularités de Ξ.

Les sous-variétés W_1 et W_2 de P sont isomorphes aux images par q des images inverses par h des sous-variétés $\{0\}\times W^{g''-3}$ et $JH'\times W^{g''-4}$ de $JH'\times JH''$. Elles sont donc irréductibles puisque les applications naturelles $\mathrm{Pic}^0 J \longrightarrow \mathrm{Pic}^0 W^d$ sont injectives pour $d>0$ (pour $g''=4$, il suffit de remarquer que $W_2 = q(X'\times \mathrm{Ker}\ h'') = q(X'\times\{0\})$. ■

On donnera en II.F.5 une autre description de W_1 et de W_2.

§4. Le cas de la dimension 4.

En ce qui concerne les familles $\mathcal{V}_{5,t}$, $0\leq t\leq 2$, toute l'analyse de II.D.1 reste valable. En particulier, sous l'hypothèse que la ramification Δ de $p : C \longrightarrow E$ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}\,\Xi &= \phi \quad \text{pour} \quad t=1\\ &= \{f^*M \mid M^2=\sigma(\delta)\} \quad \text{pour} \quad t=0,2.\end{aligned}$$

Dans le cas $t=0$, on a $f^*\delta'\equiv 0$ $(\delta'\in JE[2])$, donc le lieu singulier du diviseur Ξ a deux points d'ordre 2. Par II.D.1.4.2, $\mathcal{E}_4^2 = \mathrm{Pr}(\mathcal{V}_{5,o})$ est de dimension 8. Sur $\mathcal{E}_{2,2}^2 = \mathrm{Pr}(\mathcal{V}_{5,2})$, on a 4 points singuliers d'ordre 2. La méthode de II.D.1.4.2 donne $\dim \mathcal{E}_{2,2}^2 = 6$. On a d'ailleurs $\overline{\mathcal{E}_{2,2}^2} = \mathcal{A}_{2,2}^2$ et on retrouve ainsi le fait que le diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}_{2,2}^2$ a 4 points singuliers, qui sont d'ordre 2 (Al.3.6). Enfin, il résulte de 1.1 que

$$\overline{\mathcal{E}_{2,2}^2} = \mathcal{A}_{2,2}^2 = \overline{\mathcal{H}_{2,2}^2} \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}.$$

Résumons ces résultats dans une proposition.

Proposition 4.1. :

1) Le sous-ensemble $\mathcal{E}_4^2$ de $\mathcal{A}_4$ est de dimension 8. Tout élément a deux points d'ordre deux comme seules singularités de son diviseur thêta.

2) Le diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{E}_{1,3}^2$ est lisse.

3) Le sous-ensemble $\mathcal{E}_{2,2}^2$ de $\mathcal{A}_4$ de dimension 6. Le diviseur thêta d'un élément générique a 4 points d'ordre deux comme seules singularités.

On a $\overline{\mathcal{C}}^2_{2,2} = \mathcal{A}^2_{2,2} \subset \overline{\mathcal{C}}^2_4$.

On démontre des résultats analogues pour $\mathcal{H}^2_{t,4-t}$, $0 \leq t \leq 2$:

Proposition 4.2. :

Les sous-ensembles $\mathcal{H}^2_4$, $\mathcal{H}^2_{1,3}$ et $\mathcal{H}^2_{2,2}$ de $\mathcal{A}_4$ sont de dimensions respectives 7, 6 et 6. Le diviseur thêta d'un élément générique a respectivement 2, 2 et 4 points d'ordre deux comme seules singularités.

■ On examine, comme dans les démonstrations de 2.2 et 3.2, les différents cas de la liste du Theorem 4.10 de [Be 1] qui peuvent nous concerner.

1) Cas c) de la liste.

On obtient les deux points de $W = (\tilde{n}^*)^{-1}\{f^*\sigma_{\mathbb{P}^1}(2)\}$.

On a cependant la condition supplémentaire que pour le faisceau inversible $\tilde{L}$ correspondant sur $\tilde{C}$, $h^0(\tilde{C},\tilde{L})$ doit être pair. On a :

$$H^0(\tilde{C},\tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(f^*\sigma(2)) \mid s(\tilde{Q}_0) = s(\tilde{Q}_1) \text{ et } s(\sigma'\tilde{Q}_0) = s(\sigma'\tilde{Q}_1)\}.$$

Pour $t=0$, $\tilde{H}$ est hyperelliptique de genre 7 et :

$H^0(\tilde{C},\tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(\tilde{H}, 4g^1_2) \mid s(\tilde{Q}_0) = s(\tilde{Q}_1)\}$, de dimension 4.

Pour $t=1$, H' est elliptique et :

$H^0(\tilde{C},\tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(H', p'^*\sigma(2)) \mid s(Q'_0) = s(Q'_1)\}$, de dimension 3.

Pour $t=2$, $H^0(\tilde{C},\tilde{L})$ est de dimension 2.

L'ensemble W ne contribue donc à des singularités de Ξ que pour $t=0$ ou $t=2$.

2) Cas d) de la liste.

Il faut chercher si la courbe C admet des faisceaux inversibles N avec $h^0(C,N)=2$, $N^2 \simeq \omega_C$. Soit $n : H \longrightarrow C$ sa normalisation. La courbe H est hyperelliptique de genre 3 et d'involution τ. On obtient C en identifiant Q_0 à Q_1 et τQ_0 à τQ_1. On a $n^*N = 2g^1_2 + \gamma$ avec $\gamma \in JH[2]$, et :

$2= h^0(C,N)= \dim\{s\in H^0(n^*N) \mid s(Q_o)= s(Q_1) \text{ et } s(\tau Q_o)= s(\tau Q_1)\}.$

Si γ est nul, on est dans W_2. Si γ est non nul, il découle du fait qu'il existe une section non nulle de n^*N nulle en Q_o et en Q_1 qu'on a :

$$\exists x,y\in H \qquad 2g_2^1+\gamma \equiv Q_o+Q_1+x+y.$$

Il existe alors 4 points de Weierstrass $w_1,\ldots,w_4$ de H tels que : $\gamma \equiv w_1+w_2-w_3-w_4$. Le diviseur Q_o+Q_1 est alors contenu dans un diviseur du pinceau sans point base $|w_1+w_2+w_3+w_4|$, ce qui ne se produit pas pour Q_o et Q_1 génériques sur H.

3) Cas f) de la liste.

On obtient : $(n^*)^{-1}\{f^*\sigma_{\mathbb{P}}(1)(\tilde{Q}_o+\tilde{Q}_1+\sigma'\tilde{Q}_o+\sigma'\tilde{Q}_1)\}$, qui est égal à W pour t=0, distinct sinon. Pour t=1 ou 2, on obtient donc deux points singuliers d'ordre deux supplémentaires.

4) Cas g) de la liste.

Ce cas n'intervient en fait pas : la courbe $H/Q_1\sim Q_o$ n'a pas de thetanull puisque le système linéaire $|\omega_H(Q_1+Q_o)|$ ne contient pas de diviseur de la forme 2D avec $h^0(D)\geq 2$.

On a donc bien trouvé le nombre requis de points singuliers d'ordre deux pour les éléments génériques de $\mathcal{H}_4^2$, $\mathcal{H}_{1,3}^2$, $\mathcal{H}_{2,2}^2$. Pour prouver que ces points correspondent bien à des singularités du diviseur thêta, il suffit de remarquer que par 1.1, on a : $\mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}_{1,3}^2 \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}$, $\mathcal{H}_{2,2}^2 \subset \overline{\mathcal{E}_{2,2}^2}$, et d'appliquer 4.1. Les résultats concernant $\mathcal{H}_{2,2}^2$ peuvent d'ailleurs se déduire de l'égalité $\overline{\mathcal{H}_{2,2}^2}=\mathcal{A}_{2,2}^2$. ■

Remarque 4.3. :

Il découle des deux propositions précédentes, et du fait que le diviseur thêta d'une jacobienne non hyperelliptique de dimension 4 ne peut avoir deux points singuliers d'ordre deux, qu'aucun des éléments de $\mathcal{E}_4^2$, $\mathcal{H}_4^2$ ou $\mathcal{H}_{1,3}^2$ n'est une jacobienne. On a d'ailleurs aussi $\mathcal{A}_{2,2}^2 \cap \mathcal{J}_4=\phi$, par exemple par II.C.1.3 et II.B.1.

II.F. La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la recherche de trisécantes éventuelles aux variétés de Kummer des variétés de Prym irréductibles, en procédant de la façon suivante. Les résultats de la partie II.C nous permettent d'affirmer que l'existence d'une inclusion $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$ avec $a \neq 0$ et $\{0,a\} \cap \{c,d\} = \phi$ sur une variété de Prym irréductible (P,Ξ) de dimension $g \geq 4$ entraîne $\dim \Xi_a \cap \mathrm{Sing}\,\Xi \geq g-4$.

La variété (P,Ξ) appartient en particulier, lorsque $g \geq 5$, à l'une des familles étudiées en II.D et II.E, c'est-à-dire (II.E.1.2) :

$$(P,\Xi) \in \mathcal{J}_g^2 \cup \mathcal{C}_g^2 \cup \mathcal{C}_{1,g-1}^2 \cup \mathcal{H}_g^2 \cup \mathcal{H}_{1,g-1}^2 \cup \bigcup_{2 \leq t \leq g/2} \mathcal{P}_{t,g-t}^2 .$$

Lorsque (P,Ξ) appartient à l'une des familles $\mathcal{C}_g^2$, $\mathcal{C}_{1,g-1}^2$, $\mathcal{H}_g^2$ ou $\mathcal{H}_{1,g-1}^2$, on a à notre disposition une description assez précise de $\mathrm{Sing}\,\Xi$ pour déterminer, en dimension ≥ 5 , les éléments a de P vérifiant $\dim \Xi_a \cap \mathrm{Sing}\,\Xi \geq g-4$. Pour chacune des trois premières familles ci-dessus, on arrive alors à prouver que pour aucun de ces éléments a , il n'existe d'inclusion non triviale $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. C'est l'objet des paragraphes 1 à 3.

Dans le paragraphe 4, on étudie le cas des familles $\mathcal{P}_{t,g-t}^2$ pour $2 \leq t \leq g/2$, en faisant une hypothèse de récurrence. Il me semble important de préciser que les techniques employées s'appliquent de la même façon aux éléments de $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$, pourvu que la conjecture de la trisécante soit vraie en dimension $< g$. Le seul - mais il est de taille! - obstacle à cette approche de cette conjecture est l'absence de description complète de $\mathcal{N}_{g-4}^g$. S'il se révélait vrai que les composantes de $\mathcal{N}_{g-4}^g$ décrites en II.D et A1, à savoir $\overline{\mathcal{J}}_g$, $\overline{\mathcal{C}_g^2}$, $\overline{\mathcal{C}_{1,g-1}^2}$ et $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$ pour $2 \leq t \leq g/2$ (pour $g \geq 5$), recouvrent $\mathcal{N}_{g-4}^g \cap \mathcal{A}_g^{irr}$, la conjecture de la trisécante serait démontrée. Il suffirait aussi de montrer qu'une variété abélienne irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante, et qui n'est pas une jacobienne, appartient a priori à un $\mathcal{A}_{t,g-t}^2$ avec $2 \leq t \leq g/2$. C'est exactement de cette façon qu'on démontre la conjecture en dimension 4 : des résultats de Ziv Ran ([Ra]) nous permettent de prouver que $(P,\Xi) \in \mathcal{A}_{2,2}^2 = \mathcal{P}_{2,2}^2$.

L'étude de la famille $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ est reportée à la fin de cette section car elle fait appel aux techniques des paragraphes 1 à 4. On a aussi besoin de la conjecture en dimension 4 pour traiter le cas de $\mathcal{H}^2_{1,4}$.

On a ainsi montré la conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym (généralisées) de dimension quelconque, donc en particulier pour toutes les variétés abéliennes de dimension ≤ 5 :

Théorème. Toute variété de Prym irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante est une jacobienne de courbe.

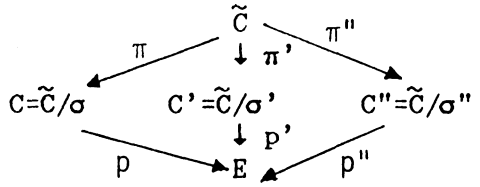
■ Soit (P,Ξ) la variété en question. On procède par récurrence sur sa dimension g. Le premier cas non trivial est le cas $g=4$, traité en 4.1. On suppose donc $g\geq 5$ et la conjecture vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$. Comme on l'a expliqué plus haut, soit (P,Ξ) est dans l'une des familles $\mathcal{E}^2_g$, $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $\mathcal{H}^2_g$, $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ ou $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$, auquel cas sa variété de Kummer n'a pas de trisécante par 1.1, 2,1, 3.1, 5.1 et 4.1, soit (P,Ξ) est une jacobienne. ■

§1. La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{E}^2_g$, $g\geq 5$.

On rappelle les définitions et notations employées en II.D.1.

La famille $\mathcal{Y}_{g+1,0}$ est la famille des revêtements doubles étales connexes $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ des courbes lisses C de genre $g+1$ admettant une structure superelliptique, c'est-à-dire un morphisme p de degré 2 sur une courbe elliptique lisse E, pour laquelle le groupe de Galois de $p\pi : \tilde{C} \longrightarrow E$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$. Si on note ce groupe $\{1,\sigma,\sigma',\sigma''\}$, avec $C \simeq \tilde{C}/\sigma$, on demande de plus que $g(\tilde{C}/\sigma') = 1$ et $g(\tilde{C}/\sigma'') = g+1$.

On prend les notations II.D.1.1 :



$\sigma(-\delta') = \Lambda^2 p'_* \sigma_{C'}$, $\sigma(-\delta'') = \Lambda^2 p''_* \sigma_{C''}$, $\sigma(-\delta) = \Lambda^2 p_* \sigma_C = \sigma(-\delta'-\delta'')$.

L'ensemble $\mathcal{C}_g^2 \subset \mathcal{P}_g$ est l'ensemble des variétés de Prym correspondant aux éléments de $\mathcal{P}_{g+1,0}$.

Théorème 1.1. Soit (P,Ξ) un élément de $\mathcal{C}_g^2$ de dimension $g\geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.

■ Si la variété de Kummer de (P,Ξ) admet une trisécante, il existe (cf. II.A.1) des éléments non nuls a, c et d de P avec $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$ et $a \notin \{c,d\}$. Il résulte alors de II.C.2.3 qu'on a $\dim \Xi_a \cap \mathrm{Sing}\,\Xi \geq g-4$. On rappelle (II.D.1.2.2) que $\mathrm{Sing}\,\Xi$ est de dimension $g-4$, et a une seule composante de dimension $g-4$, à savoir :

$$W_2 = \{\pi''^*\sigma(D''+p''^*M) \,|\, D''\in C''^{(g-4)} \ , \ M\in E^{(2)} \ , \ p''_*D'' + 2M \equiv \delta\} \ .$$

On a donc $W_2 \subset \Xi_a$.

On rappelle aussi qu'on a une isogénie $\pi''^* : P'' \longrightarrow P$, où $P'' = \mathrm{Ker}(JC'' \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JE)$; son noyau est $\{0,p''^*\delta'\}$ (cf.II.D.1.5.1). L'ensemble :

$$Z = \{\sigma(D''+p''^*M) \,|\, D''\in C''^{(g-4)} \ , \ M\in E^{(2)} \ , \ p''_*D'' + 2M \equiv \delta\}$$

est irréductible par A4.1. Si on désigne par Θ'' le diviseur thêta canonique de $J^gC'' = J^{g''-1}C''$, et si on écrit $a = \pi''^*a''$ avec $a''\in P''$, on a alors $Z \subset \Theta''_{a''}$. Par A4.1, ceci entraîne $a'' = \sigma(-p''^*e+x+y)$ avec $e\in E$, $x,y \in C''$. On a alors :

$$\Xi.\Xi_a = \pi''^*\{L'' \in \Theta''.\Theta''_{a''} \,|\, \mathrm{Nm}\ L'' = \sigma(\delta)\} \ ,$$

qui est irréductible par A4.3.ii) sauf peut-être dans l'un des deux cas suivants (on rappelle que $g(C'') = g+1 \geq 6$) :

• $a'' = \sigma(x''-y'')$. Comme $\mathrm{Nm}\ a''=0$, on a $y''=\tau''x''$. On a alors (cf. II.B.2) :

$$\Xi.\Xi_a = \{\pi''^*\sigma(x''+D'') \,|\, D''\in C''^{(g''-2)}, p''_*D'' \equiv \delta-p''x''\} \cup$$
$$\{\pi''^*\sigma(K_{C''}-\tau''x''-D'') \,|\, D''\in C''^{(g''-2)}, p''_*[K_{C''}-\tau''x''-D''] \equiv \delta\} \ .$$

Pour un élément du second ensemble, on a :

$$\sigma(K_{C"}-\tau"x"-D")\otimes\tau"^{*}\sigma(K_{C"}-\tau"x"-D") \simeq p"^{*}\sigma(\delta)$$

$$\Longrightarrow \quad K_{C"}-\tau"x"-D" \equiv p"^{*}\delta' + x" + \tau"D"$$

$$\text{et} \quad p"_{*}(\tau"D") \equiv \delta - p"x" \ ,$$

de sorte que ces deux ensembles diffèrent de $\pi"^{*}p"^{*}\delta' = 0$. Ils sont donc égaux et irréductibles, et $\Xi.\Xi_a$ est irréductible (bien que $(\pi"^{*})^{-1}(\Xi.\Xi_a)$ ne le soit pas).

• $a" = \sigma(-p"^{*}e+x+y)$ avec $\delta \equiv p"x-e+\delta"$, soit $\delta' \equiv p"x-e$. Comme $Nm\ a"=0$, on a $p"x \equiv p"y \equiv \delta'+e$ donc $p"x=p"y$. Si $x=y$, $a" = \sigma(2x-p"^{*}(p"x-\delta')) = \sigma(p"^{*}\delta'+x-\tau"x)$ et $a = \pi"^{*}(x-\tau"x)$, cas déjà traité ci-dessus. Si $x=\tau"y$, on a $a" = \sigma(-p"^{*}e+p"^{*}p"x) = \sigma(\delta')$ et $a=0$, ce qui est impossible. ■

Remarques.

1.2. Pour $g\geq 5$, aucun élément de $\mathcal{C}^2_g$ n'est donc une jacobienne. C'est encore vrai pour $g=4$ par II.E.4.3 (ces résultats peuvent aussi se déduire de [Sho 1]).

1.3. On peut déduire de la démonstration ci-dessus et de II.C.2.1 que si $(P,\Xi) \in \mathcal{C}^2_g$ avec $g\geq 5$ et si $\Xi.\Xi_a$ est réductible, alors il existe une courbe elliptique $F \longrightarrow P$ avec $F.\Xi = 2$ et $a\in F$. Comme la structure superelliptique de $C"$ est unique, on a :

$$\begin{array}{ccccc} F" = (\pi"^{*})^{-1}(F) & \hookrightarrow & P" & \hookrightarrow & JC" \\ \Big\downarrow 2:1 & & & & \Big\downarrow 2:1 \\ F & & \hookrightarrow & & P \end{array}$$

et $F".\Theta" = 4$.

Il existe alors un morphisme de degré 4 de $C"$ sur $F"$. Pour un élément générique de $\mathcal{C}^2_g$ les intersections $\Xi.\Xi_a$ sont toutes irréductibles.

§2. La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{C}^2_{1,g-1}$, $g\geq 5$.

La famille $\mathcal{S}_{g+1,1}$ a été définie en II.D.1.1. On a $\mathcal{C}^2_{1,g-1} = Pr(\mathcal{S}_{g+1,1})$. Les notations sont les mêmes que celles du paragraphe précédent, excepté qu'on a maintenant $g(C') = g' = 2$ et $g(C") = g" = g$.

Théorème 2.1. Soit (P,Ξ) un élément de $\mathcal{C}^2_{1,g-1}$ de dimension $g\geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.

■ On suppose qu'on a une inclusion non triviale $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. Il résulte de II.D.1.2.2 et II.D.1.2.9 que Sing Ξ a une seule composante irréductible de dimension $g-4$, à savoir :

$$W_2 = \{\sigma(\pi'^*x'+\pi''^*D''+f^*M) \,|\, x'\in C',\ D''\in C''^{(g''-5)},\ M\in E^{(2)},\ p'x'+p''_*D''+2M\equiv\delta\} .$$

Comme dans 1.1, on a $W_2\subset\Xi_a$. On rappelle qu'on a une isogénie $(\pi'^*,\pi''^*) : P'\times P'' \longrightarrow P$, où $P' = \mathrm{Ker}(JC' \longrightarrow JE)$, $P'' = \mathrm{Ker}(JC'' \longrightarrow JE)$ (cf. II.D.1.5.1). On écrit donc $a = \pi'^*a'+\pi''^*a''$ avec $\mathrm{Nm}\, a' = \mathrm{Nm}\, a'' = 0$.

Lemme 2.2. $W_2\subset\Xi_a \iff a'' = \sigma(x+y-p''^*e)$ avec $x,y\in C''$ et $e\in E$.

■ Commençons par la remarque suivante :

(2.3) Si $\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \simeq \mathcal{O}_{\widetilde{C}}$, avec $\deg L' = \deg L'' = 0$, alors il existe un faisceau inversible sur E tel que $L'\simeq p'^*N$, $L''\simeq p''^*N^{-1}$.

En effet, on a alors, $\pi'^*L' \simeq \pi''^*L''^{-1} \simeq \sigma''^*\pi'^*L' \simeq \pi'^*\tau'^*L'$. Comme π' est ramifiée, π'^* est injective. On a donc $L'\simeq \tau'^*L'$. Comme p' est ramifiée en deux points, il existe un faisceau inversible N sur E tel que $L'\simeq p'^*N'$ ([Mu 2] Corollary 2 page 333). On en déduit $\pi''^*L'' \simeq \pi'^*L'^{-1} \simeq f^*N^{-1}$ soit, puisque π''^* est injective (π'' ramifiée), $L'' \simeq p''^*N^{-1}$.

Soient maintenant $D''\in C''^{(g''-5)}$ et $M\in E^{(2)}$ quelconques. On choisit $x'\in C'$ tel que $p'x' + p''_*D'' + 2M \equiv \delta$. On a alors, par hypothèse :
$\exists \bar{x}'\in C'$ $\exists \bar{D}''\in C''^{(g''-1)}$

$$\begin{cases} \pi'^*(\bar{x}'+a')+\pi''^*(\bar{D}''+a'') \equiv \pi'^*x'+\pi''^*D''+f^*M \\ p'\bar{x}'+p''_*\bar{D}'' \equiv \delta . \end{cases}$$

Par la remarque 2.3, il existe un diviseur N de degré 0 sur E tel que :

(2.4)
$$\begin{cases} x'-p'^{*}N \equiv \bar{x}'+a' \\ D''+p''^{*}M+p''^{*}N \equiv \bar{D}''+a'' \ . \end{cases}$$

Si on prend les mêmes x' et D'' mais qu'on change M en $M_1=M+\epsilon$, $\epsilon\in Pic^{o}E[2]$, on obtient un autre diviseur N_1 tel que :

$$\begin{cases} x'-p'^{*}N_1 \equiv \bar{x}_1'+a' \\ D''+p''^{*}M+p''^{*}\epsilon+p''^{*}N_1 \equiv \bar{D}_1''+a'' \ . \end{cases}$$

On a alors $\bar{x}_1' \equiv \bar{x}'+p'^{*}(N-N_1)$.

Par II.D.1.2.7, cela entraîne que l'une des équivalences suivantes est satisfaite :

(A') $\quad N\equiv N_1$

ou

(B') $\quad N-N_1+p'\bar{x}' \equiv \delta' \ .$

De même, on a $\bar{D}_1'' \equiv \bar{D}''+p''^{*}(\epsilon+N_1-N)$ et, <u>si</u> $\bar{D}''$ <u>est</u> p"-<u>simple</u> (cf. II.D.1.2.7) :

(A") $\quad N\equiv N_1+\epsilon$

ou

(B") $\quad N_1-N+\epsilon+p''_{*}\bar{D}'' \equiv \delta'' \ .$

Remarquons que :

Si (A') est vrai, (A") est faux, (B") est vrai et

$$\epsilon \equiv \delta''-p''_{*}\bar{D}'' \ .$$

Si (B') est vrai, on a $p''_{*}\bar{D}'' \equiv \delta-p'_{*}\bar{D}' \equiv N-N_1+\delta''$ donc (B") est faux, (A") est vrai et :

$$\epsilon \equiv N-N_1 \equiv \delta'-p'_{*}\bar{D}' \ .$$

Comme on peut toujours prendre ϵ dans $Pic^{o}E[2]-\{0,\delta'-p'_{*}\bar{D}',\delta''-p''_{*}\bar{D}''\}$, on a montré que $\bar{D}''$ n'est pas simple, de sorte qu'on a par 2.4 :

$\forall D''\in C''^{(g''-5)} \quad \forall M\in E^{(2)} \quad \exists e\in E \quad \exists G''>0 \quad \exists N\in Div^{o}E$

$$D''+p''^{*}M-a'' \equiv p''^{*}(e-N)+G'' .$$

Dans les notations de A4.2, cela s'écrit :

$$(T_2)_{-a''} \subset \Theta .$$

Comme $g''\geq 5$, on peut conclure. La réciproque est évidente. ■

Lemme 2.5. Si on a une inclusion non triviale $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, alors $a\in\pi'^{*}P' \cup \pi''^{*}P''$.

■ On raisonne par l'absurde, de sorte qu'on suppose $a'\notin p'^{*}\mathrm{Pic}^{o}E$, $a''\notin p''^{*}\mathrm{Pic}^{o}E$.

On introduit :

$$U = \{(x',\sigma(D''),\alpha) \mid x'\in C' \ , \ D''\in C''^{(g''-1)} \ , \ \alpha\in \mathrm{Div}^{o}E \ , \ p'^{*}_{*}x'+p''^{*}_{*}D'' \equiv \delta \ ,$$
$$H^{o}(x'-a'-p'^{*}\alpha) \neq 0 \ , \ H^{o}(D''-a''+p''^{*}\alpha) \neq 0\} .$$

Il découle de la remarque 2.3 que l'application naturelle $U \longrightarrow \Xi\cap\Xi_a$ qui à $(x',\sigma(D''),\alpha)$ associe $\sigma(\pi'^{*}x'+\pi''^{*}D'')$ est surjective. On considère maintenant la projection $\mathrm{pr}_{1,3} : U \longrightarrow B' = \{(x',\alpha) \mid \sigma(x') \in \Theta'.\Theta'_{a',+p',^{*}\alpha}\}$.

La courbe B' est irréductible : en effet, la projection $\mathrm{pr}_2 : B' \longrightarrow \mathrm{Pic}^{o}E$ est de degré 2 puisque $a'+p'^{*}\alpha$ n'est jamais nul et la projection $\mathrm{pr}_1 : B' \longrightarrow \Theta'$ est aussi de degré 2 (la fibre de $x'\in\Theta'$ est $(p'^{*}\mathrm{Pic}^{o}E).\Theta'_{a',-x',}$). Si B' était réductible, elle devrait être réunion de deux copies de E et de deux copies de $\Theta'\simeq C'$, ce qui est absurde.

La projection $\mathrm{pr}_{1,3}$ est surjective : la fibre de $(x',\alpha)\in B'$ est $\{L'' \in \Theta''.\Theta''_{a''-p'',^{*}\alpha} \mid \mathrm{Nm}\ L'' \simeq \sigma(\delta-p'x')\}$, de dimension $g''-3$ par A4.3 puisque $a''\notin p''^{*}\mathrm{Pic}^{o}E$. Toujours par A4.3, cette fibre est irréductible sauf si on est dans l'un des cas suivants (on rappelle que par 2.2, on a $a'' = \sigma(x+y-p''^{*}e)$) :

- $\alpha = \sigma(e-p''x)$ ou $\sigma(e-p''y)$
- $\alpha = \sigma(\delta'-p'x'+e-p''x)$ ou $\sigma(\delta'-p'x'+e-p''y)$
- $g''=5$ et $\sigma(\delta-p'x')$ appartient à un sous-ensemble fini de $\mathrm{Pic}^{4}E$.

Les fibres de $pr_{1,3}$ sont donc de dimension pure $g"-3$, génériquement irréductibles, de sorte que U a une seule composante irréductible de dimension $\geq g"-3+1 = g-2$. On en déduit que $\Xi.\Xi_a$ est irréductible. Contradiction. ■

On peut appliquer 2.5 à a,b,c et d. Montrons qu'on a soit $a,b,c,d\in P'$, soit $a,b,c,d\in P"$. Si ce n'est pas le cas, on a par exemple $a\in P'-P"$ et $c\in P"-P'$. Mais on a aussi $\Xi.\Xi_{a-c} \subset \Xi_{-c} \cup \Xi_d$, de sorte que $a-c\in P'\cup P"$, ce qui est impossible.

1) Si $a\in P"-P'$ et $b,c,d\in P"$, on écrit :

$$a = \pi"^*a" \ , \ b = \pi"^*b" \ , \ c = \pi"^*c" \ , \ d = \pi"^*d" \ .$$

Les éléments de $\Xi\cap\Xi_a$ sont les $\sigma(\pi'^*x'+\pi"^*D")$ avec

$$\begin{cases} p'x'+p"_*D" = \delta \\ \exists\alpha\in \mathrm{Div}^0E \qquad H^0(D"-a"-p"^*\alpha) \neq 0 \ , \ H^0(x'+p'^*\alpha) \neq 0 \ . \end{cases}$$

On déduit alors de II.D.1.2.7 que :

- soit $\alpha\equiv 0$ et $\sigma(D") \in \Theta".\Theta"_{a"}$
- soit $\alpha+p'x'-\delta' \equiv 0$ et :

$$\begin{aligned} D"-a"-p"^*\alpha &\equiv D"-a"-p"^*\delta'+p"^*p'x' \\ &\equiv D"-a"+p"^*\delta"-p"^*p"_*D" \\ &\equiv K_{C"}-a"-\tau"D" \equiv K_{C"}-\tau"(D"-a") \end{aligned}$$

de sorte qu'on a encore $\sigma(D") \in \Theta".\Theta"_{a"}$.

De l'inclusion $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, on déduit $\Theta".\Theta"_{a"} \subset \Theta"_{c"} \cup \Theta"_{d"}$ et, par II.B.4, $a" = \sigma(m"-\tau"m")$ avec $m"\in C"$. Il est alors facile de vérifier que :

$$\Xi.\Xi_a = \{\sigma(\pi'^*x'+\pi"^*m"+\pi"^*D") \,|\, x'\in C', D"\in C"^{(g"-2)}, p'x'+p"_*D" \equiv \delta-p"m"\} \ ,$$

qui est trivialement irréductible. Contradiction.

2) Si $a,b,c,d\in P'$, on écrit $a = \pi'^*a',\ldots$. On montre comme ci-dessus que $\Xi.\Xi_a$ est réunion de :

$$I' = \{\sigma(\pi'^*x'+\pi"^*D"+f^*e) \,|\, x'\in C', D"\in C"^{(g"-3)}, e\in E, p'x'+p"_*D"+2e \equiv \delta\} \ ,$$

irréductible indépendant de a', et de :

$$I'(a') = \{\sigma(\pi'^{*}x'+\pi''^{*}D'') \,|\, \sigma(x') \in \Theta'.\Theta'_{a}, D''\in C''^{(g''-1)}, p'x'+p''_{*}D'' \equiv \delta\} .$$

Comme C' est de genre 2, on peut toujours écrire $a' = \sigma_{C'}(m'-\tau'm')$ avec $m'\in C'$. On a alors :

$$I'(a') = \{\sigma(\pi'^{*}m'+\pi''^{*}D'') \,|\, D''\in C''^{(g''-1)}, p''_{*}D'' \equiv \delta-m'\} ,$$

qui est irréductible.

On a alors $I'(a') \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, soit par exemple $I'(a') \subset \Xi_c$. Il ressort de ce qui précède que $\Xi_c \supset I$ puisque $c\in P'$, de sorte que $\Xi_c \supset \Xi_a$. Contradiction. ■

§3. La conjecture des trisécantes pour les éléments de $\mathcal{H}_g^2$, $g\geq 5$.

On rappelle la construction des éléments de $\mathcal{H}_g^2$ (II.E.2 et A2.4).

Soit H" une courbe hyperelliptique lisse de genre $g\geq 5$, Q''_o et Q''_1 deux points de Weierstrass de H" et $\epsilon = \sigma(Q''_1-Q''_o) \in JH''[2]$. Soit $X \xrightarrow{h} JH''$ le revêtement étale de degré 2 associé à ϵ . Si Θ'' est un diviseur thêta de JH", $\sigma(h^{*}\Theta'') = M$ définit une polarisation de degré 2 sur X . Le groupe H(M), isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$, contient Ker h = {0,α} . Pour chacun des deux éléments de H(M)-Ker h , le quotient de (X,M) par cet élément est une variété abélienne principalement polarisée (P,Ξ), élément de $\mathcal{H}_g^2$.

Théorème 3.1. Soit (P,Ξ) un élément de $\mathcal{H}_g^2$ de dimension $g\geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.

■ Comme dans le paragraphe 1, on suppose qu'on a une inclusion $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$ avec $a\neq 0$, $\{0,a\} \cap \{c,d\} = \phi$. On déduit de II.C.2.3 que :

$$\dim \Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi \geq g-4 . \tag{3.2}$$

On a montré en II.E.2.2 que Sing Ξ a une seule composante de dimension $\geq g-4$, dont on va maintenant donner une description différente.

On rappelle qu'on a le diagramme (II.E.2.3) :

(3.3)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^*} \\ P & \longrightarrow & K \end{array} .$$

On prendra les notations suivantes (outre celles de II.E.2) :

Θ'' diviseur thêta sur JH''

Ξ diviseur thêta sur P , $\tilde{\Xi} = q^*\Xi$ tel que :

$M = \sigma(\tilde{\Xi}) = \sigma(h^*\Theta'')$, polarisation de degré 2 sur X

$\operatorname{Ker} \pi''^* = \{0,\epsilon\}$ où ϵ est l'élément de JH'' associé à $\sigma_{H''}(Q''_o - Q''_1)$

$\operatorname{Ker} h = \{0,\alpha\}$ $\operatorname{Ker} q = \{0,\beta\}$, de sorte que α et β engendrent $H(M)$

$s \in H^o(X,M)$ une équation de $h^*\Theta''$,

$t \in H^o(X,M)$ une équation de $h^*\Theta''_\epsilon$, telles que :

$\tilde{\Xi} = \operatorname{div}(s+t)$ (cf. A2.1.2).

Sur $J^{g-1}H''$, on a :

$$\operatorname{Sing}\Theta . \operatorname{Sing}\Theta_\epsilon = Z + Z_\epsilon \text{ , avec :}$$
$$Z = g^1_2 + Q''_o + W^{g-4} .$$

Il est clair sur l'équation de $\tilde{\Xi}$ que les points de $h^{-1}(\operatorname{Sing}\Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_\epsilon)$ sont singuliers sur $\tilde{\Xi}$.

Comme on l'a remarqué juste après II.E.2.3, l'image inverse $\tilde{Z}$ de Z par h est irréductible de dimension $g-4$ (pour $g \geq 5$).

(3.4) La composante de dimension $g-4$ de $\operatorname{Sing}\Xi$ est donc $q(\tilde{Z})$.

Enfin, on remarque que l'on a :

$$\tilde{\Xi}.\tilde{\Xi}_\beta = \text{partie fixe de } |M| = h^{-1}(\Theta''.\Theta''_\epsilon)$$
$$= \tilde{T} + \tilde{T}_\alpha ,$$

avec $\tilde{T} = h^{-1}(Q''_o + W^{g-2})$, sous-variété irréductible de dimension $g-2$ de X . En particulier $\Xi.\Xi_{q(\beta)} = q(\tilde{T})$ est irréductible.

Revenons à notre trisécante. Soit $\tilde{a}$ un antécédent de a par q . On déduit de (3.2) et (3.4) qu'on a $\tilde{\Xi}_{\tilde{a}} \supset \tilde{Z} \cup \tilde{Z}_{\alpha}$. Comme $\tilde{Z}=\tilde{Z}_{\beta}$, on a alors :

$$Z \subset \tilde{\Xi}_{\tilde{a}} \cap \tilde{\Xi}_{\tilde{a}+\beta} = \tilde{T}_{\tilde{a}} \cup \tilde{T}_{\tilde{a}+\beta} .$$

Quitte à changer $\tilde{a}$ en $\tilde{a}+\beta$, on peut supposer que $\tilde{Z}$ est contenu dans $\tilde{T}_{\tilde{a}}$. On a alors $Z \subset T_{h(\tilde{a})}$, où $T = h(\tilde{T})$, c'est-à-dire :

$$Q''_o+g^1_2+W^{g-4} \subset h(\tilde{a})+Q''_o+W^{g-2} \subset J^{g-1}H''$$

$$\Longrightarrow \quad \exists x,y\in H'' \qquad h(\tilde{a}) = \sigma_{H''}(x-y)$$

soit, en utilisant (3.3) :

$$\tilde{n}^*a = \pi''^*\sigma_{H''}(x-y) = \sigma_{\tilde{H}}(\tilde{x}+\sigma''\tilde{x}-\tilde{y}-\sigma''\tilde{y}) ,$$

où $\pi''\tilde{x} = x$, $\pi''\tilde{y} = y$.

Comme $\tilde{H}/\sigma' = H'$ est rationnelle lisse, on a :

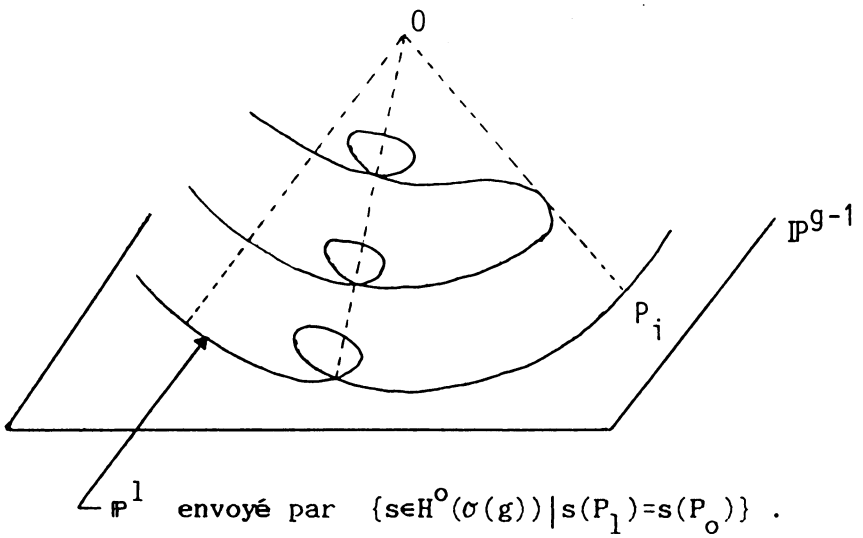
$$\tilde{y}+\sigma'\tilde{y} \equiv g^1_2 \equiv \sigma''\tilde{x}+\sigma'\sigma''\tilde{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{n}^*a = \sigma_{\tilde{H}}(\tilde{x}+\sigma\tilde{y}-\sigma\tilde{x}-\tilde{y}) .$$

Si $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont singuliers sur $\tilde{C}$, on a alors $\tilde{n}^*a=0$, soit $a=q(\alpha)$. Dans ce cas, on a vu que $\tilde{\Xi}.\tilde{\Xi}_{\alpha} = \tilde{T}+\tilde{T}_{\beta}$, donc que $\Xi.\Xi_{q(\alpha)} = q(\tilde{T})$ est irréductible.

Si au plus un des points $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ est singulier sur $\tilde{C}$, il ressort de A3.2.2 que $\Xi.\Xi_a$ est une sous-variété spéciale généralisée, irréductible si l'application rationnelle $\phi_{\tilde{x},\tilde{y}} : C \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-2}$ composée de l'application canonique avec la projection depuis la corde joignant $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, est birationnelle.

L'image canonique de C dans $\mathbb{P}^g$ est :



Il est facile de voir que $\phi_{\tilde{x},\tilde{y}}$ n'est pas birationnelle si et seulement si $\pi\tilde{y} = \tau\pi\tilde{x}$. Sous nos hypothèses, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont alors lisses sur $\tilde{C}$ et, comme $\tilde{n}^*a \neq 0$, on a $\tilde{y} = \sigma'\tilde{x}$ et :

$$\begin{aligned}\tilde{n}^*a &= \sigma_{\tilde{H}}(\tilde{x}+\sigma''\tilde{x}-\sigma'\tilde{x}-\sigma\tilde{x})\\ &= \pi''^*\sigma_{H''}(x-\tau''x) \ .\end{aligned}$$

Comme les intersections $\Xi.\Xi_a$, $\Xi.\Xi_c$ et $\Xi.\Xi_{a-c}$ sont toutes réductibles (utiliser II.A.1.3), on a :

$\exists x,y,z\in H''$

$$\begin{aligned}&\tilde{n}^*a = \pi''^*\sigma_{H''}(x-\tau''x) \neq 0\\ &\tilde{n}^*c = \pi''^*\sigma_{H''}(y-\tau''y) \neq 0\\ &\tilde{n}^*(a-c) = \pi''^*\sigma_{H''}(z-\tau''z) \neq 0\\ &\Longrightarrow\quad x-\tau''x+y-\tau''y \equiv z-\tau''z\\ &\text{ou}\quad x-\tau''x+y-\tau''y \equiv z-\tau''z+Q_1''-Q_o'' \ .\end{aligned}$$

Chacune de ces deux équivalences n'est possible que si l'un des points x, y ou z est un point de Weierstrass de H'', ce qui est impossible puisque $\tilde{n}^*a$, $\tilde{n}^*c$ et $\tilde{n}^*(a-c)$ sont non nuls. ■

Remarque 3.5. Pour $g\geq 5$, aucun élément de $\mathcal{H}_g^2$ n'est donc une jacobienne. C'est encore vrai pour $g=4$ par II.E.4.3 (ces résultats peuvent aussi se déduire de [Sho 1]).

§4. La conjecture de la trisécante pour les variétés abéliennes de dimension 4 et pour les éléments de $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ lorsque $g\geq 5$, $2\leq t\leq g/2$.

Dans ce paragraphe, on montre la conjecture de la trisécante dans les cas suivants :

- La variété abélienne concernée est de dimension 4. On utilise alors de façon essentielle des résultats de Ziv Ran ([Ra]).

- La variété abélienne est une variété de Prym de dimension $g\geq 5$, élément de $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$ (ensembles définis en A2.3.5). On fait alors l'hypothèse que la conjecture de la trisécante est vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$.

Théorème 4.1. Soit (A,Θ) une variété de Prym irréductible de dimension $g\geq 4$ dont la variété de Kummer admet une trisécante. On suppose que :

- si $g\geq 5$, (A,Θ) est élément d'un $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$

- la conjecture de la trisécante est vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$.

Alors (A,Θ) est une jacobienne de courbe.

■ Préliminaires particuliers au cas de la dimension 4.

On part d'une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension 4, (A,Θ), dont la variété de Kummer admet une trisécante. Par II.A.1.3, il existe a,b,c,d éléments non nuls de A , avec $a+b = c+d = x$ et $\{a,b\}\cap\{c,d\} = \phi$, et des complexes non nuls λ,μ,ν , satisfaisant à :

$$\forall\theta\in H^0(\Theta) \qquad \lambda\theta_x\theta_a\theta_b+\mu\theta_a\theta_b\theta_c\theta_d+\nu\theta_c\theta_d\theta_x = 0 \ .$$

On suppose que (A,Θ) n'est pas une jacobienne. On a alors :

Proposition 4.2. Il existe des variétés abéliennes polarisées X_1 et X_2 de degré 2 , dimension 2 et une isogénie $\pi: X_1\times X_2 \longrightarrow A$ faisant de (A,Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$, avec $\{a,b,c,d\}\cap\pi(X_1) \neq \phi$.

■ On utilise ici les méthodes et résultats de [Ra] : les composantes des intersections de Θ avec ses translatés sont des surfaces dans une variété de dimension 4. On a donc à notre disposition le produit d'intersection.

Lemme 4.3. Une des composantes de $\Theta\cap(\Theta_a\cup\Theta_c\cup\Theta_d)$ est de self-intersection nulle.

■ Soient $V_1,\dots,V_r$ les composantes de $\Theta.\Theta_a$. On suppose $V_i^2>0$ pour tout i .

Les valeurs $V_i^2=2$, $V_i^2=4$ sont interdites respectivement par (3) page 474 et Lemma V.2 de [Ra].

Si $V_iV_j = 0$, on déduit de Lemma II.16 de loc. cit. que pour $V=V_i$ ou V_j , on a :

$$\begin{cases} \exists E \subset T_oA \quad \forall v\in V_{lisse} \quad \tau_v^*(T_vV) \subset E \quad \text{avec} \quad \dim E = 3 \\ \text{ou} \quad \exists \ell \subset T_oA \quad \forall v\in V_{lisse} \quad \tau_v^*(T_vV) \supset \ell \quad \text{avec} \quad \dim \ell = 1 \ . \end{cases}$$

Ceci entraîne :

$$\forall v,w\in V_{lisse} \qquad \tau_v^*(T_vV) \cap \tau_w^*(T_wV) \neq 0$$

soit, par Lemma II.14 de loc. cit., $V^2=0$.

La valeur $V_i.V_j = 1$ est aussi interdite par Lemma II.15 de loc. cit. .

On a donc :

$$\forall i\neq j \qquad V_i^2 \geq 6 \qquad V_iV_j \geq 2 \qquad (\sum_{i=1}^{r} V_i)^2 = 24 \ .$$

En particulier $r=2$. Si $a-V_1 = V_2$, on a $[V_1] = \frac{1}{2}[\Theta]^2$. En particulier, par Corollary II.2 de loc. cit., V_1 est non dégénérée et $V_1^2=6$, ce qui contredit Theorem 5 de loc. cit. .

On a donc $a-V_1 = V_1$, $a-V_2 = V_2$ et :

$$V_1^2+V_2^2 = 24-2V_1V_2 \leq 20$$

soit par exemple $V_1^2 \leq 10$.

Cette composante V_1 est contenue par exemple dans Θ_c . Si on fait aussi l'hypothèse qu'aucune composante de $\Theta.\Theta_c$ n'est de self-intersection nulle, on a de même $c-V_1 = V_1$, de sorte que V_1 est invariant par translation par $a-c$.

Comme $V_1^2>0$, a-c est d'ordre fini $n\geq 2$. Soit $p:A \longrightarrow X$ le quotient de A par le sous-groupe engendré par a-c et W_1 l'image de V_1 . On a alors $0 < V_1^2=nW_1^2 \leq 10$. Rappelons que la valeur $W_1^2=2$ est interdite par loc. cit. . La seule possibilité qui reste est $n=2$, $W_1^2=4$. D'après Lemma V.2 de loc. cit., il existe deux courbes lisses connexes C et D de genre 2 avec :

$$X \simeq JC\times JD \quad , \quad W_1 \simeq C\times D \ .$$

(Dans le contexte de ce lemme, la variété abélienne X est principalement polarisée, mais ce n'est pas utilisé dans la démonstration).

Le morphisme dual de p est une isogénie π : $JC\times JD \longrightarrow A$ de degré 2, induisant des polarisations M et N sur JC et JD respectivement. On a alors $2 = \deg \pi = \deg M.\deg N$. Une des polarisations M ou N est donc principale et A est un produit (cf. par exemple A1.1.1).

■

On suppose donc que $\Theta.\Theta_a$, par exemple, possède une composante irréductible V vérifiant $V^2=0$.

Par Lemma II.16 de [Ra], on est dans l'une des situations suivantes :

• $\exists v\in T_o A \quad v\neq 0 \quad \forall x\in V_{lisse} \quad v\in \tau_x^*(T_x V)$.

Par Lemma II.13 de loc. cit., on est dans l'un des cas suivants :

1) Il existe une sous-variété abélienne X' de A et $V'\subset A' = A/X'$ tels que, si $p:A \longrightarrow A'$:

$$V = p^{-1}(V') \quad , \quad \dim X' = 1 \quad , \quad \dim V' = 1 \ .$$

2) Même chose avec $\dim X' = 2$, $V' = \{x'\}$, de sorte que $V = p^{-1}(x')$ est translaté d'une sous-variété abélienne X' de A .

• $\exists h\in T_o^* A \quad h\neq 0 \quad \forall x\in V_{lisse} \quad \tau_x^*(T_x V) \subset h$.

La variété abélienne X' engendrée par V est alors de dimension ≤ 3 . On est alors dans le cas 2) ou le cas :

3) $\dim X' = 3$.

Dans tous les cas, on a une isogénie (cf. par exemple Al.1.1) $\pi : X'\times X'' \longrightarrow A$ avec :

cas 1) $\dim X' = 1$, $V = \pi(X'\times C'')$ C'' courbe dans X''
cas 2) $\dim X' = 2$, $V = \pi(X'\times\{x''_o\})$ $x''_o\in X''$
cas 3) $\dim X' = 3$, $V = \pi(S'\times\{x''_o\})$ S' surface dans X' .

Cas 1).

Soient M' et M'' les polarisations respectives sur X' et X'' induites par celle de A . Elles sont de même type et il existe des bases $\{s'_1,\dots,s'_d\}$ et $\{s''_1,\dots,s''_d\}$ de $H^o(X',M')$ et $H^o(X'',M'')$ respectivement, telles que $\pi^*\Theta$ ait pour équation $\sum_{i=1}^{d} s'_i\otimes s''_i$ (cf. Al.1.1.iv). On a alors :

$$\forall x''\in C'' \qquad \sum_{i=1}^{d} s''_i(x'')s'_i = 0 \quad \text{dans} \quad H^o(X',M')$$

soit $C''\subset$ partie fixe de $|M''|$.

