

THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

SMAÏL DJEBALI

Problèmes mathématiques de flammes laminaires non adiabatiques,
1987

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de:

DOCTEUR DE 3^{ÈME} CYCLE

PAR:

DJEBALI Smaïl

— x —

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

OPTION: ANALYSE NUMERIQUE

SUJET: PROBLEMES MATHEMATIQUES DE FLAMMES LAMINAIRES
NON ADIABATIQUES

Soutenue le: 15/12/1987 devant la comission d'examen composée du

JURY:

MM. R. TEMAM

Président

F. MIGNOT

Examineur

J.-C. SAUT

"

B. SCHEURER

"

à la mémoire de mon frere défunt

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur R.TEMAM qui m'a accueilli au laboratoire d'Analyse Numérique d'Orsay et qui me fait maintenant l'honneur de présider le jury.

Monsieur B.Scheurer a proposé, orienté puis suivi cette thèse avec beaucoup de patience. Par son cours de D.E.A., il m'a permis de m'initier aux problèmes mathématiques de la combustion et d'entreprendre ce travail. Qu'il puisse trouver ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier chaleureusement MM. les professeurs F.Mignot et J.-C.Saut qui ont bien voulu participer au jury de cette thèse.

Sans oublier tous ceux avec qui j'ai pu avoir de profitables discussions, je tiens tout particulièrement à exprimer toute ma sympathie envers J.-M. Rakotoson dont les conseils m'ont été frutueux et stimulants.

Enfin, je ne saurais sincèrement oublier ma famille et mes proches amis pour leur soutien moral et leurs encouragements.

MATHEMATICAL PROBLEMS OF NON ADIABATIC LAMINAR FLAMES

ABSTRACT :

The aim of this thesis is to study a system of two eigenvalue nonlinear differential equations .

This problem arises in the modeling of a premixed laminar flame moving in a long tube .

We consider a single step chemical reaction of n^{th} order :



and we allow the heat transfert between the flame and the tube walls.

In the limit of small Mach numbers, the one-dimensional travelling wave problem reduces after renormalization to a system of reaction-diffusion equations:

To find u the mixture temperature, v the reactant concentration, and h the heat-loss intensity solution of :

$$\begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u) . \\ -\Lambda v'' + cv' = -v^n f(u) . \end{cases} \quad \begin{cases} u(-\infty) = u(+\infty) = 0 \\ v(-\infty) = 1 ; v'(+\infty) = 0 \end{cases}$$

Then we analyse the asymptotic behaviour of the solutions as a small parameter ε goes to 0.

Lastly, we establish a rigorous singular perturbation analysis which yields a limit relationship between h and c .

SOMMAIRE

<u>CHAPITRE 0: -PRELIMINAIRES :</u>	<u>PAGE :</u>
0.1: INTRODUCTION DU PROBLEME:	0.4
0.2: NOTATIONS GENERALES ET RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE:	0.6
0.3: LES HYPOTHESES:	0.13
0.4: REMARQUES GENERALES SUR LES HYPOTHESES:	0.14
0.5: PRESENTATION DES RESULTATS:	0.16

1^{ÈRE} PARTIE : RESULTATS D'EXISTENCE

CHAPITRE I: - THEOREME D'EXISTENCE POUR $\Lambda = 1$ -

I.0: INTRODUCTION ET ENONCE DU RESULTAT PRINCIPAL:	I.23
I.1: PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION:	I.24
I.2: LEMMES PRELIMINAIRES:	I.25
I.3: ETUDE DU PROBLEME SUR $\mathbb{R}^-$:	
I.3.1: Problème posé sur un borné:	I.31
I.3.2: Passage à la limite:	I.33
I.3.3: Résultat d'unicité:	I.39

I.4: ETUDE DU PROBLEME SUR $\mathbb{R}^+$:	<u>PAGE :</u>
I.4.1: Principe de la démonstration:	I.44
I.4.2: Problème posé sur un borné et estimations à priori:	I.45
I.4.3: Calcul du degré topologique:	I.56
I.4.4: Résultat d'existence pour $(P_2)_a$:	I.78
I.4.5: Passage à la limite:	I.79
I.5: LE THEOREME PRINCIPAL:	I.81
I.6: CONDITION NECESSAIRE D'EXISTENCE:	I.82

CHAPITRE II: THEOREME D'EXISTENCE POUR $\wedge$ QUELCONQUE :

II.0: INTRODUCTION ET PRESENTATION DU RESULTAT ESSENTIEL:	II.88
II.1: ESTIMATIONS A PRIORI SUR UN BORNE DE $\mathbb{R}^+$:	II.90
II.2: RESULTAT D'EXISTENCE:	
II.2.1.: Equivalence avec un problème de point fixe:	II.95
II.2.2.: Calcul du degré topologique:	II.93
II.2.3.: Résultat d'existence pour $(P_2)_a$:	II.104
II.3: PASSAGE A LA LIMITE SUR LA TAILLE DU DOMAINE:	II.105
II.4: CONDITION NECESSAIRE D'EXISTENCE:	II.106

2^{ÈME} PARTIE: ANALYSE ASYMPTOTIQUE

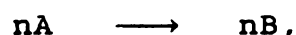
<u>CHAPITRE III: COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS :</u>	<u>PAGE :</u>
III.0: INTRODUCTION ET HYPOTHESES:	III.109
III.1: PRESENTATION DU RESULTAT ESSENTIEL:	III.110
III.2: LEMMES PRELIMINAIRES:	III.111
III.3: PASSAGE A LA LIMITE $\epsilon=0$:	III.123
III.4: ANNEXES:	III.128
<u>CHAPITRE IV: ANALYSE DE PERTURBATION SINGULIERE :</u>	
IV.0: INTRODUCTION ET HYPOTHESES:	IV.130
IV.1: PRESENTATION DES RESULTATS:	IV.132
IV.2: INVESTIGATION DE LA ZONE EXTERNE AMONT:	IV.138
IV.3: ANALYSE DE LA COUCHE INTERNE:	IV.153
IV.4: ETUDE DES SOLUTIONS DANS LA ZONE EXTERNE AVAL:	IV.164
IV.5: RELATION LIMITE ENTRE LES PARAMETRES h ET c :	IV.167
IV.6: ANNEXES:	IV.172
<u>BIBLIOGRAPHIE:</u>	B.178

P R E L I M I N A I R E S

C H P I T R E : 0

0.1. INTRODUCTION DU PROBLEME :

On s'intéresse dans ce travail à certains aspects mathématiques d'un modèle de flamme laminaire, prémélangée, en régime stationnaire, s'appuyant sur un brûleur refroidi placé à l'origine d'un tube. On considère une cinétique chimique simplifiée en une réaction simple consommant un seul réactant, irréversible, d'ordre n et du type :



où A est le réactant, B le produit et $n \geq 1$, un entier.

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, des espèces chimiques et les équations d'états conduisent à un système d'équations assez complexes. L'écoulement étant supposé nettement subsonique, ie le nombre de Mach (rapport de la vitesse de l'onde à la vitesse du son) étant petit, on fait les hypothèses classiques de l'approximation de la combustion: écoulement quasi-isobare sans viscosité, ni d'effet de thermodiffusion (cf [0.3], [C.3], [A.6]). Pour un écoulement supposé monodimensionnel, on cherche des solutions particulières de type ondes planes (ou ondes de déflagration), c'est-à-dire $f(x+V_0 t)$ où V_0 est la vitesse de l'onde.

Dans le cas où les pertes de chaleur sont considérées négligeables, la structure de la flamme est déterminée par la donnée de la température u , de la concentration du réactant v et du flux massique c . Ces trois quantités vérifient, après renormalisation, le système d'équations différentielles suivant (cf [A.5]):

Trouver 2 fonctions u et v à valeurs dans $(0,1)$ et un réel $c > 0$ satisfaisant le système :

$$\left(P_{ad} \right) \quad (0.1) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) & \text{(Equation de l'énergie)} \\ -\Lambda v'' + cv' = -v^n f(u). & \text{(Loi de Fick)} \end{cases}$$

lequel est associé aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Gaz frais :} & (0.2) \end{array} \right\} \begin{cases} u(-\infty) = 0. \\ v(+\infty) = 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Gaz brulés :} & (0.3) \end{array} \right\} \begin{cases} u(+\infty) = 1. \\ v(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Le paramètre Λ représente l'inverse du nombre de Lewis ($\Lambda = 1/Le$)

L'application f tient compte de la loi d'Arrhénius et d'un paramètre $\epsilon > 0$ (proportionnel à l'inverse de l'énergie d'activation réduite). Ce terme de réaction f pose un problème à $(-\infty)$, appelé: « difficulté de la frontière froide ». Nous ne reviendrons pas sur cette question sur laquelle beaucoup a été dit (cf [A.5], [A.11], [O.3], [O.21]). Cependant on la contourne en introduisant, par exemple, une température $\theta \in]0,1[$ dite température d'ignition. Ce fut le cas de l'étude du système (P_{ad}) par BERESTYCKI, NICOLAENKO et SCHEURER (cf [A.4], [A.5]).

M.MARION a également étudié ce système sans température d'ignition, mais avec une hypothèse différente sur f ; elle a obtenu des résultats différents (cf [A.15]).

On envisage, dans ce travail, d'étudier un modèle global qui simule l'absorption de chaleur par les parois du tube; ceci se traduit par l'introduction, dans l'équation d'énergie, d'un terme de perte.

On obtient alors le problème non adiabatique suivant :

Etant donnée une constante positive c , déterminer u et v deux fonctions à valeur dans $(0,1)$ et une constante positive h solution de :

$$(P_{na}): \quad (0.4) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\ -\Lambda v'' + cv' = -v^n f(u) . \end{cases}$$

où h représente l'intensité des pertes thermiques dans les gaz brûlés

Quant aux conditions aux limites elles s'obtiennent tout naturellement :

-En amont (gaz frais):

Comme il s'agit de flamme prémélangée, les réactants sont préalablement mélangés et brûlés, lorsque le mélange atteint une température assez élevée; on suppose donc qu'à cette température, la flamme se propage dans un milieu au repos constitué uniquement par les réactants purs (A).

On a donc :

$$(0.5) \quad \begin{cases} u(-\infty) = 0. \\ v(-\infty) = 1. \end{cases}$$

-En aval (gaz brûlés):

La température est redescendue, par l'effet des pertes à la température des parois du tube, mais rien ne fixe à priori la composition finale du mélange. On écrit seulement que la réaction est totale. D'où les conditions aux limites :

$$(0.6) \quad \begin{cases} u(+\infty) = 0. \\ v''(+\infty) = 0. \end{cases}$$

0.2 : NOTATIONS GENERALES ET RAPPEL D'ANALYSE FONCTIONNELLE :

Dans cette section, nous allons rappeler certains résultats d'analyse fonctionnelle que nous aurons l'occasion d'évoquer dans cette thèse.

0.2.1 :Espaces fonctionnels :

soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1°/ On désigne par $L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $L^\infty(I)$) l'espace des classes des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (resp essentiellement bornées) sur I à valeurs réelles. Muni de la norme:

$$\|u\| = \left(\int_I |u(x)|^p \right)^{1/p} \text{ pour } p < \infty, \quad \left(\text{resp. : } \|u\|_{L^\infty} = \sup_I \text{ess} |u(x)| \right),$$

l'espace $L^p(I)$ (resp. $L^\infty(I)$) est un espace de Banach.

Pour $p=2$, $L^2(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$((u, v))_0 = \int_I u(x) v(x) dx$$

On notera sa norme: $\|u\| = \left(\int_I |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

2°/ L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ (m entier ≥ 0 et $1 \leq p < \infty$) est l'espace des fonctions de $L^p(I)$, dont les dérivées au sens des distributions d'ordre inférieur ou égal à m sont dans $L^p(I)$.

C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{0 < |k| \leq m} \|D^k u\|_{L^p(I)}.$$

Pour $p=2$, $W^{m,p}(I) = H^m(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire:

$$((u, v))_m = ((u, v))_0 + \sum_{0 < |k| \leq m} ((D^k u, D^k v))_0$$

3°/ Les immersions de Sobolev :

a/ Théorème de Peetre-Sobolev :

Soit $m \geq 0$. Alors les injections suivantes sont continues :

Si: $m < 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow L^p(I)$,	avec $1 \leq p \leq 2/(1-2m)$
Si: $m = 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow L^p(I)$,	avec $1 \leq p < +\infty$
Si: $m > 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow L^p(I)$,	avec $1 \leq p \leq +\infty$

b/ Théorème de Sobolev :

Les injections suivantes sont continues :

Si: $1/2 < m < 3/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{I})$,	$\forall 0 < \alpha \leq m - 1/2$.
Si: $m = 3/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{I})$,	$\forall 0 < \alpha < 1$.
Si: $m > 3/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{I})$.	

Enfin si $m > 1/2$ et $(m - 1/2)$ non entier, alors:

$$H^m(I) \hookrightarrow C^k(\bar{I}) , \forall k < m - 1/2.$$

c/ Théorèmes de compacité (Rellich-Kondrachov):

Soit $m \geq 0$. Alors les injections suivantes sont compactes :

Si: $m < 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow L^q(I)$,	si $1 \leq q \leq 2/(1-2m)$
Si: $m = 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow L^q(I)$,	$\forall q > 1$.
Si: $m > 1/2$,	$H^m(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$.	

En particulier l'injection :

$$H^1(I) \hookrightarrow L^2(I) \text{ est compacte.}$$

Enfin, l'injection :

$$H^m(I) \hookrightarrow C^{m-1,1/2}(\bar{I}) \text{ est compacte .}$$

4°/ Avant de clore cette section, nous rappelons l'espace des fonctions höldériennes d'exposant $\alpha \in]0,1[$:

$$\mathbb{C}^{0,\alpha}(\bar{I}) = \left\{ u \in \mathbb{C}(\bar{I}); \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in I}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

$$\mathbb{C}^{k,\alpha}(\bar{I}) = \left\{ u \in \mathbb{C}^k(\bar{I}); D^j u \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\bar{I}), \forall j/ 0 \leq |j| \leq k \right\}$$

enfin l'injection :

$$\mathbb{C}^{2,\alpha}(\bar{I}) \hookrightarrow \mathbb{C}^\alpha(\bar{I}) \text{ est compacte (Théorème d'Ascoli-Arzelà).}$$

Pour une étude plus détaillée des espaces de Sobolev, le lecteur pourra consulter R.A.ADAMS ([0.1]), ou J.L.LIONS et E.MAGENES ([0.12]). Dans la section suivante, nous allons indiquer quelques théorèmes généraux auxquels nous nous référons dans les chapitres qui suivent:

0.2.2 : Théorèmes fondamentaux:

1°/___Théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard_:

Soit un espace de Banach E , et $f : E \longrightarrow E$, une application lipschitzienne. Alors:

$\forall u_0 \in E, \exists ! u \in \mathbb{C}^1([0,\infty[; E)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), & \text{sur } [0,\infty[. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Pour la démonstration, on peut la trouver dans H.Brézis ([0.2]), par exemple.

2°/ Théorème du point fixe de Leray-Schauder :

(Cf P.H.Rabinowitz [C.6], par exemple)

Soit Ω un ouvert convexe borné d'un espace de Banach E et soit T une application compacte de $\bar{\Omega}$ dans E telle que: $T(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$.

Alors: T admet au moins un point fixe dans $\bar{\Omega}$.

3°/ Le théorème fondamental pour les équations différentielles ordinaires (CF J.Mawhin [C.4] chapitre I, page 19)

Soit $I = [a, b]$, un intervalle de $\mathbb{R}$; u_0 et $v_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\bar{I})$ telles que : $u_0(x) \leq v_0(x)$, $\forall x \in I$.

On considère l'ensemble:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^2 / u_0(x) \leq y \leq v_0(x) \right\}$$

et,

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g_a : (u_0(a), v_0(a)) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_b : (u_0(b), v_0(b)) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

des fonctions continues.

On se pose le problème à condition aux limites séparées non linéaires :

$$(\Pi) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' = f(x, u(x), u'(x)) , \quad x \in I. \\ g_a(u(a), u'(a)) = 0 = g_b(u(b), u'(b)). \end{array} \right.$$

On rappelle alors le:

THEOREME: Supposons satisfaites les hypothèses suivantes:

$$\text{i/} \left\{ \begin{array}{l} u_0''(x) \geq f(x, u_0(x), u_0'(x)), \quad x \in I. \\ g_a(u_0(x), u_0'(x)) \geq 0 \geq g_b(u_0(b), u_0'(b)) \end{array} \right. \quad (u_0 \text{ est une sous-solution})$$

$$\text{ii/} \left\{ \begin{array}{l} v_0''(x) \leq f(x, v_0(x), v_0'(x)), \quad x \in I. \\ g_a(v_0(a), v_0'(a)) \leq 0 \leq g_b(v_0(b), v_0'(b)) \end{array} \right. \quad (v_0 \text{ est une sur-solution})$$

iii/ Condition de Bernstein-Nagumo :

Il existe une fonction continue $h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que :

$$\int_0^\infty \frac{s}{h(s)} ds = +\infty, \quad \text{et : } |f(x, y, z)| \leq h(|z|), \quad \forall (x, y, z) \in E.$$

iv/ $g_a(s, \cdot)$ et $g_b(t, \cdot)$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ pour chaque $s \in (u_0(a), v_0(a))$, et $t \in (u_0(b), v_0(b))$.

Alors le problème (Π) admet au moins une solution u telle que:

$$u_0(x) \leq u(x) \leq v_0(x), \quad \forall x \in I.$$

4°/ Un théorème de comparaison : (cf par exemple:

M.H.Protter, W.F.Weinberger [O.18])

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que:

- i/ $\forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, l'application : $y \longrightarrow f(x,y,z)$ est croissante.
- ii/ f est lipschitzienne par rapport à la variable z sur tout compact de $[a,b] \times \mathbb{R}^2$

On considère maintenant u et v dans $\mathcal{C}^2([a,b])$ vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u'' \geq f(x,u,u') \\ (2) \quad v'' \leq f(x,v,v') \end{array} \right. \quad \text{sur } [a,b]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (3) \quad \alpha \frac{dv}{dn} + \beta v \geq \alpha \frac{du}{dn} + \beta u, \text{ sur } (a,b) \\ \text{avec: } \alpha + \beta > 0, \alpha \geq 0, \beta > 0 \end{array} \right.$$

Alors : $u \leq v$, sur $[a,b]$

5°/ Pour terminer ce paragraphe, nous rappelons l'énoncé de l'alternative de Fredholm :

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur compact dans H .

On se pose le problème :

(*) Trouver $u \in H$ vérifiant: $Au - \lambda u = f$

On peut donc énoncer le résultat classique suivant:

THEOREME:

i/ Si $\lambda \notin \text{Sp}(A)$, alors : $\exists ! u = (A - \lambda)^{-1}(f)$, solution de (*)

ii/ Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors :

u est solution de (*) $\Leftrightarrow f$ est orthogonale à $\text{Ker } (A^* - \lambda)$.

$\Leftrightarrow f$ est orthogonale aux solutions de $A^*u = \lambda u$.

et il existe alors une infinité de solutions de la forme :

$u_{\text{part}} + \phi$, où $\phi \in \text{Ker } (A^* - \lambda)$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans H.Brezis [0.2] ou J.Dieudonné [0.6].

0.3 : LES HYPOTHESES :

On suppose que c et Λ sont deux constantes positives données ($\Lambda > 0$) et on considère les applications f et g satisfaisant les hypoyhèses suivantes :

i/ Sur f : (H-1.a) $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ (i.e positive), est une fonction strictement croissante.

(H-1.b) $\exists \theta \in]0,1[$ tel que :

$f(s) \equiv 0, \forall s \in [0, \theta]$ et $f(s) > 0 \quad \forall s \in]\theta, 1]$.

(H-1.c) f est continue lipschitzienne sur $[0,1]$.

ii/ Sur g : (H-2.a) $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction strictement croissante.

(H-2.b) $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

(H-2.c) g est continue lipschitzienne sur $(0,1)$.

(H-2.d) On posera enfin: $\dot{I} = \int_0^1 \frac{g(s)}{s} ds < +\infty$,

iii/ Enfin, comme on peut s'attendre à des solutions n'ayant pas forcément un sens physique ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$), on prolonge les fonctions f et g à $\mathbb{R}$ tout entier, en posant:

$$(H-3) \quad f(s) = \begin{cases} f(1), & \text{pour } s \geq 1. \\ 0, & \text{pour } s \leq 0. \end{cases}; \quad g(s) = \begin{cases} 1, & \text{pour } s \geq 1. \\ -g(-s), & \text{pour } s \leq 0. \end{cases}$$

0.4.:REMARQUES GENERALES SUR LES HYPOTHESES :

a/ Dans la pratique, f désigne la loi d'Arrhénius :

$$f_\epsilon(s) = x \frac{e^{(s-1)/\epsilon}}{\epsilon^{n+1}}, \quad x \text{ constante positive et } \epsilon > 0 \text{ proportionnel à}$$

l'inverse de l'énergie d'activation réduite. Nous reviendrons sur cette question lors de l'analyse asymptotique. Ceci a en effet motivé l'hypothèse (H-1.a).

b/ L'hypothèse (H-1.b) est une hypothèse de troncature permettant de contourner la difficulté de la frontière froide, comme nous l'avons signalé plus haut.

c/ En chimie, la fonction g s'écrit en général: $g(s)=s.\Phi(s)$, où Φ représente la fonction perte de chaleur souvent utilisée par les physiciens sous la forme:

$$\Phi(T-T_0)=K_c(T-T_0)+K_r(T^4-T_0^4),$$

où T_0 est la température des gaz frais, K_c et K_r sont respectivement les coefficients de passage de la chaleur par conduction-convection, et par rayonnement.

d/ Compte rendu de la remarque c/, l'hypothèse (H-2.d) devient :

$$\dot{I}=\int_0^1 \phi(s)ds < +\infty, \text{ car } \Phi \text{ est continue.}$$

Cette expression représente d'ailleurs une des caractéristiques globales des moments de Φ (cf [A.10],[A.11]).

e/ Comme nous l'avons indiqué au début des hypothèses, nous supposons dans toute cette thèse c comme une constante positive donnée et la constante h , avec u et v , comme inconnue du problème (valeur propre). Ce choix est tout d'abord motivé par des considérations physiques; en effet, expérimentalement, dans les brûleurs à flamme plate on contrôle le débit (c), et on mesure les pertes thermiques représentées par h . De plus, comme nous le montrerons au chapitre IV, la relation (h,c) n'est pas bijective. Toutefois, afin de généraliser le travail de BERESTYCKI, NICOLAENKO et SCHEURER (cf [A.5]), on peut être tenté de considérer h donnée et c inconnue du problème. Cette question nous a posé des difficultés et reste, à notre connaissance, un problème ouvert.

0.5.:PRESENTATION DES RESULTATS :

(I) Dans la 1^{ère} partie, utilisant la théorie du degré topologique du Leray-Schauder, nous établirons principalement deux théorèmes d'existence correspondant respectivement au cas $\Lambda=1$, et cas Λ quelconque.

Nous travaillerons dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$, puis, moyennant des estimations convenables, nous ferons le passage à la limite.

1°/ Avant de présenter le premier de ces résultats, nous allons revenir sur le problème adiabatique (0.1)-(0.2)-(0.3):

$$\begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) . \\ -\Lambda v'' + cv' = -v^n f(u) . \end{cases}$$
$$\begin{cases} u(-\infty) = 0 \\ v(-\infty) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(+\infty) = 1 \\ v(+\infty) = 0 \end{cases}$$

Berestycki, Nicolaenko et Scheurer (cf [A.4],[A.5]) ont établi un résultat d'existence d'un triplet (u,v,c) où $c>0$ et (u,v) dans

$[C^2(\mathbb{R}-\{x_0\})]^2$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Remarquant que pour $\Lambda=1$, le système (P_{ad}) se réduit à une équation scalaire, (car l'enthalpie est conservée: $u+v=1$), ils ont également montré un résultat d'unicité, en utilisant la méthode de l'hodographe.

Se servant d'un théorème sur les systèmes dynamiques, M.Marion ([A.15]) a montré un résultat d'unicité pour $0<\Lambda<1$, et a précisé ainsi rigoureusement une idée de démonstration de Kanel' ([A.13]). Dans le cas $\Lambda>1$, la question de l'unicité d'un triplet (u,v,c) reste toujours une question ouverte pour le problème adiabatique. Ainsi donc, lorsque $\Lambda \leq 1$, nous pourrions parler sans ambiguïté de (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) la solution du problème (P_{ad}) . En ce qui concerne le problème non adiabatique que nous étudions dans cette thèse, nous n'avons établi aucun résultat d'unicité. Même lorsque $\Lambda=1$, le problème (P_{ad}) : (0.4)-(0.5)-(0.6) ne se réduit pas à une équation. C'est également un problème ouvert.

2°/ Nous présentons maintenant le premier théorème d'existence concernant le problème (P_{na}) lorsque $\Lambda=1$:

THEOREME (1) :

On suppose $\Lambda=1$. Alors:

Sous les hypothèses (H-1)-(H-3), le problème (0-4)-(0-5)-(0-6) admet une solution (u,v,h) si et seulement si $c \in]0, c_{ad}[$, où c_{ad} correspond au problème adiabatique (associé à $h=0$).

1^{ères} REMARQUES :

i/ Par solution (u,v,h) nous désignerons toujours une constante positive h , et un couple de fonctions $(u,v) \in [\mathbb{C}^2(\mathbb{R})]^2$ (solutions classiques).

ii/ On montrera que pour $h=0$, le problème non adiabatique (P_{na}) se réduit effectivement au problème adiabatique (P_{ad}) .

La démonstration de ce théorème fera donc l'objet du chapitre I.

3°/ Dans le second, on prouvera un résultat d'existence similaire concernant le cas $\Lambda > 0$ quelconque. Quand on parlera de c_{ad} , il s'agira alors d'une valeur propre quelconque du problème adiabatique, pour lequel la question de l'unicité (pour $\Lambda > 1$) n'est pas encore réglé. Notre résultat principal est le suivant:

THEOREME (2) :

On considère $\Lambda > 0$ quelconque et c_{ad} une valeur propre de (P_{ad}) . Alors sous les hypothèses (H-1)-(H-3), il existe deux constantes positives: $0 < \underline{c} \leq c_{ad} \leq \bar{c}$ telles que :

i/ $\forall c \in]0, \underline{c}[$, le problème (0-4)-(0-5)-(0-6) admet au moins une solution (u,v,h) .

ii/ $\forall c > \bar{c}$, ce problème n'admet aucune solution.

REMARQUES :

1°/ Le théorème ne donne pas d'information lorsque $\underline{c} \leq c \leq \bar{c}$.

2°/ Comme nous le montrerons au chapitre II, les constantes $\underline{c}$ et $\bar{c}$ seront indépendantes du choix de c_{ad} .

(II) Dans la 2^{ème} partie de notre travail, nous supposons que $f=f_\varepsilon$ dépend d'un certain paramètre $\varepsilon > 0$, puis nous étudierons le comportement asymptotique d'une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, h_\varepsilon)$ du problème ainsi paramétré (P_ε) , lorsque ε tend vers 0. Plus précisément, nous prendrons, afin d'alléger l'exposé des résultats, comme fonction f l'exemple pratique suivant:

$$f=f_\varepsilon(s)=\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\phi\left(\frac{s-1}{\varepsilon}\right)\chi_{[\theta,1]}(s), \text{ où } \chi \text{ représente la fonction}$$

caractéristique de l'intervalle $[\theta,1]$ (hypothèse de troncature).

A/ Nous établirons alors dans le chapitre III le théorème suivant:

THEOREME (3) :

une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, h_\varepsilon)$ converge dans la topologie de $C^0_{loc}(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ vers $(u_0, v_0, 0)$ où (u_0, v_0) est l'unique solution du problème à frontière libre :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_0'' + cu_0' = c\delta_{x=\bar{x}} \\ -\Delta v_0'' + cv_0' = -c\delta_{x=\bar{x}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0(-\infty) = v_0(+\infty) = 0 \\ u_0(+\infty) = v_0(-\infty) = 1 \end{array} \right.$$

REMARQUES :

1°/ Ce résultat justifie rigoureusement le modèle de Dirac fréquemment utilisé en combustion (cf [A.6],[A.14]) et a également été obtenu dans le cas adiabatique par Berstycki, Nicolaenko et Scheurer (cf [A.5]), avec une convergence pour u_ϵ légèrement différente.

2°/ $\delta_{x=\bar{x}}$ est la fonction de Dirac au point $\bar{x}$; ce point sera précisé par la suite.

3°/ Le paramètre c au même titre que Λ est choisi indépendamment ϵ .

4°/ On remarque que $u_\epsilon(+\infty)=0$ et $u_0(+\infty)=1$. En effet, la convergence de u_ϵ vers u_0 est seulement $C^0_{loc}(\mathbb{R})$ et non globale. Ce résultat, a été obtenu grâce à une estimation du type: $|1-u_\epsilon(x)| \leq K\epsilon x$, où $K>0$ ne dépend pas de ϵ et où $x \geq x_\epsilon$, point à définir. C'est un résultat optimal qui physiquement signifie que pour des valeurs grandes de l'énergie d'activation réduite (ϵ petit), la décroissance de la température se produit très loin dans la zone aval de refroidissement.

B/ Enfin l'objet du chapitre IV sera de préciser la convergence vers 0 de h_ϵ , $(u_\epsilon - u_0)$ et $(v_\epsilon - v_0)$. Plus exactement, en faisant des changements de variables et de fonctions adéquats, nous prouverons essentiellement trois résultats distincts qui précisent rigoureusement l'étude formelle des zones spatiales en combustion telle qu'utilisée souvent par les physiciens (cf [A.6], [A.7], [A.10], [A.11]).

Nous obtenons donc les trois théorèmes suivants dans lesquels $\hat{u}_\epsilon$ et $\hat{v}$ sont des fonctions translatées de u_ϵ et v_ϵ (voir le chapitre IV):

1^{er} RESULTAT: Il concerne la zone externe amont:

En posant :

$$s_\epsilon(x) \equiv \frac{\hat{u}_\epsilon(x) - u_0(x)}{\epsilon} \text{ et } t_\epsilon(x) \equiv \frac{\hat{v}_\epsilon(x) - v_0(x)}{\epsilon} \text{ on obtient le:}$$

THEOREME (4.1):

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\{s_\varepsilon\}$ et $\{t_\varepsilon\}$ convergent dans la topologie de $\mathbb{C}^2([-\infty, \bar{x}[)$ vers $\{s_0\}$, $\{0\}$ où:

$$s_0(x) = s_0(\bar{x}) u_0 - \frac{h_*}{c^2} \left[-u_0 I + \int_0^{u_0} \frac{g(t)}{t} dt + u_0 \int_{u_0}^1 \frac{g(t)}{t^2} dt \right]$$

REMARQUES :

a/ $h_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon}$ sera déterminé par la suite.

b/ $s_0(\bar{x})$ est à présent une constante inconnue qui sera déterminée après raccord des différentes zones (théorème suivant).

2^{ème} RESULTAT: Investigation de la zone interne :

Dans cette partie, on introduit la variable des couches internes:

$$\xi = \bar{x} + \frac{x - \bar{x}}{\varepsilon}$$

dont on expliquera la motivation en chapitre IV. Alors on a le:

THEOREME (4.2):

Soit : $S_\varepsilon(\xi) = \frac{u_\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon}$ et $T_\varepsilon(\xi) = \frac{v_\varepsilon}{\varepsilon}$. Alors:

S_ε et T_ε convergent dans la topologie de $\mathbb{C}_{loc}^1(\mathbb{R})$ vers

$(s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0, T_0)$ où T_0 est la solution du problème aux limites:

$$\begin{cases} \Lambda T_0'' = T_0^n \phi(s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0) \\ T_0'(-\infty) = -c/\Lambda; \quad T_0(+\infty) = 0. \end{cases}$$

REMARQUE :

On montrera que $s_0(\bar{x}) = \Phi^{-1}(c^2)$ où $\Phi(x) = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt$ et on

présisera le comportement asymptotique de T_0 à l'infini.

3^{ème} RESULTAT: Etude de la zone externe aval:

En considérant la variable dilatée: $\eta = \bar{x} + \varepsilon(x - \bar{x})$, on prouve le:

THEOREME (4.3) :

On définit: $U_\varepsilon(\eta) = u_\varepsilon(x)$ et $V_\varepsilon(\eta) = v_\varepsilon(x)$. Alors:

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$\|U_\varepsilon - U_0\|_{C^0([\bar{x}, +\infty[)}$ et $\|V_\varepsilon\|_{C^0([\bar{x}, +\infty[)}$ convergent vers 0,

où U_0 est la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dU_0}{d\eta} = -\frac{h_*}{c} g(U_0) . \\ U_0(\bar{x}) = 1. \end{cases}$$

Enfin, de ces trois résultats, on déduira une relation limite entre h_ε et c après avoir effectué les raccords des différentes zones.

On montrera le résultat suivant dans le cas $\Lambda=1$ uniquement. Lorsque Λ est différent de 1, l'égalité: $s_0(\bar{x}) = \Phi^{-1}(c^2)$ est quand même obtenue par le théorème (4.2).

4^{ème} RESULTAT: Relation limite entre h et c:

PROPOSITION (4.4):

On pose :
$$\Phi(x) = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt.$$

Alors h et c vérifient la relation non linéaire suivante :

$$h_*(1+I) + c^2 \Phi^{-1}(c) = 0.$$

REMARQUES :

1°/ Ces différents résultats consitue une étude de perturbation singulière précisant l'investigation des zones spatiales en combustion.

2°/ Elle correspond également à une approche rigoureuse des développements asymptotiques formels à l'ordre 1. L'examen d'une étude rigoureuse à un ordre supérieur est un problème ouvert.

3°/ La proposition ci-dessus donne dans le cas simple et typique: $\phi(s) = x e^s$ $x > 0$, la relation suivante:

$$h_*(1+I) + c^2 \ln(c^2/c_{ad}^2) = 0$$

obtenue formellement dans [A.10], [A.11].

1 ÈRE

P A R T I E

R E S U L T A T S

D ' E X I S T E N C E

CHAPITRE I :

POUR LE CAS $\Lambda = 1$

I.0 INTRODUCTION et énoncé du résultat principal:

On se propose dans ce chapitre de traiter le problème suivant:
Déterminer 2 fonctions u et $v : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, et une constante positive h telles que :

$$\begin{array}{lcl}
 (1.1) & \left\{ \begin{array}{l} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u) \\ -v'' + cv' = -v^n f(u) \end{array} \right. & \text{sur } \mathbb{R} \\
 (P_{na}) & & \\
 (1.2) & \left\{ \begin{array}{l} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

où c est une constante positive donnée, considérée comme un paramètre, et n un entier naturel $\neq 0$. L'inconnue h représente la valeur propre du problème (1.1)-(1.2). On montrera que lorsque $h=0$, le problème (1.1)-(1.2) se réduit au problème adiabatique suivant:

$$\begin{array}{lcl}
 (1.3) & \left\{ \begin{array}{l} -u'' + cu' = (1-u)^n f(u) \\ v = 1-u \end{array} \right. & \\
 (P_{ad}) & & \\
 (1.4) & \left\{ \begin{array}{l} u(-\infty) = 0; \quad u(+\infty) = 1; \quad u(0) = \theta. \end{array} \right. &
 \end{array}$$

On notera (u_{ad}, v_{ad}, c_{ad}) la solution de ce problème (Voir à ce propos la discussion dans 0.5 2°/).

Le résultat principal que nous allons prouver dans ce chapitre est le suivant :

THEOREME (1.1):

Sous les hypothèses (H-1)-(H-3), le problème (1.1)-(1.2) admet une solution $(u,v,h,) \in (\mathbb{C}^2(\mathbb{R}))^2 \times \mathbb{R}_*^+$ si et seulement si: $c \in]0, c_{ad}[$, où c_{ad} correspond au problème adiabatique (associé à $h=0$).

I.1 PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION :

On commence d'abord par montrer que le problème est invariant par translation, par conséquent, quitte à changer l'origine, il pourra se simplifier sur $\mathbb{R}^-$ pour se réduire à une équation homogène en v et à une équation scalaire en u qu'on pourra résoudre par une méthode classique.

Comme h est une constante, on peut la supposer dans un premier temps comme une donnée du problème lors de l'étude dans $\mathbb{R}^-$, ensuite on la déterminera au cours de la résolution du problème dans $\mathbb{R}^+$.

La séparation de l'étude du problème dans $\mathbb{R}^-$ puis dans $\mathbb{R}^+$ s'avérera essentielle pour le calcul du degré topologique, et parait tout à fait naturelle vue l'hypothèse de troncature (H-1.b).

Sur $\mathbb{R}^+$, on étudiera le système complet sur un intervalle borné $I_a = (0, a)$ avec $a > 0$. On cherchera des estimations à priori, indépendantes de a , sur les inconnues u_a , v_a , et h_a puis on appliquera le théorème du point fixe de Leray-Schauder, à travers un calcul de degré topologique. Les estimations indépendantes de a nous permettront de passer à la limite quand $a \rightarrow +\infty$.

On montrera enfin que le problème (1.1)-(1.2) est équivalent à « la réunion » des deux problèmes posés sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

I.2 LEMMES PRELIMINAIRES :

Afin de pouvoir écrire le problème sur $\mathbb{R}^-$, nous allons montrer qu'à l'instar du problème adiabatique, il est invariant par translation de l'origine. Pour ce fait, nous avons besoin de deux résultats préliminaires. En voici le premier:

LEMME (1.2):

Soit (u, v, h) une solution du problème (1.1)-(1.2). Alors:

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall c \geq 0$ on a:

$$0 \leq u(x) \leq 1; \quad 0 \leq v(x) \leq 1; \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'(x) = 0; \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v'(x) = 0.$$

Preuve:

1°/ Montrons d'abord que: $u(x) \geq 0$, sur $\mathbb{R}$.

Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant: $\inf_{x \in \mathbb{R}} u(x) < 0$. Alors,

une des deux situations suivantes peut se présenter:

i/ Ou bien: $\exists x_1 > x_0$ tel que: $u(x_0) = 0$; $u(x_1) < 0$, $u'(x_1) = 0$ et $u'(x) \leq 0, \forall x \in (x_0, x_1)$.

ii/ Ou bien: $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que: $u(\bar{x}) = 0$ et $u(x) \leq 0, \forall x \in [\bar{x}, +\infty[$.

Comme $u(+\infty) = 0$, seule la 1^{ère} alternative subsiste et donne:

$u''(x_0) \geq 0$. On écrit alors la première équation de (1.1) en x_0 :

$$(1.5) \quad -u''(x_0) + 0 = v^n(x_0)f[(x_0)] - hg[u(x_0)].$$

Comme $u(x_0) < 0$, alors: $f[u(x_0)] = 0$ (H-1.b), et: $g[u(x_0)] < g(0) = 0$ (H-2)

(1.5) peut s'écrire alors:

$$(1.6) \quad u''(x_0) = hg[u(x_0)],$$

avec :

$$u''(x_0) \geq 0 \text{ et } hg[u(x_0)] < 0 \text{ (car } h > 0).$$

D'où la contradiction avec (1.6). Le 1°/ est donc prouvé. ■

On montre de même que $v \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (on distinguera entre n pair et impair; dans ce dernier cas on effectuera le prolongement: $v^n \longmapsto |v|v^{n-1}$)

2°/ Montrons que: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$.

Nous allons faire la démonstration uniquement pour $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$. La technique est la même pour l'autre. Pour cela, il suffira de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x)$ existe et est finie. Comme u est borné à l'infini, on en déduira que cette limite est nulle. On considère alors $b > 0$ et on intègre de 0 à b l'équation satisfaite par u dans le système (1.1)-(1.2); on obtient:

$$(1.7) \quad u'(b) - cu(b) = [u'(0) - cu(0)] - \int_0^b v^n f(u) dx + h \int_0^b g[u(x)] dx.$$

$v^n f(u)$ et $hg(u)$ étant positives (1°/), les fonctions :

$$b \longmapsto \int_0^b v^n f(u) dx \quad \text{et} \quad b \longmapsto \int_0^b g[u(x)] dx$$

sont donc convergentes (éventuellement vers l'infini). De plus,

$$\begin{cases} u(+\infty) = 0 \\ u \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u'(+\infty) \leq 0. \text{ On peut donc trouver } x_0 \text{ tel que:}$$

$$(1.8) \quad 0 < x_0 \leq b, \quad u'(b) < 0 \quad \text{et} \quad u(x) \leq \theta, \quad \forall x \in (x_0, b).$$

On en déduit alors: $f[u(b)]=0$ et $f(x)\equiv 0, \forall x \in (x_0, b)$. D'où:

$$\int_0^b v^n f(u) dx = \int_0^{x_0} g[u(x)] dx \equiv \delta > 0.$$

Faisons maintenant tendre b vers $(+\infty)$ dans (1.7); il vient, compte

tenu du fait que: $u(b)$ et $\int_0^b v^n f(u) dx$ sont finis,

$$(1.9) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} u'(b) = h.\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b g[u(x)] dx \geq 0.$$

Supposons maintenant que: $\lim_{b \rightarrow +\infty} |u'(b)| = +\infty$, alors: $\lim_{b \rightarrow +\infty} u'(b) = -\infty$, car

$u'(b) < 0$ (d'après 1.8). Ceci contredit bien entendu (1.9).