Lemme 4.4. Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de dimension 3, qui ne soit pas produit de deux variétés abéliennes polarisées dont l'une est principalement polarisée. On suppose que la partie fixe de $|M|$ contient une courbe irréductible C . Alors, soit $\deg M \leq 2$, soit C est une courbe elliptique.

■ Soit $p:(X,M) \longrightarrow (A,\Theta)$ une isogénie sur une variété abélienne principalement polarisée. Si A est irréductible, c'est la jacobienne d'une courbe D lisse de genre 3. On a :

$$p(C) \subset \bigcap_{g\in G} \Theta_g ,$$

où $G = p(H(M))$ (notation I.3.3) est de cardinal $d = \deg M$.

Si $d>2$, on en déduit que $\Theta.\Theta_g$ est réductible pour tout $g\in G-\{0\}$.

On utilise alors II.B.1.

Soient g et g' deux éléments distincts non nuls de G . On suppose $g = \sigma_D(x-y)$, $g' = \sigma_D(x'-y')$. On a alors :

$$\Theta\cap\Theta_g = D_x \cup (-D)_{-y}$$
$$\Theta\cap\Theta_{g'} = D_{x'} \cup (-D)_{-y'} .$$

Comme $p(C)$ est de dimension 1, on a :
- soit $p(C) = D_x = D_{x'}$ et $x=x'$. On a alors $g-g' = \sigma_D(y'-y)$ et $D_x \subset D_y, \cup (-D)_{-y}$. Comme $x\neq y'$ (puisque $g'\neq 0$), on en déduit que D est hyperelliptique d'involution τ et que $y=\tau x$. Mais alors $\Theta \supset p(C)-2g = D-x+2\tau x$, ce qui est impossible puisque $g\neq 0$
- soit $p(C) = (-D)_{-y} = (-D)_{-y'}$ et $y=y'$. On procède comme ci-dessus
- soit $p(C) = D_x = (-D)_{-y'}$, de sorte que D est hyperelliptique et que $y'=\tau x$. On a $g-g' = \sigma_D(x'-\tau y)$, $\Theta.\Theta_{g-g'} = D_x, \cup D_y \supset p(C)$, soit $x=x'$. On est ramené au premier cas.

La courbe D est donc superelliptique. Il existe $E\in\mathcal{A}_{1,(2)}$, $P\in\mathcal{A}_{2,(2)}$, une isogénie $\pi: E\times P \longrightarrow A$, et un élément non nul g de $E\cap G$.

On a alors (cf. II.C.1.4) :

$$\Theta.\Theta_g = \pi(E\times\{p\}) \cup \pi(\{e\}\times\Delta) \quad \text{avec} \quad e\in E,\ p\in P .$$

La courbe $p(C)$ est alors :
- soit $\pi(E\times\{p\})$, c'est-à-dire une courbe elliptique
- soit $\pi(\{e\}\times\Delta)$. On a alors (cf. II.C.2.5) :

$$\forall g'\in A \qquad \pi(\{e\}\times\Delta) \subset \Theta_{g'} \iff g'=0 \text{ ou } g$$

de sorte que $\deg M = \mathrm{Card}\, G \leq 2$
- soit une composante de $\pi(\{e\}\times\Delta)$. Le diviseur Δ est donc réductible. Par A2.1.1, il existe une isogénie $E_1\times E_2 \longrightarrow P$, où E_1 et E_2 sont des courbes elliptiques, et les composantes de Δ sont isomorphes à E_1 ou à E_2.

Si (A,Θ) est maintenant isomorphe à $(A_1,\Theta_1)\times(A_2,\Theta_2)$ avec $\dim A_1=1$, $\dim A_2=2$, l'hypothèse faite sur (X,M) entraîne qu'on n'a ni $G\subset A_1\times\{0\}$, ni $G\subset\{0\}\times A_2$. Or, si $g=(g_1,g_2)$ avec $g_1\neq 0$, $g_2\neq 0$, on a :

$$\Theta\cap\Theta_g = (\Theta_1\times\Theta_{2,g_2}) \cup (\Theta_{1,g_1}\times\Theta_2) \cup (A_1\times\Theta_2\cap\Theta_{2,g_2}) .$$

Si Θ_2 est réductible, toutes les composantes sont des courbes elliptiques. Si C n'est pas une courbe elliptique, on a donc $p(C) = \Theta_{1,g_1}\times\Theta_2$ ou $p(C) = \Theta_1\times\Theta_{2,g_2}$. Si $h=(h_1,h_2)\in G$, on a alors :

$$\Theta_{1,g_1}\times\Theta_2 \subset (\Theta_{1,h_1}\times A_2) \cup (A_1\times\Theta_{2,h_2})$$

ou

$$\Theta_1\times\Theta_{2,g_2} \subset (\Theta_{1,h_1}\times A_2) \cup (A_1\times\Theta_{2,h_2}) ,$$

de sorte que :
- soit $\forall h\in G \quad g_1=h_1$ ou $h_2=0$
- soit $\forall h\in G \quad h_1=0$ ou $g_2=h_2$.

Dans le premier cas, si $g_1=h_1$ alors $g_1\neq g_1+h_1$, donc $g_2+h_2=0$, soit $h = (g_1,-g_2)$. Si $h_2=0$ alors $g_2+h_2 \neq 0$ donc $g_1 = g_1+h_1$ et $h=0$. On a donc $G = \{0;(g_1,-g_2)\}$ et $d=2$.

Le second cas se traite de la même façon. ■

Revenons à l'étude du cas 1). Comme (A,Θ) est supposée irréductible, $(X",M")$ vérifie les hypothèses du Lemme. On supposera que la courbe $C"$ n'est pas elliptique : dans le cas contraire, on est ramené au cas 2). La polarisation $M"$ est alors de degré 2 et l'isogénie $\pi:X'\times X" \longrightarrow A$ fait de A un élément de $\mathcal{A}^2_{1,3}$. Notons $F"$ le lieu fixe de $|M"|$. On a :

$$V\subset\Theta \implies \forall x"\in C" \quad s"_1(x")s'_1+s"_2(x")s'_2 = 0$$
$$\implies C"\subset F" .$$

De même, si on écrit $a = \pi(a',a")$, l'inclusion $V\subset\Theta_a$ entraîne $C"_{-a"}\subset F"$.

Montrons d'abord que $a\in X'$.

Supposons que l'on ait $F" = F"_{a"}$. Il suffit alors de remarquer que, $X"$ étant de dimension au moins 3, on a :

$$\forall x"\notin H(M") \qquad H^0(X",M"_{x"}) \xrightarrow{\sim} H^0(F",M"_x) ,$$

de sorte que $a"\in H(M")$ et $a\in X'$.

On suppose donc $F"\neq F"_{a"}$; $F"$ est alors réductible. En vertu de A2.2.4., on peut choisir une isogénie de degré 2 de $(X",M")$ sur une jacobienne (irréductible) (J,Θ). L'image de $F"$ est alors $\Theta.\Theta_\epsilon$, où ϵ est l'unique élément non nul de l'image de $H(M")$ dans J . En vertu de II.B.1, on est dans l'un des cas suivants :

• $\Theta.\Theta_\epsilon$ est irréductible et $F"$ a deux composantes qui diffèrent par une translation par un élément de $H(M")$. Comme $F"\supset C"\cup C"_{a"}$, il est facile de voir qu'on ne peut avoir $F"\neq F"_{a"}$.

• J est la jacobienne d'une courbe hyperelliptique. De nouveau, $F"$ a deux composantes qui diffèrent par une translation par un élément de $H(M")$, ce qui mène à une contradiction.

• J est la jacobienne d'une courbe superelliptique. Il existe alors une isogénie $\pi'':ExP \longrightarrow X''$ avec $E\in\mathcal{A}_{1,(2)}$, $P\in\mathcal{A}_{2;(2)}$, de sorte que $(A,\Theta)\in\mathcal{A}^2_{1,1,2}$. On a $F'' = \pi''(Ex\{p\})\cup\pi''(\{e\}x\Delta)$ avec $e\in E$, $p\in P$, $\Delta\in|M_p|$. Si Δ est réductible, ses composantes sont des courbes elliptiques. Comme C'' n'est pas elliptique, Δ est irréductible et $C'' = C''_{-a''} = \pi''(\{e\}x\Delta)$, de sorte que $a''\in\pi''(H(M_p)) \subset H(M'')$ et $a\in X'$.

On a donc montré dans tous les cas que $a\in X'$, de sorte que (cf. II.C.1.4) :

$$\Theta.\Theta_a = \pi(X'xF'') \cup \pi(\{x'\}x\Delta'')$$

avec $x'\in X'$, $\Delta''\in|M''|$.

Il ressort de II.C.2.5 que le diviseur Δ'' doit être réductible. Par A2.1.1, il existe alors une isogénie de degré 2, $X''_1xX''_2 \longrightarrow X''$, qui fait de A un élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,2}$. Comme en A2.2.1, on peut considérer A comme un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$, ce qui termine la démonstration de la proposition dans le cas 1).

Cas 2).

Comme dans le cas 1), on a $x''_o\in F''$.

Lemme 4.5. Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de dimension 2, qui ne soit pas produit de deux variétés abéliennes polarisées dont l'une est principalement polarisée. Alors, si la partie fixe de $|M|$ est non vide, on a $\deg M \leq 2$.

■ Soit $p : (X,M) \longrightarrow (A,\Theta)$ une isogénie sur une variété abélienne principalement polarisée, et $G = p(H(M))$, de cardinal $d = \deg M$.

On a $p(\text{partie fixe de } |M|) = \bigcap_{g\in G} \Theta_g$. Soit a un élément de cette intersection. On a alors :

$$\forall g\in G-\{0\} \qquad a+G \subset \Theta.\Theta_g .$$

Si $d>2$, puisque $\Theta^2=2$, $\Theta.\Theta_g$ est de dimension 1. Il s'ensuit que Θ est réductible, $A \simeq E_1xE_2$, avec $G \subset E_1x\{0\}$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur (X,M). ■

L'isogénie $\pi : X'\times X'' \longrightarrow A$ fait donc de (A,Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$. Comme pour le cas 1), on écrit $a = \pi(a',a'')$. On a de la même façon :

$$\pi(X'\times\{x''_o\}) \subset \Theta_a \iff x''_o - a'' \in F'' .$$

Comme $M''^2=4$ et $\dim F'' = 0$, on a $F'' = x''_o + H(M'')$ donc $a''\in H(M'')$ et $a\in X'$. Ceci termine le cas 2).

Cas 3).

On prend les mêmes notations que pour les deux cas précédents. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{d} s''_i(x''_o)s'_i = 0 \qquad \text{sur } S' .$$

Soit D' le diviseur élément de $|M'|$, défini par cette équation. Si $S'=D'$, on a $D'\subset\Theta_a$. On écrit $a = \pi(a',a'')$, de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{d} s''_i(x''_o - a'')s'_{i,-a'} = 0 \quad \text{sur } D' .$$

Comme en II.C.2.5, on montre que cela implique $a'\in H(M')$. On suppose donc $a'=0$. On a alors $s''_i(x''_o) = s''_i(x''_o - a'')$ pour tout i. Comme $a''\neq 0$, le système linéaire $|M''|$ n'est pas très ample, et $d = \deg M'' \leq 2$.

La variété abélienne (A,Θ) est donc élément de $\mathcal{A}^2_{1,3}$. On termine en suivant un raisonnement déjà employé : on a $a\in X''$ et, par II.C.2.5 il ne peut y avoir de trisécante que si D' est réductible. Il existe alors une isogénie de degré 2, $\pi' : X'_1\times X'_2 \longrightarrow X'$ avec $\dim X'_1 = 1$. Ceci termine la démonstration de la proposition dans ce cas.

Si $S'\not\subset D'$, D' est réductible, et il existe une isogénie $\pi' : X'_1\times X'_2 \longrightarrow X'$ comme ci-dessus, avec :

$$D' = \pi'(\{x'_1\}\times X'_2) \cup \pi'(X'_1\times\Delta'_2) \qquad \Delta'_2\in|M'_2| .$$

On est ainsi ramené au cas 2) ou au cas 1). ■

(4.6). Démonstration du théorème 4.1.

On part maintenant d'une variété abélienne principalement polarisée irréductible (A,Θ) de dimension $g\geq 4$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 4.1. Il ressort du préliminaire - et de nos

hypothèses - que la variété (A,Θ) est en particulier élément de $\bigcup_{2\leq t\leq g/2} \mathcal{A}^2_{t,g-t}$. Par A2.2.2, il existe des variétés abéliennes polarisées de degré 2, $(X_1,M_1),\ldots,(X_r,M_r)$, de dimensions respectives $g_1,\ldots,g_r$ avec $r\geq 2$, et $g = g_1+\ldots+g_r$; des générateurs α_i et β_i de $H(M_i)$ et une isogénie $\pi : X = X_1\times\ldots\times X_r \longrightarrow A$ dont le noyau est engendré par les $(\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_i,0,\ldots)$, $2 \leq i \leq r$, et $(\beta_1,\ldots,\beta_r)$.

On peut choisir des éléments $\tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\beta}_i$ de $\mathcal{H}(M_i)$, d'images respectives α_i et β_i dans $H(M_i)$, satisfaisant à :

$$\tilde{\alpha}_i^2 = \tilde{\beta}_i^2 = 1 \quad , \quad \tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_i\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_i = -1 \ .$$

Soit s^i une section non nulle de M_i, invariante par $\tilde{\alpha}_i$, et $t^i = \tilde{\beta}_i.s^i$, de sorte que $\{s^i,t^i\}$ est une base de $H^0(M_i)$.

On peut faire les hypothèses suivantes :

(4.7) Les variétés abéliennes (X_i,M_i) sont dans $\mathcal{P}_{g_i,(2)}$ (cf. A2.3.6).

(4.8) Pour tout $i\in\{1,\ldots,r\}$, on a soit $g_i=1$, soit $\mathrm{div}(s^i)$ et $\mathrm{div}(t^i)$ irréductibles (cf. A2.3.6).

(4.9) Pour tout $i\in\{1,\ldots,r\}$, on a $g_i \leq g-2$.

(4.10) Si $r=2$, tout élément de $|M_1|\cup|M_2|$ est irréductible.

(4.11) Lorsque $g=4$, on est dans l'un des cas suivants :
- Il existe i avec $g_i=2$ et $a\in\pi(X_i)$
- Il existe i,j avec $g_i=g_j=1$ et $a\in\pi(X_i\times X_j)$.

En effet, c'est une conséquence de la Proposition 4.2.

Remarque 4.12. Comme on l'explique en A2.2.1, et en vertu de A2.3.8, on peut toujours "regrouper" certains des X_i : si X'_1 est par exemple le quotient de $X_1\times\ldots\times X_r$, par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1 0,\ldots,0,\alpha_i,0,\ldots,0)$ pour $2 \leq i \leq r'$ alors A s'écrit comme un quotient de $X'_1 \times X_{r'+1} \times\ldots\times X_r$ du type ci-dessus.

On pourra donc supposer par exemple $r=2$ pour simplifier certains calculs. On perd bien sûr dans ce cas les hypothèses (4.8) et (4.10).

On suppose qu'il existe :

$$x = (x_1,\dots,x_r)$$
$$a = (a_1,\dots,a_r) \qquad b = (b_1,\dots,b_r)$$
$$c = (c_1,\dots,c_r) \qquad d = (d_1,\dots,d_r) ,$$

éléments de X vérifiant $x+b=c+d$ et satisfaisant à :

$$\begin{aligned} &\lambda(s^1\dots s^r+t^1\dots t^r)(s^1_{x_1}\dots s^r_{x_r}+t^1_{x_1}\dots t^r_{x_r}) \\ &+\mu(s^1_{a_1}\dots s^r_{a_r}+t^1_{a_1}\dots t^r_{a_r})(s^1_{b_1}\dots s^r_{b_r}+t^1_{b_1}\dots t^r_{b_r}) \\ &+\nu(s^1_{c_1}\dots s^r_{c_r}+t^1_{c_1}\dots t^r_{c_r})(s^1_{d_1}\dots s^r_{d_r}+t^1_{d_1}\dots t^r_{d_r}) = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

avec $\lambda\mu\nu \neq 0$.

Les intersections deux à deux des ensembles $\{0,x\}+\mathrm{Ker}\,\pi$, $\{a,b\}+\mathrm{Ker}\,\pi$ et $\{c,d\}+\mathrm{Ker}\,\pi$ sont supposées vides.

La notations $s^i_{x_i}$ désigne comme d'habitude l'image de s^i par l'isomorphisme $H^o(X_i,M_i) \xrightarrow{\tau^*_{-x_i}} H^o(X_i,M_{i,x_i})$. Il est entendu qu'on a choisi une fois pour toutes des isomorphismes $M_{i,a_i} \otimes M_{i,b_i} \simeq M_{i,c_i} \otimes M_{i,d_i} \simeq M_i \otimes M_{i,x_i}$ qui n'apparaissent pas dans l'égalité (4.13) ci-dessus.

Le groupe $\mathfrak{S}(M_1\boxtimes\dots\boxtimes M_r)$ est un quotient de $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{S}(M_i)$ ([Mu 5] Lemma 1 page 323). On fait agir $(\tilde{\alpha}_1,1,\dots,1)$ sur (4.13). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} &\lambda(s^1\dots s^r s^1_{x_1}\dots s^r_{x_r}+t^1\dots t^r t^1_{x_1}\dots t^r_{x_r}) \\ &+\mu(s^1_{a_1}\dots s^r_{a_r} s^1_{b_1}\dots s^r_{b_r}+t^1_{a_1}\dots t^r_{a_r} t^1_{b_1}\dots t^r_{b_r}) \\ &+\nu(s^1_{c_1}\dots s^r_{c_r} s^1_{d_1}\dots s^r_{d_r}+t^1_{c_1}\dots t^r_{c_r} t^1_{d_1}\dots t^r_{d_r}) = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} &\lambda(s^1\dots s^r t^1_{x_1}\dots t^r_{x_r}+s^1_{x_1}\dots s^r_{x_r} t^1\dots t^r) \\ &+\mu(s^1_{a_1}\dots s^r_{a_r} t^1_{b_1}\dots t^r_{b_r}+s^1_{b_1}\dots s^r_{b_r} t^1_{a_1}\dots t^r_{a_r}) \\ &+\nu(s^1_{c_1}\dots s^r_{c_r} t^1_{d_1}\dots t^r_{d_r}+s^1_{d_1}\dots s^r_{d_r} t^1_{c_1}\dots t^r_{c_r}) = 0 . \end{aligned} \tag{4.15}$$

On applique alors $(\tilde{\beta}_1,1,\ldots,1)$ à (4.14). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
&\lambda(s^1_1 s^1_{x_1} + \epsilon t^1_1 t^1_{x_1})(s^2_2 \ldots s^r_r s^2_{x_2} \ldots s^r_{x_r} + \epsilon t^2_2 \ldots t^r_r t^2_{x_2} \ldots t^r_{x_r}) \\
&+ \mu(s^1_{a_1} s^1_{b_1} + \epsilon t^1_{a_1} t^1_{b_1})(s^2_{a_2} \ldots s^r_{a_r} s^2_{b_2} \ldots s^r_{b_r} + \epsilon t^2_{a_2} \ldots t^r_{a_r} t^2_{b_2} \ldots t^r_{b_r}) \\
&+ \nu(s^1_{c_1} s^1_{d_1} + \epsilon t^1_{c_1} t^1_{d_1})(s^2_{c_2} \ldots s^r_{c_r} s^2_{d_2} \ldots s^r_{d_r} + \epsilon t^2_{c_2} \ldots t^r_{c_r} t^2_{d_2} \ldots t^r_{d_r}) = 0 ,
\end{aligned}$$

pour $\epsilon = \pm 1$.

En continuant ainsi, et en procédant de même avec (4.15), on obtient :

$$(4.16)\qquad \begin{cases} \lambda \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} U_i^{\epsilon_i} + \mu \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i^{\epsilon_i} + \nu \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} W_i^{\epsilon_i} = 0 \\ \lambda \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} \bar{U}_i^{\epsilon_i} + \mu \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} \bar{V}_i^{\epsilon_i} + \nu \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} \bar{W}_i^{\epsilon_i} = 0 \\ \text{avec } \epsilon_i \in \{-1,+1\} \ , \ \epsilon_1 \ldots \epsilon_r = 1 \end{cases}$$

où on a noté, pour $\epsilon \in \{-1,+1\}$ et $i = 1,\ldots,r$:

$$(4.17)\qquad \begin{aligned}
U_i^{\epsilon} &= s^i_i s^i_{x_i} + \epsilon t^i_i t^i_{x_i} \\
V_i^{\epsilon} &= s^i_{a_i} s^i_{b_i} + \epsilon t^i_{a_i} t^i_{b_i} \\
W_i^{\epsilon} &= s^i_{c_i} s^i_{d_i} + \epsilon t^i_{c_i} t^i_{d_i} \\
\bar{U}_i^{\epsilon} &= s^i_i t^i_{x_i} + \epsilon s^i_{x_i} t^i_i \\
\bar{V}_i^{\epsilon} &= s^i_{a_i} t^i_{b_i} + \epsilon s^i_{b_i} t^i_{a_i} \\
\bar{W}_i^{\epsilon} &= s^i_{c_i} t^i_{d_i} + \epsilon s^i_{d_i} t^i_{c_i} ,
\end{aligned}$$

éléments de $H^0(X_i, M_i \otimes M_{i,x_i})$.

Remarque 4.18. On a :

$$\begin{cases} U_i^+ = 0 \iff x_i = \alpha_i + \beta_i \ ; \ V_i^+ = 0 \iff a_i - b_i = \alpha_i + \beta_i \ \ldots \\ U_i^- = 0 \iff x_i = \beta_i \ ; \ \ldots \\ \bar{U}_i^+ = 0 \iff x_i = \alpha_i \ ; \ \ldots \\ \bar{U}_i^- = 0 \iff x_i = 0 \ ; \ \ldots \end{cases}$$

Montrons par exemple la première équivalence. On laisse tomber l'indice i . On a alors $ss_x = -tt_x$. Comme s et t n'ont pas de composante commune, on en déduit $div(s) = div(t_x)$, de sorte que $x \in H(M)$ et, plus précisément, $x \in \{\beta, \alpha+\beta\}$. Supposons $x=\beta$. L'élément $\tilde{\beta}$ de $\mathcal{G}(M)$ correspond au choix d'un isomorphisme $u:M \xrightarrow{\sim} M_\beta$, qui induit $u^*: H^0(M_\beta) \xrightarrow{\sim} H^0(M)$. Comme $t = \tilde{\beta}.s$, on a, par définition de l'action de $\mathcal{G}(M)$ sur $H^0(M)$, $t = u^*(s_\beta)$. L'isomorphisme u induit aussi $v : M \otimes M \xrightarrow{\sim} M \otimes M_\beta$ et on a :

$$v^*(ss_\beta + tt_\beta) = s.u^*(s_\beta) + t.u^*(t_\beta) = 2st \neq 0 .$$

On vérifie alors de la même façon que la valeur $x = \alpha+\beta$, elle, annule bien U^+ .

(4.19). Premier cas : $a_1, c_1 \in H(M_1)$.

On peut toujours modifier a et c (ainsi que b et d pour que les égalités $x=a+b=c+d$ subsistent) en ajoutant des éléments de $\operatorname{Ker} \pi$ pour se ramener au cas $a_1 = c_1 = 0$.

On suppose d'abord qu'on a $x_1 \notin H(M_1)$. Les sections $s^1 s^1_{x_1}$, $t^1 t^1_{x_1}$, $s^1 t^1_{x_1}$ et $s^1_{x_1} t^1$ sont alors linéairement indépendantes. Conformément à (4.12), on peut supposer $r=2$, en regroupant $X_2, \ldots, X_r$. On déduit alors de (4.14) et (4.15) que :

$$\begin{aligned} &\lambda s^2 s^2_{x_2} + \mu s^2_{a_2} s^2_{b_2} + \nu s^2_{c_2} s^2_{d_2} \\ &= \lambda t^2 t^2_{x_2} + \mu t^2_{a_2} t^2_{b_2} + \nu t^2_{c_2} t^2_{d_2} \\ &= \lambda s^2 t^2_{x_2} + \mu s^2_{a_2} t^2_{b_2} + \nu s^2_{c_2} t^2_{d_2} \\ &= \lambda s^2_{x_2} t^2 + \mu s^2_{b_2} t^2_{a_2} + \nu s^2_{d_2} t^2_{c_2} = 0 , \end{aligned}$$

soit :

$$\forall \sigma, \sigma' \in H^0(L_2) \qquad \lambda \sigma \sigma'_{x_2} + \mu \sigma_{a_2} \sigma'_{b_2} + \nu \sigma_{c_2} \sigma'_{d_2} = 0 .$$

On déduit alors du lemme ci-dessous qu'on a $a_2 = c_2 = 0$, soit $a=c=0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Lemme 4.20. Soit (X,M) une variété abélienne polarisée irréductible de degré 2. On suppose qu'il existe des éléments x,a,b,c,d de X et des complexes non nuls λ,μ,ν vérifiant :

$$x = a+b = c+d$$

$$\forall \sigma,\sigma' \in H^0(M) \qquad \lambda\sigma\sigma'_x + \mu\sigma_a\sigma'_b + \nu\sigma_c\sigma'_d = 0 .$$

Alors on a $a=c=0$.

■ Le cas de la dimension 1 découle du lemme 4.22 ci-dessous.

On suppose donc $\dim X \geq 2$. Par A2.1.2, pour σ générique dans $H^0(M)$, $\operatorname{div}\sigma$ est irréductible. On choisit une base $\{s,t\}$ de $H^0(M)$ de la façon habituelle.

Premier cas : $c \notin H(M)$. Alors un point générique y de $\operatorname{div}\sigma$ n'est pas dans $\operatorname{div}\sigma_c$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{P}^1$ tel que $ps_b(y)+qt_b(y) = 0$. On a alors $ps_d(y)+qt_d(y) = 0$ en prenant $\sigma' = ps+qt$ dans l'hypothèse. On en déduit $(s_b t_d - s_d t_b)(y) = 0$, ceci pour y générique sur $\operatorname{div}(\sigma)$. Comme σ est elle aussi générique dans $H^0(M)$, on a montré que $s_b t_d = s_d t_b$, soit $b=d$, par Remarque 4.18. On a alors :

$$\forall \sigma,\sigma' \qquad \lambda\sigma\sigma'_x + (\mu\sigma_a+\nu\sigma_c)\sigma'_b = 0 .$$

Comme le lieu fixe de $|M|$ est de codimension 2, on en déduit $\operatorname{div}\sigma'_b \subset \operatorname{div}\sigma'_x$ soit $b=x$, ce qui contredit notre hypothèse $c \notin H(M)$.

Deuxième cas : $a,c \in H(M)$. Parmi les 3 sections s , s_a , s_c , deux au moins ont même diviseur, par exemple s et s_a . On a alors (avec $\gamma \neq 0$) :

$$\forall \sigma' \in H^0(M) \qquad s(\lambda\sigma'_x+\gamma\mu\sigma'_b) + \nu s_c\sigma'_d = 0 ,$$

d'où on déduit $\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s_a) = \operatorname{div}(s_c)$.
En raisonnant de la même façon avec t , on en déduit $a=c=0$. ■

On peut donc supposer $x_1=0$. On en déduit comme ci-dessus qu'on a en particulier (on ne suppose plus $r=2$) :

$$\lambda s^2 \ldots s^r s^2_{x_2} \ldots s^r_{x_r} + \mu s^2_{a_2} \ldots s^r_{a_r} s^2_{b_2} \ldots s^r_{b_r} + \nu s^2_{c_2} \ldots s^r_{c_r} s^2_{d_2} \ldots s^r_{d_r} = 0 .$$

Il est alors clair que le rang des éléments $(s^{i}s^{i}_{x_i}, s^{i}_{a_i}s^{i}_{b_i}, s^{i}_{c_i}s^{i}_{d_i})$ de $H^0(M_i \otimes M_{i,x_i})$ est ≤ 1 pour tous les indices sauf peut-être pour un.

Lorsque ce rang est ≤ 1, on voit facilement que (a_i ou b_i) et (c_i ou d_i) sont éléments de $\{0,\alpha_i\}$.

Il découle alors de l'étude ci-dessus qu'on peut supposer $a_i=b_i=c_i=d_i=0$ pour $i\neq r$ (par exemple). On a alors :

$$(4.21)\quad \forall \sigma\in H^0(M_r)\quad \lambda\sigma\sigma_{x_r} + \mu\sigma_{a_r}\sigma_{b_r} + \nu\sigma_{c_r}\sigma_{d_r} = 0 .$$

Comme on a $\dim X_r \leq g-2$ par (4.9), le lemme suivant permet de conclure.

Lemme 4.22. Soit (X,M) une variété abélienne polarisée irréductible de degré 2, élément de $\mathcal{P}_{g,(2)}$. On suppose qu'il existe des éléments x,a,b,c et d de X et des complexes non nuls λ, μ et ν tels que :

$$x = a+b = c+d$$

$$\forall \sigma\in H^0(M) \qquad \lambda\sigma\sigma_x + \mu\sigma_a\sigma_b + \nu\sigma_c\sigma_d = 0 .$$

Alors, si la conjecture des trisécantes est vraie pour les variétés de Prym de dimension $g+1$, on a $\{a,b\} = \{c,d\} = \{0,x\}$.

■ Soit E une courbe elliptique quelconque munie de sa polarisation de degré 2. On peut construire une isogénie π de degré 4 de $E\times X$ sur une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) de dimension $g+1$, élément de $\mathcal{P}^2_{1,g}$ (A2.3.8) donc de $\mathcal{P}_{g+1}$. On considérera X comme sous-variété de A. Il est alors clair que si θ est une équation de Θ, on a :

$$\lambda\theta\theta_x + \mu\theta_a\theta_b + \nu\theta_c\theta_d = 0 .$$

On suppose tout d'abord $\dim X \geq 2$. Par A2.2.3, la variété (A,Θ) est irréductible et sa variété de Kummer admet une trisécante si la conclusion du lemme n'est pas vérifiée.

C'est donc la jacobienne d'une courbe C de genre $g+1 \geq 3$ qui admet un morphisme de degré 2 sur E (cf. par exemple II.C.1.2).

Par II.B.4, il existe x,y,z et t sur C tels que (quitte à intervertir c et d) :

$$a \equiv x-y\ ,\ b \equiv z-t\ ,\ c \equiv x-t\ ,\ d \equiv z-y .$$

Mais les images de a,b,c et d dans $\mathrm{Pic}^0 E$ sont nulles puisqu'ils sont éléments de X . Si τ est l'involution associée à $C \longrightarrow E$, on a donc :

$$y = \tau x \ , \ t = \tau z \ , \ t = \tau x \ , \ z = \tau y \ ,$$

soit a=b=c=d . On en déduit facilement a=b=c=d=0 .

Il reste à traiter le cas où X est de dimension 1.

Soit $e,y \in X$ avec $2e \in |M|$ et $2y \equiv 2e+a$. Si $\sigma \in H^0(M)$ est tel que $\sigma(y) = 0$, on a aussi $\sigma_a(y) = 0$, soit $\sigma_c(y)$ ou $\sigma_d(y)$ nul.

Si par exemple $\sigma_c(y) = 0$, on a $(y-c) \in \mathrm{div}\,\sigma = y+(2e-y)$.

Si $y-c \equiv y$, on a $c=0$ et :

$$\forall \sigma \in H^0(M) \qquad (\lambda+\nu)\sigma\sigma_x + \mu\sigma_a\sigma_b = 0$$

$$\Longrightarrow \ \forall z \in X \qquad z + (2e-z) + (z+x) + (2e-z+x) = (z+a) + (2e-z+a) + (z+b) + (2e-z+b) \ .$$

Si a et b sont non nuls, on a :

$$\forall z \in X \qquad z \equiv 2e-z+a \quad \text{ou} \quad z \equiv 2e-z+b \ ,$$

ce qui est absurde. Donc a ou b est nul, ce qui montre le lemme dans ce cas.

Si $y-c \equiv 2e-y$, on a $c=a$ et :

$$\forall \sigma \in H^0(M) \qquad \lambda\sigma\sigma_x + (\mu+\nu)\sigma_a\sigma_b = 0 \ .$$

On termine comme ci-dessus. ■

(4.23) Deuxième cas : on suppose que pour tout i , on a :

$$\{a_i,b_i\} \cap \{c_i,d_i\} \cap H(M_i) = \phi \ .$$

On garde ici les notations précédentes, en particulier celles de (4.17). On rappelle aussi qu'on a fait les hypothèses (4.7) à (4.11).

Lemme 4.24. Soit $i \in \{1,\dots,r\}$ tel que $\dim X_i > 1$. Alors au plus un des triplets (U_i^+,V_i^+,W_i^+), (U_i^-,V_i^-,W_i^-), $(\bar{U}_i^+,\bar{V}_i^+,\bar{W}_i^+)$, $(\bar{U}_i^-,\bar{V}_i^-,\bar{W}_i^-)$ d'éléments de $H^0(M_i \otimes M_{i,x_i})$ est de rang ≤ 1 .

■ On prendra i=1 mais on n'écrira pas les 1 en indices sauf pour X_1 ou lorsque ce sera absolument nécessaire.

Premier cas : $\mathrm{Rang}(U^+,V^+,W^+) \leq 1$ et $\mathrm{Rang}(U^-,V^-,W^-) \leq 1$.

1) Cas où $U^+\neq 0$ et $U^-\neq 0$.

On peut alors écrire :

$$(4.25)\qquad \begin{aligned} s_a s_b &= \gamma s s_x + \gamma' t t_x \\ s_c s_d &= \delta s s_x + \delta' t t_x \ . \end{aligned}$$

a) On suppose $a\in H(M)$.

On peut alors supposer $a=0$. Si on regroupe $X_2,\ldots,X_r$ (cf. 4.12), les égalités (4.16) s'écrivent alors :

$$\bar{U}_1^\epsilon \otimes (\lambda \bar{U}_2^\epsilon + \mu \bar{V}_2^\epsilon) + \nu \bar{W}_1^\epsilon \otimes \bar{W}_2^\epsilon = 0 \quad \text{pour} \quad \epsilon=\pm 1 \ .$$

Comme $s^2_{c_2} t^2_{d_2} = \bar{W}_2^+ + \bar{W}_2^-$, $\bar{W}_2^+$ et $\bar{W}_2^-$ ne peuvent être tous deux nuls. On a donc par exemple $\bar{W}_2^+\neq 0$ et on peut écrire :

$$s_c t_d + s_d t_c = \rho(s t_x + s_x t) \ .$$

On déduit alors de (4.25) que pour $p,q\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} &(p s_c + q t_c)(p s_d + q t_d) \\ &= s[(p^2\delta + q^2\delta')s_x + pq\rho t_x] + t[pq\rho s_x + (p^2\delta' + q^2\delta) t_x] \ . \end{aligned}$$

Pour $(p^2\delta+q^2\delta')(p^2\delta'+q^2\delta) - p^2q^2\rho^2 = 0$, on a donc $\sigma_c\sigma_d = \sigma'\sigma''_x$ avec $\sigma = ps+qt \in H^0(M)$ et $\sigma',\sigma'' \in H^0(M)$.

A cause de l'hypothèse (4.23), ni c ni d ne peuvent être dans H(M), puisqu'on a déjà $a=0$. Le diviseur de σ est donc réductible. Par A2.2.2, il existe une isogénie $\pi' : X'_1\times\ldots\times X'_n \longrightarrow X_1$, où les X'_i sont des variétés abéliennes polarisées de degré 2. Le noyau de π' est engendré par les $(\alpha'_1,0,\ldots,0,\alpha'_j,0,\ldots)$ pour $j=2,\ldots,n$ et on a, si par exemple $\mathrm{div}(s+t)$ est réductible :

$$\pi'^*(s+t) = s'^1\ldots s'^n$$

avec $\mathrm{div}s'^j$ irréductible lorsque $\dim X'_j > 1$

$$\beta = \pi'(\alpha'_1, 0, \ldots, 0)$$
$$\alpha = \pi'(\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n) \ .$$

Il est facile de voir que si $c = \pi'(c'_1, \ldots, c'_n)$ et $d = \pi'(d'_1, \ldots, d'_n)$ alors, pour tout j, c'_j ou d'_j est un élément de $H(M'_j)$.

Conformément à la remarque 4.12, on peut regrouper $X_2, \ldots, X_r$ et supposer $r=2$, puis ensuite considérer X comme quotient de $X'_1 \times \ldots \times X'_n \times X_2$, ce qui en fait un élément de $\mathcal{A}^2_{g'_1, \ldots, g'_n, g_2}$. On a alors $a'_1 = c'_1 = 0$ par exemple, ce qui nous ramène au cas (4.19).

b) <u>On suppose</u> $a,b,c,d \notin H(M)$ <u>et</u> $a-c \in H(M)$.

On peut supposer $a=c$ et $b=d$. On a encore :

$$\lambda \bar{U}_1^{\epsilon} \otimes \bar{U}_2^{\epsilon} + \bar{V}_1^{\epsilon} \otimes (\mu \bar{V}_2^{\epsilon} + \nu \bar{W}_2^{\epsilon}) = 0 \quad \text{pour} \quad \epsilon = \pm 1 \ ,$$

ce qui nous ramène comme ci-dessus au cas (4.19).

c) <u>On suppose</u> $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$.

La variété abélienne principalement polarisée <u>irréductible</u> (par 4.8) $(X_1^{\alpha}, \Theta) = (X_1, M_1)/\{0, \alpha_1\}$ admet donc une quadrisécante : si on désigne par les mêmes lettres les images des éléments de X_1 dans X_1^{α}, on a par (4.25) :

$$\Theta.\Theta_{\beta} \subset \Theta_a \cup \Theta_b \qquad \{a,b\} \cap \{0,\beta\} = \emptyset$$
$$\Theta.\Theta_{\beta} \subset \Theta_c \cup \Theta_d \qquad \{c,d\} \cap \{0,\beta\} = \emptyset \ .$$

Comme on suppose la conjecture des trisécantes vraie pour les variétés de Prym de dimension $\dim X_1$, X_1^{α} est une jacobienne JC et on peut écrire (II.B.4) :

$$\exists\, P,Q,R,S,Q_o,Q_1 \in C \qquad \beta \equiv Q_o - Q_1$$
$$a \equiv Q_o - P \qquad b \equiv Q - Q_1$$
$$c \equiv Q_o - R \qquad d \equiv S - Q_1 \ .$$

Comme β est d'ordre 2, X_1^α est une jacobienne hyperelliptique et Q_o et Q_1 sont des points de Weierstrass. Comme $a+b = c+d$, on a $Q+R \equiv S+P$. On est donc dans l'un des cas suivants :

i) $P=Q$, $R=S$ soit $x=\beta$. On a alors $s_a s_b$ proportionnel à ss_x donc a ou $b \in H(M)$ ce qui contredit notre hypothèse b).

ii) $P=R$, $Q=S$ et $a=c$, $b=d$.

iii) $R+Q \equiv S+P \equiv g_2^1$ et $c-b=d-a=\beta$.

Ces deux derniers cas sont aussi exclus, puisqu'on a supposé $a-c, a-d \notin H(M)$. Ceci termine la démonstration du lemme dans le cas 1).

2) Cas où $U^-=0$ et $U^+\neq 0$.

On a alors $x=\beta \in H(M)$ (Remarque 4.18).

a) On suppose $a \in H(M)$.

On peut alors supposer $a=0$, de sorte que $V^+=U^+=2st$. On peut donc écrire :

$$W^+ = s_c s_d + t_c t_d = \gamma\, st .$$

Comme dans le cas 1)a), on a aussi :

$$s_c t_d + s_d t_c = \rho(st_x + s_x t) = \rho(s^2+t^2) ,$$

de sorte que :

$$(s_c+t_c)(s_d+t_d) = \sigma'\sigma'' \quad \text{avec} \quad \sigma', \sigma'' \in H^o(M) .$$

On termine comme dans le cas 1)a), en se ramenant au cas (4.19).

b) On suppose $a,b,c,d \notin H(M)$ et $a-c \in H(M)$.

On procède comme en 1)b).

c) On suppose $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$.

L'hypothèse $\mathrm{Rang}(U^+,V^+,W^+) = 1$ entraîne :

$$\begin{cases} s_a s_b + t_a t_b = \gamma ss_x \\ s_c s_d + t_c t_d = \delta ss_x \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma s_{-a} s_b = ss_{b-a} + tt_{b-a} \\ \delta s_{-c} s_d = ss_{d-c} + tt_{d-c} . \end{cases}$$

On distingue alors les possibilités suivantes :

i) $\gamma\delta\neq 0$. On aboutit comme en 1)c) à une contradiction en utilisant la conjecture des trisécantes pour X_1^{α} .

ii) $\gamma=0$. L'hypothèse $\mathrm{Rang}(\bar{V},\bar{W}) \leq 1$ entraîne :

$$s_c s_d - t_c t_d = \rho s_a s_b$$

et

$$\rho s_{a-c} s_{b-c} = s s_{d-c} - t t_{d-c} ,$$

qui fournit la même contradiction si $\rho\delta\neq 0$.

iii) $\gamma=\delta=0$. On a alors $s_c s_d = -t_c t_d$ et $2 s_c s_d = \rho s_a s_b$. Par la Remarque 4.18, cela contredit l'hypothèse c).

iv) $\gamma=\rho=0$. On a alors $s_c s_d = t_c t_d$ et $2 s_c s_d = \delta s s_x$, qui contredit de nouveau c).

Deuxième cas : $\mathrm{Rang}(\bar{U}^+;\bar{V}^+,\bar{W}^+) \leq 1$ et $\mathrm{Rang}(\bar{U}^-,\bar{V}^-,\bar{W}^-) \leq 1$.

On procède comme dans le premier cas. On peut aussi s'y ramener en prenant $b+\beta$ et $d+\beta$ au lieu de b et d .

Troisième cas : $\mathrm{Rang}(U^+,V^+,W^+) \leq 1$ et $\mathrm{Rang}(\bar{U}^+,\bar{V}^+,\bar{W}^+) \leq 1$.

1) Cas où $U^+\neq 0$ et $\bar{U}^+\neq 0$.

On peut alors écrire :

$$(4.26) \qquad \begin{cases} u_a u_b = \gamma u u_x + \gamma' v v_x \\ u_c u_d = \delta u u_x + \delta' v v_x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = s+t \\ v = s-t \end{cases}$$

a) On suppose $a\in H(M)$.

Comme dans le premier cas, on suppose $a=0$. Regroupant $X_2,\ldots,X_r$, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{U}_1 \otimes (\lambda \bar{U}_2 + \mu \bar{V}_2) + \nu \bar{W}_1 \otimes \bar{W}_2 = 0 \\ \bar{\bar{U}}_1 \otimes (\lambda \bar{\bar{U}}_2 + \mu \bar{\bar{V}}_2) + \nu \bar{\bar{W}}_1 \otimes \bar{\bar{W}}_2 = 0 . \end{cases}$$

Comme W_2^- et $\bar{W}_2^-$ ne peuvent être nuls tous les deux, on a $\mathrm{Rang}(U_1^-,W_1^-) \leq 1$ ou $\mathrm{Rang}(\bar{U}_1^-,\bar{W}_1^-) \leq 1$. Comme $U_1^-=V_1^-$ et $\bar{U}_1^-=\bar{V}_1^-$ on est ramené à l'un des deux premiers cas.

b) <u>On suppose</u> $a,b,c,d \notin H(M)$ <u>et</u> $a-c \in H(M)$.

On a encore $\mathrm{Rang}(U_1^-,W_1^-) \leq 1$ ou $\mathrm{Rang}(\bar{U}_1^-,\bar{W}_1^-) \leq 1$, et $V_1^-=W_1^-$, $\bar{V}_1^-=\bar{W}_1^-$, ce qui nous ramène à l'un des deux premiers cas.

c) <u>On suppose</u> $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ <u>et</u> $X_1^\beta = X_1/\{0,\beta_1\}$ <u>irréductible</u>.

On procède comme dans le premier cas, 1)c).

d) <u>On suppose</u> $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ <u>et</u> X_1^β <u>réductible</u>.

Le diviseur de $s+t$ est alors réductible. Comme dans le premier cas, 1)a), il existe une isogénie π': $X'_1\times\ldots\times X'_n \longrightarrow X_1$ avec :

i) $\pi'^*(s+t) = s'^{,1}\ldots s'^{,n}$ et $\mathrm{div}\, s'^{,j}$ irréductible lorsque $\dim X'_j > 1$

ii) $a_1 = \pi'(a'_1,\ldots,a'_n)$ $\quad b_1 = \ldots$ etc.

La première des égalités (4.26) donne :

$$s'^{,1}_{a'_1}\ldots s'^{,n}_{a'_n} s'^{,1}_{b'_1}\ldots s'^{,n}_{b'_n} - \gamma s'^{,1}\ldots s'^{,n} s'^{,1}_{x'_1}\ldots s'^{,n}_{x'_n} - \gamma' t'^{,1}\ldots t'^{,n} t'^{,1}_{x'_1}\ldots t'^{,n}_{x'_n} = 0 .$$

Il s'ensuit que pour tout indice $j \in \{1,\ldots,n\}$ sauf au plus un, les sections $s'^{,j}_{a'_j} s'^{,j}_{b'_j}$, $s'^{,j} s'^{,j}_{x'_j}$, $t'^{,j} t'^{,j}_{x'_j}$ de $M'^{,j} \otimes M'^{,j}_{x'_j}$ sont proportionnelles. Cela implique alors que a'_j et b'_j sont dans $H(M'_j)$, ce qui nous ramène au cas (4.19) déjà traité.

2) <u>Cas où</u> $U^+=0$ <u>et</u> $\bar{U}^+\neq 0$.

On a alors $x = \alpha+\beta$ (Remarque 4.18). Les démonstrations de 1)a), 1)b), 1)d), n'utilisant pas l'hypothèse 1), nous permettent de supposer $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ et X_1^β irréductible. On procède alors comme dans le premier cas, 2)c). ■

(4.27) Remarquons aussi que si $\dim X_i = 1$, les rangs de ces quatre triplets sont ≤ 1 .

En effet, $\tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\beta}_i$ engendrent un sous-groupe de niveau maximal (cf. [Mu 5] définition page 291) de $\mathfrak{g}(M_i \otimes M_{i,x_i})$. Les sections $s^i_{x_i} s^i_{x_i} + t^i_{x_i} t^i_{x_i}$, $s^i_{a_i} s^i_{b_i} + t^i_{a_i} t^i_{b_i}$ et $s^i_{c_i} s^i_{d_i} + t^i_{c_i} t^i_{d_i}$, invariantes par l'action de ce sous-groupe, sont donc toutes proportionnelles. On procède de même avec les autres tiplets, en considérant les sous-groupes engendrés par $\{\tilde{\alpha}_i, -\tilde{\beta}_i\}$, $\{-\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i\}$, $\{-\tilde{\alpha}_i, -\tilde{\beta}_i\}$ respectivement.

Lemme 4.28. *Au plus une des variétés* X_i *est de dimension* > 1 . *En particulier, on a* $r \geq 3$.

■ Supposons $\dim X_1 > 1$, $\dim X_2 > 1$. Par le lemme précédent, deux des quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\text{Rang}(U_i^+, V_i^+, W_i^+) \geq 2 \quad \text{pour} \quad i=1,2$$

$$\text{Rang}(U_i^-, V_i^-, W_i^-) \geq 2 \quad \text{pour} \quad i=1,2$$

$$\text{Rang}(\bar{U}_i^+, \bar{V}_i^+, \bar{W}_i^+) \geq 2 \quad \text{pour} \quad i=1,2$$

$$\text{Rang}(\bar{U}_i^-, \bar{V}_i^-, \bar{W}_i^-) \geq 2 \quad \text{pour} \quad i=1,2 \ .$$

Lorsque $r=2$, on aboutit directement à une contradiction avec les égalités (4.16). Vu l'hypothèse (4.9), le cas $r=2$ est donc définitivement exclu.

Lorsque $r \geq 3$, on regroupe $X_3, \ldots, X_r$ (cf. 4.12). Les égalités (4.16) entraînent que deux des quatre triplets $(U_3^\epsilon, V_3^\epsilon, W_3^\epsilon), (\bar{U}_3^\epsilon, \bar{V}_3^\epsilon, \bar{W}_3^\epsilon)$ sont identiquement nuls, ce qui est impossible. ■

On supposera à partir de maintenant que les variétés $X_1, \ldots, X_{r-1}$ sont de dimension 1.

Lemme 4.29. *On suppose* $r \geq 4$. *Alors, pour chaque* $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ *et chaque* $\epsilon \in \{-1, +1\}$, *au plus une des sections* U_i^ϵ , V_i^ϵ , W_i^ϵ (*resp.* $\bar{U}_i^\epsilon$, $\bar{V}_i^\epsilon$, $\bar{W}_i^\epsilon$) *est nulle*.

■ On prend $i=1$. Si $U_1^+ = V_1^+ = 0$, on a, par Remarque 4.18, $x_1 = \alpha_1+\beta_1 = a_1+b_1$ et $b_1-a_1 = \alpha_1+\beta_1$, soit $a_1,b_1 \in X_1[2] = H(M_1)$.

De même, si $U_1^+ = W_1^+ = 0$, on a $c_1,d_1 \in H(M_1)$. Si $V_1^+ = W_1^+ = 0$, on a $b_1-a_1 = d_1-c_1 = \alpha_1+\beta_1$. Comme $a_1+b_1 = c_1+d_1$, on a $c_1-a_1 = d_1-b_1 \in H(M_1)$ et $b_1-c_1, a_1-c_1 \in H(M_1)$. Or la translatée de l'identité II.A.1.3 par $-c$ s'écrit :

$$\lambda s_{-c}s_d + \mu s_{a-c}s_{b-c} + \nu s s_{d-c} = 0 .$$

Pour arriver à une contradiction dans chacun de ces cas, il nous suffira donc de montrer qu'on ne peut avoir $a_1,b_1 \in H(M_1)$.

On suppose donc que a_1, b_1 et x_1 sont nuls.

En utilisant l'égalité (4.15) et la relation $s^1_{c_1}t^1_{d_1} + s^1_{d_1}t^1_{c_1} = \gamma s^1 t^1$ (cf. (4.27)), on obtient :

$$s^1t^1[\lambda(s^2\ldots t^2_{x_2}\ldots + s^2_{x_2}\ldots t^2\ldots) + \mu(s^2_{a_2}\ldots t^2_{b_2}\ldots + s^2_{b_2}\ldots t^2_{a_2}\ldots)$$
$$+ \nu\gamma(s^2_{d_2}\ldots t^2_{c_2}\ldots)] + \nu s^1_{c_1}t^1_{d_1}[s^2_{c_2}\ldots t^2_{d_2}\ldots - s^2_{d_2}\ldots t^2_{c_2}\ldots] = 0 .$$

Comme on ne peut pas avoir c_1 ou $d_1 \in H(M_1)$ (à cause de (4.23)), s^1t^1 et $s^1_{c_1}t^1_{d_1}$ sont linéairement indépendantes. Les expressions entre crochets sont donc nulles. De l'égalité $s^2_{c_2}\ldots t^2_{d_2}\ldots = s^2_{d_2}\ldots t^2_{c_2}\ldots$, on déduit $d_i-c_i \in \{0,\alpha_i\}$ pour $i\geq 2$. On supposera donc $c_i=d_i$ pour $i\geq 2$.

On peut aussi écrire, comme en (4.25) :

$$s^1_{c_1}s^1_{d_1} = \delta(s^1)^2 + \delta'(t^1)^2 .$$

L'équation (4.14) donne alors :

$$(4.30)\quad \begin{cases} \lambda s^2\ldots s^2_{x_2}\ldots + \mu s^2_{a_2}\ldots s^2_{b_2}\ldots + \nu\delta(s^2_{c_2})^2\ldots + \nu\delta'(t^2_{c_2})^2\ldots = 0 \\ \lambda t^2\ldots t^2_{x_2}\ldots + \mu t^2_{a_2}\ldots t^2_{b_2}\ldots + \nu\delta'(s^2_{c_2})^2\ldots + \nu\delta(t^2_{c_2})^2\ldots = 0 . \end{cases}$$

On prend $y_3 \in X_3$, $y_4 \in X_4$ tels que $s^3_{c_3}(y_3) = t^4_{c_4}(y_4) = 0$.

En reportant ces valeurs particulières dans (4.30), on obtient :

• Soit une relation de dépendance linéaire entre $s^2 s^5 \ldots s^2_{x_2} s^5_{x_5} \ldots$ et $s^2_{a_2} s^5_{a_5} \ldots s^2_{b_2} s^5_{b_5} \ldots$ (ou entre $t^2 t^5 \ldots t^2_{x_2} t^5_{x_5} \ldots$ et $t^2_{a_2} t^5_{a_5} \ldots t^2_{b_2} t^5_{b_5} \ldots$). On a alors, pour tout $i \in \{2,5,\ldots,r\}$, a_i <u>ou</u> $b_i \in \{0,\alpha_i\}$.

• Soit $s^3(y_3)s^3_{x_3}(y_3)s^4(y_4)s^4_{x_4}(y_4) = s^3_{a_3}(y_3)s^3_{b_3}(y_3)s^4_{a_4}(y_4)s^4_{b_4}(y_4)$
$= t^3(y_3)t^3_{x_3}(y_3)t^4(y_4)t^4_{x_4}(y_4) = t^3_{a_3}(y_3)t^3_{b_3}(y_3)t^4_{a_4}(y_4)t^4_{b_4}(y_4) = 0$.

Mais on a alors, par exemple :

$s^3(y_3)=0 \Longrightarrow c_3=d_3 \in H(M_3)$ et $x_3=0 \Longrightarrow a_3-c_3, b_3-c_3 \notin H(M_3)$ par (4.23)

$\Longrightarrow s^3_{a_3}(y_3)s^3_{b_3}(y_3), t^3_{a_3}(y_3)t^3_{b_3}(y_3) \neq 0$

$\Longrightarrow s^4_{a_4}(y_4)s^4_{b_4}(y_4) = t^4_{a_4}(y_4)t^4_{b_4}(y_4) = 0$

$\Longrightarrow a_4-c_4$ et $b_4-c_4 \in H(M_4)$

$t^3(y_3)t^3_{x_3}(y_3) \neq 0 \Longrightarrow t^4(y_4)t^4_{x_4}(y_4) = 0 \Longrightarrow c_4 \in H(M_4)$,

ce qui contredit notre hypothèse (4.23).

C'est donc la première alternative qui est vérifiée.

On en déduit :

$\forall i \geq 2$ $\qquad a_i$ ou $b_i \in \{0,\alpha_i\}$.

En reportant dans (4.30), on obtient :

$$(\lambda \pm \mu) \quad s^2 \ldots s^2_{x_2} \ldots + \nu\delta (s^2_{c_2})^2 \ldots + \nu\delta' (t^2_{c_2})^2 \ldots = 0 .$$

Soit $y_2 \in X_2$ tel que $s^2(y_2) = 0$. Comme les sections $(s^3_{c_3})^2 \ldots (s^r_{c_r})^2$ et $(t^3_{c_3})^2 \ldots (t^r_{c_r})^2$ sont linéairement indépendantes on a $\delta s^2_{c_2}(y_2) = \delta' t^2_{c_2}(y_2) = 0$, soit $\delta=0$ ou $\delta'=0$, ce qui entraîne c_1 et $d_1 \in H(M_1)$ et contredit (4.23). On a donc abouti dans tous les cas à une contradiction. ■

Lemme 4.31. Pour $i<r$, aucun des quatre triplets $(U_i^\epsilon, V_i^\epsilon, W_i^\epsilon)$, $(\bar{U}_i^\epsilon, \bar{V}_i^\epsilon, \bar{W}_i^\epsilon)$, $\epsilon=\pm 1$, ne peut être identiquement nul.

■ On laisse tomber l'indice i . Si par exemple $U^+ = V^+ = W^+ = 0$, on a :

$$U^+ = ss_x + tt_x = 0 \implies x = \alpha+\beta \in H(M) \qquad \text{(Remarque 4.18)}$$
$$V^+ = 0 \implies b-a = \alpha+\beta$$
$$W^+ = 0 \implies d-c = \alpha+\beta \ .$$

On en déduit $2a = 2b = 2c = 2d = 0$, soit $a,b,c,d \in X[2] = H(M)$ puisque $\dim X = 1$. Ceci contredit l'hypothèse (4.23). ■

Lemme 4.32. On a $\dim X_i = 1$ pour tout $i\in\{1,\dots r\}$.

■ On suppose $\dim X_r > 1$ et, par Lemme 4.24 :

$$\text{(4.33)} \qquad \text{Rang}(U_r^\epsilon, V_r^\epsilon, W_r^\epsilon) \geq 2 \quad \text{pour} \quad \epsilon=\pm 1 \ .$$

On commence d'abord par montrer qu'aucun des $U_i^\pm$, $V_i^\pm$, $W_i^\pm$ pour $i<r$ ne peut être nul.

Raisonnant par l'absurde, on suppose donc que $U_1^+=0$ et, dans un premier temps, que $r=3$.

Par (4.16), on a les relations :

$$\lambda U_1^- U_2^{-\epsilon} U_3^\epsilon + \mu V_1^- V_2^{-\epsilon} V_3^\epsilon + \nu W_1^- W_2^{-\epsilon} W_3^\epsilon = 0$$
$$\mu V_1^+ V_2^\epsilon V_3^\epsilon + \nu W_1^+ W_2^\epsilon W_3^\epsilon = 0 \quad \text{pour} \quad \epsilon=\pm 1 \ .$$

Par (4.33), ces relations doivent être proportionnelles l'une à l'autre pour chaque ϵ . Ceci n'est possible que si, pour chaque ϵ , l'une d'elles est identiquement nulle. Comme on ne peut avoir $V_1^+ = W_1^+ = 0$ (Lemme 4.31), ni $U_3^+ = U_3^- = 0$, etc... , ce n'est pas la même relation qui est triviale pour chaque $\epsilon\in\{-1,+1\}$. On a donc, par exemple :

$$\begin{cases} U_1^- U_2^+ = V_1^- V_2^+ = W_1^- W_2^+ = 0 \\ V_1^+ V_2^+ = W_1^+ W_2^+ = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \qquad U_2^+ = V_2^+ = W_2^+ = 0 \ .$$

On ne peut donc pas avoir $r=3$ par Lemme 4.31. Lorsque $r>3$, la même méthode montre que :

$$U_2^{\epsilon_2} \ldots U_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} = V_2^{\epsilon_2} \ldots V_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} = W_2^{\epsilon_2} \ldots W_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} = 0$$

pour $\prod_2^{r-1} \epsilon_i = 1$. On en déduit facilement :

$$\forall i \in \{2,\ldots,r-1\} \qquad \exists \epsilon_i,\epsilon_i',\epsilon_i'' \qquad U_i^{\epsilon_i} = V_i^{\epsilon_i'} = W_i^{\epsilon_i''} = 0 \ ,$$

ce qui contredit le Lemme 4.29.

On peut donc maintenant supposer $U_1^{\pm},\ldots,U_{r-1}^{\pm}$ tous non nuls. on écrit (cf. (4.27)), pour $i<r$:

$$V_i^{\epsilon} = A_i^{\epsilon} U_i^{\epsilon} \ , \quad W_i^{\epsilon} = B_i^{\epsilon} U_i^{\epsilon} \quad \text{avec} \quad A_i^{\epsilon}, B_i^{\epsilon} \in \mathbb{C}^* \ .$$

Les relations (4.16) donnent alors

$$\lambda U_r^+ + \mu A_1^{\epsilon_1} \ldots A_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} V_r^+ + \nu B_1^{\epsilon_1} \ldots B_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} W_r^+ = 0 \quad \text{pour} \quad \pi\epsilon_i = 1$$
$$\lambda U_r^- + \mu A_1^{\epsilon_1} \ldots A_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} V_r^- + \nu B_1^{\epsilon_1} \ldots B_{r-1}^{\epsilon_{r-1}} W_r^- = 0 \quad \text{pour} \quad \pi\epsilon_i = -1 \ .$$

Par (4.33), ces relations sont proportionnelles. On en déduit :

$$\forall i<j<r \qquad A_i^+ A_j^+ = A_i^- A_j^- \qquad A_i^+ A_j^- = A_i^- A_j^+$$
$$B_i^+ B_j^+ = B_i^- B_j^- \qquad B_i^+ B_j^- = B_i^- B_j^+$$
$$\Longrightarrow \quad \exists \epsilon,\epsilon' \in \{-1,+1\} \qquad \forall i<r \qquad A_i^- = \epsilon A_i^+ \ , \ B_i^- = \epsilon' B_i^+ \ .$$

Mais ceci est impossible, puisqu'on aurait alors sur chaque X_i $(i<r)$:

$$s_a s_b + t_a t_b = A^+(ss_x + tt_x)$$
$$s_a s_b - t_a t_b = \epsilon A^+(ss_x - tt_x)$$
$$\Longrightarrow \quad s_a s_b \text{ proportionnel à } ss_x \text{ ou à } tt_x$$
$$\Longrightarrow \quad a \text{ ou } b \in H(M) \ .$$

En procédant de même avec c et d , on contredirait ainsi notre hypothèse (4.23). ■

Lemme 4.34. Au plus une des sections $U_i^\epsilon, V_i^\epsilon, W_i^\epsilon$, $1 \leq i \leq r$, $\epsilon \in \{-1,+1\}$, est nulle.

■ On remarque que puisque $\dim X_i = 1$ pour tout i , on a $r \geq 4$ et on peut appliquer le lemme 4.29. Il y a alors deux situations qui pourraient mettre en défaut notre conclusion :

i) $U_1^+ = V_2^+ = 0$. Les égalités (4.16) donnent alors $W_3^{\epsilon_3} \ldots W_r^{\epsilon_r} = 0$ pour $\prod_3^r \epsilon_i = 1$. Pour chaque $i \geq 3$, il existe alors $\epsilon_i'' \in \{-1,+1\}$ tel que $W_i^{\epsilon_i''} = 0$. On refait le même raisonnement en partant de $U_1^+ = W_3^{\epsilon_3''} = 0$: pour chaque $i \geq 4$, il existe $\epsilon_i' \in \{-1,+1\}$ tel que $V_i^{\epsilon_i'} = 0$. De même avec $V_2^+ = W_3^{\epsilon_3''} = 0$: pour chaque $i \geq 4$, il existe $\epsilon_i \in \{-1,+1\}$ avec $U_i^{\epsilon_i} = 0$. Deux des valeurs $\epsilon_4, \epsilon_4', \epsilon_4''$ sont alors égales, ce qui contredit Lemme 4.29.

ii) $U_1^+ = V_1^+ = 0$. Les égalités (4.16) donnent encore $W_2^{\epsilon_2} \ldots W_r^{\epsilon_r} = 0$ pour $\prod_2^r \epsilon_i = 1$. On termine comme ci-dessus.

iii) $U_1^+ = V_1^- = 0$. On a alors :

$$\lambda U_1^- U_2^{\epsilon_2} \ldots U_r^{\epsilon_r} + \nu W_1^- W_2^{\epsilon_2} \ldots W_2^{\epsilon_r} = 0 \quad \text{pour} \quad \prod_2^r \epsilon_i = -1$$

$$\mu V_1^+ V_2^{\epsilon_2} \ldots V_r^{\epsilon_r} + \nu W_1^+ W_2^{\epsilon_2} \ldots W_r^{\epsilon_r} = 0 \quad \text{pour} \quad \prod_2^r \epsilon_i = 1 .$$

On écrit :

$$\forall i \geq 2 \qquad W_i^\epsilon = B_i^\epsilon U_i^\epsilon = C_i^\epsilon V_i^\epsilon \qquad \text{avec} \quad B_i^\epsilon, C_i^\epsilon \in \mathbb{C}^* .$$

On en déduit alors, puisque $r \geq 4$:

$$\forall i \geq 2 \qquad B_i^+ B_j^+ = B_i^- B_j^- \quad \text{et} \quad C_i^+ C_j^+ = C_i^- C_j^-$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \epsilon, \epsilon' \in \{-1,+1\} \qquad \forall i \geq 2 \qquad B_i^- = \epsilon B_i^+ \ , \ C_i^- = \epsilon' C_i^+ \ .$$

On montre alors comme à la fin de la démonstration de 4.32 que cela implique $[c_i \in H(M_i)$ ou $d_i \in H(M_i)]$ et $[(a_i - c_i = d_i - b_i \in H(M_i))$ ou $(a_i - d_i = c_i - b_i \in H(M_i))]$, ce qui contredit notre hypothèse (4.23). ■

On peut maintenant enfin terminer notre démonstration. On écrit, pour $i \in \{1,\ldots,r\}$, $\epsilon \in \{-1,+1\}$:

$$V_i^\epsilon = A_i^\epsilon U_i^\epsilon \ , \ W_i^\epsilon = B_i^\epsilon U_i^\epsilon \ .$$

On a alors :

1) Les A_i^ϵ , B_i^ϵ sont des complexes, non nuls sauf au plus l'un d'entre eux (Lemme 4.34) et $r \geq 4$.

2) Lorsque $r=4$, l'hypothèse (4.11) entraîne que a_i est nul pour deux valeurs de i . On a donc $A_i^+ = A_i^- = 1$ pour ces deux valeurs de i .

Les équations (4.16) s'écrivent :

$$(4.35) \qquad \lambda + \mu A_1^{\epsilon_1} \ldots A_r^{\epsilon_r} + \nu B_1^{\epsilon_1} \ldots B_r^{\epsilon_r} = 0 \quad \text{pour} \quad \prod_{i=1}^{r} \epsilon_i = 1 \ .$$

On va montrer que toute solution de ces équations qui satisfait en outre aux conditions 1) et 2), vérifie :

$$(4.36) \qquad \exists i \in \{1,\ldots,r\} \qquad A_i^- = \pm A_i^+ \quad \text{et} \quad B_i^- = \pm B_i^+ \ .$$

Cela entraîne, comme plus haut, une contradiction à notre hypothèse (4.23) et termine donc la démonstration du théorème.

On se ramène facilement au cas où les produits :

$$A = \prod_{i=1}^{r} A_i^- \ , \qquad B = \prod_{i=1}^{r} B_i^-$$

sont non nuls. On pose :

$$\lambda' = \lambda/AB \quad , \quad \mu' = \mu/B \quad , \quad \nu' = \nu/A$$

$$\mu_i = A_i^+/A_i^- \quad , \quad \nu_i = B_i^+/B_i^- \ .$$

Le cas $r>5$ se ramène immédiatement au cas $r=5$ en prenant $\epsilon_6 = \ldots = \epsilon_r = 1$ dans les équations (4.34).

Notre système s'écrit alors :

Pour $r=4$
$$\begin{cases} \lambda' + \mu' + \nu' = 0 \\ \lambda' + \mu'\mu_i\mu_j + \nu'\nu_i\nu_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \le i < j \le 4 \\ \lambda' + \mu'\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 + \nu'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 = 0 \\ \mu_1 = \mu_2 = 1 \ . \end{cases}$$

Pour $r=5$
$$\begin{cases} \lambda' + \mu'\mu_i + \nu'\nu_i = 0 \qquad\qquad 1 \le i \le 5 \\ \lambda' + \mu'\mu_i\mu_j\mu_k + \nu'\nu_i\nu_j\nu_k = 0 \qquad 1 \le i < j < k \le 5 \\ \lambda' + \mu'\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 + \nu'\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 = 0 \ , \end{cases}$$

avec dans les deux cas la condition qu'au plus un des μ_i, ν_i est nul.

On traite d'abord le cas $r=4$. On a :

$$\lambda'+\mu'+\nu' = \lambda'+\mu'+\nu'\nu_1\nu_2 = 0 \implies \nu_1\nu_2 = 1$$
$$\lambda'+\mu'\mu_3+\nu'\nu_1\nu_3 = \lambda'+\mu'\mu_3+\nu'\nu_2\nu_3 = 0 \implies \nu_1\nu_3 = \nu_2\nu_3 \ .$$

On a de même $\nu_1\nu_4 = \nu_2\nu_4$. Comme ν_3 et ν_4 ne peuvent être tous les deux nuls, on en déduit $\nu_1 = \nu_2 = \pm 1$, ce qui montre (4.36).

On suppose maintenant $r=5$.

1) Premier cas : l'un des μ_i, ν_i est nul. Les autres sont alors non nuls. Si par exemple $\mu_1 = 0$, on a $1 = \nu_j\nu_k = \nu_2\nu_3$ pour $k>j\ge 2$, soit $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_5 = \epsilon \in \{-1,+1\}$. On a alors :

$$\forall k>j>i\ge 2 \qquad \mu_i = \mu_i\mu_j\mu_k = \mu_2\mu_3\mu_4 \implies \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \epsilon' \ ,$$

ce qui montre (4.36).

2) Deuxième cas : aucun des μ_i, ν_i n'est nul.

Si $\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 \neq 0$, le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda'+\mu'\mu_1 x+\nu'\nu_1 y = 0 \ . \\ \lambda'+\mu'\mu_2 x+\nu'\nu_2 y = 0 \end{cases}$$

a une seule solution, qui est $x=y=1$. On en déduit :

$$\forall j>i\geq 3 \qquad \mu_i\mu_j = \nu_i\nu_j = 1 \ ,$$

ce qui entraîne (4.36).

On peut donc supposer $\dfrac{\mu_1}{\nu_1} = \dfrac{\mu_2}{\nu_2} = \ldots = \dfrac{\mu_5}{\nu_5} = k$.

On a alors :

$$\begin{cases} \lambda' + \nu_1(k\mu' + \nu') = 0 \\ \lambda' + \nu_1^3(k^3\mu' + \nu') = 0 \\ \lambda' + \nu_1^5(k^5\mu' + \nu') = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (k\mu'+\nu')(k^5\mu'+\nu') = (k^3\mu'+\nu')^2$$
$$\Longrightarrow \quad k(k^2-1)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad k = \pm 1 \ , \ \nu_1 = \pm 1 \ ,$$

ce qui montre (4.36) et termine donc la démonstration du théorème. ■

§5. La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$, $g\geq 5$.

Les éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ sont définis en A2.4. L'étude géométrique des singularités de leur diviseur thêta est l'objet de la section II.E.3.

Les notations seront les suivantes - ce sont celles de A2 et elles diffèrent légèrement de celles de II.E.3.

Soient H une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-1$, Q_o et Q_1 deux points de Weierstrass, ϵ l'élément d'ordre deux de JH associé à $\sigma(Q_o-Q_1)$ et $h : (X_2,M_2) \longrightarrow (JH,\Theta)$ l'isogénie de degré 2 associée à ϵ . On prend aussi un élément (X_1,M_1) de $\mathcal{A}_{1,(2)}$. On choisit enfin des générateurs α_1 et β_1 de $H(M_1)$, α_2 et β_2 de $H(M_2)$ avec $h(\alpha_2) = 0$. La variété abélienne (P,Ξ), quotient de $X_1\times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1,α_2) et (β_1,β_2), est principalement polarisée. C'est un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$.

On rappelle que les variétés abéliennes principalement polarisées ainsi obtenues sont <u>irréductibles</u> (A2.4.5) et que ce sont des variétés de Prym (II.E.1.1 ou A2.4.2).

Théorème 5.1. Soit (P,Ξ) un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ de dimension $g\geq 5$. Si $g=5$, on fait l'hypothèse supplémentaire que la conjecture de la trisécante est vraie en dimension 4. Alors la variété de Kummer de (P,Ξ) n'a pas de trisécante.

■ On part comme d'habitude d'une inclusion non triviale $\Xi.\Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. On en déduit :

$$\dim \Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi \geq g-4 .$$

On a montré en II.E.3.2 que $\operatorname{Sing}\Xi$ a deux composantes de dimension $\geq g-4$, dont on va maintenant donner une description différente.

Outre les notations de II.E.3, on utilisera celles de A2.2.1. En particulier, si π est l'isogénie $X_1\times X_2 \longrightarrow P$, il existe des bases respectives $\{s^1,t^1\}$ et $\{s^2,t^2\}$ de $H^o(X_1,M_1)$ et $H^o(X_2,M_2)$ telles que $s^1s^2+t^1t^2$ soit une équation de $\tilde{\Xi} = \pi^*\Xi$, et s^2 une équation de $h^*\Theta$.

Il est clair que les deux composantes en question de $\operatorname{Sing}\Xi$ sont :

$$W_2 = \pi(X_1\times Z_2) \quad \text{avec} \quad Z_2 = h^{-1}(g_2^1+Q_o+W^{g-5})$$
$$W_1 = \pi(\{y_1\}\times S_2) \quad \text{avec} \quad S_2 = h^{-1}(g_2^1+W^{g-4}) \quad \text{et} \quad t^1(y_1) = 0 .$$

Sur Z_2, on a $s^2 = \dfrac{\partial s^2}{\partial x_j^2} = t^2 = \dfrac{\partial t^2}{\partial x_j^2} = 0$ et sur S_2 : $s^2 = \dfrac{\partial s^2}{\partial x_j^2} = t^2 = 0$. Il est facile de vérifier que W_1 et W_2 correspondent bien à des singularités de Ξ.

Revenons à notre trisécante. On a :

Lemme 5.2. Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, on a :
$\dim \Xi_a \cap \operatorname{Sing}\Xi \geq g-4 \iff \exists a_1\in X_1 , \exists a_2\in X_2 , \exists x,y\in H$ avec
$a = \pi(a_1,a_2)$ et $h(a_2) = \sigma_H(x-y)$.

■ On écrit $a = \pi(a_1,a_2)$. Si $X_1 \times Z_2 \subset \tilde{\Xi}_{(a_1,a_2)}$, on a :

$$\forall x \in X_1 \quad \forall z \in Z_2 \qquad s^1(x-a_1)s^2(z-a_2)+t^1(x-a_1)t^2(z-a_2) = 0$$

$$\iff \quad \forall \in Z \qquad s^2(z-a_2) = t^2(z-a_2) = 0$$

$$\iff \qquad g_2^1+Q_o+W^{g-5}-h(a_2) \subset (Q_o+W^{g-3}) \cup (Q_1+W^{g-3}) ,$$

de sorte que soit $h(a_2)$, soit $h(a_2)+\epsilon$ est élément de H-H . Ceci prouve le lemme, quitte à ajouter à (a_1,a_2) l'élément (β_1,β_2) de Kerq.

Si $\{y_1\} \times S_2 \subset \tilde{\Xi}_{(a_1,a_2)}$, on déduit de la stabilité de S_2 par translation par α_2 qu'on a :

$$\{y_1\} \times S_2 \subset \tilde{\Xi}_{(a_1,a_2)} . \tilde{\Xi}_{(a_1,a_2+\alpha_2)}$$

$$\Longrightarrow \forall w \in S_2 \quad s^1(y_1-a_1)s^2(w-a_2) = t^1(y_1-a_1)t^2(w-a_2) = 0 .$$

En projetant sur JH , on obtient :

$$g_2^1+W^{g-4}-h(a_2) \subset W^{g-2} \cup W_\epsilon^{g-2} ,$$

ce qui, comme ci-dessus, prouve le lemme dans ce cas. ■

On a aussi :

Lemme 5.3. Aucun des 4 éléments a,b,c,d de P n'est dans $\pi(X_1)$.

■ On suppose par exemple $a = \pi(a_1,0)$. On a alors par II.C.1.4 :

$$\Xi . \Xi_a = \pi(X_1 \times T_2) \cup \pi(\{e\} \times D_2)$$

avec
$$T_2 = h^{-1}(Q_o+W^{g-3})$$
$$e \in \mathrm{div}(s^1 t^1_{a_1} - s^1_{a_1} t^1)$$
$$D_2 = \mathrm{div}(s^1(e)s^2+t^1(e)t^2) \in |M_2| .$$

Si D_2 est réductible, il ressort de Al qu'une des variétés abéliennes $X_2^\alpha = X_2/\{0,\alpha_2\} = JH$, $X_2^\beta = X_2/\{0,\beta_2\}$, $X_2^{\alpha+\beta} = X_2/\{0,\alpha_2+\beta_2\}$ est réductible, ce qui contredit A2.4.2.

On a donc par exemple $\{c\}\times D_2 \subset \tilde{\Xi}_{(c_1,c_2)}$. Ceci entraîne, comme en II.C.2.5, qu'on peut supposer c_2 nul. Mais on a alors $\Xi.\Xi_a \subset \Xi.\Xi_c$. Contradiction. ■

Il découle de II.A.1.3 que chacun des éléments a,b,c,d,a-c,a-d,b-c,b-d de P satisfait aux hypothèses du lemme 5.2. On en déduit :

Lemme 5.4. On peut écrire : $a = \pi(a_1,a_2)$, $b = \pi(b_1,b_2)$, $c = \pi(c_1,c_2)$, $d = \pi(d_1,d_2)$ avec $h(a_2) = \sigma(x-y)$, $h(b_2) = \sigma(z-t)$, $h(c_2) = \sigma(x-t)$, $h(d_2) = \sigma(z-y)$, pour des points x,y,z et t de H, distincts deux à deux.

■ On peut écrire, par 5.2 :

$$a = \pi(a_1,a_2)\ ,\ c = \pi(c_1,c_2)\ ,\ a-c = \pi(m_1,m_2) \text{ avec}$$
$$h(a_2) = \sigma(x-y)\ ,\ h(c_2) = \sigma(z-t)\ ,\ h(m_2) = \sigma(u-v), \text{ où}$$

les points x et y (resp. z et t) (resp. u et v) de H sont distincts par 5.3.

Il suffit pour prouver le lemme de montrer qu'on ne peut avoir à la fois :

$$x \notin \{z,\tau t,u,\tau v\}$$
$$y \notin \{\tau z,t,\tau u,v\}$$
$$z \notin \{\tau u,v\} \qquad t \notin \{u,\tau v\}\ .$$

On raisonne par l'absurde. On est dans l'un des cas suivants :

1) $x-y-(z-t) \equiv u-v$
2) $x-y-(z-t) \equiv u-v+Q_o-Q_1$.

(Les points Q_o et Q_1 sont des points de Weierstrass de H). Dans le cas 1), comme $x \notin \{y,z,u\}$, $|x+t+v|$ est un g^1_3 . Mais on a $x\in\{\tau t,\tau v\}$, $t\neq\tau v$. Contradiction.

Dans le cas 2), comme $x \notin \{y,z,u\}$, $|x+t+Q_1+v|$ est un g^1_4 . On en déduit que $Q_1\in\{x,t,v\}$ et que $\#(\{x,t,v\} \cap \{u,y,z\}) = 2$. Contradiction. ■

Pour aller plus loin, il va nous falloir utiliser des résultats de la démonstration (4.6) du théorème 4.1. Remarquons tout de suite que l'hypothèse (4.23) est satisfaite dans notre cas. En effet, vu le lemme 5.3, il suffit de vérifier qu'on ne peut avoir $a,c\in\pi(X_2)$. Si

c'était le cas, on aurait alors, comme en (4.19), $a_1=b_1=c_1=d_1=0$, et l'égalité (4.21) serait valide (avec r=2). Les deux variétés abéliennes principalement polarisées $X_2^{\beta} = X_2/\{0,\beta_2\}$ et $X_2^{\alpha+\beta} = X_2/\{0,\alpha_2+\beta_2\}$, éléments de $\mathcal{H}_{g-1}^2$ par construction, donc irréductibles par A2.4.2, admettraient alors chacune une trisécante. Cela contredirait 3.1 si $g-1 \geq 5$, et, par II.E.4.3, l'ex-conjecture de la trisécante en dimension 4 si $g-1 = 4$.

(5.5) On est donc dans le deuxième cas (4.23) de la démonstration de 4.1.

Avec les notations de cette démonstration, en particulier (4.17), il découle de 5.3 qu'aucun des éléments $U_2^{\pm},V_2^{\pm},W_2^{\pm},\overrightarrow{U_2^{\pm}},\overrightarrow{V_2^{\pm}},\overrightarrow{W_2^{\pm}}$ de $H^o(X_2,M_2\otimes M_{2,x_2})$ ne peut être nul.

Il découle aussi de 5.4 qu'on a une inclusion $\Theta.\Theta_{h(a_2)} \subset \Theta_{h(c_2)} \cup \Theta_{h(d_2)}$ dans la jacobienne JH , c'est-à-dire (II.A.1) une relation :

$$\theta\theta_{h(a_2+b_2)} + \gamma\theta_{h(a_2)}\theta_{h(b_2)} + \delta\theta_{h(c_2)}\theta_{h(d_2)} = 0$$

avec $\gamma,\delta\in\mathbb{C}^*$, valable pour tout élément non nul θ de $H^o(JH,\Theta)$. Comme $h^*\theta$ est proportionnel à s^2 dans $H^o(X_2,M_2)$, on a :

$$s^2 s^2_{x_2} + \gamma s^2_{a_2} s^2_{b_2} + \delta s^2_{c_2} s^2_{d_2} = 0 .$$

Si on fait agir l'élément $\tilde{\beta}_2$ de $\mathcal{G}(M_2)$, on obtient comme en (4.14) les relations :

(5.6)
$$\begin{cases} U_2^+ + \gamma V_2^+ + \delta W_2^+ = 0 \\ U_2^- + \gamma V_2^- + \delta W_2^- = 0 . \end{cases}$$

On distingue alors deux cas :

i) <u>On suppose</u> $\mathrm{Rang}(U_2^+,V_2^+,W_2^+) = \mathrm{Rang}(U_2^-,V_2^-,W_2^-) = 2$.

Les relations (4.16) jointes aux égalités (5.6) ci-dessus donnent alors :

$$V_1^{\pm} = \gamma U_1^{\pm} \quad , \quad W_1^{\pm} = \delta U_1^{\pm} ,$$

d'où on déduit :

$$s^1_{a_1} s^1_{b_1} = \gamma s^1 s^1_{x_1} \quad , \quad s^1_{c_1} s^1_{d_1} = \delta s^1 s^1_{x_1} \ .$$

Ceci ne peut se produire que si $\{a_1,b_1\} \cap \{c_1,d_1\} \cap H(M_1) \neq \phi$, ce qui contredit (5.5).

ii) Vu le lemme 4.24, il suffit d'étudier maintenant le cas : $\mathrm{Rang}(U_2^+,V_2^+,W_2^+) = 1$, $\mathrm{Rang}(\bar{U}_2^{\pm},\bar{V}_2^{\pm},\bar{W}_2^{\pm}) = 2$.

Notons θ un élément non nul de $H^o(JH,\Theta)$. Par hypothèse, les éléments $\theta\theta_{x+z-y-t}$, $\theta_\epsilon \theta_{x+z-y-t+\epsilon}$, $\theta_{x-y}\theta_{z-t}$ et $\theta_{x-y+\epsilon}\theta_{z-t+\epsilon}$ de $H^o(\Theta + \Theta_{x+z-y-t})$ sont linéairement dépendants (avec $\epsilon = \sigma(Q_o-Q_1) \in JH[2]$). Comme θ,θ_ϵ et θ_{x-y} sont nulles sur $\mathrm{Sing}\,\Theta = g^1_2+W^{g-4}$, on a par exemple $g^1_2+W^{g-4}-x+y+Q_o-Q_1 \subset W^{g-1}$, de sorte que $\{Q_o,Q_1\} \cap \{x,y\} \neq \phi$.

On suppose par exemple $x=Q_o$. On a alors :

$$\begin{aligned} h(a_2+\beta_2) &= \sigma(x-y+Q_o-Q_1) = \sigma(Q_1-y) \\ h(c_2+\beta_2) &= \sigma(Q_1-t) \\ h(d_2) &= \sigma(z-y) \ , \end{aligned}$$

de sorte qu'il existe (par II.A.1) une relation :

$$s^2 t^2_{x_2} + \gamma' s^2_{b_2} t^2_{a_2} + \delta' s^2_{d_2} t^2_{c_2} = 0 \ ,$$

ce qui donne :

$$\bar{U}_2^{\pm} + \gamma' \bar{V}_2^{\pm} + \delta' \bar{W}_2^{\pm} = 0 \ .$$

Cette relation est analogue à celles de (5.6). On en déduit comme dans le cas i) une contradiction avec (5.5). ■

CHAPITRE III

ANNULATION DE THETACONSTANTES SUR LES VARIETES ABELIENNES DE DIMENSION 4

On rappelle ([Be 1]) qu'en dimension 4, le diviseur N_o^4 de $\mathcal{A}_4$ formé des variétés abéliennes principalement polarisées dont le diviseur thêta est singulier, a deux composantes irréductibles, à savoir $\bar{\mathcal{J}}_4$, adhérence du lieu des jacobiennes, et θ_{null} , lieu des variétés abéliennes (A,Θ), avec Θ symétrique, telles que Sing Θ contienne un point d'ordre 2. On remarquera que cette propriété est indépendante du choix du diviseur Θ symétrique. Elle équivaut à l'annulation, au point τ de $\mathcal{H}_4$ correspondant à la variété abélienne A , d'une des fonctions $\theta[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}](0,2\tau)$, où $a,b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ et $2\,{}^t a.b \in \mathbb{Z}$. C'est pourquoi l'on dit aussi qu'une thêtaconstante est nulle sur A .

Nous allons étudier ici la structure des sous-ensembles $\theta_{\text{null}}^{(p)}$ de $\mathcal{A}_4$ formés des variétés abéliennes pour lesquelles au moins p thêtaconstantes s'annulent.

Notre résultat principal est qu'il n'y a qu'une seule variété abélienne <u>irréductible</u> de dimension 4 pour laquelle 10 thêtaconstantes s'annulent et qui ne soit pas une jacobienne hyperelliptique. Celle-ci a déjà été étudiée en détail par Varley ([Va]).

Plus précisément, on a, avec les notations suivantes :

$\mathcal{A}_4^{\text{irr}}$ = {éléments irréductibles de $\mathcal{A}_4$}

$\theta_{\text{null}}^{(p),\text{irr}} = \theta_{\text{null}}^{(p)} \cap \mathcal{A}_4^{\text{irr}}$

$\mathcal{H}_4$ = {jacobiennes hyperelliptiques de dimension 4}

$\mathcal{A}_{r,s}$ = {produits $A_1 \times A_2$, avec $A_1 \in \mathcal{A}_r$, $A_2 \in \mathcal{A}_s$} ,

<u>Théorème</u> 1.

i) $\theta_{\text{null}}^{(2)}$ <u>est irréductible de dimension</u> 8.

ii) $\theta_{\text{null}}^{(3)}$ <u>a trois composantes irréductibles dont</u> $\bar{\mathcal{H}}_4$ <u>et</u> $\mathcal{A}_{1,3}$, <u>chacune de dimension</u> 7.

iii) $\theta_{null}^{(9),irr}\text{-}\mathcal{H}_4$ est irréductible de dimension 1. Ses éléments sont dans $\mathcal{A}_{1,1,1,1}^2$, quotients d'un produit E^4, où E est une courbe elliptique.

iv) $\theta_{null}^{(10),irr}\text{-}\mathcal{H}_4$ a un seul élément, qui correspond au cas où la courbe E a multiplication complexe par i .

■ Soit $\mathcal{A}_4(4,8)$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau convenable (cf. [Ig 2] ou [V] pour plus de précisions). On utilisera uniquement le fait que les fonctions $\theta[{}^a_b](0,2\tau)$ (cf. I.3.14), pour $a,b\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ et $2^t a.b\in\mathbb{Z}$, définissent des diviseurs de Cartier amples sur $\mathcal{A}_4(4,8)$. On note p la projection $\mathcal{A}_4(4,8)\longrightarrow\mathcal{A}_4$ et pour deux de ces diviseurs D et D', q la restriction de p à $D\cap D'$. On remarque que $\theta_{null}^{(2)}$ est de dimension pure 8 (puisque θ_{null} est irréductible de dimension 9) et qu'il contient $\overline{\mathcal{E}_4^2}$ (cf. II.E.4.1, l'adhérence est ici dans $\mathcal{A}_4$) qui, étant de dimension 8, en est donc une composante. Nous allons montrer que c'est la seule. Raisonnant par l'absurde, on écrit donc :

$$D\cap D' = M+M' ,$$

où M et M' sont des diviseurs de Weil sur D, réduits, sans composante commune, avec $M = q^{-1}(\overline{\mathcal{E}_4^2})$

On notera aussi $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ la compactification de Satake, et toutes les adhérences seront prises dans cette compactification.

On veut tout d'abord montrer que $M\cap M'$, qui est contenu dans le lieu singulier de $D\cap D'$, est de dimension 7. Pour cela, on regarde la trace sur $\mathcal{J}_4'(4,8) = p^{-1}(\mathcal{J}_4')$, où $\mathcal{J}_4'$ dénote l'adhérence de $\mathcal{J}_4$ dans $\mathcal{A}_4$. On a :

$$D\cap D'\cap\mathcal{J}_4'(4,8) \subset q^{-1}(\mathcal{J}_4'\cap\theta_{null}^{(2)}) = q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}) ,$$

où $\mathcal{H}_4'$ est l'adhérence dans $\mathcal{A}_4$ de la famille $\mathcal{H}_4$ des jacobiennes hyperelliptiques de dimension 4.

On a aussi :

$\mathcal{H}_4 \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}$, par II.E.1.1.

$\mathcal{A}_{1,3} \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}$, il suffit en effet de considérer les revêtements étales $\pi : \tilde{C} = \tilde{C}_o \cup F_1 \cup F_2 \longrightarrow C = C_o \cup F$, où $\pi_o : \tilde{C}_o \longrightarrow C_o$ est dans $\mathcal{S}_{4,0}$, F_1 , F_2 et F sont des courbes elliptiques isomorphes, coupant transversalement en 1 point $\tilde{C}_o$, $\tilde{C}_o$ et C_o respectivement, et C_o est une courbe superelliptique de genre 4, pour en déduire que $\overline{\mathcal{E}_4^2}$ contient $\mathcal{E}_3^2 \times \mathcal{A}_1$. Il ressort alors de la démonstration de II.D.1.4.2 que $\mathcal{E}_3^2$ est de dimension 6, donc qu'il est dense dans $\mathcal{A}_3$.

On en déduit :

$$M \supset q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}) .$$

La variété M contient donc toutes les composantes de l'intersection $D \cap D' \cap \mathcal{J}_4'(4,8)$.

Maintenant, $\overline{\mathcal{J}_4'(4,8)}$ est un diviseur de Cartier irréductible ample sur $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ (cf. par exemple [Ig 3]). Il rencontre donc la variété $\overline{M'}$ et $\dim \overline{M'} \cap \overline{\mathcal{J}_4'(4,8)} \geq 7$. Comme le complémentaire de $\mathcal{A}_4(4,8)$ dans $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ est de dimension 6, on en déduit que $M' \cap \mathcal{J}_4'(4,8)$ est non vide et de dimension ≥ 7. Or on a :

$$M' \cap \mathcal{J}_4'(4,8) \subset D \cap D' \cap \mathcal{J}_4'(4,8) = M \cap \mathcal{J}_4'(4,8)$$
$$= q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}) .$$

Il existe donc une composante Z de $q^{-1}(\mathcal{H}') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3})$ qui est contenue à la fois dans M et dans M', donc qui est dans le lieu singulier de $D \cap D'$. Or le critère jacobien montre que si une variété abélienne (A,Θ) correspond à un point singulier de $D \cap D'$, alors $\operatorname{Sing} \Theta$ contient (au moins) deux points d'ordre 2 et, soit les cônes tangents en deux de ces points sont égaux, soit la multiplicité de l'un deux est ≥ 4 .

Comme $q(Z)$ est soit $\mathcal{H}_4'$, soit $\mathcal{A}_{1,3}$, il suffit de vérifier qu'aucune de ces deux conditions n'est satisfaite en un

point générique de chacune de ces familles pour aboutir à une contradiction.

Sur une jacobienne hyperelliptique, les 10 points d'ordre 2 de Sing Θ correspondent aux systèmes linéaires $g^1_2+w_j$, $1 \leq j \leq 10$, où les w_j sont les points de Weierstrass. Ils sont de multiplicité 2 et les cônes tangents à Θ en ces points sont d'équation $(s_o^2u_j)(s_1^2u_j) - (s_os_1u_j)^2$, où s_o , s_1 , u_j sont des sections de g^1_2 telles que $\{s_o,s_1\}$ engendre $H^o(g^1_2)$ et $\mathrm{div}(u_j) = 2w_j$ (cf. I.2.4). Ces 10 quadriques sont distinctes deux à deux.

Sur un produit $E\times JC$, où C est une courbe lisse non hyperelliptique de genre 3, les 28 thêtaconstantes nulles correspondent aux points d'ordre 2 du diviseur Θ de JC . Les cônes tangents sont réductibles, réunion de T_xJC et de $E \times T_x\Theta$. Les 28 hyperplans $T_x\Theta$ correspondent aux 28 bitangentes à la courbe canonique de C , et sont donc distincts deux à deux.

On a donc montré par l'absurde que $D\cap D' = q^{-1}(\overline{\mathcal{C}_4^2})$, donc que :

$$\theta^{(2)}_{\mathrm{null}} = \overline{\mathcal{C}_4^2} ,$$

ce qui prouve (i).

Pour montrer les deux autres points, on utilise la description II.E.1.1 de $\overline{\mathcal{C}_4^2}$ (adhérence dans $\mathcal{A}_4$). Avec les notations de cette partie, on a :

$$\overline{\mathcal{C}_4^2}-\mathcal{A}_{1,3}-\mathcal{A}_{2,2} = \mathcal{C}_4^2 \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}^2_{1,3} \cup \mathcal{H}^2_{2,2} \cup \mathcal{H}^2_{1,1,2} \cup \mathcal{H}^2_{1,1,1,1} .$$

En vertu de i), $\theta^{(3)}_{\mathrm{null}}$ est de dimension pure 7. Un élément générique est donc dans $\mathcal{A}_{1,3}$, $\mathcal{C}_4^2$, $\mathcal{H}_4$ ou $\mathcal{H}_4^2$. Cette dernière famille est exclue par II.E.4.2. Par II.E.4.1, un élément de $\mathcal{C}_4^2 = \mathrm{Pr}(\mathcal{V}_{5,0})$ a 3 thêtaconstantes nulles si, pour l'élément de $\mathcal{V}_{5,0}$ correspondant, Δ est somme de deux éléments de $|\delta|$. La famille correspondante est déterminée par le choix d'une courbe elliptique E , de $\delta\in\mathrm{Pic}^4E$, $\delta'\in(\mathrm{Pic}^oE)[2]$ et $P_1+P_2+P_3+P_4$, $P_5+P_6+P_7+P_8 \in |\delta|$; elle est donc irréductible, ce qui prouve ii).

Pour prouver iii) et iv), on va examiner les nombres possibles de thêtaconstantes nulles pour les éléments des familles ci-dessus. On commence par en réduire la liste. On rappelle que $\mathcal{E}_{2,(2)}$ est la famille des variétés de Prym (au sens de [Mu 2]) associées aux structures superelliptiques sur des courbes lisses de genre 3. C'est un sous-ensemble irréductible de $\mathcal{A}_{2,(2)}$.

Lemme 2. On a $\mathcal{A}^{irr}_{2,(2)} = \mathcal{E}_{2,(2)}$.

■ Soit P un élément de $\mathcal{A}^{irr}_{2,(2)}$, E une courbe elliptique quelconque. L'élément de $\mathcal{A}^{2}_{1,2}$ construit à l'aide de E et P est irréductible par A2.2.3. C'est donc la jacobienne d'une courbe lisse C de genre 3, qui admet une structure superelliptique $C \to E$ (cf. par exemple II.C.1.2) dont la variété de Prym associée est P . ■

La courbe E de la démonstration ci-dessus est quelconque. Pour $P', P'' \in \mathcal{A}^{irr}_{2,(2)}$ quelconques, on peut trouver deux morphismes $C' \to E$, $C'' \to E$, avec la même courbe E , de variétés de Prym respectives P' et P". On en déduit (II.D.1.5) :

$$\mathcal{A}^{2,irr}_{2,2} = \mathcal{E}^{2}_{2,2}$$

et $(\overline{\mathcal{E}^{2}_{4} - \mathcal{H}_4}) \cap \mathcal{A}^{irr}_{4} = \mathcal{E}^{2}_{4} \cup \mathcal{H}^{2}_{4} \cup \mathcal{H}^{2}_{1,3} \cup \mathcal{E}^{2}_{2,2}$.

On examine tour à tour ces familles dans une série de lemmes.

Lemme 3. Les éléments de $\mathcal{E}^{2}_{4}$ ne peuvent avoir plus de 8 thêtaconstantes nulles.

■ On a vu (II.E.4.1) que le nombre de thêtaconstantes nulles est 2 plus le nombre de décompositions de Δ en somme de deux éléments de $|\delta|$.

On suppose que $\delta \equiv P_1+P_2+P_3+P_4 \equiv P_5+P_6+P_7+P_8$. Pour chaque autre décomposition $\Delta = \Delta_1+\Delta_2$, on peut supposer que $\#\Delta_1 \cap \{1,2,3,4\} = 2$. Lorsque $\Delta_1 \cap \{1,2,3,4\}$ est fixé, Δ_1 ne peut alors prendre que deux valeurs distinctes. Enfin, changer Δ_1 en $\Delta-\Delta_1$ donne la même décomposition. On obtient donc au maximum $\binom{4}{2}\times 2 \times 1/2 = 6$

autres décompositions. Il est clair qu'on est alors dans la situation suivante (quitte à réordonner les P_i) :

$$\forall i<j \in \{1,\dots,4\} \qquad P_i+P_j \equiv P_1+P_2+P_3+P_4-P_i-P_j$$
$$\equiv P_{4+i}+P_{4+j} \equiv P_5+P_6+P_7+P_8-P_{4+i}-P_{4+j}$$
$$\Longrightarrow \quad 2P_i+2P_j \equiv 2P_{4+i}+2P_{4+j} \equiv \delta$$
$$\Longrightarrow \quad P_j = P_1+\epsilon_j \ , \quad P_{4+j} = P_5+\epsilon'_j$$

avec $E[2] = \{\epsilon_1=0,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4\} = \{\epsilon'_1=0,\epsilon'_2,\epsilon'_3,\epsilon'_4\}$.
Si on revient à la première équivalence, on obtient :

$$i=1 \Longrightarrow \quad 2P_1+\epsilon_j \equiv 2P_5+\epsilon'_j$$
$$1<i<j \Longrightarrow \quad 2P_1+\epsilon_i+\epsilon_j \equiv 2P_5+\epsilon'_i+\epsilon'_j \ .$$

On a donc $\epsilon_i=\epsilon'_i$ soit $2P_1 \equiv 2P_5$. Le point P_5 est alors égal à l'un des points P_1,P_2,P_3 ou P_4 . Contradiction. On a donc au plus $2+1+5 = 8$ thêtaconstantes nulles.

Il est à noter qu'en prenant :

$$P_i = P_1+\epsilon_i \ , \quad P_{4+i} = P_5+\epsilon_i$$

pour $i = 1,\dots 4$ et $E[2] = \{\epsilon_1=0,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4\}$, on obtient une variété abélienne avec 8 thêtaconstantes nulles et que c'est essentiellement la seule façon de les obtenir. ■

Lemme 4. Les éléments de $\mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}_{1,3}^2$ ne peuvent avoir plus de 8 thêtaconstantes nulles.

■ Les variétés abéliennes concernées sont les variétés de Prym de certains revêtements d'une courbe C obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique H de genre 3 et d'involution hyperelliptique τ en identifiant Q_o à Q_1 , et τQ_o à τQ_1 (II.E.1).