On a donc montré que $u'(+\infty)$ existe et est fini, soit:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = L < +\infty$. Montrons qu'en fait $L=0$; le raisonnement est

classique. Comme on sait déjà que $L \leq 0$ (d'après 1.8), on va montrer que $L \geq 0$. En effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 > 0 \text{ tel que: } \forall x \geq a_0, \frac{u(x+1)-u(x)}{1} \leq L+\varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon=L$: $u(x+1)-u(x) \leq 2L, \forall x \geq a_0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} |u(x+1)-u(x)| = 0$, alors $L \geq 0$. Par conséquent $L=0$.

D'où le 2°/. $\square$

3°/ Montrons que: $u(x) \leq 1$ et $v(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

On va commencer par montrer :

$$(1.10) \quad y(x) \equiv u(x)+v(x) \leq 1.$$

Le résultat escompté s'en déduira aisément. Ecrivons alors l'équation satisfaite par y en ajoutant membre à membre les deux

équations du système (1.1)-(1.2). On obtient:

$$(1.11) \quad \begin{cases} y'' - cy' = hg(u) \\ y(-\infty) = 1; \quad y'(+\infty) = 0 \text{ (d'après 2°/)} \end{cases}$$

On intègre l'équation figurant dans (1.11) de $(-\infty)$ à x :

$$y' - cy = -c + h \int_{-\infty}^x g[u(x)] dx \geq -c$$

qu'on écrit:

$$(ye^{-cx})' \geq -ce^{-cx}, \text{ puis qu'on intègre de nouveau de } (x) \text{ à } (+\infty):$$

$$-y(x)e^{-cx} \geq -e^{-cx} \Leftrightarrow y(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ D'où (1.10).}$$

Comme $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0$ (grâce au 1°/), alors:

$$\begin{cases} 0 \leq u(x) \leq u(x) + v(x) \leq 1 \\ 0 \leq v(x) \leq u(x) + v(x) \leq 1. \end{cases}$$

On a donc montré le 3°/ et achevé la preuve du lemme (1.2). ■

Le lemme qui suit va nous permettre de montrer que le problème est invariant par translation de l'origine. On a:

LEMME (1.2):

Soit $\theta \in]0, 1[$ fixé et (u, v, h) solution du problème (1.1)-(1.2)

Alors: Quite à faire une translation de l'origine, on peut toujours supposer: $u(0) = \theta$ et $0 \leq u(x) \leq \theta, \forall x \leq 0$.

Preuve:

Elle se fait en deux étapes:

i/ 1^{ère} étape : Montrons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$(1.12) \quad u(x_0) \geq \theta; \quad u'(x_0) = 0 \text{ et } u''(x_0) \leq 0.$$

En effet, grâce aux conditions aux limites (1.2) et au fait que $u \geq 0$ (lemme 1.2), on a toujours l'existence d'un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$u'(x_0) = 0 \text{ et } u''(x_0) \leq 0 \text{ (} x_0 \text{ est un point de maximum relatif).}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $u(x_0) \geq \theta$. Supposons par l'absurde que $u(x_0) < \theta$. Alors: $f[u(x_0)] = 0$ (d'après H-1.b). L'équation en u dans (1.1) s'écrit alors pour $x = x_0$:

$$-u''(x_0) + cu'(x_0) = -hg[u(x_0)]$$

Ou encore:

$$(1.13) \quad u''(x_0) = hg[u(x_0)], \text{ car } u'(x_0) = 0.$$

Or, $u(x_0) > 0$ (par définition de x_0). Donc: $g[u(x_0)] > g(0) = 0$ (H-2). Comme $h > 0$, alors $hg[u(x_0)] > 0$ et $u''(x_0) \leq 0$; ce qui contredit (1.13). On a donc montré la 1^{ère} étape. Dans la 2^{ème}, on va s'intéresser au plus petit x_0 satisfaisant (1.12).

ii/ 2^{ème} étape :

On considère maintenant x_1 le plus petit x_0 (à distance finie de l'origine) vérifiant (1.12). Alors:

$$(1.14) \quad u'(x_1) = 0, \quad u(x_1) \geq \theta \text{ et } u'(x) \geq 0, \quad \forall x \leq x_1.$$

Comme u est invariant par translation (u solution $\Rightarrow u(x+a)$ solution), il suffit de considérer le point $\bar{x}$ tel que: $\bar{x} \leq x_1$ et $u(\bar{x}) = \theta$ puis d'effectuer le changement de variables: $X = x - \bar{x}$. En considérant enfin: $\hat{u}(X) = u(x)$ et $\hat{v}(X) = v(x)$, fonctions translatées de u et v , on vérifie facilement que $\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont solutions du système (1.1)-(1.2) et que $\hat{u}(0) = u(\bar{x}) = \theta$.

(1.14) fournit alors:

$$\forall x \leq 0, \quad 0 \leq \hat{u}(x) \leq \theta. \text{ Le lemme (1.3) est donc prouvé.} \blacksquare$$

I.3 ETUDE DU PROBLEME (1.1)-(1.2) sur $\mathbb{R}^-$:

Grâce au lemme (1.3), on peut écrire: $u(x) \leq \theta$, $\forall x \leq 0$. D'où:
 $f[u(x)] \equiv 0, \forall x \leq 0$ (hypothèse H-1b). Le système (1.1)-(1.2) s'écrit alors sur $\mathbb{R}^-$:

$$\begin{cases} -u'' + cu' = -hg(u) \\ -v'' + cv' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u(-\infty) = 0 \\ u(0) = \theta \\ v(-\infty) = 1 \end{cases}$$

D'où l'expression de v:

$$(1.15) \quad v(x) = 1 + [v(0) - 1]e^{cx}, \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Et l'équation scalaire satisfaite par u:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = -hg(u). \\ u(-\infty) = 0; \quad u(0) = \theta. \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^-.$$

Dans la section suivante, on se propose de résoudre le problème non linéaire (P_1) en supposant les constantes h et c fixées, strictement positives. On obtient le résultat suivant:

THEOREME (1.3):

Soit $(h, c, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times]0, 1[$. Alors:

Sous les hypothèses (H-2), le problème (P_1) admet une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^-)$.

Idee de la démonstration :

Nous commençons par étudier le problème (P_1) sur un intervalle borné de $\mathbb{R}^- : (-a, 0)$, avec $a > 0$. Nous utilisons un théorème sur les équations différentielles non linéaires pour prouver l'existence d'une unique solution u. Ensuite, grâce à des estimations à priori

convenables sur u , nous effectuerons le passage à $\mathbb{R}^-$ tout entier. Notons enfin que si $h=0$, alors: $u=\theta e^{cx}$ est l'unique solution de (P_1) ; ainsi dans toute la suite, on supposera $h>0$.

I.3.1 PROBLEME POSE SUR UN INTERVALLE BORNE DE $\mathbb{R}^-$:

On considère le problème suivant:

Etant données c et h deux constantes strictement positives, déterminer u_a solution du problème :

$$(P_1)_a \quad \begin{cases} -u_a'' + cu_a' = -hg(u_a) & -a \leq x \leq 0. \\ -u_a'(-a) + cu_a(-a) = 0 ; & u(0) = \theta. \end{cases}$$

Il existe plusieurs méthodes variationnelles ou topologiques pour montrer l'existence de solutions au problème $(P_1)_a$.

Nous allons présenter ici un théorème direct dû à J.W.Bebernes et R.Gaines (cf [A.3]) dont la généralisation aux conditions aux limites non linéaires a été rappelée en introduction (0.2.2 3°/) (cf également J.V.Baxley, S.E.Brown [A.2] ou J.V.Baxley. [A.1]).

Nous allons rappeler rapidement son cadre général:

A.CADRE GENERAL :

On se pose le problème suivant: Déterminer u solution du problème:

$$(II) \quad \begin{cases} -u'' = f(x, u, u') ; & a \leq x \leq b. \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = \alpha ; & b_0 u(b) + b_1 u'(b) = \beta \end{cases}$$

On suppose satisfaites les hypothèses suivantes:

i/ $a_0, a_1, b_0, b_1 \geq 0$; $a_0 + b_0 > 0$, $a_0 + a_1 > 0$, $b_0 + b_1 > 0$.

ii/ $f(x, y, z)$ est continue sur l'ensemble:

$$S = \left\{ (x, y, z) / a \leq x \leq b, |y| + |z| < \infty \right\}$$

iii/ $f(x, y, z)$ est une fonction croissante par rapport à y , pour tout (x, y, z) dans S .

iv/ $\exists k > 0$ tel que:

$$|f(x, y, z) - f(x, y, z')| \leq k|z - z'|, \forall (x, y, z) \in S.$$

On a donc le:

THEOREME: (cf [A.3] p.653)

Sous les hypothèses précédentes (i/-iv/),

(Π) admet $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, une unique solution.

B.APPLICATION AU PROBLEME $(P_1)_a$:

Ce problème s'écrit:

$$(P_1)_a \quad \begin{cases} u''_a = cu'_a + hg(u_a) \equiv G(x, u_a, u'_a). \\ cu_a(-a) - u'_a(-a) = 0; \quad u(0) = \theta. \end{cases}$$

On peut vérifier aisément les hypothèses i/ -iv/ :

i/ $a_0 = c > 0$, $a_1 = 1 > 0$, $b_0 = 1 > 0$, $b_1 = 0$; $a_0 + b_0 = 1 + c > 0$, $a_0 + a_1 = 1 + c > 0$, $b_0 + b_1 = 1 > 0$

ii/ $G(x, y, z)$ est continue sur l'ensemble:

$$S = \left\{ (x, y, z) / -a \leq x \leq 0 \text{ et } |y| + |z| < +\infty \right\}.$$

Ceci grâce à la continuité de g (H-2/c) et à celle de l'application : $z \longmapsto cz$ ($G(x, y, z) \equiv cz + hg(y)$).

iii/ La croissance de G par rapport à y résulte de celle de g par rapport à y (H-2.a).

iv/ G est lipschitzienne par rapport à z . En effet:

$$|G(x, y, z) - G(x, y, z')| = c|z - z'|, \forall (x, y, z) \in S.$$

L'application du théorème précédent nous permet donc d'énoncer le résultat suivant pour le problème $(P_1)_a$ (résultat d'existence et d'unicité) :

THEOREME (1.5):

Soit $(h, c) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. Alors:

Sous les hypothèses $(H-2.a) - (H-2.c)$, le problème $(P_1)_a$ admet une unique solution u_a .

I.3.2 ETUDE DU PASSAGE A LA LIMITE $a \rightarrow +\infty$:

A/ Le lemme qui suit nous permettra d'effectuer ce passage à la limite.

LEMME (1.6):

Soit (u_a) la solution du problème $(P_1)_a$ associé à $(h, c) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$

Alors: $\exists K > 0$, indépendante de a telle que:

$$\|u_a\|_{H^2(-a, 0)} \leq K.$$

Preuve:

Elle consiste à estimer ponctuellement u , u' et u'' sur $(-a, 0)$ puis à les majorer convenablement.

1°/ Montrons que: $u_a(x) \geq 0, \forall x \in (-a, 0)$:

On va raisonner par l'absurde, comme au lemme (1.2) en supposant que:

$$\min_{x \in (-a, 0)} u(x) < 0.$$

Alors de deux choses l'une:

i/ Ou bien: Il existe $x_0 \in (-a, 0)$ tel que $u(x_0) < 0$ et $u'(x_0) = 0$.

ii/ Ou bien: $u'(x) \geq 0, \forall x \in (-a, 0)$.

Le second cas entraîne en particulier:

$$(1.16) \quad u(-a) < 0 \text{ et } u'(a) \geq 0.$$

Or, $u'(-a) = cu(-a)$ (condition aux limites dans $(P_1)_a$ et $c > 0$, ce qui contredit (1.16).

Le premier terme de l'alternative assure, en particulier l'existence d'un point $\alpha \in (-a, x_0)$ tel que:

$$(1.17) \quad u(\alpha) = 0 \text{ et } u'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0).$$

D'où: $u(x) \leq 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0)$; et d'après (H-2a,b):

$$g[u(x)] \leq g(0) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0).$$

Comme $h > 0$, l'équation dans $(P_1)_a$ donne:

$$(1.18) \quad u'' - cu' = hg(u) \leq 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0),$$

soit:
$$(u' e^{-cx})' \leq 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0)$$

qu'on peut intégrer de x à x_0 , pour obtenir (notons que $u'(x_0) = 0$)

$$\forall x \in (\alpha, x_0), \quad -u'(x) e^{-cx} \leq 0 \Leftrightarrow u'(x) \geq 0,$$

Or, d'après (1.17) $u'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (\alpha, x_0)$. D'où: $u'(x) = 0$; et donc:

$$u(x) = \text{Cte} = u(\alpha) = 0.$$

Ceci contredit $u(x_0) < 0$. $\square$

2°/ $u'_a(x) > 0, \quad \forall x \in (-a, 0)$:

L'intégration de $(-a)$ à (x) de (1.18) donne:

$$(1.19) \quad u'(x) = cu(x) + h \int_a^x g[u(s)] ds$$

Comme $u(x) \geq 0$ sur $(-a, 0)$ (1°/), c et h deux constantes positives et $g(u) \leq g(0) = 0$, alors: $u'(x) \geq 0$, il est ensuite aisé de voir que: $u'(x) > 0 \quad \forall x \in (-a, 0) \square$

3°/ Montrons:

$$(1.20) \quad \exists k > 0 \text{ tel que: } \int_{-a}^0 |u|^2 dx \leq k, \text{ indépendamment de } a.$$

On va dans un premier temps, montrer l'assertion:

$$(1.21) \quad u(x) \leq \theta e^{cx}, \quad \forall x \in (-a, 0)$$

En effet, la relation (1.19) permet d'écrire:

$$u'(x) - cu(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ue^{-cx})' \geq 0, \quad \forall x \in (-a, 0)$$

Il en résulte alors, par intégration de x à 0 , ($x \in (-a, 0)$):

$$ue^{-cx} \leq u(0) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad u \leq \theta e^{cx}, \quad \forall x \in (-a, 0)$$

Ce qui prouve (1.21). Pour montrer (1.20), on élève au carré les deux membres de (1.21) puis on intègre de $(-a)$ à $x \in (-a, 0)$:

$$\int_{-a}^x |u_a|^2 dt \leq \theta^2 \int_{-a}^x e^{2ct} dt \leq \frac{\theta^2}{2c} e^{2cx},$$

soit pour $x=0$,

$$\int_{-a}^0 |u_a(x)|^2 dx \leq k = \frac{\theta^2}{2c} \quad (\text{Cste indépendante de } a) \quad \square$$

4°/ On va maintenant montrer l'estimation:

$$(1.22) \quad \exists k' > 0 \text{ indépendante de } a \text{ telle que: } \int_{-a}^0 |u_a'|^2 dx \leq k'.$$

g étant positive, lipschitzienne sur $[0, 1]$ et vérifiant $g(0) = 0$, on a l'existence de $K > 0$ tel que: $g(s) \leq Ks$, $\forall s \in [0, 1]$. D'où, par intégration:

$$\int_{-a}^x g[u(s)] ds \leq K \int_{-a}^x u(s) ds$$

On majore alors le second membre de (1.19), en se servant de (1.21), on obtient:

$$u'(x) \leq c\theta e^{cx} + Kh \int_{-a}^x \theta e^{cs} ds = c\theta e^{cx} + \frac{Kh\theta}{c} (e^{cx} - e^{-ac})$$

et donc,

$$(1.23) \quad u'(x) \leq c\theta e^{cx} + \frac{Kh\theta}{c} e^{cx} = K' e^{cx}.$$

où $K' = c\theta + \frac{Kh\theta}{c} > 0$ ne dépend pas de a .

Il ne nous reste plus qu'à intégrer (1.23) de $(-a)$ à (x) , après l'avoir élevée au carré (en notant que $u'(x) \geq 0$, d'après 2°/):

On obtient alors l'estimation $L^2(-a, 0)$ de u' :

$$\int_{-a}^x |u'(s)|^2 ds \leq (K')^2 \int_{-a}^x e^{2cs} ds \leq \frac{(K')^2}{2c} e^{2cx}$$

On en déduit alors pour $x=0$ et $k = \frac{(K')^2}{2c}$, l'estimation (1.22). $\square$

5°/ Pour terminer la démonstration du lemme, on va donner une estimation $L^2(-a, 0)$ de $u''_a(x)$:

$$(1.24) \quad \exists k' > 0 / \int_{-a}^0 |u''_a(x)|^2 dx \leq k'.$$

Comme pour les estimations précédentes, il nous suffira de prouver l'assertion suivante:

$\exists K'' > 0$, indépendante de a tel que:

$$(1.25) \quad u''_a(x) \leq K'' e^{cx}, \quad \forall x \in (-a, 0)$$

L'expression: (1.26) $u'' = cu' + hg(u)$,

donne en particulier: $u'' \geq 0$ (grâce au 1°/ et au 2°/). De plus, g étant lipschitzienne, la majoration du second membre de (1.26) donne: $u'' \leq cu' + K_h u$, et avec (1.21), (1.23):

$$\forall x \in (-a, 0), \quad u''(x) \leq cK' e^{cx} + qK_h e^{cx} = K'' e^{cx}, \quad \text{où } K'' = cK' + K_h \theta.$$

On a donc prouvé (1.25). La technique appliquée pour les estimations L^2 de u et u' nous fournit la majoration (1.24).

Regroupant (1.20), (1.22) et (1.24) on arrive finalement à l'existence d'une constante positive K telle que:

$$\|u_a\|_{H^2(-a, 0)} \leq K.$$

La preuve du lemme (1.6) est donc complète. ■

B/ On est maintenant en mesure de passer à la limite, lorsque $a \rightarrow +\infty$ et de prouver le résultat d'existence suivant pour le problème (P_1) :

THEOREME (1.7):

Soit $(h, c, \theta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times]0, 1[$ et u_a l'unique solution du problème (P_1) . Alors:

Sous les hypothèses (H-2); u_a converge vers une solution du problème (P_1) , dans le sens suivant:

$$\|u_a - u\|_{H^2(\mathbb{R}^-)} \longrightarrow 0, \quad \text{et} \quad \|u_a - u\|_{C^2(\mathbb{R}^-)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } a \rightarrow +\infty;$$

où u_a a été prolongé à $\mathbb{R}^-$ en posant $u_a(x) = u_a(-a)$, $\forall x \leq -a$.

Démonstration:

1°/ Soit $\{u_a\}$ la solution du problème $(P_1)_a$ (Théorème 1.5).

$\{u_a\}$ est bornée dans $H^2(-a,0)$, indépendamment de a (Lemme 1.6).

Considérons le prolongement suivant de u_a :

$$\tilde{u}_a = \begin{cases} u_a, & \text{pour } x \in (-a,0). \\ u_a(-a), & \text{pour } x \leq -a. \end{cases}$$

Soit K compact de $\mathbb{R}^-$ de la forme $[-A,0]$, avec $A > 0$. Alors:

$\exists a_0 > 0$ ($a_0 \geq A$) tel que: $\forall a \geq a_0$, $K \subset]-a,0[$ et donc:

$$\tilde{u}_a(x) = u_a(x), \quad \forall x \in K.$$

$\tilde{u}_a$ est alors dans $H^2(K)$, $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^-$.

Comme, en dimension 1 de l'espace, l'injection: $H^2(K) \hookrightarrow C^1(K)$ est compacte, il existe une suite (a_n) vérifiant:

$a_n > a_0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et telle que: la sous-suite extraite (u_{a_n}) converge dans $C^1(K)$ vers u . Comme g est lipschitzienne, elle est uniformément continue; u satisfait alors, par passage à la limite dans $(P_1)_a$:

$$\begin{cases} u'' - cu = hg(u), & x \in (-a,0) \\ u \in C^0([-A,0], \mathbb{R}). \end{cases}$$

Le raisonnement précédent étant vrai $\forall A > 0$, il existe $u \in C^0(\mathbb{R}^-, \mathbb{R})$ vérifiant:

$$u'' - cu' = hg(u), \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

De plus, $u_{a_n}(0) = \theta$; d'où $u(0) = \theta$. Grâce à l'unicité de (u_{a_n}) (théorème 1.5), c'est toute la suite (u_a) qui converge vers u .

Enfin, les inégalités se conservent à la limite: En effet,

$\tilde{u}_a(x) = u_a(x) \leq \theta e^{cx}$, $\forall x \in (-A,0)$ (d'après 1.21). Par suite,

$\tilde{u}_a(x) \leq \theta e^{cx}$, $\forall x \in (-A, 0)$ (car $(-A, 0) \subset (-a, 0)$). Par passage à la limite $a \rightarrow +\infty$, on obtient: $u(x) \leq \theta e^{cx}$, $\forall x \in (-A, 0)$ et $\forall A > 0$.

Par conséquent, on a:

$$(1.27) \quad u(x) \leq \theta e^{cx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-,$$

en particulier: $u(0) = \theta$. u vérifie donc:

$$(P_1) \quad \begin{cases} u'' - cu' = hg(u), \\ u(-\infty) = 0; \quad u(0) = \theta. \end{cases}, \text{ sur } (-\infty, 0).$$

Enfin, $|\tilde{u}_a(x) - u(x)| \leq \theta e^{cx}$, (d'après 1.21 et 1.27), alors:

$$\sup_{x \leq -A} |\tilde{u}_a - u| \leq \theta c^{-Ac} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

La convergence est donc $C^0(\mathbb{R}^-)$ et même $C^2(\mathbb{R}^-)$ en considérant les dérivées. ■

I.3.3 RESULTAT D'UNICITE:

On va montrer qu'à l'instar de la solution u_a du problème $(P_1)_a$ celle de (P_1) est également unique.

THEOREME (1.8):

Soit $(h, c, \theta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \times]0, 1[$. Alors:
Sous les hypothèses (H-2), le problème (P_1) admet au plus une solution.

Démonstration:

On se donne u_1 et u_2 deux solutions de (P_1) et pose $w = u_1 - u_2$.
 w vérifie alors:

$$(1.28) \quad \begin{cases} w'' - cw' = h(g(u_1) - g(u_2)) \\ w(-\infty) = w(0) = 0. \end{cases}$$

En multipliant par w les deux membres de l'équation dans (1.28), puis en intégrant l'équation obtenue de $(-\infty)$ à 0 , on obtient:

$$[ww']_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 |w'(x)|^2 dx - \frac{c}{2} [w(x)]_{-\infty}^0 = h \int_{-\infty}^0 (g(u_1) - g(u_2)) w dx.$$

Soit, grâce aux conditions aux limites dans (1.28):

$$(1.29) \quad - \int_{-\infty}^0 |w'(x)|^2 dx = h \int_{-\infty}^0 (g(u_1) - g(u_2)) (u_1 - u_2) dx.$$

Comme $h > 0$ et g strictement croissante (H-2.a), i.e.:

$$(g(u_1) - g(u_2)) (u_1 - u_2) \geq 0 \quad (\text{l'égalité ayant lieu pour } u_1 = u_2),$$

(1.29) donne:

$$\int_{-\infty}^0 |w'(x)|^2 dx = 0, \text{ d'où: } w'(x) \equiv 0, \text{ sur } \mathbb{R}^-; \text{ soit } w(x) = \text{Cte sur } \mathbb{R}^-.$$

Or, $w(0) = 0$; donc: $\forall x \in (-\infty, 0) \quad w(x) \equiv 0 \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x)$.

Le théorème (1.8) est prouvé. Afin que l'étude du problème (P_1) soit complète, nous allons montrer le résultat suivant:

THEOREME (1.9):

Soit u la solution du problème (P_1) associé au triplet:

$(h, c, \theta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times]0, 1[$. Alors: Sous les hypothèses (H-2), $u \in C^2(\mathbb{R}^-)$.

Démonstration:

D'après le lemme (1.6), $u_a \in H^2(-a, 0)$ indépendamment de a ; par suite:

$u \in H^2(\mathbb{R}^-)$, et par injection $u \in C^1(\mathbb{R}^-)$.

Comme g est continue sur $[0,1]$, $g(u) \in C^0(\mathbb{R}^-)$, et donc $u \in C^2(\mathbb{R}^-)$, d'après l'équation satisfaite par u . ■

Les théorèmes (1.7), (1.8) et (1.9) rendent complète la démonstration du théorème (1.4) annoncé au début de cette partie. L'étude du système (1.1)-(1.2) dans $\mathbb{R}^-$ est donc achevée.

REMARQUE (1.9):

Avant d'aborder la résolution du problème (P_{na}) sur $\mathbb{R}^+$, commençons d'abord par remarquer que l'étude précédente nous permet de définir une fonction J telle que:

$$J: (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\theta, c, h) \longmapsto J(\theta, c, h) = h \int_{-\infty}^0 g[u_-(x)] dx$$

où u_- représente la solution du problème (P_1) ; celle-ci étant unique, et la fonction g , par hypothèse lipschitzienne J est donc une application bien défini. De plus, en considérant l'équation en u_- , on montre aisément que J est continue uniformément en θ, c et h . Enfin, d'après les estimations du lemme (1.6), on a:

$$\forall \theta \in]0,1[, \quad 0 < J(\theta, c, h) \leq \frac{1}{c} I$$

Notons pour terminer que l'introduction de l'application J permet d'écrire:

$$(1.31) \quad u'_-(0) = c\theta + hJ(\theta, c, h)$$

expression qui nous servira à poser la condition aux limites pour le problème écrit sur $\mathbb{R}^+$.

I.4 ETUDE DU PROBLEME SUR $\mathbb{R}^+$:

On considère le problème (P_2) écrit sur $\mathbb{R}^+$:

Déterminer $u, v : \mathbb{R}^+ \longrightarrow -[0,1]$, et une constante positive h satisfaisant:

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1.32) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\ -v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases} \\ \\ (1.33) \quad \begin{cases} u'(0) = cu(0) + hJ(\theta, c, h); & u(+\infty) = 0; \\ v'(0) = c[v(0) - 1]; & v'(+\infty) = 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad u(0) = \theta.$$

REMARQUES (I.4.1):

1°/ Les conditions aux limites (1.33) expriment le raccord $\mathbb{C}^1$ des solutions des problèmes (P_1) et (P_2) . En effet, $u(0) = u_-(0) = \theta$ et $u'(0) = u'_-(0)$, d'après (1.31). De plus, $v'_-(0) = c[v_-(0) - 1]$ (d'après 1.15), d'où la condition aux limites de type mixte pour v dans l'équation (1.33).

2°/ Avant d'entamer la résolution du problème (P_2) , on va montrer que si $h=0$, il se réduit effectivement à un problème adiabatique, en particulier donc, avec des conditions aux limites à $(+\infty)$ de type (0.3). Ceci est l'objet de la :

PROPOSITION (1.10):

Soit $c > 0$, paramètre donné et (u_c, v_c, h_c) une solution du problème (P_2) associé à c . Alors:

$$h_c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \text{ ou } c = c_{ad}$$

où c_{ad} est la valeur propre du problème (P_{ad}) : (1.3) - (1.4).

Démonstration:

Faisons $h=0$ dans le problème (1.32)-(1.33). On obtient:

$$(1.34) \quad \begin{cases} u'' - cu' = -v^n f(u) \\ v'' - cv' = v^n f(u) \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \quad (1.35) \quad \begin{cases} u'(0) = cu(0) \\ u(0) = \theta \\ v'(0) = c[v(0) - 1] \end{cases}$$

ainsi que les propriétés qualitatives suivantes (lemme (1.2)) :

$$(1.36) \quad 0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Il est aisé de voir que: $y(x) \equiv u(x) + v(x) = k + k'e^{cx}$; où $(k, k') \in \mathbb{R}^2$.

Puis, grâce à (1.35)-(1.36):

$$(1.37) \quad y(x) \equiv 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (y \text{ est borné})$$

Nous allons maintenant déterminer: $l = u(+\infty)$ et $l' = v(+\infty)$.

Après avoir vérifié, comme au lemme (1.2), que $u'(+\infty) = v'(+\infty) = 0$ et $u''(+\infty) = v''(+\infty) = 0$, on remarque que l et l' sont solutions, compte tenu de (1.34)-(1.37), du système:

$$\begin{cases} l'f(l) = 0 \\ l + l' = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1.38) \quad (1-l)f(l) = 0.$$

On va vérifier que: $f(l) \neq 0$. Pour cela, on suppose par l'absurde que: $f(l) = 0$, d'où (hyp. (H-1.b)): $l \leq \theta$. Or, $l + l' = 1$, donc: $l' \geq 1 - \theta$. D'autre part, v est une fonction décroissante: En effet, l'équation en v dans (1.34) donne:

$$(v'e^{-cx})' = v^n f(u) e^{-cx} \geq 0$$

qu'on intègre de x à $(+\infty)$ pour obtenir:

$$v'(x)e^{-cx} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) \leq 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

Il en résulte en particulier, en utilisant (1.10):

$$l' = v(+\infty) < v(0) \leq 1 - \theta,$$

ce qui contredit $l' \geq 1 - \theta$. On a donc prouvé que: $f(l) \neq 0$.

On déduit alors de (1.38):

$$l = 1 \text{ et donc } l' = 0 \text{ (grâce à 1.37).}$$

u et v satisfont donc le système suivant:

$$\begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u). \\ -v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases} \quad \begin{cases} u'(0) = cu(0); \quad v'(0) = c[v(0) - 1], \\ u(+\infty) = 1; \quad u(0) = \theta; \quad v(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Ce système n'est autre que le problème adiabatique (1.3)-(1.4).

Il admet (cf [A.5]) une unique solution: $u = u_{ad}$, $v = v_{ad}$ et $c = c_{ad}$.

D'où la proposition (1.10). ■

REMARQUE (I.4.2) :

Supposons que le problème (1.34) soit posé sur un borné I_a de $\mathbb{R}^+$, avec des conditions aux limites convenables qui permettent d'effectuer le passage à la limite à $\mathbb{R}^+$ tout entier, et que c ne dépend pas de a . Alors, d'après le résultat ci-dessus, on a forcément $c = c_{ad}$.

I.4.1 Principe de la démonstration :

Pour la résolution du problème (P_2) , on commencera par l'étudier dans un intervalle borné de $\mathbb{R}^+$ afin d'utiliser un argument topologique.

En effet, via un calcul de degré topologique on prouvera un théorème d'existence en se servant du théorème du point fixe de Leray-Schauder (cf [C.5], [C.6]).

Les estimations à priori, indépendantes de l'intervalle borné considéré, nous permettent de passer à la limite et d'obtenir un résultat d'existence sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

I.4.2 Problème posé sur intervalle borné et estimations à priori:

On considère $a > 0$, réel et on écrit le problème suivant posé sur l'intervalle $I_a =]0, a[$:

Etant donnée une constante positive c , trouver deux fonctions u_a et v_a dans $\mathbb{C}^2(I_a; [0, 1])$, et une constante positive h (valeur propre du problème) satisfaisant :

$$\begin{array}{l} (P_2)_a \left\{ \begin{array}{l} (1.39) \quad \begin{cases} -u_a'' + cu_a' = v_a^n f(u_a) - hg(u_a) \\ -v_a'' + cv_a' = -v_a^n f(u_a) \end{cases} \\ (1.40) \quad \begin{cases} u_a'(0) = cu_a(0) + hJ(\theta, c, h); & u_a(a) = 0. \\ -v_a'(0) + cv_a(0) = c; & v_a(a) = 0. \end{cases} \end{array} \right. \end{array}$$

n est entier non nul; f et g deux fonctions satisfaisant les hypothèses (H-1)-(H-3).

REMARQUES :

a/ La condition $v_a(a) = 0$ du type Dirichlet est destinée à simplifier la présentation des résultats. Cependant, on verra que lors du passage à la limite $a = +\infty$, on arrive à récupérer uniquement la condition aux limites $v'(+\infty) = 0$ du problème (P_2) .

b/ La condition $u_a(0) = \theta$ s'impose, comme dans le cas adiabatique (cf [A.5]) afin d'éviter, à la limite $a = +\infty$, les solutions triviales; elle s'avère d'ailleurs essentielle dans la mesure où $(P_2)_a$ est un problème à valeur propre h .

On va montrer un lemme qui nous fournira les estimations à priori nécessaires pour définir le degré de Leray-Schauder et de faire le passage à la limite dans $(P_2)_a$ vers le problème (P_2) .

On obtient alors le:

LEMME (1.11): (Estimations à priori)

Soit $(u_a, v_a) \in (C^1(\bar{I}_a))$ et $h_a \geq 0$ une solution du problème $(P_2)_a$ associé au paramètre $c > 0$. Alors:

$\forall c \neq c_{ad}$, et $\forall x \in I_a$ on a les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_a(x) < 1; \quad 0 \leq v_a(x) < 1; \quad 0 \leq (u_a + v_a)(x) < 1; \\ -c < u_a'(x) < c; \quad -c < v_a'(x) < 0; \quad (u_a + v_a)'(x) < 0; \quad h_a > 0. \end{aligned}$$

Preuve:

Elle consiste, comme pour le lemme (1.6) à estimer ponctuellement les solutions du problème $(P_2)_a$; Nous commençons par établir la positivité de u_a et de v_a .

1°/ $v_a(x) > 0, u_a(x) > 0, \forall x \in (0, a)$:

a/ $v_a(x) \geq 0, \forall x \in (0, a)$:

La démonstration est analogue à celle du lemme (1.2):

On suppose par l'absurde que:

$$(1.41) \quad \inf_{0 \leq x \leq a} v_a(x) < 0$$

Etant données les conditions aux limites (1.40), le seul cas à considérer est le suivant:

$$\exists x_0 \in (0, a) \text{ tel que } v(x_0) < 0 \text{ et } v'(x_0) = 0.$$

Il en résulte alors l'existence de deux constantes positives α et β telles que:

$$(1.42) \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha < \beta \leq a, \\ v'(\alpha) = 0, \end{cases} \quad \text{et } v' \geq 0 \text{ sur } [\alpha, \beta].$$

L'équation en v dans (1.39) s'écrit alors :

$$(v'e^{-cx})' = v^n e^{-cx} f(u) \leq 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

puis s'intègre de α à $x \in (\alpha, \beta)$ pour donner:

$$v'(x)e^{-cx} \leq 0 \cdot e^{-cx} \quad \Leftrightarrow \quad v' \leq 0 \text{ sur } (\alpha, \beta).$$

ce qui donne, compte tenu de (1.42):

$$\forall x \in (\alpha, \beta), \quad v'(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \text{Cte} \quad \Leftrightarrow \quad v = v(\beta) = 0.$$

ce qui contredit (1.41). D'où le a/.

b/ $u_a(x) > 0, \forall x \in (0, a)$:

Le raisonnement du a/ s'applique encore ici et conduit à la situation suivante:

$$u''(x_0) = -v^n(x_0)f[u(x_0)] + hg[u(x_0)]$$

avec $u(x_0) < 0$ et $u'(x_0) = 0$. On conclut alors comme pour lemme (1.2). D'où le 1°/. $\square$

2°/ $u_a(x) + v_a(x) < 1, \forall x \in I_a$:

$y_a(x) = u_a(x) + v_a(x)$ vérifie (en ajoutant les deux équations du système (1.39)):

$$(1.43) \quad y'' - cy' = hg(u)$$

Intégrons alors (1.43) de 0 à x:

$$y' - cy = y'(0) - cy(0) + h \int_0^x g[u(s)] ds \geq y'(0) - cy(0)$$

D'où, grâce à (1.40):

$$y' - cy \geq -c + hJ(\theta, c, h) \geq -c$$

On obtient alors l'estimation:

$$(ye^{-cx})' \geq -ce^{-cx}$$

qui s'intègre de (x) à $(+a)$ pour donner:

$$y(a)e^{-ac} - y(x)e^{-cx} \geq e^{-ac} - e^{-cx} \quad (y(a)=0)$$

Finalement,

$$y(x) \leq 1 - e^{-cx} < 1, \quad \forall x \in [0, a[.$$

Or, $y(a)=0 < 1$, donc:

$$y(x) < 1, \quad \forall x \in [0, a].$$

Le 2°/ est prouvé. $\square$

3°/ $u_a(x) < 1, v_a(x) < 1, \forall x \in I_a$:

Ces deux inégalités se déduisent immédiatement du 1°/ et du 2°/.

En effet:

$$\begin{cases} 0 \leq u_a \leq u_a + v_a < 1; \\ 0 \leq v_a \leq u_a + v_a < 1. \end{cases} \quad \forall x \in I_a. \square$$

4°/ $-c < v'(x) < 0, \forall x \in I_a$:

v satisfait (grâce à (1.39)):

$$e^{cx} (v' e^{-cx})' = v^n f(u) > 0 \Rightarrow (v' e^{-cx})' > 0$$

soit par intégration de x à $(+a)$:

$$v'(x)e^{-cx} \leq v'(a)e^{-ca} < 0, \quad (\text{car } v \geq 0 \text{ et } v(a)=0)$$

Il en résulte:

$$v'(x) < 0, \quad \forall x \in I_a.$$

De plus, si on intègre directement l'équation en v de 0 à x , on obtient:

$$v' - cv = [v'(0) - cv(0)] + \int_0^x v^n f(u) dx,$$

soit (d'après 1.40) :

$$v' - cv = -c + h \int_0^x g[u(x)] dx$$

et donc :

$$v' - cv > -c \quad (\text{d'après } 1^\circ / \text{ et } (H-1)a)$$

On écrit enfin :

$$v'(x) > cv(x) - c \geq -c, \text{ car } v \geq 0.$$

On a donc prouvé :

$$-c < v'(x) < 0, \text{ i.e. le } 1^\circ / . \square$$

$$\underline{5^\circ / -c < u'(x), \forall x \in I_a :}$$

L'estimation : $y' - cy \geq -c$ (voir $2^\circ /$) s'écrit aussi :

$$u' - cu \geq -c - (v' - cv) \geq -c, \text{ car } v' < 0 \text{ et } v \geq 0.$$

d'où (d'après $1^\circ /$) :

$$u' > cu - c \geq -c \Rightarrow u'(x) > -c, \forall x \in I_a. \square$$

$$\underline{6^\circ / (u_a + v_a)'(x) < 0, \text{ sur } I_a :}$$

L'équation (1.43) peut s'écrire :

$$(y' e^{-cx})' = hg(u) e^{-cx} \geq 0,$$

puis s'intègre de (x) à $(+a)$:

$$y'(x) e^{-cx} \leq y'(a) e^{-ac} < 0$$

soit,

$$y'(x) = u'(x) + v'(x) < 0, \forall x \in I_a. \square$$

7°/ $u'(x) < c, \forall x \in I_a$:

On déduit du 6°/ :

$$u'(x) < -v'(x)$$

Or,

$$v'(x) > -c \text{ (4°/),}$$

d'où:

$$u'(x) < c, \forall x \in I_a. \quad \square$$

8°/ $\forall c \neq c_{ad}, h_a > 0$:

On suppose par l'absurde que $h_a = 0$. Alors le système $(P_2)_a$ s'écrit:

$$(1.44) \quad \begin{cases} u_a'' - cu_a' = -v^n f(u). \\ v_a'' - cv_a' = v_a^n f(u). \end{cases}$$

$$(1.45) \quad \begin{cases} u_a'(0) = cu_a(0); u_a(a) = 0; \\ v_a'(0) = c[v_a(0) - 1]; v_a(a) = 0; \end{cases} \quad u_a(0) = \theta.$$

On vient de montrer (estimations 1°/ à 7°/) que (u_a, v_a) est dans $(W^{1,\infty}(]0,a[)) ^2$, donc dans $(H^1(]0,a[)) ^2$ qui s'injecte avec compacité dans $(C^0([0,a])) ^2$. On en conclut, grâce à la remarque (I.4.2) que $c = c_{ad}$. Par suite, $\forall c \neq c_{ad}, h_a > 0$. ■

La démonstration du lemme (1.11) est achevée. □

Le résultat suivant fournit des estimations $L^2(]0,a[)$ des dérivées u' et v' :

PROPOSITION (1.12):

Soit $c > 0$ donné et (u_a, v_a, h_a) une solution du problème $(P_2)_a$

Alors:

$$(1.48) \quad \int_0^a |u'|^2 dx < c \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right).$$

$$(1.49) \quad \frac{c}{2} |v_a(0)|^2 + \int_0^a |v'|^2 dx < c.$$

Démonstration:

1°/ On intègre de 0 à (a) l'équation en u après l'avoir préalablement multipliée par u:

$$\begin{aligned} u(a)u'(a) - u'(0)u(0) - \int_0^a |u'|^2 dx - \frac{c}{2}|u(a)|^2 + \frac{c}{2}|u(0)|^2 = \\ = - \int_0^a u \cdot v^n f(u) dx + h \int_0^a u \cdot g[u(x)] dx \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, compte tenu des conditions aux limites (140):

$$-\theta u'(0) - \int_0^a |u'|^2 dx + \frac{c}{2} \theta^2 = - \int_0^a u \cdot v^n f(u) dx - h \int_0^a u \cdot g[u(x)] dx$$

d'où:

$$(1.50) \quad \int_0^a |u'|^2 dx = -\theta u'(0) + \frac{c}{2} \theta^2 + \int_0^a u \cdot v^n f(u) dx + h \int_0^a u \cdot g[u(x)] dx$$

Comme $h > 0$, $u \geq 0$ et $g(u) \geq 0$, le second membre de (1.50) se majore :

$$(1.51) \quad \int_0^a |u'|^2 dx < -\theta u'(0) + \frac{c}{2} \theta^2 + \int_0^a u \cdot v^n f(u) dx$$

ou encore, comme $u'(0) > c\theta$ (d'après (1.40)) :

$$(1.51) \text{ Bis} \quad \int_0^a |u'|^2 dx < -c\theta^2 + \frac{c}{2} \theta^2 + \int_0^a u \cdot v^n f(u) dx$$

Enfin,

$$\int_0^a u \cdot v^n f(u) dx \leq \int_0^a v^n f(u) dx = c + v'(a).$$

(1.51) Bis donne alors :

$$\int_0^a |u'|^2 dx < -\frac{c}{2} \theta^2 + c + v'(a) < c \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \quad (v'(a) < 0).$$

D'où le (1.48). $\square$

2°/ La même technique qu'au 1°/ appliquée à v nous conduit à l'identité :

$$-v'(0)v(0) - \int_0^a |v'|^2 dx + \frac{c}{2} v(0)^2 = \int_0^a v^{n+1} f(u) dx$$

d'où (v et $f(u)$ positives) :

$$\int_0^a |v'|^2 dx = \frac{c}{2} v(0)^2 - v(0)v'(0) - \int_0^a v^{n+1} f(u) dx < \frac{c}{2} v(0)^2 - v(0)v'(0)$$

Enfin, utilisant (1.40):

$$\frac{c}{2}|v(0)|^2 + \int_0^a |v'|^2 dx < c,$$

ce qui prouve (1.49), et termine la démonstration de la proposition (1.1).