Le nombre de thêtaconstantes nulles est 2 plus le nombre de décompositions (II.E.4.2) :

$$Q_o+Q_1+x+y \equiv w_i+w_j+w_k+w_\ell \ ,$$

où w_i, w_j, w_k, w_ℓ sont des points de Weierstrass distincts sur H . On suppose qu'on a une telle décomposition pour $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$ et on cherche les autres ensembles d'indices possibles.

1) Si $\{1,2,3,5\}$ convient, alors $x=w_5$ et $\{1,2,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$ et $\{2,3,4,5\}$ conviennent. Si encore un autre ensemble d'indices convient, on peut supposer (quitte à prendre son complémentaire) qu'il rencontre $\{1,2,3,4,5\}$ en trois points. On en déduit que y est un autre w_i , w_6 par exemple. Mais on a alors :

$$Q_o+Q_1 \equiv w_1+w_2+w_3+w_4-w_5-w_6 \equiv w_7+w_8 ,$$

ce qui est impossible.

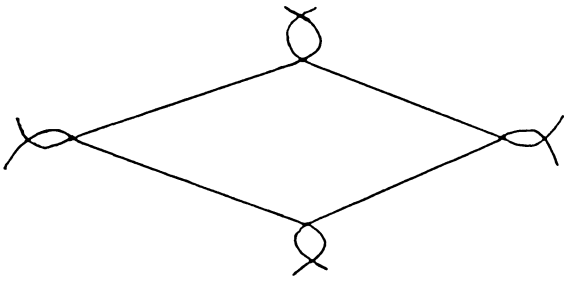
On donc au plus 5 décompositions dans ce cas, soit 7 thêtaconstantes nulles.

2) On suppose maintenant que deux ensembles d'indices qui conviennent se rencontrent en deux points. Comme pour les éléments de $\mathcal{S}_{5,0}$, on obtient ainsi 7 décompositions possibles. Si toutes les 7 conviennent, on a alors
$\sigma(Q_o+Q_1)\in T = \Theta.\Theta_\epsilon.\Theta_{\epsilon'}.\Theta_{\epsilon''}.\Theta_{\epsilon+\epsilon'}.\Theta_{\epsilon+\epsilon''}.\Theta_{\epsilon'+\epsilon''}.\Theta_{\epsilon+\epsilon'+\epsilon''}$, avec
$\epsilon = w_1+w_2-w_3-w_4$, $\epsilon' = w_1+w_2-w_5-w_6$, $\epsilon'' = w_1+w_3-w_5-w_7$. L'ensemble T contient alors les 8 points distincts
$Q_o+Q_1+\{0,\epsilon,\epsilon',\epsilon'',\epsilon+\epsilon',\epsilon+\epsilon'',\epsilon'+\epsilon'',\epsilon+\epsilon'+\epsilon''\}$. Comme $\Theta^3=6$, on en déduit que l'intersection de 3 quelconques de ces translatés de Θ est de dimension 1, donc que l'intersection de 2 est réductible. Ceci n'est possible que s'il existe un morphisme de degré 2, $p:H \to E$ sur une courbe elliptique (utiliser II.B.1). On a alors $\epsilon,\epsilon',\epsilon'',\epsilon+\epsilon',\epsilon+\epsilon'',\epsilon'+\epsilon'',\epsilon+\epsilon'+\epsilon'' \in p^*E[2]$, ce qui est absurde.

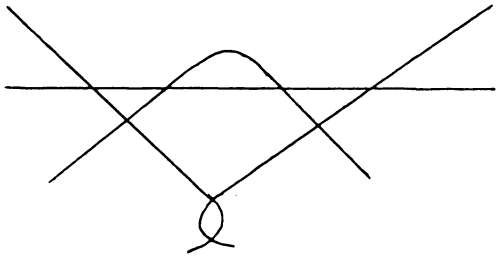
On a donc au plus $2+6 = 8$ thêtaconstantes nulles. ■

Avant d'énoncer le lemme suivant, on va introduire un sous-ensemble $\mathcal{B}^2_{g_1,\ldots,g_4}$ de $\mathcal{A}_{g_1+\ldots+g_4}$ construit de façon analogue à $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_4}$. Soient, comme en A2.2.1, $(X_i,M_i) \in \mathcal{A}_{g_i,(2)}$ pour $i = 1,\ldots,4$ et α_i et β_i des générateurs de $H(M_i)$. Le quotient de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1,\alpha_2,0,0)$, $(0,0,\alpha_3,\alpha_4)$, $(\alpha_1,0,\beta_3,\beta_4)$ et $(\beta_1,\beta_2,\alpha_3,0)$, est une variété abélienne principalement polarisée ; le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g_1+\ldots+g_4}$ ainsi construit est noté $\mathcal{B}^2_{g_1,\ldots,g_4}$. Il est contenu dans $\mathcal{A}^2_{g_1+g_2,g_3,g_4}$ et $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2,g_3+g_4}$.

Par exemple, $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes du type (A2.3.7) :



toutes les courbes étant des $\mathbb{P}^1$, tandis que $\mathcal{R}^2_{1,1,1,1}$ correspond aux revêtements de :



toutes les courbes étant des $\mathbb{P}^1$.

Lemme 5. Les éléments de $\mathcal{E}^2_{2,2}$ ne peuvent avoir plus de 10 thêtaconstantes nulles. Ceux qui en ont 9 ou 10 sont dans $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ ou $\mathcal{B}^2_{1,1,1,1}$.

■ Le nombre de thêtaconstantes nulles est maintenant 4 plus le nombre de décompositions de Δ en somme de deux éléments $|\delta|$ telles que, si $P_i+P_j+P_k+P_\ell$ est l'une d'elle, on ait :

$$h^0(Q_i+Q_j+Q_k+Q_\ell+\eta)$$
$$= h^0(Q_i+Q_j+Q_k+Q_\ell+Q_1+Q_2+Q_3+Q_4-p*\delta') \quad \text{pair.}$$

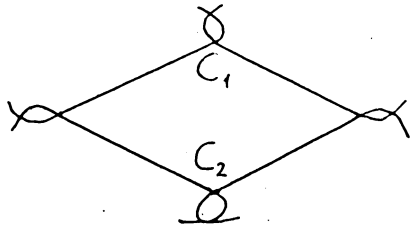
On vérifie que c'est équivalent à :

$$\#\ \{1,2,3,4\} \cap \{i,j,k,\ell\} \quad \text{pair.}$$

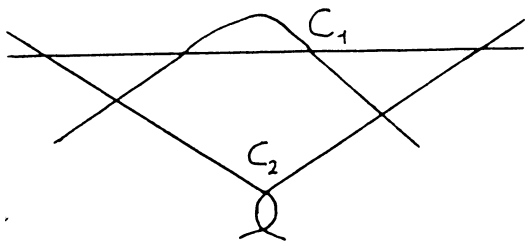
On obtient ainsi, comme dans lemme 3, un maximum de 4+6 = 10 thêtaconstantes nulles.

Rappelons l'effet de la construction tétragonale sur les éléments de $\mathcal{S}_{5,2}$ (II.D.3.2.2). Soit $\phi : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme de degré 2. Une des courbes C' obtenues par la construction tétragonale est construite de la façon suivante. Soient C_1 et C_2 deux courbes elliptiques revêtements de $\mathbb{P}^1$ ramifiés en $\phi P_1+\ldots+\phi P_4$ et $\phi P_5+\ldots+\phi P_8$ respectivement. La courbe C' est réunion de C_1 et C_2, qui se coupent en 4 points.

Il est facile de vérifier que si on a au moins 9 thêtaconstantes nulles (c'est-à-dire au moins 5 décompositions de Δ), alors on a une relation du type $P_1+P_2 \equiv P_3+P_4 \equiv P_5+P_6 \equiv P_7+P_8$. Si on prend pour ϕ le morphisme associé à $\sigma_E(P_1+P_2)$, on voit que les courbes C_1 et C_2 deviennent réductibles, chacune isomorphe à deux copies de $\mathbb{P}^1$ se coupant en deux points. La courbe C' est alors :



ou



chacune des courbes dessinées étant un $\mathbb{P}^1$.

La variété de Prym est donc dans $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ ou dans $\mathcal{R}^2_{1,1,1,1}$.■

Rappelons brièvement la construction des éléments de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$. On part de quatre courbes elliptiques E_1, E_2, E_3 et E_4 . On choisit des générateurs α_j et β_j de $E_j[2]$. Le quotient de $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1,\alpha_2,0,0)$, $(\alpha_1,0,\alpha_3,0)$, $(\alpha_1,0,0,\alpha_4)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ est une variété abélienne principalement polarisée, élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$.

Lemme 6. On a $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1} \subset \theta^{(6),\mathrm{irr}}_{\mathrm{null}}$. Les sous-variétés $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1} \cap \theta^{(p)}_{\mathrm{null}}$ pour $6 \leq p \leq 10$ sont irréductibles de dimension (10-p). En particulier, un seul élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ a 10 thêtaconstantes nulles.

■ On a une isogénie $\pi : E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \longrightarrow A$. Soit o_j l'élément neutre de E_j et M_j le faisceau inversible symétrique $\sigma(2o_j)$. On choisit $\tilde{\alpha}_j$ et $\tilde{\beta}_j$ dans $\mathcal{G}(M_j)$ d'images respectives α_j et β_j dans $H(M_j) = E_j[2]$, tels que $\tilde{\alpha}_j^2 = \tilde{\beta}_j^2 = 1$, $\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_j\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_j = -1$ Soit s_j une section de M_j invariante par $\tilde{\alpha}_j$, et $t_j = \tilde{\beta}_j.s_j$. On a $\mathrm{div}(s_j) = x_j+(x_j+\alpha_j)$, avec $2x_j = \alpha_j$. Une équation de l'image inverse dans $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ du diviseur thêta de A est $s = s_1s_2s_3s_4 + t_1t_2t_3t_4$. Soit $(y_1,\ldots,y_4)$ un point singulier de div(s). On distingue deux cas :

i) Si $2y_1 \neq 0$, alors $s_1(y_1)\dot{t}_1(y_1) - \dot{s}_1(y_1)t_1(y_1) \neq 0$ (on désigne par un point la dérivation par rapport à un paramètre local sur les courbes E_j). On a donc $s_2(y_2)s_3(y_3)s_4(y_4) = t_2(y_2)t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$. Si $s_2(y_2)t_2(y_2) \neq 0$, alors $s_3(y_3)s_4(y_4) = t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$. On a par exemple $s_3(y_3) = t_4(y_4) = 0$. En particulier, y_3 et y_4 ne sont pas d'ordre 2.

2. On a donc par le même méthode $s_1(y_1)s_3(y_3) = t_1(y_1)t_3(y_3) = s_1(y_1)s_4(y_4) = t_1(y_1)t_4(y_4) = 0$, ce qui est impossible. On a donc montré que pour chaque $j \in \{2,3,4\}$, on a $s_j(y_j) = 0$ ou $t_j(y_j) = 0$.

En particulier y_2 n'est pas d'ordre 2 et on a aussi $s_1(y_1)$ ou $t(y_1)$ nul. Plus précisément, il est facile de voir qu'il faut et il suffit que :

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_4 \qquad s_{\sigma(1)}(y_{\sigma(1)}) = s_{\sigma(2)}(y_{\sigma(2)}) = 0$$
$$t_{\sigma(3)}(y_{\sigma(3)}) = t_{\sigma(4)}(y_{\sigma(4)}) = 0 .$$

On obtient ainsi les 6 points distincts suivants sur A , singuliers sur Θ :

$$\pi(x_1+x_2+x_3+x_4+\beta_1+\beta_j+\epsilon\alpha_1) \qquad j\in\{2,3,4\} \ , \ \epsilon\in\{0,1\} .$$

Ils sont d'ordre 2 puisque $2\Sigma x_j = \Sigma\alpha_j$ est dans le noyau de π .

ii) Si un y_j est d'ordre 2, il résulte du premier cas que tous les y_j sont d'ordre 2. Les images de o_j , α_j , β_j , $\alpha_j+\beta_j$ par l'application $(s_j,t_j) : E_j \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sont λ_j , $-\lambda_j$, $\frac{1}{\lambda_j}$, $\frac{-1}{\lambda_j}$ ([Mu 5] page 350) avec $\lambda_j \in U = \mathbb{C} - \{0,1,-1,i,-i\}$. Le complexe λ_j détermine la courbe E_j , les éléments α_j et β_j , ainsi qu'une thêta structure pour la polarisation de degré 2 sur E_j (cf. [Ig 2] ou [V]), de sorte que U est l'espace de modules $\mathcal{A}_1(2,4)$.

On peut donc définir un morphisme surjectif $U^4 \longrightarrow \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$.

Le birapport des quatre éléments λ , $-\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{-1}{\lambda}$ de $\mathbb{P}^1$ est $\left[\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right]^2$. Il est invariant par le groupe G de transformations engendré par $\lambda \longmapsto -\lambda$ et $\lambda \longmapsto \frac{-1}{\lambda}$.

Le morphisme $U^4 \longrightarrow \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est donc invariant par l'action du groupe G^4 sur U_4 ainsi que par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

L'image d'un élément $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ de U^4 est dans $\theta^{(7)}_{null}$ si et seulement si il existe $g_1,\ldots,g_4 \in G$ tels que $1 + g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) = 0$. L'intersection $\theta^{(7)}_{null} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est donc l'image de l'hypersurface irréductible $1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0$ de U^4 .

L'intersection $\theta^{(8)}_{null} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image des sous-variétés suivantes de U^4 :

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0 \\ 1 + g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) = 0 \ , \end{cases}$$

pour $g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) \notin \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{-1}\}$.

En utilisant l'action des groupes G^4 et $\mathfrak{S}_4$, on se ramène aux quatre sous-variétés :

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = \pm i \\ \lambda_1\lambda_3 = -\lambda_2\lambda_4 = \pm 1 \ , \end{cases}$$

puis à :

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)$$
$$\text{et } (\lambda_1,\lambda_2,i\lambda_1,i\lambda_2) \ .$$

Or la transformation $\lambda \longmapsto i\lambda$ change la donnée (E,α,β) en $(E,\alpha,\alpha+\beta)$. Le morphisme $U^4 \longrightarrow \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est donc invariant par la transformation $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \longmapsto (i\lambda_1,i\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, de sorte que $\theta^{(8)}_{null} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image de la sous-variété irréductible $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)$ de U^4 .

L'intersection $\theta^{(9)}_{null} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est alors l'image de la diagonale de U^4 , tandis que $\theta^{(10)}_{null} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ correspond au cas

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda^4 = -1$. Les courbes $E_1,\ldots,E_4$ sont isomorphes à la courbe elliptique avec multiplication complexe par i (j(E)=1728). C'est la variété abélienne étudiée par Varley dans [Va]. ■

Le lemme suivant, qui traite le cas des éléments de $\mathcal{R}^2_{1,1,1,1}$, termine la démonstration des deux derniers points du théorème 1.

Lemme 7. On a $\mathcal{R}^2_{1,1,1,1} \subset \theta^{(4)}_{null}$ et $\mathcal{R}^2_{1,1,1,1} \cap \theta^{(7)}_{null} \subset \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$.

■ Avec les notations du lemme précédent, l'équation du diviseur thêta est maintenant :

$$s = s_1s_2(s_3s_4+t_3t_4) + t_1t_2(s_3s_4-t_3t_4) .$$

Soit $(y_1,\ldots,y_4)$ un point singulier.

i) Si $2y_1 \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} s_2(y_2)[s_3(y_3)s_4(y_4)+t_3(y_3)t_4(y_4)] &= 0 \\ t_2(y_2)[s_3(y_3)s_4(y_4)-t_3(y_3)t_4(y_4)] &= 0 . \end{aligned}$$

1) Si $s_3(y_3)s_4(y_4) = t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$ alors y_3 et y_4 ne sont pas d'ordre 2, de sorte qu'on a :

$$\begin{aligned} s_4(y_4)[s_1(y_1)s_2(y_2)+t_1(y_1)t_2(y_2)] &= 0 \\ t_4(y_4)[s_1(y_1)s_2(y_2)-t_1(y_1)t_2(y_2)] &= 0 \\ s_3(y_3)[s_1(y_1)s_2(y_2)+t_1(y_1)t_2(y_2)] &= 0 \\ t_3(y_3)[s_1(y_1)s_2(y_2)-t_1(y_1)t_2(y_2)] &= 0 , \end{aligned}$$

d'où on déduit $s_1(y_1)s_2(y_2) = t_1(y_1)t_2(y_2) = 0$.

Pour tout $j\in\{1,\ldots,4\}$ on a $s_j(y_j) = 0$ ou $t_j(y_j) = 0$.

On obtient ainsi les 4 points distincts $\pi(x_1,x_2+\beta_2,x_3,x_4+\beta_4)$, $\pi(x_1,x_2+\beta_2,x_3+\alpha_3,x_4+\beta_4)$, $\pi(x_1,x_2+\beta_2,x_3+\beta_3,x_4)$, $\pi(x_1,x_2+\beta_2,x_3+\beta_3,x_4+\alpha_4)$, d'ordre 2 sur A .

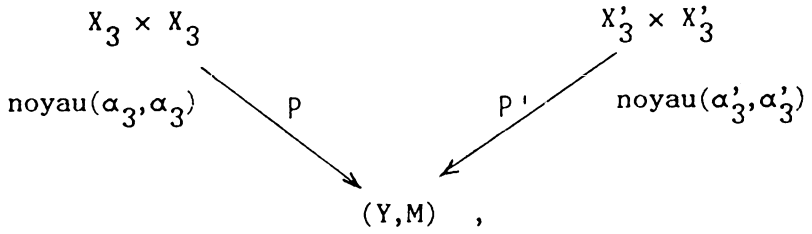
2) Si par exemple $s_3(y_3)s_4(y_4) + t_3(y_3)t_4(y_4) \neq 0$, on a $s_2(y_2) = 0$ donc $2y_2 \neq 0$. De la même façon, $s_1(y_1)$ est nul. On a alors :

$$s_3(y_3)s_4(y_4) - t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$$

$$\dot{s}_3(y_3)s_4(y_4) - \dot{t}_3(y_3)t_4(y_4) = 0$$

$$s_3(y_3)\dot{s}_4(y_4) - t_3(y_3)\dot{t}_4(y_4) = 0 \ ,$$

d'où on déduit que y_3 et y_4 sont d'ordre 2. On peut alors supposer $(y_3,y_4) \in \{(0_3,0_4);(0_3,\beta_4)\}$, soit $1-\lambda_3\lambda_4 = 0$ ou $\lambda_3 = \lambda_4$. Il existe alors un isomorphisme $X_3 \xrightarrow{\sim} X_4$ envoyant α_3 sur α_4 . On a le diagramme suivant (A2.2.3) :



où $X'_3 = X_3/\{0,\alpha_3\}$, α'_3 = image de β_3
$p(\beta_3,\beta_3) = p'(\alpha'_3,0)$ et $p(\alpha_3,0) = p'(\beta'_3,\beta'_3)$ engendrent $H(M)$, de sorte que (A,θ) est un élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$, quotient de $X_1 \times X_2 \times X'_3 \times X'_3$.

ii) Si (A,θ) n'est pas dans $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$, les autres points singuliers éventuels de θ s'écrivent donc $\pi(y_1,\ldots,y_4)$ avec $2y_j = 0$ pour tout j . On suppose que l'un d'eux est $\pi(0_1,0_2,0_3,0_4)$. On a alors :

$$1 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2(1-\lambda_3\lambda_4) = 0 \ .$$

Par ce qui précède, on peut supposer $\lambda_3\lambda_4 \neq \pm 1$. On en déduit que tout autre point singulier est parmi $\{\pi(0_1,\beta_2,\alpha_3,0_4)$, $\pi(0_1,\beta_2,\beta_3,0_4),\pi(0_1,\beta_2,\alpha_3+\beta_3,0_4),\pi(0_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_4),\pi(0_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$, $\pi(0_1,\beta_2,\alpha_3+\beta_3,\beta_4)\}$ et qu'il ne peut y en avoir deux. ■

■

CHAPITRE IV

PROBLEME DE SCHOTTKY POUR LES VARIETES DE PRYM ET ENSEMBLES N_{g-6}^g

IV.A. Variétés de Prym et ensembles N_{g-6}^g :

Nous avons montré en II.D.1.2.5 que la famille P_g des variétés de Prym de dimension g était contenue, pour $g \geq 6$, dans l'ensemble d'Andreotti et Mayer :

$$N_{g-6}^g = \{(A,\Theta) \in A_g \mid \text{Dim Sing}\,\Theta \geq g-6\} .$$

Nous allons maintenant préciser ce résultat, en montrant l'analogue suivant du théorème principal de [An-M] :

Théorème. Pour $g \geq 7$, P_g est une composante irréductible de N_{g-6}^g.

L'assertion correspondante pour $g = 6$ est fausse, puisque P_6 est de dimension 18, A_6 de dimension 21 et que, pour tout g, N_0^g est un diviseur de A_g ([Be 1],[Mu 1]).

La méthode utilisée ici est essentiellement celle de [An-M]. Andreotti et Mayer exhibent une jacobienne de courbe (J,Θ) avec $\dim \text{Sing}\,\Theta = g-4$, telle que les cônes tangents à Θ en les points de multiplicité 2 engendrent un espace vectoriel de codimension $(3g-3)$ dans $S^2T_0^*J$. Ils montrent ensuite que ceci entraîne leur résultat.

On pourrait employer la même méthode pour les variétés de Prym. Malheureusement, si on sait que pour une variété de Prym générique, on a $\dim \text{Sing}\,\Xi = g-6$, on ne sait pas à ma connaissance décrire un exemple explicite qui vérifie cette propriété. De plus, le problème des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta semble difficile à aborder directement.

Pour contourner cette difficulté, on a recours à des dégénérescences de variétés de Prym, à savoir certaines extensions de variétés de Prym par $\mathbb{C}^*$. Via l'isomorphisme

$\mathrm{Ext}^1(P,\mathbb{C}^*) \simeq P$, ce sont les extensions qui correspondent à $a = \mathcal{O}(r+s-\sigma r-\sigma s) \in P$, où $P = \mathrm{Prym}(\tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}/\sigma)$, $r,s \in \tilde{C}$.

On montre au paragraphe 2 que la méthode d'Andreotti et Mayer s'applique sur le bord de A_g . On est ramené à étudier $\mathrm{Sing}(\Xi.\Xi_a)$, pour $(P,\Xi) \in P_{g-1}$ et a comme ci-dessus. Pour ce faire, on a recours à une seconde dégénérescence, à savoir le cas où (P,Ξ) est une jacobienne de courbe $(JN,\Theta) \in J_{g-1}$ et $a = \mathcal{O}_N(p+q-r-s)$ avec $p,q,r,s \in N$.

On peut remarquer qu'on a dans ce cas $\dim \mathrm{Sing}(\Theta.\Theta_a) = g-6$.

A l'aide des résultats des paragraphes 4 et 5, qui décrivent le comportement en famille de $\mathrm{Sing}\,\Xi$ et $\mathrm{Sing}(\Xi.\Xi_a)$, on met en évidence au paragraphe 6 celles des composantes de $\mathrm{Sing}(\Theta.\Theta_a)$ qui sont spécialisations de la situation générique. Il est alors facile de faire les calculs sur ce cas particulier. On conclut au paragraphe 7.

Tout comme N^g_{g-4} qui a toujours des composantes autres que $\bar{J}_g$ pour $g \geq 4$, N^g_{g-6} a toujours des composantes autres que P_g pour $g \geq 7$ (cf. A1.4.5.).

Signalons enfin une autre analogie avec la situation pour les jacobiennes. On sait que si C n'est pas hyperelliptique alors son plongement canonique est projectivement normal (Théorème de Noether). Si de plus C n'est ni trigonale, ni une quintique plane lisse, alors l'idéal de la courbe canonique est engendré par des quadriques (Théorème de Enriques-Babbage-Petri). On en déduit grâce à [Gr 1] que pour $g \geq 5$, l'intersection des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta dans $\mathbb{P}T_0JC \simeq \mathbb{P}H^0(C,\omega_C)^*$ est la courbe canonique. Ceci prouve le théorème de Torelli pour ces courbes.

Considérons maintenant une variété de Prym (P,Ξ) de dimension $g \geq 6$, associée à une courbe <u>générique</u> C et η élément d'ordre 2 de JC .

La courbe semi-canonique :

$$X = \phi_{|\omega_C \otimes \eta|}(C) \subset \mathbb{P}H^0(C,\omega_C \otimes \eta)^* \simeq \mathbb{P}T_0P$$

est projectivement normale ([Gr-L]). On peut déduire de nos résultats que les cônes tangents aux points doubles de Ξ engendrent l'espace des quadriques contenant X .

Dans un article actuellement en préparation, nous montrons que pour $g \geq 7$, l'idéal de X dans $\mathbb{P}^{g-1}$ est engendré par ses éléments de degré 2. En particulier, la courbe X est intersection des quadriques qui la contiennent, ce qui fournit une démonstration "constructive" du théorème de Torelli générique pour les variétés de Prym (prouvé par d'autres méthodes dans [Fr-S 1] pour $g \geq 6$).

§1. Notations, conventions et rappels.

Si C est une courbe lisse connexe, on notera (cf. I.2) :

$C^{(d)}$ l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C, c'est-à-dire le produit symétrique de d copies de C.

$$C_d^r = \{D \in C^{(d)} \mid h^0(C,\mathcal{O}(D)) \geq r+1\} .$$

$$W_d^r = \{L \in J^dC \mid h^0(C,L) \geq r+1\} .$$

Un élément de W_d^r est appelé un g_d^r. On notera souvent W au lieu de W_{g-3}^0. Si p, q sont des points de C, on notera :

$$W_{p,q} = \{L(p+q) \in J^{g-1}C \mid L \in W\}$$

$$= \{L \in J^{g-1}C \mid h^0(L(-p-q)) \geq 1\}$$

$$C_{p,q}^{(d)} = \{D \in C^{(d+2)} \mid D \geq p+q\} .$$

s_{pq} une section de $\mathcal{O}(p+q)$ de diviseur $p+q$.

De même, si $D \in C^{(d)}$, on notera s_D une section de $\mathcal{O}(D)$ de diviseur D.

On notera aussi "-" l'involution $L \mapsto \omega_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$ et $(-Z)$ l'image d'un sous-ensemble Z de $J^{g-1}C$ par cette involution.

Il existe sur les W_d^r et C_d^r des structures naturelles de schéma (cf. par exemple [A-C-G-H 1] chapitre IV). On a alors :

• Si $L \in W_d^r \setminus W_d^{r+1}$, l'espace tangent $T_L W_d^r \subset T_L J^dC \simeq H^0(C,\omega_C)^*$ est l'orthogonal de l'image de l'application naturelle :

$$H^0(C,L) \otimes H^0(C,\omega_C \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(C,\omega_C) .$$

• Si C est une courbe générale de genre g, W_d^r est de dimension $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$, irréductible si $\rho > 0$, lisse en dehors de W_d^{r+1}, Cohen-Macaulay (cf. [A-C-G-H 1], chapitre VII).

On a utilisé, et on utilisera dans toute la suite, la convention qu'un ensemble de dimension < 0 est vide.

§2. Le théorème d'Andreotti et Mayer et son application aux variétés quasi-abéliennes de rang 1.

On commence tout d'abord par rappeler les résultats du §3 de [An-M] relatifs aux lieux de ramification supérieurs d'une application analytique. Le théorème que nous énonçons ci-dessous n'apparaît pas tel quel dans [An-M] mais est une conséquence directe des résultats de cet article.

(2.1) Soient X et B deux variétés analytiques lisses et connexes, $p : X \longrightarrow B$ un morphisme propre et lisse.

Soit D un diviseur de X, $S \subset D$ le lieu critique de $p_{|D} : D \longrightarrow B$, $\pi : S \longrightarrow B$ la restriction de p à S.

On notera toujours f une équation locale de D dans X. Pour tout x dans X, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T^*_b B \xrightarrow{p^*} T^*_x X \xrightarrow{i^*} T^*_x X_b \longrightarrow 0 ,$$

où $b = p(x)$, $X_b = p^{-1}(b)$.

Si $x \in S$, on a par définition $i^* df(x) = 0$. L'écriture $(p^*)^{-1}(df(x))$ a donc un sens. On notera :

$$\forall x \in S \qquad T_x = \mathrm{Ker}[(p^*)^{-1}(df(x))] \subset T_b B .$$

Cet espace vectoriel ne dépend pas de l'équation locale f choisie.

On note aussi :

(2.2) $S_k = \{x \in S \mid \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) \geq k\}$ fermé analytique dans S

$\pi_k = \pi|_{S_k}$

$N_k = \pi(S_k)$ fermé analytique dans B.

Soit $b \in B$. On suppose que $\dim \pi^{-1}(b) = k$, de sorte que $b \in N_k$.

Soit N une composante irréductible locale de N_k en b, $S^1, \ldots, S^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(N)$ qui dominent N. On écrira :

$$S(N) = \bigcup_{i=1}^{r} S^i \cap \pi^{-1}(b) ,$$

de sorte que $S(N)$ est une réunion de composantes irréductibles de dimension k de $S_b = \pi^{-1}(b) = \mathrm{Sing}\, D_b$.

Le résultat est le suivant :

Théorème 2.3. Le cône tangent réduit à N en b est contenu dans $\bigcap_{x\in S(N)} T_x \subset T_b B$.

En particulier, on a :

$\dim N \leq$ codim {sous-espace vectoriel de $p^*T_b^*B$ engendré par les $df(x)$, $x \in S(N)$} .

■ La démonstration se trouve dans [An-M] pages 214-217. On en reprend ici les grandes lignes.

Il existe des points $x_1 \ldots x_N$ dans $S(N)$ tels que :

$$\bigcap_{x\in S(N)} T_x = \bigcap_{\alpha=1}^{N} T_{x_\alpha} = T .$$

Soit $\alpha \in \{1,\ldots,N\}$. Il existe $j(\alpha) \in \{1,\ldots,r\}$ tel que :

$$x_\alpha \in S^{j(\alpha)} .$$

Soit U_α un voisinage connexe de x_α dans $S^{j(\alpha)}$. Par semi-continuité inférieure, on peut supposer que les fibres de tous les $\pi^j : S^j \longrightarrow N$ sont de dimension partout égale à k et on en déduit comme dans [An-M], par un théorème de Remmert, que les morphismes π^j sont ouverts.

L'ensemble $\bigcap_{\alpha=1}^{N} \pi^{j(\alpha)}(U_\alpha)$ est ouvert et tout point lisse y de N dans cet ouvert a un antécédent dans chaque U_α .

Les ouverts U_α peuvent être choisis arbitrairement petits. Pour toute suite $y^{(n)}$ de points lisses sur N convergeant vers b , on peut choisir des suites $x_\alpha^{(n)}$ de points de $\pi_k^{-1}(N)$ convergeant vers x_α , avec $\pi_k(x_\alpha^{(n)}) = y^{(n)}$.

Par Lemma 8 de [An-M] , on a :

$$T_{y^{(n)}} N \subset \bigcap_{\alpha=1}^{N} T_{x_\alpha^{(n)}} .$$

Si on suppose que la limite des espaces tangents existe on a donc :

$$\lim_n T_{y^{(n)}} N \subset T .$$

Le cône tangent réduit à N en b étant contenu dans la réunion de toutes ces limites, on a le résultat. ■

(2.4) Dans tout cet article, on appellera variété quasi-abélienne de rang 1 et de dimension $g+1$ toute extension d'une variété abélienne principalement polarisée de dimension g par le tore $\mathbb{C}^*$.

Il existe un espace de modules grossier $A^{(1)}_{g+1}$ pour les variétés abéliennes prinpalement polarisées ou quasi-abéliennes de rang 1 de dimension $g+1$ ([Ig 1], [Mu 1], [Na]). Il est réunion disjointe d'un ouvert isomorphe à A_{g+1}, espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g+1$, et d'un diviseur ∂A_{g+1}. Il existe un morphisme $\rho_{g+1} : \partial A_{g+1} \longrightarrow A_g$ et la fibre de (A,Θ) est isomorphe à $A/\mathrm{Aut}(A,\Theta)$. C'est le morphisme induit sur ∂A_{g+1} par le morphisme de $A^{(1)}_{g+1}$ dans la compactification de Satake $A^*_{g+1} = A_{g+1} \cup A_g \cup \ldots \cup A_o$ de A_{g+1}.

Il existe une "famille universelle" de variétés quasi-abéliennes de rang 1 au-dessus de $\mathbb{C}^g \times H_g = B$, dont nous allons construire une compactification $p : X \longrightarrow B$. Soit :

- $\tilde{X} = (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{C}^g \times B$.
- Γ le groupe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g$ qui agit sur $\tilde{X}$ par

$$(\alpha,p,q).(\lambda,\mu,z,a,\tau) = (\alpha\lambda, \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^t qa), z+p+\tau q, a, \tau)$$

- X le quotient $\tilde{X}/\Gamma$.
- p l'application $X \longrightarrow B$, projection sur les deux derniers facteurs.

La fibre de $(a,\tau) \in B$ est isomorphe au fibré projectif $\mathbb{P}(\mathcal{O}_A(\Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_a))$ sur la variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) associée à $\tau \in H_g$. Le fibré privé de ses deux sections canoniques est une extension de A par $\mathbb{C}^*$.

On définit un morphisme $f : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$f(\lambda,\mu,z,a,\tau) = \lambda\theta(z,\tau) + \mu\theta(z-a,\tau) .$$

On a :

$$\begin{aligned} f((\alpha,p,q).(\lambda,\mu,z,a,\tau)) &= \alpha\lambda\theta(z+p+\tau q,\tau) + \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^t qa)\theta(z-a+p+\tau q,\tau) \\ &= \alpha\lambda \exp i\pi(-{}^t q\tau q - 2{}^t qz)\theta(z,\tau) \\ &\quad + \alpha\mu \exp(-2i\pi {}^t qa) \exp i\pi(-{}^t q\tau q - 2{}^t q(z-a))\theta(z-a,\tau) \\ &= \alpha \exp i\pi(-{}^t q\tau q - 2{}^t qz)\, f(\lambda,\mu,z,a,\tau). \end{aligned}$$

Le diviseur $\tilde{D}$ de f est donc l'image inverse d'un diviseur D sur X. On prendra f comme équation locale de D.

On prend les notations de la section 2.1, dont on va appliquer les résultats à notre situation.

On peut remarquer tout de suite que la fibre de $(a,\tau)\in B$ sous $\tilde{\pi}:\tilde{S}\longrightarrow B$ est

$$\{(\lambda,\mu,z) \mid \theta(z,\tau)=\theta(z-a,\tau)=0 \text{ et } \forall j\in\{1,\dots,g\} \quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z,\tau)+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z-a,\tau)=0\}\ .$$

L'ensemble N_k introduit en (2.2) correspond donc à :

$$\{(a,\tau)\in B \mid \dim \mathrm{Sing}(\Theta.\Theta_a)\geq k \text{ ou } \dim(\mathrm{Sing}\,\Theta.\mathrm{Sing}\,\Theta_a)\geq k-1\}\ .$$

Pour éviter toute confusion avec les ensembles d'Andreotti et Mayer, on le notera ici T_k^g.

(2.5) On peut remarquer qu'il résulte de [Mu 1] (2.4), pages 363-364, que la frontière de l'ensemble d'Andreotti et Mayer $N_k^{g+1}=\{(A,\Theta)\in A_{g+1} \mid \dim \mathrm{Sing}\,\Theta\geq k\}$ dans la compactification partielle $A_{g+1}^{(1)}$ est contenue dans la réunion $\rho_{g+1}^{-1}(N_k^g)\cup\partial' N_k^{g+1}$, où $\partial' N_k^{g+1}$ est l'image de T_k^g par le morphisme $B=\mathbb{C}^g\times H_g\longrightarrow \partial A_{g+1}$.

On appliquera le théorème 2.3 sous la forme suivante :

Proposition 2.6. Soit $f:(A,\Theta)\longrightarrow T$ une famille de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, avec T lisse connexe, munie d'une section a. On lui associe une famille de variétés quasi-abéliennes de rang 1, donc un morphisme $\varphi:T\longrightarrow \partial A_{g+1}$. On pose :

$$T=\bigcup_{t\in T}\mathrm{Sing}(\Theta_t.\Theta_{t,a_t})\subset A\ .$$

On fait les hypothèses suivantes :

(i) Pour tout $t\in T$, T_t est de dimension k et est irréductible pour t générique. Une seule composante T^0 de T domine donc T.

(ii) Pour t générique dans T, on a :

$$\dim(\mathrm{Sing}\,\Theta_t).(\mathrm{Sing}\,\Theta_{t,a_t})\leq k-2\ .$$

(iii) Pour tout $t\in T$, les seuls automorphismes de (A_t,Θ_t) sont $\pm\mathrm{id}$, et a_t n'est pas d'ordre 2.

En particulier, $\varphi(T) \subset \partial' N_k^{g+1}$. Soit N une composante irréductible de $\partial' N_k^{g+1}$ contenant $\varphi(T)$. Alors, pour tout $t \in T$, la dimension de N en $\varphi(t)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de T_t^0 par l'application rationnelle :

$$T_t = \mathrm{Sing}(\Theta_t . \Theta_{t,a_t}) \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+\binom{g+1}{2}-1}$$

$$z \longmapsto [\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_1}(z,\tau), \ldots, \lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_g}(z,\tau) \ , \ \lambda \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z,\tau) + \mu \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z-a_t,\tau) \ , \ 1 \leq i \leq j \leq g]$$

où $\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau) + \mu \frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z-a_t,\tau) = 0 \quad \forall i$.

■ La question étant locale, on peut supposer T simplement connexe. Grâce à l'hypothèse (iii), le morphisme $\varphi : T \longrightarrow \partial A_{g+1}$ se relève en $\psi : T \longrightarrow B$. On a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} P = \mathbb{P}(\mathcal{O}_A(\Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_a)) & \xrightarrow{\Psi} & X \\ \bar{f}\downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Considérons l'image inverse T' de T dans P . La projection $h : T' \longrightarrow T$ est birationnelle sauf au-dessus des points de $(\mathrm{Sing}\ \Theta_t).(\mathrm{Sing}\ \Theta_{t,a_t})$. Grâce aux hypothèses (ii) et (i), on en déduit que pour tout $t \in T$, T'_t est de dimension k et que pour t générique T'_t est irréductible. Une seule composante T'^0 de T' domine donc T . Son image par h est T^0 .

Soit N' une composante irréductible (locale) de T_k^g qui contienne $\psi(T)$ et telle que son image dans ∂A_{g+1} contienne N . On note comme en 2.2 $S^1, \ldots, S^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(N')$ qui dominent N'. Par construction, pour tout $t \in T$, $S^1_{\psi(t)}, \ldots, S^r_{\psi(t)}$ sont des composantes de T'_t de dimension $\geq k$. On déduit de ce qui précède que pour $t \in T$ générique, on a $S^j_{\psi(t)} = T'^0_t$ pour tout j , de sorte que $S^j \supset \Psi(T'^0)$. On peut alors appliquer le théorème 2.3. On se place en un point $\tilde{x} = (\lambda, \mu, z, a, \tau)$ de $\tilde{X}$ au-dessus de $x \in S_t$. Si $\mu \neq 0$, on peut supposer $\mu = 1$. Avec :

$$f(\lambda, 1, z, a, \tau) = \lambda\theta(z,\tau) + \theta(z-a,\tau)$$

on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 = \theta(z,\tau)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z,\tau) + \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z-a,\tau), \text{ puisque } \tilde{x} \in \tilde{S}_t = \text{Sing } \tilde{D}_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = - \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z-a,\tau) = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(z,\tau)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{jk}} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{jk}}(z,\tau) + \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{jk}}(z-a,\tau) = [2i\pi(1+\delta_{jk})]^{-1}\left(\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_j \partial z_k}(z,\tau) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_j \partial z_k}(z-a,\tau)\right)$$

par l'équation de la chaleur (I.3.14).

On en déduit la proposition par application de 2.3. ∎

§3. Quelques résultats sur les systèmes linéaires sur les courbes.

Nous avons rassemblé dans cette partie des résultats relatifs aux sous-schémas W^r_d d'une jacobienne de courbe lisse dont nous aurons besoin par la suite.

Si C est une courbe lisse de genre g, on adoptera dans ce paragraphe ainsi que par la suite la notation :

$$W = W^0_{g-3} \subset J^{g-3}C .$$

Conformément à nos conventions (I.2), on notera, pour $p,q \in C$:

$$W_{p,q} = W+p+q \subset J^{g-1}C$$
$$C^{(d)}_p = \{D \in C^{(d+1)} \mid D \geq p\}$$
$$C^{(d)}_{p,q} = \{D \in C^{(d+2)} \mid D \geq p+q\}$$

Proposition 3.1. *Soit C une courbe lisse générique de genre g. Alors, pour p et q génériques sur C, on a :* $\forall L \in \mathrm{Pic}(C) \quad h^0(L) \geq 2 \Longrightarrow h^1(L^2(-p-q)) = 0$.

■ On sait ([Gi]) que sur une courbe générique, on a :

$$h^0(L) \geq 2 \Longrightarrow h^1(L^2) = 0$$
$$\Longrightarrow h^0(L^2) = 2d+1-g$$

où $d = \deg L$.

De plus, si p était point base de $|L^2|$, il serait aussi point base de $|L|$ et on aurait :

$$h^0(L(-p)) \geq 2$$
$$\Longrightarrow h^0(L^2(-2p)) = 2d-2+1-g = h^0(L^2)-2 .$$

C'est une contradiction. On en déduit :

$\forall p \in C$
$$h^0(L^2(-p)) = h^0(L^2)-1 = 2d+g$$
$$\Longleftrightarrow h^0(\omega_C \otimes L^{-2}(p)) = 0 .$$

Considérons maintenant le fermé :

$$F = \{(L,p,q) \in J^dC \times C^2 \mid h^0(L) \geq 2 , h^1(L^2(-p-q)) \neq 0\} .$$

Si sa projection sur le facteur C^2 est surjective, il existe une surface Σ, un revêtement fini $\pi = (p,q) : \Sigma \longrightarrow C^2$ et un morphisme $f : \Sigma \longrightarrow J^dC$ tels que :

$$\forall x \in \Sigma \qquad h^0(L_x) \geq 2$$
$$h^1(L_x^2(-p(x)-q(x))) = h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x)+q(x))) \geq 1$$

où $L_x = f(x)$.

Il résulte de ce qui précède que $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x))) = 0$, donc que $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x)+q(x))) = 1$.

A tout x dans Σ, on peut donc associer l'unique élément D_x de $|\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x)+q(x))|$. On a alors un morphisme :

$$g : \Sigma \longrightarrow C^{(2g-2d)}$$
$$x \longmapsto D_x$$

et $q(x) \notin \operatorname{Supp} D_x$. Si on fixe $q(x) = q$, on a un morphisme $\Sigma_q = \pi^{-1}(C \times \{q\}) \longrightarrow C^{(2g-2d)}$ dont l'image ne rencontre pas le diviseur ample $C_q^{(2g-2d-1)}$ de $C^{(2g-2d)}$ ([Fu-L] Lemma 2.7). Il est donc constant égal à D_q, avec $q \notin \operatorname{Supp} D_q$. On a :

$$\forall x \in \Sigma \qquad L_x^{-2}(p(x)+q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{q(x)})$$

donc aussi $L_x^{-2}(p(x)+q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{p(x)})$. On en déduit que $D_{p(x)}$ est constant égal à D. Mais on doit alors avoir $p \notin \operatorname{Supp} D$ pour tout p, ce qui est absurde. La projection de F sur C^2 n'est donc pas surjective, ce qui prouve la proposition. ■

Proposition 3.2. Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geq 6$. Alors, pour p et q génériques sur C, $W_{p,q}.\operatorname{Sing} \Theta$ est irréductible réduit de dimension $g-5$. Sa classe de cohomologie est $\frac{\theta^5}{24}$.

■ Considérons les images inverses de $\operatorname{Sing} \Theta$ et de $W_{p,q}$ dans $C^{(g-1)}$. La première est C^1_{g-1}, irréductible de dimension $g-3$, la seconde est $C^{(g-3)}_{p,q}$, lieu des zéros d'une section d'un faisceau localement libre ample de rang 2 ([Fu-L] Lemma 2.7). Leur intersection T, de dimension pure $g-5$ pour (p,q) générique, est donc connexe en codimension 1 pour $g-3 > 2$ ([Fu-L] ou [A-C-G-H 1] p. 314). Si T est réductible, il est donc singulier en codimension 1. Comme le morphisme $C^{(g-3)}_{p,q} \longrightarrow \Theta$ est un isomorphisme hors de $(C^1_{g-3})_{p,q}$, qui est de dimension $g-7$ par 1.2, sa restriction à T est un isomorphisme en codimension 1 et l'image de T, à savoir $W_{p,q}.\operatorname{Sing} \Theta$, est

aussi singulière en codimension 1.

Soit L un point générique d'une composante Z de $\mathrm{Sing}\,(W_{p,q}.\mathrm{Sing}\,\Theta)$ de dimension $\geq g-6$. Comme $\dim W^2_{g-1} = g-9$ et $\dim W^1_{g-3} = g-8$, on a $h^0(L) = 2$ et $h^0(L(-p-q)) = 1$. Si $D \in |L(-p-q)|$ on a les égalités (cf. notations 1) :

$$H^0(L) = \mathbb{C}s_D s_{pq} \oplus \mathbb{C}s_2$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = \mathbb{C}t_1 \oplus \mathbb{C}t_2$$

$$T_L\ \mathrm{Sing}\,\Theta = \{s_D s_{pq} t_1\ ,\ s_D s_{pq} t_2\ ,\ s_2 t_1\ ,\ s_2 t_2\}^{\perp}$$

$$H^0(L(-p-q)) = \mathbb{C}s_D$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q)) = \mathbb{C}t_1 s_{pq} \oplus \mathbb{C}t_2 s_{pq} \oplus \mathbb{C}t$$

$$T_L\ W_{p,q} = \{s_D t_1 s_{pq}\ ,\ s_D t_2 s_{pq}\ ,\ s_D t\}^{\perp}\ .$$

Mais L est singulier sur $W_{p,q}.\mathrm{Sing}\,\Theta$ et lisse sur $\mathrm{Sing}\,\Theta$ et sur $W_{p,q}$. On a donc $T_L\ \mathrm{Sing}\,\Theta \subset T_L\ W_{p,q}$ et, quitte à modifier t et t_1 :

$$s_D t = s_2 t_1\ . \tag{3.3}$$

Soit F la partie fixe de L . On suppose d'abord que $p,q \notin \mathrm{Supp}\ F$. On peut écrire :

$$D = F+E$$

$$\mathrm{div}\ s_1 = p+q+F+E$$

$$\mathrm{div}\ s_2 = F+M \quad \text{avec} \quad \mathrm{Supp}\ M \cap \mathrm{Supp}\{p+q+E\} = \emptyset\ .$$

L'égalité (3.3) s'écrit alors :

$$s_E t = s_M t_1\ .$$

Donc t est nulle sur M et s'écrit $t = s_M u$, avec

$u \in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q-M)) = H^0(K_C - 2M+p+q-F) \subset H^0(K_C - 2M+p+q)$.

Mais, par proposition 3.1, pour un choix générique de p et q , ce dernier espace est nul pour tout M tel que $h^0(M) \geq 2$. On obtient donc la contradiction $t = 0$.

On ne peut pas avoir $p+q \leq F$ car $h^0(L(-p-q)) = 1$. On a donc par exemple $p \in \mathrm{Supp}\ F$, $q \notin \mathrm{Supp}\ F$ et :

$$F = p+G$$

$$D = G+E$$

$$\operatorname{div} s_1 = p+q+G+E$$

$$\operatorname{div} s_2 = p+G+M \quad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}\{q+E\} = \emptyset$$

On a alors :

$$s_E t = s_M s_p t_1 .$$

Comme dans le premier cas, t s'écrit $t = s_M u$ avec
$u \in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q-M)) \subset H^0(K_C - 2M+p+q) = 0$. Contradiction.

On a ainsi montré que $W_{p,q}.\operatorname{Sing}\Theta$ est non singulier en codimension 1 donc irréductible.

Sa classe de cohomologie est calculée en 3.7. ■

Proposition 3.4. Soit C une courbe lisse connexe de genre $g \geq 5$, non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, p et q des points distincts de C.

On considère l'application rationnelle :

$$\phi : \operatorname{Sing}\Theta \dashrightarrow \mathbb{P}S^2 T^*_x JC \simeq \mathbb{P}S^2 H^0(C,\omega_C)$$

$$x \in \operatorname{Sing}_2 \Theta \longmapsto \tau^*_x \quad (\text{cône tangent en } x \text{ à } \Theta).$$

Alors l'espace projectif engendré par l'image de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ est de codimension $3g-2$. C'est l'espace projectif des quadriques de $|\omega_C|^*$ contenant la courbe canonique et la corde pq .

■ Soit $X \subset \mathbb{P}H^0(C,\omega_C)^* = \mathbb{P}^{g-1}$ la courbe canonique de C , I_X l'idéal de X dans $\mathbb{P}^{g-1}$. On sait par [Gr 1]que l'application rationnelle :

$$\psi : \operatorname{Sing}\Theta \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(I_X(2)) \subset \mathbb{P}S^2 H^0(C,\omega_C)$$

induite par ϕ est non dégénérée et est associée à un sous-espace vectoriel V de $H^0(\operatorname{Sing}\Theta, \mathcal{O}(\Theta))$. Soit $\langle pq \rangle$ la droite pq dans $\mathbb{P}^{g-1}$, pour $p,q \in X$, et $H_{p,q} = \mathbb{P}H^0(I_{X \cup \langle pq \rangle}(2)) \subset \mathbb{P}H^0(I_X(2))$. Sous nos hypothèses, l'intersection des quadriques contenant X est la courbe X elle-même, sauf si C est une quintique plane $(g=6)$, auquel cas c'est la surface de Veronese dans $\mathbb{P}^5$, qui ne contient pas de droite (cf. [SD]). On en déduit que $H_{p,q}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}H^0(I_X(2))$.