Enfin, pour terminer avec les estimations à priori, nous prouvons la:

PROPOSITION (1.13):

Soit $c > 0$ un paramètre donné et (u_a, v_a, h_a) une solution du problème (1.39)-(1.40). Alors:

$$(1.52) \quad 0 < h_a < \frac{5}{2} \frac{c^2}{G(\theta)}$$

où l'on a posé: $G(t) = \int_0^t g(s) ds.$

Démonstration:

On multiplie par u' la 1^{ère} équation de (1.39) puis on intègre de 0 à a:

$$\frac{1}{2}|u'(a)|^2 - \frac{1}{2}|u'(0)|^2 - c \int_0^a |u'|^2 dx = - \int_0^a u' v^n f(u) dx + h \int_0^a u' g[u(x)] dx$$

qui s'écrit aussi:

$$(1.53) \quad h \int_0^\theta g(s) ds = \frac{1}{2}|u'(0)|^2 + c \int_0^a |u'|^2 dx - \frac{1}{2}|u'(a)|^2 - \int_0^a v^n u' f(u) dx$$

Grâce à (1.48) et au fait que: $|u'| < c$ (lemme 1.11), le second

membre de (1.53) se majore pour donner:

$$(1.54) \quad h \int_0^\theta g(s) ds < \frac{1}{2} c^2 + c^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \int_0^a v^n u' f(u) dx$$

Or,

$$-\int_0^a v^n u' f(u) dx \leq \int_0^a v^n |u'| f(u) dx < c \int_0^a v^n f(u) dx < c^2.$$

Finalement, (1.54) donne:

$$h \int_0^\theta g(s) ds < \frac{1}{2} c^2 + c^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + c^2 = \frac{c^2}{2} (5 - \theta^2).$$

soit,

$$h \int_0^\theta g(s) ds < \frac{5}{2} c^2.$$

d'où, par définition de G:

$$h < \frac{5}{2} c^2 \frac{1}{\int_0^\theta g(s) ds} = \frac{5}{2} \frac{c^2}{G(\theta)}.$$

D'où (1.52) ■

Le corollaire suivant récapitule les estimations précédentes:

COROLLAIRE :

Soit (u_a, v_a, h_a) une solution du problème $(P_2)_a$. Alors:
 (u_a, v_a, h_a) appartient à un borné, indépendant de a de
 $(W^{2,\infty}(0,a))^2 \times \mathbb{R}^+$.

Preuve:

L'équation en u dans $(P_2)_a$ fournit l'estimation suivante:

$$|u''_a(x)|^2 \leq c|u'_a(x)| + |v''_a(x)| |f(u_a)| + h_a g(u_a).$$

$$\leq c^2 + f(1) + H, \text{ avec } H = \frac{5}{2} \frac{c^2}{G(\theta)}$$

(grâce au lemme (1.11), à la proposition (1.13) et à la croissance des fonctions f et g).

Il existe alors $k \equiv c^2 + f(1) + H > 0$ tel que:

$$\forall x \in I_a, |u''_a| \leq k, \text{ indépendamment de } a.$$

On obtient de la même façon:

$$\forall x \in I_a, |v''_a| \leq c^2 + f(1) < k.$$

Enfin,

$$\begin{cases} 0 \leq u_a < 1. \\ 0 \leq v_a < 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq |u'_a| < c. \\ 0 \leq |v'_a| < c. \end{cases}$$

Par conséquent:

(u_a, v_a, h_a) , est borné, indépendamment de a dans $(W^{2,\infty}(0,a))^2 \times [0,H]$

Le lemme (1.14) est donc prouvé. ■

Ayant établi les estimations nécessaires aux solutions de $(P_2)_a$, on va pouvoir définir un degré topologique, puis le calculer dans la section suivante.

I.4.3 Calcul de degré topologique:

A. Equivalence avec un problème de point fixe:

Pour résoudre le problème $(P_2)_a$, on le traduit sous forme d'une équation de point fixe: $w=K(w)$.

Pour cela, on va considérer l'espace de Banach:

$$X = (\mathbb{C}^1(\bar{I}_a))^2 \times \mathbb{R}$$

muni de sa norme naturelle:

$$\|w\|_X = \|(u, v, h)\|_X = \sup \left(\|u\|_{\mathbb{C}^1(\bar{I}_a)}, \|v\|_{\mathbb{C}^1(\bar{I}_a)}, |h| \right)$$

On introduit maintenant l'opérateur:

$$K_\tau : X \longrightarrow X, \text{ où } \tau \in [0, 1];$$

défini par:

$$K_\tau(u, v, h) = (U, V, h - u(0) + \theta)$$

où (U, V) est l'unique solution du système linéaire:

$$(1.55) \quad \begin{cases} U'' - c_\tau U' = \tau(-v^n f(u) + hg(u)) + (1-\tau)(-v^n + hu) \\ V'' - c_\tau V' = \tau v^n f(u) + (1-\tau)v^n \end{cases}$$

$$(1.56) \quad \begin{cases} U'(0) = c_\tau u(0) + \tau h J(u(0), c_\tau, h) \\ V'(0) = c_\tau [V(0) - 1] \end{cases} \quad \begin{cases} U(a) = 0 \\ V(a) = 0 \end{cases}$$

avec:

$$(1.57) \quad \boxed{c_\tau = \frac{c}{c_{ad}} (c_{ad})_\tau}$$

où $(c_{ad})_\tau$ correspond à la valeur propre du problème adiabatique associé à la fonction $\tau f(u) + (1-\tau)$ c'est-à-dire:

$$(1.58) \quad \begin{cases} u_\tau'' - (c_{ad})_\tau u_\tau' = -\tau v_\tau^n f(u_\tau) - (1-\tau) v_\tau^n. \\ v_\tau'' - (c_{ad})_\tau v_\tau' = \tau v_\tau^n f(u_\tau) + (1-\tau) v_\tau^n. \end{cases}$$

$$(1.59) \quad \begin{cases} u_\tau'(0) = (c_{ad})_\tau u_\tau(0); & u_\tau(\infty) = 1; \\ v_\tau'(0) = (c_{ad})_\tau (v_\tau(0) - 1); & v_\tau(\infty) = 0; \end{cases} \quad u_\tau(0) = \theta.$$

Et où la fonction J a été défini § I.3.4. (remarque 1.9).

REMARQUES:

a/ L'introduction de l'opérateur K permet d'obtenir lorsque $\tau=0$, un système linéaire découplé qu'on pourra résoudre.

L'expression de c_τ dans (1.57) nous permettra d'écrire convenablement la condition suffisante d'existence. Notons qu'il s'agit là à notre connaissance de la seule déformation homotopique de l'opérateur K_τ permettant de calculer le degré topologique. En effet l'introduction au second membre d'un terme du type:

$\tau(-v^n f(u) + hg(u))$ comme dans le problème adiabatique (cf [A.5]) conduirait à des solutions triviales. (*)

b/ Le problème (1.58)-(1.59) est une déformation homotopique du problème adiabatique. Il est clair qu'en remplaçant $f(u)$ par $\tau f(u) + (1-\tau)$ on prouve, comme dans [A.4] l'existence d'une unique solution $(u_{ad}, v_{ad}, c_{ad})_\tau$ au problème (1.58)-(1.59).

c/ Equivalence avec une équation du point fixe:

$w = (u_a, v_a, h_a)$ est solution du problème $\{P_2\}_a$ si et seulement si, $(I - K_1)(w) = 0$, ie: w est point fixe de K_1 dans X .

B. Définition d'un degré topologique:

On va définir le degré de Leray-Schauder de l'opérateur $(I-K_\tau)$ relativement à un ouvert Ω au point 0.

On trouvera dans [C.5],[C.6] la définition et les propriétés principales de ce degré.

Les lemmes suivants vont nous permettre de le définir:

LEMME (1.15):

Soit $X = \left(\mathbb{C}^1(\bar{I}_a)\right)^2 \times \mathbb{R}$. Alors l'opérateur:

$$K: X \times [0,1] \longrightarrow X$$

$$(u, v, h, \tau) \longmapsto K_\tau(u, v, h)$$

est compact, et uniformément continue en τ .

Preuve:

i/ La précompacité:

On peut vérifier que pour tout (u, v) donné dans $\left(\mathbb{C}^1(\bar{I}_a)\right)^2$, (1.55)-(1.56) admet une unique solution (U, V) dans $\left(W^{2,\infty}(I_a)\right)^2$, donc dans $\left(H^2(I_a)\right)^2$. En vertu de la compacité de l'injection:

$$H^2(I_a) \hookrightarrow \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \quad (n=1)$$

l'opérateur K_τ , et donc K , est précompact.

ii/ La continuité:

Soit (u_n, v_n, h_n) une suite convergente dans X vers (u, v, h) . Posons:

$$(U_n, V_n, H_n) = K_\tau(u_n, v_n, h_n)$$

K_τ étant un opérateur compact (i/), il existe une suite $(U_{n_p}, V_{n_p}, H_{n_p})$ qui converge dans X vers (U, V, H) .

On a donc, d'une part:

$$H_{n_p} = h_{n_p} - u_{n_p}(0) + \theta$$

et d'autre part, le problème suivant:

$$(1.60) \quad \begin{cases} U''_{n_p} - c_\tau U'_{n_p} = \tau \left(-v_{n_p}^n f(u_{n_p}) + h_{n_p} g(u_{n_p}) \right) + (1-\tau) \left(-v_{n_p}^n + h_{n_p} u_{n_p} \right) \\ V''_{n_p} - c_\tau V'_{n_p} = \tau v_{n_p}^n f(u_{n_p}) + (1-\tau) v_{n_p}^n. \end{cases}$$

$$(1.61) \quad \begin{cases} U'_{n_p}(0) = c_\tau U_{n_p} + \tau h_{n_p} J(u_{n_p}, c_\tau, h_{n_p}). \\ V'_{n_p}(0) = c_\tau (V_{n_p}(0) - 1). \end{cases} \quad \begin{cases} U_{n_p}(a) = 0. \\ V_{n_p}(a) = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que:

$$(U, V, H) = K_\tau(u, v, h)$$

On considère pour cela $\phi \in \mathcal{C}_c^1([0, a])$ une fonction test par laquelle on multiplie les deux équations dans (1.60), puis on intègre de 0 à a. En faisant les calculs pour la 1^{ère} équation, on obtient:

$$(1.62) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^a U'_{n_p} \phi'(x) dx - c_\tau \int_0^a U'_{n_p}(x) \phi(x) dx = \\ & = \int_0^a \phi \left(-v_{n_p}^n f(u_{n_p}) + h_{n_p} g(u_{n_p}) \right) dx + (1-\tau) \int_0^a \phi \left(v_{n_p}^n + h_{n_p} u_{n_p} \right) \end{aligned} \right.$$

Comme U_{n_p} , V_{n_p} , u_{n_p} , et v_{n_p} convergent dans $\mathcal{C}^1([0, a])$ vers U , V , u et v , alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgues (cf [0.2], [0.6]), les intégrales dans (1.62) convergent et l'obtient à la limite (en notant que J est continue d'après le remarque (1.9), P.I.41) :

$$\begin{cases} U'' - c_\tau U' = \tau \left(-v^n f(u) + hg(u) \right) + (1-\tau) \left(-v^n + hu \right). \\ V'' - c_\tau V' = \tau v^n f(u) + (1-\tau) v^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'(0) = c_\tau U(0) + \tau h J(u(0), c_\tau, h). \\ V'(0) = c_\tau (V(0) - 1). \end{cases} \quad \begin{cases} U(a) = 0. \\ V(a) = 0. \end{cases}$$

autrement dit: $(U, V) = K_\tau(u, v)$.

Enfin, en passant à la limite, quand $n_p \rightarrow +\infty$ dans l'égalité:

$$H_{n_p} = h_{n_p} - u_{n_p}(0) + \theta,$$

on obtient:

$$H = h - u(0) + \theta.$$

On a donc montré que:

$$(U, V, H) = K_\tau(u, v, h),$$

ce qui prouve que K_τ , et par conséquent K , est continu, précompact donc compact. L'uniforme continuité en τ se montre aisément.

Le lemme (1.15) est prouvé. ■

LEMME (1.16):

Soit I l'opérateur identité dans X . On pose: $F_\tau = I - K_\tau$. Alors:
 $\exists R > 0$ tel que: $\deg(F_\tau, B_R, 0)$ est bien défini, B_R désignant la boule ouverte de rayon R dans X .

Preuve:

On a vu (Lemme 1.14) que:

$\|u_a\|_{C^1(\bar{I}_a)} \leq 1+c$, $\|v_a\|_{C^1(\bar{I}_a)} \leq 1+c$, et que: $0 < h_a < H$, où H est une

constante positive. De plus, $(c_{ad})_\tau$ se majore indépendamment de τ :

En effet (cf [A.5]):

$$\exists \bar{c}_{ad} > 0 \text{ tel que: } (c_{ad})_\tau \leq \bar{c}_{ad}.$$

ce qui, avec (1.57), donne:

$$c_\tau \leq \frac{c}{c_{ad}} \bar{c}_{ad} \equiv \bar{c}$$

D'où les estimations indépendantes de τ pour une solution

(u_τ, v_τ, h_τ) :

$$\|u_\tau\|_{C^1(\bar{I}_a)} \leq 1+c, \quad \|v_\tau\|_{C^1(\bar{I}_a)} \leq 1+c \text{ et } 0 < h_\tau < H \equiv \frac{5}{2} \frac{c_{ad}^2}{G(\theta)} < \bar{h} = \frac{5}{2} \frac{\bar{c}^2}{G(\theta)}.$$

Enfin, en posant:

$$M \equiv \sup(\bar{h}, 1+c) \text{ et } R \equiv M+1,$$

on obtient:

$$\|(u, v, h)_\tau\|_X \leq M < R.$$

Donc:

$$(u_\tau, v_\tau, h_\tau) \in \Omega = B_R = \left\{ (u, v, h) \in X; h > 0 \text{ et } \|(u, v, h)\|_X < R \right\}$$

Par conséquent:

$$(u_\tau, v_\tau, h_\tau) \notin \partial\Omega,$$

soit:

$$0 \notin F_\tau(\partial\Omega) \Rightarrow \deg(F_\tau, B_R, 0) \text{ existe et est bien défini.}$$

Le lemme (1.16) est donc prouvé. ■

Maintenant que ce degré est défini on va pouvoir le calculer:

C/ Calcul du degré topologique:

On se propose dans ce paragraphe de montrer que:

$$\deg(I-K_\tau, B_R, 0) \neq 0.$$

Pour ce fait, on utilise la propriété d'invariance homotopique du degré topologique pour écrire:

$$\deg(I-K_1, B_R, 0) = \deg(I-K_\tau, B_R, 0) = \deg(I-K_0, B_R, 0), \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

Il suffira alors de montrer que:

$$\deg(I-K_0, B_R, 0) \neq 0.$$

On va donc expliciter:

$$\begin{aligned} K_0: X &\longrightarrow X \\ (u, v, h) &\longmapsto (U, V, h - u(0) + \theta) \end{aligned}$$

tel que:

$$(1.63) \quad \begin{cases} U_0'' - c_0 U_0' = -v^n + hu. \\ V_0'' - c_0 V_0' = v^n. \end{cases}$$

$$(1.64) \quad \begin{cases} U_0'(0) = c_0 U_0(0); \quad U_0(a) = 0. \\ V_0'(0) = c_0 [V_0(0) - 1]; \quad V_0(a) = 0. \end{cases}$$

Nous allons donc prouver le:

THEOREME (1.17):

Soit $(c_{ad})_0$ la valeur propre du problème (1.58)-(1.59) lorsque $\tau=0$. Alors:

$\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[$, $\exists a_0 = a_0(c_0) > 0$ telle que:

$$\deg(I-K_0, B_R, 0) \neq 0, \quad \forall a > a_0.$$

C.1°/ Principe de la démonstration:

1) Remarquant que la 2^{ème} équation de (1.63) est découplée de la 1^{ère}, on écrit: $K_0 = (K_0^1, K_0^2)$ avec:

$$(1.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0^1: \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \times \mathbb{R} \\ \quad (u, h) \longmapsto (U, h - u(0) + \theta) \\ K_0^2: \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \longrightarrow \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \\ \quad v \longmapsto v \end{array} \right.$$

Puis on pose:

$$\Omega_2 = \left\{ u \in \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) / \|u\|_{\mathbb{C}^1(\bar{I}_a)} < R \right\}, \text{ et } \Omega = \Omega_2 \times]0, H[.$$

2) On montre ensuite que:

$$\deg(I - K_0^i, \Omega_i, 0) \neq 0, \quad \forall i=1, 2.$$

Pour cela, on prouvera que K_0^i admet un unique point fixe dans Ω_i , $\forall i=1, 2$. On conclura ensuite, grâce à la propriété multiplicative du degré topologique que:

$$\deg(I - K_0, \Omega, 0) = \prod_{i=1}^2 \deg(I - K_0^i, \Omega_i, 0) \neq 0.$$

3)a/ On commencera par prouver un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation:

$$K_0^2(v) = v, \quad v \in \Omega_2.$$

b/ On utilise le fait que (u, h) est point fixe de K_0^1 , si et seulement si, par définition:

$$(1.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' - cu' = -v^n(x) + hu. \\ u'(0) = cu(0), \quad u(a) = 0, \quad u(0) = \theta. \end{array} \right.$$

On aura à considérer aussi le problème précédent sans la condition $u(0)=\theta$, soit le problème:

$$(1.67) \quad \begin{cases} u'' - cu' = -v^n + hu. \\ u'(0) = cu(0); \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montrera (théorème 1.19) que:

$\forall c > 0$ et $\forall h \geq 0$, le problème (1.67) admet une unique solution u_h dans $C^\infty([0, a])$ telle que:

$$u_h > 0, \quad \forall x \in [0, a[.$$

Ceci nous permettra de définir une application:

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\psi = \psi_c) \\ h &\longmapsto u_h(0). \end{aligned}$$

On montrera (proposition 1.20) que ψ est continue, strictement décroissante et qu'elle tend vers 0, quand $h \rightarrow +\infty$.

On en déduira, grâce notamment à la proposition (1.21) qu'il existe un unique $h > 0$ tel que: $u(0) = \theta$, ce qui prouvera l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.66).

La condition suffisante d'existence interviendra dans la proposition (1.21), et représente le point capital de ce chapitre; la démonstration, basée sur un lemme de monotonie et de comparaison passède l'avantage de marcher même lorsque $\Lambda \neq 1$, bien que la condition suffisante diffère (cf chapitre II).

C.2°/ Concernant K_0^2 , on va immédiatement prouver le:

THEOREME (1.18):

$$\left| \begin{aligned} &\forall c_0 > 0, K_0^2 \text{ admet un unique point fixe } v_0. \text{ De plus:} \\ &v_0 \in C^\infty([0, a]) \text{ et } v_0 > 0, \quad \forall x \in [0, a[. \end{aligned} \right.$$

Démonstration:

v_0 est point fixe de K_0^2 si et seulement si:

$$(1.68) \quad \begin{cases} v_0'' - cv_0' = v_0^n. \\ v_0'(0) = c[v_0(0) - 1]; \quad v_0(a) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_0'' = v_0^n + c_0 v_0'. \\ v_0'(0) = c_0[v_0(0) - 1]; \quad v_0(a) = 0. \end{cases}$$

Le théorème sur les équations différentielles ordinaires (cf [A.3], p.753) qu'on a appliqué à la recherche de u_- dans $[-a, 0]$ marche encore ici (cf § I.3.1).

On peut donc vérifier aisément ses conditions d'application:

i/ Satisfaite.

ii/ $f(x, y, z) = y^n + cz$ est continue sur:

$$S = \left\{ (x, y, z) / 0 \leq x \leq a, 0 < y < 1, 0 < |z| < c \right\}$$

iii/ et iv/ f est croissante en y , et lipschitienne en z , pour tout $(x, y, z) \in S$.

Il existe donc v_0 unique solution de (1.68), $\forall c_0 > 0$.

De plus, $v_0 \in H^1(]0, a[)$ (se montre aisément), donc $v_0 \in C^0([0, a])$

(injection de Sobolev). Il résulte alors de (1.68) que:

$v_0 \in C^2([0, a])$, puis par itération, $v_0 \in C^\infty([0, a])$. La positivité de v_0 se montre sans difficulté à partir de (1.68).

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'opérateur K_0^1 .

C.3°/ Etude du problème (1.67):

Pour ce problème, on se propose de prouver le résultat suivant:

THEOREME (1.19):

Supposons $c_0 > 0$ donné. Alors:

$\forall h_0 \geq 0, \exists u_0 \in \mathbb{C}^2([0, a])$ solution unique de (1.67). De plus,

$\forall x \in [0, a[, u_0(x) > 0.$

Démonstration:

1°/ Existence:

(1.67) est un problème linéaire à valeur propre h auquel on peut appliquer l'alternative de Fredholm (cf 5°/ p. 0.12); mais on peut aussi l'écrire comme un problème de Sturm-Liouville linéaire:

$$(\Pi) \quad \begin{cases} (p(x)u')' + q(x, h)u = H(x). \\ u'(0) = cu(0); \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} p(x) = e^{-cx} > 0, \quad p(x) \in \mathbb{C}^1([0, a]). \\ q(x, h) = -he^{-cx} \in \mathbb{C}^0([0, a]). \\ H(x) = -v^n(x)e^{-cx}. \end{cases}$$

On applique donc au problème (Π) le théorème sur la fonction de Green (cf [0.6], [0.17]) qui assure l'existence d'une unique solution u_0 , si h n'est pas valeur propre du problème homogène associé:

$$(\Pi)_h: \quad \begin{cases} (u'e^{-cx})' - he^{-cx} = 0. \\ u'(0) = cu(0), \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

Il est clair que:

$$(\Pi)_h \Leftrightarrow (\Pi)'_h: \begin{cases} u'' - cu' - hu = 0. \\ u(0) = cu(0); \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associé à $(\Pi)'_h$ étant: $\Delta = c^2 + 4h$, on en déduit que $(\Pi)'_h$ et donc $(\Pi)_h$ n'admet aucune solution non triviale si $h \geq -\frac{1}{4} c^2$.

Il en résulte alors que $h \geq -\frac{1}{4} c^2$, et en particulier $h \geq 0$ n'est pas valeur propre de $(\Pi)_h$. En conséquence, le problème (1.67) possède, si $h \geq 0$, une unique solution u_0 .

2°/ Positivité de la solution:

Pour $h \geq 0$, $u_0 \geq 0$ (lemme 1.11). Vérifions qu'en fait: $u_0(0) > 0$:

Raisonnons par l'absurde en supposant $u_0(0) = 0$, alors $u'_0(0) = 0$ (d'après 1.67) et: $u''_0(0) = -v^n(0) < 0$. Par suite, $u''_0 < 0$ au voisinage de 0; on en déduit $u'_0 < u'_0(0) = 0$ dans ce voisinage puis $u_0 < u_0(0) = 0$ ce qui contredit la positivité de u

3°/ Régularité de la solution:

On fait le même raisonnement qu'au théorème (1.18), en partant de $u_0 \in H^1(]0, a[)$ (lemme 1.11 et proposition 1.12) pour montrer que: $u_0 \in C^\infty([0, a])$. Le théorème (1.19) est donc prouvé. ■

C.4°/a) L'existence et l'unicité de $u_h(0) > 0$ (théorème 1.19) nous permet, pour tout $c > 0$, de définir sans ambiguïté l'application:

$$(1.69) \quad \begin{aligned} \psi_c: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ h &\longmapsto u_h(0) \end{aligned}$$

b) La formule de Green nous donne aussi la forme de la solution du problème (1.67):

$$u_0(x) = \int_x^a G(x,y)H(y)dy,$$

où G est la fonction de Green. Un calcul explicite fournit:

$$(1.70) \quad u_0(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} + e^{r_1 x} \int_x^a e^{(r_2 - r_1)t} dt \int_0^t e^{-r_2 s} V(s) ds$$

avec: $V(s) = v_0^n(s)$, et k_1, k_2 deux constantes déterminées par les conditions aux limites (1.67), i.e solutions du système:

$$(1.70) \text{Bis} \quad \begin{cases} k_1 e^{r_1 a} + e^{r_2 a} = 0. \\ k_1 r_2 + k_2 r_1 = -r_2 \int_0^a e^{(r_2 - r_1)t} dt \int_0^t e^{-r_2 s} V(s) ds. \end{cases}$$

où:

$$r_i = \frac{c - (-1)^i \sqrt{c^2 + 4h}}{2}; \quad i=1,2.$$

Il en découle, en particulier:

$$\psi_c(h) = u_h(0) = k_1 + k_2 + \int_0^a e^{(r_2 - r_1)t} dt \int_0^t e^{-r_2 s} V(s) ds$$

qu'on peut également exprimer de la façon suivante, après avoir calculé k_1 et k_2 :

$$(1.71) \quad \psi_c(h) = I \left\{ 1 + \frac{r_2 (e^{r_2 a} - e^{r_1 a})}{\Delta} \right\}$$

où l'on a posé:

$$\Delta = r_1 e^{r_1 a} - r_2 e^{r_2 a} > 0, \quad \forall c > 0.$$

et,

$$I = \int_0^a e^{(r_2 - r_1)t} dt \int_0^t e^{-r_2 s} V(s) ds > 0, \quad \forall c > 0.$$

La proposition suivante résume les propriétés satisfaites par ψ :

PROPOSITION (1.20):

$\forall c > 0$, ψ_c est une application continue, positive, strictement décroissante et tend vers zéro quand $h \rightarrow +\infty$.

Démonstration:

1^{ère} étape:

$\psi(h) \equiv u_h(0)$ est positive (théorème 1.19, ou bien à partir de l'expression 1.71), continue (se montre directement sur l'équation 1.67 ou grâce à 1.71 et à la continuité des r_i , $\forall i=1,2$). Enfin, quand $h \rightarrow +\infty$, on montre sans difficulté en utilisant les équivalents: $r_1 \simeq 2\sqrt{h}$ et $r_2 \simeq -2\sqrt{h}$, que:

$$\psi(h) \simeq 2I \text{ et que: } 0 < I \leq \int_0^a t e^{-4t\sqrt{h}} e^{2t\sqrt{h}} dt$$

ou encore:

$$0 \leq I \leq \frac{a}{2\sqrt{h}} (1 - e^{-2a\sqrt{h}}) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0.$$

Par suite: $\lim_{h \rightarrow +\infty} \psi(h) = 0$. Pour en terminer avec la 1^{ère} étape,

écrivons l'expression de $\psi(0)$ en faisant $h=0$ dans (1.71), on obtient:

$$(1.72) \quad \psi_c(0) = \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds > 0, \quad \forall c > 0.$$

2^{ème} étape: ψ est strictement décroissante:

En effet, supposons $0 < h_1 < h_2$ et posons $w \equiv u_1 - u_2$, où u_1 et u_2 sont les solutions de (1.67) associées respectivement à h_1 et h_2 . Alors w est solution du problème aux limites:

$$(1.73) \quad \begin{cases} w'' - cw' = h_1 u_1 - h_2 u_2 \leq h_2 w \text{ (car } u_1 \geq 0, \text{ d'après théorème 1.19)} \\ w'(0) = cw(0); \quad w(a) = 0. \end{cases}$$

Comme $h_2 > 0$, le théorème de comparaison pour les équations différentielles ordinaires (cf [0.8], [0.18]) s'applique et donne:

$$w(x) \geq 0 \Leftrightarrow u_1(x) \geq u_2(x), \quad \forall x \in [0, a].$$

On va maintenant montrer qu'en fait $w(0) > 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant $w(0) = 0$. Alors:

$w'(0) = 0$ (d'après 1.73). Posons ensuite: $u(0) \equiv u_1(0) = u_2(0)$, puis introduisons la fonction $d(x) \equiv h_1 u_1 - h_2 u_2$. On alors:

$d(0) = (h_1 - h_2)u(0) < 0$ (car $u(0) > 0$ et $h_1 < h_2$). De plus:

Comme d est une fonction continue, alors: $\exists \alpha > 0$ tel que:

$$d(x) < 0, \quad \forall x \in [0, \alpha] \Rightarrow \int_0^x d(s) ds < 0, \quad \forall x \in [0, \alpha].$$

d'où, en intégrant l'équation dans (1.73) de 0 à x :

$$w' - cx < 0, \quad \forall x \in [0, \alpha] \Leftrightarrow (we^{-cx})' < 0, \quad \forall x \in [0, \alpha].$$

Une nouvelle intégration de 0 à x fournit l'estimation:

$w(x) < 0, \forall x \in [0, \alpha]$ (car $w(0) = 0$, par hypothèse)

ce qui contredit $w(x) \geq 0$ sur $[0, a]$.

On a donc montré que si $0 < h_1 < h_2$, alors:

$$w(0) > 0 \Leftrightarrow u_1(0) > u_2(0) \Leftrightarrow \psi(h_1) > \psi(h_2)$$

La proposition (1.20) est donc prouvée. ■

C.5°/ Une dernière et importante étape dans le calcul du degré de K_0^1 est donnée par la proposition suivante:

PROPOSITION (2.21):

$\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[, \exists a_0 = a_0(c_0) > 0$ tel que:

$$(1.74) \quad 1 - \theta - e^{-ac_0} - v_0(0) > 0, \forall a > a_0.$$

où v_0 est le point fixe de K_0^2 .

La démonstration de cette proposition, essentiellement technique découlera d'un lemme fondamental qu'on commencera d'abord par énoncer et dont on donnera la démonstration juste après celle de la proposition (1.21):

LEMME (1.22): (Lemme de monotonie)

Soit $(v_c)_a$ le point fixe de K_0^2 et $\tilde{v}_c$ la solution du problème aux limites:

$$(1.73) \quad \begin{cases} \tilde{v}'' - c\tilde{v}' = \tilde{v}^n. \\ \tilde{v}'(0) = c(\tilde{v}(0) - 1) ; \tilde{v}(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Alors, l'application $\phi: \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow]0, 1[$
 $c \longmapsto \tilde{v}_c(0)$

est continue, strictement croissante et vérifie:

$$(v_c)_a(0) \leq \phi(c), \forall c > 0, \text{ et } \phi((c_{ad})_0) = 1 - \theta.$$

REMARQUE (1.23):

Il est clair que: $\tilde{v}_c = \lim_{a \rightarrow +\infty} (v_c)_a$ où a est le point fixe de K_0^2 .

A/Démonstration de la proposition (1.21):

Soit v_{c_0} et $\tilde{v}_{c_0}$ les solutions respectives de (1.68) et (1.75). On considère $(c_{ad})_0$ la valeur propre du problème adiabatique (1.58)-(1.59) pour $\tau=0$. Supposons maintenant satisfaite la condition:

$$(1.76) \quad 0 < c_0 < (c_{ad})_0$$

Le lemme (1.22) nous permet d'écrire:

$$(1.77) \quad v_{c_0}(0) \leq \tilde{v}_{c_0}(0)$$

D'autre part, compte tenu de (1.76) et de la croissance en c de la fonction $\tilde{v}_c(0)$, on a:

$$(1.78) \quad \tilde{v}_{c_0}(0) < \tilde{v}_{(c_{ad})_0}(0)$$

L'estimation suivante découle alors naturellement de (1.77) et de (1.78):

$$(1.79) \quad 0 < v_{c_0}(0) \leq \tilde{v}_{c_0}(0) < \tilde{v}_{(c_{ad})_0}(0)$$

De plus, d'après le lemme (1.22)

$$\tilde{v}_{(c_{ad})_0}(0) = 1 - \theta = \phi(c_{ad}).$$

ce qui, avec (1.79) donne finalement:

$$(1.80) \quad 0 < v_{c_0}(0) \leq \tilde{v}_{c_0}(0) < \tilde{v}_{(c_{ad})_0}(0) = 1 - \theta.$$

Il suffit alors de prendre:

$$a_0 = -\frac{1}{c_0} \text{Ln} \left(1 - \theta - \tilde{v}_{c_0}(0) \right)$$

(a_0 ainsi défini est donc indépendant de a).

De cette définition on déduit que:

(*) $a_0 > 0$ est bien défini; en effet:

$$\begin{cases} 1-\theta-\tilde{v}_{c_0}(0) > 0 & (\text{d'après 1.80}) \\ 1-\theta-\tilde{v}_{c_0}(0) < 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (**) \quad a > a_0 & \Leftrightarrow e^{-ac_0} < 1-\theta-\tilde{v}_{c_0}(0) \\ & \Leftrightarrow e^{-ac_0} + \tilde{v}_{c_0}(0) < 1-\theta. \end{aligned}$$

D'où, d'après (1.80):

$$e^{-ac_0} + v_{c_0}(0) \leq e^{-ac_0} + \tilde{v}_{c_0}(0) < 1-\theta.$$

soit:

$$(1.81) \quad 1-\theta-e^{-ac_0}-v_{c_0}(0) > 0$$

On a donc montré :

$$\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[, \exists a_0 = -\frac{1}{c_0} \ln(1-\theta-\tilde{v}_{c_0}(0)) \text{ tel que:}$$

$$\forall a > a_0, 1-\theta-e^{-ac_0}-v_{c_0}(0) > 0.$$

d'où la proposition (1.21).■

Afin que la démonstration de la proposition (1.21) soit complète, il nous reste plus qu'à prouver le lemme (1.22):

B/Démonstration du lemme (1.22):

a) Soit $\tilde{v}_c$ solution du problème (1.75); cette solution est unique grâce à la stricte croissance de l'application: $s \longmapsto s^n$, $\forall s > 0$. ϕ est donc bien défini.

Il est également facile de voir que: $\tilde{v}_c$ est continue, positive et décroissante. Enfin, vue la condition aux limites en 0 dans (1.73): $\tilde{v}_c(0) \leq 1$. Et l'on peut vérifier que: $\tilde{v}_c(0) < 1$. En effet dans le cas contraire, on a: $\tilde{v}'_c(0) = 0$, puis: $\tilde{v}''_c(0) = \tilde{v}_c^n(0) > 0$. On en déduit que $\tilde{v}'_c > 0$ au voisinage de 0 ce qui contredit la monotonie de $\tilde{v}_c$. Par conséquent:

$$0 < \tilde{v}_c(0) < 1, \forall c > 0.$$

De plus, par définition de $(c_{ad})_0$ et d'après l'unicité de $\tilde{v}_c$, on a:

$$(1.82) \quad \phi((c_{ad})_0) = \tilde{v}_{(c_{ad})_0}(0) = 1 - \theta.$$

b) Montrons que ϕ est continue, strictement décroissante:

On considère alors c_1 et c_2 deux constantes strictement positives, et $\tilde{v}_{c_1}$, $\tilde{v}_{c_2}$ les solutions respectives du problème (1.75). Ecrivons le problème satisfait par $w = \tilde{v}_{c_1} - \tilde{v}_{c_2}$:

$$(1.83) \quad \begin{cases} w'' - c_1 w' = (c_1 - c_2) \tilde{v}_2 + (\tilde{v}_1^n - \tilde{v}_2^n). \\ w'(0) = c_1 w(0) + (c_1 - c_2) [\tilde{v}_2(0) - 1]; \quad w(\infty) = 0; \end{cases}$$

En se servant de l'identité:

$$\tilde{v}_1^n - \tilde{v}_2^n = A(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2), \text{ où } A = \sum_{p=0}^{n-1} \tilde{v}_1^p \cdot \tilde{v}_2^{n-p-1} = A(x) > 0,$$

(1.83) s'écrit aussi:

$$(1.83) \text{ Bis} \quad \begin{cases} w'' - c_1 w' - Aw = (c_1 - c_2) \tilde{v}_2'. \\ w'(0) - c_1 w(0) = (c_1 - c_2) [\tilde{v}_2(0) - 1]; \quad w(\infty) = 0. \end{cases}$$

i/ En faisant $c_1=c$ et $c_2=c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$, il est facile de voir que:

$w_n = \tilde{v}_c - \tilde{v}_{c_n}$ est borné dans $W^{2,\infty}(]0,+\infty[)$ donc converge dans $C^1_{loc}([0,+\infty[)$ vers w solution du problème:

$$\begin{cases} w'' - cw' - Aw = 0. \\ w'(0) - cw(0) = 0; \quad w(\infty) = 0. \end{cases}$$

Par suite: $w(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$. D'où la continuité de ϕ .

ii/ Supposons maintenant $0 < c_1 < c_2$, on déduit de (1.83)Bis les estimations:

$$(1.84) \quad \begin{cases} w'' - c_1 w' - Aw \geq 0. \\ w'(0) - c_1 w(0) > 0; \quad w(\infty) = 0. \end{cases}$$

Or $A(x) > 0$, IL suffit alors de raisonner par l'absurde sur (1.84) pour montrer que:

$$w(x) < 0, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

D'où:

$$w(0) < 0 \Leftrightarrow \phi(c_1) < \phi(c_2),$$

ϕ est donc strictement décroissante.

c) Pour terminer la démonstration du lemme (1.22), vérifions:

$$(1.85) \quad \forall c > 0, \quad v_c(0) \leq \phi(c):$$

En effet, comme $\tilde{v} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, $\tilde{v}_c$ satisfait sur $(0, a)$, $\forall a > 0$:

$$\begin{cases} \tilde{v}'' - c\tilde{v}' = \tilde{v}^n. \\ \tilde{v}'(0) = c[\tilde{v}(0) - 1]; \quad \tilde{v}(a) \geq 0. \end{cases}$$

D'autre part, v_c le point fixe de K_0^2 vérifie:

$$\begin{cases} v'' - cv' = v^n. \\ v'(0) = c[v(0) - 1]; \quad v(a) = 0. \end{cases}$$

Utilisant alors le théorème de comparaison sur les équations différentielles (cf [0.18]), on montre sans difficulté que:

$$v_c(x) \leq \tilde{v}_c(x), \quad \forall x \in [0, a]$$

(1.85) et le lemme (1.22) en découlent alors facilement. ■

C.6°/ On est maintenant en mesure d'achever le calcul de:

$$\deg(I - K_0^i, \Omega_i, 0), \text{ pour } i=1, 2; \text{ et de prouver le:}$$

THEOREME (1.23):

Soit $(c_{ad})_0$ la valeur propre du problème (1.58)-(1.59) lorsque $\tau=0$. Alors:

$\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[, \exists a_0 = a_0(c_0)$ tel que:

$\deg(I - K_0^i, \Omega_i, 0) \neq 0, \forall i=1 \text{ ou } 2, \text{ et } \forall a > a_0.$

Démonstration:

Rappelons l'opérateur $K = (K_0^1, K_0^2)$ avec:

$$\begin{array}{ccc} K_0^1: \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \times \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C}^1(\bar{I}) \times \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (U, h - u(0) + \theta) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K_0^2: \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) & \longrightarrow & \mathbb{C}^1(\bar{I}_a) \\ v & \longmapsto & v \end{array}$$

ainsi que les ensembles:

$$\Omega_2 = \left\{ u \in C^1(\bar{I}_a) / \|u\|_{C^1(\bar{I}_a)} < R \right\}$$

et,

$$\Omega_1 = \Omega_2 \times]0, H[.$$

1°/ D'après le théorème (1.18), on a:

$$(1.86) \quad \deg(I - K_0^2, \Omega_2, 0) \neq 0.$$

2°/ D'autre part, une simple intégration dans l'équation (1.68) fournit:

$$(1.87) \quad \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds = 1 - e^{-ac} - v(0).$$

ou encore, compte tenu de (1.72):

$$(1.88) \quad \psi(0) = 1 - e^{-ac} - v_0(0)$$

D'après la proposition (1.21), $\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[$, $\exists a_0 > 0$ tel que:

$$\forall a > a_0, \psi_c(0) > \theta$$

Comme ψ est une fonction continue, strictement décroissante (proposition 1.20), alors:

$$(1.89) \quad \exists! h > 0 \text{ tel que } \psi(0) = \theta.$$

ce qui avec le théorème (1.19) assure l'existence et l'unicité d'un couple (u, h) solution de (1.66), donc point fixe de K^1 , par suite (cf [C.6]):

$$(1.90) \quad \deg(I-K_0^1, \Omega_1, 0) \neq 0, \quad \forall a > a_0.$$

(1.86) et (1.90) rendent complète la démonstration du théorème (1.23), et donc celle du théorème (1.17).

I.4.4 RESULTAT D'EXISTENCE POUR $(P_2)_a$:

Grâce au calcul du degré topologique effectué dans la section 1.4.3, on est maintenant en mesure d'énoncer le résultat d'existence suivant:

THEOREME (1.24):

$$\left| \begin{array}{l} \forall c \in]0, c_{ad}[, \exists a_0 = a_0(c) > 0 \text{ tel que:} \\ \text{le problème } (P_2)_a \text{ admet au moins une solution:} \\ (u_a, v_a, h_a) \in [C^2([0, a])]^2 \times \mathbb{R}^+, \forall a > a_0. \end{array} \right.$$

Démonstration:

En vertu du théorème (1.17), on sait que:

$$\forall c_0 \in]0, (c_{ad})_0[, \deg(I-K_0, B_R, 0) \neq 0.$$

De plus, grâce à l'expression de c_τ dans (1.57), on a:

$$c_0 \in]0, (c_{ad})_0[\Leftrightarrow c \in]0, c_{ad}[.$$

Par suite,

$$\forall c \in]0, c_{ad}[, \deg(I-K_0, B_R, 0) \neq 0$$

Enfin, par déformation homotopique du degré, on a:

$$(1.91) \quad \forall c \in]0, c_{ad}[, \deg(I-K_1, B_R, 0) \neq 0,$$

K_τ ayant été défini § I.4.3, pour tout $\tau \in [0, 1]$.

Une propriété importante du degré (Cf [C.5], [C.6]) assure, en

vertu de (1.91) l'existence, pour tout $c \in]0, c_{ad}[$, d'un point fixe dans B_R pour l'opérateur K_1 , autrement dit:

$\forall c \in]0, c_{ad}[$, $(P_2)_a$ admet au moins une solution $(u_a, v_a, h_a) \in B_R$, donc $h_a > 0$ et $(u_a, v_a) \in (C^1(\bar{I}_a))^2$. Comme f et g sont lipschitziennes (H-1, H-2), alors il est clair à partir du système $(P_2)_a$ que: $(u_a, v_a) \in (C^2([0, a]))^2$.

Le théorème (1.24) est donc prouvé. ■

I.4.5 PASSAGE LA LIMITE, quand $a \rightarrow +\infty$:

Les solutions du problème $(P_2)_a$ obtenues dans la section précédente (pour $0 < c < c_{ad}$) vont nous permettre, grâce aux estimations indépendantes de a de passer à la limite $a \rightarrow +\infty$ et d'obtenir ainsi l'existence d'au moins une solution au problème $(P_2)_a$. Pour ce fait, on commence par prolonger u_a et v_a à $\mathbb{R}^+$ tout entier en posant:

$$u_a(x) = v_a(x) = 0, \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

On obtient alors le résultat précis suivant:

THEOREME (1.25):

Soit (u_a, v_a, h_a) une solution du problème $(P_2)_a$. Alors:
 Sous les hypothèses (H-1, H-2), il existe $a_0 > 0$ et une suite croissante $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_n > a_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ telles que:
 $(u_{a_n}, v_{a_n}, h_{a_n})$ converge dans la topologie de $C^1_{loc}(\mathbb{R}) \times C^1_{loc}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$
 vers (u, v, h) solution du problème (P_2) .

Démonstration:

Soit (u_a, v_a, h_a) solution du problème $(P_2)_a$. On sait (lemme 1.14) que:

(u_a, v_a) appartient à un borné de $(W^{2,\infty}(0,a))^2$ et que:

$\exists H > 0$, indépendant de a tel que: $0 < h_a < H$.

En particulier, $\{u_a\}$ est borné dans $H^2(K)$, $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^+$. Or, l'injection: $H^2(K) \hookrightarrow C^1(K)$ est compacte; il existe donc $a_0 > 0$ fixé et une suite $a_n \nearrow +\infty$, $a_n > a_0$ telles que:

(u_{a_n}, v_{a_n}) converge dans $(C^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$ vers (u, v) solution du problème

$$(1.92) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\ -v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

ainsi que les propriétés qualitatives suivantes:

$$\begin{cases} 0 \leq u < 1. \\ 0 \leq v < 1. \\ -c < v' < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} c < u' < c. \\ 0 \leq h \leq H. \end{cases}$$

où h est une valeur d'adhérence de h_a . D'après la proposition (1.10), il suffit de prendre $c < c_{ad}$ pour avoir $h \neq 0$.

De plus, les conditions aux limites en 0 se déduisent aisément de (1.40):

$$(1.93) \quad \begin{cases} u'(0) = u'_-(0). \\ u(0) = \theta. \\ v'(0) = c[v(0) - 1]. \end{cases}$$

Après avoir montré comme au lemme (1.2) que:

$$u'(+\infty) = v'(+\infty) = u''(+\infty) = v''(+\infty) = 0,$$

on pose: $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ et $l' = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$. Grâce à (1.92), l et l'

sont solutions du système:

$$(1.94) \quad \begin{cases} (l')^n f(l) - hg(l) = 0. \\ (l')^n f(l) = 0. \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations dans (1.94), on aboutit à:

$hg(l)=0 \Rightarrow l=0$ (car $h \neq 0$). Enfin, vue l'hypothèse (H-2): $l=0$, i.e.: $u(+\infty)=0$ et $v'(+\infty)=0$, ce qui avec (1.92) et (1.93) assure l'existence d'au moins une solution au problème (P_2) .

I.5 LE THEOREME PRINCIPAL:

Les études du problème (P_1) (section I.3) et du problème (P_2) (section I.4) nous permettent d'énoncer un résultat d'existence globale au problème (P_{na}) : (1.1)-(1.2). On a donc le:

THEOREME (1.26): (condition suffisante d'existence)

Supposons $c \in]0, c_{ad}[$. Alors, sous les hypothèses (H-1)-(H-3) le problème (P_{na}) admet au moins une solution (u, v, h) , avec $h > 0$ et $(u, v) \in C^2(\mathbb{R})$.

Démonstration:

Notons (u_-, v_-) , (u_+, v_+) les solutions respectives des problèmes (P_1) et (P_2) (u_+ et v_+ ayant été obtenues sous la condition suffisante $0 < c < c_{ad}$).

Soit u et v les fonctions définies par:

$$u(x) = \begin{cases} u_-(x), & x \in \mathbb{R}^- \\ u_+(x), & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad \text{et} \quad v(x) = \begin{cases} v_-(x), & x \in \mathbb{R}^- \\ v_+(x), & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Alors u et v vérifient:

$$\begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\ -v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases}$$

En effet, v satisfait (par définition de v , v_- et v_+):

$$\begin{aligned} v'' - cv' &= \begin{cases} v_-'' - cv_-', & x \leq 0. \\ v_+'' - cv_+', & x \geq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} v_-^n f(u_-), & x \leq 0. \\ v_+^n f(u_+), & x \geq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} v^n f(u), & x \leq 0. \\ v^n f(u), & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme, $u_+(0) = u_-(0)$, $u'_+(0) = u'_-(0)$ et $v_-^n(0) f[u_-(0)] = v_+^n(0) f[u_+(0)] = 0$ (car $f(0) = 0$), alors: $v'' - cv' = v^n f(u)$, sur $\mathbb{R}$. Le même raisonnement tient pour u .

Enfin, les conditions aux limites sont:

$$(1.96) \quad \begin{cases} u(-\infty) = u_-(+\infty) = 0; & u(+\infty) = u_+(+\infty) = 0. \\ v(-\infty) = v_-(-\infty) = 1; & v'(+\infty) = v'_+(+) = 0. \end{cases}$$

Donc (u, v, h) est solution de (1.1)-(1.2) pour $0 < c < c_{ad}$. Enfin, $u_+ \in C^0(\mathbb{R}^+)$, puis $u \in C^2(\mathbb{R}^+)$ d'après (1.95) (car f et g sont lipschitziennes). Comme $u_- \in C^2(\mathbb{R}^-)$ (théorème 1.9), alors $u \in C^2(\mathbb{R})$.

Le théorème (1.26) est donc montré. ■

I.6 CONDITION NECESSAIRE D'EXISTENCE au problème (P_{NA}) :

On va montrer le résultat suivant qui permet de donner aussi une estimation de la constante de flux massique c :

THEOREME (1.27):

Soit (u, v, h) une solution du problème (1.1)-(1.2), associé au paramètre $c \geq 0$. Alors:

$$0 < c < c_{ad}$$

où c_{ad} correspond au problème adiabatique (1.3)-(1.4).

Démonstration:

On considère (u, v, h) une solution non triviale du problème (1.1)-(1.2).

a/ Montrons d'abord que: $c > 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant que $c = 0$. Alors (P_{NA}) se réduit à:

$$(1.97) \quad \begin{cases} u'' = -v^n f(u) + hg(u). \\ v'' = v^n f(u). \end{cases}$$

On intègre de $(-\infty)$ à $(+\infty)$ chacune des équations de (1.97) après avoir montré (comme au lemme 1.2) que: $u'(+\infty) = u'(-\infty) = 0$ et $v'(+\infty) = v'(-\infty) = 0$ on obtient:

$$(1.98) \quad \int_0^{+\infty} v^n f(u) dx = 0,$$

et,

$$(1.99) \quad h \int_{-\infty}^{+\infty} g[u(x)] dx = 0.$$

De (1.98) découle: $v^n f(u) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^+$, puis $v'' \equiv 0$ (grâce à 1.97), d'où: $v(x) = v(0)$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, l'expression de $v(x)$ sur $\mathbb{R}^-$ donne pour $c = 0$: $v(x) = v(0)$ sur $\mathbb{R}^-$, et donc:

$$(1.100) \quad v(x) = v(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, (1.99) donne $g(u) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, d'où d'après (H-2):

$$(1.101) \quad u \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(1.100) et (1.101) contredisent donc l'hypothèse d'existence de solutions non triviales (telles que $u(0) = \theta$).

b/ Montrons maintenant que: $c < c_{ad}$.

La démonstration est basée sur un résultat de comparaison entre les problèmes (P_{ad}) et (P_{na}) . La fonction $(1-u)^n f(u)$ n'étant pas monotone, le théorème de comparaison pour les opérateurs elliptiques ne s'applique pas ici. Toutefois, on pourra obtenir une comparaison via la recherche de sur et sous-solutions.

En vue de l'application du théorème fondamental rappelé au §0.2.2-3°, on commencera à travailler dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$, soit $(0, a)$ avec $a > 0$.

Comme $0 \leq v \leq 1-u$ (lemme 1.11) et f croissante, alors: $f(u) \leq f(1-v)$. Par suite, v est solution de l'inéquation:

$$(1.102) \quad v'' \leq cv' + v^n f(1-v)$$

associée aux conditions aux limites suivantes:

$$(1.103) \quad -cv(0) + v'(0) + c \leq 0. \quad (\text{il s'agit en fait d'égalité})$$

$$(1.104) \quad v(a) \geq 0. \quad (\text{car } v \text{ est positive sur } \mathbb{R}).$$

La fonction $\lambda(s, t) = -cs + t + c$ étant croissante en t , (1.102)-(1.104) montrent que v est une sur-solution (cf [C.4]). Il est facile de construire une sous-solution, par exemple la fonction nulle ou encore la fonction $\underline{v} = v - 1$ qui satisfait:

$\underline{v}'' - c\underline{v}' = v'' - cv' = v^n f(u) \geq 0$, et $\underline{v}^n f(1-\underline{v}) = (v-1)^n f(2-v) < 0$ car $v-1 < 0$ (on effectue le prolongement $x^n \longmapsto x|x|^{n-1}$ pour $x \leq 0$). On déduit

alors de ces deux inégalités:

$$(1.105) \quad \underline{v}'' \geq c\underline{v} + \underline{v}^n f(1-\underline{v})$$

puis, par définition de $\underline{v}$:

$$(1.106) \quad -c\underline{v}(0) + \underline{v}'(0) + c = c > 0.$$

et,

$$(1.107) \quad \underline{v}(a) = v(a) - 1 \leq 0. \quad (\text{car } v \leq 1)$$

D'après (1.105)-(1.107), $\underline{v}$ est une sous-solution vérifiant de plus: $\underline{v}_-(x) \leq v(x)$, $\forall x \in (0, a)$.

Enfin, la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z) = cz + y^n f(1-y)$ est lipschitzienne par rapport à z sur l'ensemble:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in [0, a] \times \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq v(x), \forall x \in [0, a] \right\},$$

la condition de Nagumo-Bernstein est donc satisfaite.

Le théorème annoncé ci-dessus assure alors l'existence d'une fonction w solution du problème aux limites:

$$(1.108) \quad \begin{cases} w'' = cw' + w^n f(1-w) \\ w'(0) = c[w(0) - 1]; \quad w(a) = 0. \end{cases}$$

et telle que:

$$(1.109) \quad \underline{v} \leq w \leq v, \text{ sur } (0, a).$$

Des estimations convenables nous permettent de passer à la limite lorsque $a \rightarrow +\infty$ pour obtenir:

$$(1.110) \quad \begin{cases} w'' = cw' + w^n f(1-w). \\ w'(0) = c[w(0) - 1], \quad w(\infty) = 0. \end{cases}$$

Notons simplement que l'estimation $w(0) \leq v(0) \leq 1-\theta$ évite, à la limite $a=\infty$, la solution triviale $w \equiv 1$, alors que la condition aux limites en 0 permet d'éviter la solution $w \equiv 0$.

Afin d'alléger la suite de la démonstration, nous introduisons la fonction $\tilde{z}=1-w$ qui vérifie, compte tenu de (1.110):

$$(1.111) \quad \begin{cases} -\tilde{z}'' + c\tilde{z}' = (1-\tilde{z})^n f(\tilde{z}). \\ \tilde{z}'(0) = c\tilde{z}(0); \quad \tilde{z}(+\infty) = 1. \end{cases} \quad \tilde{z}(0) \geq \theta.$$

Afin de pouvoir comparer c et c_{ad} , nous prolongeons $\tilde{z}$ à $\mathbb{R}$ tout entier par la fonction $z(x) = \tilde{z}(0)e^{cx}$, $\forall x \in \mathbb{R}^-$ (il s'agit donc d'un prolongement $\mathcal{C}^1$).

La fonction z définie par: $z = \begin{cases} z, & x \in \mathbb{R}^- \\ \tilde{z}, & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ est donc solution du problème aux limites:

$$(1.112) \quad \begin{cases} -z'' + cz' = (1-z)^n f(z) \chi_{[\theta', 1]}(z) \\ z(-\infty) = 0; \quad z(+\infty) = 1; \end{cases} \quad z(0) = \theta' \geq \theta.$$

Or (cf [A.15]), lorsque $\Lambda=1$, l'application: $\theta \longmapsto c_\theta$ est strictement décroissante, c_θ désignant la valeur propre du problème (P_{AD}) associé à θ . Comme $\theta' \geq \theta$, on en déduit alors que:

$$(1.113) \quad c = c_{\theta'} \leq c_\theta = c_{ad}.$$

D'où le résultat escompté. ■

REMARQUE :

Il a été plus convenable de travailler avec l'équation en v plutôt qu'avec celle en u car la monotonie de celle-ci n'est pas connue. Cependant, l'information $h > 0$ est contenue dans l'inégalité $u + v \leq 1$. On a utilisé aussi un résultat sur le problème adiabatique qui est n'est pas vrai si $\Lambda \neq 1$, si bien que la démonstration ci-dessus ne marche que pour le cas $\Lambda = 1$.

C H A P I T R E I I

RESULTAT D'EXISTENCE Pour le cas $\Lambda > 0$ quelconque

II.0 INTRODUCTION et PRESENTATION du RESULTAT ESSENTIEL:

On étudie dans ce chapitre la question d'existence de solutions au problème $(P_{na}) : (0.4) - (0.5) - (0.6)$ dans le cas d'un nombre de Lewis positif quelconque.

Le principe de la démonstration est identique à celui utilisé au chapitre précédent, mais le résultat principal est différent

Nous allons d'abord rappeler le problème (P_{na}) :

$$(2.1) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\ -\Lambda v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases}, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \\ v(-\infty) = 1; \quad v'(+\infty) = 0. \end{cases}$$

où les inconnues sont u et v : $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, et la constante positive h (valeur propre du problème).

c et Λ sont deux constantes positives donnés ($\Lambda > 0$), et n un entier naturel différent de 0.

Les hypothèses sur les fonctions f et g sont les mêmes que dans le chapitre précédent.

On se propose alors de montrer le résultat suivant:

THEOREME (2.1):

Sous les hypothèses (H-1)-(H-3), il existe deux constantes positives $\underline{c}$ et $\bar{c}$ avec $0 < \underline{c} \leq c_{ad} \leq \bar{c}$ telles que: 1°/ $\forall c \in]0, \underline{c}[$, le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution $(u, v, h) \in (C^2(\mathbb{R}))^2 \times \mathbb{R}^+$.
2°/ $\forall c > \bar{c}$, ce problème n'admet aucune solution.

REMARQUES :

1°/ la question de l'unicité pour le problème adiabatique (P_{ad}) n'étant pas réglée lorsque $\Lambda > 1$, nous considérons dans ce cas l'ensemble:

$$\mathbb{C}_{ad} = \left\{ c > 0 / c \text{ est valeur propre du problème } (P_{ad}) \right\}.$$

On sait (Cf [A.4],[A.5]) que $\mathbb{C}_{ad}$ est non vide et qu'il se réduit à un singleton si $\Lambda \leq 1$. Ainsi c_{ad} désignera dans le cas général un élément de l'ensemble $\mathbb{C}_{ad}$.

.On montrera que $\underline{c}$ et $\bar{c}$ sont des constantes indépendantes de $\mathbb{C}_{ad}$.

2°/ Nous présenterons uniquement les démonstrations qui diffèrent du cas $\Lambda=1$.

3°/ Comme nous l'avons déjà vu, les lemmes préliminaires (1.2)-(1.3) obtenus au chapitre I simplifient sur $\mathbb{R}^-$ l'écriture du problème (P_{na}) qui se réduit à:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = -hg(u_-). \\ v_-(x) = 1 + [v_-(0) - 1]e^{cx/\Lambda}. \end{cases} \quad \begin{cases} u_-(-\infty) = 0. \\ u_-(0) = \theta. \end{cases}$$

La résolution de ce problème ayant déjà été faite (§I.3), on passe directement à celle du problème posé sur $\mathbb{R}^+$, à savoir:

$$\begin{array}{l}
(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l}
(2.3) \quad \begin{cases} -u'' + cu' = v^n f(u) - hg(u). \\
- \Lambda v'' + cv' = -v^n f(u). \end{cases} \\
(2.4) \quad \begin{cases} u'(0) = u'_-(0); & u(+\infty) = 0. \\
\Lambda v'(0) = c[v(0) - 1]; & v'(+\infty) = 0. \end{cases}
\end{array} \right.
\end{array}$$

Avant de commencer l'étude du problème (P_2) , on note que l'on peut obtenir, lorsque $h=0$, un résultat similaire à celui donné par la proposition (1.10) et dont la démonstration est identique.

PROPOSITION (2.2):

Soit $c > 0$ paramètre donné et (u_c, v_c, h_c) une solution du problème (P_2) . Alors:

$$h=0 \Rightarrow c \in \mathbb{C}_{ad}.$$

Comme au chapitre I, nous allons d'abord étudier le problème (P_2) sur un intervalle borné de $\mathbb{R}^+$ afin d'utiliser une méthode topologique; puis on passera à la limite moyennant des estimations convenables.

II.1 ESTIMATIONS A PRIORI sur un borné de $\mathbb{R}^+$:

On se donne $I_a = (0, a)$ avec $a > 0$ et on écrit le problème:

Determiner: $(u_a, v_a) \in [C^1(\bar{I}_a)]^2$ et une constante h_a telles que:
 $h_a > 0$ et $(u_a, v_a) \in [C^1(\bar{I}_a)]^2$ vérifient:

$$(P_2)_a: \begin{cases} (2.5) & \begin{cases} -u_a'' + cu_a' = v_a^n f(u_a) - hg(u_a). \\ -\Lambda v_a'' + cv_a' = -v_a^n f(u_a). \end{cases} \\ (2.6) & \begin{cases} u_a'(0) = u_-(0); & u_a(0) = \theta; & u_a(a) = 0. \\ \Lambda v_a'(0) = c[v(0) - 1]; & v_a(a) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

On commence donc par prouver le:

LEMME (2.3):

Soit (u_a, v_a, h_a) une solution du problème $(P_2)_a$, associé à $c > 0$. Alors: $\forall c \neq c_{ad}$, on a:
 $h_a > 0, 0 \leq u_a < 1, 0 \leq v_a < 1, -\frac{c}{\Lambda} < v_a' < 0, -c < u_a' < \Lambda c, v < \lambda(1-u), \forall x \in (0, a)$
 où l'on a posé $\lambda = \sup(1, 1/\Lambda)$.

Preuve:

On expose ici uniquement ce qui diffère par rapport au cas $\Lambda = 1$.

1°/ $h > 0, u \geq 0, v \geq 0, -\frac{c}{\Lambda} < v' < 0, \forall x \in I_a$: même raisonnement qu'au lemme (1.11).

2°/ $-c < u'(x) < \max(1, 1/\Lambda); \forall x \in I_a$:

En ajoutant membre à membre les équations du système (2.5) et en posant $y = u + \Lambda v$, on obtient:

$$(2.7) \quad y'' - cy' = hg(u) + c(1 - \Lambda)v'.$$

a/ $-c < u'(x), \forall x \in I_a$:

En intégrant (2.7) de 0 à x, on obtient compte tenu de (2.6):

$$y' - cy > -c + c(1 - \Lambda)v.$$

D'où:

$$u' - cu > -c + c(1 - \Lambda)v - (\Lambda v' + c\Lambda v),$$

ie: $u'(x) > cu - c + cv > c$, car u et v sont positives. D'où a/.

b/ $\underline{u}'(x) \leq \max(1, 1/\Lambda) c, \forall x \in \underline{I}_a:$

L'équation (2.7) s'écrit:

$$(y'e^{-cx})' \geq c(1-\Lambda)v'e^{-cx}$$

puis s'intègre de x à $(+a)$, pour donner $(y'(a) < 0)$:

$$y'(x) \leq -\Lambda v' + c(\Lambda-1)e^{cx} \int_x^a v'(t)e^{-ct} dt,$$

puis, en revenant à la définition de y :

$$(2.8) \quad u'(x) \leq -\Lambda v' + c(\Lambda-1)e^{cx} \int_x^a v'(t)e^{-ct} dt$$

A ce stade de calcul, on va distinguer deux cas:

i/ Ou bien: $\Lambda > 1$, auquel cas on a:

$$u'(x) < -\Lambda v' \quad (\text{car } v' < 0, \text{ d'après } 1^\circ/)$$

soit:

$$u'(x) < c \quad (\text{d'après } 1^\circ/ \text{ encore})$$

i.e.:

$$\underline{u}'(x) < \max(1, 1/\Lambda) c \quad (\text{car } \Lambda > 1).$$

ii/ Ou bien $\Lambda < 1$: dans ce dernier cas, on effectue la minoration:

$$(2.9) \quad \int_x^a v'(t)e^{-ct} dt > -\frac{c}{\Lambda} \int_x^a e^{-ct} dt = \frac{1}{\Lambda} (e^{-ac} - e^{-cx})$$

Comme $(\Lambda-1) < 0$, on majore le second membre de (2.8), en utilisant (2.9):

$$\begin{aligned} u'(x) &\leq c + c(\Lambda-1) \frac{1}{\Lambda} e^{cx} (e^{-ac} - e^{-ax}) \\ &\leq c + c \frac{(\Lambda-1)}{\Lambda} (e^{c(x-a)} - 1) \\ &< c + c \frac{(1-\Lambda)}{\Lambda}, \quad x \leq a. \end{aligned}$$

D'où: $u'(x) < c/\Lambda = c \max(1, 1/\Lambda)$ pour $\Lambda > 1$. Le 2°/ est donc prouvé. $\square$

3°/ $v(x) < \max(1, 1/\Lambda) (1-u(x))$, $\forall x \in I_a$:

D'après ce qui précède, y satisfait:

$$(ye^{-cx})' \geq -ce^{-cx} + c(1-\Lambda)ve^{-cx},$$

puis par intégration de x à (+a) ($y(a)=0$):

$$y(x) \leq 1 - e^{c(x-a)} + c(\Lambda-1)e^{cx} \int_x^a e^{-ct} v(t) dt,$$

d'où:

$$(2.10) \quad v(x) \leq \frac{1-u(x)}{\Lambda} + c \frac{\Lambda-1}{\Lambda} e^{cx} \int_x^a e^{-ct} v(t) dt.$$

i/ Si $\Lambda < 1$, le second membre de (2.10) se majore pour donner:

$$(2.11) \quad v(x) < \frac{1-u}{\Lambda}, \text{ car } v \geq 0. \text{ d'où le 3°/}.$$

ii/ Si $\Lambda > 1$, on pose $z=u+v$ et l'on a:

$$(2.12) \quad z'' - cz' = (1-\Lambda)v'' + hg(u).$$

La technique appliquée pour y en 3°/ conduit à l'estimation:

$$z' - cz \geq (1-\Lambda)v' - c \Leftrightarrow (ze^{-cx})' \geq (1-\Lambda)v'e^{-cx} - ce^{-cx},$$

puis par intégration de x à (a):

$$\begin{aligned} z(x) &\leq (\Lambda-1)e^{cx} \int_x^a v'(t)e^{-ct} dt + ce^{cx} \int_x^a e^{-ct} dt \\ \Rightarrow z(x) &\leq ce^{cx} \int_x^a e^{-ct} dt = (1 - e^{c(x-a)}) \quad (\text{car } \Lambda > 1 \text{ et } v' < 0) \end{aligned}$$

d'où finalement:

$v(x) \leq 1-u(x) - e^{c(x-a)} < 1-u(x)$. Le 3°/ est donc prouvé. $\square$

4°/ $u < 1$, $v < 1$, sur $(0, a)$:

a/ Du 2°/ on déduit en posant $\lambda = \sup(1, 1/\Lambda) > 0$:

$$v < \lambda(1-u) \Leftrightarrow u < 1 - \frac{v}{\lambda} \leq 1.$$

b/ $v < 1$, sur $(0, a)$:

On intègre de 0 à x l'équation satisfaite par v:

$$\begin{aligned} \Lambda v' - cv &= \Lambda v'(0) - cv(0) + \int_a^x v^n f(u) dx \\ &\geq \Lambda v'(0) - cv(0) = -c. \end{aligned}$$

D'où: $v \leq \frac{\Lambda}{c} v' + 1 < 1$ et le 4°/. $\square$

La preuve du lemme (2.3) est donc achevée. ■

Pour clore ce paragraphe, nous énonçons maintenant sans démonstration les trois derniers résultats sur les estimations à priori nécessaires pour la suite:

PROPOSITION (2.4):

Soit (u_a, v_a, h_a) solution du problème $(P_2)_a$. Alors:

$$\int_0^a |u'_a(x)|^2 dx \leq c \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right).$$

$$\frac{c}{2} |v_a(0)|^2 + \Lambda \int_0^a |v'_a(x)|^2 dx \leq c.$$

PROPOSITION (2.5):

Soit (u_a, v_a, h_a) solution du problème $(P_2)_a$.

On pose: $G(t) = \int_0^t g(s) ds$. Alors:

$$0 < h_a < \frac{5}{2} \frac{c^2}{G(\theta)}.$$

Corollaire (2.6): (Résumé des estimations)

Soit (u_a, v_a, h_a) solution du problème $(P_2)_a$. Alors:

(u_a) et (v_a) sont bornés indépendamment de a dans $W^{2,\infty}(0,a)$.

Nous présentons dans le paragraphe suivant un résultat d'existence au problème $(P_2)_a$ en appliquant la même méthode que dans le précédent chapitre.

II.2 RESULTAT D'EXISTENCE:

II.2.1 Equivalence avec un problème de point fixe:

On considère l'espace de Banach:

$$X = C^1(\bar{I}_a)^2 \times \mathbb{R}$$

muni de sa norme naturelle:

$$\|w\|_X = \|(u, v, h)\|_X = \sup \left(\|u\|_{C^1(\bar{I}_a)}, \|v\|_{C^1(\bar{I}_a)}, |h| \right).$$

On définit ensuite l'opérateur:

$$\begin{aligned} K_\tau: X &\longrightarrow X \\ (u, v, h) &\longmapsto (U, V, h - u(0) + \theta), \end{aligned}$$

où $\tau \in [0, 1[$ et (U, V) est la solution du problème linéaire suivant:

$$(2.13) \quad \begin{cases} U'' - c_\tau U' = \tau (-v^n f(u) + hg(u)) + (1-\tau) (-v^n + hu) \\ \Lambda V'' - c_\tau V' = \tau v^n f(u) + (1-\tau) v^n. \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} U'(0) = c_\tau u(0) + \tau h J(u(0), c_\tau, h) \\ \Lambda V'(0) = c_\tau [V(0) - 1] \end{cases} \quad \begin{cases} U(a) = 0 \\ V(a) = 0 \end{cases}$$

et où:

$$(2.15) \quad c_\tau = \frac{c}{c_{ad}} (c_{ad})_\tau$$

avec $(c_{ad})_\tau$ valeur propre du problème adiabatique suivant:

$$(2.16) \quad \begin{cases} u'' - (c_{ad})_\tau u' = -\tau v^n f(u) - (1-\tau) v^n. \\ \Lambda v'' - (c_{ad})_\tau v' = \tau v^n f(u) + (1-\tau) v^n. \end{cases}$$

$$(2.17) \quad \begin{cases} u'(0) = (c_{ad})_\tau u(0); & u(a) = 1. \\ \Lambda v'(0) = (c_{ad})_\tau [v(0) - 1]; & v(a) = a. \end{cases} \quad u(0) = \theta.$$

Ainsi, $w = (u_a, v_a, h_a)$ est solution du problème $(P_2)_a$ si et seulement si w est point fixe de K_1 dans X .

REMARQUE:

(2.16)-(2.17) est une déformation linéaire du problème adiabatique; il est clair qu'il admet au moins une solution $(u_\tau, v_\tau, (c_{ad})_\tau)$. Enfin $c_{ad} \in \mathcal{C}_{ad}$ et $(c_{ad}) \in (\mathcal{C}_{ad})_\tau$ sont respectivement des éléments quelconques de ces deux ensembles.

II.2.2 Calcul du degré topologique:

Posons: $F_\tau = I - K_\tau$. Le lemme suivant dont la vérification est immédiate permet de définir le degré topologique de Leray-Schauder de F_τ .

LEMME (2.7):

- 1°/ K_τ est compact, $\forall \tau \in [0, 1]$ et uniformément continu en τ .
- 2°/ $\exists R > 0$ tel que: $\deg(F_\tau, B_R, 0)$ est bien défini; B_R désignant la boule ouverte de rayon R dans X .

Afin de prouver que F_1 admet au moins un point fixe, on va essayer de montrer que:

$$\deg (F_1, B_R, 0) \neq 0.$$

Le degré étant invariant par homotopie, il suffira de montrer que:

$$\deg (F_0, B_R, 0) \neq 0.$$

Explicitons alors l'opérateur K_0 :

$$\begin{aligned} K_0: X &\longrightarrow X \\ (u, v, h) &\longmapsto (U_0, V_0, h - u(0) + \theta) \end{aligned}$$

tel que:

$$(2.18) \quad \begin{cases} U_0'' - c_0 U_0' = -v^n + hu. \\ \Lambda V_0'' - c_0 V_0' = v^n. \end{cases}$$

$$(2.19) \quad \begin{cases} U_0'(0) = c_0 U_0(0); & U_0(a) = 0. \\ \Lambda V_0'(0) = c[V_0(0) - 1]; & V_0(a) = 0. \end{cases}$$

On obtient alors le résultat précis suivant:

THEOREME (2.8):

Etant donnée $c_0 > 0$, il existe deux constantes positives $\underline{c}_0$ et a_0 vérifiant: $0 < c_0 < \underline{c}_0 \leq (c_{ad})_0$ et telles que:

$$\forall a > a_0, \deg(I - K_0, B_R, 0) \neq 0.$$

A. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION:

Il est le même que pour le cas $\Lambda = 1$:

A.1°/ On écrit: $K_0 = (K_0^1, K_0^2)$ avec:

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} K^1: C^1(\bar{I}) \times \mathbb{R} \longrightarrow C^1(\bar{I}) \times \mathbb{R} \\ \quad (u, h) \longmapsto (u, h - u(0) + \theta). \\ \\ K_0^2: C^1(\bar{I}_a) \longrightarrow C^1(\bar{I}_a) \\ \quad v \longmapsto V. \end{array} \right.$$

Et on pose:

$$\Omega_2 = \left\{ u \in C^1(\bar{I}_a) / \|u\|_{C^1(\bar{I}_a)} < R \right\},$$

et:

$$\Omega_1 = \Omega_2 \times]0, H[.$$

A.2°/ v_0 est point fixe de K_0^1 si et seulement si, v_0 est solution de:

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda v_0'' - c_0 v_0' = v_0^n. \\ \Lambda v_0'(0) = c_0 [v_0(0) - 1]; \quad v_0(a) = 0. \end{array} \right.$$

D'après le théorème (1.18), le problème (2.21) admet une unique solution $v_0 \in C^\infty([0, a])$, avec $v_0 > 0$, $\forall x \in [0, a[$ (la présence de Λ ne présente aucune difficulté nouvelle). Il en résulte alors que:

$$(2.22) \quad \deg(I - K_0^2, \Omega_2, 0) \neq 0.$$

A.3°/ (u_0, h_0) est point fixe de K_0^1 si et seulement si:

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' - cu' = -v^n + hu. \\ u'(0) = cu(0); \quad u(a) = 0; \quad u(0) = \theta. \end{array} \right.$$

On commencera par étudier le problème suivant à valeur propre h :

$$(2.24) \quad \begin{cases} u'' - cu' = -v^n + hu. \\ u'(0) = cu(0); \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

Le théorème (1.19) du chapitre I assure l'existence d'une unique solution $u_0 \in C^\infty([0, a])$ au problème (2.24) et ce $\forall h \geq 0$. De plus, $u_0(x) > 0, \forall x \in [0, a[$.

A.4°/ On définit alors, comme au chapitre précédent l'application:

$$\begin{aligned} \psi_c: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ h &\longmapsto \psi_c(h) = u_h(0). \end{aligned}$$

La proposition (1.20) (chapitre I) montre que ψ_c est une fonction continue, strictement décroissante et qu'elle tend vers zéro quand $h \rightarrow +\infty$.

A.5°/ On rappelle l'expression de $\psi_c(0)$ (cf 1.72):

$$(2.25) \quad \psi_c(0) = \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds > 0, \text{ car } v > 0 \forall x \in [0, a[.$$

v est maintenant la solution (unique) du problème (2.21). On va effectuer ici le calcul pour donner une expression équivalente de $\psi_c(0)$. En effet, l'intégration de 0 à t de l'équation dans (2.21) donne:

$$\int_0^t v^n(s) ds = (\Lambda v' - cv)(t) + c$$

D'où:
$$e^{-ct} \int_0^t v^n(s) ds = ce^{-ct} + (\lambda v' - cv) e^{-ct},$$

qu'on intègre de 0 à a pour obtenir:

$$(2.26) \quad \psi_c(0) = \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds = -\left\{e^{-ac} - 1\right\} + \lambda \int_0^a v'(t) e^{-ct} dt - c \int_0^a v(t) e^{-ct} dt,$$

soit après intégration par partie dans (2.26):

$$(2.27) \quad \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds = 1 - e^{-ac} + c(\lambda - 1) \int_0^a v(t) e^{-ct} dt - \lambda v(0).$$

A.6°/ On va énoncer une proposition analogue à la proposition (2.21) du chapitre I qui nous donnera une condition suffisante pour que $\psi_c(0)$ soit strictement plus grand que θ :

PROPOSITION (2.9):

Il existe $\underline{c}_0 = \underline{c}_0(\lambda, \theta)$ avec: $0 < \underline{c}_0 \leq (c_{ad})_0$ tel que:

$\forall c_0 \in]0, \underline{c}_0[$, $\exists a_0 = a_0(c) > 0$ vérifiant:

$$1 - \theta - e^{-ac_0} - \lambda v_0(0) + (\lambda - 1) c_0 \int_0^a v_0(t) e^{-ct_0} dt > 0, \quad \forall a > a_0$$

Avant de prouver cette proposition, on va d'abord commencer par faire la démonstration du théorème (2.8):

B/ Démonstration du théorème (2.8):

Rappelons l'expression de $\psi_c(0)$ dans (2.27):

$$\psi_c(0) = \int_0^a e^{-ct} dt \int_0^t v^n(s) ds = 1 - e^{-ac} - \Lambda v(0) + c(\Lambda - 1) \int_0^a v(t) e^{-ac} dt.$$

Grâce à (2.27) et à la proposition (2.9), on a:

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{c}_0 \in]0, (c_{ad})_0] \text{ telle que: } \forall c_0 \in]0, \underline{c}_0[, \exists a_0 > 0 \text{ vérifiant:} \\ \psi_c(0) > \theta, \forall a > a_0. \end{array} \right.$$

Combinée avec A.4°/, (2.28) donne:

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{c}_0 \in]0, (c_{ad})_0] \text{ telle que: } \forall c_0 \in]0, \underline{c}_0[, \exists a_0 > 0 \text{ vérifiant:} \\ \text{l'équation } \psi_c(0) = \theta \text{ admet une unique solution } h > 0, \forall a > a_0. \end{array} \right.$$

A.3°/ et (2.29) assurent donc l'existence de $\underline{c}_0 \in]0, (c_{ad})_0]$ telle que: $\forall c_0 \in]0, \underline{c}_0[, \exists a_0 > 0$ satisfaisant:

$$(2.30) \quad \forall a > a_0, \deg(I - K_0^1, \Omega_1, 0) \neq 0,$$

par conséquent le problème (2.23) admet, pour $a > a_0$ et $c_0 \in]0, \underline{c}_0[$, une unique solution (u_0, h_0) avec $h_0 > 0$. On conclut alors la démonstration du théorème (2.8) en utilisant (2.22) et la propriété mutiplicative du degré. ■

Il ne reste plus qu'à prouver le proposition (2.9) basée sur le lemme suivant dont la démonstration est identique à celle du lemme (1.22) (cf chapitre I):

LEMME (2.10): (Lemme de monotonie).