On va montrer que :

$$(3.5) \qquad \psi^*(H_{p,q}) = W_{p,q}.\mathrm{Sing}\,\Theta + (-W_{p,q}).\mathrm{Sing}\,\Theta = D_{p,q} .$$

On en déduit alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Sing}\,\Theta}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Sing}\,\Theta}(\Theta)) \xrightarrow{r} H^0(\mathcal{O}_{D_{p,q}}(\Theta)) ,$$

qui montre que l'espace vectoriel engendré par $\psi(W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta) = \psi(D_{p,q})$ est $r(V) = H_{p,q}$, ce qui termine la démonstration.

L'égalité (3.5) résulte des deux lemmes suivants, joints au fait que la classe de cohomologie de $\mathrm{Sing}\,\Theta$ est $\frac{1}{12}\theta^4$ ([Gri-H] p. 358) donc que celle de $\psi^*(H_{p,q})$ est $\frac{1}{12}\theta^5$.

Lemme 3.6. On a l'égalité ensembliste :

$$\phi^{-1}(H_{p,q}) = [W_{p,q} \cup (-W_{p,q})] \cap \mathrm{Sing}\,\Theta .$$

■ Soit tout d'abord $L \in W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}_2\Theta$. On a les bases suivantes :

$$H^0(L) = \mathbb{C}s_{pq}s \oplus \mathbb{C}t$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = \mathbb{C}s' \oplus \mathbb{C}t' .$$

Alors $\phi(L) = (s_{pq}ss').(tt') - (s_{pq}st').(s't)$ correspond à une quadrique contenant la courbe canonique X et la corde $\langle pq \rangle$.

Réciproquement, soit $L \in \mathrm{Sing}_2\Theta$, $\{s,t\}$ une base de $H^0(L)$, $\{s',t'\}$ une base de $H^0(\omega_C \otimes L^{-1})$, que l'on peut choisir telles que $s(p) = s'(p) = 0$. Si $L \notin W_{p,q}$, on a aussi $t(p)s(q) \neq 0$. Si la quadrique $\phi(L) = [(st').(ts') - (ss').(tt')]$ contient la droite $\langle pq \rangle$, on a :

$$(st')(p)(ts')(q) + (st')(q)(ts')(p) - (ss')(p)(tt')(q) - (ss')(q)(tt')(p) = 0$$

$\Longrightarrow$ $s'(q)t'(p) = 0$

$\Longrightarrow$ s' nulle en p et q , ou p point base de $\omega_C \otimes L^{-1}$

$\Longrightarrow$ $L \in (-W_{p,q})$. ■

Lemme 3.7. Sous les hypothèses de la Proposition 3.4, $W_{p,q}.\mathrm{Sing}\,\Theta$ est de dimension pure $g-5$ et sa classe de cohomologie est $\frac{1}{24}\theta^5$.

■ Il découle de [Te]que sous nos hypothèses, Sing Θ est irréductible de dimension g-4 . Si on avait Sing $\Theta \subset W_{p,q}$, on aurait :

$$\forall r,s \in C \qquad \text{Sing } \Theta \subset \Theta_{p+q-r-s} ,$$

ce qui ne serait possible, d'après [We 2], que si :

$$\exists x,y \in C \qquad p+q-r-s \equiv x-y$$

$\Longrightarrow$ dim $W_3^1 \geq 1$

$\Longrightarrow$ C hyperelliptique par [Ma].

On a donc $\dim(W_{p,q}.\text{Sing } \Theta) \leq g-5$. Grâce à la construction de [Ke-L], il est facile de voir que $W_{p,q}.\text{Sing } \Theta$ est toujours de codimension ≤ 5 en tout point donc qu'il est de dimension pure g-5 dans notre situation. On peut aussi calculer sa classe de cohomologie w . Avec les notations de [Gri-H] page 352, on a :

$$\begin{aligned} w &= \alpha^*(\sigma_{3,2}) \\ &= \alpha^*(-\sigma_1.\sigma_4 + \sigma_3.\sigma_2) \\ &= -\theta.\frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{3!}\theta^3.\frac{1}{2!}\theta^2 = \frac{1}{24}\theta^5 . \blacksquare \end{aligned}$$

■

Proposition 3.8. Soient C une courbe lisse de genre g non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, p,q,r,s quatre points distincts de C , a le point de JC correspondant à $L_a = \mathcal{O}_C(p+q-r-s)$. Alors on a l'égalité entre cycles :

$$\Theta_a.\text{Sing } \Theta = (W_{p,q}.\text{Sing } \Theta) + ((-W_{r,s}).\text{Sing } \Theta) .$$

■ Soit u (resp. v) une section de $\mathcal{O}_C(r+s)$ (resp. $\mathcal{O}_C(p+q)$) de diviseur (r+s) (resp. (p+q)). Le noyau du morphisme :

$$H^0(L) \oplus H^0(L \otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(.u,.v)} H^0(L(r+s))$$

est isomorphe à $H^0(L(-p-q))$. On a donc :

$$h^0(L(r+s)) + h^0(L(-p-q)) \geq h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1})$$

et par Riemann-Roch, si deg L = g-1 :

$$h^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-r-s)) + h^0(L(-p-q)) \geq h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}) - 2 .$$

On en déduit l'égalité de l'énoncé, au point de vue ensembliste. L'égalité entre cycles découle alors de 3.7 et du fait que la classe de $\mathrm{Sing}\,\Theta$ est $\frac{\theta^4}{12}$. ■

Lemme 3.9. Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geq 6$, p et q deux points génériques sur C . Alors $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$ est de dimension $\leq g-6$.

■ Au vu de la Proposition 3.2, il suffit de montrer qu'on ne peut pas avoir : $W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta \subset (-W_{p,q})$ pour p,q génériques. Si c'était le cas, on aurait, pour p,q génériques :

$$\forall M \in W^1_{g-2} \qquad M(p) \in W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$$

$$\Longrightarrow h^0(\omega_C \otimes M^{-1}(-2p-q)) \geq 1$$

$$\Longrightarrow h^0(\omega_C \otimes M^{-1}) \geq 4$$

$$\Longrightarrow h^0(M) \geq g-2+1-g+4 = 3 \ ,$$

ce qui est impossible puisque W^1_{g-2} n'est pas contenu dans W^2_{g-2} (par 1 , W^1_{g-2} n'est pas vide puisque $g \geq 6$). On a donc une contradiction. ■

Proposition 3.10. Soit C une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 6$. Alors, pour p , q , r et s génériques sur C , $W_{p,q} \cdot (-W_{r,s})$ est irréductible de dimension $g-5$. Sa classe de cohomologie est $6\frac{\theta^5}{5!}$. Son image par l'application de Gauss $\Theta \dashrightarrow \mathbb{P}T^*_0 JC = |\omega_C|$ est $|\omega_C(-p-q-r-s)| \simeq \mathbb{P}^{g-5}$.

■ Soit $\varphi : C^{(g-1)} \longrightarrow \Theta$ l'application naturelle. On pose :

$$Z = \{D \in C^{(g-3)} \mid \text{Il existe } E \in |K_C - p - q - r - s| \text{ avec } E \geq D\} \ .$$

On a alors $W_{p,q} \cap (-W_{r,s}) = \varphi(Z_{p,q})$. Pour p,q,r,s génériques, $|H| = |K_C - p - q - r - s|$ est un g^{g-5}_{2g-6} et il est classique que Z est de dimension $g-5$ ([A-C-G-H 1 Lemma 3.2 p.342), connexe pour $g \geq 6$ par [Fu-L]. Si $|H|$ avait un point base x pour tout $(p,q,r,s) \in C^4$, les $\mathcal{O}(p+q+r+s+x)$ décriraient une sous-variété de dimension ≥ 3 de W^1_5 et C serait hyperelliptique par [Ma]. On peut donc supposer $|H|$ sans point base. Il est alors classique ([A-C-G-H 1] page 112 ou II.B.6) que Z est irréductible si $\phi_{|H|} : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-5}$ est birationnelle.

Pour $g \geq 7$, cela découle du fait que l'application canonique est birationnelle et qu'une courbe non dégénérée dans $\mathbb{P}^r$ $(r \geq 3)$ a au plus ∞^1 trisécantes (Ex. L.1

p. 152 de [A-C-G-H 1]) : la projection depuis un point générique de la courbe est donc birationnelle.

Pour $g=6$, ce n'est jamais le cas et on adopte une approche un peu différente : Z étant connexe, il en est de même pour $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. Il suffit donc de montrer que cette intersection est lisse.

Soit $L \in W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. On a :

$$H^0(L(-p-q)) = \mathbb{C}u$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-r-s)) = \mathbb{C}\, u'$$

$$H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q)) = \mathbb{C}u's_{pqrs} \oplus \mathbb{C}u'_1 \oplus \mathbb{C}u'_2$$

$$H^0(L(r+s)) = \mathbb{C}us_{pqrs} \oplus \mathbb{C}u_1 \oplus \mathbb{C}u_2 \ .$$

On a donc, dans $T_L JC \simeq H^0(C,\omega_C)^*$:

$$T_L W_{p,q} = \langle uu's_{pqrs}, uu'_1, uu'_2\rangle^{\perp}$$

$$T_L(-W_{r,s}) = \langle uu's_{pqrs}, u'u_1, u'u_2\rangle^{\perp} \ .$$

Si $W_{p,q}.(-W_{r,s})$ n'est pas lisse en L , on a une relation du type $uu'_1 = u'u_1$.

On écrit :

$$\mathrm{div}(u) = E+A \quad \mathrm{div}(u') = E+B \quad \text{avec} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\mathrm{div}(u_1) = F+C \quad \mathrm{div}(u'_1) = F+D \quad \text{avec} \quad C \cap D = \emptyset \ .$$

On a alors $A=C$ et $B=D$, de sorte que :

$$\begin{cases} F \equiv p+q+r+s+E \\ 2E+A+B \equiv K_C-p-q-r-s \ . \end{cases}$$

On remarque aussi qu'on ne peut pas avoir $F \geq p+q+r+s$, donc que $h^0(F) \geq 2$.

Si $\deg E = 1$, F est un g^1_5 . On a alors $\dim W^1_5 \geq 3$ donc C hyperelliptique ([Ma]).

Si $\deg E \geq 2$, $2E+A+B+s$ correspond à une bitangente à la courbe $\phi_{|K_C-p-q-r|}(C) \subset \mathbb{P}^2$, ou à une droite passant par un point de multiplicité ≥ 4 . Comme

une courbe de $\mathbb{P}^2$ n'a qu'un nombre fini de bitangentes, c'est la deuxième possibilité qui est génériquement vérifiée i.e. $h^0(K_C-p-q-r-2E) \geq 2$. Ceci contredit le fait que $\dim W^1_3 \leq 0$.

On a montré que $W_{p,q}.(-W_{r,s})$ est lisse connexe donc irréductible.

L'application de Gauss induit sur Z l'application birationnelle :

$$Z \dashrightarrow |\omega_C|$$

$$D \longmapsto (D+p+q) + (D'+r+s)$$

où $D' \in |\omega_C(-p-q-r-s-D)|$

dont l'image est $|H| \subset |\omega_C|$.

Enfin, pour calculer la classe de cohomologie, on applique les résultats de [M] (ou de [A-C-G-H 1] Chap. VIII). Avec les notations de loc. cit., on a :

$$[Z_{p,q}] = \eta^2.\text{coefficient de } t^2 \text{ dans } (1+\eta t)^{-1} e^{t\varphi^*\theta}$$

$$= \eta^2(\eta^2 - \eta\varphi^*\theta + \tfrac{1}{2}\varphi^*\theta^2) ,$$

et :

$$[W_{p,q}.(-W_{r,s})] = \varphi_*(\eta^4 - \eta^3\varphi^*\theta + \tfrac{1}{2}\eta^2\varphi^*\theta^2) = \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{4!}\theta^4.\theta + \frac{1}{2.3!}\theta^3.\theta^2 = 6\frac{\theta^5}{5!} . \blacksquare$$

§4. Etude des singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym généralisée.

Dans [Be 1]§3, Beauville a étendu au cas des courbes singulières les résultats de Mumford sur les singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym associée à un revêtement double étale de courbes lisses. Néanmoins, il ne considère que les revêtements satisfaisant à la propriété (*) de loc. cit. (page 157), c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de composantes échangées par l'involution.

Nous montrons ici qu'on peut facilement étendre ces résultats au cas général des revêtements satisfaisant à la condition (**) ci-dessous, qui donnent toutes les variétés de Prym généralisées.

Soit $\tilde{C}$ une courbe connexe de genre $2g+1$, avec au plus des points doubles comme singularités, munie d'une involution σ, et C la courbe quotient. On suppose la propriété suivante vérifiée :

(**)
- σ n'est l'identité sur aucune composante de $\tilde{C}$.
- Les points fixes de σ sont des points doubles de $\tilde{C}$ et les deux branches ne sont pas échangées.
- Le nombre de composantes de $\tilde{C}$ échangées par σ est égal au nombre de points doubles de $\tilde{C}$ échangés par σ.

Par Lemma 5.1 de [Be 1] C est de genre $g+1$ et $P^0 = (\mathrm{Ker}\ \mathrm{Nm})^0 \subset J\tilde{C}$ est une variété abélienne de dimension g.

Proposition 4.1. Soit M un faisceau inversible sur $\tilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$. Alors la fonction :

$$L \longmapsto h^0(L \otimes M) \mod 2$$

est constante sur P^0. Il existe un tel faisceau M avec $h^0(M)$ nul.

■ La démonstration de la première assertion est identique à celle de la Proposition 3.4 de [Be 1]. On montre maintenant l'existence de M. Il est clair que pour tout multidegré $\underline{d}$ sur C, il existe un multidegré $\underline{\tilde{d}}$ sur $\tilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}(\mathrm{Pic}^{\underline{\tilde{d}}}(\tilde{C})) \subset \mathrm{Pic}^{\underline{d}}(C)$. Comme de plus $\mathrm{Nm} : J\tilde{C} \longrightarrow JC$ est surjective, il existe un faisceau inversible M sur $\tilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$.

Si $H^0(\tilde{C},M)$ est non nul, on montre comme dans Step II, Lemma 3.2 de [Mu 3] qu'il existe x lisse sur $\tilde{C}$ tel que :

$$h^0(\tilde{C},M\otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x-\sigma x)) = h^0(\tilde{C},M) - 1 .$$

On peut donc trouver M tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$, $H^0(\tilde{C},M) = 0$. ■

Il peut arriver qu'aucun M vérifiant $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$, $H^0(\tilde{C},M) = 0$ ne soit de la forme π^*L_0 (cf. exemple du §6 et comparer avec Proposition 3.10 de [Be 1]).

On fixe à partir de maintenant un tel M et on définit $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C})$ comme le translaté de $J\tilde{C}$ par M : c'est la composante connexe de $\mathrm{Pic}(\tilde{C})$ formée des faisceaux inversibles sur $\tilde{C}$ de même multidegré que M . On définit aussi :

$$P = \text{composante connexe de } \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C\} \text{ contenant } M$$

$$\tilde{\Theta} = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) \mid h^0(L) \geq 1\} .$$

Alors $\tilde{\Theta}$ est un diviseur de $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C})$ (Proposition 2.2 de [Be 1]). On a :

Proposition 4.2.

- $P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(C) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C , h^0(L) \text{ pair}\}$
- $\tilde{\Theta}_{|P} = 2\Xi$, avec $\Xi = \{L \in P \mid h^0(L) \geq 2\}$.

■ Pour démontrer le premier point, on remarque d'abord que l'inclusion $\subset$ résulte de 4.1. Ensuite, il résulte de la démonstration de 5.4 de [Be 1]qu'on est dans l'une des situations suivantes :

- $\tilde{C} = A \cup \sigma A$ avec $\#A \cap \sigma A = 2$, auquel cas $\mathrm{Nm} : J\tilde{C} \longrightarrow JC$ a un noyau connexe égal à P^0. En particulier $P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C\}$.

- Il existe une composante de $\tilde{C}$ invariante par σ et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{Nm}$ a deux composantes connexes P^0 et P^1 . Si $L \in P^0$ et si x est sur une composante de $\tilde{C}$ invariante par σ et est lisse sur $\tilde{C}$, on a :

$$h^0(L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x-\sigma x)) = h^0(L) \pm 1 ,$$

soit $L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x-\sigma x) \in P^1$ et $h^0(L)$ est impair pour $L \in P^1$. Ceci montre le premier point. La démonstration du second est identique à celle de 3.10 de [Be 1]. ■

Les singularités de Ξ sont de deux types :

- soit $h^0(L) \geq 4$.
- soit $h^0(L) = 2$ et pour toute base $\{s,t\}$ de $H^0(L)$, on a :

$$\sigma^* s \otimes t = s \otimes \sigma^* t \quad \text{dans} \quad H^0(\tilde{C}, L \otimes \sigma^* L) = H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) .$$

Les premières seront dites stables, les secondes exceptionnelles. On étudie maintenant le comportement de ces premières dans une famille de revêtements doubles.

(4.3) Soit $\tilde{C} \longrightarrow T$ une courbe stable de genre $2g+1$, munie d'une involution σ satisfaisant sur les fibres à la condition (**). On supposera que $\tilde{C}$ est lisse et que T est un polydisque. On s'autorisera au besoin à réduire T sans toujours le mentionner.

On note $C = \tilde{C}/\sigma$. C'est un espace analytique lisse. Il résulte du Théorème 3.1 de [Gro 2] que l'espace de Picard $\mathrm{Pic}(\tilde{C}/T)$ (resp. $\mathrm{Pic}(C/T)$) existe. C'est un espace analytique sur T, en général non séparé, tel que sa fibre en $t \in T$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}(\tilde{C}_t)$ (resp. $\mathrm{Pic}(C_t)$). On a un morphisme norme $\mathrm{Nm} : \mathrm{Pic}(\tilde{C}/T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C/T)$.

On utilisera aussi le sous-espace analytique $\mathrm{Pic}^0(\tilde{C}/T)$ de $\mathrm{Pic}(\tilde{C}/T)$, de fibre en $t \in T$ isomorphe à $\mathrm{Pic}^0(\tilde{C}_t)$, qui est quasi-projectif sur T ([De] Proposition 4.3).

Lemme 4.4. *Il existe un faisceau inversible M sur $\tilde{C}$ tel que :*

(i) $\mathrm{Nm}\, M = \omega_{C/T}$

(ii) $\forall t \in T \quad H^0(\tilde{C}_t, M_t) = 0$.

■ Soit $\mathcal{D}$ un diviseur de Cartier effectif sur C tel que $\mathcal{O}_C(\mathcal{D}) = \omega_{C/T}$ et tel que la restriction de $\mathcal{D}$ à C_0 soit somme de $2g$ points distincts lisses sur C_0. Quitte à réduire T, on peut considérer $\mathcal{D}$ comme somme de $2g$ sections de $C \longrightarrow T$ qu'on peut remonter en des sections de $\tilde{C} \longrightarrow T$. Ceci donne un diviseur de Cartier effectif $\tilde{\mathcal{D}}$ sur $\tilde{C}$ et $M = \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{D}})$ satisfait à (i).

Comme dans la démonstration de 4.1, il existe des points $x_1^0, \ldots, x_N^0$ lisses de $\tilde{C}_0$ tels que $H^0(\tilde{C}_0, M_0(x_1^0 + \ldots + x_N^0 - \sigma x_1^0 - \ldots - \sigma x_N^0)) = 0$. On choisit des sections (locales) $x_1, \ldots, x_N$ de $\tilde{C} \longrightarrow T$ qui prennent les valeurs $x_1^0, \ldots, x_N^0$ en 0. Si $X_1, \ldots, X_N$ sont leur images, le faisceau inversible $M \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{N} (X_i - \sigma X_i))$ satisfait à i) et ii) (quitte à réduire T). ■

On fixe un tel M et on définit $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T)$ comme le "translaté" de $\mathrm{Pic}^0(\tilde{C}/T)$ par M. On lui associe une variété de Prym :

$$P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_{C/T}\}^M$$

$$= \{L_t \in \mathrm{Pic}^{M_t}(\tilde{C}_t) \mid \mathrm{Nm}\, L_t = \omega_{C_t} \quad \text{et} \quad h^0(\tilde{C}_t, L_t) \quad \text{pair}\} .$$

En suivant la construction déterminantielle usuelle ([Kl-L]), on peut définir un sous-espace analytique W^r_M de $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T)$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\{L_t \in \mathrm{Pic}^{M_t}(\tilde{C}_t) \mid h^0(\tilde{C}_t, L_t) \geq r+1\} .$$

On pose alors $\Xi = P.W^1_M$ et $S = P.W^3_M$, de sorte que, pour $t \in T$:

$\begin{cases} (P_t, \Xi_t) \text{ est la variété de Prym associée au revêtement } \tilde{C}_t \to C_t . \\ S_t \text{ est l'ensemble des singularités stables de } \Xi_t . \end{cases}$

On a alors :

Proposition 4.5. *Le sous-espace S de P est vide ou de codimension partout ≤ 6 .*

■ On fait la construction de [Mu 3] généralisée dans Theorem 1.1 de [Be 1] et on applique la remarque (1.6) de [H] (cf. démonstration de 5.4). ■

Il est montré en II.D.1.2.5 que lorsque $g \geq 6$, S_t n'est jamais vide si C_t est lisse. Il est facile d'en déduire que dans la situation ci-dessus, S n'est jamais vide dès que $g \geq 6$.

§5. Les intersections $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour une variété de Prym.

A beaucoup de titres, les intersections $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour les variétés de Prym jouent un rôle analogue aux intersections $\Theta.\Theta_{p-q}$ pour les jacobiennes (cf. IV.B).

On étudie ici ces premières et plus particulièrement leur lieu singulier, ainsi que son comportement "en famille".

Théorème 5.1. *Soit $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement double étale de courbes lisses connexes, σ l'involution de $\tilde{C}$ associée. On suppose que C est non hyperelliptique et non trigonale de genre $g+1$ et on note (P,Ξ) la variété de Prym associée à π dans $\mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C}$. On prend deux points r et s sur $\tilde{C}$ et on note a l'élément de $\mathrm{Pic}^0\tilde{C}$ correspondant au faisceau inversible $L_a = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$. Alors l'intersection $\Xi.\Xi_a$ est réduite et on a :*

$$\Xi.\Xi_a = \{L \in P \mid h^0(\tilde{C}, L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geq 1\}$$

$$\mathrm{Sing}(\Xi.\Xi_a) \supset \{L \in P \mid h^0(\tilde{C}, L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geq 2\} ,$$

avec égalité pour C générique et r et s génériques sur $\tilde{C}$.

■ On commence par le :

Lemme 5.2. *Si $L \in P$, on a*

$$h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geq \frac{1}{2}[h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1})] - 1 .$$

■ Soit t une section de $\mathcal{O}(r+s)$ de diviseur $(r+s)$. Le noyau du morphisme :

$$H^0(L) \oplus H^0(L \otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(\sigma t, -t)} H^0(L \otimes \mathcal{O}(\sigma r+\sigma s))$$

est isomorphe à $H^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s))$. On a donc :

$$h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}) - h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s))$$

$$\leq h^0(L \otimes \mathcal{O}(\sigma r+\sigma s)) = h^0(\sigma^* L \otimes \mathcal{O}(r+s))$$

$$= h^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \sigma^* L^{-1} \otimes \mathcal{O}(-r-s)) + 2 \quad \text{par Riemann-Roch}$$

$$= h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) + 2 \quad \text{puisque } L \otimes \sigma^* L \simeq \omega_{\tilde{C}} . \blacksquare$$

On en déduit l'égalité ensembliste :

$$\Xi \cap \Xi_a = \{L \in P \mid h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geq 1\} . \tag{5.3}$$

Comme C est non hyperelliptique et non trigonale, le système linéaire $|H| = |\omega_C \otimes \mathcal{O}(-\pi r - \pi s)|$ est un g^{g-2}_{2g-2} sans point base. On lui associe, en suivant [Be 3], la sous-variété réduite $S = (\pi^{(2g-2)})^{-1}(|H|)$ de $\tilde{C}^{(2g-2)}$.

L'image de $S+r+s \subset \tilde{C}^{(2g)}$ dans $\mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C}$ a alors deux composantes connexes, dont une seule V est contenue dans P, et qui n'est autre que $\Xi \cap \Xi_a$ par 5.3. Le théorème 1 de loc. cit. montre que la classe de V dans $H^4(P,\mathbb{Q})$ est $[\Xi]^2$, donc que l'intersection $\Xi.\Xi_a$ est réduite.

Soit $L \in P$ tel que $h^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s)) \geq 2$. On va montrer que L est singulier sur $\Xi.\Xi_a$. Si $h^0(L) = 4$ ou $h^0(L \otimes L_a^{-1}) = 4$ alors L est singulier sur Ξ ou sur Ξ_a donc sur $\Xi.\Xi_a$. Si $h^0(L) = h^0(L \otimes L_a^{-1}) = 2$, on prend une base $\{u,v\}$ de $H^0(L \otimes \mathcal{O}(-r-s))$. On a alors :

$$H^0(L) = \mathbb{C}\, u s_{rs} \oplus \mathbb{C}\, v s_{rs}$$

$$H^0(L \otimes L_a^{-1}) = \mathbb{C}\, u\sigma^* s_{rs} \oplus \mathbb{C}\, v\sigma^* s_{rs} .$$

Par [Mu 2] §6, l'hyperplan $T_L\Xi$ de $T_L P \simeq H^0(\tilde{C},\omega_{\tilde{C}})^*$ correspond à $[u.s_{rs}.\sigma^*v.\sigma^*s_{rs} - \sigma^*u.\sigma^*s_{rs}.v.s_{rs}]$ et $T_L\Xi_a$ à $[u.\sigma^*s_{rs}.\sigma^*v.s_{rs} - \sigma^*u.s_{rs}.v.\sigma^*s_{rs}]$. On a donc $T_L\Xi = T_L\Xi_a$ et L est singulier sur $\Xi.\Xi_a$.

On suppose maintenant C générique et r et s génériques sur C. On rappelle ([Be 3] §1) qu'on a un morphisme surjectif :

$$f : \tilde{C}^{(2g-2)} \supset S_0 \longrightarrow \Xi.\Xi_a \subset \mathrm{Pic}^{2g}\tilde{C}$$

$$D \longmapsto \mathcal{O}_{\tilde{C}}(D+r+s) .$$

La fibre de L est isomorphe à $|L \otimes \mathcal{O}(-r-s)|$. Il nous suffit donc de montrer que S_0 est lisse c'est-à-dire, par Proposition 3 de [Be 3], que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout diviseur effectif } A \text{ sur } C, \\ h^0(H-2A) \neq 0 \Longrightarrow h^0(H-A) = h^0(H) - \deg A \end{cases}$$

ou, par Riemann-Roch, avec $r' = \pi(r)$, $s' = \pi(s)$:

$$h^0(A+r'+s') \geq 2 \Longrightarrow h^0(K_C - 2A - r' - s') = 0 .$$

Cette propriété est conséquence de la Proposition 3.1. ∎

Les points L de P tels que $h^0(\tilde{C},L\otimes\mathcal{O}(-r-s)) \geq 2$ seront dits singularités stables de $(\Xi.\Xi_a)$.

Cette définition est justifiée par l'analogie de leurs propriétés avec celles des singularités "stables" du diviseur Ξ, définies dans le paragraphe 4.

En particulier, on montrera qu'elles existent toujours pour $g\geq 5$ (cf. 6.10) et que l'ensemble de ces singularités est partout de dimension $\geq g-5$ (cf. 5.5).

(5.4) On étudie maintenant le comportement de ces singularités en famille. On reprend les hypothèses et notations de 4.3, de sorte qu'on a une famille de revêtements doubles $\tilde{C} \longrightarrow C=\tilde{C}/\sigma \longrightarrow T$.

On a aussi choisi un faisceau inversible M sur $\tilde{C}$ satisfaisant à $\mathrm{Nm}\, M=\omega_{C/T}$ et $H^0(\tilde{C}_t,M_t)=0$ pour tout t.

On prend deux sections disjointes r et s et on définit le sous-espace analytique $S^{r,s}$ de la variété de Prym P en suivant la procédure utilisée dans [Kl-L] : à l'aide du faisceau de Poincaré sur $\tilde{C}\times_T \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T)$, on construit deux faisceaux localement libres E et F sur $\mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T)$ de rangs respectifs M et $M+2$, ainsi qu'un morphisme $f: E \longrightarrow F$ tels qu'on ait ensemblistement :

$$\{L\in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T) \mid \mathrm{Rang}\, f_L \leq M-2\}$$

$$= \{L\in \mathrm{Pic}^M(\tilde{C}/T) \mid \forall t\in T \quad h^0(\tilde{C}_t,L_t\otimes\mathcal{O}(-r(t)-s(t))) \geq 2\}\ .$$

L'espace $S^{r,s}$ est alors défini comme la variété déterminantielle :

$$S^{r,s} = \{\text{zéros de } \Lambda^{M-1} f_{|P}\}\ ,$$

de sorte que, lorsque C_t est lisse, $S^{r,s}_t$ est l'ensemble des singularités stables de $\Xi_t.\Xi_{t,a(t)}$ avec $a(t) = r(t)+s(t)-\sigma r(t)-\sigma s(t)$.

On a alors :

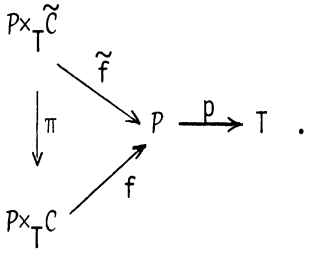
Proposition 5.5. *Le sous-espace $S^{r,s}$ de P est vide ou de codimension partout ≤ 5.*

■ On prend $N+1$ sections $x_0,\ldots,x_N$ de $\tilde{C} \longrightarrow T$ de façon que :

(5.6) $r,s,x_0,\ldots,x_N$ soient disjointes deux à deux.

(5.7) Le multidegré de $M_t(r(t)+s(t)-\sum_{i=1}^{N} x_i(t))$ ait toutes ses composantes <0 pour tout t.

On prend les notations suivantes :



On désignera encore par $r,s,x_0,\ldots,x_N$ les sections de $\tilde{f}$ induites par $r,s,x_0,\ldots,x_N$ et par $R,S,X_0,\ldots,X_N$ leurs images dans $P\times_T\tilde{C}$.

Soit F un faisceau de Poincaré sur $P\times_T\tilde{C}$. Il satisfait à : $F_{|\{L_t\}\times\tilde{C}} \simeq L_t$ pour $L_t \in P$, et $F_{|X_0} \simeq \mathcal{O}_{X_0}$.

Le faisceau $\pi_*F = E$ est localement libre de rang 2 sur $P\times_T C$. Il est muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans $\omega_{P\times_T C/P}$ (cela se montre comme dans la Proposition 3.4 de [Be 1]).

En suivant [Mu 3], on introduit :

$$A = \pi_*\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) \quad \text{diviseur de Cartier sur } P\times_T C$$

$$V = f_*(E(A)/E(-A))$$

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= f_*(E(A)) \\ W_2 &= f_*(E/E(-A)) \end{aligned}\right\} \text{ sous-faisceaux de } V .$$

Par (5.7), on a :

$$\forall L_t \in P \qquad H^0(C_t, E_{L_t}(-A_t)) \simeq H^0\Big(\tilde{C}_t, L_t\Big(-\sum_{i=1}^{N}\pi x_i(t)\Big)\Big) = 0 .$$

On en conclut comme dans loc. cit. que W_1, W_2 et V sont localement libres de rangs respectifs $2N$, $2N$ et $4N$. Il existe une forme quadratique non dégénérée sur V pour laquelle W_1 et W_2 sont totalement isotropes. On a aussi :

$$\forall L_t \in P \qquad W_{1,L_t} \cap W_{2,L_t} \simeq H^0(\tilde{C}_t, L_t) .$$

On aura aussi besoin de :

$$W_0 = f_*(\pi_*(F(-R-S)) \otimes \mathcal{O}(A)) \subset W_1 ,$$

qui satisfait à :

- $W_{0,L_t} \simeq H^0(C_t, \pi_*(L_t(-r_t-s_t) \otimes \mathcal{O}(\Sigma\, x_i(t)))$
  $\simeq H^0(C_t, L_t(-r_t-s_t+\pi^*A_t))$
- W_0 est localement libre de rang $2N-2$ (appliquer 5.7).

On a le diagramme commutatif suivant, analogue à celui de loc. cit. page 183 :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{C}_t, L_t(-r_t-s_t)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{C}_t, L_t) = (W_1 \cap W_2)_{L_t} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{C}_t, L_t(-r_t-s_t+\pi^*A_t)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{C}_t, L_t(\pi^*A_t)) = W_{1,L_T} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^0(\tilde{C}_t, L_t(-r_t-s_t+\pi^*A_t) \otimes \mathcal{O}_{\pi^*A_t}) & = & H^0(\tilde{C}_t, L_t(\pi^*A_t) \otimes \mathcal{O}_{\pi^*A_t})
\end{array} ,$$

qui prouve que :

$$(W_0 \cap W_2)_{L_t} \simeq H^0(\tilde{C}_t, L_t(-r_t-s_t)) .$$

Ensemblistement, on a donc :

$$S^{r,s} = \{L \in P \mid \dim(W_{0,L} \cap W_{2,L}) \geq 2\} .$$

Pour montrer la proposition, il suffit donc d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 5.8. Soit P une variété irréductible, $E \longrightarrow P$ un fibré vectoriel de rang $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, W^n et W^k des sous-fibrés de E de rangs respectifs n et $k<n$, isotropes pour Q. Alors le lieu :

$$\{x \in P \mid \dim W^n_x \cap W^k_x \geq r\}$$

est vide ou de codimension au plus $\frac{r(r-1)}{2} + r(n-k)$ en tout point.

■ Comme dans 1.6 de [H], il suffit de montrer que si V est un espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, Λ_0 un sous-espace vectoriel isotrope de dimension n, Σ^k la sous-variété irréductible ([Gri-H] page 739) de $G(k,V)$ formée des espaces isotropes, alors :

$$\Sigma^k(\Lambda_0) = \{\Lambda^k \in \Sigma^k \mid \dim \Lambda^k \cap \Lambda_0 \geq r\}$$

est fermé irréductible de codimension $\frac{r(r-1)}{2} + r(n-k)$.

Comme dans 1.5 de [H] on introduit :

$$\Gamma = \{(\Lambda^k, \Delta) \in \Sigma^k \times Gr(r,\Lambda_0) \mid \Delta \subset \Lambda^k\} .$$

Par [Gri-H] p. 739, la fibre de $pr_2 : \Gamma \longrightarrow Gr(r,\Lambda_0)$ est irréductible de dimension $(k-r)(2n-2r-k+r) - \frac{(k-r)(k-r+1)}{2}$. La projection $pr_1 : \Gamma \longrightarrow \Sigma^k$ est birationnelle sur son image, qui est $\Sigma^k(\Lambda_0)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Codim}_{\Sigma^k} \Sigma^k(\Lambda_0) &= \operatorname{Codim}_{\Sigma^k} \{\text{fibre de } pr_2\} - \dim Gr(r,\Lambda_0) \\
&= k(2n-k) - \frac{k(k+1)}{2} - (k-r)(2n-2r-k+r) + \frac{(k-r)(k-r+1)}{2} - r(n-r) \\
&= 2nr - r^2 - kr + \frac{r(r-1)}{2} - nr + r^2 \\
&= r(n-k) + \frac{r(r-1)}{2} .
\end{aligned}$$

■

■

§6. L'exemple fondamental.

On va maintenant appliquer les résultats des sections 4 et 5 à la situation suivante. Soit Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$. On considère une famille $\tilde{f}: (\tilde{C},\sigma) \longrightarrow \Delta$ satisfaisant à :

- $\tilde{C}$ est une surface lisse.
- C_0 est obtenue à partir d'une courbe générique N de genre $g \geq 6$ en identifiant deux points génériques p et q de N.
- Pour $t \neq 0$, C_t est une courbe lisse irréductible générale de genre $g+1$.
- $\pi_0 : \tilde{C}_0 \longrightarrow C_0$ est le revêtement de Wirtinger de C_0, de sorte que $\tilde{C}_0$ est obtenue à partir de l'union disjointe $N_1 \amalg N_2$ $(N_1 = N_2 = N)$ en identifiant p (resp. q) sur N_1 à q (resp. p) sur N_2.

Si L_0 est un faisceau inversible de degré g sur C_0 tel que $L_0^{\otimes 2} \simeq \omega_{C_0}$, il ressort de [H] Theorem 2.14, que :

$$\begin{cases} \pi_0^* L_0 \text{ est de multidegré } (g,g) \\ h^0(\pi_0^* L_0) = 2h^0(L_0) \pm 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

En utilisant ensuite Lemma 2.1 iii) de [Be 1], on peut conclure que tout faisceau M sur $\tilde{C}$ qui satisfait aux conclusions de 4.4, à savoir :

$$\mathrm{Nm}\, M = \omega_{C/\Delta} \quad , \quad h^0(\tilde{C}_t, M_t) = 0 \ ,$$

est de multidegré $(g-1,g+1)$ ou $(g+1,g-1)$ sur $\tilde{C}_0$. On passe d'un cas à l'autre en prenant l'image de M par σ^*.

Le choix de M définit donc une famille de variétés de Prym P. Si par exemple $\deg M_0 = (g-1,g+1)$, on a $P_0 \subset \mathrm{Pic}^{(g-1,g+1)} \tilde{C}_0$. On sait d'autre part ([Be 1] Theorem 5.4) que $P_0 \simeq JN$. Ceci peut se voir de la façon suivante. Soit n la normalisation de $\tilde{C}_0$, pr_1 la projection $J(N_1 \amalg N_2) \longrightarrow JN_1 \xrightarrow{\sim} JN$. Alors le morphisme :

$$pr_1\, n^* : P_0 \longrightarrow J^{g-1}N$$

est un isomorphisme et envoie :

$$\Xi_0 = \{L \in P_0 \mid h^0(L) \geq 2\}$$

sur

$$\Theta = \{L \in J^{g-1}N \mid h^0(L) \geq 1\} \ .$$

■ Soit $L \in P_0$. On a $L \otimes \sigma^* L = \omega_{\tilde{C}_0}$ donc $n^* L = (L, \omega_N(p+q) \otimes L^{-1})$, avec $L \in J^{g-1}N$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(L) \xrightarrow{n^*} H^0(L) \oplus H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} .$$

Si $L \notin \Theta$, on a $H^0(L) = H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0$ et :

$$H^0(L) \simeq \{u \in H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) \quad u(p) = u(q) = 0\}$$

$$\simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{soit} \quad L \notin \Xi_0 .$$

Donc $pr_1 n^*(\Xi_0) \subset \Theta$. Comme Θ est irréductible, on a égalité. ■

On va maintenant déterminer quels points de $\operatorname{Sing} \Theta$ correspondent à des singularités stables au sens des variétés de Prym.

On adopte les notations du §3, à savoir :

$$W = W^0_{g-3} \subset J^{g-3}N$$

$$W_{p,q} = W+p+q \subset J^{g-1}N .$$

Lemme 6.1. Les singularités stables de Ξ_0 sont les points de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$.

■ On garde les notations ci-dessus.

Si $h^0(L) \geq 4$ alors L correspond à un point singulier de Ξ_0 donc L à un point singulier de Θ et $h^0(L) \geq 2$. Si $L \notin W_{p,q}$ alors : $h^0(L(-p-q)) = 0$, $h^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) = 2$ et $h^0(L) = 2$. Donc toutes les sections de $\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}$ sont nulles en p et q et $H^0(L) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$ est de dimension 2 . C'est une contradiction, donc $L \in W_{p,q}$. Réciproquement, si $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ alors pour $s \in H^0(L(-p-q))$ et $\bar{s}, \bar{t} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$ linéairement indépendantes, on a $n^* H^0(L) \supset \{(ss_{pq}, 0); (0, \bar{s}s_{pq}); (0, \bar{t}s_{pq})\}$ et $h^0(L) \geq 3$. Comme $h^0(L)$ est pair, on a bien $h^0(L) \geq 4$. ■

Remarque 6.2. On a introduit en 4.3 le fermé suivant de P :

$$S = \bigcup_{t \in \Delta} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\} .$$

Les singularités de Ξ étant toutes stables pour un revêtement générique, on a $S_t = \mathrm{Sing}\ \Xi_t$ pour $t \neq 0$. Il résulte de [We 4] que $\lim_{t\to 0} S_t \subset W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \mathrm{Sing}\ \Theta$, qui est de dimension $\leq g-6$ par 3.9. On en déduit que S est réductible de codimension partout 6 dans P. Une de ses composantes est $W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\ \Theta$ (au-dessus de 0), les autres dominent Δ.

On considère maintenant deux sections disjointes r et s de $\widetilde{C} \longrightarrow \Delta$. Quitte à prendre des images par σ, on peut supposer que r_0, $s_0 \in N_2 - N_1$.

Le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s+N_2)$ est de multidegré nul sur chaque fibre. Il correspond à une section a de $P^0 \longrightarrow \Delta$, qui satisfait à :

$\forall t \neq 0$ $\quad a_t$ correspond à $\mathcal{O}_{\widetilde{C}_t}(r_t+s_t-\sigma r_t-\sigma s_t)$

$\quad a_0$ correspond à $\mathrm{pr}_1{}^*\mathcal{O}_{\widetilde{C}_0}(r_0+s_0-\sigma r_0-\sigma s_0+N_2) = \mathcal{O}_N(-r_0-s_0+p+q)$ dans JN.

On introduit comme en 5.4 le sous-espace fermé $S^{r,s}$ de P, dont l'ensemble sous-jacent est :

$$\{L \in P \mid h^0(C_t, L_t \otimes \mathcal{O}(-r_t-s_t)) \geq 2\}.$$

Par le Théorème 5.1, on a :

$$\forall t \neq 0 \qquad S_t^{r,s} = \mathrm{Sing}(\Xi_t . \Xi_{t,a_t}).$$

Au-dessus de 0, on a (on laisse tomber les indices 0 dans r_0, s_0 et a_0) :

Proposition 6.3. *Pour $g \geq 6$, l'espace analytique $S_0^{r,s}$ est de dimension pure $g-5$ et a 3 composantes irréductibles, à savoir $(W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\ \Theta)$, $(-W_{r,s}) \cap \mathrm{Sing}\ \Theta_a$ et $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. Il est lisse en tout point de $(W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\ \Theta) \setminus (-W_{r,s})$.*

■ On sait déjà (Lemme 6.1) que les points de $W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\ \Theta$ correspondent à des faisceaux inversibles L sur $\widetilde{C}_0$ avec $h^0(L) \geq 4$, donc a fortiori à des éléments de $S_0^{r,s}$.

Ceux de $-(W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\ \Theta) + a = (-W_{r,s}) \cap \mathrm{Sing}\ \Theta_a$ correspondent à des faisceaux inversibles L sur $\widetilde{C}_0$ avec $h^0(L(\sigma r+\sigma s-r-s)) \geq 4$ donc aussi à des éléments de $S_0^{r,s}$.

Si L est un point de $W_{p,q} \cap -W_{r,s}$, on peut prendre $u \in H^0(L(-p-q))$, $\bar{u} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s))$ non nulles.

Avec les notations de la démonstration précédant 6.2, on a $n^*H^0(L(-r-s)) \supset \{(us_{pq},0);(0,\bar{u}s_{pqrs})\}$ et L est bien un point de $S_0^{r,s}$.

Réciproquement, si L correspond à un point de $S_0^{r,s}$, on distingue deux cas :

i) Si $h^0(L) \geq 2$ ou $h^0(L(-p-q+r+s)) \geq 2$ on est dans $\Theta_a \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$ ou $\Theta \cap \mathrm{Sing}\,\Theta_a$. Si par exemple $L \in \Theta_a \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$, on a par proposition 3.8 :

$$L \in [(-W_{r,s}) \cap \mathrm{Sing}\,\Theta] \cup [W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta] .$$

Si L appartient à la première mais pas à la seconde de ces deux composantes, on a :

$$h^0(L) = 2 \qquad h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)) = 1$$

$$h^0(L(-p-q)) = 0 \qquad h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) = 1 .$$

On en déduit :

$$n^*H^0(L(-r-s)) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)) .$$

Mais c'est impossible puisque l'espace vectoriel de droite est de dimension 1.

On a donc $L \in W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$.

De même, si $L \in \Theta \cap \mathrm{Sing}\,\Theta_a$, on en déduit $L \in (-W_{r,s}) \cap \mathrm{Sing}\,\Theta_a$.

ii) Si $h^0(L) = h^0(L(-p-q+r+s)) = 1$, alors $n^*H^0(L(-r-s)) \simeq H^0(L) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s))$, ce qui n'est possible que si $H^0(L) \simeq H^0(L(-p-q))$ et $H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) \simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s))$ i.e. $L \in W_{pq} \cap (-W_{rs})$.

On va maintenant calculer l'espace tangent en L à $S_0^{r,s}$. Remarquons tout d'abord que la construction de $S^{r,s}$ commute aux changements de base. En particulier, la fibre $S_0^{r,s}$ est l'espace $S^{r,s}$ associé à la "famille" $\tilde{C}_0 \longrightarrow \{0\}$ et aux sections r et s , c'est-à-dire $P_0.(W^1_{(g-1,g-1)})_{r,s}$. L'espace tangent à $S_0^{r,s}$ en L s'obtient de la façon suivante pour $h^0(\tilde{C}_0, L(-r-s)) = 2$: si $\{u_1,u_2\}$ est une base de $H^0(L(-r-s))$ et $\{\bar{u}_1 = \sigma^*u_1 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_2 = \sigma^*u_2 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ une base de $H^0(\omega_{\tilde{C}_0} \otimes L^{-1}(r+s))$ alors $T_L S_0^{r,s}$ est l'orthogonal de $\{u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j)\}_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 4}$, éléments de l'espace des sections de $\omega_{\tilde{C}_0}$ antiinvariantes par σ^*, qui est $T^*_L P_0$.

De par la forme particulière de $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$, ces 8 éléments se réduisent aux 5 suivants :

$$\{(u_1\sigma^*u_2 - u_2\sigma^*u_1)s_{rs}\sigma^*s_{rs}\ ,\ u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j)\ ,\ 1\leq i\leq 2<j\leq 4\}\ .$$

On va calculer cet espace tangent dans le cas où L correspond à un point L de $W_{p,q}\cap \mathrm{Sing}\,\Theta$ avec $L\notin(-W_{r,s})$, pour montrer qu'il est de dimension $g-5$.

On a alors :

$$h^0(L)\geq 2 \qquad h^0(L(-p-q))\geq 1$$

$$h^0(L(r+s)) = 2\ .$$

On en déduit facilement que :

$$h^0(L) = h^0(L(r+s)) = 2$$

$$h^0(L(-p-q)) = h^0(L(r+s-p-q)) = 1\ .$$

On a les suites exactes suivantes :

$$0\longrightarrow H^0(L(-r-s)) \xrightarrow{n^*} H^0(L)\oplus H^0(\omega_N\otimes L^{-1}(p+q-r-s)) \longrightarrow \mathbb{C}_1\oplus\mathbb{C}_2$$

$$0\longrightarrow H^0(\omega_{\tilde{C}_0}\otimes L^{-1}(r+s)) \xrightarrow{n^*} H^0(\omega_N\otimes L^{-1}(p+q))\oplus H^0(L(r+s)) \longrightarrow \mathbb{C}_1\oplus\mathbb{C}_2\ .$$

On prend les bases suivantes :

$$\{u_1 = us_{pq}, u_2\} \text{ pour } H^0(L)$$

$$\{\bar{u}\} \text{ pour } H^0(\omega_N\otimes L^{-1}(p+q-r-s))$$

$$\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\} \text{ pour } H^0(\omega_N\otimes L^{-1})$$

$$\{\bar{u}_1 s_{pq},\bar{u}_2 s_{pq},\bar{u}s_{rs}\} \text{ pour } H^0(\omega_N\otimes L^{-1}(p+q))$$

$$\{us_{pqrs}, u_2 s_{rs}\} \text{ pour } H^0(L(r+s))\ .$$

Comme $\bar{u}$ n'est pas nulle en p et en q, $(0,\bar{u})$ n'est pas dans $n^*H^0(L(-r-s))$, qui est donc de dimension au plus 2, en fait exactement 2 par ce qui précède. On peut choisir u_2 de façon qu'une base en soit $\{(us_{pq},0);(u_2,\bar{u})\}$. Une base de $n^*H^0(\omega_{\tilde{C}_0}\otimes L^{-1}(r+s))$ est alors $\{(0,us_{pqrs});(\bar{u}s_{rs},u_2s_{rs});(\bar{u}_1s_{pq},0);(\bar{u}_2s_{pq},0)\}$.

L'espace tangent $T_L S_0^{r,s}$ est l'orthogonal dans $T_L P_0 \simeq T_L JN \simeq H^0(N,\omega_N)^*$ de $\{u\bar{u}s_{rs}, u\bar{u}_1 s_{pq}, u\bar{u}_2 s_{pq}, u_2\bar{u}_1, u_2\bar{u}_2\}$.

En comparant avec les calculs de la démonstration de 3.2, on voit (avec $t = \bar{u}s_{rs}$, $s_D = u$, $t_i = \bar{u}_i$, $s_i = u_i$) que :

$$T_L\, S_0^{r,s} \simeq T_L(W_{p,q}.\mathrm{Sing}\,\Theta) \ .$$

La fin de la démonstration de 3.2 montre alors que cet espace tangent est de dimension $g-5$, ce qui termine la démonstration. ∎

Remarque 6.4. On peut montrer que $S_0^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$, par la même méthode que celle employée ci-dessus. En particulier, par 3.2 et 3.10, sa classe de cohomologie donc aussi celle de $S_t^{r,s}$ pour tout t , est, par 3.7 et 3.10 : $\frac{\theta^5}{24} + \frac{\theta^5}{24} + \frac{\theta^5}{20} = \frac{2}{15}\,\theta^5$.