Soit v_c le point fixe de K_0^2 et $\tilde{v}_c = \lim (v_c)_a$ la solution du problème aux limites:

$$(2.31) \quad \begin{cases} \Lambda \tilde{v}'' - c \tilde{v}' = \tilde{v}^n. \\ \Lambda \tilde{v}'(0) = c[\tilde{v}(0) - 1]; \quad \tilde{v}(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Alors, l'application $\phi: \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow]0, 1[$ telle que: $\phi(c) = \tilde{v}_c(0)$ est continue, strictement croissante et vérifie: $\phi(c) \geq v_c(0), \forall c > 0$.

Démonstration de la proposition (2.9):

On pose: $\lambda' = \inf(1, \Lambda^{-1}) > 0$, puis on définit les constantes positives suivantes:

* c_0 telle que:

$$(2.32) \quad \tilde{v}_{\underline{c}_0}(0) = \lambda'(1 - \theta);$$

puis, pour $c_0 \in]0, \underline{c}_0[$,

** a_0 telle que:

$$(2.33) \quad a_0 = -\frac{1}{c} \ln \left(1 - \theta - \frac{\tilde{v}_c(0)}{\lambda'} \right).$$

Alors:

a/ $\tilde{v}_c(0)$ est une fonction continue, strictement croissante et vérifie (voir lemme 2.10): $v_c(0) \leq \tilde{v}_c(0)$. De plus (cf [A.5]):

$$\tilde{v}_{a_d}(0) \geq \inf(1, \Lambda^{-1})(1 - \theta)$$

(en effet cette inégalité obtenue pour v_{a_d} dans [A.5] reste encore vraie pour $\tilde{v}_{a_d}$). On déduit alors de (2.32):

$0 < \underline{c}_0 \leq (c_{a_d})_0$ (notons que $\underline{c}_0$ ne dépendant de θ et de Λ est défini de manière unique).

b/ On considère maintenant $c_0 \in]0, \underline{c}_0[$, alors (lemme 2.10):

$$(2.34) \quad 0 < \frac{1}{\lambda}, v_{c_0}(0) \leq \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{c_0}(0) < \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{\underline{c}_0}(0).$$

Il résulte alors de (2.32)-(2.34) :

$$i/ \quad \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{c_0}(0) < \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{c_0}(0) = 1 - \theta \Rightarrow 1 - \theta - \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{c_0}(0) > 0.$$

a_0 est donc positif et bien défini.

$$ii/ \quad a > a_0 \Leftrightarrow e^{-ac_0} + \frac{1}{\lambda}, \tilde{v}_{c_0}(0) < 1 - \theta, \text{ puis grâce à (2.34):}$$

$$(2.35) \quad e^{-ac_0} + \frac{1}{\lambda}, v_{c_0}(0) < 1 - \theta, \quad \forall c_0 \in]0, c_0[\text{ et } \forall a > a_0.$$

A ce stade, on distingue séparément les deux cas $\lambda > 1$ et $\lambda < 1$:

1^{er} Cas: $\lambda > 1$:

(2.35) peut également s'écrire:

$$\begin{aligned} e^{-ac} + \lambda v(0) < 1 - \theta &\Rightarrow 1 - \theta - e^{-ac} - \lambda v(0) > 0 \\ &\Rightarrow 1 - \theta - e^{-ac} - \lambda v(0) + c(\lambda - 1) \int_0^a v(t) e^{-ct} dt > 0 \quad (\lambda > 1, v > 0) \end{aligned}$$

La proposition est alors prouvée dans ce cas.

2^{ème} Cas: $\lambda < 1$:

(2.35) s'écrit:

$$(2.36) \quad e^{-ac} + v_c(0) < 1 - \theta \Leftrightarrow 1 - \theta - v_c(0) - e^{-ac} > 0.$$

On pose alors:

$$A = 1 - \theta - e^{-ac} + c(\lambda - 1) \int_0^a v(t) dt,$$

alors compte tenu du fait que $(\lambda - 1) < 0$ et que:

$$\int_0^a v(t) e^{-ac} dt < \frac{v(0)}{c} (1 - e^{-ac}) < v(0)/c; \quad A \text{ peut se minorer:}$$

$$\begin{aligned} A &> 1 - \theta - e^{-ac} - v(0) + v(0) e^{-ac} (1 - \lambda) = 1 - \theta - e^{-ac} - v(0) + v(0) e^{-ac} (1 - \lambda) \\ &> 1 - \theta - e^{-ac} - v(0), \text{ car } (1 - \lambda), v(0) > 0. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (2.36) $A > 0$. La proposition (2.9) est donc prouvée. ■

II.2.3 RESULTAT D'EXISTENCE au problème $(P_2)_a$:

Pour $(P_2)_a$, nous allons prouver le résultat suivant:

THEOREME (2.11):

$\exists \underline{c} \in]0, c_{ad}[$ telle que:
 $\forall c \in]0, \underline{c}[$, $\exists a_0 = a_0(c)$ vérifiant: $\forall a > a_0$, le problème $(P_2)_a$ admet
 au moins une solution (u, v, h) .

Démonstration:

Grâce au théorème (2.8), on sait que:

$\exists \underline{c}_0 \in]0, (c_{ad})_0[/ \forall c_0 \in]0, \underline{c}_0[$, $\exists a_0 > 0$ satisfaisant:

$$\deg(I - K_0, B_R, 0) \neq 0.$$

De l'expression de c_τ dans (2.15) résulte:

$$c_0 \in]0, \underline{c}_0[\Leftrightarrow c \in]0, \underline{c}[$$

avec:

$$\underline{c} = \underline{c}_0 \frac{c_{ad}}{(c_{ad})_0} \quad (\underline{c} \in]0, c_{ad}]).$$

Par conséquent,

$$\forall c \in]0, \underline{c}[, \forall a > a_0 \quad \deg(I - K_0, B_R, 0) \neq 0.$$

Le degré topologique étant invariant par déformation homotopique, on en déduit:

$$\forall c \in]0, \underline{c}[, \forall a > a_0 \quad \deg(I - K_1, B_R, 0) \neq 0.$$

Une propriété importante du degré topologique assure alors l'existence d'au moins un point fixe pour l'opérateur K_1 donc solution du problème $(P_2)_a$, et ce $\forall c \in]0, \underline{c}[$ et $\forall a > a_0$.

Le théorème (2.11) est donc démontré. ■

Nous allons maintenant effectuer le passage à la limite, quand $a \rightarrow +\infty$ afin d'obtenir l'existence d'au moins une solution au problème (P_2) . La proposition (2.2) et le fait que: $0 < c \leq c_{ad}$ nous permet d'éviter, à cette limite la solution triviale $h=0$.

III.3 PASSAGE A LA LIMITE:

On a obtenu au lemme (2.3) des estimations à priori sur (u_a, v_a, h_a) indépendamment de $a > 0$. Ceci va nous permettre comme dans le cas $\Lambda=1$ de passer à la limite dans $(P_2)_a$. Nous énonçons alors sans démonstration le résultat suivant qui en découle immédiatement:

THEOREME (2.12):

Soit $a_0 > 0$ et (u_a, v_a, h_a) une solution du problème $(P_2)_a$. Alors:
 Il existe une suite croissante $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, quand $n \rightarrow +\infty$ telle que:
 $(u_{a_n}, v_{a_n}, h_{a_n})$ converge sur $(0, a_n)$ vers (u, v, h) dans $[C^1_{loc}(\mathbb{R})]^2 \times \mathbb{R}$,
 où (u, v, h) est solution du problème (P_2) et où u_a et v_a ont été prolongée à $\mathbb{R}$ en posant: $u_a(x) = v_a(x) = 0, \forall x \geq a$.

Enfin, la "réunion" des deux problèmes étudiés séparément sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ permet d'énoncer le théorème d'existence suivant pour Λ quelconque, et complète la démonstration du 1°/ du théorème (2.1).

THEOREME (2.13):

Sous les hypothèses (H-1)-(H-3), il existe une constante positive $\underline{c} \in]0, c_{ad}[$ telle que le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution (u, v, h) , $\forall c \in]0, \underline{c}[$.

Afin que la démonstration du théorème (2.1) soit complète, nous allons prouver le 2°/ de ce théorème, c'est-à-dire une condition

nécessaire d'existence de solution au problème $(P_2): (2.1)-(2.2)$.
On vérifie enfin, comme au chapitre I que $(u,v,h) \in [C^2(\mathbb{R})]^2 \times \mathbb{R}^+$.

II.4 CONDITION NECESSAIRE D'EXISTENCE:

Le résultat obtenu permet de donner, comme au cas adiabatique une estimation de la constante du flux massique:

THEOREME (2.14):

Soit (u,v,h) une solution du problème (2.1)-(2.2) associé au paramètre v . Posons: $\lambda = \sup(1, \lambda^{-1})$ et $G(1) = \int_0^1 (1-s)^n f(s) ds$.

$$\text{Alors:} \quad (2.36) \quad 0 < c < \bar{c} = \frac{1}{\theta} \sqrt{2\lambda^n G(1)}.$$

Démonstration:

Soit (u,v,h) une solution du problème (2.1)-(2.2) vérifiant en particulier sur $\mathbb{R}^+$:

$$(2.37) \quad \begin{cases} u'' - cu' = -v^n f(u) + hg(u). \\ u(0) = \theta; \quad u'(0) = c\theta + h \int_{-\infty}^0 g(u) dx; \quad u(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Grâce aux conditions aux limites dans (2.37), il existe x_0 tel que:

$$(2.38) \quad u'(x_0) = 0 \text{ et } u'(x) \geq 0, \quad \forall x \leq x_0.$$

Intégrons maintenant (2.37) de 0 à x_0 après l'avoir préalablement multipliée par u' :

$$-\frac{1}{2}|u'(0)|^2 - c \int_0^{x_0} |u'|^2 dx = - \int_0^{x_0} u' v^n f(u) dx + h \int_0^{x_0} u' g(u) dx$$

D'où:

$$\frac{1}{2}|u'(0)|^2 + c \int_0^{x_0} |u'|^2 dx = \int_0^{x_0} u' v^n f(u) dx - h \int_0^{x_0} u' g(u) dx < \int_0^{x_0} u' v^n f(u) dx$$

car $h > 0$, $u' \geq 0$ et $g(u) \geq 0$, $\forall x \in (0, x_0)$.

Soit:

$$(2.39) \quad \frac{1}{2}|u'(0)|^2 \leq \int_0^{x_0} u' v^n f(u) dx$$

Or, $u'(0) > c\theta$ (d'après 2.37) et:

$$\int_0^{x_0} u' v^n f(u) dx \leq \lambda^n \int_0^{x_0} (1-u)^n u' f(u) dx \quad (\text{lemme 2.3}),$$

Il en résulte alors de (2.39):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c^2\theta^2 < \frac{1}{2}|u'(0)|^2 &\leq \lambda^n \int_0^{x_0} (1-u)^n f(u) dx \\ &\leq \lambda^n \int_0^{u(x_0)} (1-s)^n f(s) ds \\ &\leq \lambda^n \int_0^1 (1-s)^n f(s) ds, \quad \text{car } \theta > 0 \quad \text{et} \end{aligned}$$

$u(x_0) < 1$. D'où finalement l'estimation suivante:

$$\frac{1}{2}c^2\theta^2 \leq \lambda^n G(1),$$

qui s'écrit:

$$c \leq \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^n G(1)}, \quad \text{où } \lambda = \sup(1, \frac{1}{\Lambda}) \quad (\text{lemme 2.3})$$

D'où le théorème (2.14) avec $\bar{c} = \frac{1}{\theta} \sqrt{2\lambda G(1)}$ indépendante de $c_{ad} \in \mathbb{C}_{ad}$.

REMARQUE:

On sait (cf [A.5]) que:

$$(2.40) \quad \lambda'(1-\theta) \leq (v_{ad})_0(0) \leq \lambda(1-\theta)$$

$$\text{où } \lambda \equiv \sup(1, \frac{1}{\Lambda}); \quad \lambda' \equiv \inf(1, \frac{1}{\Lambda}).$$

D'autre part, $\underline{c}_0$ est défini par (cf 2.32):

$$\tilde{v}_{\underline{c}_0}(0) = \lambda'(1-\theta)$$

ce qui avec (2.40) fournit:

$$(2.41) \quad \tilde{v}_{\underline{c}_0}(0) \leq (v_{ad})_0(0) \leq (\tilde{v}_{ad})_0(0).$$

Comme $\tilde{v}$ est une fonction continue, strictement croissante (lemme 2.10), elle possède une fonction réciproque strictement croissante, ce qui à partir de (2.41), donne:

$$\underline{c}_0 \leq (c_{ad})_0, \text{ puis:}$$

$$\underline{c} \leq c_{ad} \text{ (grâce à 2.15).}$$

On a montré que :

$\underline{c} \leq c_{ad}$ et $\bar{c} \geq c_{ad}$ (cf A.5) et que $\underline{c}$ et $\bar{c}$ sont indépendantes du choix de c_{ad} dans $\mathbb{C}_{ad}$.

La démonstration du théorème (2.1) est donc terminée ■

2^{EME} P A R T I E

A N A L Y S E A S Y M P T O T I Q U E

C H A P I T R E I I I

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

pour de grandes énergies d'activation réduites.

III.0 INTRODUCTION et HYPOTHESES:

1°/ Dans ce chapitre, on suppose que la fonction f introduite dans la première partie de cette thèse dépend d'un certain paramètre positif ϵ ($f=f_\epsilon$). On obtient alors un problème noté (P_ϵ) .

En chimie, ϵ est proportionnel à l'inverse de E , E désignant l'énergie d'activation réduite; les physiciens s'intéressent alors au comportement de la température et de la concentration d'un produit lorsque cette énergie devient très grande, et font un développement asymptotique formel pour E grand. Ce type d'étude est très fréquent en chimie où elle représente la base de l'approche asymptotique des équations de la combustion (cf [0.21], [0.22], [C.1], [C.2], [C.3], [A.6], [A.7] ou [A.17] par exemple).

On va donc préciser le comportement singulier du terme de réaction $v^n f_\epsilon(u)$ à travers les hypothèses suivantes:

2°/ LES HYPOTHESES:

Afin d'alléger l'exposé des résultats, nous allons travailler dans ce chapitre avec la fonction f définie par:

$$(H/3-1) \quad f_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \Phi\left(\frac{s-1}{\epsilon}\right) \chi_{[\theta,1]}(s)$$

où $\theta \in]0,1[$ et $\chi_{[\theta,1]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[\theta,1]$. On suppose en plus que la fonction Φ satisfait:

$$(H/3-2) \quad \Phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est lipschitzienne, et strictement croissante.}$$

$$(H/3-3) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} |y|^p \Phi(y) = 0, \quad \forall p \geq 0. \quad (**)$$

$$(H/3-4) \quad g \text{ satisfait les hypothèses (H/2) (chap.I)}$$

(*) En fait, il suffit que cette hypothèse soit vérifiée pour $p=0$ et $p=n+1$

REMARQUES:

1°/ Φ généralise la loi d'Arrhénius: $\Phi(\sigma) = \kappa e^{\sigma}$, avec $\kappa > 0$.

2°/ Il est facile de voir que Φ admet une fonction réciproque Φ^{-1} avec:

$\lim_{y \rightarrow 0} \Phi^{-1}(y) = -\infty$. Enfin, en posant $z^p = \Phi(y)$ dans (H/3-3), on obtient:

$$(H/3-3) \text{ Bis } \lim_{y \rightarrow 0} y \Phi^{-1}(y^p) = 0, \forall p \geq 0$$

III.1 PRESENTATION DU RESULTAT PRINCIPAL:

Considérons le problème suivant paramétré par $\varepsilon > 0$:

$$(3.3) \quad \begin{cases} -u''_{\varepsilon} + cu'_{\varepsilon} = v_{\varepsilon}^n f_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) - h_{\varepsilon} g(u_{\varepsilon}). \\ -\Lambda v''_{\varepsilon} + cv'_{\varepsilon} = -v_{\varepsilon}^n f_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}). \end{cases}$$

(P_{ε}) :

$$(3.4) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon}(-\infty) = u_{\varepsilon}(+\infty) = 0. \\ v_{\varepsilon}(-\infty) = 1, \quad v'_{\varepsilon}(+\infty) = 0. \end{cases} \quad u_{\varepsilon}(0) = \theta.$$

On sait (1^{ère} partie de cette thèse) que sous certaines conditions ($0 < c < c_{ad}$, pour $\Lambda = 1$, et $0 < c < \underline{c}$, pour $\Lambda \neq 1$) que (P_{ε}) admet au moins une solution $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}, h_{\varepsilon})$ avec $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \in [\mathbb{C}^2(\mathbb{R})]^2$ et $h_{\varepsilon} > 0$.

Dans ce qui suit, on examine le comportement asymptotique d'une telle solution, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Notre résultat principal sera le suivant:

THEOREME (3.1):

Sous les hypothèses (H-3), il existe une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty} \searrow 0$ telle que:

$$\|u_{\varepsilon_n} - u_0\|_{\mathcal{C}^0_{loc}(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \|v_{\varepsilon_n} - v_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad h_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \quad \text{où } (u_0, v_0) \text{ est}$$

la solution du problème à frontière libre:

$$(3.5) \quad \begin{cases} -u_0'' + cu_0' = c\delta_{x=\bar{x}} \\ -\Lambda v_0'' + cv_0' = -c\delta_{x=\bar{x}} \end{cases} \quad (3.6) \quad \begin{cases} u_0(-\infty)=0; u_0(+\infty)=1 \\ v_0(-\infty)=1; v_0(+\infty)=0 \end{cases} \quad u_0(0)=\theta.$$

REMARQUES:

a/ $\delta_{x=\bar{x}}$ désigne la fonction de Dirac en $\bar{x}$.

b/ $\bar{x}$ sera déterminée de manière unique par la condition $u_0(0)=\theta$.

c/ c au même titre que Λ sera supposée indépendante de ε dans le problème (P_ε) .

d/ Ce résultat justifie rigoureusement le modèle de Dirac fréquemment utilisé en combustion.

e/ Le théorème (3.1) a été également obtenu dans le cas adiabatique (Cf [A.4], [A.5], [A.15]), à la différence que nous obtenons ici et de manière optimale une convergence $\mathcal{C}^0$ locale et non globale de u_ε vers u_0 (voir à ce propos la discussion en introduction).

f/ On peut vérifier que la convergence est aussi $H^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, nous allons commencer par prouver quatre résultats préliminaires fondamentaux.

III.2 LEMMES PRELIMINAIRES:**LEMME (3.2):**

Il existe un point $x_{0_\varepsilon} > 0$ tel que:

$$u'_\varepsilon(x_{0_\varepsilon})=0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon})=1 \quad \text{et} \quad \frac{u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon})-1}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1), \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

Preuve:

1°/ Une solution u_ε du problème (P_ε) satisfait:

$$(3.7) \quad \begin{cases} u_\varepsilon(x) \leq \theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-; & u_\varepsilon(0) = \theta; & u_\varepsilon(-\infty) = u_\varepsilon(+\infty) = 0. \\ u'_\varepsilon(0) = c\theta + h_\varepsilon \int_{-\infty}^0 g(u_\varepsilon) dx > c\theta > 0. \end{cases}$$

Il en résulte alors l'existence d'un maximum en un point $x_{0_\varepsilon} > 0$:

$$(3.8) \quad u'_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) = 0, \quad u''_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) \leq 0 \quad \text{et} \quad u'_\varepsilon(x) \geq 0, \quad \forall x \leq x_{0_\varepsilon}.$$

Montrons :

$$(3.9) \quad \frac{u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) - 1}{\varepsilon} = O(1), \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

ce qui prouvera en même temps:

$$(3.10) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) = 1.$$

Pour ce fait raisonnons par l'absurde en supposant:

$$(3.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) - 1|}{\varepsilon} = +\infty, \quad \text{ie:}$$

$$\forall A > 0, \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que: } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \frac{|u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) - 1|}{\varepsilon} \geq A.$$

ou encore:

$$\forall A > 0, \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que: } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, u_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) \leq 1 - \varepsilon A.$$

L'intégration de $-\infty$ à x_{0_ε} de l'équation satisfaite par u_ε donne:

$$(3.12) \quad -cu_\varepsilon(x_{0_\varepsilon}) = -J_\varepsilon + h_\varepsilon \int_{-\infty}^{x_{0_\varepsilon}} g[u_\varepsilon(x)] dx,$$

avec:

$$J_\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{x_{0\varepsilon}} v_\varepsilon^n f_\varepsilon(u_\varepsilon) dx = \int_0^{x_{0\varepsilon}} v_\varepsilon^n f_\varepsilon(u_\varepsilon) dx \text{ (car pour } x < 0, u_\varepsilon < \theta \Rightarrow f_\varepsilon(u_\varepsilon) \equiv 0).$$

Par conséquent:

$$J_\varepsilon = u_\varepsilon(x_{0\varepsilon}) + h_\varepsilon \int_{-\infty}^{x_{0\varepsilon}} g[u_\varepsilon(x)] dx$$

que l'on peut minorer:

$$(3.13) \quad J_\varepsilon > u_\varepsilon(0) + h_\varepsilon \int_{-\infty}^0 g[u_\varepsilon(x)] dx, \text{ par définition de } x_{0\varepsilon} \\ = u'_\varepsilon(0) > c\theta, \text{ d'après (3.7).}$$

a/ Montrons maintenant, grâce à l'hypothèse (3.11), que $x_{0\varepsilon}$ est borné indépendamment de ε ; pour cela vérifions:

$$(3.14) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que: } u'_\varepsilon(x) \geq \alpha, \forall x < x_{0\varepsilon};$$

auquel cas on a:

$$\alpha x_{0\varepsilon} \leq \int_0^{x_{0\varepsilon}} u'_\varepsilon(s) ds = u_\varepsilon(x_{0\varepsilon}) - u_\varepsilon(0),$$

qui donnerait:

$$x_{0\varepsilon} \leq \frac{u_\varepsilon(x_{0\varepsilon}) - u_\varepsilon(0)}{\alpha} \leq \frac{1-\theta}{\alpha} \text{ (car } u_\varepsilon \leq 1)$$

et donc:

$$(3.15) \quad 0 < x_{0\varepsilon} \leq x_0 \equiv \frac{1-\theta}{\alpha}.$$

Afin de prouver (3.14), on utilise un facteur intégrant en multipliant par u'_ε

l'équation satisfaite par u_ϵ dans (P_ϵ) , on intègre ensuite l'équation obtenue de 0 à $x < x_{0_\epsilon}$:

$$(3.16) \quad \frac{1}{2}|u'_\epsilon(x)|^2 - \frac{1}{2}|u'_\epsilon(0)|^2 - c \int_0^x |u'_\epsilon(x)|^2 dx = - \int_0^x v_\epsilon^n u'_\epsilon(x) f_\epsilon(u_\epsilon) dx + h_\epsilon \int_0^x u'_\epsilon(x) g[u_\epsilon(x)] dx$$

Or d'après (3.7) $u'(0) > c\theta$ et de plus:

$$h_\epsilon \int_0^x u'_\epsilon(x) g[u_\epsilon(x)] dx = h_\epsilon \int_\theta^{u_\epsilon(x)} g(s) ds > 0, \quad \forall x > 0.$$

alors la minoration suivante résulte de (3.16) :

$$(3.17) \quad \frac{1}{2}|u'_\epsilon(x)|^2 \geq \frac{1}{2}c^2\theta^2 - \int_0^x v_\epsilon^n u'_\epsilon(x) f_\epsilon(u_\epsilon) dx.$$

Estimons maintenant l'intégrale intervenant dans le second membre de (3.17), en posant:

$$I_\epsilon \equiv I_\epsilon(x) \equiv \int_\theta^x v_\epsilon^n u'_\epsilon(x) f_\epsilon(u_\epsilon) dx.$$

Les inégalités suivantes permettent de majorer I_ϵ :

$$\forall x \leq x_{0_\epsilon}, \quad v_\epsilon \geq 0, \quad u'_\epsilon(x) \geq 0 \quad (\text{d'après 3.8}) \quad \text{et} \quad f_\epsilon(u_\epsilon) > 0, \quad \text{et:}$$

$$v_\epsilon \leq \max(1, \frac{1}{\lambda})(1 - u_\epsilon) \equiv \lambda(1 - u_\epsilon) \quad (\text{d'après lemme 2.3, chap. I}).$$

Alors:

$$0 \leq I_\epsilon \leq \lambda^n \int_0^x (1 - u_\epsilon)^n u'_\epsilon(x) f_\epsilon(u_\epsilon) dx = \lambda^n \int_\theta^{u_\epsilon(x)} (1 - s)^n f_\epsilon(s) ds, \quad x \in (0, x_{0_\epsilon})$$

Soit pour $x \in (0, x_{0_\epsilon})$:

$$(3.18) \quad 0 \leq I_\epsilon \leq \lambda^n \int_0^{u_\epsilon(x_{0_\epsilon})} (1-s)^n f_\epsilon(s) ds \leq \lambda^n \sup_{\theta \leq s \leq u_\epsilon(x_{0_\epsilon})} f_\epsilon(s) |1-s|^n$$

$$\leq \lambda^n \sup_{\theta \leq s \leq 1-\epsilon A} |(1-s)^n f_\epsilon(s)| \rightarrow 0, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0.$$

à cause de l'hypothèse (H-3/3) et de (3.11).

L'estimation (3.17) peut donc s'écrire pour ϵ petit:

$$\frac{1}{2} |u'_\epsilon(x)|^2 \geq \frac{1}{2} c^2 \theta^2 \Rightarrow |u'_\epsilon(x)| \geq c\theta, \forall x < x_{0_\epsilon}.$$

ceci prouve (3.14) avec $\alpha = c\theta$, et donc (3.15).

b/ On va maintenant reprendre le raisonnement pour montrer (3.9). L'estimation précédente de x_{0_ϵ} va nous permettre de majorer J_ϵ :

$$0 \leq J_\epsilon \leq \lambda^n x_{0_\epsilon} \sup_{0 \leq x \leq x_{0_\epsilon}} |1 - u_\epsilon(x)|^n |f_\epsilon(u_\epsilon(x))| \leq \lambda^n x_{0_\epsilon} \sup_{\theta \leq s \leq u_\epsilon(x_{0_\epsilon})} |(1-s)^n f_\epsilon(s)|$$

$$\leq \lambda^n x_{0_\epsilon} \sup_{\theta \leq s \leq 1-\epsilon A} |(1-s)^n f_\epsilon(s)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

(grâce à H-3/3 et à notre hypothèse de raisonnement (3.11)).^(**)

On a donc l'existence de ϵ_0 et δ positifs tels que:

$$\forall \epsilon \leq \epsilon_0, 0 \leq J_\epsilon \leq \delta.$$

Ce qui avec (3.13) donne: $0 < c\theta < J_\epsilon \leq \delta \Rightarrow \delta > c\theta > 0$.

Mais $\delta > 0$ étant choisi de façon arbitraire, il suffit de le prendre inférieur à $c\theta$ pour contredire (3.11). On a donc montré (3.9) et le lemme (3.2).

On donnera en annexe une autre démonstration de ce lemme.

(**) On retrouve ainsi l'hypothèse mise sur f_ϵ dans [A.4], $1-\epsilon A$ jouant ici le rôle de θ_ϵ

Le lemme suivant nous fournit l'existence du point x_ϵ autour duquel on prouvera l'existence d'une perturbation singulière.

LEMME (3.3):

Il existe un point $x_\epsilon > 0$ borné indépendamment de ϵ tel que:

$$(3.19) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x_\epsilon) = 1.$$

$$(3.20) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u_\epsilon(x) - 1}{\epsilon} = -\infty.$$

Preuve:

La fonction: $f_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \phi\left(\frac{s-1}{\epsilon}\right)$ est une fonction continue, strictement croissante et vérifie: $f_\epsilon(1) = \frac{\phi(0)}{\epsilon^{n+1}}$.

Il existe donc $\epsilon_0 > 0$ tel que:

$$(3.21) \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0, \exists s_\epsilon \in (0,1) \text{ vérifiant: } f_\epsilon(s_\epsilon) = 1 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{s_\epsilon - 1}{\epsilon}\right) = \epsilon^{n+1} \Leftrightarrow \frac{s_\epsilon - 1}{\epsilon} = \phi^{-1}(\epsilon^{n+1}) \\ \Leftrightarrow s_\epsilon = 1 + \epsilon \phi^{-1}(\epsilon^{n+1})$$

En passant à la limite dans (3.21), on obtient grâce à (H-3/3)Bis:

$$(3.22) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{s_\epsilon - 1}{\epsilon} = -\infty \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_\epsilon = 1.$$

Enfin $\frac{u_\epsilon(x_0_\epsilon) - 1}{\epsilon} = O(1)$ (lemme précédent), alors: $\frac{s_\epsilon - 1}{\epsilon} < \frac{u_\epsilon(x_\epsilon) - 1}{\epsilon}$, d'où:

$0 < s_\epsilon < u_\epsilon(x_0_\epsilon)$ et il existe donc $x_\epsilon < x_0_\epsilon$ tel que: $u_\epsilon(x_\epsilon) = s_\epsilon$.

En montrant que: $u'_\epsilon(x) \geq \alpha > 0$, $\forall x < x_\epsilon$ comme au lemme précédent, on obtient facilement l'unicité de x_ϵ ainsi que l'existence de $x_0 > 0$ indépendant de ϵ tel que: $0 < x_\epsilon \leq x_0$. Le lemme (3.3) est donc prouvé ■

Le résultat qui suit montre que les pertes de chaleur restent négligeables pour des énergies élevées :

LEMME (3.4): (Estimation de l'intensité des pertes thermiques)

Soit $(u_\epsilon, v_\epsilon, h_\epsilon)$ solution du problème (P_ϵ) . Alors:

Il existe une suite $\{\epsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty} \searrow 0$ telle que:

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\epsilon_n} = 0.$$

Preuve:

$z_\epsilon = u_\epsilon + \Lambda v_\epsilon - 1^{(***)}$ est solution du problème:

$$(3.24) \quad \begin{cases} z''_\epsilon - c z'_\epsilon = c(1-\Lambda) v'_\epsilon + h_\epsilon g(u_\epsilon) \\ z_\epsilon(-\infty) = \Lambda - 1; \quad z'_\epsilon(+\infty) = 0. \end{cases}$$

qui s'intègre de $(-\infty)$ à x :

$$z'_\epsilon - c z_\epsilon = c(1-\Lambda) v_\epsilon - c(1-\Lambda) + h_\epsilon \int_{-\infty}^x g[u_\epsilon(x)] dx + c(1-\Lambda) = c(1-\Lambda) v_\epsilon + h_\epsilon \int_{-\infty}^x g[u_\epsilon(x)] dx,$$

ce qui équivaut à:

$$(3.25) \quad (z_\epsilon e^{-cx})' = c(1-\Lambda) v_\epsilon(x) e^{-cx} + h_\epsilon e^{-cx} \int_{-\infty}^x g[u_\epsilon(x)] dx.$$

Une nouvelle intégration de (3.25) de x à $+\infty$ donne:

$$(3.26) \quad -z_\epsilon(x) e^{-cx} = c(1-\Lambda) \int_x^{+\infty} v_\epsilon(t) e^{-ct} dt + h_\epsilon \int_x^{+\infty} e^{-ct} \int_{-\infty}^t g[u_\epsilon(s)] ds$$

D'autre part g étant positive et croissante, on a:

(***) $H_\epsilon(x) \equiv z_\epsilon(x) = u_\epsilon(x) + \Lambda v_\epsilon(x) - 1$ représente ici l'enthalpie

$$\int_{-\infty}^t g(u_{\varepsilon}(s)) ds \geq \int_0^x g(u_{\varepsilon}(s)) ds \geq xg(\theta), \quad \forall x \leq t, x \leq x_{0_{\varepsilon}}$$

$$(0 \leq s \leq x \leq x_{0_{\varepsilon}} \Rightarrow u_{\varepsilon}(s) \geq \theta \Rightarrow g(u_{\varepsilon}(s)) \geq g(\theta))$$

D'où:

$$(3.27) \quad \int_x^{+\infty} e^{-ct} dt \int_{-\infty}^t g(u_{\varepsilon}(s)) ds \geq \int_x^{+\infty} e^{-ct} xg(\theta) dt = x \frac{g(\theta)}{c} e^{-cx}$$

Majorons maintenant l'autre terme intervenant dans le second membre de (3.26):

$$(3.28) \quad c|1-\Lambda| \int_x^{+\infty} v_{\varepsilon}(t) e^{-ct} dt \leq c|1-\Lambda| v_{\varepsilon}(x) \int_x^{+\infty} e^{-ct} dt = |1-\Lambda| v_{\varepsilon}(x) e^{-cx}$$

car v_{ε} est décroissante en x (lemme 2.3).

Enfin, (3.27) permet de minorer le second membre de (3.26):

$$-z_{\varepsilon}(x) e^{-cx} \geq c(1-\Lambda) \int_x^{+\infty} v_{\varepsilon}(t) e^{-ct} dt + h_{\varepsilon} x \frac{g(\theta)}{c} e^{-cx}$$

d'où:

$$(3.29) \quad 0 < h_{\varepsilon} \leq \frac{-cz_{\varepsilon}(x)}{xg(\theta)} - \frac{c^2(1-\Lambda)e^{cx}}{xg(\theta)} \int_x^{+\infty} v_{\varepsilon}(t) e^{-ct} dt$$

$$(3.29) \Rightarrow 0 < h_{\varepsilon} \leq \frac{-cz_{\varepsilon}(x)}{xg(\theta)} + \frac{c^2 e^{cx} |1-\Lambda|}{xg(\theta)} \int_x^{+\infty} v_{\varepsilon}(t) e^{-ct} dt$$

soit: $0 < h_{\varepsilon} \leq \frac{-cz_{\varepsilon}(x)}{xg(\theta)} + \frac{c|1-\Lambda|}{xg(\theta)} v_{\varepsilon}(x)$ (d'après 3.28).

D'autre part:

$$\begin{cases} 0 < v_{\varepsilon}(x) \leq \lambda (1 - u_{\varepsilon}(x)) & (\text{lemme 2.3}) \\ \text{et,} \\ -z_{\varepsilon}(x) \leq |u_{\varepsilon}(x) + \lambda v_{\varepsilon}(x) - 1| \leq |1 - u_{\varepsilon}(x)| + \lambda v_{\varepsilon}(x) \leq (1 + \lambda \Lambda) (1 - u_{\varepsilon}(x)) \end{cases}$$

Par conséquent:

$$0 < h_{\varepsilon} \leq \frac{c}{xg(\theta)} (1 - u_{\varepsilon}(x)) \left\{ 1 + \lambda \Lambda + \lambda |1 - \Lambda| \right\}$$

i.e.:

$$(3.30) \quad 0 < h_{\varepsilon} \leq K \frac{1 - u_{\varepsilon}(x)}{x}, \text{ où } K \equiv c \frac{1 + \lambda \Lambda + |1 - \Lambda|}{g(\theta)}$$

En particulier, pour $x = x_{\varepsilon}$:

$$(3.30)\text{Bis} \quad 0 < h_{\varepsilon} \leq K \frac{1 - u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon})}{x_{\varepsilon}}$$

On va donc minorer x_{ε} indépendamment de ε . Pour cela, on écrit:

$$u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) - u_{\varepsilon}(0) = \int_0^{x_{\varepsilon}} u'_{\varepsilon}(x) dx \leq \lambda c x_{\varepsilon}, \text{ car } u'_{\varepsilon} \leq \lambda c \text{ (lemme 2.3).}$$

d'où:

$$x_{\varepsilon} \geq \frac{u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) - \theta}{\lambda c},$$

et donc:

$$(3.31) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{\varepsilon} \geq \frac{1 - \theta}{\lambda c} \equiv \beta > 0$$

En effet quitte à prendre une sous-suite, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{\varepsilon}$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon}$ existent car:

$0 < h_{\varepsilon} \leq H$ (proposition 2.5, chapitre II) et $0 < x_{\varepsilon} \leq x_0$ (lemme 3.3)

Par conséquent, grâce à (3.31) on a:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tels que: } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, x_\varepsilon \geq \alpha$$

qu'on reporte dans (3.30)Bis pour obtenir:

$$(3.30)\text{ter} \quad 0 < h_\varepsilon \leq \frac{K}{\alpha} (1 - u_\varepsilon(x_\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

ce qui nous permet d'énoncer, en utilisant le lemme (3.3):

$\exists \varepsilon_n \leq \varepsilon_0$, vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, telle que: $h_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ d'où (3.23) et le lemme (3.4).

La fonction u_ε n'étant pas croissante comme dans le cas adiabatique (cf [A.4],[A.5]), nous aurons besoin du lemme suivant qui nous permettra d'obtenir la convergence de u_ε et v_ε lorsque $x \geq x_\varepsilon$. Enfin, dans toute la suite, on notera $\bar{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon$.

LEMME (3.5): (Estimations de l'enthalpie et de son gradient)

Soit $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, h_\varepsilon)$ une solution du problème (P_ε) et $\bar{x}$ défini dans le lemme précédent. Alors:

Il existe une suite $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$ telle que:

$$(3.32) \quad \|z'_{\varepsilon_n}\|_{C^0([\bar{x}, +\infty[)} \xrightarrow{\quad} 0$$

$$(3.33) \quad \|z_{\varepsilon_n}\|_{C^0_{loc}([\bar{x}, +\infty[)} \xrightarrow{\quad} 0$$

où l'on a posé: $z_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + \Lambda v_\varepsilon(x) - 1$.

Démonstration:

1°/ L'équation satisfaite par z_ε (3.24, lemme 3.3) s'écrit:

$$(z'_\varepsilon e^{-cx})' = c(1-\Lambda)v'_\varepsilon e^{-cx} + h_\varepsilon e^{-cx} g[u_\varepsilon(x)]$$

qu'on intègre de x à $+\infty$:

$$-z'_\epsilon(x)e^{-cx} = c(1-\lambda)\int_x^{+\infty} e^{-cx}v'_\epsilon(t)dt + h_\epsilon\int_x^{+\infty} e^{-cx}g(u_\epsilon(t))dt.$$

Il en résulte l'estimation suivante:

$$(3.34) \quad |z'_\epsilon(x)| \leq c|1-\lambda|e^{-cx}\int_x^{+\infty} e^{-ct}(-v'_\epsilon(t))dt + h_\epsilon e^{-cx}\int_x^{+\infty} e^{-ct}g(u_\epsilon)dt$$

Comme $g(u_\epsilon) \leq g(1)=1$ d'après (H-2), on obtient successivement en utilisant la décroissance de $v_\epsilon(x)$ (lemme 2.3):

$$|z'_\epsilon| \leq c|1-\lambda|\int_x^{+\infty} -v'_\epsilon(t)dt + h_\epsilon e^{-cx}\int_x^{+\infty} e^{-ct}dt$$

d'où:

$$|z'_\epsilon(x)| \leq c|1-\lambda|v_\epsilon(x) + \frac{h_\epsilon}{c}$$

et pour $x \geq x_\epsilon$:

$$|z'_\epsilon(x)| \leq c|1-\lambda|v_\epsilon(x_\epsilon) + \frac{h_\epsilon}{c}$$

Enfin:

$$|z'_\epsilon(x)| \leq c\lambda|1-\lambda|\left(1-u_\epsilon(x_\epsilon)\right) + \frac{h_\epsilon}{c} \quad \forall x \geq x_\epsilon.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq x_\epsilon} |z'_\epsilon(x)| &\leq c\lambda|1-\lambda|\left(1-u_\epsilon(x_\epsilon)\right) + \frac{h_\epsilon}{c} \\ &\leq \left(c\lambda|1-\lambda| + \frac{K}{\alpha c}\right)(1-u_\epsilon(x_\epsilon)), \text{ d'après (3.30)ter} \end{aligned}$$

Soit:

$$(3.35) \quad \sup_{x \geq x_\epsilon} |z'_\epsilon(x)| \leq M(1 - u_\epsilon(x))$$

avec: $M \equiv c\lambda|1-\Lambda| + \frac{K}{c\alpha}$

ce qui avec (3.19) montrent la première partie du lemme.