On peut maintenant montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 6.5. Pour $g \geq 6$, le sous-espace analytique $S^{r,s}$ de P est irréductible, de codimension 5 et domine Δ .

∎ Il suffit de montrer que toute composante irréductible T de $S^{r,s}$ vérifie : (quitte à réduire Δ) :

i) T est de codimension 5 et domine Δ .

ii) $T_0 \supset W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$.

En effet, il résulte de 6.3 que $S^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$, donc qu'une seule composante irréductible de $S^{r,s}$ contient $W_{p,q} \cap \mathrm{Sing}\,\Theta$. Le théorème découle alors immédiatement de i) et ii).

Par Proposition 5.5, on sait que $S^{r,s}$ est vide ou partout de codimension ≤ 5 dans P . Comme sa fibre en 0 est de codimension partout 5 dans P_0 (Proposition 6.3), on en déduit i).

On peut supposer que pour tout t dans un sous-ensemble dense Ω de Δ , on a :

$$\begin{cases} P_t \text{ est simple} \\ a_t = r_t + s_t - \sigma r_t - \sigma s_t \text{ n'est pas d'ordre fini dans } P_t \ . \end{cases}$$

On peut alors déduire de IV.B.2.1 que :

$$\forall t \in \Omega \quad \dim(T_t \cap \mathrm{Sing}\,\Xi_t) \geq g-6 \ .$$

(6.6) On peut remarquer que ceci redémontre le Théorème II.D.1.2.5 , à savoir que dim Sing $\Xi \geq g-6$ pour toute variété de Prym (P,Ξ).

Or on sait par [We 1] que Sing $\Xi_t = S_t$ est de dimension pure $g-6$. Il s'ensuit que T_t contient une composante de Sing Ξ_t , pour $t \in \Omega$. On sait aussi ([We 4] 3.4) que la limite de S_t quand t tend vers 0 est contenue dans $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \text{Sing } \Theta$ qui est de dimension $\leq g-6$ par 3.9. On en déduit que T_0 contient une composante de $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \text{Sing } \Theta$ de dimension $(g-6)$. Or il résulte de Proposition 6.3 que les composantes de T_0 sont parmi $\{(W_{p,q} \cap \text{Sing } \Theta), ((-W_{r,s}) \cap \text{Sing } \Theta_a)$, $(W_{p,q} \cap (-W_{r,s}))\}$. L'assertion ii) résulte alors du lemme suivant.

Lemme 6.7. Soient p,q fixés. Alors pour r et s génériques, aucune composante de dimension $g-6$ de $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \text{Sing } \Theta$ n'est contenue dans $(-W_{r,s})$.

■ Il revient au même de montrer qu'aucune composante Z n'est contenue dans $W_{r,s}$. Si Z était contenue dans tous les $W_{r,s}$, on aurait $Z \subset W^2_{g-1}$, ce qui est impossible puisque $\dim Z = g-6$ et $\dim W^2_{g-1} = g-9$ (cf. 1). ■

■

On en déduit aussi le résultat annexe suivant :

Corollaire 6.8. Soit $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale entre courbes lisses connexes, où C est générique de genre $g+1 \geq 7$. Soient r et s deux points génériques de $\tilde{C}$, a l'élément de la variété de Prym (P,Ξ) de π associé à $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$. Alors Sing$(\Xi.\Xi_a)$ est irréductible de dimension $g-5$. Sa classe de cohomologie est $\frac{2}{15}[\Xi]^5$.

Remarque 6.9. Lorsque $g=5$, on montre comme ci-dessus que Sing$(\Xi.\Xi_a)$ n'est jamais vide et est génériquement un ensemble de $\frac{2}{15}\,5! = 16$ points.

§7. Le théorème principal.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.1. Pour tout $g \geq 7$, l'ensemble des variétés de Prym P_g est une composante irréductible de N^g_{g-6} .

■ Démonstration du théorème. On va montrer que pour $g \geq 6$, P_{g+1} est une composante de N^{g+1}_{g-5} . Rappelons tout d'abord que P_{g+1} est contenu dans N^{g+1}_{g-5} pour $g \geq 5$ (6.6 ou II.D.1.2.5).

Considérons la frontière $\partial P_{g+1} \subset \partial A_{g+1}$ de P_{g+1} dans la compactification partielle $A^{(1)}_{g+1}$ de A_{g+1} (cf. 2.4). Elle est de dimension pure $3g+2$ et on a $\rho_{g+1}(\partial P_{g+1}) = P_g$ ([Fr-S 2] Theorem 3.6). Il résulte aussi de (2.5) que :

$$P_{g+1} \subset N^{g+1}_{g-5}$$

$$\Longrightarrow \partial P_{g+1} \subset \partial N^{g+1}_{g-5} \subset \rho^{-1}_{g+1}(N^g_{g-5}) \cup \partial' N^{g+1}_{g-5} .$$

Considérons la famille $f : P \longrightarrow \Delta$ étudiée au paragraphe 6. Elle est munie d'une section $a : t \longmapsto \mathcal{O}(r(t)+s(t)-\sigma r(t)-\sigma s(t))$. Il ressort de [Fr-S 2].Theorem 5.2, que la famille de variétés quasi-abéliennes associée est la famille de variétés de Prym associée à la famille de revêtements doubles suivante :

$$\tilde{C}/_{r\sim\sigma s \text{ et } s\sim\sigma r} \longrightarrow C/_{\pi r\sim\pi s} \longrightarrow \Delta .$$

On peut donc lui associer un morphisme $\varphi : \Delta \longrightarrow \partial P_{g+1}$.

Soit C_{g+1} une composante irréductible de N^{g+1}_{g-5} contenant P_{g+1} , ∂C_{g+1} sa frontière. Soit ∂P^*_{g+1} une composante irréductible de ∂P_{g+1} contenant $\varphi(\Delta)$, ∂C^*_{g+1} une composante irréductible de ∂C_{g+1} contenant ∂P^*_{g+1} .

On a alors :

$$\begin{cases} \varphi(\Delta) \subset \partial P^*_{g+1} \subset \partial C^*_{g+1} \subset \rho^{-1}_{g+1}(N^g_{g-5}) \cup \partial' N^{g+1}_{g-5} \\ \varphi(\Delta) \not\subset \rho^{-1}_{g+1}(N^g_{g-5}) \quad \text{par 6.2 par exemple} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \partial C^*_{g+1} \subset \partial' N^{g+1}_{g-5} .$$

On veut maintenant appliquer 2.6 à la famille $P \longrightarrow \Delta$ munie de la section a .

L'hypothèse (i) est vérifiée par 6.8 avec $T^0 = S^{r,s}$ et l'hypothèse (iii) grâce au fait qu'une jacobienne générique a pour seuls automorphismes $\pm id$.

Si (ii) n'était pas vérifiée, on aurait :

$\forall t \neq 0$, il existe une composante Z_t de Ξ_t telle que $Z_{t,a_t} \subset \operatorname{Sing} \Xi_t$.

Comme en 6.5, on peut supposer que P_t est simple pour t dans un sous-ensemble dense de Δ . L'ensemble des x_t tels que $\dim(\operatorname{Sing} \Xi_t) \cap (\operatorname{Sing} \Xi_{t,x_t}) = g-6$ est alors fini. Pour un choix générique de r et s , (ii) est donc vérifiée.

Il s'ensuit que la codimension de ∂C^*_{g+1} en $\varphi(0)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de $(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta) \cup ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing} \Theta_a) \cup (W_{p,q} \cap (-W_{r,s}))$ par l'application rationnelle :

$$z \longmapsto [\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_1}(z,\tau),\ldots,\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_g}(z,\tau),\lambda \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z,\tau)+\mu \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial z_j}(z-a,\tau)]$$

$$\text{avec } \lambda \frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau) + \mu \frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z-a,\tau) = 0$$

$$a \text{ correspondant à } \mathcal{O}(p+q-r-s) \in JN .$$

Par 3.4, l'image de la première composante (pour laquelle, génériquement, $\mu = 0$) engendre $\mathbb{P}(\{0\} \times V)$ avec $\dim V = \binom{g+1}{2} - (3g-2)$.

L'image de la seconde composante est la même. Par 3.10, l'image de la troisième engendre $\mathbb{P}(V')$, où la projection de V' sur les g premiers facteurs est de dimension $g-4$.

On a donc :

$$\dim \partial C^*_{g+1} \leq 4+3g-2 = 3g+2 .$$

Comme ∂C_{g+1} est de dimension pure $\dim C_{g+1} - 1$, on en déduit :

$$3g+3 = \dim P_{g+1} \leq \dim C_{g+1} \leq 3g+2+1 ,$$

soit $P_{g+1} = C_{g+1}$. ■

IV.B. Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym (en collaboration avec A. Beauville).

Soient A_g l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, et J_g la sous-variété de A_g formée par les jacobiennes. Le problème de Schottky (usuel) est la recherche d'équations, ou de caractérisations géométriques, de J_g dans A_g. Une des approches de ce problème qui s'est révélée récemment très fructueuse s'appuie sur la réductibilité de certaines intersections $\Theta \cap \Theta_a$ pour une jacobienne (JC,Θ). Cette réductibilité entraîne l'existence de trisécantes à la variété de Kummer de JC. En II.C, nous avons prouvé que $\bar{J}_g$ est une composante de l'ensemble des $(A,\Theta) \in A_g$ pour lesquelles une intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible, ou de celles dont la variété de Kummer admet une trisécante. La démonstration consiste à prouver que ces propriétés entraînent (essentiellement) $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-4$; il suffit ensuite d'utiliser le théorème d'Andreotti-Mayer [An-M] selon lequel $\bar{J}_g$ est une composante de l'ensemble N^g_{g-4} des (A,Θ) satisfaisant à cette dernière condition.

Les variétés de Prym forment une sous-variété fermée P_g de A_g, qui contient strictement J_g. Nous abordons dans cette section la recherche d'une caractérisation géométrique de P_g - ce qu'on peut appeler le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Il se trouve qu'il existe un parallélisme très frappant entre les deux problèmes de Schottky, au moins dans l'approche évoquée ci-dessus. Nous démontrons en effet que P_g est une composante irréductible de l'ensemble des $(A,\Theta) \in A_g$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

(i) Il existe des éléments distincts non nuls a,b de A tels que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre.

(ii) Il existe a,b,x,y distincts non nuls dans A tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer $K(A)$ admet un plan quadrisécant.

La démonstration est tout à fait analogue à celle de II.C, et repose de façon essentielle sur le théorème de IV.A, qui énonce que P_g est une composante de l'ensemble d'Andreotti-Mayer N^g_{g-6}. Nous donnons le principe de cette démonstration, ainsi que les relations entre les conditions (i) à (iii), au §1 ; deux résultats techniques, sur lesquels s'appuie la démonstration, sont prouvés aux §2 et 3.

§1. Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ et plans quadrisécants.

Toutes les variétés considérées dans cet article sont définies sur le corps des nombres complexes.

Soient $\tilde{C}, C$ des courbes projectives lisses, $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale double, σ l'involution correspondante de $\tilde{C}$. Rappelons que la variété de Prym P de $(\tilde{C}, C)$ est la sous-variété abélienne de $J\tilde{C}$ image de l'endomorphisme $1-\sigma^*$. Elle est munie d'une polarisation principale, que l'on peut définir comme suit. Il est commode, à l'aide d'une translation, de considérer P comme la variété des classes de diviseurs (modulo équivalence linéaire) D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à $\pi_* D \equiv K_C$ et $h^0(\tilde{C}, D)$ pair ; la sous-variété des classes de diviseurs effectifs est alors un diviseur Θ de P.

Nous allons étudier la réductibilité des intersections $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ (considérées, dans tout cet article, au sens des schémas). Nous écarterons les cas où des intersections $\Theta \cap \Theta_a$ sont déjà réductibles. Pour p, q dans $\tilde{C}$, nous noterons $[p,q]$ l'élément $p+q-\sigma p-\sigma q$ de P.

PROPOSITION 1.1. *On suppose que C n'est ni hyperelliptique, ni trigonale, ni revêtement double d'une courbe elliptique. Soient p,q,r,s quatre points de $\tilde{C}$, tels que les éléments $[p,q]$ et $[p,r]$ de P soient distincts non nuls. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est de codimension 3, réductible, et contenue (schématiquement) dans $\Theta_{[p,s]} \cup \Theta_{[q,r]}$.*

■ Par définition $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est l'ensemble des classes de diviseurs effectifs D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C \quad , \quad h^0(D) \text{ pair} \geq 2 \quad , \quad h^0(D-p-q+\sigma p+\sigma q) \geq 2 \ .$$

Jointe aux deux premières, cette dernière condition équivaut à $h^0(D-p-q) \geq 1$: en effet, si $h^0(D-p-q)$ est nul, le théorème de Riemann-Roch, joint à la relation $K_{\tilde{C}} - D \equiv \sigma D$, entraîne $h^0(D+\sigma p+\sigma q) = 2$; alors σp et σq sont des points base de $|D+\sigma p+\sigma q|$, de sorte que

$$|D-p-q+\sigma p+\sigma q| = |D-p-q| + \sigma p + \sigma q = \emptyset$$

Inversement si $h^0(D-p-q) \geq 1$, alors $h^0(D-p-q+\sigma p+\sigma q)$ est pair et non nul, donc ≥ 2 .

Considérons alors la sous-variété spéciale S_{pq} formée des classes de diviseurs effectifs E sur $\tilde{C}$ tels qu'on ait $\pi_* E \in |K_C-\pi p-\pi q|$ et $h^0(E+p+q)$ pair [Be 3]; identifions S_{pq} à une sous-variété de P à l'aide de la translation par $(p+q)$. Il résulte de ce qui précède qu'on a ensemblistement $S_{pq} = \Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; cette égalité est en fait schématique puisque S_{pq} et $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ ont même classe de cohomologie dans P ([Be 3] th.1). Vu l'hypothèse sur C , le système $|K_C-\pi p-\pi q|$ définit un morphisme de C dans l'espace projectif, birationnel sur son image. On déduit alors du cor. à la prop. 3 de [Be 3] que la variété $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est irréductible et normale.

L'intersection $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est donc un diviseur de Cartier dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; ensemblistement, elle est formée des classes de diviseurs effectifs D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C \quad , \quad h^0(D) \text{ pair} \quad , \quad h^0(D-p-q) \geq 1 \quad , \quad h^0(D-p-r) \geq 1 \ .$$

Elle est donc réunion de la sous-variété S_{pqr} formée des classes $D \in P$ telles que $h^0(D-p-q-r) \geq 1$, et de la sous-variété W_p des classes $D \in P$ telles que $h^0(D-p) \geq 2$. La première s'identifie comme ci-dessus à la sous-variété spéciale de P associée au système linéaire $|K_C-\pi p-\pi q-\pi r|$; elle est réduite, irréductible pour r assez général, et sa classe de cohomologie dans P est $4\frac{\Theta^3}{6}$. On en conclut que W_p est un diviseur de Weil (réduit) dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ et qu'on a l'égalité entre cycles $\Theta.\Theta_{[p,q]}.\Theta_{[p,r]} = S_{pqr} + \tilde{W}_p$, où $\tilde{W}_p$ est un diviseur de Weil dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$, ayant même support que W_p . Faisant varier r on obtient $\tilde{W}_p \subset \Theta_{[p,s]}$ pour tout $s \in \tilde{C}$, tandis qu'on a $S_{pqr} \subset \Theta_{[q,r]}$, d'où la proposition. ∎

Remarque. On peut montrer, par un calcul d'espaces tangents, que $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est lisse en un point assez général de W_p . On a donc $\tilde{W}_p = W_p$ dans la démonstration précédente, et la classe de W_p dans P est $2\frac{\Theta^3}{6}$.

Nous allons voir que 1.1 équivaut essentiellement à l'existence de plans quadrisécants à la variété de Kummer d'une variété de Prym. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée ; sauf mention du contraire nous supposerons toujours que le diviseur Θ est symétrique. Nous noterons $\psi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ le morphisme défini par le système linéaire $|2\Theta|$, et $K(A)$ son image : c'est la variété de Kummer de A . Rappelons que lorsque (A,Θ) est irréductible (c'est-à-dire que (A,Θ) n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles), ψ iden-

tifie $K(A)$ au quotient de A par l'involution $x \longmapsto -x$.

PROPOSITION 1.2. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension ≥ 3 , et soient a,b,x,y des éléments distincts non nuls de A . On suppose que $s = x+y$ est différent de a,b et $a+b$, et que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3. On considère les conditions suivantes :

(i) L'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas intègre.

(ii) On a (schématiquement) $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) Il existe des nombres complexes λ,μ,ν,ρ, non tous nuls, tels qu'on ait l'identité en z

$$\lambda\theta(z)\theta(z-s) + \mu\theta(z-a)\theta(z+a-s) + \nu\theta(z-b)\theta(z+b-s) + \rho\theta(z-x)\theta(z-y) = 0 .$$

(iv) Pour tout $\zeta \in A$ tel que $2\zeta = s$, les quatre points distincts $\psi(\zeta)$, $\psi(\zeta-a)$, $\psi(\zeta-b)$, $\psi(\zeta-x)$ de $\mathbb{P}^N$ sont coplanaires.

Alors les conditions (ii) à (iv) sont équivalentes, et entraînent (i).

■ Pour $u \in A$, nous noterons θ_u une section non nulle de $H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta_u))$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : il existe une base (ψ_α) de $H^0(A,\mathcal{O}_A(2\Theta))$ satisfaisant à

$$\theta_u\theta_{-u} = \sum_\alpha \psi_\alpha(u)\psi_\alpha \quad \text{pour tout } u \in A \quad \text{(formule d'addition de Riemann)} ;$$

on en déduit aussitôt que la formule (iii)' obtenue en remplaçant z par $z+\zeta$ dans (iii) est équivalente à (iv).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : observons que le scalaire ρ qui apparaît dans (iii) ne peut être nul, sans quoi $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ aurait une composante de codimension 2. La formule (iii) entraîne donc que la section $\theta_x\theta_y$ de $\mathcal{O}_A(\Theta_x+\Theta_y)$ s'annule sur $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, d'où (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : notons I l'idéal de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ dans A . Le complexe de Koszul de l'intersection complète $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ fournit, après produit tensoriel par $\mathcal{O}_A(\Theta_x+\Theta_y)$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta_{a+b-s}) \longrightarrow \mathcal{O}_A(\Theta_s-\Theta_a) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_s-\Theta_b) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_s-\Theta_{a+b}) \longrightarrow$$
$$\mathcal{O}_A(\Theta_s) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_{s-a}) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_{s-b}) \xrightarrow{(\theta,\theta_a,\theta_b)} I(\Theta_x+\Theta_y) \longrightarrow 0 .$$

Vu l'hypothèse sur s , on en déduit que l'espace $H^0(A,I(\Theta_x+\Theta_y))$ est engendré par les sections $\theta\theta_s$, $\theta_a\theta_{s-a}$ et $\theta_b\theta_{s-b}$. Or la condition (ii) signifie que $\theta_x\theta_y$ appartient à cet espace, ce qui entraîne la relation (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $u \in A$; la suite exacte de Koszul, après produit tensoriel par $\mathcal{O}_A(\Theta_u)$, s'écrit

$$0 \to \mathcal{O}_A(-\Theta-\Theta_{a+b-u}) \to \mathcal{O}_A(-\Theta_{a-u}) \oplus \mathcal{O}_A(-\Theta_{b-u}) \oplus \mathcal{O}_a(-\Theta_{a+b-u}) \to$$
$$\mathcal{O}_A(\Theta_u-\Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u-\Theta_a) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u-\Theta_b) \to \mathcal{I}(\Theta_u) \to 0 .$$

Pour $u \notin \{0,a,b\}$, on en déduit que $H^0(A,\mathcal{I}(\Theta_u))$ est nul, autrement dit que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas contenu dans Θ_u . La condition (ii) (sans hypothèse sur s) entraîne donc (i).■

Remarques. 1) L'hypothèse $\operatorname{codim}(\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b) = 3$ n'est pas superflue. Supposons en effet que A contienne une courbe elliptique E avec $(\Theta.E) = 2$. On déduit alors facilement de II.C.1.4 que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, pour a,b distincts non nuls dans E , est intègre de codimension 2, et contenue dans Θ_x pour tout $x \in E$. Pour y général dans A , on a donc $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$, mais (iii) n'est pas satisfaite. Notons cependant que $\psi(E)$ est une conique dans $\mathbb{P}^N$, de sorte que 4 points quelconques de $\psi(E)$ sont coplanaires.

2) Par contre l'hypothèse $s \notin \{a,b,a+b\}$ n'est là que pour simplifier l'énoncé de (iii) et (iv). Si par exemple $s = a$, il faut énoncer (iv) de la façon suivante : il existe une droite tangente à $K(A)$ en $\psi(\zeta)$, coplanaire avec $\psi(\zeta-b)$ et $\psi(\zeta-x)$.

Plus généralement, on peut envisager comme dans II.C les diverses spécialisations des conditions (ii) à (iv) lorsque certains des points a,b,x,y deviennent infiniment voisins de 0 ; nous laissons cet exercice assez fastidieux au lecteur. Dans le cas des jacobiennes, on peut ainsi faire tendre a,x,y vers 0 dans la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$ de manière à obtenir l'équation K-P . Pour une variété de Prym de courbes lisses on ne peut faire tendre simultanément les points $[p,q]$, $[p,r]$, $[p,s]$ et $[q,r]$ vers 0 ; cela devient possible lorsque la courbe C est singulière, et on obtient alors une équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation BKP[1].

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal. On note P_g la sous-variété de A_g formée des variétés de Prym de courbes stables : c'est l'adhérence dans A_g de l'ensemble des variétés de Prym de courbes lisses. Elle est de dimension $3g$ pour $g \geq 5$, et contient l'ensemble J_g des jacobiennes.

---

(1) Cette remarque est due à A. Beauville et G. Welters.

THÉORÈME 1.3. Considérons les conditions suivantes, pour une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) :

(i) Il existe des éléments distincts non nuls a,b de A tels que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre.

(ii) Il existe des éléments distincts non nuls a,b,x,y de A tels qu'on ait (schématiquement) $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer $K(A)$ admet un plan quadrisécant.

Alors pour $g \geq 7$, P_g est une composante irréductible de l'ensemble des $(A,\Theta) \in A_g$ satisfaisant à l'une des conditions (i) à (iii).

Remarques. 1) Précisons que nous appelons plan quadrisécant à $K(A)$ un plan dans $\mathbb{P}^N$ contenant 4 points distincts de $K(A)$.

2) Contrairement à ce qu'on peut espérer pour les jacobiennes, l'existence d'un plan quadrisécant ne suffit pas à caractériser les variétés de Prym, comme le montre l'exemple des variétés (A,Θ) contenant une courbe elliptique de degré 2.

■ Pour démontrer le théorème, on suppose qu'il existe une sous-variété irréductible Z de A_g , contenant strictement P_g , telle qu'un élément générique (A,Θ) de Z satisfasse à l'une des propriétés (i) à (iii). Puisque Z contient strictement P_g , le théorème principal de IV.A entraîne $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g-6$. En outre le groupe de Néron-Severi $NS(A)$ est engendré par la classe de Θ (puisqu'une jacobienne générique possède déjà cette propriété [Z]). Alors pour tout élément non nul a de A , l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est intègre : en effet, dans le cas contraire, on aurait en vertu de II.C.2.1, ou bien $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-4$, ou bien $\operatorname{rg} NS(A) \geq 2$. Par suite $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3 pour tout $b \neq 0,a$. D'après la prop.1.2, il existe donc a,b distincts non nuls dans A tels que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre. Le théorème résulte alors des deux énoncés suivants, qui seront démontrés aux §2 et 3 :

PROPOSITION 2.3. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g \geq 6$; on suppose que le groupe $NS(A)$ est engendré par la classe de Θ , et qu'on a $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g-6$. Soient a,b deux éléments distincts non nuls de A , dont l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.

PROPOSITION 3.3. Soient (P,Θ) une variété de Prym générique de dimension ≥ 5, et a,b des éléments de torsion distincts non nuls de P . Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.

■

§2. Singularités de $\Theta \cap \Theta_a$.

PROPOSITION 2.1. Soient (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et a un élément de A . On suppose que A est simple et que a est d'ordre infini. On a alors

$$\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq \dim \operatorname{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) - 1 .$$

Rappelons qu'une variété abélienne est dite simple si elle ne contient pas de sous-variété abélienne non triviale. D'autre part, nous avons adopté la convention $\dim(\emptyset) = -1$.

■ Soit Z une composante irréductible de $\operatorname{Sing}(\Theta \cap \Theta_a)$, de dimension maximum. Notons $\tilde{Z}$ la normalisée de Z et n le morphisme composé $\tilde{Z} \to Z \hookrightarrow A$.

Soit θ (resp. θ_a) une section non nulle de $H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta))$ (resp. $H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta_a))$. A tout champ de vecteurs D sur A sont associées des sections $D\theta \in H^0(\Theta,\mathcal{O}(\Theta))$ et $D\theta_a \in H^0(\Theta_a,\mathcal{O}(\Theta_a))$ (cf. II.C.0). Comme Z est contenu dans le lieu singulier de $\Theta \cap \Theta_a$, le critère jacobien entraîne que les $D\theta_a/D\theta$, pour D parcourant $H^0(A,T_A)$, définissent une même section méromorphe de $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$. Cette section est holomorphe et non nulle sur l'ouvert U de $\tilde{Z}$ complémentaire de $n^{-1}(\operatorname{Sing}\Theta \cup \operatorname{Sing}\Theta_a)$; le faisceau inversible $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$ est donc trivial sur U .

Supposons que la conclusion de la proposition ne soit pas satisfaite (ce qui entraîne, en particulier, $\dim Z \geq 1$). Alors $\Theta_a \cap \operatorname{Sing}\Theta$, et par symétrie $\Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$, sont de codimension ≥ 2 dans Z ; par suite $\tilde{Z}-U$ est de codimension ≥ 2 dans $\tilde{Z}$. Comme $\tilde{Z}$ est normal, on en déduit que $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$ est trivial, autrement dit que a appartient au noyau de l'homomorphisme composé

$$A \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Pic}^0(A) \xrightarrow{n^*} \operatorname{Pic}^0(\tilde{Z}) ,$$

où φ est l'isomorphisme associé à la polarisation principale (défini par $\varphi(x) = \mathcal{O}_A(\Theta_x - \Theta)$). Or n^* n'est pas nul : son transposé est le morphisme d'Albanese $\operatorname{Alb}(\tilde{Z}) \to A$, dont l'image contient un translaté de Z . Puisque A est simple, le noyau de n^* est fini, ce qui contredit l'hypothèse sur a . ■

Remarques. 1) La démonstration s'étend, avec quelques modifications, au cas où a est infiniment proche de 0 : si D est un champ de vecteurs non nul sur A et si l'on désigne par Θ_D le diviseur de Θ défini par $D\theta = 0$, on obtient l'inégalité $\dim(\Theta_D \cap \operatorname{Sing}\Theta) \geq \dim \operatorname{Sing}\Theta_D - 1$ lorsque A est simple.

2) On ne peut supprimer complètement l'hypothèse A simple. Si par exemple A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta.E) = 2$, le diviseur Θ est lisse en général alors que $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible, donc singulier en codimension un pour $a \in E$ (II.C). Par contre nous ignorons si l'hypothèse a d'ordre infini est nécessaire. Ce sont ces hypothèses restrictives dans la prop. 3 qui nous empêchent d'obtenir un résultat aussi précis que celui de II.C.

3) On peut déduire de 2.1 un énoncé légèrement plus fort que le théorème II.C.2.11: $\bar{J}_g$ est une composante irréductible de l'ensemble des $(A,\Theta) \in A_g$ telles qu'il existe $a \neq 0$ dans A avec $\dim \mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) \geq g-3$.

PROPOSITION 2.3. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g ; on suppose que le groupe $NS(A)$ est engendré par la classe de Θ, et qu'on a $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta < g-6$. Soient a,b deux éléments distincts non nuls de A, dont l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.

■ On peut supposer a d'ordre infini. Puisque A est simple par hypothèse, on déduit de 2.1 qu'on a $\dim \mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) \leq g-6$. La variété $X = \Theta \cap \Theta_a$ est donc normale, irréductible, et ses anneaux locaux sont localement factoriels ("conjecture de Samuel", [Gro 3] exp. XI, 3.14). Si le diviseur $\Theta_b|_X$ n'est pas intègre, il est donc somme de deux diviseurs de Cartier effectifs (non nuls). Or puisque $g \geq 5$, le théorème de Lefschetz ([Gro 3] exp. XII, 3.6) implique que l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ est bijectif. Il existe donc deux diviseurs sur A, de somme Θ_b, dont la restriction à X est effective. Mais vu l'hypothèse sur $NS(A)$ l'un de ces diviseurs doit être algébriquement équivalent à $m\Theta$, avec $m \leq 0$, ce qui conduit à une contradiction. ■

§3. Le cas où a et b sont de torsion.

Lemme 3.1. Soient g_1, g_2 deux entiers ≥ 1 ; posons $g = g_1 + g_2$. Soit P une variété de Prym générique de dimension g, et soient a,b deux éléments de torsion distincts non nuls dans P. On peut alors spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$, où P_i est une variété de Prym générique de dimension g_i $(i = 1,2)$, de façon que a,b se spécialisent en (a_1,a_2), (b_1,b_2), où les points a_1, b_1 d'une part, a_2, b_2 d'autre part, sont distincts et non nuls.

■ On sait par [Be 1] qu'on peut spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; les points a et b se spécialisent alors en (a_1,a_2) et (b_1,b_2), et il s'agit de prouver qu'on peut effectuer cette spécialisation de façon que les points $0, a_i, b_i$ soient distincts $(i = 1,2)$.

Soit m un entier ≥ 2 tel que $ma = mb = 0$. Le groupe P_m des points de P annulés par m est muni d'une forme symplectique unimodulaire à valeurs dans $\mathbb{Z}/m$. Considérons le revêtement étale de P_g dont la fibre en P est P_m. L'homomorphisme $\pi_1(P_g,P) \longrightarrow Sp(P_m)$ associé à ce revêtement est surjectif : cela résulte de l'énoncé analogue pour les jacobiennes, qui est lui-même conséquence de la connexité de l'espace de Teichmüller. Par suite, pour tout automorphisme symplectique g de $(P_1 \times P_2)_m$, le couple $(g(a_1,a_2),g(b_1,b_2))$ s'obtient encore par spécialisation à partir de (a,b). Le lemme 3.1 résulte donc du lemme algébrique suivant :

Lemme 3.2. Soient p,q deux entiers > 1, et m leur p.p.c.m. Soient Γ_1,Γ_2 deux $(\mathbb{Z}/m)$-modules libres de type fini, munis de formes symplectiques unimodulaires $\varphi_i : \Lambda^2\Gamma_i \longrightarrow \mathbb{Z}/m$. On pose $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, et on le munit de la forme $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$. Soient a,b deux éléments distincts de Γ, d'ordre p et q respectivement. Il existe alors $g \in Sp(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga = (a_1,a_2)$, $gb = (b_1,b_2)$, avec $0 \neq a_1 \neq b_1$ et $0 \neq a_2 \neq b_2$.

■ 1) Supposons $b = \ell a$, avec $1 < \ell < p$. Le groupe $Sp(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des éléments d'ordre p de Γ ; il existe donc $g \in Sp(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga = (a_1,a_2)$, où a_i est un élément d'ordre p de Γ_i $(i = 1,2)$. On a alors $0 \neq a_i \neq \ell a_i$, d'où le résultat dans ce cas.

2) Supposons p et q premiers entre eux. Il existe alors des éléments α et β de Γ tels qu'on ait $a = q\alpha$, $b = p\beta$. Comme α est d'ordre m, l'application $x \longmapsto \varphi(\alpha,x)$ de P_m dans $\mathbb{Z}/m$ est surjective ; on a le même énoncé pour β. On déduit alors du théorème de Bezout qu'on peut choisir α et β de façon que $\varphi(\alpha,\beta) = 1$. Le groupe $Sp(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples (α,β) d'éléments de Γ tels que $\varphi(\alpha,\beta) = 1$. Par conséquent, si α_1,β_1 sont deux éléments de Γ_1 tels que $\varphi_1(\alpha_1,\beta_1) = 1$, et α_2,β_2 deux éléments d'ordre m orthogonaux dans Γ_2, il existe $g \in Sp(\Gamma)$ tels qu'on ait $g\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ et $g\beta = (\beta_1,\beta_2)$. On a alors $ga = (q\alpha_1,q\alpha_2)$ et $gb = (p\beta_1,p\beta_2)$; pour $i = 1$ ou 2, $q\alpha_i$ est d'ordre p et $p\beta_i$ d'ordre q, d'où l'énoncé dans ce cas.

3) Supposons $p = q$, et p premier. Si b est proportionnel à a on applique 1) ; sinon le groupe $Sp(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples (a,b) non colinéaires avec $\varphi(a,b)$ fixé, et on conclut comme en 2).

4) Supposons que p soit premier et divise q ; posons $q = np$. Compte tenu de 3), on peut supposer $n > 1$. Si $a = nb$, on applique 1) ; sinon on applique 3) à a et nb. On obtient un élément g de $Sp(\Gamma)$ tel que $ga = (a_1,a_2)$, $gb = (b_1,b_2)$ et $0 \neq a_i \neq b_i$ puisque a_i est d'ordre p et b_i d'ordre np.

5) Supposons $p=q$. Soit n l'ordre de $a-b$, et soit ℓ un nombre premier divisant n . Posons $n=d\ell$. D'après 4) appliqué à $d(a-b)$ et da , il existe $g\in Sp(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga=(a_1,a_2)$, $gb=(b_1,b_2)$ et $0\neq da_i\neq db_i$, d'où $0\neq a_i\neq b_i$.

6) Traitons enfin le cas général. Ecrivons $p=p'd$, $q=q'd$ avec $(p',q')=1$. Si $p'=q'=1$ on est dans le cas précédent. Sinon on a $da\neq db$ (sans quoi da , annulé par p' et q', serait nul), et on applique 3) à da et db . ■

PROPOSITION 3.3. Soient (P,Θ) une variété de Prym générique de dimension $g\geq 5$, et a,b des éléments de torsion distincts non nuls dans P . Alors l'intersection $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est intègre.

■ Pour $g=5$, P est une variété abélienne principalement polarisée générique. D'après A1.2.10 , $\Theta\cap\Theta_a$ est lisse ; comme $NS(P)$ est engendré par Θ , la démonstration de 2.3 entraîne que $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est intègre.

Démontrons la proposition par récurrence sur g . Pour une jacobienne générique (JC,Θ), les classes de cohomologie algébriques sont toujours des multiples entiers des classes minimales $\frac{\Theta^p}{p!}$ (cela résulte d'un argument facile de monodromie, [A-C-G-H 2] chap. X). Il en est donc de même pour P . D'autre part $\Theta\cap\Theta_a$ est intègre (II.C), donc $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est de codimension 3. Soit Z une composante irréductible de cette intersion, munie de sa structure réduite ; la classe de cohomologie de Z dans P est $n\frac{\Theta^3}{6}$, avec $1\leq n\leq 6$.

Considérons alors la spécialisation de P en $P_1\times P_2$ fournie par le lemme 3.1, avec $\dim(P_1)=1$, $\dim(P_2)=g-1$. Dans $P_1\times P_2$, le diviseur Θ se spécialise en $(P_1\times\Theta_2)+(\Theta_1\times P_2)$, où Θ_i est un diviseur thêta de la variété de Prym P_i . On a alors l'égalité entre cycles :

$$\Theta'\cap\Theta'_{(a_1,a_2)}\cap\Theta'_{(b_1,b_2)} = P_1\times(\Theta_2\cap\Theta_{2,a_2}\cap\Theta_{2,b_2})+\Theta_1\times(\Theta_{2,a_2}\cap\Theta_{2,b_2}) + \Theta_{1,a_1}\times(\Theta_2\cap\Theta_{2,b_2})+\Theta_{1,b_1}\times(\Theta_2\cap\Theta_{2,a_2}) .$$

La première sous-variété qui apparaît au second membre est intègre par l'hypothèse de récurrence, de classe θ_2^3 ; les trois autres sont intègres en vertu de II.C , de classe $\theta_1\theta_2^2$ (on a noté θ_1,θ_2 les classes de $\Theta_1\times P_2$ et $P_1\times\Theta_2$ dans $H^2(P_1\times P_2,\mathbb{Z})$). La composante Z de $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ se spécialise en une réunion de certaines de ces composantes ; en comparant les classes de cohomologie, on obtient

$$n\frac{(\theta_1+\theta_2)^3}{6} = p\,\theta_2^3+q\,\theta_1\theta_2^2 \quad , \text{ avec } p,q\in\mathbb{N} .$$

Ceci impose $n=6$, de sorte que $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est égale à Z , et par suite est intègre. ■

Remarque. Soient P une variété de Prym générique de dimension g, et a,b des éléments distincts non nuls de P. Il paraît vraisemblable qu'au moins pour g assez grand, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est réductible que dans la situation de 1.1 ($a = p+q-\sigma p-\sigma q$, $b = p+r-\sigma p-\sigma r$). Pour $g \geq 12$, on peut prouver que cela résulterait de la conjecture suivante, dont une version plus faible est prouvée dans [We 4] : les seuls éléments a de P tels que Θ_a contienne $\mathrm{Sing}\,\Theta$ sont ceux qui s'écrivent $p+q-\sigma p-\sigma q$, pour $p,q \in \widetilde{C}$.

APPENDICES

APPENDICE 1

CONSTRUCTION DE COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES DE N_k^g

1. Définition du sous-ensemble $A^{\delta}_{g',g''}$ de $A_{g'+g''}$.

Cet appendice est consacré à l'étude systématique d'une situation qu'on a rencontrée plusieurs fois : en II.D.1.5.1 et II.D.2.1,on a étudié des variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de degré 2.

On s'intéresse ici aux variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de même type. Comme le montre la proposition suivante, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées non simples rentrent dans ce cadre.

On adopte les notations et les résultats de [Mu 5], rappelés en I.3.
La démonstration de la proposition ci-dessous est reportée à la fin de cette section.

Proposition 1.1. Soient (A,L) une variété abélienne principalement polarisée et $j' : X' \hookrightarrow A$ une sous-variété abélienne.

Il existe alors une unique sous-variété abélienne $j'' : X'' \hookrightarrow A$ vérifiant :

i) Le morphisme $\pi : X' \times X'' \xrightarrow{(j'+j'')} A$ est une isogénie.

ii) La polarisation π^*L est la polarisation produit $M' \boxtimes M''$, où $M' = j'^*L$, $M'' = j''^*L$.

Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

iii) Il existe un isomorphisme $\psi : H(M') \longrightarrow H(M'')$ vérifiant :

- $\operatorname{Ker} \pi = \{(x,\psi x) \mid x \in H(M')\}$
- ψ est antisymplectique :

$$\forall x,y \in H(M') \qquad e^{M'}(x,y)e^{M''}(\psi x,\psi y) = 1 .$$

iv) Il existe une base $\{s'_1,\dots,s'_d\}$ de $H(M')$ et une base $\{s''_1,\dots,s''_d\}$ de $H(M'')$ telles que l'élément $\sum_{i=1}^{d} s'_i \otimes s''_i$ de $H^0(X' \times X'', \pi^*L)$ engendre $\pi^*H^0(A,L)$.

(1.2) Réciproquement, si (X',M') et (X'',M'') sont deux variétés abéliennes polarisées de même type, et $\psi : H(M') \longrightarrow H(M'')$ un isomorphisme antisymplectique, on pose $K = \{(x,\psi x) \mid x \in H(M')\}$. La variété abélienne $A = X' \times X''/K$ est alors principalement polarisée et le morphisme canonique $\pi : X' \times X'' \longrightarrow A$ vérifie i) et ii). Comme l'espace des modules des variétés abéliennes polarisées (X,M) de dimension fixée et de type δ fixé, munies d'un isomorphisme symplectique $H(M) \xrightarrow{\sim} H(\delta)$, est irréductible, les variétés (A,L) ainsi construites à partir de variétés X' et X'' de dimensions fixées et de même type δ fixé, forment une sous-variété irréductible de A_g.

Définition 1.3. On notera $A^{\delta}_{g',g-g'}$ le fermé irréductible de codimension $g'(g-g')$ de A_g, formé des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, contenant une sous-variété abélienne de dimension g', de polarisation induite de type δ.

Il résulte de 1.1 et 1.2 qu'on a $A^{\delta}_{g',g''} = A^{\delta}_{g'',g'}$. On supposera donc toujours $1 \leq g' \leq g/2$.

(1.4) Si F' (resp. F'') est la partie fixe de M' (resp. M''), il résulte de 1.1 iv) qu'on a :

$$\pi(F' \times F'') \subset \operatorname{Sing} \Theta \tag{1.5}$$

où Θ est le diviseur thêta de A.

En particulier, si $g-g' \geq g' \geq d = \deg \delta$, on a :

$$A^{\delta}_{g',g-g'} \subset N^{g}_{g-2d} .$$

Le reste de cet appendice sera consacré à l'étude des $A^{\delta}_{g',g-g'}$. Pour certains types δ, on montrera que l'inclusion (1.5) est une égalité pour X' et X'' génériques, et que $A^{\delta}_{g',g-g'}$ est une composante irréductible de $N^{g}_{g-2\deg\delta}$ pour $g-g' > g' \geq \deg \delta$.

■ Démonstration de la proposition 1.1 et de 1.2.

Puisque j' est injective, le noyau de l'application duale $\hat{j}' : \hat{A} \longrightarrow \hat{X}'$ est connexe. On note X'' son image inverse par $\phi_L : A \twoheadrightarrow \hat{A}$ et j'' l'injection $X'' \hookrightarrow A$. La matrice de la polarisation π^*L induite sur $X' \times X''$ est :

$$\begin{pmatrix} \hat{j}'\phi_L j' & \hat{j}'\phi_L j'' \\ \hat{j}''\phi_L j' & \hat{j}''\phi_L j'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{M'} & 0 \\ 0 & \phi_{M''} \end{pmatrix}$$

puisque, par construction, $\hat{j}'\phi_L j''$ et son dual $\hat{j}''\phi_L j'$ sont nuls. Ceci prouve i) et ii). L'unicité est évidente. De plus, il existe un sous-groupe K de $H(M')$ et une injection $\psi : K \hookrightarrow H(M'')$ tels que $\operatorname{Ker} \pi = \{(x,\psi x) \mid x \in K\}$. Comme L est une polarisation principale, on a ([Mu 5] page 295) :
$(\operatorname{Card} K)^2 = (\operatorname{Card} \operatorname{Ker} \pi)^2 = \operatorname{Card} H(\pi^*L) = \operatorname{Card} H(M').\operatorname{Card} H(M'')$.

Il s'ensuit que ψ est un isomorphisme de $H(M')$ sur $H(M'')$. De plus, ([Mu 5] page 291), $\operatorname{Ker} \pi$ est isotrope pour la forme symplectique e^{π^*L}, ce qui prouve iii).

Vu la définition de e^{π^*L}, il revient au même de dire que ψ se relève en un isomorphisme $\tilde{\psi} : G(M') \longrightarrow G(M'')$ qui est l'inverse de l'identité sur $\mathbb{C}^*$. Soient $\tilde{G}$ et $\tilde{K}'$ deux sous-groupes de niveau maximaux de $G(M')$ tels que $\tilde{G} \cap \tilde{K}' = \{1\}$. Soit s' (resp. s'') un générateur du sous-espace de $H^0(X',M')$ (resp. $H^0(X'',M'')$) invariant par $\tilde{K}'$ (resp. $\tilde{\psi}(\tilde{K}')$). Comme $G(M')$ opère transitivement sur $H^0(X',M')$, $\{\tilde{g}.s' \mid \tilde{g} \in \tilde{G}\}$ est une base de $H^0(X',M')$. De même, $\{\tilde{\psi}\tilde{g}.s'' \mid \tilde{g} \in \tilde{G}\}$ est une base de $H^0(X'',M'')$. Tout élément de $H^0(X' \times X'', \pi^*L)$ invariant sous l'action du sous-groupe de niveau maximal $\{(\tilde{x},\tilde{\psi}\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in G(M')\}$ de $G(\pi^*L) \simeq G(M') \times G(M'')/\{(\lambda,\lambda^{-1}) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ engendre $\pi^*H^0(A,L)$. Il est facile de vérifier que

$$s = \sum_{\tilde{g} \in \tilde{G}} (\tilde{g}.s') \otimes (\tilde{\psi}\tilde{g}.s'')$$

convient.

Réciproquement, pour montrer 1.2, il suffit de remarquer que les hypothèses entraînent que $K \subset H(M' \boxtimes M'')$ est totalement isotrope maximal. ■

2. Les ensembles $T_{g,\delta}$ et $U_{g,\delta}$.

On introduit les sous-variétés fermées suivantes de $A_{g,\delta}$:

$T_{g,\delta} = \{(X,M) \in A_{g,\delta} \mid$ un des éléments de $|M|$ a un point de multiplicité $> 2\}$.

$U_{g,\delta} = \{(X,M) \in A_{g,\delta}$ qui ne vérifie pas la propriété (P) ci-dessous$\}$

(P) Le lieu fixe F de $|M|$ est lisse de dimension g-deg δ si cet entier est ≥ 0, vide sinon. De façon équivalente, si $\{s_1,\dots,s_d\}$, $d = \deg \delta$ est une base de $H^0(X,M)$, on a :

$$\forall z \in F \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial s_i}{\partial z_j}(z)\right)_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq j\leq g}} = d .$$

Par exemple, pour la polarisation principale $\delta = (1)$, on a :

$$T_{g,(1)} \subsetneq U_{g,(1)} = N_0^g \subsetneq A_g .$$

Proposition 2.1. $(U_{g,\delta} = A_{g,\delta}) \Longrightarrow (T_{g,\delta} = A_{g,\delta})$.

■ On pose $\theta_r(z,\tau) = \theta[{}^r_0](z,\tau)$ (I.3.14) pour $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in H_g$, $r \in \Delta_\delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g = \Gamma_\delta$. Les $\{\theta_r(z,\tau)\}_{r\in\Gamma_\delta}$ forment une base de $H^0(X,M)$, où $(X,M) \in A_{g,\delta}$ correspond à τ.

Si $U_{g,\delta} = A_{g,\delta}$, la méthode employée dans [An-M] (principalement Lemma 8 page 203) montre qu'il existe :

- un ouvert U de H_g
- deux morphismes $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{C}^d - \{0\}$ et $s : U \longrightarrow \mathbb{C}^g$, tels que :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall r \in \Gamma_\delta & \theta_r(s(\tau),\tau) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,g\} & \sum_r \lambda_r(\tau)\, \dfrac{\partial \theta_r}{\partial z_i}(s(\tau),\tau) = 0 \text{ , pour } \tau \in U . \end{cases}$$

Si on dérive l'égalité $\sum_r \lambda_r(\tau)\theta_r(s(\tau),\tau) = 0$ pour $\tau \in U$ par rapport à τ_{ij}, on trouve, en utilisant (2.2) et les équations de la chaleur pour les θ_r (I.3.14) :

$$\forall \tau \in U \quad \forall i,j \in \{1,\dots,g\} \qquad \sum_r \lambda_r(\tau)\, \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial z_i \partial z_j}(s(\tau),\tau) = 0 ,$$

ce qui, avec (2.2) implique $T_{g,\delta} \supset U$. ■

Remarque 2.3. On s'est uniquement servi du fait que les θ_r vérifient les équations de la chaleur. En particulier, si on se fixe des constantes α_r^i pour $r \in \Gamma_\delta$ et $1 \leq i \leq n$ avec $\mathrm{Rang}(\alpha_r^i) = n$ et si $T_{g,\delta} \neq A_{g,\delta}$, alors, pour X générique dans $A_{g,\delta}$, on a :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{div}\Big(\sum_r \alpha_r^i \theta_r(.,\tau)\Big)$$

est lisse de dimension $g-n$ si $n \leq g$, vide sinon.

Théorème 2.4. On a $T_{g,\delta} \neq A_{g,\delta}$ dans les cas suivants :

- $\delta = (2)$, $g \geq 1$
- $\delta = (3)$, $g \geq 2$
- $\delta = (2,2)$, $g = 2$ ou $g \geq 4$.

■ On fait une démonstration par récurrence, en utilisant une construction analogue à la construction 1.2 de $A^{\delta}_{g',g''}$. On prend les notations de la démonstration de 1.1 et on pose $M = M' \boxtimes M''$, polarisation sur $X = X' \times X''$. Le sous-groupe $\{(\tilde{x},\tilde{\psi}\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \tilde{K}'\}$ de $G(M)$ est de niveau, de cardinal $\deg \delta$. On note H son image dans $H(M)$. Il existe une variété abélienne polarisée (Y,N) de type δ et une isogénie $\rho : (X,M) \longrightarrow (Y,N)$ de noyau H. Une base de $\rho^* H^0(Y,N) \subset H^0(X,M)$ est $\{s_h = s'_h s''_h \mid h \in \tilde{G}\}$, où on a posé $s'_h s''_h = (h.s') \otimes (\tilde{\psi}h.s'')$.

Lemme 2.5. Si $(X'',M'') \notin T_{g'',\delta}$ et si $\mathrm{div}\, s''_1$ est lisse, alors $(Y,N) \notin T_{g'+g'',\delta}$ dans chacun des cas suivants :

- $\delta = (d)$ et $g' = 1$
- $\delta = (2,2)$ et (X',M') générique dans $A_{2,(2,2)}$.

■ 1) $g' = 1$. On suppose que le diviseur de $s = \sum_{h \in G} \lambda_h s_h \in H^0(Y,N)$ a un point (x',x'') de multiplicité > 2 . On a en particulier :

$$\begin{cases} \sum_h \lambda_h\, s'_h(x')s''_h(x'') = 0 \\ \sum_h \lambda_h\, s'_h(x')\, \dfrac{\partial s''_h}{\partial x''_i}(x'') = 0 \\ \sum_h \lambda_h\, s'_h(x')\, \dfrac{\partial^2 s''_h}{\partial x''_i \partial x''_j}(x'') = 0 \ . \end{cases}$$

Comme (X'',M'') n'est pas dans $T_{g'',\delta}$, on a :

$$\forall h \in \tilde{G} \qquad \lambda_h s'_h(x') = 0 .$$

Puisque $g' = 1$, les diviseurs des s'_h sont disjoints deux à deux. Par conséquent, au plus un des λ_h est non nul et $\operatorname{div} s = (X' \times \operatorname{div} s''_h) \cup (\operatorname{div} s'_h \times X'')$ n'a pas de points de multiplicité > 2 puisque $\operatorname{div} s''_h$, translaté de $\operatorname{div} s''_1$, est lisse.

2) $g' = 2$, $\delta = (2,2)$. On a encore $\lambda_h s'_h(x') = 0$ pour tout h. En utilisant l'équation de la surface de Kummer (c'est-à-dire l'image de X' par le morphisme associé à $|M'|$) donnée dans [Mu 5] page 354, on remarque que si 3 des sections s'_h sont nulles en un point, cette équation est du type $Bxyzw + C(x^2y^2+z^2w^2) + D(x^2w^2+y^2z^2) + E(x^2z^2+y^2w^2) = 0$, qui n'est pas une surface de Kummer générique (cf. fin de la démonstration du théorème 2.4). D'autre part, si 3 des λ_h sont nuls, on peut conclure comme ci-dessus (cas $g' = 1$). On supposera donc :

$$\tilde{G} = \{1,2,3,4\} \qquad s'_1(x') = s'_2(x') = 0 \quad , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \ , \ \lambda_1\lambda_2 \neq 0 .$$

Pour X' générique, le lieu $(\operatorname{div} s'_1 \cap \operatorname{div} s'_2)$ est lisse (il suffit de vérifier que pour (A,Θ) générique dans A_2 et tout $a \in A[2]$, $\Theta.\Theta_a$ est lisse). Or on a, pour $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq k \leq g''$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x')s''_1(x'') + \lambda_2 \dfrac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x')s''_2(x'') = 0 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x')\dfrac{\partial s''_1}{\partial x''_k}(x'') + \lambda_2 \dfrac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x')\dfrac{\partial s''_2}{\partial x''_k}(x'') = 0 . \end{cases}$$

Comme $\operatorname{Rang}\left(\dfrac{\partial s'_i}{\partial x'_j}(x')\right) = 2$, on en déduit $x'' \in \operatorname{Sing}(\operatorname{div} s''_1)$, ce qui contredit l'hypothèse. ∎

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de traiter les cas :

1) $\delta = (2)$, $g = 1$. Evident

2) $\delta = (3)$, $g = 2$. On reprend les notations du lemme ci-dessus avec $g' = g'' = 1$. D'après [Mu 5] page 350, l'image de X'' par le morphisme $x'' \longmapsto (s''_0(x''),s''_1(x''),s''_2(x''))$ a pour équation :

$$X^3+Y^3+Z^3-3\mu''XYZ, \mu'' \notin \{1=\omega^3,\omega,\omega^2,\infty\} .$$

Si (x',x'') est de multiplicité > 2 sur $\operatorname{div} s$, x'' est de multiplicité > 2 sur $\operatorname{div}\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i s'_i(x')s''_i\right)$. C'est donc un point d'inflexion de la cubique. Or on a :

{Points d'inflexions} = $\{(0,1,-1);(0,1,-\omega);(0,1,-\omega^2)$ et permutations$\}$

{Tangentes} = $\{\mu''X+Y+Z, \mu''\omega X+Y+\omega^2 Z, \mu''\omega^2 X+Y+\omega Z$, et permutations$\}$.

On en déduit :

(2.6) $(\lambda_0 s_0'(x'), \lambda_1 s_1'(x'), \lambda_2 s_2'(x')) \in \{(0,0,0);(\mu'',1,1);(\mu''\omega,1,\omega^2);(\mu''\omega^2,1,\omega)$ permutations$\}$

(2.7) $(s_0''(x''), s_1''(x''), s_2''(x''))$ et par symétrie, $(s_0'(x'), s_1'(x'), s_2'(x'))$ sont dans $\{(0,1,-1);(0,1,-\omega);(0,1,-\omega^2)$ et permutations$\}$.

Par (2.7), exactement un des $s_j'(x')$ est nul. On suppose $\mu'' \neq 0$. Par (2.6), deux des λ_j sont nuls, ce qui termine la démonstration.

3) $\delta = (2,2)$, $g = 2$. Il suffit de montrer qu'il existe une surface de Kummer dans $\mathbb{P}^3$ dont toute section hyperplane n'a que des points de multiplicité au plus deux. La quartique S_ε d'équation :

$$F_\varepsilon = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2(2+\varepsilon)x_0x_1x_2x_3 + \varepsilon(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2)$$

est une surface de Kummer pour $\varepsilon \notin \{0,2,-2\}$. Si une section hyperplane a un point de multiplicité > 2 , il existe un point de S_ε en lequel la forme quadratique $\sum \frac{\partial^2 F_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} X_i X_j$ est de rang ≤ 2 . On vérifie que c'est impossible pour $\varepsilon = 0$ donc aussi pour ε voisin.

4) $\delta = (2,2)$, $g = 5$. On reprend les notations du lemme ci-dessus avec $g' = 2$ et $g'' = 3$. On supposera que :

i) $(X',M') \notin T_{2,(2,2)} \cup U_{2,(2,2)}$ (c'est possible d'après le cas 3) qu'on vient de traiter et 2.1).

ii) div s_1'' et div s_1''.div s_2'' lisses (c'est possible puisqu'on a $T_{3,(2)} \neq A_{3,(2)} \Longrightarrow U_{3,(2)} \neq A_{3,(2)}$).

iii) div s_1''.div s_2''.div s_3'' et $F'' = \cap \operatorname{div} s_h''$ lisses de dimension 0, de longueurs respectives 24 et 16.

Pour montrer ce dernier point, il suffit de montrer, comme dans la démonstration de 2.11, que pour un élément générique (A,Θ) de A_3 et $a,b \in A[2]$ quelconques vérifiant $e_2(a,b) = 1$, on a :

- $\Theta.\Theta_a.\Theta_b$ est lisse de dimension 0. Il suffit pour cela de considérer un produit de 3 courbes elliptiques.

- $\Theta.\Theta_a.\Theta_b.\Theta_{a+b}$ est lisse, égal à $\{\varepsilon,\varepsilon+a,\varepsilon+b,\varepsilon+a+b\}$ pour un ε d'ordre 2. On laisse la démonstration de ce fait au lecteur.

Remarquons que ce dernier fait entraîne que $U_{3,(2,2)} = A_{3,(2,2)}$. On a donc aussi, par 2.1 : $T_{3,(2,2)} = A_{3,(2,2)}$.

On fait maintenant la construction du lemme 2.5. Si $(Y,N) \in T_{5,(2,2)}$, on déduit de i) $\lambda_h s_h''(x'') = 0$ pour tout h.

Si $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, div $s = (X' \times \text{div } s_1'') \cup (\text{div } s_1' \times X'')$ n'a pas de points de multiplicité > 2 par ii).

Si $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, on a $s_1''(x'') = s_2''(x'') = 0$.

L'hypothèse ii) implique, comme à la fin de la démonstration de 2.5, que $s_1'(x') = s_2'(x') = \frac{\partial s_1'}{\partial x_i'}(x') = \frac{\partial s_2'}{\partial x_i'}(x') = 0$; ce qui contredit i).

Si $\lambda_4 = 0$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, on a $s_1''(x'') = s_2''(x'') = s_3''(x'') = 0$.

On arrive de la même façon à une contradiction en utilisant l'hypothèse iii).

Si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \neq 0$, on a $s_h''(x'') = 0$ pour tout $h \in \{1,\ldots,4\}$.

Par iii), on sait que $\text{Rg}[\frac{\partial s_h''}{\partial x_j''}(x'')] = 3$. On en déduit que :

$$\text{Rg}[s_h'(x') \ \frac{\partial s_h'}{\partial x_1'}(x') \ \frac{\partial s_h'}{\partial x_2'}(x')]_{1 \leq h \leq 4} \leq 1 .$$

Comme $\phi_{|M'|} : X' \longrightarrow \mathbb{P}^3$ est non-ramifié hors de $X'[2]$, on a $x' \in X'[2]$. Si on fait varier X' dans $A_{2,(2,2)}$, on voit que $(s_1'(x'),\ldots,s_4'(x')) \in \mathbb{P}^3$ décrit une sous-variété qui engendre $\mathbb{P}^3$ (considérer un produit de 2 courbes elliptiques) donc ne peut rester dans $\text{Ker}[\frac{\partial s_h''}{\partial x_j''}(x'')]$ qui est de dimension 1.

Donc tous les λ_h sont nuls et $(Y,N) \notin T_{5,(2,2)}$. ∎

On peut traduire les résultats de 2.4 (joints à celui de 2.1) en termes d'intersections de translatés du diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisée générique. Par exemple, si (X,M) est une variété abélienne polarisée de type $\delta=(d)$, il existe une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ), une isogénie $\pi:(X,M)\longrightarrow(A,\Theta)$ avec $\pi^*\Theta\equiv M$, une base $\{s_1,\ldots,s_d\}$ de $H^0(X,M)$ et un élément a de A d'ordre d, engendrant $\pi(H(M))$, tels que :

$$\mathrm{div}(s_j)=\pi^*(\Theta_{ja}) \quad \text{pour} \quad 1\leq j\leq d\ .$$

Le lieu fixe de $|M|$ est alors revêtement étale de l'intersection $(\Theta.\Theta_a.\ldots.\Theta_{(d-1)a})$.

Dans le cas $\delta=(2,2)$, l'image $\pi(H(M))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$, engendrée par $a=\pi(b)$ et $a'=\pi(b')$, avec $b,b'\in X[2]$. On a ([Mu 6] page 228) :

$$e_2(a,a')=e^{L^{\otimes 2}}(a,a')=e^{M^{\otimes 2}}(b,b')=e^M(b,2b')=1\ .$$

Le lieu fixe de $|M|$ est alors revêtement étale de $\Theta.\Theta_a.\Theta_{a'}.\Theta_{a+a'}$.

Avant d'énoncer le corollaire correspondant aux résultats du théorème 2.4, on va en indiquer rapidement une généralisation. Pour $a\in\mathbb{C}^g-\mathbb{Z}^g$, on définit les fermés analytiques suivants de H_g :

$$T_{g,a}=\{\tau\in H_g \mid \exists x\in\mathbb{C}^g \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{P}^1 \text{ tels que } z\longmapsto\lambda\theta(z,\tau)+\mu\theta(z-a,\tau) \text{ s'annule à l'ordre 2 en } x\}$$

$$U_{g,a}=\{\tau\in H_g \mid \text{La propriété suivante n'est pas vérifiée : le lieu d'équations } \theta(z,\tau)=\theta(z-a,\tau)=0 \text{ dans } \mathbb{C}^g \text{ est lisse de dimension } g-2 \text{ pour } g\geq 2, \text{ vide pour } g=1\}.$$

Il est clair par exemple que si $2a\in\mathbb{Z}^g$, l'image de $T_{g,a}$ (resp. $U_{g,a}$) dans $A_{g,(2)}$ est $T_{g,(2)}$ (resp. $U_{g,(2)}$). On montre comme en 2.1 que $(U_{g,a}=H_g)\Longrightarrow(T_{g,a}=H_g)$. La même démonstration que celle utilisée pour le cas 1) ($g'=1$) du lemme 2.5 permet de prouver que si $a'\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$, $\tau'\in H_1$, $a''\in\mathbb{C}^{g''}-\mathbb{Z}^{g''}$, $\tau''\notin T_{g'',a''}$, div $\theta(.,\tau'')$ lisse, alors $\tau=\begin{pmatrix}\tau' & 0\\ 0 & \tau''\end{pmatrix}\notin T_{g''+1,(a',a'')}$. On en déduit :

Proposition 2.8. Soient $g\geq 1$ et a un élément de $\mathbb{C}^g$ dont aucune composante n'est entière. Alors on a $T_{g,a}\neq H_g$.

■ Il reste à traiter le cas $g=1$. Si la proposition était fausse, il existerait un ouvert U de H_1 et deux morphismes $\lambda:U\longrightarrow\mathbb{C}^*$, $s:U\longrightarrow\mathbb{C}$ vérifiant, pour $\tau\in U$:

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \lambda(\tau)\theta(s(\tau),\tau) + \theta(s(\tau)-a,\tau) = 0 \\ \lambda(\tau)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}(s(\tau),\tau) + \dfrac{\partial\theta}{\partial z}(s(\tau)-a,\tau) = 0 \\ \lambda(\tau)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(s(\tau),\tau) + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(s(\tau)-a,\tau) = 0 \ . \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport à τ , on obtient, avec les deux autres et l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}(\tau)\theta(s(\tau),\tau) = 0 \ .$$

Si $\theta(s(\tau),\tau) = 0$, on a aussi $\theta(s(\tau)-a,\tau) = 0$ par 2.9, ce qui est impossible en genre 1 si $a \notin \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, donc pour τ générique. On a donc $\lambda(\tau) = \lambda$, constante. On déduit alors du Lemma 9 de [An-M] que $\lambda\theta(z,\tau) + \theta(z-a,\tau)$ est identiquement nulle, ce qui est impossible. ■

Il suffit de considérer les $a = \frac{1}{n}(1,1,\ldots,1) \in \mathbb{Q}^g$, $n \geq 2$, pour en déduire :

Théorème 2.10. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension ≥ 2 . Alors, pour tout a non nul de torsion dans A , $\Theta.\Theta_a$ est lisse de codimension 2. En particulier, si Θ est symétrique, les seuls points de torsion sur Θ sont d'ordre 2.

La dernière assertion provient du fait que si Θ est symétrique, $\Theta.\Theta_{2x}$ est singulier en x , lorsque $x \in \Theta$.

Il reste maintenant à énoncer le corollaire de 2.4.

Corollaire 2.11. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geq 2$. On a :

. Si a est non nul d'ordre 3, $\Theta.\Theta_a.\Theta_{2a}$ est vide pour $g = 2$, lisse de dimension $g-3$ pour $g \geq 3$.

. Si a et b sont non nuls d'ordre 2 avec $e_2(a,b) = 1$, $\Theta.\Theta_a.\Theta_b$ est vide pour $g = 2$, lisse de dimension $g-3$ pour $g \geq 3$, et $\Theta.\Theta_a.\Theta_b.\Theta_{a+b}$ est lisse de dimension $g-4$ pour $g \geq 4$.

De plus, ces schémas sont irréductibles lorsqu'ils sont de dimension strictement positive.

■ Comme on l'a expliqué plus haut, ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème 2.4, de la proposition 2.1 et de la remarque 2.3. L'assertion d'irréductibilité, valable aussi pour le théorème 2.10, est conséquence du résultat suivant ([Fu-L]) : si L est un faisceau inversible ample sur une variété projective irréductible X, $s_1,\dots,s_r$ des sections de L, alors le lieu $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{div}(s_i)$ est connexe pour $r < \dim X$. ■

3. Le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $A^{\delta}_{g',g''}$.

Proposition 3.1. On suppose $T_{g',\delta} \neq A_{g',\delta}$ et $U_{g'',\delta} \neq A_{g'',\delta}$ (ou l'inverse) et $g'' \geq g'$. Alors le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $A^{\delta}_{g',g''}$ est :

- vide si $g' < \deg \delta = d$
- lisse de codimension $2d$ sinon, avec égalité dans (1.5). Les singularités de Θ sont toutes quadratiques de rang $2d$.

■ Si on n'a pas égalité dans (1.5) pour tout élément de $A^{\delta}_{g',g''}$, il existe, comme dans la démonstration de (2.1) :

- un ouvert U' de $H_{g'}$
- un ouvert U'' de $H_{g''}$
- deux applications holomorphes,

$$s' : U' \times U'' \longrightarrow \mathbb{C}^{g'} \quad , \quad s'' : U' \times U'' \longrightarrow \mathbb{C}^{g''} ,$$

tels que :

$$\forall \tau' \in U' \quad , \quad \forall \tau'' \in U'' \quad , \quad \forall i \in \{1,\dots,g'\} \quad , \quad \forall j \in \{1,\dots,g''\} ,$$

(3.2) Les $\theta'_r(s'(\tau',\tau''),\tau')$, $\theta''_r(s''(\tau',\tau''),\tau'')$ $r \in \Gamma_{\delta}$, ne sont pas tous nuls

$$(3.3) \qquad \sum_r \theta'_r(s'(\tau',\tau''),\tau')\theta''_{\psi r}(s'',(\tau',\tau''),\tau'') = 0$$

$$(3.4) \qquad \sum_r \frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_i}(s'(\tau',\tau''),\tau')\theta''_{\psi r}(s''(\tau',\tau''),\tau'') = 0$$

$$(3.5) \qquad \sum_r \theta'_r(s'(\tau',\tau''),\tau') \frac{\partial \theta''_{\psi r}}{\partial z''_j}(s''(\tau',\tau''),\tau'') = 0 .$$

Si on dérive (3.3) par rapport à τ'_{ij} , on trouve, en utilisant (3.4), (3.5) et les équations de la chaleur (I.3.14) :

$$\forall i,j \qquad \sum_r \frac{\partial^2 \theta'_r}{\partial z'_i \partial z'_j}(s'(\tau',\tau''),\tau')\theta''_{\psi r}(s''(\tau',\tau''),\tau'') = 0 .$$

Vue l'hypothèse $T_{g',\delta} \neq A_{g',\delta}$, on en déduit :

$$\forall r \in \Gamma_{\delta} \quad \forall \tau' \in U' \quad \forall \tau'' \in U'' \qquad \theta''_r(s''(\tau',\tau''),\tau'') = 0 .$$

De l'hypothèse $U_{g'',\delta} \neq A_{g'',\delta}$ et de (3.5), on déduit :

$\forall r,\tau',\tau''$ $\qquad\qquad \theta'_r(s'(\tau',\tau''),\tau') = 0$,

ce qui contredit (3.2).

Pour un élément générique (A,Θ) de $A^{\delta}_{g',g''}$, on a donc égalité dans (1.5) : $\pi(F' \times F'') = \mathrm{Sing}\ \Theta$. Puisque $U_{g',\delta} \neq A_{g',\delta}$ (par 2.1) et $U_{g'',\delta} \neq A_{g'',\delta}$, $\mathrm{Sing}\ \Theta$ est lisse de codimension $2d$ (ou vide si $g' < d$).

Si $g' \geq d$, la matrice des dérivées secondes en un point singulier est :

$$\begin{pmatrix} 0 & T = \left(\sum_r \frac{\partial\theta'_r}{\partial z'_i}(z').\frac{\partial\theta''_{\psi r}}{\partial z''_j}(z'')\right)_{\substack{1\leq i\leq g' \\ 1\leq j\leq g''}} \\ {}^tT & 0 \end{pmatrix}$$

Si $X' \notin U_{g',\delta}$, $X'' \notin U_{g'',\delta}$, alors :

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial\theta'_r}{\partial z'_i}(z')\right)_{i,r} = \mathrm{Rang}\left(\frac{\partial\theta''_r}{\partial z''_j}(z'')\right)_{j,r} = d \leq g' \leq g'' .$$

Les singularités de Θ sont quadratiques de rang $2d$. ∎

Corollaire 3.6. Pour $\delta = (2)$, (3) ou $(2,2)$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $A^{\delta}_{g',g''}$ $(g'' \geq g')$ est :

- vide si $g' < \deg \delta = d$, sauf si $\delta = (2,2)$ et $3 \in \{g',g''\}$
- composé de $(d!)^2$ points si $g' = g'' = d$
- lisse avec $(d-1)!$ composantes connexes de codimension $2d$ si $g'' > g' = d$
- lisse irréductible de codimension $2d$ si $g' > d$.

∎ Il ne reste qu'à calculer le nombre de composantes connexes en gardant en mémoire la fin de l'énoncé de 2.11. On suppose $g' = d$. On a $(M')^{g'} = d.(g')!$ (I.3.6). Le lieu fixe F' de M' est de cardinal $d.d!$ et est stable par $H(M')$, qui est de cardinal d^2 (I.3.7). Le nombre de composantes est :

$$(d.d!)^2/d^2 \quad \text{si} \quad g'' = d$$

$$d.d! \ /d^2 \quad \text{si} \quad g'' > d . \qquad ∎$$

Remarque 3.7. Les singularités de Θ sont alors quadratiques de rang $2d$ et $\mathrm{Sing}\,\Theta$ est invariant par un groupe de translations de cardinal d^2, isomorphe à $H(\delta)$, à savoir $\pi(H(M')\times\{0\}) = \pi(\{0\}\times H(M''))$.

4. Application du théorème d'Andreotti et Mayer.

Théorème 4.1. On suppose $g'' = g-g' \geq g' \geq 1$, $T_{g',\delta} \neq A_{g',\delta}$ et $U_{g'',\delta} \neq A_{g'',\delta}$ (cf. section 2) ou l'inverse. Alors, pour $g' \geq \deg\delta$, $g'' > \deg\delta$, $A^{\delta}_{g',g''}$ est une composante irréductible de $N^{g}_{g-2\deg\delta}$, de codimension $g'g''$ dans A_g.

■ On va appliquer le théorème d'Andreotti et Mayer (II.D.1.4.3) à un élément générique (A,Θ) de $A^{\delta}_{g',g''}$. Par 3.1, $\mathrm{Sing}\,\Theta$ est équidimensionnel de codimension $2d$, égal à $\pi(F'\times F'')$, où F' (resp. F'') est le lieu fixe de M' (resp. M''). De plus F'' est irréductible. On notera F'_0 une composante irréductible de F' : c'est un point si $g' = d$, égal à F' si $g' > d$. On a déjà remarqué, à la fin de la démonstration de 3.1, que l'application II.D.1.4.4 est donnée par :

$$(4.2)\qquad F'_0\times F'' \longrightarrow \mathbb{P}(T_0^vB'\otimes T_0^vB'') \subset \mathbb{P}S^2T_0^vA$$

$$(z',z'') \longmapsto \Big(\sum_r \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z')\,\frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'')\Big)_{\substack{1\leq i\leq g'\\ 1\leq j\leq g''}}.$$

On rappelle que les $\frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}$ (resp. $\frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}$) sont des éléments de $H^0(F',M')$ (resp. $H^0(F'',M'')$) ([Gr 1] page 92 et Lemme 4.3 ci-dessous).

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que (4.2) est non dégénérée, puis d'appliquer II.D.1.4.3.

Lemme 4.3. Soient (X,M) une variété abélienne polarisée de dimension g et $\{s_1,\dots,s_d\}$ une base de $H^0(X,M)$. On suppose que le schéma F partie fixe de $|M|$ est de dimension $g-d>0$. Alors une base de $H^0(F,M)$ est $\{\frac{\partial s_r}{\partial z_j} \mid 1\leq r\leq d,\ 1\leq j\leq g\}$.

■ Pour $1\leq r\leq d$, on note D_r le schéma défini par l'annulation de $s_1,\dots,s_r$, et on pose $D_0 = X$. On montre facilement que $H^i(D_r,\mathcal{O}_{D_r}(dM)) = 0$ pour $0<i<g-r$ donc que la restriction $H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(D_r,\mathcal{O}_{D_r})$ est bijective pour $g-r>1$.

Si on note E_r le diviseur de s_r sur X, on a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(X,\mathcal{O}_X(M))/\mathbb{C}s_r & \to & H^0(E_r,\mathcal{O}_{E_r}(M)) & \to & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \to & H^0(D_{r-1},\mathcal{O}_{D_{r-1}}(M))/\mathbb{C}s_r & \to & H^0(D_r,\mathcal{O}_{D_r}(M)) & \to & H^1(D_{r-1},\mathcal{O}_{D_{r-1}}) & \to & 0 \end{array},$$

pour $r \geq 1$, $g-(r-1) > 1$. Il est facile de voir ([Gr 1] page 95) que la première ligne est :

$$0 \to \langle s_1,\dots,\hat{s}_r,\dots,s_d\rangle \to \langle s_1,\dots,\hat{s}_r,\dots,s_d,\frac{\partial s_r}{\partial z_j}\rangle \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to 0$$

$$\frac{\partial s_r}{\partial z_j} \longmapsto d\bar{z}_j ,$$

pour un choix convenable des coordonnées $z_1,\dots,z_g$.

On en déduit facilement par récurrence sur r que pour $1 \leq r \leq \min(d,g-1)$, une base de $H^0(D_r,\mathcal{O}_{D_r}(M))$ est :

$$\{s_{r+1},\dots,s_d,\frac{\partial s_1}{\partial z_j},\dots,\frac{\partial s_r}{\partial z_j} \text{ pour } 1 \leq j \leq g\} . \qquad \blacksquare$$

Dans notre cas, puisque $g'' > d$, on peut appliquer le lemme à (X'',M''). Si (4.2) est dégénérée, on a :

$$\exists(\lambda_{ij}) \in \mathbb{P}^{g'g''-1} \quad \forall z' \in F'_0 \quad \forall z'' \in F'' \quad \sum_{r,i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'') = 0 .$$

On déduit du lemme que :

$$\forall z' \in F'_0 \quad \forall j,r \qquad \sum_i \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') = 0 .$$

Si $g' > d$ on peut appliquer le lemme à (X',M') et conclure que les λ_{ij} sont tous nuls. Si $g' = d$, alors la matrice $(\frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z'))$ est $d \times d$ de rang d donc on peut conclure aussi que les λ_{ij} sont tous nuls.

L'application (4.2) est donc non dégénérée et on peut conclure en appliquant le théorème d'Andreotti et Mayer II.D.1.4.3. $\blacksquare$

Remarque 4.4. Sous les hypothèses de 4.1, l'intersection dans $\mathbb{P}T_0A$ des cônes tangents aux points singuliers de Θ, pour (A,Θ) générique dans $A^{\delta}_{g',g''}$, est la réunion disjointe de $\mathbb{P}T_0X' \simeq \mathbb{P}^{g'-1}$ et de $\mathbb{P}T_0X'' \simeq \mathbb{P}^{g''-1}$.

Corollaire 4.5.

. $A^{(2)}_{g',g-g'}$ est une composante de N^g_{g-4} pour $2 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 5$.

. $A^{(3)}_{g',g-g'}$ est une composante de N^g_{g-6} pour $3 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 7$.

. $A^{(2,2)}_{g',g-g'}$ est une composante de N^g_{g-8} pour $4 \leq g' \leq g/2$ et $g \geq 9$.

Remarque 4.6. Si $\theta_{null,g}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées pour lesquelles une thêtaconstante s'annule (cf. III), on a (cf. [D2]) :

$$A^{(2)}_{g',g-g'} \subset \theta_{null,g} \quad \text{pour} \quad 2 \leq g' \leq g/2$$

$$A^{(3)}_{g',g-g'} \not\subset \theta_{null,g}$$

$$A^{(2,2)}_{g',g-g'} \subset \theta_{null,g} \quad \text{pour} \quad 4 \leq g' \leq g/2 .$$

APPENDICE 2

VARIETES ABELIENNES POLARISEES DE DEGRE DEUX ET VARIETES DE PRYM

§1. Résultats généraux.

On rappelle qu'une variété abélienne polarisée de degré 2 est une variété abélienne X munie d'une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles amples M vérifiant $h^0(X,M)=2$. Le groupe $H(M)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$ et, pour tout élément non nul ϵ de $H(M)$, il existe une isogénie de (X,M) sur une variété abélienne principalement polarisée (X^ϵ,M^ϵ), de noyau $\{0,\epsilon\}$. L'espace des modules des variétés abéliennes polarisées de degré 2 et dimension g est noté $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

On rappelle qu'une variété abélienne polarisée est dite irréductible si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles.

Proposition 1.1.

Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de degré 2, irréductible. On suppose qu'un élément D de $|M|$ est réductible et que $\dim X\geq 2$.

Alors il existe deux variétés abéliennes principalement polarisées (A_1,Θ_1) et (A_2,Θ_2) et une isogénie $\pi : X \longrightarrow A_1\times A_2$ de degré 2 telles que $D=\pi^*(\Theta_1\times A_2+A_1\times\Theta_2)$. En particulier, il existe des variétés abéliennes polarisées non nulles de degré 2, (X_1,M_1) et (X_2,M_2), et une isogénie φ de degré 2 de $X_1\times X_2$ sur X telles que $\varphi^*M\simeq M_1\boxtimes M_2$.

■ On écrit $D=D_1+D_2$ et on note (cf. I.3.3) :

$$K_i=H(D_i),\qquad p_i : X\longrightarrow X/K_i^0=B_i.$$

Il existe un diviseur Θ_i sur B_i tel que $p_i^*\Theta_i=D_i$ et $H^0(B_i,\Theta_i)\simeq H^0(X,D_i)$. Comme (X,M) est irréductible, les

polarisations Θ_i sont donc principales. Le noyau du morphisme $f: X \longrightarrow B = B_1 \times B_2$ est $K_1^o \cap K_2^o \subset \{x \mid D_x = D\} \subsetneq H(M)$; il est donc de cardinal au plus 2.

Si f est injective, la restriction à son image A de la polarisation produit sur B est de degré 2. Comme en A1.1.1, on a une isogénie :

$$\pi : X \times Y \longrightarrow B_1 \times B_2$$

avec $Y = \mathrm{Ker}(B_1 \times B_2 \xrightarrow{\sim} \hat{B}_1 \times \hat{B}_2 \twoheadrightarrow \hat{X})$, variété abélienne polarisée de degré 2.

Puisque K_i^o est connexe, $\hat{p}_i : \hat{B}_i \longrightarrow \hat{X}$ est injective et $Y \cap \{0\} \times B_2 = Y \cap B_1 \times \{0\} = \{0\}$. Les flèches $j_i : Y \longrightarrow B_1 \times B_2 \longrightarrow B_i$, pour $i=1,2$, sont donc injectives et $j_i^* \Theta_i$ est ample sur Y. Si Y est de dimension n, on a (I.3.6) :

$$2 = \frac{1}{n!} \left[(pr_1^* \Theta_1 + pr_2^* \Theta_2)\big|_Y \right]^n$$

$$= \frac{1}{n!} \left(j_1^* \Theta_1 + j_2^* \Theta_2 \right)^n \geq \deg j_1^* \Theta_1 + \deg j_2^* \Theta_2,$$

l'inégalité étant stricte si $n>1$. On en déduit $n = \deg j_1^* \Theta_1 = \deg j_2^* \Theta_2 = 1$. Les polarisations $j_i^* \Theta_i$ sont donc principales, et on peut écrire $B_i \simeq Y \times A_i$, où A_i est principalement polarisée. Si $g : Y \longrightarrow Y \times Y$ est l'application diagonale, on a :

$$X \simeq \mathrm{Ker} \left(\hat{Y} \times \hat{A}_1 \times \hat{Y} \times \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{g} \circ pr_{1,3}} \hat{Y} \right).$$

Comme X est supposée irréductible, on en déduit $A_1 = A_2 = 0$ et $X \simeq Y$ est de dimension 1, ce qui contredit l'hypothèse.

Le morphisme f est donc de degré 2 sur son image A . La restriction Θ de la polarisation produit sur B à A est principale et $D = f^* \Theta$. Le diviseur Θ est alors réductible, donc aussi la variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), ce qui montre la première partie de la proposition.

Enfin, le noyau de l'isogénie duale $\hat{\pi} : \hat{A}_1 \times \hat{A}_2 \longrightarrow \hat{X}$ est engendré par (ϵ_1, ϵ_2), où ϵ_i est un élément non nul d'ordre 2 de $\hat{A}_i$. Si $\hat{Y}_i$

est le quotient de A_i par ϵ_i, on a alors une isogénie de degré 2 de $\hat{X}$ sur $Y_1 \times Y_2$, dont la transposée est l'isogénie de degré 2 de $\hat{Y}_1 \times \hat{Y}_2$ sur X cherchée. ■

(1.2) Introduisons des générateurs α et β de $H(M)$, ainsi que des éléments $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de $\mathcal{G}(M)$ d'images respectives α et β dans $H(M)$, satisfaisant à :

$$\tilde{\alpha}^2 = \tilde{\beta}^2 = 1, \qquad \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -1.$$

L'espace des sections de M invariantes par l'action de $\tilde{\alpha}$ est de dimension 1; on note s un générateur, et $t = \tilde{\beta}.s$, de sorte que $\{s,t\}$ est une base de $H^0(X,M)$.

Il résulte de la proposition ci-dessus que si (X,M) est irréductible de dimension ≥ 2, les seuls éléments de $|M|$ qui peuvent être réductibles sont $\mathrm{div}(s)$ et $\mathrm{div}(t) = \mathrm{div}(s)_\beta$ -auquel cas $X^\alpha = X/\{0,\alpha\}$ est réductible-, $\mathrm{div}(s+t)$ et $\mathrm{div}(s-t) = \mathrm{div}(s+t)_\alpha$ -auquel cas X^β est réductible-, $\mathrm{div}(s+it)$ et $\mathrm{div}(s-it) = \mathrm{div}(s+it)_\alpha$ -auquel cas $X^{\alpha+\beta}$ est réductible.

(1.3) On se place dans la situation de la proposition, c'est-à-dire qu'on se donne des variétés abéliennes polarisées de degré 2, (X_1,M_1), (X_2,M_2) et (X,M) et une isogénie $\pi : X_1 \times X_2 \longrightarrow X$ de noyau (α_1,α_2), α_i élément on nul de $H(M_i)$. Alors (X,M) <u>est irréductible si et seulement si</u> (X_1,M_1) <u>et</u> (X_2,M_2) <u>le sont</u>.

Il suffit de montrer que si (X,M) est réductible, c'est-à-dire s'il existe une décomposition :

$$(X,M) \simeq (A,L) \times (X',M')$$

où (A,L) est principalement polarisée irréductible et (X',M') est polarisée de degré 2, alors (X_1,M_1) ou (X_2,M_2) est réductible.

Soit (A_i,L_i) la variété abélienne principalement polarisée quotient de (X_i,M_i) par α_i. Le morphisme composé $p : A \longrightarrow X \longrightarrow A_1 \times A_2$ satisfait à $p^*(L_1 \boxtimes L_2) \sim L$. Comme (A,L) est supposé <u>irréductible</u>, c'est un facteur direct dans (A_1,L_1) -par exemple. Il est alors clair que c'est aussi un facteur direct dans (X_1,M_1), qui est donc réductible.

§2. Les ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$:

On va maintenant étudier plus en détail les ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$ introduits en A1.1.

Rappelons brièvement la construction des éléments de $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$. On prend, pour i=1,2, des éléments (X_i,M_i) de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$. On choisit aussi des générateurs α_i et β_i de $H(M_i)$. Le quotient de $X_1\times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1,α_2) et (β_1,β_2) est une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ), élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$.

Supposons maintenant qu'un élément D de $|M_2|$ (ou de $|M_1|$) soit réductible.

La proposition précédente permet d'écrire (A,Θ) comme le quotient de $X_1\times X_2'\times X_3'$ par le sous-groupe engendré -si par exemple $D=D_{\alpha_2}$ - par $(0,\alpha_2',\alpha_3')$, $(\alpha_1,\alpha_2',0)$, $(\beta_1,\beta_2',\beta_3')$, avec :

$$(X_1',M_1')\in\mathcal{A}_{g_2',(2)},\quad (X_2',M_2')\in\mathcal{A}_{g_3',(2)}\qquad g_2'+g_3'=g_2$$

$$\alpha_2',\ \beta_2' \quad \text{engendrent} \quad H(M_2').$$

$$\alpha_3',\ \beta_3' \quad \text{engendrent} \quad H(M_3').$$

On peut bien sûr continuer le processus, si un des éléments de $|M_1| \cup |M_2'| \cup |M_3'|$ est réductible de dimension >0.

Les quotients obtenus ne sont plus tous du même type. On a en effet deux cas :

i) (A,Θ) est un quotient de $X_1\times X_2\times X_3\times X_4$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1,\alpha_2,0,0)$, $(\alpha_1,0,\alpha_3,0)$, $(\alpha_1,0,0,\alpha_4)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$. C'est le cas si un élément de $|M_3'|$ invariant par translation par α_3' est réductible.

ii) (A,Θ) est le quotient de $X_1\times X_2\times X_3\times X_4$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1,\alpha_2,0,0)$, $(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4)$, $(0,0,\beta_3,\beta_4)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,0)$. C'est le cas si un élément de $|M_3'|$ invariant par translation par β_3' est réductible.

(2.1) On ne s'intéressera qu'au premier type. On introduit les sous-ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ de $\mathcal{A}_{g_1+\ldots+g_r}$ définis comme suit.

Soit $(X_i,M_i)\in\mathcal{A}_{g_i,(2)}$ pour $i=1,\ldots,r$; α_i et β_i des générateurs de $H(M_i)$; $\{s^i,t^i\}$ une base de $H^0(X_i,M_i)$ choisie comme en (1.2). Le quotient de $X_1\times\ldots\times X_r$ par le sous-groupe engendré par les $(\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_i,0,\ldots,0)$, $2\leq i\leq r$, et $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)$ est une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ); le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g_1+\ldots+g_r}$ ainsi construit est noté $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$.

L'espace $H^0(A,\Theta)\subset H^0(X_1\times\ldots\times X_r,\ M_1\boxtimes\ldots\boxtimes M_r)$ est engendré par $s^1s^2\ldots s^r + t^1t^2\ldots t^r$.

On peut opérer des regroupements : si X_1' est le quotient de $X_1\times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1,α_2), (A,Θ) est encore un quotient de $X_1'\times X_3\times\ldots\times X_r$ du type ci-dessus avec $\alpha_1'=(\alpha_1,0)$, $\beta_1'=(\beta_1,\beta_2)$. On a en particulier $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}\subset\mathcal{A}^2_{g_1+g_2,g_3,\ldots,g_r}$ et ainsi de suite.

(2.2) Inversement, il ressort de la discussion du début du paragraphe que tout élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$ peut s'écrire comme élément de $\mathcal{A}^2_{g_1^1,\ldots,g_1^r,g_2^1,\ldots,g_s^2}$ avec $r\geq 1$, $s\geq 1$, $g_1^1+\ldots+g_1^r=g_1$, $g_2^1+\ldots+g_2^s=g_2$, c'est-à-dire comme quotient de $X_1^1\times\ldots\times X_1^r\times X_2^1\times\ldots\times X_2^s$ avec la propriété supplémentaire :

$$\text{div } s_j^i \text{ irréductible lorsque } g_j^i\geq 2.$$

La proposition suivante détermine dans quel cas un élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ est irréductible. On pourra remarquer que l'hypothèse (X_i,M_i) irréductible est trivialement nécessaire.

Proposition 2.3.

Soit (A,Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$, qui s'exprime donc comme quotient d'un produit de r variétés abéliennes polarisées (X_i,M_i) de degré 2, supposées irréductibles. Alors (A,Θ) est irréductible, sauf si :

$$r=2, \qquad g_1=g_2=1, \qquad (X_1,M_1) \simeq (X_2,M_2).$$

Dans ce dernier cas (A,Θ) est isomorphe à $X_1\times X_1$ munie de la polarisation produit.

■ Il est clair qu'il suffit de traiter le cas $r=2$. Avec les notations de 2.1, une équation de $D=\pi^*\Theta$ est $s^1s^2+t^1t^2$. Supposons D réductible. Si une composante Z de D ne se projetait pas surjectivement sur X_1, on aurait $Z=D_1\times X_2$, avec D_1 diviseur de X_1. Mais s^1 et t^1 seraient alors nulles sur D_1. On aurait alors $\dim X_1\geq 2$ et, par 1.2, (X_1,M_1) réductible.

Toute composante de D se projette donc surjectivement sur X_1 et sur X_2. Si on écarte provisoirement le cas $g_1=g_2=1$, on a alors par exemple $g_2>1$. Pour x générique dans X_1, $D\cap\{x\}\times X_2$ est alors réductible, de sorte que $\operatorname{div}(ps^2+qt^2)$ est réductible pour tout $(p,q)\in\mathbb{P}^1$. De nouveau, cela contredit 1.2.

Examinons le cas $g_1=g_2=1$. Si (A,Θ) est réductible, on peut écrire $\pi : X_1\times X_2 \longrightarrow E_1\times E_2$. Si un morphisme induit $u^i_j : X_i \longrightarrow E_j$ était nul, u^i_{3-j} serait un isomorphisme puisque $X_i \longrightarrow E_1\times E_2$ est injectif. Mais la polarisation induite sur X_i serait alors principale, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les morphismes u^i_j sont donc surjectifs et $\deg(u_1^{i*}\Theta_1+u_2^{i*}\Theta_2)=2$. Les polarisations $u_j^{i*}\Theta_j$ sont donc principales et les u^i_j sont des isomorphismes, via lesquels on peut identifier en particulier X_2 à X_1. Le noyau de π est alors engendré par (α_1,α_1) et (α_2,α_2). Le quotient π s'identifie au morphisme :

$$\begin{aligned} X_1 \times X_1 &\longrightarrow X_1 \times X_1 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y,x-y). \end{aligned}$$

■

On peut déduire de 2.3 le résultat suivant, qui complète les conclusions de 1.1 et de 1.2.

Proposition 2.4.

Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de degré 2 et de dimension g, irréductible.

Alors au plus un des 3 quotients $(X^{\epsilon},M^{\epsilon})$, $\epsilon\in H(M)-\{0\}$, est réductible, sauf si X est le quotient d'un produit $E\times E$, où E est une courbe elliptique, par le sous-groupe $\{0,(\alpha,\alpha)\}$, avec $\alpha\in E[2]$, de sorte que $\dim X=2$.

Dans ce dernier cas, les 3 quotients sont réductibles si et seulement si E a multiplication complexe par i ($j(E)=1728$) et si α est l'unique élément non nul de $E[2]$ invariant par cette multiplication.

■ Supposons $(X^{\alpha},M^{\alpha})=(X,M)/\{0,\alpha\}\simeq(A_1\times A_2,L_1\boxtimes L_2)$. Comme à la fin de la démonstration de 1.1, on en déduit une isogénie de degré 2, $X_1\times X_2\longrightarrow X$, où (X_i,M_i) sont irréductibles de degré 2, $H(M_i)$ est engendré par α_i et β_i, $\operatorname{Ker}\pi$ par (α_1,α_2), avec $\alpha=\pi(\alpha_1,0)=\pi(0,\alpha_2)$ et $\beta=\pi(\beta_1,\beta_2)$. La variété abélienne principalement polarisée X^{β} (resp. $X^{\alpha+\beta}$) est donc le quotient de $X_1\times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1,α_2) et (β_1,β_2) (resp. (α_1,α_2) et $(\alpha_1+\beta_1,\beta_2)$); elle est par conséquent irréductible d'après 2.3, sauf si il existe un isomorphisme $\varphi : X_1\xrightarrow{\sim} X_2$ satisfaisant à $\varphi(\alpha_1)=\alpha_2$, $\varphi(\beta_1)=\varphi(\beta_2)$ (resp. $\varphi(\alpha_1)=\alpha_2$, $\varphi(\alpha_1+\beta_1)=\beta_2$) et si $\dim X_i=1$. Ces deux éventualités ne peuvent se produire simultanément que si il existe un automorphisme τ de X_1 satisfaisant à $\tau(\alpha_1)=\alpha_1$, $\tau(\beta_1)=\alpha_1+\beta_1$. C'est le cas si et seulement si X_1 est la courbe elliptique avec multiplication complexe par i ($j=1728$).

■

§3. Les familles $\mathcal{P}^2_{g_1,\dots,g_r}$.

Le but de ce paragraphe est l'étude de $\mathcal{P}^2_{g_1,\dots g_r}$, sous-ensemble de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ constitué des variétés construites - comme en 2.1 - à l'aide d'éléments (X_i,M_i) d'un sous-ensemble $\mathcal{P}_{g_i,(2)}$ de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$ que l'on va maintenant définir.

On appellera revêtement admissible ramifié en quatre points tout revêtement qui s'identifie au quotient d'une courbe stable $\tilde{C}$ de genre $2g-1$ par une involution σ satisfaisant à :

1) σ a exactement 4 points fixes qui soient lisses sur $\tilde{C}$. On les notera p_1, p_2, p_3 et p_4.

2) En les autres points fixes éventuels, qui sont donc des points doubles, les deux branches ne sont pas échangées.

3) Le nombre de points doubles échangés par σ est égal au nombre de composantes de $\tilde{C}$ échangées par σ.

La variété de Prym - au sens de [Mu2] - d'un revêtement admissible $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C = \tilde{C}/\sigma$ est la variété abélienne $\mathrm{Ker}(J\tilde{C} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JC)$ munie de la polarisation induite par la polarisation principale de $J\tilde{C}$. Sa variété duale, isomorphe à $J\tilde{C}/\pi^*JC$, est alors munie d'une polarisation de degré deux.

On notera $\mathcal{P}_{g,(2)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g,(2)}$ formé des variétés duales des variétés de Prym des revêtements admissibles ramifiés en quatre points.

Ce sont des variétés abéliennes polarisées de degré 2.

(3.1) La courbe $\tilde{C}' = \tilde{C}/_{p_1 \sim p_2 \text{ et } p_3 \sim p_4}$ obtenue à partir de $\tilde{C}$ en identifiant p_1 à p_2 et p_3 à p_4, munie de l'involution induite σ', définit un revêtement admissible au sens de [Bel].

On a un diagramme ([Bel] page 159) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2)^2 & \longrightarrow & P' \sqcup P'^{-} & \longrightarrow & \hat{X} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{*2} & \longrightarrow & J\tilde{C}' & \longrightarrow & J\tilde{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{*2} & \longrightarrow & JC' & \longrightarrow & JC & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où P' est la variété de Prym principalement polarisée associée à $(\tilde{C}',\sigma')$, $\hat{X}$ la variété de Prym associée à $(\tilde{C},\sigma)$. On a donc une isogénie de degré 2 de X sur $\hat{P}'$. La variété abélienne (X,M) est dans $\mathcal{T}_{g,(2)}$. Les trois isogénies obtenues, en considérant les trois courbes $\tilde{C}'$, $\tilde{C}''=\tilde{C}/_{p_1\sim p_3 \text{ et } p_2\sim p_4}$, $\tilde{C}'''=\tilde{C}/_{p_1\sim p_4 \text{ et } p_2\sim p_3}$, correspondent aux quotients de X par les trois éléments non nuls de $H(M)$.

Proposition 3.2.

La sous-variété $\mathcal{T}_{g,(2)}$ de $\mathcal{A}_{g,(2)}$ est fermée irréductible.

■ On considère tout d'abord une courbe $\tilde{C}$ connexe de genre $2g-1$, avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités, munie d'une involution σ. On note C la courbe quotient et $P=(\mathrm{Ker}\ \mathrm{Nm})^o$ la variété de Prym associée. On a alors l'analogue suivant de Lemma 5.1 de [Bel].

Lemme 3.3.

Le revêtement $\tilde{C}\longrightarrow C$ est admissible au sens précédent si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- *σ n'est l'identité sur aucune composante de $\tilde{C}$*
- *$p_a(C)=g-1$*
- *P est une variété abélienne.*

■ On suppose ces trois conditions vérifiées. la même démonstration que celle de Lemma 5.1 de loc. cit. donne alors, avec les notations de Beauville :

$$n_e+n_f'=c_e \quad \text{et} \quad \frac{r}{2}+n_f'=2.$$

Pour montrer que le revêtement est admissible, il suffit donc de montrer que le nombre n_f' de points doubles de $\tilde{C}$, fixes sous l'action de σ avec les 2 branches échangées, est nul.

Soit x un tel point, $\tilde{N}$ la normalisation de $\tilde{C}$ en x. On a encore $\tilde{N}/\sigma\simeq C$ et $\ker(J\tilde{C}\longrightarrow J\tilde{N})^o\subset P$. Comme P est par hypothèse une variété abélienne, c'est que $J\tilde{C}\longrightarrow J\tilde{N}$ est un isomorphisme,

donc que $\tilde{N}$ est non connexe. On écrit $\tilde{N}= \tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2$ avec $\tilde{N}_i$ connexe. L'ensemble $\{y \in \tilde{N}_1 \mid \sigma y \in \tilde{N}_2\}$ est alors ouvert, fermé et contient x. On en déduit $\tilde{N}= \tilde{N}_1 \cup \sigma \tilde{N}_1$, de sorte que $g(\tilde{C})= 2g(\tilde{N}_1)$. Contradiction.

Ceci prouve $n'_f=0$, donc le lemme. ■

On procède alors comme dans le paragraphe 6 de loc. cit. . Pour les mêmes raisons, il existe une variété irréductible complète $\bar{S}$, une famille de courbes stables $\tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \bar{S}$ munie d'une $\bar{S}$-involution σ telle que :

- pour tout s dans $\bar{S}$, l'involution induite sur $\tilde{\mathcal{C}}_s$ n'est l'identité sur aucune composante de $\tilde{\mathcal{C}}_s$.

- $\tilde{\mathcal{C}}_s$ est de genre $2g-1$, $\tilde{\mathcal{C}}_s/\sigma_s$ est de genre $g-1$.

- Pour toute courbe lisse connexe $\tilde{C}$ de genre $2g-1$ munie d'une involution avec 4 points fixes, la paire $(\tilde{C},\sigma)$ est isomorphe à $(\tilde{\mathcal{C}}_s,\sigma_s)$ pour un s dans $\bar{S}$.