2°/ On a vu qu'à partir de (3.24) on pouvait avoir:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'_\epsilon - cz_\epsilon = c(1-\Lambda)v_\epsilon + h_\epsilon \int_{-\infty}^x g(u_\epsilon) dx.$$

D'où:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |z_\epsilon(x)| \leq |1-\Lambda|v_\epsilon(x) + \frac{|z'_\epsilon(x)|}{c} + \frac{h_\epsilon}{c} \int_{-\infty}^x g(u_\epsilon(x)) dx$$

Cette estimation peut s'améliorer en majorant l'intégrale au second membre:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x g(u_\epsilon(x)) dx &= \int_{-\infty}^0 g(u_\epsilon(x)) dx + \int_0^x g(u_\epsilon(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{c} \int_0^\theta \frac{g(s)}{s} ds + x = \frac{1}{c} + x \quad (\text{lemme 1.6, chapitre I}) \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |z_\epsilon(x)| &\leq |1-\Lambda|v_\epsilon(x) + \frac{z'_\epsilon(x)}{c} + \frac{h_\epsilon}{c} \left(x + \frac{1}{c}\right) \\ \Rightarrow |z_\epsilon(x)| &\leq \lambda|1-\Lambda|(1-u_\epsilon(x)) + c|1-\Lambda|\lambda(1-u_\epsilon(x)) + \frac{h_\epsilon}{c^2} + \frac{h_\epsilon}{c} \left(x + \frac{1}{c}\right), \text{ d'après 1°/} \\ \Rightarrow (3.36) \quad \forall x \geq x_\epsilon, \quad |z_\epsilon(x)| &\leq N(1-u_\epsilon(x_\epsilon))(1+x), \text{ d'après (3.30)ter} \end{aligned}$$

avec: $N \equiv \sup \left(\lambda |1 - \Lambda| (1+c) + \frac{K}{\alpha c} {}_2(1+I/c), \frac{K}{\alpha c} \right)$. On déduit alors de (3.19):

$$(3.37) \quad \sup_K |z_\varepsilon(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

K étant un compact de $[\bar{x}, +\infty[$ indépendant de ε . On a donc prouvé (3.33) et le lemme (3.5) ■

Les quatre lemmes précédents vont nous permettre d'effectuer le passage à la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et montrer ainsi le théorème (3.1).

III.3 PASSAGE A LA LIMITE $\varepsilon=0$:

La limite de h_ε ayant été obtenue par le lemme (3.4), il ne reste plus qu'à étudier la convergence de u_ε et v_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME (3.1):

On va distinguer séparément trois cas: $x \leq 0$, $0 \leq x \leq \bar{x}$ et $x \geq \bar{x}$.

1^{er} cas: $x \leq 0$

On sait dans ce cas (lemme 1.6) que:

$$(3.38) \quad \begin{cases} -u_\varepsilon'' + cu_\varepsilon' = h_\varepsilon g(u_\varepsilon). \\ u_\varepsilon(-\infty) = 0; \quad u_\varepsilon(0) = \theta. \end{cases} \quad (3.39) \quad v_\varepsilon(x) = 1 + [v_\varepsilon(0) - 1] e^{cx/\Lambda}.$$

De plus, u_ε est bornée indépendamment de ε dans $H^2(\mathbb{R}^-)$ (rappelons que $0 < h_\varepsilon \leq H$, en passant à la limite quand $a \rightarrow +\infty$, d'après le chapitre I).

Il existe donc une suite $(\varepsilon_n) \searrow 0$ telle que: $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0$ dans $C_{loc}^1(\mathbb{R}^-)$ où u_0 est la solution du problème:

$$\begin{cases} u_0'' - cu_0' = 0 \\ u_0(0) = \theta \end{cases}$$

car $h_\varepsilon g(u_\varepsilon)$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^-$.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}^-$ $0 \leq u_\varepsilon(x) \leq \theta e^{cx}$ d'où à la limite: $0 \leq u_0(x) \leq \theta e^{cx} \Rightarrow u_0(-\infty) = 0$.

Par suite: (3.40) $u_0(x) = \theta e^{cx}$, sur $\mathbb{R}^-$.

De plus, $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^-)$ et $v_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_0(x) = 1 + [v_0(x) - 1]e^{cx/\Lambda}$.

2^{ème} cas: $0 \leq x \leq \bar{x}$

On sait (proposition 1.12 et 2.4) que:

$$\forall x \in [0, \bar{x}], \quad \int_0^x |u'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq \int_0^{\bar{x}} |u'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

et:

$$\Lambda \int_0^x |v'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq \Lambda \int_0^{\bar{x}} |v'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c.$$

De plus, $0 \leq u_\varepsilon, v_\varepsilon \leq 1$, alors: (u_ε) et (v_ε) sont bornées dans $H^1([0, \bar{x}])$ indépendamment de $\varepsilon > 0$.

Or, L'injection: $H^2([0, \bar{x}]) \hookrightarrow \mathcal{C}^1([0, \bar{x}])$ est compacte, il existe donc $\{\varepsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty}$

telle que:

$$\|u_{\varepsilon_n} - u_0\|_{\mathcal{C}^1([0, \bar{x}])} \longrightarrow 0 \text{ et } \|v_{\varepsilon_n} - v_0\|_{\mathcal{C}^1([0, \bar{x}])} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Enfin:

* $|v_{\varepsilon_n}^n f_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})| \leq \lambda^n (1 - u_{\varepsilon_n})^n f_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de la forme $[0, \bar{x} - \delta]$ (hypothèse H/3-3).

* $|h_{\varepsilon_n} g(u_{\varepsilon_n})| \leq h_{\varepsilon_n}$ converge uniformément vers 0 (lemme 3.4).

Par conséquent, (u_0, v_0) vérifie sur l'intervalle $]-\infty, \bar{x}]$ (en regroupant les deux premiers cas) le système linéaire découlé:

$$\begin{cases} u_0'' - cu_0' = 0 \\ \Lambda v_0'' - cv_0' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_0(-\infty) = 0; u_0(\bar{x}) = 1. \\ v_0(-\infty) = 1; v_0(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Car: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = 1$ (lemme 3.3) et $0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) \leq \lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - u_{\varepsilon}(x_{\varepsilon})) = 0$ donnent à

la limite: (3.41) $u_0(\bar{x}) = 1$ et $v_0(\bar{x}) = 0$

3^{ème} cas: $x \in [\bar{x}, +\infty[$

grâce au lemme (3.5), on a moyennant l'extraction éventuelle d'une sous-suite:

$$(3.42) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_{\varepsilon}(x) + \Lambda v_{\varepsilon}(x) - 1| = 0, \text{ sur tout compact de } [\bar{x}, +\infty[.$$

Invoquant toujours la décroissance de v_{ε} , On obtient compte tenu de (3.41):

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \geq x_{\varepsilon}} v_{\varepsilon}(x) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = 0,$$

Soit: (3.43) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \geq \bar{x}} v_{\varepsilon}(x) = 0.$

Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité:

$$|1-u_\varepsilon(x)| \leq |1-u_\varepsilon(x) - \Lambda v_\varepsilon(x)| + \Lambda v_\varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On obtient, en combinant (3.42) et (3.43):

$$(3.44) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in K} |1-u_\varepsilon(x)| = 0, \quad \forall K \text{ compact de } [\bar{x}, +\infty[.$$

(3.43) et (3.44) prouvent alors la convergence $\mathcal{C}_{1 \circ c}^0([\bar{x}, +\infty[) \times \mathcal{C}^0([\bar{x}, +\infty[)$ de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vers $(1, 0)$.

En récapitulant les trois cas précédents, on obtient donc la convergence dans $\mathcal{C}_{1 \circ c}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vers (u_0, v_0) défini par:

$$\begin{cases} u_0(x) = e^{c(x-\bar{x})} \\ v_0(x) = 1 - e^{c(x-\bar{x})/\Lambda} \end{cases} \quad \text{pour } x \leq \bar{x}. \quad \begin{cases} u_0(x) = 1 \\ v_0(x) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \geq \bar{x}.$$

Enfin, en calculant les sauts des dérivées de u_0 et v_0 en $\bar{x}$:

$$u'_0 = cu_0 Y(\bar{x} - x) \text{ et } v'_0 = -cv_0 Y(\bar{x} - x) \text{ (Y désignant la fonction de Heaviside),}$$

on écrit le système linéaire :

$$(P_0) \quad \begin{cases} -u''_0 + cu'_0 = c\delta_{x=\bar{x}} \\ -\Lambda v''_0 + cv'_0 = -c\delta_{x=\bar{x}} \end{cases} \quad \begin{cases} u_0(-\infty) = v_0(+\infty) = 0 \\ u_0(+\infty) = v_0(-\infty) = 1 \end{cases} \quad u_0(0) = \theta.$$

$\bar{x}$ étant déterminé par la relation:

$$u_0(0) = \theta \Leftrightarrow e^{-c\bar{x}} = \theta \Leftrightarrow \bar{x} = -\frac{1}{c} \ln \theta.$$

La démonstration du théorème (3.1) est donc complète. Remarquons simplement

que u_0 et v_0 étant définies de manière unique, elles sont donc indépendantes du choix de la suite considérée.

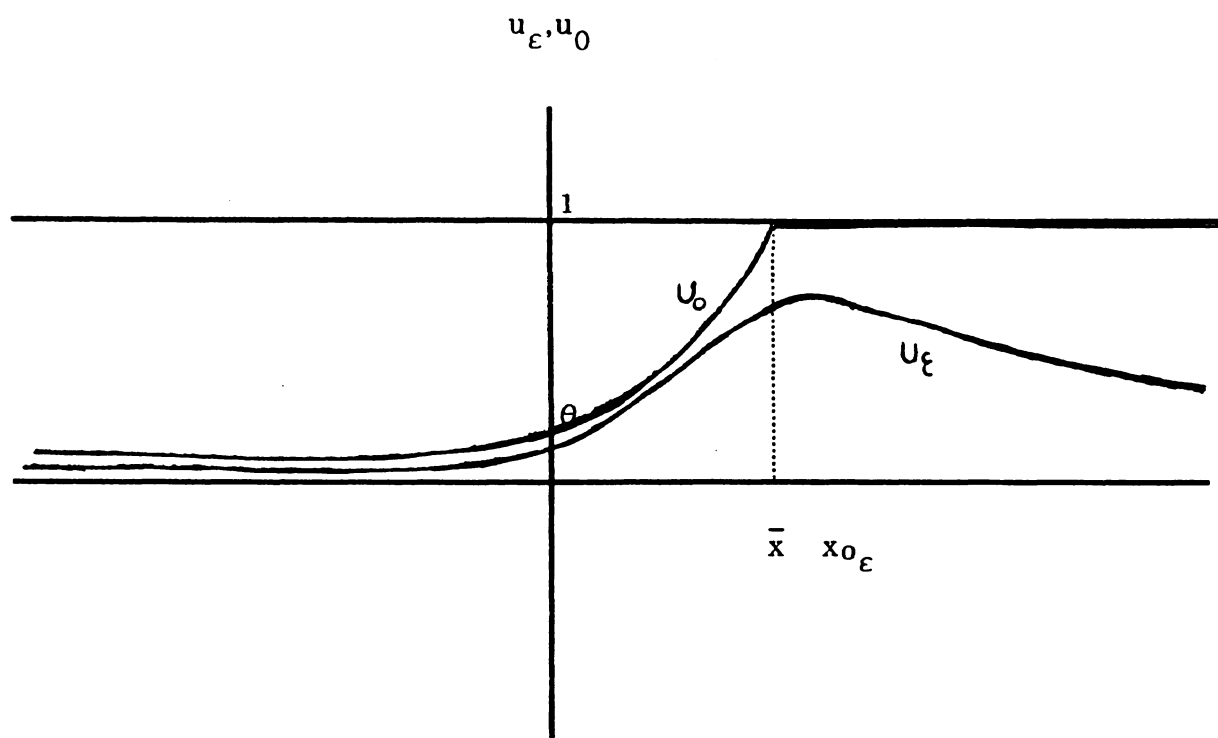
Il ne reste plus qu'à préciser la décroissance vers 0 de la température u_ϵ quand x et l'énergie E deviennent très grands. On examinera aussi, et ce sera l'objet du chapitre suivant la structure de la flamme dans différentes zones de combustion.

On représente en annexe les profils des différentes solutions ainsi qu'une autre démonstration de l'estimation apparaissant dans le lemme (3.2).

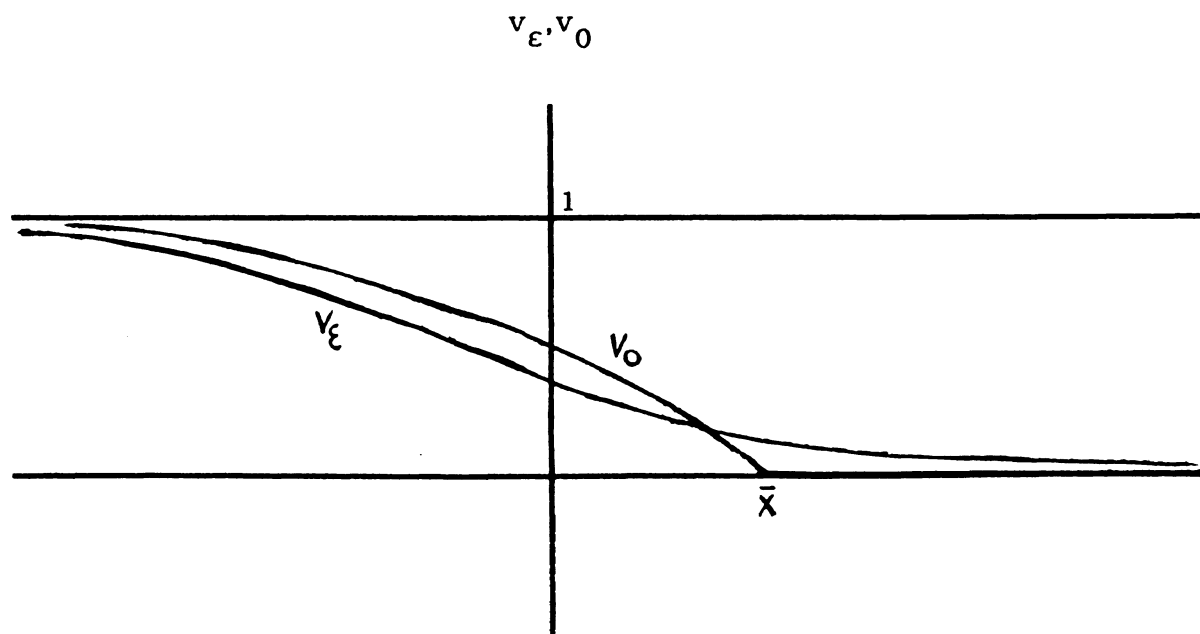
ANNEXE III.I

PROFIL DES SOLUTIONS

a/ Profil de la température



b/ Profil de la concentration du produit:



Autre démonstration de l'estimation:

$$(A.1) \quad \frac{1-u_{\varepsilon}(x_{0\varepsilon})}{\varepsilon} = O(1) \text{ pour } \varepsilon \text{ petit}$$

En intégrant de 0 à $x_{0\varepsilon}$ l'équation en u_{ε} qu'on a préalablement multipliée par u'_{ε} , on obtient en notant que $u'_{\varepsilon}(0) \geq c\theta$:

$$(A.2) \quad \frac{1}{2}c^2\theta^2 \leq \frac{1}{2}|u'_{\varepsilon}(0)|^2 \leq \lambda^n \int_0^{x_{0\varepsilon}} \left(\frac{1-u_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{u'_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \phi\left(\frac{u_{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) dx$$

$$\leq \lambda^n \int_0^{x_{0\varepsilon}} \left(\frac{1-u_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{u'_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \phi\left(\frac{1}{2} \frac{u_{\varepsilon}-1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) dx$$

car u_{ε} est croissante sur $(0, x_{0\varepsilon})$. Par suite, on déduit de (A.2):

$$\frac{1}{2}c^2\theta^2 \leq \lambda^n \int_{(\theta-1)/\varepsilon}^{(u_{0\varepsilon}-1)/\varepsilon} (-t)^n \phi\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) dt$$

$$\leq 2^{n+1} \lambda^n \int_{-\infty}^0 (-T)^n \phi\left(T + \frac{1}{2} \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) dT$$

Ou encore, par définition de Φ (IV.5/2°):

$$\frac{1}{2}c^2\theta^2 \leq 2(2\lambda)^n \Phi\left(\frac{1}{2} \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)$$

Il existe donc deux constantes positives k et k' telles que:

$$\Phi\left(\frac{1}{2} \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) \geq k \Leftrightarrow \frac{u_{0\varepsilon}-1}{\varepsilon} \geq k'. \text{ D'où: (A.1) } \blacksquare$$

CHAPITRE IV

ANALYSE DE PERTURBATION SINGULIERE

IV-0 INTRODUCTION et HYPOTHESES:

1°/ Etant donnée une solution du problème (P_ϵ) obtenue au chapitre précédent, on se propose dans ce chapitre de préciser la convergence vers 0 de h_ϵ , $u_\epsilon - u_0$ et $v_\epsilon - v_0$ où u_0 et v_0 ont été définies au chapitre III.

En fonction de l'ordre de grandeur du terme de source $v_\epsilon^n f_\epsilon(u_\epsilon)$, on distinguera trois régions spatiales différentes correspondant aux zones de combustion dans lesquelles on effectuera des changements de variables adéquats ce qui nous conduira à établir essentiellement trois résultats distincts. Cette étude précise rigoureusement la construction et l'analyse asymptotique à l'ordre 1 des couches externes et internes en combustion, habituellement étudiées de manière formelle par de nombreux physiciens (cf à ce titre les travaux de Joulin-Clavin: [A.10], [A.11], de Buckmaster: [A.6] ou de Bush-Fendell: [A.7]).

Nos trois résultats nous conduisent ensuite à une relation limite non linéaire entre c et h_ϵ pouvant s'interpréter comme un phénomène d'extinction de la flamme. Cette relation a d'ailleurs été obtenue à l'aide d'un développement asymptotique formel à l'ordre 1 dans [A.10], [A.11].

Elle détermine d'ailleurs les conditions limites pour que dans certaines conditions une flamme reste entretenue (voir à ce propos l'interprétation en fin de ce chapitre).

On montrera également que dans la zone interne se produit une perturbation singulière qu'on régularisera.

2°/ Les hypothèses:

On travaille dans ce chapitre avec la fonction f_ε définie au chapitre précédent, et qu'on rappelle ici avec les hypothèses suivantes:

$$(H/4-1) \quad f_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \phi\left(\frac{s-1}{\varepsilon}\right) \chi_{[\theta,1]}(s)$$

$$(H/4-2) \quad \phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ continue, lipschitzienne et strictement croissante.}$$

$$(H/4-3) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} |y|^p \phi(y) = 0, \quad \forall p \geq 0^{(*)}$$

Afin d'utiliser un résultat dû à Berestycki, Nicolaenko et Scheurer ([A.4]) on supposera en outre:

$$(H/4-4) \quad m \equiv \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(t) dt < +\infty$$

On introduira également la fonction:
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt$$

Enfin, on rappelle les hypothèses satisfaites par g :

$$(H/4-5) \quad \begin{cases} g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ continue, strictement croissante} \\ g(0)=0 \text{ et } g(1)=1 \\ I \equiv \int_0^1 \frac{g(s)}{s} ds < \infty \end{cases}$$

REMARQUES sur les hypothèses:

1°/ La fonction ϕ est une généralisation de terme d'Arrhénius $\phi(\sigma) = \lambda e^\sigma$, $\lambda > 0$ représentant le modèle physique utilisé en combustion (cf [0.3],[0.21]).

2°/ Grâce à (H/4-1) et (H/4-3) la fonction f vérifie en particulier:

(*) Il suffit que cette hypothèse soit vérifiée pour $p=0, n+1$ et $n+2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1-s)^n}{\varepsilon^{n+1}} \phi\left(\frac{s-1}{\varepsilon}\right) = 0 \quad \forall 0 < s < 1.$$

3°/ On rappelle enfin le résultat suivant (cf [A.5]):

$$(4.6) \quad c_{ad} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (c_{ad})_{\varepsilon} = \sqrt{2m/\Lambda^n}$$

où m a été défini dans (H/4-4) et (c_{ad}) désignant la célérité de l'onde plane adiabatique (correspondant à $h=0$).

Lorsque $\phi(s) = xe^s$, $m = \Gamma(n+1)$ (4.6) peut s'écrire:

$$(4.7) \quad c_{ad} = \sqrt{2x\Gamma(n+1)/\Lambda^n} \quad x > 0$$

où $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ ($= n!$, $n \in \mathbb{N}$), désigne la fonction Gamma.

IV.1 PRESENTATION des résultats:

IV.1-1°/ Dans toute la suite, on désignera par $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}, h_{\varepsilon})$ une solution du problème (P_{ε}) -obtenue aux chapitres I et II- et par (u_0, v_0) la solution du problème limite (chapitre III).

La structure d'une flamme se distinguant par des zones spatiales caractérisées par l'importance des termes de convection-diffusion ou de réaction apparaissant dans le problème (P_{ε}) , on s'intéressera à l'étude locale de ces zones.

On précisera également le comportement asymptotique des solutions limites ainsi obtenues. En effet, une difficulté essentielle rencontrée au chapitre précédent était de préciser le comportement à l'infini de la température.

IV.1-2°/ Avant de présenter nos résultats principaux, nous définirons deux nouvelles fonctions qui serviront à introduire des correcteurs:

On considère la suite η_ϵ telle que:

$$(4.8) \quad 0 < \eta_\epsilon < 1, \eta_\epsilon \rightarrow 1 - e^{\ln \theta / \Lambda} \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_\epsilon^{-1} - e^{\ln \theta / \Lambda}}{\epsilon} = 0 \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0.$$

Puis on définit le point y_ϵ par:

$$(4.9) \quad v_\epsilon(y_\epsilon) = \eta_\epsilon$$

On montrera que ce point est bien défini.

Enfin, on introduit les fonctions suivantes translatées de u_ϵ et v_ϵ :

$$(4.10) \quad \begin{cases} \hat{u}_\epsilon(x) = u_\epsilon(x + y_\epsilon) \\ \hat{v}_\epsilon(x) = v_\epsilon(x + y_\epsilon) \end{cases}$$

REMARQUES:

1°/ On peut prendre comme exemple de suite η_ϵ :

$$\eta_\epsilon = 1 - e^{\ln \theta / \Lambda} + \epsilon^{1+\gamma}, \text{ avec } \gamma > 0.$$

2°/ $1 - e^{\ln \theta / \Lambda}$ n'est autre que $v_0(0)$.

3°/ v_ϵ étant une fonction continue, strictement décroissante (lemme 2.3), (4.9) définit donc bien y_ϵ .

4°/ Dans le cas particulier $\Lambda=1$, $v_0(0) = 1 - e^{\ln \theta} = 1 - \theta$ il suffit donc de prendre y_ϵ tel que: $v_\epsilon(y_\epsilon) = 1 - \theta$.

5°/ L'introduction de y_ϵ permet de fixer la valeur de: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{v}_\epsilon(0) - v_0(0)}{\epsilon}$ et d'éviter d'aboutir à des solutions limites triviales (voir démonstration du théorème 4.1). En effet, le choix précédent de 0 comme origine n'est plus convenable.

6°/ Vérifions:

$$(4.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon = 0$$

Comme la position de η_ε par rapport à $v_\varepsilon(0)$ n'est pas à priori connue, le signe de y_ε ne l'est pas non plus. On examine donc deux cas:

a/ $y_\varepsilon \leq 0$: On écrit, compte tenu de (4.9):

$$(4.12) \quad \eta_\varepsilon = v_\varepsilon(y_\varepsilon) = 1 + [v_\varepsilon(0) - 1] e^{cy_\varepsilon/\Lambda}$$

On peut voir en passant à la limite dans (4.12) que $|y_\varepsilon|$ est borné indépendamment de ε et que:

$$1 - e^{\ln \theta / \Lambda} = 1 + [v_0(0) - 1] e^{c\bar{y}/\Lambda}, \text{ où } \bar{y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon.$$

D'où: $v_0(0) = v_0(\bar{y})$, d'après la remarque 2°. Enfin $\bar{y} = 0$ découle de la stricte monotonie de v_0 .

b/ $y_\varepsilon \geq 0$: Par ~~définition de~~ η_ε , on a:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que: } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad v_\varepsilon(\bar{x}) \leq \eta_\varepsilon \text{ car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(\bar{x}) = 0.$$

Par suite: $v_\varepsilon(\bar{x}) \leq v_\varepsilon(y_\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq y_\varepsilon \leq \bar{x}$, car v_ε décroît.

En passant de nouveau à la limite dans (4.9), on obtient $\bar{y} = 0$.

IV.1-3°/ Commençons par énoncer le premier résultat concernant "la zone externe amont" ou zone de préchauffage dans laquelle on introduit les correcteurs d'ordre 1:

$$s_\varepsilon(x) = \frac{\hat{u}_\varepsilon(x) - u_0(x)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad t_\varepsilon(x) = \frac{\hat{v}_\varepsilon(x) - v_0(x)}{\varepsilon}$$

On se propose d'étudier le comportement de ces correcteurs lorsque $\epsilon \rightarrow 0$; ce qui correspond à une étude rigoureuse d'un développement asymptotique toujours à l'ordre 1.

On prouvera alors le résultat suivant:

THEOREME (4.1):

Les suites s_ϵ et t_ϵ convergent dans $\mathbb{C}^2(-\infty, \bar{x})$ vers s_0 et t_0 telles que:

$$t_0 \equiv 0 \quad \text{et} \quad s_0(x) = s_0(\bar{x}) u_0 - \frac{h_*}{c^2} \left[-u_0 I + \int_0^{u_0} \frac{g(t)}{t} dt + u_0 \int_{u_0}^1 \frac{g(s)}{s^2} ds \right]$$

REMARQUES:

a/ h_* désigne la limite de $\frac{h_\epsilon}{\epsilon}$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ limite dont on prouvera l'existence.

b/ $s_0(\bar{x})$ est une constante qui sera déterminée plus loin après raccords des zones (proposition 4.4).

IV.1-4°/ 2^{ème} résultat: Investigation de la zone interne:

Dans cette zone le saut des dérivées de la température et de la concentration du produit en $\bar{x}$ doivent être $\mathcal{O}(1)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$; ceci suggère l'introduction d'une variable indépendante associée à la zone de réaction; il s'agit d'un phénomène bien connu dans l'étude des couches limites en mécanique des fluides.

Cette motivation nous conduit à effectuer dans cette région le changement de variables suivant:

$$(4.13) \quad \xi = \bar{x} + \frac{x - \bar{x}}{\epsilon}, \quad \bar{x} \text{ ayant été défini au chapitre précédent.}$$

ξ est une variable des couches limites utilisée aussi pour étudier le comportement de la température et de la concentration dans des zones en combustion où la température devient très grande, ici proche de 1 (cf [A.10]).

On examine ensuite le comportement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, des solutions suivantes:

$$(4.14) \quad S_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{u}_\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad (4.15) \quad T_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{v}_\varepsilon(x)}{\varepsilon}$$

On montrera le résultat précis suivant:

THEOREME (4.2):

$$\|S_\varepsilon - s_0(\bar{x}) + \Lambda T_0\|_{\mathbb{C}_{loc}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|T_\varepsilon - T_0\|_{\mathbb{C}_{loc}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{où } T_0 \text{ est}$$

la solution du problème aux limites^(*):

$$(4.16) \quad \begin{cases} \Lambda T_0'' = T_0' \phi[s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0] \\ T_0'(-\infty) = -c/\Lambda \quad T_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

REMARQUES:

a/ On précisera notamment le comportement asymptotique de T_0 à l'infini ce qui expliquera le comportement de $\left\{\frac{\hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$ à "l'extérieur de la zone interne".

b/ On montrera que: $s_0(\bar{x}) = \Phi^{-1}(c^2)$ où l'on a posé: $\Phi(x) = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt$ et que cette relation définit bien $s_0(\bar{x})$.

IV.1-5°/ 3^{ème} résultat: Etude de la zone externe aval (zone de refroidissement)

Il s'agit dans ce résultat d'examiner le comportement de la température pour des valeurs grandes de x . Il permet également d'apporter un complément d'information quant au comportement de u_ε en dehors des compacts de $\mathbb{R}^+$.

On introduit alors dans cette zone la variable dilatée:

$$(4.17) \quad \eta = \bar{x} + \varepsilon(x - \bar{x})$$

(*) Il s'agit en fait d'une variante du problème de Linan obtenu souvent comme problème limite en combustion (cf [A.9])

Puis on étudie les fonctions u_ε et v_ε comme fonction de η en posant:

$$(4.18) \quad U_\varepsilon(\eta) = u_\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad V_\varepsilon(\eta) = v_\varepsilon(x)$$

Ceci nous conduira au résultat suivant:

THEOREME (4.3):

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\|U_\varepsilon - U_0\|_{\mathbb{C}^0([\bar{x}, +\infty[)} \rightarrow 0$ et $\|V_\varepsilon\|_{\mathbb{C}^0([\bar{x}, +\infty[)} \rightarrow 0$,

où U_0 est la solution du problème de Cauchy:

$$(4.17) \quad \begin{cases} \frac{dU_0}{d\eta} = -\frac{h_\star}{c} g(U_0) \\ U_0(\bar{x}) = 1 \end{cases}$$

REMARQUE:

g étant une fonction lipschitzienne (H/4-5), il est clair, d'après le théorème de Cauchy que le problème (4.17) admet une unique solution $U_0 \in \mathbb{C}^1([\bar{x}, +\infty[)$.

IV.1-6°/ Ces trois résultats nous amènent naturellement à établir une relation limite entre $h_\star$ et c qu'on discutera en fin de chapitre. Dans le cas $\Lambda \neq 1$, un terme du type $\left\{ \frac{v'_\varepsilon}{\varepsilon} \right\}$ semble gêner le raccord ; ainsi la relation suivante a été prouvée uniquement lorsque $\Lambda = 1$:

PROPOSITION (4.4):

Posons:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt,$$

alors:

$$(4.18) \quad h_\star(1+I) + c^2 \Phi^{-1}(c^2) = 0$$

REMARQUES:

a/ On montrera grâce à cette relation que:

$$i) \forall c \in]0, c_{ad}[, h_* > 0$$

$$ii) \lim_{c \rightarrow 0, c \rightarrow c_{ad}} h_* = 0$$

On en déduira que la courbe $c=c(h)$ présente un point de retournement ce qui représente un phénomène intéressant en combustion.

b/ lorsque ϕ prend la forme typique suivant: $\phi(\sigma) = x e^{\sigma}$, $x > 0$ (4.18)

devient:

$$h_*(1+I) + c^2 \operatorname{Ln} \left\{ \frac{c^2}{c_{ad}^2} \right\} = 0$$

IV.2 Investigation de la zone externe amont:

La démonstration repose essentiellement sur des estimations convenables d'une solution (s_ϵ, t_ϵ) . Elle résultera des lemmes suivants:

LEMME (4.1.1):

Il existe deux constantes positives ϵ_0 et K telles que:

$$(4.19) \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < h_\epsilon \leq K\epsilon$$

LEMME (4.1.2):

$\{s_\epsilon\}$ et $\{t_\epsilon\}$ sont bornées uniformément en x et ϵ dans $W^{2,\infty}(-\infty, \bar{x})$

LEMME (4.1.3):

La suite $\{s_\epsilon\}$ est bornée indépendamment de ϵ et de x dans $H^1(-\infty, 0)$

On va d'abord expliquer la nature de perturbation existant autour de $\bar{x}$, à travers la remarque suivante:

REMARQUE:

On a montré (chapitre III) l'existence de x_ϵ telle que:

$$\frac{u_\epsilon(x_\epsilon) - 1}{\epsilon} \rightarrow -\infty \text{ et } x_\epsilon \rightarrow \bar{x} \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0. \text{ Ceci prouve qu' autour de } \bar{x} \text{ existe bien}$$

une perturbation singulière. Cependant, on régularisera cette perturbation en

prouvant que $\left| \frac{u_\varepsilon(\bar{x}) - 1}{\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(1)$, et donc aussi $|s_\varepsilon|$ et $|t_\varepsilon|$ pour ε petit.

On commence par montrer le théorème (4.1) en supposant dans un premier temps les lemmes (4.1.1) à (4.1.3) qu'on prouvera juste après.

IV.2-1 Démonstration du théorème (4.1):

Les dérivées de u_0 et v_0 étant discontinues en $\bar{x}$ (chapitre III), $\{s_\varepsilon\}$ et $\{t_\varepsilon\}$ vérifient pour $x < \bar{x}$ le système suivant:

$$(4.22) \quad \begin{cases} s_\varepsilon'' - cs_\varepsilon' = -\frac{\hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) + \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} g(\hat{u}_\varepsilon) \\ \Lambda t_\varepsilon'' - ct_\varepsilon' = \frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) \end{cases}$$

$$(4.23) \quad \begin{cases} s_\varepsilon(-\infty) = t_\varepsilon(-\infty) = 0 \\ t_\varepsilon(0) = \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon) - v_0(0)}{\varepsilon} = \frac{\eta_\varepsilon - v_0(0)}{\varepsilon} \quad (\text{d'après (4.9)}) \end{cases}$$

On a évité $\bar{x}$ sinon on aurait au second membre de (4.22) un terme de type $\frac{1}{\varepsilon}$ qui explose. Utilisant des méthodes de compacité, on ne s'intéressera d'ailleurs qu'à des convergences locales.

1°/ Soit $\delta > 0$. $(s_\varepsilon, t_\varepsilon)$ est borné dans $[H_{loc}^2(|-\infty, \bar{x} - \delta|)]^2$ (lemme 4.1.2). En invoquant l'injection: $H^2(I) \hookrightarrow C^1(\bar{I})$, $\forall I$ ouvert borné de $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty} \searrow 0$ telle que:

$\{t_{\varepsilon_n}\}$ et $\{s_{\varepsilon_n}\}$ convergent dans la topologie de $C_{loc}^1(|-\infty, \bar{x}|)$ vers $\{s_0\}$, $\{t_0\}$, $\forall \delta > 0$. D'autre part, on déduit du lemme (4.1.1) l'existence d'une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty} \searrow 0$

telle que:

$$(4.25) \quad \boxed{\lim_{\varepsilon_n} \frac{h_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} = h_* < +\infty}$$

2°/ Nous allons maintenant déterminer les limites s_0 et t_0 :

Rappelons l'estimation:

$0 \leq \frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) \leq \lambda^n \frac{(1-\hat{u}_\varepsilon)^n}{\varepsilon^{n+2}} \phi\left(\frac{\hat{u}_\varepsilon-1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ uniformément sur tout compact de la forme $[0, x-\delta]$ (H/4-3) avec $p=n+2$. De plus $\frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) \equiv 0$, sur $\mathbb{R}^-$ (hypothèse de troncature) Enfin g est une fonction lipschitzienne (H/4-5), $g(\hat{u}_\varepsilon)$ converge donc uniformément vers $g(u_0)$ sur $]-\infty, \bar{x}[$; notons simplement que $\hat{u}_\varepsilon$ et u_ε possèdent la même limite, vue la convergence vers 0 de y_ε d'après (4.11). Par suite s_0 et t_0 sont solutions du problème:

$$(4.26) \quad \begin{cases} s_0'' - cs_0' = h_* g(u_0) \\ \Lambda t_0'' - ct_0' = 0 \end{cases} \quad \forall x < \bar{x}.$$

3°/ Calculons maintenant les valeurs aux limites $s_0(-\infty)$ et $t_0(-\infty)$:

a/ Il est clair qu' à partir du système (4.22) on a:

$$\forall x \leq 0, t_\varepsilon(x) = t_\varepsilon(0) e^{cx/\Lambda} \Rightarrow t_0(x) = t_0(0) e^{cx/\Lambda}.$$

D'où:

$$(4.27) \quad t_0(-\infty) = 0$$

Or, par définition de η_ε :

$$t_0(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{v}_\varepsilon(0) - v_0(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v_\varepsilon(y_\varepsilon) - v_0(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_\varepsilon - v_0(0)}{\varepsilon} = 0.$$

Alors:

$$0 \leq \sup_{x \leq 0} |t_\varepsilon(x)| \leq t_\varepsilon(0) \sup_{x \leq 0} e^{cx/\Lambda} = t_\varepsilon(0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

b/ Quant à s_ε , il est dans $H^1[-\infty, 0[)$ (lemme 4.1.3); par suite s_ε converge faiblement vers $s_0 \in H^1[-\infty, 0[)$. Une propriété de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$; où I est un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ fournit (cf [0.2], p.130):

$$(4.28) \quad s_0(-\infty) = 0$$

4°/ Il ne reste plus qu'à calculer s_0 et t_0 :

On a grâce au système (4.26): $t_0(x) = t_0(0)e^{cx/\Lambda}$, $\forall x < \bar{x}$.

Par suite:

$$(4.29) \quad t_0(x) \equiv 0, \quad \forall x < \bar{x}.$$

Quant à l'expression de s_0 , elle se calcule explicitement:

$$(4.30) \quad s_0(x) = s_0(\bar{x})u_0(x) - \frac{h_*}{c}e^{cx} \int_x^{\bar{x}} e^{-ct} dt \int_0^{u_0} \frac{g(s)}{s} ds,$$

où: $u_0(x) = e^{c(x-\bar{x})}$, $\forall x \leq \bar{x}$ (chap. III) et où l'on a posé:

$$(4.31) \quad s_0(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} s_0(x)$$

(4.31) introduit une constante qui ne sera déterminée qu'après raccord des zones externes (proposition 4.4). Enfin, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
e^{cx} \int_x^{\bar{x}} e^{-ct} dt \int_0^{u_0(t)} \frac{g(s)}{s} ds &= \frac{u_0}{c} \int_{u_0}^1 \frac{ds}{s^2} \int_0^s \frac{g(t)}{t} dt \\
&= \frac{1}{c} \left[-u_0 I + \int_0^{u_0} \frac{g(t)}{t} dt + u_0 \int_{u_0}^1 \frac{g(s)}{s^2} ds \right]
\end{aligned}$$

pour obtenir:

$$(4.32) \quad s_0(x) = s_0(\bar{x}) u_0 - \frac{h_*}{c^2} \left[-u_0 I + \int_0^{u_0} \frac{g(t)}{t} dt + u_0 \int_{u_0}^1 \frac{g(s)}{s^2} ds \right]$$

Notons enfin que l'intégrale intervenant dans le second membre de (4.32) demeure bornée, en effet:

$$u_0 \int_{u_0}^1 \frac{g(s)}{s^2} ds \leq u_0 \frac{1}{u_0} \int_{u_0}^1 \frac{g(t)}{t} dt \leq I$$

On déduit alors de (4.22)-(4.26):

$$(s_{\varepsilon_n} - s_0)'' = c(s_{\varepsilon_n} - s_0)' + \left\{ \frac{h_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} g(\hat{u}_{\varepsilon_n}) - h_* g(u_0) \right\} - \frac{\hat{v}_{\varepsilon_n}^n}{\varepsilon_n} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon_n})$$

$(s_{\varepsilon_n} - s_0)''$ converge donc uniformément vers 0 sur tout compact de $]-\infty, \bar{x}[$ (1°/ et hypothèse H/4-3); d'où une convergence $\mathcal{C}_{loc}^2(]-\infty, \bar{x}[)$. Il est facile, en travaillant avec $x < 0$ de montrer qu'elle est en fait globale. On a donc montré le théorème (4.1)■

Passons maintenant aux démonstrations des lemmes (4.1.1)-(4.1.3):

IV.2-2 Démonstration du lemme 4.1.1:

L'estimation (3.30), chap. III s'écrit pour $x = x_{0_\varepsilon}$ défini par le lemme (3.2):

$$(4.33) \quad 0 < h_\varepsilon \leq K \frac{1 - u_\varepsilon(x_{0\varepsilon})}{x_{0\varepsilon}}$$

Or $x_{0\varepsilon} > x_\varepsilon$ (lemme 3.3) et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon \geq \beta > 0$, indépendamment de ε (3.31, chapitre III), on a donc la minoration $x_{0\varepsilon} \geq \mu > 0$ pour ε petit; d'où:

$$(4.34) \quad 0 < \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \frac{K}{\mu} \left(\frac{1 - u_\varepsilon(x_{0\varepsilon})}{\varepsilon} \right)$$

En vertu du lemme (3.2), on a donc:

$$\exists k, \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que: } 0 < \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} \leq k, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Le lemme (4.1.1) est donc prouvé. On proposera en annexe une autre démonstration de ce lemme.

IV.2.3 Démonstration du lemme (4.1.2):

IV.2.3-1°/ Montrons que $\{s_\varepsilon\}$ et $\{t_\varepsilon\}$ sont bornées dans $L^\infty(-\infty, \bar{x})$:

a/ Commençons par prouver l'estimation suivante très utile pour toute la suite:

$$(4.35) \quad |s_\varepsilon(\bar{x})| = \left| \frac{\hat{u}_\varepsilon(\bar{x}) - 1}{\varepsilon} \right| = O(1), \text{ pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant:

$$(4.36) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\hat{u}_\varepsilon(\bar{x}) - 1}{\varepsilon} \right| = +\infty$$

Intégrons alors de $(-\infty)$ à $x > 0$ l'équation en $\hat{v}_\varepsilon$ puis de nouveau de 0 à $\bar{x}$ l'expression obtenue après l'avoir multipliée par $e^{-cx/\Lambda}$:

$$\Lambda \hat{v}_\varepsilon(\bar{x}) e^{-c\bar{x}/\Lambda} = \Lambda \hat{v}_\varepsilon(0) + \Lambda \left(e^{-c\bar{x}/\Lambda} - 1 \right) + \int_0^{\bar{x}} e^{-ct/\Lambda} dt \int_0^t \hat{v}_\varepsilon^n f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) ds$$

soit, en divisant par $\varepsilon > 0$:

$$(4.37) \quad t_\varepsilon(\bar{x}) = t_\varepsilon(0) e^{c\bar{x}/\Lambda} + \frac{1}{\Lambda} e^{c\bar{x}/\Lambda} \int_0^{\bar{x}} e^{-ct/\Lambda} dt \int_0^t \frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) dx$$

Or,

$$(4.38) \quad e^{c\bar{x}/\Lambda} \int_0^{\bar{x}} e^{-ct/\Lambda} dt \int_0^t \frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) dx \leq \lambda^n e^{c\bar{x}/\Lambda} \int_0^{\bar{x}} e^{-ct/\Lambda} dt \int_0^t \frac{(1-\hat{u}_\varepsilon)^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) dx$$

$$\leq \lambda^n e^{c\bar{x}/\Lambda} \sup_{0 \leq s \leq \hat{u}_\varepsilon(\bar{x})} \frac{(1-s)^n}{\varepsilon^{n+2}} \phi\left(\frac{s-1}{\varepsilon}\right) \int_0^{\bar{x}} t e^{-ct/\Lambda} dt$$

$$\leq \lambda^n K \sup_{0 \leq s \leq \hat{u}_\varepsilon(\bar{x})} \frac{(1-s)^n}{\varepsilon^{n+2}} \phi\left(\frac{s-1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (K = \Lambda/c(1+\Lambda/c))$$

d'après (4.36) et l'hypothèse (H/4-3). Enfin, $t_\varepsilon(0) = \frac{\eta_\varepsilon - v_0(0)}{\varepsilon} \rightarrow 0$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (grâce à 4.8). On déduit alors de (4.37)-(4.38):

$$(4.39) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon(\bar{x}) = 0$$

Posons maintenant:

$$(4.40) \quad \hat{Z}_\varepsilon(x) = \frac{\hat{u}_\varepsilon(x) + \Lambda \hat{v}_\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon}$$

$\hat{Z}_\varepsilon$ satisfait l'équation:

$$\hat{Z}_\varepsilon''(x) - c\hat{Z}_\varepsilon'(x) = \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} g(\hat{u}_\varepsilon) + c(1-\Lambda) \frac{\hat{v}_\varepsilon'(x)}{\varepsilon}$$

qu'on intègre de x à $(+\infty)$ après l'avoir écrite sous la forme:

$$(\hat{Z}_\varepsilon' e^{-cx})' = \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} e^{-cx} g(\hat{u}_\varepsilon) + c(1-\Lambda) e^{-cx} \frac{\hat{v}_\varepsilon'}{\varepsilon}$$

On obtient:

$$\hat{z}'_{\epsilon}(x) = -\frac{h_{\epsilon}}{\epsilon} e^{cx} \int_x^{+\infty} e^{-ct} g[\hat{u}_{\epsilon}(t)] dt + c(\lambda-1) e^{cx} \int_x^{+\infty} e^{-ct} \frac{\hat{v}'_{\epsilon}(t)}{\epsilon} dt$$

qu'on intègre de nouveau de $\bar{x}$ à x' :

$$(4.41) \quad \hat{z}_{\epsilon}(x') - \hat{z}_{\epsilon}(\bar{x}) = -\frac{h_{\epsilon}}{\epsilon} \int_{\bar{x}}^{x'} e^{ct} dt \int_t^{+\infty} e^{-cs} g[\hat{u}_{\epsilon}(s)] ds \\ - c(1-\lambda) \int_{\bar{x}}^{x'} e^{ct} dt \int_t^{+\infty} e^{-cs} \frac{\hat{v}'_{\epsilon}(s)}{\epsilon} ds$$

avec:
$$(4.42) \quad \left| \int_{\bar{x}}^{x'} e^{ct} dt \int_t^{+\infty} e^{-cs} g[\hat{u}_{\epsilon}(s)] ds \right| \leq \frac{1}{c} |x' - \bar{x}|$$

et, vue la décroissance de v_{ϵ} :

$$(4.43) \quad \left| \int_{\bar{x}}^{x'} e^{ct} dt \int_t^{+\infty} e^{-cs} \left(-\frac{\hat{v}'_{\epsilon}(s)}{\epsilon} \right) ds \right| \leq \left| \int_{\bar{x}}^{x'} \frac{\hat{v}_{\epsilon}(s)}{\epsilon} dt \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \hat{v}_{\epsilon}(y)$$

avec $y = \inf(\bar{x}, x')$.

On sait d'autre part que: $\left| \frac{u_{\epsilon}(x_{0\epsilon}) - 1}{\epsilon} \right| = \mathcal{O}(1)$, quand $\epsilon \rightarrow 0$. Par conséquent:

$\left| \frac{\hat{u}_{\epsilon}(\hat{x}_{0\epsilon}) - 1}{\epsilon} \right| = \mathcal{O}(1)$, si l'on pose: $\hat{x}_{0\epsilon} = x_{0\epsilon} - y_{\epsilon}$. Alors de deux choses l'une:

- Ou bien $\hat{x}_{0\epsilon}$ est majoré par x_0 et l'on prendra dans ce cas $x' = x_{0\epsilon}$ tel que:

$$\Rightarrow |x' - \bar{x}| \leq x_0 + \bar{x}$$

- Ou bien $\hat{x}_0 \rightarrow +\infty$ et l'on peut considérer une suite $\gamma_\varepsilon \rightarrow 1$ vérifiant $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_\varepsilon - 1}{\varepsilon} = -L$, avec $L > 0$ choisi suffisamment large de telle sorte que la relation $u_\varepsilon(z_\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$ définit au moins un point z_ε borné (on peut regarder la démonstration du lemme 11.2, P.1239 dans [A.5])). Il suffit alors de prendre encore $x' = z_\varepsilon$ (et donc $|x' - \bar{x}| \leq z_0 + \bar{x}$, où z_0 est une borne supérieure de z_ε) pour avoir d'une part: $\frac{1 - u_\varepsilon(x')}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$, et d'autre part, compte tenu du lemme (3.5), chap. III:

$$(4.44) \quad \left| \hat{Z}_\varepsilon(x') \right| = \left| \frac{z_\varepsilon(x')}{\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(1), \text{ pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

Il résulte alors de (4.39) et (4.41)-(4.44) :

$$|\hat{Z}_\varepsilon(\bar{x})| = \mathcal{O}(1), \text{ pour } \varepsilon \text{ petit}$$

ce qui avec (4.39) donne:

$$(4.45) \quad \left| \frac{1 - \hat{u}_\varepsilon(\bar{x})}{\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(1), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ceci contredit évidemment notre hypothèse de raisonnement (4.36). On a donc prouvé (4.35) d'où l'on déduira sans difficulté:

$$(4.46) \quad 0 \leq |t_\varepsilon(\bar{x})| = \frac{\hat{v}_\varepsilon(\bar{x}) - 1 - u_\varepsilon(\bar{x})}{\varepsilon} \leq \lambda \frac{1 - u_\varepsilon(\bar{x})}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1), \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

b/ On rappelle l'équation satisfaite par t_ε :

$$(4.47) \quad \Lambda t_\varepsilon'' - c t_\varepsilon' = \frac{\hat{v}_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{u}), \quad \forall x < \bar{x}$$

Par conséquent:

$$(4.48) \quad \Lambda t_\varepsilon' - c t_\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \Lambda \left(t_\varepsilon e^{-cx/\Lambda} \right)' \geq 0$$

$$\Rightarrow t_{\varepsilon} e^{-cx/\Lambda} \geq t_{\varepsilon}(0) = \frac{\eta_{\varepsilon} - v_0(0)}{\varepsilon} \geq 0, \quad \forall x \in (0, \bar{x}), \quad \text{d'après (4.8).}$$

Or,

$$t_{\varepsilon}(x) = t_{\varepsilon}(0) e^{cx/\Lambda} \quad \text{pour } x \leq 0$$

D'où:

$$(4.49) \quad t_{\varepsilon}(x) \geq 0, \quad \forall x \leq \bar{x}.$$

Comme:

$$(4.48) \Rightarrow \Lambda t'_{\varepsilon} \geq c t_{\varepsilon}(x), \quad x < \bar{x}$$

Alors:

$$(4.50) \quad t'_{\varepsilon}(x) \geq 0, \quad \forall x < \bar{x}$$

t_{ε} est donc une fonction positive, croissante sur $]-\infty, \bar{x}]$. Par suite:

$$(4.46) \text{ et } (4.50) \Rightarrow \forall x \leq \bar{x}, \quad 0 < t_{\varepsilon}(x) \leq t_{\varepsilon}(\bar{x}) = O(1), \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit}$$

Donc: (4.51) $\{t_{\varepsilon}\}$ est bornée uniformément en x dans $L^{\infty}(]-\infty, \bar{x}])$

c/ Pour estimer s_{ε} on pose: $\hat{Z}_{\varepsilon}(x) = s_{\varepsilon}(x) + \Lambda t_{\varepsilon}(x)$ solution de:

$$(4.52) \quad \hat{Z}_{\varepsilon}''(x) - c \hat{Z}_{\varepsilon}'(x) = c(1-\Lambda) t'_{\varepsilon} + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} g(\hat{u}_{\varepsilon})$$

qui s'écrit, après intégration de $-\infty$ à x :

$$\left(\hat{Z}_{\varepsilon}(x) e^{-cx} \right)' = c(1-\Lambda) t_{\varepsilon} e^{-cx} + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} e^{-cx} \int_{-\infty}^x g[\hat{u}_{\varepsilon}(t)] dt$$

qui fournit, après une nouvelle intégration de x à $\bar{x}$ l'estimation suivante:

$$(4.52) \quad \hat{Z}_\varepsilon(\bar{x})e^{-c\bar{x}} - \hat{Z}_\varepsilon(x)e^{-cx} = c(1-\Lambda) \int_x^{\bar{x}} t_\varepsilon(s)e^{-cs}ds + \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} \int_x^{\bar{x}} e^{-ct} \int_{-\infty}^t g[\hat{u}_\varepsilon(s)]ds$$

Or,

$$(4.53) \quad \int_x^{\bar{x}} t_\varepsilon(s)e^{-cs}ds \leq \frac{t_\varepsilon(\bar{x})}{c} e^{-cx}$$

et,

$$(4.54) \quad \forall s \leq 0, \hat{u}_\varepsilon \leq \theta e^{cs} \Rightarrow g(\hat{u}_\varepsilon) \leq g(\theta e^{cs}) \Rightarrow \int_x^{\bar{x}} e^{-ct} \int_{-\infty}^t g[\hat{u}_\varepsilon(s)]ds \leq \int_x^{\bar{x}} e^{-ct} \left(\frac{I}{\theta c} + t \right) dt$$

Les estimations (4.52)-(4.54) permettent alors de majorer $\hat{Z}_\varepsilon(x)$ pour $x \leq \bar{x}$:

$$(4.55) \quad \forall x \leq \bar{x}, |\hat{Z}_\varepsilon(x)| \leq |\hat{Z}_\varepsilon(\bar{x})| e^{c(x-\bar{x})} + |1-\Lambda| t_\varepsilon(\bar{x}) + \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon c} \left(\bar{x} + \frac{I}{\theta c} \right) \\ \leq |\hat{Z}_\varepsilon(\bar{x})| + |1-\Lambda| t_\varepsilon(\bar{x}) + K, \text{ grâce au lemme 4.1.1)}$$

Enfin, (4.45) et (4.46) $\Rightarrow |\hat{Z}_\varepsilon(\bar{x})| = \mathcal{O}(1)$.

L'estimation suivante se déduit alors de (4.55), pour ε assez petit:

$$(4.56) \quad |\hat{Z}_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(1), \text{ uniformément en } x \in (-\infty, \bar{x})$$

(4.51) et (4.56) $\Rightarrow |s_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(1) \forall x \leq \bar{x}$, d'où pour ε petit:

$$(4.57) \quad \{s_\varepsilon\} \text{ est borné indépendamment de } x \text{ dans } L^\infty(-\infty, \bar{x}).$$

IV.2.3-2°/ Estimation de $\hat{Z}'_\varepsilon(x)$:

L'équation (4.52) peut également s'écrire lorsque $x \geq \bar{x}$:

$$(4.58) \quad \left(\hat{Z}'_{\varepsilon}(x) e^{-cx} \right)' = c(1-\Lambda) \frac{\hat{v}'_{\varepsilon}(x)}{\varepsilon} e^{-cx} + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} e^{-cx} g(\hat{u}_{\varepsilon})$$

qu'on peut intégrer de $x \geq \bar{x}$ à $(+\infty)$:

$$-\hat{Z}'_{\varepsilon}(x) e^{-cx} = c(1-\Lambda) \int_x^{+\infty} \frac{v'_{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} e^{-ct} dt + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} e^{-ct} g[\hat{u}_{\varepsilon}(t)] dt$$

Il en résulte alors l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} |\hat{Z}'_{\varepsilon}(x)| &\leq c|1-\Lambda| e^{cx} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{v'_{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right) e^{-ct} dt + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} e^{cx} \int_x^{+\infty} e^{-ct} g[\hat{u}_{\varepsilon}(t)] dt \\ &\leq c|1-\Lambda| e^{cx} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{v'_{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right) e^{-ct} dt + k e^{cx} \int_x^{+\infty} e^{-ct} dt \text{ car } 0 < \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} \leq k \text{ et } g(\hat{u}_{\varepsilon}) < g(1) = 1. \\ &\leq c|1-\Lambda| \frac{v_{\varepsilon}(\bar{x})}{\varepsilon} + \frac{k}{c}, \text{ pour } x \geq \bar{x}. \end{aligned}$$

Enfin se servant de (4.46), on peut aussi aboutir, pour ε petit, à l'estimation suivante:

$$(4.59) \quad |\hat{Z}'_{\varepsilon}(x)| = \mathcal{O}(1), \text{ pour } x \geq \bar{x}.$$

Cette ne sert pas au théorème (4.1) mais sera utile par la suite pour la démonstration de:

$$(4.60) \quad |\hat{Z}'_{\varepsilon}(x)| = \mathcal{O}(1), \text{ sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}$$

IV.2.3-3°/ Montrons maintenant que $\{s'_{\varepsilon}\}$ et $\{t'_{\varepsilon}\}$ sont bornées dans $L^{\infty}(-\infty, \bar{x})$:

Soit $\delta > 0$ et $a \equiv \bar{x} - \delta$.

a/ Intégrant de $(-\infty)$ à $x \leq a$ l'équation en t_ϵ dans (4.22), on obtient:

$$t'_\epsilon - ct_\epsilon = \int_0^x \frac{\hat{v}_\epsilon^n}{\epsilon} f_\epsilon(\hat{u}_\epsilon) dx \Rightarrow 0 \leq t'_\epsilon < ct_\epsilon + \int_0^x \frac{\hat{v}_\epsilon^n}{\epsilon} f_\epsilon(\hat{u}_\epsilon) dx \quad (4.61)$$

Enfin, grâce à (4.51):

$$(4.61) \Rightarrow 0 \leq t'_\epsilon \leq k + \lambda^n \int_0^x \frac{(1 - \hat{u}_\epsilon)^n}{\epsilon} f_\epsilon(\hat{u}_\epsilon) dx$$

D'où:

$$0 \leq t'_\epsilon \leq k + \lambda^n \sup_{0 < s < \hat{u}_\epsilon(x)} \left| \frac{(1-s)^n}{\epsilon} f_\epsilon(s) \right| \leq k + a \lambda^n \sup_{0 < s < \hat{u}_\epsilon(a)} \left| \frac{(1-s)^n}{\epsilon} f_\epsilon(s) \right| \leq k, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

en vertu de l'hypothèse (H/4-3). On vient donc de montrer:

$$(4.62) \quad \{t'_\epsilon\} \text{ est borné, indépendamment de } \epsilon \text{ et de } x \text{ dans } L^\infty(]-\infty, \bar{x}[).$$

b/ Pour estimer $\{s'_\epsilon\}$ indépendamment de ϵ , il suffit d'intégrer de $(-\infty)$ à $x \leq a$ l'équation en s_ϵ afin d'obtenir:

$$(4.63) \quad s'_\epsilon = cs_\epsilon - \int_0^x \frac{\hat{v}_\epsilon^n}{\epsilon} f_\epsilon(\hat{u}_\epsilon) dx + \frac{h_\epsilon}{\epsilon} \int_{-\infty}^x g[\hat{u}_\epsilon(t)] dt$$

En traitant les deux intégrales dans (4.63) respectivement comme dans a/ et dans (4.54), on aboutit au résultat désiré.

IV.2.3-4*/ $\{s''_\epsilon\}$ et $\{t''_\epsilon\}$ sont bornées dans $L^\infty(]-\infty, \bar{x}[$:

Le système (4.22) s'écrit:

$$\begin{cases} s''_{\varepsilon} = cs'_{\varepsilon} - \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\varepsilon} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon}) + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} g(\hat{u}_{\varepsilon}) \\ \Lambda t''_{\varepsilon} = ct'_{\varepsilon} + \frac{\hat{v}_{\varepsilon}^n}{\varepsilon} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon}) \end{cases}$$

Les estimations suivantes s'en déduisent alors facilement:

$$(4.64) \quad |s''_{\varepsilon}| \leq c|s'_{\varepsilon}| + \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\varepsilon} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon}) + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} g(\hat{u}_{\varepsilon})$$

$$(4.65) \quad \Lambda |t''_{\varepsilon}| \leq c|t'_{\varepsilon}| + \frac{\hat{v}_{\varepsilon}^n}{\varepsilon} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon})$$

Enfin,

$$0 < \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} g(\hat{u}_{\varepsilon}) \leq kg(1) = k_1, \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_1 \text{ (lemme 4.1.1).}$$

$$0 < \frac{\hat{v}_{\varepsilon}^n}{\varepsilon} f_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon}) \leq k_2, \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_2 \text{ et } x \leq \bar{x} - \delta, \forall \delta > 0 \text{ (hypothèse 4.3)}$$

$$c|s'_{\varepsilon}(x)| \leq ck' = k_3, \quad c|t'_{\varepsilon}(x)| \leq ck'' = k_4, \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_3, \varepsilon_4 \text{ (IV.2.3-3°/)}$$

Alors:

$\exists K, K' > 0, \varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ tels que $\forall \delta > 0$, on ait:

$$(4.65) \quad |s''_{\varepsilon}(x)| \leq K, \quad |t''_{\varepsilon}(x)| \leq K', \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \text{ uniformément en } x \in (-\infty, \bar{x} - \delta).$$

Ceci achève la démonstration du 4°/ et celle du lemme (4.1.2)

IV.2.4 Démonstration du lemme (4.1.3):

1°/ $\{s'_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(-\infty, 0]$:

Multiplions par s'_ε l'équation en s_ε dans (4.22) puis intégrons-la de $(-\infty)$ à 0.

On obtient:

$$(4.67) \quad c \int_{-\infty}^0 |s'_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{1}{2} |s'_\varepsilon(0)|^2 - \frac{h}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 g[\hat{u}_\varepsilon(t)] s'_\varepsilon(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{2} |s'_\varepsilon(0)|^2 + \frac{h}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 g[\hat{u}_\varepsilon(t)] |s'_\varepsilon(t)| dt$$

puis en utilisant les lemmes (4.1.1) et (4.1.2):

$\exists \varepsilon_0, k, k', k'' > 0$ tels que:

$$(4.68) \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad c \int_{-\infty}^0 |s'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq k + k' \int_{-\infty}^0 g[\hat{u}_\varepsilon(t)] k'' dt$$

$$\leq k + k' k'' \frac{1}{c} \quad (\text{lemme 1.6, chap. I})$$

D'où:

$$(4.69) \quad \int_{-\infty}^0 |s'_\varepsilon(x)|^2 dx \leq K, \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Le 1°/ est donc montré.

2°/ $\{s_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(-\infty, 0]$:

On intègre maintenant de $(-\infty)$ à $x \leq 0$ l'équation en s_ε qu'on a multipliée par s_ε

$$(4.70) \quad \frac{c}{2} |s_\varepsilon(x)|^2 = s_\varepsilon(x) s'_\varepsilon(x) - \int_{-\infty}^x |s'_\varepsilon(x)|^2 dx - \frac{h}{\varepsilon} \int_{-\infty}^x s_\varepsilon(t) g[\hat{u}_\varepsilon(t)] dt$$

D'où:

$$\frac{c}{2} |s_\epsilon(x)|^2 \leq s_\epsilon(x) s'_\epsilon(x) - \frac{h_\epsilon}{\epsilon} \int_{-\infty}^x s_\epsilon(t) g[\hat{u}_\epsilon(t)] dt$$

soit, se servant des lemmes (4.1.1) et (4.1.2):

$$(4.71) \quad \frac{c}{2} |s_\epsilon(x)|^2 \leq s_\epsilon(x) s'_\epsilon(x) + k \int_{-\infty}^x g[\hat{u}_\epsilon(t)] dt$$

Une intégration de $(-\infty)$ à 0 de l'estimation (4.71) fournit:

$$(4.72) \quad \frac{c}{2} \int_{-\infty}^0 |s_\epsilon(x)|^2 \leq \frac{1}{2} |s_\epsilon(0)|^2 + k \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x g[\hat{u}_\epsilon(t)] dt$$

Or, (lemme 1.6, chap.1): $u_\epsilon(x) \leq \theta e^{cx}$, $\forall x \leq 0$. Alors, g étant lipschitzienne:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x g[\hat{u}_\epsilon(t)] dt &\leq \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x g[\theta e^{ct}] dt \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{c} \int_0^{\theta e^{cx}} \frac{g(u)}{u} du \leq \frac{k'}{c} \int_{-\infty}^0 \theta e^{cx} dx \leq \frac{\theta k'}{c^2} \end{aligned}$$

(4.72) et le lemme (4.1.2) permettent alors d'écrire pour ϵ petit:

$$\frac{c}{2} \int_{-\infty}^0 |s_\epsilon(x)|^2 \leq K + \frac{kk'\theta}{c^2}$$

D'où le 2°/ et le lemme (4.1.3) $\square$

IV.3 ANALYSE DE LA COUCHE INTERNE: Démonstration du théorème (4.2):

IV.3-1°/ Par analogie aux couches limites en mécanique effectuons les changements de variables et de fonctions suivants:

$$\xi = \bar{x} + \frac{x - \bar{x}}{\varepsilon}, \quad S_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{u}_\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad T_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{v}_\varepsilon(x)}{\varepsilon}$$

On vérifie que S_ε et T_ε sont solutions du problème:

$$(4.73) \quad \begin{cases} S_\varepsilon'' - c\varepsilon S_\varepsilon' = -\varepsilon \hat{v}_\varepsilon^n f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) + \varepsilon h_\varepsilon g(u) \\ \Lambda T_\varepsilon'' - c\varepsilon T_\varepsilon' = \varepsilon \hat{v}_\varepsilon^n f_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) \end{cases}$$

$$(4.74) \quad \begin{cases} S_\varepsilon(-\infty) = -\frac{1}{\varepsilon}; & T_\varepsilon(-\infty) = \frac{1}{\varepsilon} \\ S_\varepsilon(+\infty) = -\frac{1}{\varepsilon}; & T_\varepsilon'(+\infty) = 0 \end{cases}$$

Ou encore en remplaçant f_ε par son expression donnée par (H/4.1):

$$(4.75) \quad \begin{cases} S_\varepsilon'' - c\varepsilon S_\varepsilon' = -T_\varepsilon^n \phi(S_\varepsilon) + \varepsilon h_\varepsilon g(\hat{u}_\varepsilon) \\ \Lambda T_\varepsilon'' - c\varepsilon T_\varepsilon' = T_\varepsilon^n \phi(S_\varepsilon) \end{cases}$$

On va donc commencer par montrer le lemme suivant:

IV.3-2°/ LEMME (4.2.1):

$(S_\varepsilon, T_\varepsilon)$ est borné dans $[W_{1,oc}^{2,\infty}(\mathbb{R})]^2$, indépendamment de $\varepsilon > 0$

Preuve:

a/ $(S_\varepsilon, T_\varepsilon) \in [L_{1,oc}^\infty(\mathbb{R})]^2$:

i) Pour $\xi \geq \bar{x}$, il est facile de voir que T_ε est une fonction positive,

décroissante; par suite grâce à (4.46) et au lemme (4.1.2):

$$\forall \xi \geq \bar{x}, 0 \leq T_\varepsilon(\xi) \leq T_\varepsilon(\bar{x}) = \frac{\hat{v}_\varepsilon(\bar{x})}{\varepsilon} = O(1)$$

Il en résulte, compte tenu de (3.36) et (4.35):

$$\forall \xi \geq \bar{x}, 0 \leq S_\varepsilon(\xi) \leq \left| \frac{1 - \hat{u}_\varepsilon - \Lambda \hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \right| + \Lambda \frac{\hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \leq K \frac{\hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \leq K \frac{\hat{v}_\varepsilon(\bar{x})}{\varepsilon}$$

Par suite, on a pour ε petit:

$$S_\varepsilon(\xi) = O(1) \text{ uniformément en } \xi \geq \bar{x}.$$

ii) Pour $\xi \leq \bar{x}$, écrivons:

$$(4.76) \quad \begin{cases} S_\varepsilon(\xi) = A_\varepsilon(\xi) - \alpha_\varepsilon(\xi) \\ T_\varepsilon(\xi) = B_\varepsilon(\xi) + \beta_\varepsilon(\xi) \end{cases}$$

avec:

$$(4.77) \quad A_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{u}_\varepsilon(x) - \exp(c(\bar{x} - x))}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad B_\varepsilon(\xi) = \frac{\hat{v}_\varepsilon(x) - 1 + \exp(c(\bar{x} - x)/\Lambda)}{\varepsilon}$$

$$(4.77)\text{Bis} \quad \alpha_\varepsilon(\xi) = \frac{1 - \exp(c\varepsilon(\xi - \bar{x}))}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \beta_\varepsilon(\xi) = \frac{1 - \exp(c\varepsilon(\xi - \bar{x})/\Lambda)}{\varepsilon}$$

$$\text{Comme:} \quad (4.78) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(\xi) = \Lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(\xi) = -c(\xi - \bar{x}) = \alpha_0(\xi) = \Lambda \beta_0(\xi)$$

il existe donc $\varepsilon_0, K, K', K_1, K_2 > 0$ tels que:

$$(4.79) \quad |\alpha_\varepsilon(\xi)| \leq K\xi + K'; \quad |\beta_\varepsilon(\xi)| \leq K_1\xi + K_2$$

Enfin on déduit du lemme (4.1.2)-1°/ :

$|A_\varepsilon(\xi)| = |s_\varepsilon(x)|$ et $|B_\varepsilon(\xi)| = |t_\varepsilon(x)|$ sont $O(1)$ pour ε petit et $x \leq \bar{x}$. Ce qui nous permet d'écrire compte tenu de (4.76) et (4.79):

$\forall \xi \leq \bar{x} \quad |T_\varepsilon(\xi)| \leq k\xi + k'$ et $|S_\varepsilon(\xi)| \leq k_1\xi + k_2$ où k, k', k_1, k_2 sont des constantes positives universelles. Ceci montre le ii) puis le a/.

b/ $(S'_\varepsilon, T'_\varepsilon) \in [L^\infty(\mathbb{R})]^2$:

On calcule:

$$S'_\varepsilon(\xi) = \hat{u}'_\varepsilon(x) = u'_\varepsilon(x) \text{ et } T'_\varepsilon(\xi) = \hat{v}'_\varepsilon(x) = v'_\varepsilon(x)$$

Donc: $-c < S'_\varepsilon(\xi) < \lambda c; \quad -\frac{c}{\Lambda} < T'_\varepsilon < 0$

où: $\lambda = \text{Sup}(1, \Lambda^{-1})$ (lemme 2.3, chap. II). D'où le b/.

c/ $(S''_\varepsilon, T''_\varepsilon) \in [L^1_{loc}(\mathbb{R})]^2$: découle du a/, du b/ et du système (4.75). La preuve du lemme (4.2.1) est donc achevée ■

IV.3-3°/ Démonstration du théorème (4.2):

a) $(S_\varepsilon, T_\varepsilon) \in [H^2_{loc}(\mathbb{R})]^2$ d'après le lemme précédent.

La compacité de L'injection: $H^2(I) \hookrightarrow C^1(\bar{I})$, I étant un ouvert borné de $\mathbb{R}$ assure l'existence d'une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty}$ telle que:

$(S_{\varepsilon_n}, T_{\varepsilon_n})$ converge dans $[C^1_{loc}(\mathbb{R})]^2$ vers (S_0, T_0) solution du système:

$$(4.80) \quad \begin{cases} S''_0 = -T''_0 \phi(S_0) \\ \Lambda T''_0 = T^n_0 \phi(S_0) \end{cases}$$

$(\varepsilon h_{\varepsilon_n} g(\hat{u}_{\varepsilon_n}))$ converge uniformément vers 0).

En ajoutant membre à membre les deux équations de (4.80), on obtient:

$$(S + \Lambda T)''(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (S + \Lambda T)(\xi) = m\xi + p, \quad (m, p) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.81)$$

A_ε et B_ε étant définies par (4.77) posons:

$$A_0(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(\xi) \text{ et } B_0(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(\xi)$$

Ces limites existent dans $\mathcal{C}_{1oc}^0([-\infty, \bar{x}])$ et satisfont, en vertu de (4.78):

$$(4.82) \quad \forall \xi \leq \bar{x}, (S_0 + \Lambda T_0)(\xi) = (A_0 + \Lambda B_0)(\xi) = m\xi + p$$

Comme $(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \in [\mathbf{L}^\infty([-\infty, \bar{x}])]^2$ il existe deux constantes positives k et k' telles

que: $|S_0(\xi)| \leq k$ et $|T_0(\xi)| \leq k', \forall \xi \leq \bar{x}$

L'égalité (4.82) entraîne alors la nullité de la constante m ; et (4.80) peut alors s'écrire:

$$(4.83) \quad \begin{cases} S_0 = p - \Lambda T_0 \\ \Lambda T_0'' = T_0^n \phi(p - \Lambda T_0) \end{cases}$$

b) Détermination des conditions aux limites:

i/ pour $\xi \geq \bar{x}$, T_0 comme T_ε est une fonction positive, décroissante. Elle admet donc une limite finie lorsque $\xi \rightarrow +\infty$. Grâce à (4.83), il est clair que $T_0''(\infty)$ existe et est finie, par suite $T_0''(+\infty) = 0 \Leftrightarrow 1 \equiv \lim_{\xi \rightarrow +\infty} T_0(\xi) = 0$ ou $+\infty$, d'après l'hypothèse mise sur ϕ . Mais $T_\varepsilon \in \mathbf{L}^\infty([\bar{x}, +\infty[)$ indépendamment de ε (lemme 4.2.1, i/) donc T_0 est bornée à l'infini; par conséquent:

$$(4.84) \quad T_0(+\infty) = 0$$

ii/ lorsque $\xi \leq \bar{x}$, on a d'après (4.76):

$$\begin{cases} S_0 = A_0 - \alpha_0 \\ T_0 = B_0 - \beta_0 \end{cases}$$

Le même raisonnement appliqué à $B_0 \in L^\infty(-\infty, \bar{x})$ conduit à:

$$(4.85) \quad T_0(-\infty) = +\infty$$

(4.83) à (4.85) nous permettent alors d'écrire le problème aux limites associés à (4.83):

$$(4.86) \quad \begin{cases} S_0 = p - \Lambda T_0 & T_0(-\infty) = +\infty \\ \Lambda T_0'' = T_0^n \phi(p - \Lambda T_0) & T_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

c/ Détermination de la constante p:

$Z_\epsilon(\xi) = S_\epsilon(\xi) + \Lambda T_\epsilon(\xi)$ est solution du problème:

$$(4.87) \quad \begin{cases} Z_\epsilon'' - c\epsilon Z_\epsilon' = \epsilon c(1-\Lambda)T_\epsilon' + \epsilon h_\epsilon g(u_\epsilon) \\ Z_\epsilon(-\infty) = \frac{\Lambda-1}{\epsilon}; \quad Z_\epsilon'(+\infty) = 0 \end{cases}$$

En multipliant l'équation ci-dessus par $e^{-c\epsilon\xi}$ puis en l'intégrant de ξ à $+\infty$, on obtient:

$$Z_\epsilon'(\xi) = -c\epsilon e^{c\epsilon\xi} \left\{ \int_\xi^{+\infty} e^{-c\epsilon t} h_\epsilon g(\hat{u}_\epsilon) dt + c(1-\Lambda) \int_\xi^{+\infty} e^{-c\epsilon t} T_\epsilon'(t) dt \right\}$$

Il en résulte alors après une nouvelle intégration entre $\xi_\epsilon = \bar{x} + \frac{x'_\epsilon - \bar{x}}{\epsilon}$ et $\xi > \xi_\epsilon$ où

x'_ε sera choisi convenablement:

$$(4.88) \quad Z_\varepsilon(\xi) = Z_\varepsilon(\xi_\varepsilon) - \varepsilon \left\{ \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} e^{c\varepsilon t} \left[\int_t^{+\infty} e^{-c\varepsilon s} h_\varepsilon g(\hat{u}_\varepsilon) ds + c(1-\lambda) \int_t^{+\infty} e^{-c\varepsilon s} T'_\varepsilon(s) ds \right] dt \right\}$$

Nous allons estimer les deux intégrales intervenant dans le second membre de (4.88):

$$(4.89) \quad h_\varepsilon \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} e^{c\varepsilon t} dt \int_t^{+\infty} e^{-c\varepsilon s} g(\hat{u}_\varepsilon) ds \leq \frac{h_\varepsilon}{c\varepsilon} \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} e^{c\varepsilon t} e^{-c\varepsilon t} dt = \frac{h_\varepsilon}{c\varepsilon} (\xi - \xi_\varepsilon).$$

$$(4.90) \quad \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} e^{c\varepsilon t} dt \int_t^{+\infty} e^{-c\varepsilon s} T'_\varepsilon(s) ds \leq \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} e^{c\varepsilon t} dt \int_t^{+\infty} e^{-c\varepsilon s} (-T'_\varepsilon(s)) ds \quad (T'_\varepsilon \leq 0)$$

$$\leq \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} dt \int_t^{+\infty} (-T'_\varepsilon(s)) ds \quad (s \geq t)$$

$$\leq \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} T_\varepsilon(t) dt \leq k(\xi - \xi_\varepsilon) \quad (\text{lemme 4.2.1})$$

Les estimations (4.88)-(4.90) nous conduisent enfin à la majoration:

$$(4.91) \quad |Z_\varepsilon(\xi) - Z_\varepsilon(\xi_\varepsilon)| \leq \varepsilon(\xi - \xi_\varepsilon) \left(\frac{h_\varepsilon}{c\varepsilon} + k \right) \leq K\varepsilon(\xi - \xi_\varepsilon), \quad \forall \xi \geq \xi_\varepsilon$$

Il suffit alors de considérer une suite $x'_\varepsilon \xrightarrow{<} \bar{x}$ telle que:

$$\xi_\varepsilon = \bar{x} + \frac{x'_\varepsilon - \bar{x}}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1), \text{ pour obtenir:}$$

d'une part: $Z_\epsilon(\xi_\epsilon) = \hat{Z}_\epsilon(x'_\epsilon)$, avec $\hat{Z}_\epsilon(x_\epsilon) \equiv s_\epsilon(x) + \Lambda t_\epsilon(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

et d'autre part, grâce à (4.91):

$$(4.92) \quad |Z_\epsilon(\xi) - \hat{Z}_\epsilon(x'_\epsilon)| = O(\epsilon), \text{ sur tout compact de } (\xi_\epsilon, +\infty)$$

Il est aisé de voir, en travaillant avec l'équation vérifiée par $\hat{Z}_\epsilon$ que malgré les discontinuités de s'_ϵ et t'_ϵ en $\bar{x}$, $\hat{Z}_\epsilon \in C^2(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}$. Par suite $\hat{Z}_\epsilon$ converge dans $C^1_{loc}(\mathbb{R})$ vers $\hat{Z}_0(x)$ qui satisfait par passage à la limite dans (4.92):

$$Z_0(\xi) = \hat{Z}_0(\bar{x}), \text{ sur tout compact de } \text{ sur } (\xi_\epsilon, +\infty)$$

De plus, $\hat{Z}_0$ est continue en $\bar{x}$ alors grâce notamment au théorème (4.1):

$$\hat{Z}_0(\bar{x}) = \lim_{x \nearrow \bar{x}} \hat{Z}_0(x) = \lim_{x \nearrow \bar{x}} \left\{ s_0(x) + \Lambda t_0(x) \right\} = s_0(\bar{x})$$

On a donc: $Z_0(\xi) = s_0(\bar{x})$ sur tout compact de $(\xi_\epsilon, +\infty)$

Enfin, $Z_0(\xi) = (S_0 + \Lambda T_0)(\xi) \equiv p$, sur $\mathbb{R}$; par conséquent:

$$(S_0 + \Lambda T_0)(\xi) \equiv p = s_0(\bar{x}), \text{ sur tout } \mathbb{R}$$

Le problème (4.86) s'écrit alors:

$$(4.93) \quad \begin{cases} S_0 = s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0 \\ \Lambda T_0'' = T_0^n \phi(s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0) \end{cases} \quad (4.94)a \quad T_0(-\infty) = +\infty \quad (4.94)b \quad T_0(+\infty) = 0$$

La démonstration du théorème (4.2) est donc complète. Nous prouverons l'unicité d'une solution au problème (4.93) en annexe. C'est donc toute la suite (S_ϵ, T_ϵ) qui converge ■

On se propose maintenant de préciser le comportement à l'infini de T_0 , de

faire le raccord des zones et d'établir une relation entre $s_0(\bar{x})$ et ϕ :

IV.4-4°/ Comportement asymptotique de T_0 :

a) Quand $\xi \rightarrow -\infty$, on écrit l'équation satisfaite par $B_0 = T_0 - \beta_0$ ($\beta_0 = -\frac{c}{\Lambda}(\xi - \bar{x})$):

$$(4.95) \quad \Lambda B_0'' = (B_0 + \beta_0)^n \phi(s_0(\bar{x}) - \Lambda B_0 - \Lambda \beta_0) \quad \xi \leq \bar{x}$$

Or, d'après théorème (4.1): $\forall x, \xi \leq \bar{x}, B_\varepsilon(\xi) = t_\varepsilon(x) \geq 0 \Rightarrow B_0(\xi) \geq 0$ et $-\frac{c}{\Lambda} \leq T_0'(\xi) \leq 0$,

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (lemme 4.2.1, b/)

Donc: $\forall \xi \in \mathbb{R}, 0 \leq B_0'(\xi) \leq \frac{c}{\Lambda}$. B_0 est donc une fonction de $W^{1,\infty}(-\infty, \bar{x})$ positive et croissante. Alors:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} B_0(\xi) < +\infty \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow -\infty} B_0'(\xi) = 0 \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow -\infty} T_0'(\xi) = -\frac{c}{\Lambda}. \text{ D'où (4.94)a.}$$

b) Relation entre $s_0(\bar{x})$ et ϕ :

Intégrons de $(-\infty)$ à $(+\infty)$ l'équation figurant dans (4.93) après l'avoir au préalable multipliée par T_0' . On obtient en utilisant a):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Lambda \frac{c^2}{\Lambda^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_0^n T_0' \phi[s_0(\bar{x}) - \Lambda T_0] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{t^n}{\Lambda}\right) \left(-\frac{dt}{\Lambda}\right) \phi[s_0(\bar{x}) + t] \quad (\text{en posant } t = -\Lambda T_0) \end{aligned}$$

D'où la relation non linéaire suivante qu'on interprétera en fin de chapitre:

$$(4.96) \quad \boxed{c^2 = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t^n) \phi[s_0(\bar{x}) + t] dt}$$

c) Quand $\xi \rightarrow +\infty$, on prouve la:

PROPOSITION (4.2.2):

T_0 , la solution du problème aux limites:

$$\begin{cases} \Lambda T_0'' = T_0^n \phi(p - \Lambda T_0), & p \in \mathbb{R} \\ T_0(0) = \gamma & T_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

possède, à $+\infty$ le comportement asymptotique suivant:

$\forall \alpha > 0, \exists \xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \xi \geq \xi_0$, on a:

$$\begin{aligned} \text{i/ } 0 \leq T_0(\xi) &\leq \gamma \exp\left(-\xi \sqrt{\frac{\phi(p - \Lambda \alpha)}{\Lambda}}\right) & \text{si } n=1. \\ \text{ii/ } 0 \leq T_0(\xi) &\leq \left[\frac{2(n+1)\Lambda}{\phi(p - \Lambda \alpha)(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \xi^{-\frac{2}{n-1}} & \text{si } n>1. \end{aligned}$$

Démonstration:

L'assertion suivante résulte de la condition aux limites $T_0(+\infty)=0$:

$$(4.97) \quad \forall \alpha > 0, \exists \xi_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que: } \forall \xi \geq \xi_0 \quad 0 \leq T_0(\xi) \leq \alpha$$

i/ Si $n=1$, (4.97) permet de minorer le second membre dans (4.96) pour donner:

$$\begin{cases} \Lambda T_0'' \geq T_0^n \phi(p - \Lambda \alpha) \\ T_0(0) = \gamma & T_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

La fonction $w_0(\xi) = \gamma \exp\left(-\xi \sqrt{\frac{\phi(p - \Lambda \alpha)}{\Lambda}}\right)$ est la solution du problème linéaire:

$$\begin{cases} \Lambda w_0'' = w_0 \phi(p - \Lambda \alpha) \\ w_0(0) = \gamma & w_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

Un raisonnement direct et classique montre que:

$$\forall \xi \geq 0, 0 \leq T_0(\xi) \leq w_0(\xi)$$

ceci montre le i/ ¹

ii/ lorsque $n > 1$ on arrive à obtenir encore:

$$(4.98) \quad \forall \xi \geq 0, 0 \leq T_0(\xi) \leq w_0(\xi)$$

où w_0 est solution de:

$$(4.99) \quad \begin{cases} \Lambda w_0'' = w_0^n \phi(p - \Lambda \alpha) \\ w_0(0) = \gamma \quad w_0(+\infty) = 0 \end{cases}$$

En effet, en posant: $d = T_0 - w_0$ et en remarquant comme dans le lemme (1.22),

chap.I que: $T_0^n - w_0^n = (T_0 - w_0)A$, avec $A > 0$, on arrive à prouver (4.98).