On définit de la même façon :

$$\bar{\mathcal{P}}= \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Nm}: \underline{\mathrm{Pic}}^0(\tilde{\mathcal{C}}/\bar{S}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}/\bar{S}))^0.$$

C'est un espace algébrique lisse sur $\bar{S}$. L'ensemble S des points s de $\bar{S}$ pour lesquels $\bar{\mathcal{P}}_s$ est une variété abélienne est un ouvert de $\bar{S}$ et l'application induite $p : S \longrightarrow \mathcal{A}_{g,\delta_g}$, où δ_g est la polarisation $(2,2,\ldots,2)$ de degré 2^{g-1}, est propre (Proposition 6.3 de loc. cit.).

On en déduit facilement que $\mathcal{P}_{g,(2)}$ est fermé dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

Pour prouver l'irréductibilité on peut, par une étude des déformations locales d'une paire admissible (cf. [H-M] pages 29 et 33), prouver qu'elle est déformation d'une paire admissible $(\tilde{C},\sigma)$ avec $\tilde{C}$ lisse connexe. L'irréductibilité de la famille de ces dernières paires découle alors du fait suivant, déjà démontré dans l'introduction de II.D. : si $\mathcal{C} \longrightarrow S$ est une famille irréductible de courbes lisses et si on note $\mathcal{C}^4_S = \mathcal{C} \times_S \mathcal{C} \times_S \mathcal{C} \times_S \mathcal{C}$, $\mathcal{J}^d = \underline{\mathrm{Pic}}^d(\mathcal{C}/S)$ le

schéma de Picard relatif en degré d, $m : \mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathcal{J}^4$ l'élévation au carré, alors le S-schéma $\mathcal{J}^2 \times_{\mathcal{J}^4} \mathcal{C}^4_S$ est irréductible.

■

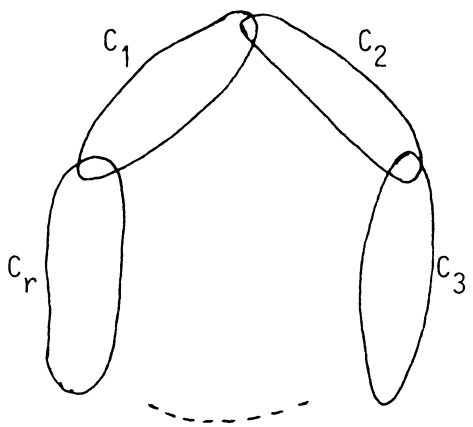
(3.4) On définit maintenant $\mathcal{P}^2_g \subset \mathcal{A}_g$ comme l'ensemble des quotients d'éléments de (P,M) de $\mathcal{P}_{g,(2)}$ par un élément de $H(M)$. En vertu de (3.1), c'est aussi l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes stables de genre $g+1$ avec au moins deux points doubles. C'est un fermé irréductible de $\mathcal{P}_g$.

On définit aussi $\mathcal{P}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ construits - comme en 2.1 - à l'aide d'éléments (X_i,M_i) de $\mathcal{P}_{g_i,(2)}$. Il résulte de la proposition suivante - et de sa démonstration - qu'on a :

(3.5) $\qquad \mathcal{P}^2_{g_1,\ldots,g_r} \subset \mathcal{P}_{g_1+\ldots+g_r}$.

(3.6) Tout élément de $\mathcal{P}^2_{g_1,g_2}$ peut s'écrire comme un quotient de $X^1_1\times\ldots\times X^r_1\times X^1_2\times\ldots\times X^s_2$ avec (notations de 2.1) $\operatorname{div} s^i_j$ irréductible lorsque $\dim X^i_j \geq 2$, et $X^i_j \in \mathcal{P}_{g^i_j,(2)}$.

(3.7) $\mathcal{P}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ est l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes stables réunion de r courbes $C_1,\ldots,C_r$ de genres respectifs $g_1-1,\ldots,g_r-1$, se coupant de la façon suivante :



Proposition 3.8.

Soient $(X_1,M_1)\in\mathcal{A}_{g_1,(2)}$, $(X_2,M_2)\in\mathcal{A}_{g_2,(2)}$, $g=g_1+g_2$ et $(X,M)\in\mathcal{A}_{g,(2)}$ le quotient de $X_1\times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1,α_2), où α_i est un élément non nul de $H(M_i)$. Alors :

$$X\in\mathcal{P}_{g,(2)} \Longleftrightarrow X_1\in\mathcal{P}_{g_1,(2)} \text{ et } X_2\in\mathcal{P}_{g_2,(2)}.$$

■ Si $(X_i,M_i)\in\mathcal{P}_{g_i,(2)}$, $\hat{X}_i$ est la variété de Prym d'un revêtement double admissible $\pi_i : \tilde{C}_i \longrightarrow C_i$ ramifié en quatre points $p_1^i,\ldots,p_4^i$ lisses sur C_i. Comme on l'a expliqué en (3.1), l'élément α_i de $H(M_i)$ correspond à un choix de deux de ces points, soit p_1^i et p_2^i.

Soit $\tilde{C}=\tilde{C}_1\cup\tilde{C}_2/p_1^1\sim p_1^2$ et $p_2^1\sim p_2^2$, munie de l'involution induite σ. Le revêtement associé à $(\tilde{C},\sigma)$ est admissible, ramifié en les quatre points p_3^1, p_4^1, p_3^2, p_4^2. Sa variété de Prym P s'insère dans une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow P \longrightarrow \hat{X}_1\times\hat{X}_2 \longrightarrow 0$$

et X est isomorphe à $\hat{P}$.

Réciproquement, si $X\in\mathcal{P}_{g,(2)}$ alors $\hat{X}$ est une variété de Prym, associée à $(\tilde{C},\sigma)$. Si $p_1,\ldots,p_4$ sont les points fixes de σ lisses sur $\tilde{C}$, un des trois revêtements admissibles $\tilde{C}'\longrightarrow\tilde{C}'/\sigma'$, $\tilde{C}''\longrightarrow\tilde{C}''/\sigma''$, $\tilde{C}''\longrightarrow\tilde{C}'''/\sigma'''$ (cf. 3.1) a comme variété de Prym le produit $P_1\times P_2$, avec $P_i\simeq\hat{P}_i\simeq X_i/\{0,\alpha_i\}$.

Faisons une démonstration par récurrence, en supposant la proposition vraie en dimension $<g$.

Premier cas : σ échange certaines composantes de $\tilde{C}$. Il résulte alors de [Bel] Theorem 5.4 qu'on peut écrire :

$$\tilde{C} = A \cup \tilde{B} \cup \sigma A \qquad p_1, \ldots, p_4 \in \tilde{B}$$

$$X \simeq JA \times Y \quad \text{où} \quad Y = \mathrm{Prym}(\tilde{B}, \sigma)^{\wedge} \in \mathcal{P}_{h,(2)}, \ h < g.$$

On peut toujours, quitte à faire passer des facteurs dans Y, supposer JA irréductible. Il résulte alors de la démonstration de 1.3 qu'on peut écrire par exemple $X_1 \simeq JA \times Y_1$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'isogénie $Y_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ pour prouver le résultat.

Deuxième cas : On suppose maintenant que σ n'échange pas de composantes de $\tilde{C}$. Il ressort alors de [Bel] Theorem 4.10 qu'on est dans l'un des cas suivants :

• La courbe C' est hyperelliptique. La courbe C est alors hyperelliptique et si $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est le revêtement hyperelliptique, $\varphi p_1 = \varphi p_2$ et $\varphi p_3 = \varphi p_4$. Il est alors facile de déduire de II.D.1 ou d'une analyse du type de celle de [Mu2] page 346 qu'on a, avec les notations de §4 : $X_i \in \mathcal{H}_{g_i,(2)}$ ce qui, avec (4.1), entraîne la conclusion.

• La courbe C' est réunion de deux courbes C'_1 et C'_2 se coupant en deux points.

1) Si p_1, p_2, p_3 et p_4 sont sur $\tilde{C}_2$ alors X est réductible :

$$X = P' \times X',$$

où $P' = \mathrm{Prym}(\tilde{C}'_1 \longrightarrow C'_1)$ est principalement polarisée

$X' = \mathrm{Prym}(\tilde{C}_2 \longrightarrow C_2)^{\wedge}$ est polarisée de degré 2.

Tout facteur irréductible (A,L) de P' est encore une variété de Prym et il résulte de la démonstration de 1.3 que c'est aussi un facteur de (X_1, M_1) par exemple : $X_1 \simeq A \times Y_1$. Par hypothèse de récurrence, X_2 et Y_1 sont duales de variétés de Prym. Il en est de même de X_1 et la démonstration dans ce cas est terminée.

2) Si au contraire on a par exemple p_1, $p_2 \in \tilde{C}_1$ et p_3, $p_4 \in \tilde{C}_2$, les variétés abéliennes $X'_i = \mathrm{Prym}(\tilde{C}_i \longrightarrow C_i)^{\wedge}$ sont polarisées de degré 2

et admettent une isogénie de degré 2 sur $P'_i = \mathrm{Prym}(\tilde{C}'_i \longrightarrow C'_i)$. On a $P_1 \times P_2 \simeq P'_1 \times P'_2$, de sorte qu'on peut écrire $P_i \simeq P_{i,1} \times P_{i,2}$, $P'_j \simeq P_{1,j} \times P_{2,j}$, où les $P_{i,j}$ sont des variétés de Prym. L'isogénie $X'_j \longrightarrow P'_j$ correspond à $\epsilon'_j = (\epsilon_{1,j}, \epsilon_{2,j}) \in P'_j[2] = P_{1,j}[2] \times P_{2,j}[2]$. Soit $X_{i,j} \longrightarrow P_{i,j}$ l'isogénie correspondant à $\epsilon_{i,j}$. On a une isogénie de degré 2 : $X_{i,j} \times X_{2,j} \longrightarrow X'_j$, de sorte que par hypothèse de récurrence, $X_{i,j} \in \mathcal{P}_{*,(2)}$. Il suffit alors d'appliquer le sens direct de la proposition à l'isogénie $X_{i,1} \times X_{i,2} \longrightarrow X_i$ pour terminer la démonstration. ■

§4. Les familles $\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$.

De nouveau, $\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ constitué des variétés construites - comme en 2.1 - à l'aide d'éléments (X_i, M_i) de $\mathcal{H}_{g_i,(2)}$, sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$ défini comme suit.

Pour tous points de Weierstrass Q_o et Q_1 sur une courbe hyperelliptique lisse H de genre g, le point $\sigma_H(Q_o - Q_1)$ est d'ordre 2 dans JH. On peut donc lui associer une isogénie $X \longrightarrow JH$ de degré 2. L'ensemble $\mathcal{H}_{g,(2)}$ est l'ensemble des variétés abéliennes polarisées de degré 2 ainsi construites. C'est une famille irréductible, non fermée dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$ sauf pour $g=1$.

Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme hyperelliptique, ramifié en $P_o = \varphi(Q_o)$, $P_1 = \varphi(Q_1)$, $P_2, \ldots, P_{2g+1}$, et $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le revêtement double ramifié en $P_2, \ldots, P_{2g+1}$. Il ressort de II.E.1 que la variété $X \in \mathcal{H}_{g,(2)}$ construite ci-dessus est la variété duale de la variété de Prym du revêtement de C ramifié sur $\varphi^*(P_o + P_1)$ et associé à $\varphi^* \sigma_{\mathbb{P}^1}(1)$. On a donc :

$$\mathcal{H}_{g,(2)} \subset \mathcal{P}_{g,(2)} \cdot \tag{4.1}$$

Si (X,M) est un élément de $\mathcal{H}_{g,(2)}$, l'isogénie $X \longrightarrow JH$ distingue un élément non nul α_X de $H(M)$. La famille des quotients

des éléments (X,M) de $\mathcal{H}_{g,(2)}$ par un élément non nul de $H(M)$ a donc deux composantes irréductibles : la famille $\mathcal{H}_g$ des jacobiennes hyperelliptiques et une famille notée $\mathcal{H}_g^2$.

Dans l'interprétation 3.1 de ces quotients, le premier cas correspond à $C' = C/x_o \sim \tau x_o$ et $x_1 \sim \tau x_1$ - on a posé $\mathcal{P}^* P_i = x_i + \tau x_i$ pour $i=0,1$ - le second à $C'' = C/x_o \sim x_1$ et $\tau x_o \sim \tau x_1$ et $C''' = C/x_o \sim \tau x_1$ et $x_1 \sim \tau x_o$.

(4.2) Comme les courbes C' et C'' sont irréductibles non hyperelliptiques, il ressort de la liste de Theorem 4.10 de [Bel] que les éléments de $\mathcal{H}_g^2$ sont des variétés abéliennes principalement polarisées <u>irréductibles</u>.

(4.3) On définit la sous-variété $\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ de $\mathcal{A}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ comme l'ensemble des quotients de $\prod_{i=1}^{r} (X_i,M_i)$, où $(X_i,M_i) \in \mathcal{H}_{g_i,(2)}$, par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_i,0,\ldots,0)$, $2 \leq i \leq r$, et $(\alpha_{X_1},\alpha_{X_2},\ldots,\alpha_{X_r})$, où $\alpha_i \in H(M_i)-\{0,\alpha_{X_i}\}$.

Par (3.5) et (4.1), on a :

$$\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r} \subset \mathcal{P}^2_{g_1,\ldots,g_r}. \tag{4.4}$$

(4.5) On pourra remarquer pour finir que les éléments de $\mathcal{H}^2_{g_1,\ldots,g_r}$ ($r \geq 2$) sont des variétés abéliennes principalement polarisées <u>irréductibles</u>. C'est une conséquence de (1.3) et de (4.3).

APPENDICE 3

SOUS-VARIETES SPECIALES ET INTERSECTIONS $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ DANS LES VARIETES DE PRYM

§1. Sous-variétés spéciales des variétés de Prym.

Beauville a introduit dans [Be3] la sous-variété spéciale de la variété de Prym P d'un revêtement double étale de courbes lisses $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ associée à la donnée d'un g^r_d complet sur C. Si L est le faisceau inversible sur C de degré d correspondant, $\tilde{L}$ un faisceau inversible sur $\tilde{C}$ tel que $Nm\tilde{L}=L$, cette sous-variété est définie par :

$$V_o = P \cap \{\sigma_{\tilde{C}}(E)\otimes\tilde{L}^{-1} \mid E \text{ diviseur effectif sur } \tilde{C} \text{ avec } \pi_*E\in|L|\}.$$

On peut étendre cette définition au cas d'un revêtement admissible de courbes stables, en remplaçant "E diviseur effectif" par "E diviseur de Cartier effectif" (Remarque 4 de [Be3]). On peut aussi considérer des g^r_d non nécessairement complets.

Le théorème suivant est un critère d'irréductibilité pour les sous-variétés spéciales, qui généralise le corollaire page 365 de [Be3].

Théorème 1.1.

Soient $\tilde{C}$ une courbe stable irréductible, $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement admissible, $\phi : C \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ une application rationnelle birationnelle sur son image. Alors la sous-variété spéciale associée au système linéaire défini par ϕ est irréductible.

■ Il suffit de montrer qu'il existe un ouvert Ω de points lisses de C tel que

$$\{(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_d)\in\tilde{C}^d \mid \pi\tilde{x}_i\in\Omega,\ \sum_{i=1}^{d}\pi\tilde{x}_i\in|L|\}$$

ait au plus deux composantes. Par [Be3] page 359, et avec ses notations, ces deux composantes sont denses dans S_o et S_1

respectivement, de sorte que S_o, ainsi que $V_o = \tilde{\phi}(S_o)$, sont irréductibles.

Cela résulte du théorème suivant. ■

Théorème 1.2.

Soient C une courbe irréductible de degré d dans $\mathbb{P}^r$, $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un morphisme de degré 2, avec $\tilde{C}$ irréductible, et U l'ouvert de $(\mathbb{P}^r)^\vee$ formé des hyperplans coupant C transversalement en d points lisses au-dessus desquels π n'est pas ramifié. Alors les ensembles :

$$I(m) = \{(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m,H) \in \tilde{C}^m \times U \mid \text{Les } m \text{ points } \pi\tilde{x}_i \text{ sont distincts deux à deux et } \pi\tilde{x}_i \in H\}$$

sont irréductibles pour $m<d$; $I(d)$ a au plus deux composantes irréductibles.

■ Comme en II.B.6, on introduit le groupe de Galois G du morphisme étale $p : I(1) \longrightarrow U$, qui opère sur la fibre $\{a_1^+,\ldots,a_d^+, a_1^-,\ldots,a_d^-\}$ d'un point base de U (avec $a_i^+ = \sigma a_i^-$, où σ est l'involution de $\tilde{C}$ associée à π). Les fibres de la projection $I(2) \longrightarrow \tilde{C}^2$ sont des ouverts non vides d'un espace projectif de dimension r-2. L'espace I(2) est donc irréductible, de sorte que G opère transitivement sur les quadruplets (ordonnés) $\{a_i^\alpha, a_j^\beta, a_i^{-\alpha}, a_j^{-\beta}\}$ pour $i \neq j$; $\alpha,\beta \in \{-,+\}$. De plus, on montre comme en II.B.6 que G contient une double transposition qu'on peut supposer être $(a_1^+,a_2^+)(a_1^-,a_2^-)$.

Il faut maintenant montrer que G agit sur l'ensemble des $\{a_{j(1)}^{\alpha_m},\ldots,a_{j(m)}^{\alpha_m}\}$ avec $\alpha_i = \pm$, j injection de $\{1,\ldots,m\}$ dans $\{1,\ldots,d\}$, de façon transitive pour $m<d$ et avec au plus 2 orbites pour $m=d$. Comme G contient toutes les permutations $a_i^+ \longrightarrow a_{\tau(i)}^+$, $a_i^- \longrightarrow a_{\tau(i)}^-$ pour $\tau \in \mathfrak{S}_d$, toute orbite contient un élément du type $\{a_1^+,\ldots,a_n^+, a_{n+1}^-,\ldots,a_m^-\}$. On applique alors $(a_{n+2j+1}^-, a_{n+2j+2}^+)(a_{n+2j+1}^+, a_{n+2j+2}^-)$ pour $0 \leq 2j \leq d-n-1$. Toute orbite contient donc $\{a_1^+,\ldots,a_m^+\}$ si $m<d$, $\{a_1^+,\ldots,a_d^+\}$ ou $\{a_1^+,\ldots,a_{d-1}^+, a_d^-\}$ si $m=d$.

■

§2. Les intersections $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ dans les variétés de Prym.

On a déjà remarqué (IV.A.5.1 et IV.B.1.1) que si $\pi : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}/\sigma=C$ est un revêtement de courbes lisses irréductibles de variété de Prym (P,Ξ) et si r et s sont deux points de $\tilde{C}$ avec $r\neq\sigma s$, l'intersection $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ est isomorphe à la sous-variété spéciale associée à $L=\omega_C(-\pi r-\pi s)$.

C'est encore vrai si π est un revêtement admissible, si $\tilde{C}$ et C sont stables et si r et s sont lisses sur $\tilde{C}$.

Lorsque x lisse sur $\tilde{C}$ tend vers un point singulier r de $\tilde{C}$, l'élément $\sigma_{\tilde{C}}(x-\sigma x)$ de P^- tend vers $\epsilon(r)$, élément d'ordre deux de P^-. On est donc amené à étudier les intersections $\Xi.\Xi_{\epsilon(r)+s-\sigma s}$, où r est singulier et s lisse sur $\tilde{C}$.

Lemme 2.1.

Soit $N \xrightarrow{n} C$ la normalisation de C en r. Alors $\Xi.\Xi_{\epsilon(r)+s-\sigma s}$ est la sous-variété spéciale associée à l'application rationnelle $\phi_{|\omega_N(-\pi s)|}\circ n^{-1}$.

■ Il suffit de montrer qu'on a :

$$\Xi.\Xi_{\epsilon(r)+s-\sigma s} = \{L\in P \mid \exists u\in H^0(L) \quad u\neq 0 \quad u(s)=u(r)=0\}.$$

Soient $r=w_1,w_2,\ldots,w_n$ les points singuliers de $\tilde{C}$ et L_r le faisceau inversible sur $\tilde{C}$ associé à $\epsilon(r)$. On pose $a=\epsilon(r)+s-rs\in P$. On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow H^0(L\otimes L_r^{-1}(\sigma s-s)) \longrightarrow H^0(\tilde{n}^*L(\sigma s-s)) \longrightarrow \mathbb{C}_{w_1}\oplus\mathbb{C}_{w_2}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}_{w_n}$$
$$u \longmapsto (u(p_1)+u(q_1),u(p_2)-u(q_2),\ldots)$$

$$0 \longrightarrow H^0(L(\sigma s-s)) \longrightarrow H^0(\tilde{n}^*L(\sigma s-s)) \longrightarrow \mathbb{C}_{w_1}\oplus\mathbb{C}_{w_2}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}_{w_n}$$
$$u \longmapsto (u(p_1)-u(q_1),u(p_2)-u(q_2),\ldots),$$

où p_j et q_j sont les points de la normalisée de $\tilde{C}$ au-dessus de w_j.

Soit d'abord $L\in P$ avec $u\in H^0(L)$ non nulle, nulle en $r=w_1$ et s. Ce u définit une section de $L\otimes L_r^{-1}(-s)$ donc $h^0(L\otimes L_r^{-1}(\sigma s-s))\geq 1$. Comme $L\otimes L_r^{-1}(\sigma s-s)$ est dans P, il est par conséquent dans Ξ, et $L\in\Xi_a$.

De même, $h^0(L)\geq 1$ implique $L\in\Xi$. Réciproquement, si $L\in\Xi.\Xi_a$, on a $h^0(L)\geq 2$ et $h^0(L\otimes L_r^{-1}(\sigma s-s))\geq 2$. Si $h^0(L(\sigma s-s))\geq 3$, il suffit de prendre pour u une section nulle en σs et r. Si $h^0(L(\sigma s-s))=1$ alors σs est fixe dans $|L(\sigma s-s)|$. Soit u une section de $L\otimes L_r^{-1}(\sigma s-s)$ nulle en r. On a :

$$\tilde{n}^*u\in H^0(\tilde{n}^*L(\sigma s-s)) \quad \text{avec} \quad \tilde{n}^*u(p_1)=\tilde{n}^*u(q_1)=0$$
$$\tilde{n}^*u(p_j)=\tilde{n}^*u(q_j).$$

On définit ainsi une section de $L(\sigma s-s)$ nulle en r, et nulle en σs comme toutes les sections de $L(\sigma s-s)$. ■

On déduit alors du théorème 1.1 le critère suivant d'irréductibilité des intersections $\Xi.\Xi_{[r,s]}$, où on a noté, comme en IV.B, $[r,s]$ l'élément de P associé à $\sigma_{\tilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$ lorsque r est lisse sur $\tilde{C}$ et à $\sigma_{\tilde{C}}(s-\sigma s)\otimes L_r$ sinon (s est supposé lisse sur $\tilde{C}$).

Proposition 2.2.

Soit $\pi : \tilde{C}\longrightarrow C$ un revêtement admissible de courbes stables irréductibles, où C est non hyperelliptique de genre $g+1\geq 5$; soient r et s deux points de $\tilde{C}$ avec s lisse sur $\tilde{C}$ et $r\neq\sigma s$.

Si $\phi : C\longrightarrow \mathbb{P}^g$ est l'application canonique et Γ son image, on suppose que la projection $\Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-2}$ depuis la droite joignant $\phi(\pi r)$ à $\phi(\pi s)$ est birationnelle sur son image.

Alors l'intersection $\Xi.\Xi_{[r,s]}$ est intègre.

APPENDICE 4

QUELQUES RESULTATS SUR LES COURBES SUPERELLIPTIQUES

On rappelle qu'une structure superelliptique sur une courbe lisse C est une involution τ sur C telle que le quotient C/τ soit une courbe elliptique E. On notera p le morphisme $C \longrightarrow E$, $\sigma(-\delta) = \Lambda^2 p_* \mathcal{O}_C$ et $\Delta \in |2\delta|$ la ramification de p sur E (cf. I.2.6).

Une courbe superelliptique est une courbe admettant une structure superelliptique. Celle-ci est alors unique en genre ≥ 6 ([Sho2]), mais il peut y en avoir jusqu'à 5 en genre 5 ([Te]). En tout genre ≥ 2, il n'y en a qu'un nombre fini puisque le groupe d'automorphismes de la courbe est fini.

On a rassemblé dans ce paragraphe les résultats relatifs à ces courbes dont nous aurons besoin.

Proposition 1.

Soient τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 6$, $p : C \longrightarrow E$ le quotient de C par τ et $A \in \mathrm{Pic}^{g-1}E$ fixé. On pose :

$$Z = \{p^*M \otimes \sigma_C(D) \,|\, M \in \mathrm{Pic}^2 E,\ D \in C^{(g-5)},\ M^2 \otimes \sigma_E(p_*D) \simeq A\}\ .$$

Alors Z est irréductible de dimension g-5 et

$$\{a \in \mathrm{Pic}^0 C \,|\, Z + a \subset \Theta\} = \{\sigma(p^*e - x - y) \,|\, x, y \in C, e \in E\}.$$

■ L'irréductibilité de Z est conséquence de II.D.1.2.10 et l'inclusion $\supset$ est évidente.

Tout élément a de $\mathrm{Pic}^0 C$ peut s'écrire $a = p^*M^{-1} \otimes \sigma(D)$, où D est effectif de degré 2r. Si $2r \geq g+2$, on a $h^0(C,D) \geq 3$, de sorte que D est linéairement équivalent à $p^*N + D'$, où D' est effectif de degré $< 2r$.

Si $2r = g+1$, le diviseur ample Θ de $J^{g-1}C$ rencontre la courbe $a + p^*J^{r-1}E$, ce qui donne une écriture $a = p^*M^{-1} \otimes \sigma(D)$ avec D effectif de degré g-1.

On supposera donc $2r \leq g$, D p-simple (définition juste avant II.D.1.2.7) et $Z+a \subset \Theta$. Il suffit d'arriver à une contradiction si $r \geq 2$.

1) Cas $2r \leq g-2$.

Pour N générique dans $Pic^r E$, il existe $G \geq 0$ sur C tel que :

i) D+G soit p-simple

ii) $A \simeq N^2 \otimes \sigma(p_* G)$.

Le faisceau inversible $L = p^* N \otimes \sigma(G)$ est alors dans Z puisque $r \geq 2$. On a donc

$$H^0(L \otimes a) = H^0(p^*(N \otimes M^{-1}) \otimes \sigma(G+D)) \neq 0.$$

Grâce à i), on a une suite exacte (II.D.1.2.7) :

$$0 \longrightarrow H^0(N \otimes M^{-1}) \longrightarrow H^0(L \otimes a) \longrightarrow H^0(N \otimes M^{-1} \otimes \sigma(p_* G + p_* D - \delta))$$
$$\simeq H^0(M \otimes N^{-1} \otimes Nma \otimes A \otimes \sigma(-\delta)),$$

de sorte que soit $N \simeq M$, soit $N \simeq M \otimes Nma \otimes A \otimes \sigma(-\delta)$; c'est impossible puisque M est fixé et que N est variable.

2) Cas $2r = g-1$.

On prend N tel que $N^2 \simeq A$. Comme ci-dessus, $L = p^* N \in Z$ entraîne $L \otimes a \in \Theta$ et $N \simeq M$ ou $N \simeq M \otimes Nma \otimes A \otimes \sigma(-\delta) \simeq M \otimes \alpha$. Or on peut remplacer N par $N \otimes \epsilon$ pour tout $\epsilon \in Pic^0 E[2]$. Comme $\bigcap_{\epsilon \in Pic^0 E[2]} \{M \otimes \epsilon, M \otimes \epsilon \otimes \alpha\} = \emptyset$, on a une contradiction.

3) Cas $2r = g$.

Soit $x \in Supp\ D$, $G = \tau x$. On choisit N de façon que $N^2 \otimes \sigma(px) \simeq A$. On a alors $\deg N = r-1 \geq 2$ et $L = p^* N \otimes \sigma(\tau x) \in Z$. Or $L \otimes a = p^*(N \otimes M^{-1} \otimes \sigma(px)) \otimes \sigma(E)$ avec $E = D-x$. La même suite exacte que ci-dessus montre que, comme $H^0(L \otimes a) \neq 0$, on a $N \simeq M(-px)$ ou $N \simeq M(-px) \otimes Nma \otimes A \otimes \sigma(-\delta)$. On termine comme précédemment, en changeant N en $N \otimes \epsilon$, avec $\epsilon^2 \simeq \sigma_E$.

■

On montre de la même façon le résultat suivant :

Proposition 2.

Soit τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 3$ (resp. $g \geq 5$) et soit $p : C \longrightarrow E$ le quotient de C par τ. On pose, pour $j = 1, 2$:

$$T_j = \{p^*M \otimes \sigma_C(D) \mid M \in \mathrm{Pic}^j E,\ D \in C^{(g-1-2j)}\}\ .$$

Alors T_1 (resp; T_2) est irréductible de dimension $g-2$ (resp. $g-4$) et :

$$\{a \in \mathrm{Pic}^0 C \mid T_1 + a \subset \Theta\} = p^*\mathrm{Pic}^0 E$$

$$(\text{resp. } \{a \in \mathrm{Pic}^0 C \mid T_2 + a \subset \Theta\} = \{\sigma(p^*e - x - y) \mid x, y \in C, e \in E\}).$$

Proposition 3.

Soient τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 5$, $p : C \longrightarrow E$ le quotient de C par τ et $a \in \mathrm{Pic}^0 C$, $A \in \mathrm{Pic}^{g-1} E$ fixés. On pose :

$$Y = \{L \in \Theta.\Theta_a \mid \mathrm{Nm}L \simeq A\}.$$

Alors :

i) Y est de dimension pure $g-3$ sauf s'il existe $\alpha \in \mathrm{Pic}^0 E$ avec $a = p^*\alpha$, $A = \alpha \otimes \sigma(\delta)$. Dans ce cas, Y est irréductible de dimension $g-2$.

ii) Si $a = \sigma(-p^*e + x + y)$ avec $x, y \in C$, $e \in E$, Y est irréductible sauf si on est dans l'un des cas suivants :

- $e = px$ ou py, de sorte que $a \in C - C$
- $A = \sigma(px - e + \delta)$ ou $\sigma(py - e + \delta)$
- $g = 5$, x et y sont des points de ramification de p et $A = \sigma(2px + 2py)$ ou $\sigma(px + 3py)$ (avec dans ce dernier cas $2px \equiv 2py$).

■ Par amplitude des diviseurs Θ et Θ_a, et puisque $g \geq 3$, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ rencontre tout translaté de $K = \{L \mid \mathrm{Nm}L \simeq A\}$. En particulier, elle ne peut être contenue dans K, de sorte que si $Y = \Theta \cap \Theta_a \cap K$ est de dimension $g-2$, $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible. On déduit alors de II.B.1 qu'on est dans l'un des cas suivants :

- $a \in C - C$. On vérifie que Y a en fait deux composantes irréductibles de dimension $g-3$.
- $a = p^*\alpha$, auquel cas :

$$\Theta.\Theta_a = \{L \in \Theta \mid \mathrm{Nm}L \simeq \alpha \otimes \sigma(\delta)\} \cup \{\sigma(p^*x + D) \mid x \in E,\ D \in C^{(g-3)}\}\ .$$

Si $A \simeq \alpha \otimes \sigma(\delta)$, Y est irréductible de dimension $g-2$; sinon il est irréductible de dimension $g-3$.

- $g=5$, $q : C \longrightarrow F$ est une autre structure superelliptique sur C et $a=q^*\beta$, $\beta\in \mathrm{Pic}^0 F$. L'intersection $\Theta.\Theta_a$ s'écrit alors comme ci-dessus et il est clair que Y est (réductible) de dimension $g-3$.

On supposera à partir de maintenant que $a= \sigma(-p^*e+x+y)$ avec :

- $a\notin C-C$, ce qui entraîne $e\neq px$ et $e\neq py$
- $a\notin p^*\mathrm{Pic}^0 E$, ce qui entraîne $y\neq \tau x$.

On suppose d'abord que $A= \sigma(px-e+\delta)$. On a alors $a = p^*(A(-\delta)) \otimes \sigma(y-\tau x)$. Si $L\in\Theta$, $\mathrm{Nm}L = A$, on a $L \otimes \tau^*L \simeq p^*A \Longrightarrow \omega_C\otimes L^{-1}\simeq \tau^*L \otimes p^*(A^{-1}(\delta)) \Longrightarrow H^0(L \otimes p^*(A^{-1}(\delta))) \neq 0$. Si $L\in Y$, on a donc :

$$\begin{cases} H^0(p^*(A^{-1}(\delta))\otimes L) \neq 0 \\ H^0(a^{-1}\otimes L) = H^0(p^*(A^{-1}(\delta))\otimes L(\tau x-y)) \neq 0. \end{cases}$$

L'ensemble Y est donc réunion de :

$$\{L \mid H^0(p^*(A^{-1}(\delta))\otimes L(-y))\neq 0\} = \{L \mid H^0(\omega_C\otimes L^{-1}(-\tau y))\neq 0\}$$

et $$\{L \mid h^0(p^*(A^{-1}(\delta))\otimes L(\tau x))>1\} = \{L \mid H^0(L(-x))\neq 0\}.$$

On fera donc l'hypothèse supplémentaire :

- $A \neq \sigma(px-e+\delta)$ et $A \neq \sigma(py-e+\delta)$.

On regarde maintenant l'intersection de Y avec $W= \{\sigma(x+D) \mid D\in C^{(g-2)}\}$. Soit $\sigma(x+D)\in Y$; si $\tau y+D$ est p-simple, on a:

$$\sigma(x+D)\otimes a^{-1} = \sigma(D+\tau y+p^*(e-py))$$

$$0 \longrightarrow H^0(e-py)=0 \longrightarrow H^0(\sigma(x+D)\otimes a^{-1}) \longrightarrow H^0(e-py+p_*D+py-\delta)$$
$$= H^0(e+A-px-\delta)=0,$$

de sorte que :

$$Y\cap W = \{\sigma(x+y+D) \mid D\in C^{(g-3)}, \sigma(p_*D) \simeq A(-px-py)\}$$
$$\cap\{\sigma(x+p^*m+D) \mid D\in C^{(g-4)}, m\in E, \sigma(p_*D+2m) \simeq A(-px)\}.$$

Ces deux ensembles sont irréductibles de dimension $g-4$. Soit $L_o = \sigma(x+y+\tau y+D)$ un élément de leur intersection avec $D+x$ et $D+\tau y$ p-simples. Si $g\geq 6$, ce choix est toujours possible puisque $p_*D \in |A(-px-2py)|$, système linéaire de degré $g-4$, est donc sans point base.

Pour $g\geq 5$, c'est encore possible sauf si on est dans l'un des cas suivants :

- $A \simeq \sigma(2px+2py)$, x point de ramification de p.
- $A \simeq \sigma(px+3py)$, y point de ramification de p.

Comme on peut toujours échanger les rôles de x et y, on voit facilement que si le choix de L_o n'est pas possible, alors x et y sont des points de ramification de p et $A \in \{\sigma(2px+2py), \sigma(px+3py)\}$.

C'est le cas exceptionnel mentionné dans l'énoncé de la Proposition. On suppose à partir de maintenant que le choix de L_o est possible et on le fait. On a alors :

$$\omega_C \otimes L_o^{-1} \simeq p^*(A^{-1}(\delta)) \otimes \tau^* L_o \simeq p^*(A^{-1}(\delta+py)) \otimes \sigma(\tau D+\tau x)$$
$$L_o \otimes a^{-1} \simeq \sigma(p^* e+\tau y+D)$$
$$\omega_C \otimes L_o^{-1} \otimes a \simeq p^*(A^{-1}(\delta-e+py+px)) \otimes \sigma(y+\tau D).$$

L'hypothèse $D+x$ et $D+\tau y$ simples permet d'assurer (utiliser II.D.1.2.7) que $h^o(L_o) = h^o(L_o \otimes a^{-1}) = 1$.

Les diviseurs Θ et Θ_a sont donc lisses en L_o.

Les hyperplans $T_{L_o}\{L \mid \mathrm{Nm}L = A\}$, $T_{L_o}\Theta$, $T_{L_o}\Theta_a$ de $T_L JC \simeq H^o(C,\omega_C)^*$ correspondent respectivement aux éléments suivants de $H^o(C,\omega_C) \simeq \mathbb{C}r \oplus p^* H^o(E,\delta)$ (où r est une section de $\sigma(p^*\delta) \simeq \omega_C$ de diviseur la ramification de p) :

- r
- $p^*[px+p_*D+py+u]$
- $p^*[py+p_*D+e+v]$

avec $|A^{-1}(\delta+py)| = \{u\}$, $|A^{-1}(\delta-e+py+px)| = \{v\}$.

Comme nos hypothèses entraînent que $e \notin \{px, py, |A^{-1}(\delta+py)|\}$, ces 3 hyperplans sont linéairement indépendants et Y est donc lisse en L_o.

Pour montrer que Y est irréductible, il suffit maintenant de montrer que toute composante Z de Y contient L_o. Comme L_o est dans l'intersection des deux composantes de $Y \cap W$ et qu'elles sont de dimension $g-4$, il suffit de montrer que :

$$\dim(Z \cap W) \geq g-4.$$

Soit $\phi : C^{(g-1)} \longrightarrow \Theta$ l'application canonique, $C_x^{(g-2)} = \{D \in C^{(g-1)} \mid D \geq x\}$ et $\varphi : C_x^{(g-2)} \longrightarrow W$ la restriction de ϕ. Une application facile de (II.D.1.2.7) montre que :

$$\begin{aligned} U &= \{z \in C_x^{(g-2)} \mid \dim \varphi^{-1}(\varphi z) \geq 1\} \\ &\simeq \{D \in C^{(g-2)} \mid h^o(D) \geq 2\} \\ &= \{p^*e_1 + p^*e_2 + G \mid e_1, e_2 \in E,\ G \in C^{(g-6)}\} \end{aligned}$$

est de dimension $g-4$ si $g \geq 6$, vide si $g=5$. L'application :

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathrm{Pic}^{g-1}E \\ D &\longmapsto \sigma(p_*D) \end{aligned}$$

est surjective. En particulier, si $\tilde{Z}$ est une composante de $\phi^{-1}(Y)$ qui domine Z, on aura :

$$\dim U \cap \tilde{Z} \leq g-5$$

Or $C_x^{(g-2)}$ est un diviseur de Cartier ample sur $C^{(g-1)}$ ([Fu-L]). On a donc :

$$\dim C_x^{(g-2)} \cap \tilde{Z} \geq \dim \tilde{Z} - 1 \geq g-4.$$

Cette inégalité, jointe à la majoration précédente de la dimension de $U \cap \tilde{Z}$, entraîne :

$$\dim W \cap Z = \dim \varphi(C_x^{(g-2)} \cap \tilde{Z}) \geq g-4,$$

ce qui termine la démonstration de l'irréductibilité de Y. ■

BIBLIOGRAPHIE

[An-M] A. ANDREOTTI, A. MAYER.- On period relations for abelian integrals on algebraic curves. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), 189-238.

[Ar] E. ARBARELLO.- Fay's Trisecant Formula and a Characterization of Jacobian Varieties. A paraître.

[A-C-G-H 1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P.A. GRIFFITHS, J. HARRIS.- Geometry of Algebraic Curves, I. Springer Verlag, New York.

[A-C-G-H 2] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P.A. GRIFFITHS, J. HARRIS.- Geometry of Algebraic Curves, II. A paraître.

[Ar-D 1] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI.- On a set of equations characterizing Riemann matrices. Ann. of Math. 120, 119-140 (1984).

[Ar-D 2] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI.- Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces. A paraître.

[Ba] W. BARTH.- Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und Komplexprojektiven Räumen. Invent. Math. 5 (1968), 42-62.

[Be 1] A. BEAUVILLE.- Prym varieties and the Schottky problem. Invent. Math. 41 (1977), 149-196.

[Be 2] A. BEAUVILLE.- Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 10 (1977), 309-391.

[Be 3] A. BEAUVILLE.- Sous-variétés spéciales des variétés de Prym. Comp. Math. 45 (1982), 357-383.

[Be-D 1] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE.- Une relation entre deux approches du problème de Schottky. Invent. Math. 86 (1986), 195-207.

[Be-D 2] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE.- Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym. A paraître.

[Ci] C. CILIBERTO.- On a proof of Torelli's Theorem. Ravello. Springer Lecture Notes 997 (1983), 113-123.

[Cl-G] H. CLEMENS, P. GRIFFITHS.- The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. of Math. 95 (1972), 281-356.

[D 1] O. DEBARRE.- Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes. Comp. Math. 58 (1986), 3-11.

[D 2] O. DEBARRE.- Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3. A paraître.

[D 3] O. DEBARRE.- Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti-Mayer. A paraître.

[De] P. DELIGNE.- Le lemme de Gabber. In séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell. Exposé V, Astérisque 127 (1985).

[De-M] P. DELIGNE, D. MUMFORD.- The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. Math. IHES, Paris, 36 (1969), 75-109.

[Do] R. DONAGI.- The tetragonal construction. Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 181-185.

[Do-S] R. DONAGI, R.C. SMITH.- The structure of the Prym map. Acta Math. 146 (1981), 25-102.

[Du] B.A. DUBROVIN.- Theta functions and non-linear equations. Russian Math. Surveys 36, n° 2 (1981), 11-92.

[Fr-S 1] R. FRIEDMAN, R. SMITH.- The generic Torelli theorem for the Prym map. Invent. Math. 67 (1982), 473-490.

[Fr-S 2] R. FRIEDMAN, R. SMITH.- Degenerations of Prym Varieties and Intersections of Three Quadrics. Invent. Math. 85 (1986), 615-635.

[Fu-L] W. FULTON, R. LAZARSFELD.- On the connectedness of degeneracy loci and special divisors. Acta Math. 146 (1981), 271-283.

[Gi] D. GIESEKER.- Stable Curves and Special Divisors : Petri's Conjecture. Invent. Math. 66 (1982), 251-275.

[Gr 1] M. GREEN.- Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve. Invent. Math. 75 (1984), 85-104.

[Gr 2] M. GREEN.- Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. J. Diff. Geom. 19 (1984), 125-171.

[Gr-L] M. GREEN, R. LAZARSFELD.- On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve. Invent. Math. 83 (1986), 73-90.

[Gri-H] P. GRIFFITHS, J. HARRIS.- Principles of Algebraic Geometry. Wiley-Interscience New-York (1978).

[Gro 1] A. GROTHENDIECK.- Eléments de Géométrie Algébrique. Publ. IHES.

[Gro 2] A. GROTHENDIECK.- Techniques de construction en Géométrie Analytique IX. Quelques problèmes de modules. Séminaire H. Cartan, 13e année, Exposé n° 16 (1960/61).

[Gro 3] A. GROTHENDIECK.- Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2). Masson et North-Holland, Paris-Amsterdam (1968).

[H] J. HARRIS.- Theta-characteristics on algebraic curves. Trans. Amer. Math. Soc. 271 (1982), 611-638.

[H-M] J. HARRIS, D. MUMFORD.- On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Curves. Invent. Math. 67 (1982), 23-86.

[Ha] R. HARTSHORNE.- Algebraic Geometry. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1977).

[Ig 1] J.I. IGUSA.- A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. Math. Ann. 168 (1967), 228-260.

[Ig 2] J.I. IGUSA.- Theta functions. Grundlehren der Math. Wiss., 194 Springer-Verlag (1972).

[Ig 3] J.I. IGUSA.- On the irreducibility of Schottky's divisor. J. Fac. Sci. Tokyo 28 (1981), 531-545.

[Ke-L] G. KEMPF, D. LAKSOV.- The determinantal formula of Schubert calculus. Acta Math. 132 (1974), 153-162.

[Kl-L] S. KLEIMAN, D. LAKSOV.- Another proof of the existence of special divisors. Acta Math. 132 (1974), 163-176.

[M] I.G. MACDONALD.- Symmetric products of an algebraic curve. Topology 1 (1962), 319-343.

[Ma] H.H. MARTENS.- On the variety of special divisors on a curve. J. Reine Angew. Math. 227 (1967), 111-120.

[Mas] L. MASIEWICKI.- Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five. Trans. Amer. Math. Soc. 222 (1976), 221-240.

[Mu 1] D. MUMFORD.- On the Kodaira Dimension of the Siegel Modular Variety. Springer Lecture Notes 997, Springer-Verlag, New York (1983), 348-375.

[Mu 2] D. MUMFORD.- Prym Varieties I. Contributions to Analysis. Acad. Press, New York (1974), 325-350.

[Mu 3] D. MUMFORD.- Theta characteristics of an algebraic curve. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4 (1971), 181-192.

[Mu 4] D. MUMFORD.- Varieties defined by Quadratic Equations. C.I.M.E., Varenna, 1969.

[Mu 5] D. MUMFORD.- On the equations defining abelian varieties I. Invent. Math. 1 (1966), 287-354.

[Mu 6] D. MUMFORD.- Abelian Varieties. Tata Studies in Math. 5, Oxford (1970).

[Mu 7] D. MUMFORD.- Analytic construction of degenerating abelian varieties. Comp. Math. 24 (1972), 239-272.

[Mu 8] D. MUMFORD.- Curves and their Jacobians. Ann Arbor, The University of Michigan Press (1978).

[Mu 9] D. MUMFORD.- Varieties defined by quadratic equations (with an appendix by G. Kempf). Questions on algebraic varieties, 29-100, ed. Cremonese, Roma (1970).

[Mu 10] D. MUMFORD.- Tata lectures on Theta II. Progress in Math. 43, Birkhäuser, Boston-Bâle-Stuttgart (1984).

[Na] Y. NAMIKAWA.- A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. Math. Ann. 221 (1976), 97-142 et 201-242.

[Ra] Z. RAN.- On subvarieties of abelian varieties. Invent. Math. 62 (1981), 459-479.

[Re] S. RECILLAS.- Jacobians of curves with g_4^1's are Prym varieties of trigonal curves. Bol. Soc. Mat. Mexicana 19 (1974), 9-13.

[SD] B. SAINT-DONAT.- On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. Math. Ann. 206 (1973), 157-175.

[Sh] T. SHIOTA.- Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Invent. Math. 83 (1986), 333-382.

[Sho 1] V.V. SHOKUROV.- Prym varieties : Theory and Applications. Math. USSR Izvestja, 23 (1984), N° 1.

[Sho 2] V.V. SHOKUROV.- Distinguishing Prymians from Jacobians. Invent. Math. 65 (1981), 209-219.

[Sm-V] R. SMITH, R. VARLEY.- Components of the locus of singular theta divisors of genus five. In Algebraic Geometry Sitges 1983. Springer Lecture Notes 1124, Springer-Verlag (1983), 338-416.

[Te] M. TEIXIDOR.- For which Jacobi varieties is Sing Θ reducible ? J. Reine Angew. Math. 354 (1984), 141-149.

[Tj 1] A.N. TJURIN.- Five Lectures on three-dimensional varieties. Russian Math. Surveys 27 (1972), 1-53.

[Tj 2] A.N. TJURIN.- On the Intersections of Quadrics. Russian Math. Surveys 30 (1975).

[Tj 3] A.N. TJURIN.- The Geometry of the Poincaré Theta-Divisor of a Prym Variety. Math. USSR Izvestja 9 (1975), 951-986.

[V] B. VAN GEEMEN.- The Schottky Problem and Moduli Spaces of Kummer Varieties. Thesis, University of Utrecht (1985).

[Va] R. VARLEY.- Weddle's surfaces, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety. Am. J. of Math. 108 (1986), 931-952.

[W] A. WEIL.- Zum Beweis des Torellischen Satzes. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. 2 (1957), 33-53.

[We 1] G. WELTERS.- A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 18 (1985), 671-683.

[We 2] G. WELTERS.- The surface C-C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions. Acta Math. 157 (1986), 1-22.

[We 3] G. WELTERS.- Abel-Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds. Mathematisch Centrum, Amsterdam (1981).

[We 4] G. WELTERS.- Recovering the curve data from a general Prym variety. Amer. J. of Math. A paraître.

[We 5] G. WELTERS.- Polarized abelian varieties and the heat equation. Comp. Math. 49 (1983), 173-194.

[We 6] G. WELTERS.- A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties. Invent. Math. 74 (1983), 437-440.

[We 7] G. WELTERS.- A criterion for Jacobi varieties. Ann. of Math. 120 (1984), 497-504.

[We 8] G. WELTERS.- On flexes of the Kummer variety. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, Series A, 86 ; Indagationes Math. 45 (1983), 501-520.

[Z] O. ZARISKI.- On a theorem of Severi. Amer. J. of Math. 50 (1928), 87-92.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION..... 5

CHAPITRE I

Terminologie et notations..... 9

CHAPITRE II

Conjecture de la trisécante, ensembles N^g_{g-4} et variétés de Prym.

A. Introduction..... 16
B. Réductibilité des intersections $\Theta.\Theta_a$ pour les jacobiennes..... 21
C. Le problème de Schottky. Une condition nécessaire de réductibilité de $\Theta.\Theta_a$ dans une variété abélienne (en collaboration avec A. Beauville)..... 29
D. Variétés de Prym éléments de N^g_{g-4} pour $g\geq 5$ 46
E. Compléments sur les variétés de Prym éléments de N^g_{g-4} 78
F. La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym..... 88

CHAPITRE III

Annulation de thêtaconstantes sur les variétés abéliennes de dimension 4..... 134

CHAPITRE IV

Problème de Schottky pour les variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6}.

A. Variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6} 148
B. Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym (en collaboration avec A. Beauville)..... 185

APPENDICE 1

Construction de composantes irréductibles de N^g_k 197

APPENDICE 2

Variétés abéliennes polarisées de degré deux et variétés de Prym..... 213

APPENDICE 3

Sous-variétés spéciales et intersections $\Xi.\Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ dans les variétés de Prym..... 228

APPENDICE 4

Quelques résultats sur les courbes superelliptiques..... 232

BIBLIOGRAPHIE..... 238