Enfin, un résultat dû à Taliaferro ([A.6], p.105, cas II), nous renseigne sur

le comportement à $+\infty$ de w_0 solution de (4.99):

$$\text{Quand } \xi \rightarrow +\infty, w_0 \cong \left[\frac{2(n+1)\Lambda}{\phi(p - \Lambda \alpha)(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \xi^{-\frac{2}{n-1}}$$

d'où ii/ et la proposition (4.2.2) $\square$

On a donc achevé l'étude et le comportement asymptotique des solutions S_0 et T_0 à l'intérieur de la zone interne. La démonstration du théorème (4.2) est donc complète ■

On va passer maintenant à celle du dernier résultat de ce chapitre, où l'on investiguera la zone externe aval de la flamme.

¹ On peut retrouver ce type de raisonnement dans Coppel ([O.5]).

IV.4 COMPORTEMENT DES SOLUTIONS dans la zone de refroidissement:

Démonstration du théorème (4.3):

1°/ Il s'agit de la zone de refroidissement dans laquelle la température commence à décroître dès que x devient grand on introduit alors la variable dilatée suivante:

$$\eta = \bar{x} + \varepsilon(x - \bar{x})$$

puis on va étudier pour $\eta \geq \bar{x}$ et ε petit le comportement asymptotique des fonctions suivantes:

$$U_\varepsilon(\eta) = u_\varepsilon(x) \text{ et } V_\varepsilon(\eta) = v_\varepsilon(x)$$

U_ε et V_ε sont solutions du problème:

$$(4.100) \quad \begin{cases} \varepsilon U_\varepsilon'' - c U_\varepsilon' = -\frac{V_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(V_\varepsilon) + \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} g(U_\varepsilon) \\ \Lambda \varepsilon V_\varepsilon'' - c V_\varepsilon' = \frac{V_\varepsilon^n}{\varepsilon} f_\varepsilon(V_\varepsilon) \end{cases}$$

$$(4.101) \quad \begin{cases} U_\varepsilon(\bar{x}) = u_\varepsilon(\bar{x}) & U_\varepsilon(+\infty) = 0 \\ V_\varepsilon(\bar{x}) = v_\varepsilon(\bar{x}) & V_\varepsilon'(+\infty) = 0 \end{cases}$$

2°/ Pour étudier la convergence de ces fonctions, on aura besoin du:

LEMME (4.3.1):

$\{W\}_\varepsilon = \{U_\varepsilon + \Lambda V_\varepsilon\}$ est dans un borné de $W^{1,\infty}(\bar{x}, +\infty)$ indépendant de ε

Preuve:

a/ $|W_\varepsilon(\eta)| \leq |U_\varepsilon(\eta)| + \Lambda |V_\varepsilon(\eta)| = |u_\varepsilon(x)| + \Lambda v_\varepsilon(x) \leq 1 + \Lambda$ (lemme 2.3, chap. II).

b/ W_ε vérifie:

$$(4.102) \quad \varepsilon W''_{\varepsilon} - c W'_{\varepsilon} = c(1-\lambda) V'_{\varepsilon} + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} g(U_{\varepsilon})$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\varepsilon \left(W'_{\varepsilon} e^{-c\eta/\varepsilon} \right)' = c(1-\lambda) V'_{\varepsilon} e^{-c\eta/\varepsilon} + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} e^{-c\eta/\varepsilon} g(U_{\varepsilon})$$

qui donne après une simple intégration de η à $+\infty$:

$$(4.103) \quad -\varepsilon W'_{\varepsilon} e^{-c\eta/\varepsilon} = c(1-\lambda) \int_{\eta}^{+\infty} V'_{\varepsilon}(t) e^{-ct/\varepsilon} dt + \frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-ct/\varepsilon} g(U_{\varepsilon}) dt$$

avec:

$$(4.104) \quad c(1-\lambda) \int_{\eta}^{+\infty} V'_{\varepsilon}(t) e^{-ct/\varepsilon} dt \leq c|1-\lambda| \int_{\eta}^{+\infty} (-V'_{\varepsilon}(t)) e^{-ct/\varepsilon} dt \quad (\text{car } V'_{\varepsilon} = \frac{v'_{\varepsilon}}{\varepsilon} \leq 0)$$

$$\leq c|1-\lambda| V_{\varepsilon}(\bar{x}) e^{-c\eta/\varepsilon}, \eta \geq \bar{x}$$

et: (4.105) $\frac{h_{\varepsilon}}{\varepsilon} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-ct/\varepsilon} g(U_{\varepsilon}) dt \leq \varepsilon \frac{h_{\varepsilon}}{c\varepsilon} e^{-c\eta/\varepsilon} \quad (\text{car } g(U_{\varepsilon}) \leq g(1)=1)$

$$\leq \varepsilon K e^{-c\eta/\varepsilon} \quad (\text{lemme 4.1.1})$$

On déduit alors de (4.103)-(4.105):

$$\varepsilon |W'_{\varepsilon}(\eta)| e^{-c\eta/\varepsilon} \leq c|1-\lambda| e^{-c\eta/\varepsilon} V_{\varepsilon}(\bar{x}) + \varepsilon K e^{-c\eta/\varepsilon}$$

D'où, grâce à (4.46), l'estimation suivante indépendante de ε et de η :

$$|W'_{\varepsilon}(\eta)| \leq c|1-\lambda| \frac{V_{\varepsilon}(\bar{x})}{\varepsilon} + K = c|1-\lambda| \frac{v_{\varepsilon}(\bar{x})}{\varepsilon} + K \leq K'$$

Le lemme (4.3.1) est donc prouvé $\square$

3°/ Preuve du théorème (4.3):

$V_\epsilon(\eta) = v_\epsilon(x)$ est une fonction positive décroissante, par suite:

$$0 \leq \sup_{\eta \geq \bar{x}} |V_\epsilon(\eta)| \leq V_\epsilon(\bar{x}) = v_\epsilon(\bar{x}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Par conséquent:

$$(4.106) \quad V_\epsilon \text{ converge vers } 0 \text{ dans } \mathbb{C}^0([\bar{x}, +\infty[).$$

4°/ Intégrons maintenant l'équation (4.102) de $(\bar{x} + \delta)$ à $\eta > \bar{x} + \delta$ ($\delta > 0$), on obtient:

$$(4.107) \quad \epsilon W'_\epsilon(\eta) - \epsilon W'_\epsilon(\bar{x} + \delta) - c W_\epsilon(\eta) + c W_\epsilon(\bar{x} + \delta) = c(1 - \lambda) \left\{ V_\epsilon(\eta) - V_\epsilon(\bar{x} + \delta) \right\} + \frac{h_\epsilon}{\epsilon} \int_{\bar{x} + \delta}^{\eta} g(U_\epsilon) dt$$

D'après le lemme (4.3.1), il existe $\{\epsilon_n\}_{n \rightarrow +\infty} > 0$ telle que: $\{W_{\epsilon_n}\}$ converge vers W_0

dans $\mathbb{C}^0_{loc}([\bar{x}, +\infty[)$. Utilisant (4.106), on a donc la convergence de $U_\epsilon = W_\epsilon - \lambda V_\epsilon$

vers U_0 dans $\mathbb{C}^0_{loc}([\bar{x}, +\infty[)$. On passe alors à la limite dans (4.107) quand $\epsilon \rightarrow 0$,

en notant que:

i) $|W'_\epsilon(\eta)|$ est borné $\forall \eta \in K$ (lemme 4.3.1), K étant un compact de $[\bar{x}, +\infty[$.

ii) V_ϵ converge uniformément vers 0 sur $[\bar{x}, +\infty[$ (d'après 4.106).

iii) $g(U_\epsilon) \leq 1$ et $g(U_\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} g(U_0)$, uniformément en η , sur tout compact de

$(\bar{x}, +\infty)$. On applique alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgues

pour obtenir $\forall \eta \in K$, la convergence de $\int_{\bar{x} + \delta}^{\eta} g(U_\epsilon) dt$ vers $\int_{\bar{x} + \delta}^{\eta} g(U_0) dt$.

D'où finalement:

$$-cW_0 + cW_0(\bar{x} + \delta) = h_* \int_{\bar{x} + \delta}^{\eta} g(U_0) dt$$

dont la dérivée au sens des distributions s'écrit:

$$-cW'_0 = h_* g(U_0), \text{ sur tout compact de }]\bar{x}, +\infty[$$

Or, $W_0 = U_0 + \Lambda V_0 = U_0$ (car $V_0 \equiv 0$). Alors:

$$-cU'_0(\eta) = h_* g(U_0)$$

Enfin:

$U_0(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(\bar{x}) = 1$; et il est facile de voir que u_ε est décroissante quand $x \rightarrow +\infty$; il en est de même pour les fonctions U_ε et U_0 . Elles ont même limite quand $\eta \rightarrow \infty$; la convergence est donc globale.

REMARQUE sur le comportement asymptotique de U_0 lorsque $\eta \rightarrow +\infty$:

Si $g'(0)$ existe et $g'(0) > 0$, on peut considérer l'équation linéarisée:

$$\begin{cases} \frac{dU_0}{d\eta} = -\frac{h_*}{c} g'(0) \\ U(\bar{x}) = 1 \end{cases}$$

Un raisonnement classique montre que U_0 admet une décroissance exponentielle quand $\eta \rightarrow +\infty$:

$$U_0(\eta) \approx \exp\left(-\frac{h_* g'(0)}{c} \eta\right)$$

IV.5 RELATION LIMITE entre c et h_* lorsque $\Lambda=1$:

On va effectuer le raccord des dérivées entre les zones externes amont et

aval ce qui nous conduira à une relation limite liant c et h_* et qui se traduit physiquement par les conditions limites d'extinction d'une flamme laminaire.

Dans toute la suite, on supposera $\Lambda=1$. En effet, le cas $\Lambda \neq 1$ fait apparaître lorsque $x > \bar{x}$ un terme du type $\frac{v'_\epsilon(x)}{\epsilon}$ qui semble difficile à estimer.

1°/ Pour $\Lambda=1$, réécrivons l'équation satisfaite par: $\hat{Z}_\epsilon(x) = s_\epsilon(x) + \Lambda t_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{Z}_\epsilon''(x) - c\hat{Z}_\epsilon'(x) = \frac{h_\epsilon}{\epsilon} g(\hat{u}_\epsilon)$$

où, rappelons-le: $s_\epsilon(x) = \frac{\hat{u}_\epsilon(x) - u_0(x)}{\epsilon}$ et $t_\epsilon(x) = \frac{\hat{v}_\epsilon(x) - v_0(x)}{\epsilon}$

On peut vérifier sur l'équation ci-dessus que $\hat{Z}_\epsilon \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$; $\hat{Z}_\epsilon$ converge donc vers $\hat{Z}_0$ dans $\mathbb{C}_{loc}^1(\mathbb{R})$ solution du problème:

$$\hat{Z}_0''(x) - c\hat{Z}_0'(x) = h_* g(u_0), \quad \hat{Z}_0 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$$

on intègre alors cette équation de $-\infty$ à $\bar{x}$ en se servant de la définition de u_0 (chap. III):

$$\begin{aligned} \hat{Z}_0'(\bar{x}) &= c\hat{Z}_0(\bar{x}) + h_* \int_{-\infty}^{\bar{x}} g(e^{c(t-\bar{x})}) dt \\ &= c\hat{Z}_0(\bar{x}) + h_* I/c \quad \text{avec: } I \equiv \int_0^1 \frac{g(s)}{s} ds \end{aligned}$$

Il est également facile d'exprimer $\hat{Z}_0$ pour $x \geq \bar{x}$: $\hat{Z}_0(x) = \hat{Z}_0(\bar{x}) - \frac{h_*}{c}(x - \bar{x})$; d'où:

$\forall x \geq \bar{x}$, $\hat{Z}_0'(x) = -\frac{h_*}{c}$ qu'on égalise avec l'expression précédente de $\hat{Z}_0'(x)$ pour

obtenir:

$$c\hat{Z}_0(\bar{x}) + \frac{h_*}{c}I = -\frac{h_*}{c}$$

Or, $\hat{Z}_0(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \hat{Z}_0(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \{s_0 + \Lambda t_0\} = s_0(\bar{x})$ (théorème 4.1). D'où la relation:

$$cs_0(\bar{x}) + \frac{h_*}{c}I = -\frac{h_*}{c} \Leftrightarrow \boxed{h_*(1+I) + c^2 s_0(\bar{x}) = 0 \quad (4.108)}$$

2°/ Rappelons enfin la relation donnant $s_0(\bar{x})$ en fonction de ϕ obtenue par le théorème (4.2) pour Λ quelconque:

$$c^2 = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi[s_0(\bar{x}) + t] dt$$

qui peut, grâce à (4.108) s'écrire lorsque $\Lambda=1$:

$$(4.108)\text{Bis} \quad c^2 = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi\left[-\frac{h_*}{c^2}(1+I) + t\right] dt$$

On définit alors la fonction:

$$\Phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow \Phi(x) = \frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi(x+t) dt$$

Il est aisé de voir que Φ vérifie les propriétés suivantes:

$$\Phi(0) = c_{ad}^2 \quad (\text{d'après H/4-4) et (4.6).}$$

$$\Phi \text{ est positive et vérifie: } \Phi(-\infty) = 0 \quad (\text{grâce à H/4-3})$$

$$\Phi \text{ est continue, strictement croissante, car } \phi \text{ l'est aussi} \quad (\text{H/4-2})$$

Il en résulte alors d'après le théorème des fonctions réciproques que Φ admet une fonction inverse que l'on note Φ^{-1} continue et strictement croissante.

(4.108)Bis prend alors la forme:

$$c^2 = \Phi[s_0(\bar{x})] \Leftrightarrow s_0(\bar{x}) = \Phi^{-1}(c^2)$$

Comme $s_0(\bar{x}) = -\frac{h_*}{c^2}(1+I) < 0$, alors: $c^2 < c_{ad}^2 \Leftrightarrow c < c_{ad}$. La relation suivante en découle

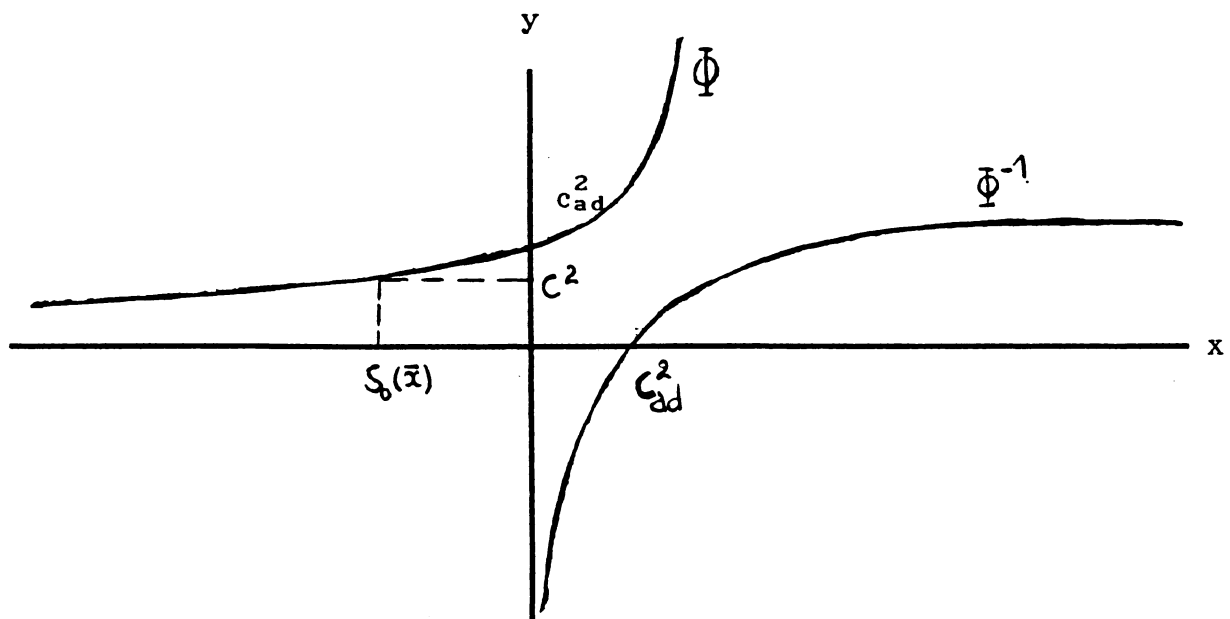
directement: $-\frac{h_*}{c^2}(1+I) = \Phi^{-1}(c^2)$, soit:

$$(4.109) \quad -\frac{h_*}{c^2}(1+I) + c^2 \Phi^{-1}(c^2) = 0$$

La proposition (4.4) est donc prouvée■

2°/ Discussions à propos de la relation (4.109)

a) On peut esquisser les courbes représentatives de Φ et Φ^{-1} :



b) Il est aisé de voir sur ces courbes que:

$$h_* = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c = c_{ad}$$

ce qui a été prouvé de manière directe par la proposition (1.10) (chapitre I).

c) On voit aussi que:

$$h_{\star} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq c_{ad}$$

ce qui confirme la condition suffisante d'existence obtenue au chapitre I, qui était apparue pour assurer justement la positivité de h_0 lors du calcul du degré topologique.

d) (4.109) définit une fonction $h_{\star}=h(c)$ continue et positive $\forall c \in]0, c_{ad}[$; soit donc $\bar{h} = \sup_{0 < c < c_{ad}} h(c)$. Alors $\forall c \in]0, c_{ad}[$, $h_{\star}(c) \leq \bar{h}$ (la courbe $c(h)$ présente d'ailleurs un point de retournement).

Ceci signifie que pour une célérité d'onde inférieure ou égale à celle de l'onde adiabatique, l'intensité des pertes thermiques doit être inférieure à une certaine valeur.

Lorsque $\phi(s) = \kappa e^s$, on montre (cf [A.10],[A.11]), que h est inversement proportionnel au diamètre du tube dans lequel est entretenue la flamme.

Physiquement, ceci explique pourquoi la propagation de la flamme n'est possible que pour des valeurs du diamètre $d \geq \bar{d}$; où $\bar{d}$ représente la valeur minimale de d , appelé diamètre de coicement ("quenching diameter").

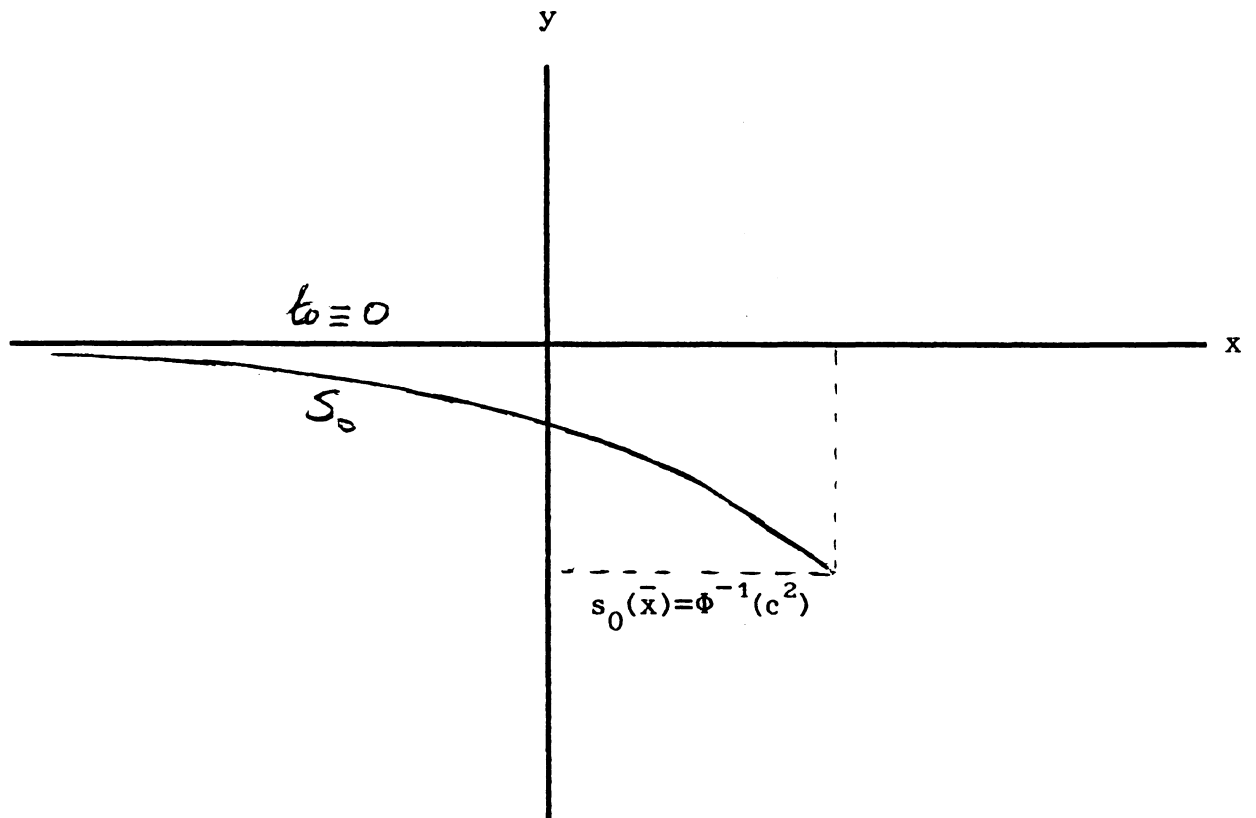
e) Dans le cas typique où $\phi(s) = \kappa e^s$, la relation (4.109) prend la forme:

$$h_{\star}(1+I) + c^2 \operatorname{Ln} \left(\frac{c^2}{c_{ad}^2} \right)$$

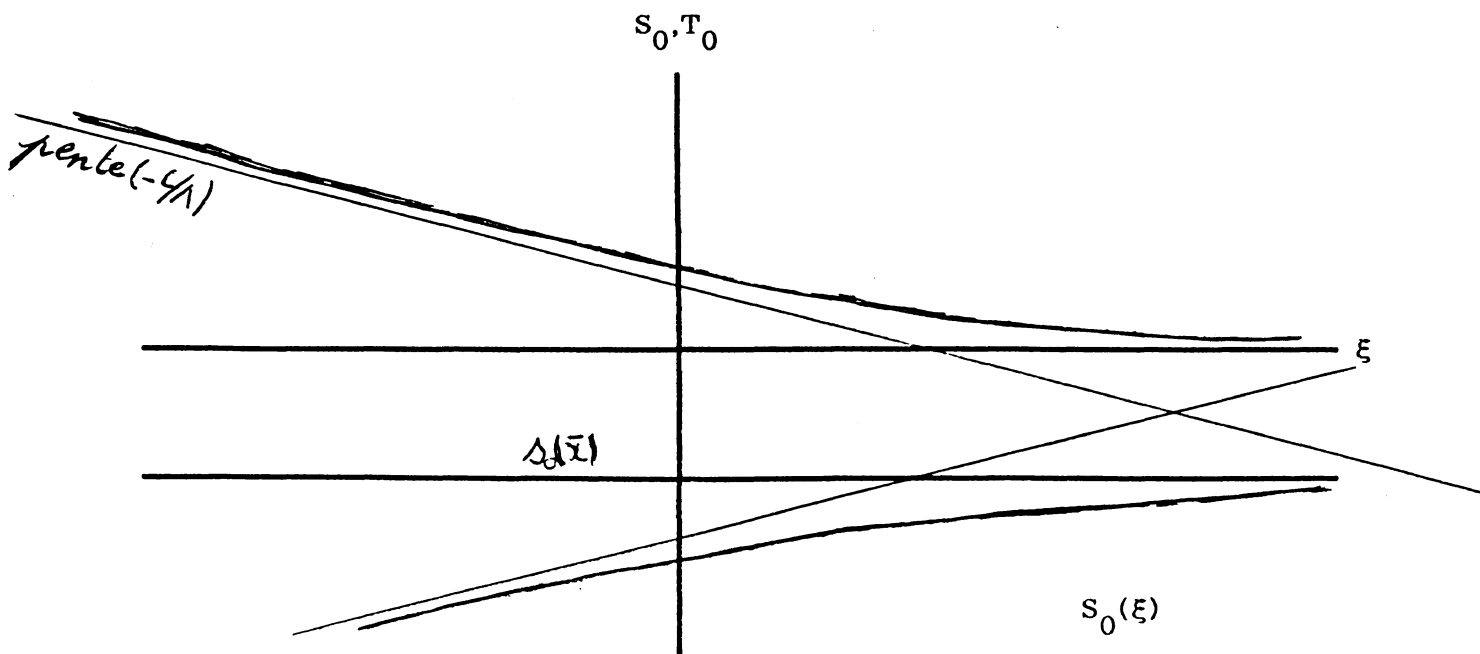
En effet, on peut vérifier dans ce cas que: $\Phi(x) = \Phi(0)\phi(x) = \kappa e^{\frac{x}{c_{ad}^2}}$. On retrouve ainsi de manière rigoureuse la relation obtenue par le procédé d'analyse asymptotique formelle dans [A.10], [A.11].

Enfin, pour clore ce dernier chapitre, on va esquisser les courbes représentatives des différentes solutions limites obtenus dans les sections précédentes. On donnera aussi en annexe une autre démonstration du lemme 4.1.1.

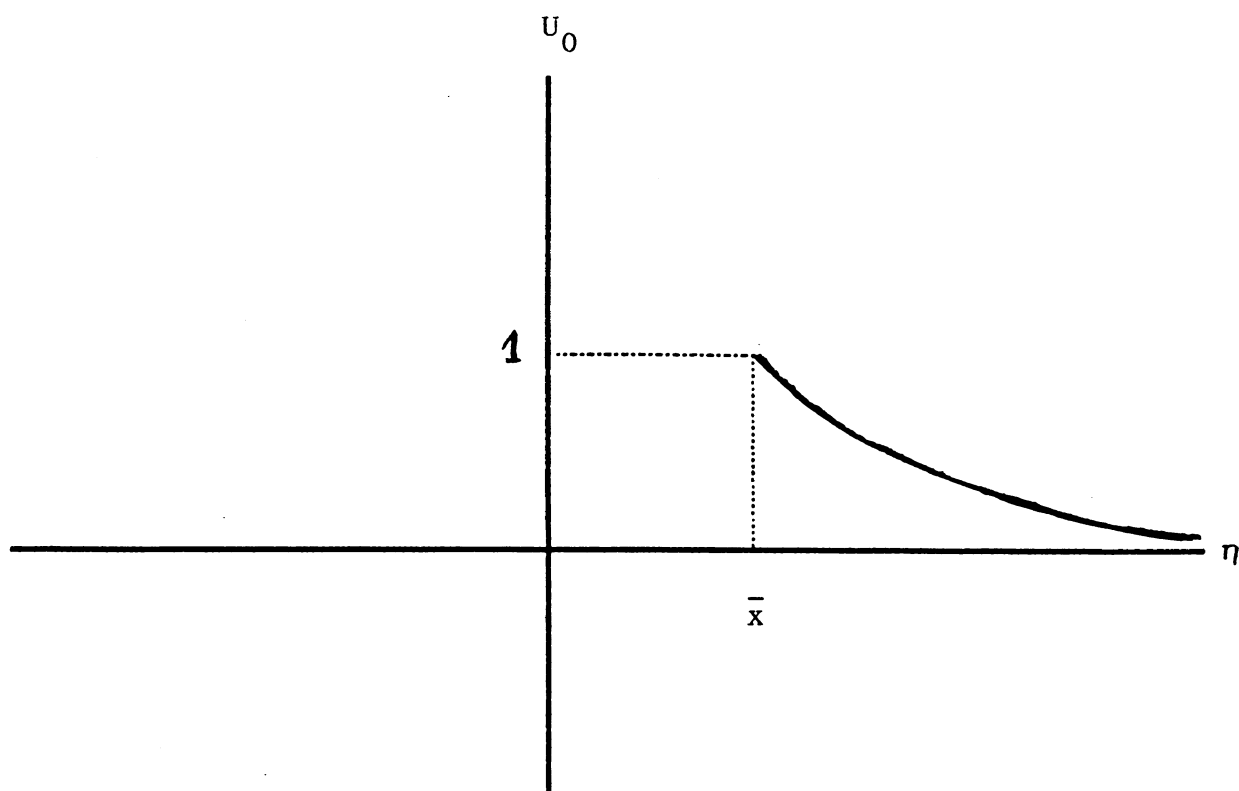
I/ Profil des correcteurs dans la zone externe amont:



II/ Dans la zone interne:



III/ Dans la zone externe aval:



ANNEXE IV.2

On se propose de donner ici une autre démonstration de lemme (4.1.1):

$$(A.1) \quad \exists \varepsilon_0, k > 0, \text{ tel que: } 0 < h_\varepsilon < k\varepsilon, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

1^{ère} étape:

Une intégration de $\gamma > 0$ à $x_{0\varepsilon}$, défini par le lemme (3.2) de l'équation en u_ε préalablement multipliée par u'_ε fournit l'estimation suivante dans laquelle on a omis l'indice ε :

$$\frac{1}{2}|u'(\gamma)|^2 + c \int_\gamma^{x_0} |u'(\sigma)|^2 d\sigma = \lambda^n \int_\gamma^{x_0} v^n u' f(u) d\sigma - h \int_\gamma^{x_0} u' g(u) d\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|u'(\gamma)|^2 \leq \int_\gamma^{x_0} v^n u' f(u) d\sigma \leq \int_\gamma^{x_0} \left(\frac{1-u}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{u'}{\varepsilon}\right) \phi\left(\frac{u-1}{\varepsilon}\right) d\sigma \quad (A.2)$$

2^{ème} étape:

Ecrivons: $\frac{u-1}{\varepsilon} = \alpha \frac{u-1}{\varepsilon} + (1-\alpha) \frac{u-1}{\varepsilon}$ où α sera choisi judicieusement

Alors, si $\alpha < 1$:

$$u-1 \leq z = u + \lambda v - 1 \Rightarrow \frac{u-1}{\varepsilon} \leq \alpha \frac{u-1}{\varepsilon} + (1-\alpha) \frac{z}{\varepsilon}$$

$$\leq \alpha \frac{u-1}{\varepsilon} + (1-\alpha) \left\{ |1-\lambda| \frac{v}{\varepsilon} - kx \frac{h}{\varepsilon} \right\}, \text{ en majorant}$$

z à partir de (3.29) (où $k > 0$). D'où:

$$(A.3) \quad \frac{u-1}{\varepsilon} \leq \left(\frac{u-1}{\varepsilon}\right) \left\{ \alpha - (1-\alpha)\lambda |1-\lambda| \right\} - kx \frac{h}{\varepsilon} (1-\alpha)$$

$$\leq k_1 \frac{u-1}{\varepsilon} - k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \quad \text{si } x \geq \gamma$$

avec: $k_1 = \alpha(1+\lambda|1-\lambda|) - \lambda|1-\lambda|$ et $k_2 = (1-\alpha)k$.

Il suffit alors de choisir α tel que $k_1 > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha > \frac{\lambda |1-\Lambda|}{1+\lambda |1-\Lambda|}$

3^{ème} étape:

Combinant (A.2) et (A.3) on aboutit à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u'(\gamma)|^2 &\leq \lambda^n \int_{\gamma}^{x_0} \left(\frac{1-u}{\varepsilon} \right)^n \left(\frac{u}{\varepsilon} \right)' \phi \left(k_1 \frac{u-1}{\varepsilon} - k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \right) d\sigma \\ &\leq \lambda^n \int_{(u(\gamma)-1)/\varepsilon}^{(u_0-1)/\varepsilon} (-t)^n \phi \left(k_1 t - k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \right) d\sigma \quad (u_0 \equiv u(x_0)) \\ &\leq \lambda^n \int_{-\infty}^0 (-t)^n \phi \left(k_1 t - k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \right) dt \\ &\leq \frac{\lambda^n}{k_1^{n+1}} \int_{-\infty}^0 (-T)^n \phi \left(T - k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \right) dT \end{aligned}$$

D'où:

$$(A.4) \quad \frac{1}{2} |u'(\gamma)|^2 \leq K \Phi \left(-k_2 \gamma \frac{h}{\varepsilon} \right)$$

Or,

$$\begin{aligned} -u'(\gamma) + cu(\gamma) &= \int_0^{\gamma} v^n f(u) d\sigma - h \int_{-\infty}^{\gamma} g(u) d\sigma \Rightarrow u'(\gamma) \geq cu(\gamma) - \int_0^{\gamma} v^n f(u) d\sigma \\ &\geq c\theta - \int_0^{\gamma} v^n f(u) d\sigma \end{aligned}$$

Et donc d'après (H-4/3): $u'(\gamma) \geq c\theta$, pour ε petit. (A.5)

(On pourra prendre $0 < \gamma < a \leq x_\varepsilon$, x_ε étant défini dans le lemme 3.3)

On déduit alors de (A.4)-(A.5):

$$\frac{1}{2}c^2\theta^2 \leq \frac{1}{2}|u'(\gamma)|^2 \leq K\Phi(-k_2\gamma\frac{h}{\varepsilon}) \Rightarrow \frac{h}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$$

grâce aux propriétés satisfaites par Φ . D'où (A.1) ■

ANNEXE IV.3

On donne ici une brève démonstration de l'unicité d'une solution au problème (4.16) qu'on peut écrire sous la forme:

$$(A.6) \quad \begin{cases} \Lambda u'' = u^n \Phi(p - \Lambda u), & p \in \mathbb{R}. \\ u(-\infty) = +\infty; & u(+\infty) = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que toute solution u de (A.6) est positive, strictement décroissante et satisfait le problème suivant équivalent à (A.6):

$$(A.7) \dots \begin{cases} u' = f(u) \equiv -\frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{2}{\Lambda^n} \int_{-\Lambda u}^0 (-t)^n \Phi(p+t) dt} \\ u(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Utilisant la stricte décroissante de la fonction u , on applique alors la méthode de l'hodographe en introduisant la variable :

$z = u'[u^{-1}(s)]$ où $s = u(x)$. L'équation dans (A.7) devient alors:

$$\begin{cases} z(s) = f(s) \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

dont l'unicité est triviale.

Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (A.7), il en résulte alors que:

$$u_1' - u_2' = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow u_1 - u_2 = \text{Cte} = (u_1 - u_2)(+\infty) = 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2 \text{ c.q.f.d. } \blacksquare$$

— BIBLIOGRAPHIE —

I. OUVRAGES :

[0.1] R.A.ADAMS :

Sobolev spaces. Academic press (1975).

[0.2] H.BREZIS :

Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson
(1983).

[0.3] J.BUCKMASTER, G.S.S. LUDFORD :

The laminar flame theory. Cambridge University press.
(1982).

[0.4] E.A.CODDINGTON, N.LEVINSON :

Theory of ordinary differential equations. Mc. Graw Hill
(1955).

[0.5] W.A.COPPEL :

Stability and asymptotic behaviour of differential
equations. Heath Mathematical Monographs (1965).

[0.6] J.DIEUDONNE :

Fondements de l'analyse moderne. Gauthiers-Villars (1983).

[0.7] W.ECKAUS :

Matched asymptotic expansions and singular perturbations.
North Holland (1973).

[0.8] D.GILBART, N.S.TRUDINGER :

Elliptic partial differential equations of second order.
Springer Verlag (1977).

[0.9] P.HARTMAN :

Ordinary differential equations. Willey, New York (1964).

[0.10] J.KEVORKIAN, J.D.COLE :

Perturbations methods in applied mathematics. Blaisdell
(1981).

[0.11] J.L.lions :

Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites
non linéaires. Dunod (1969).

[0.12] J.L.LIONS, E.MAGENES :

Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol
n°1. Dunod, Paris (1968).

[0.13] A.H.NAYFEH :

Problems in perturbation. A Willey Interscience
publication. (1985).

[0.14] J.NEČAS :

Les méthodes directes en théorie des équations
elliptiques .Masson (1967).

[0.15] R.O'MALLEY :

Introduction to singular perturbation: applications in
mathematics and mechanics. Academic Press (1974).

[0.16] I.G.PETROVSKI :

Ordinary differential equations. Prentice Hall (1966).

[0.17] L.C. PICCININI, G.STAMPACCHIA and G.VISSODICH :

Ordinary differential equations in $\mathbb{R}^n$. Springer Verlag
(1984).

[0.18] M.H.PROTTER, H.F.WEINBERGER :

Maximum principal in differential equations. Prentice
Hall (1967).

[0.19] J.SMOLLER :

Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer Verlag.(1983).

[0.20] M.VANDYKE :

Perturbation methods in fluid mechanics.The parabolic press, California (1964).

[0.21] M.WILLIAMS :

Combustion theory.Addison-Wesley-Massachussets.(1965).

[0.22] Ya.B.ZELDOVICH,G.I.BARENBLATT and V.B.LABROVICH :

Mathematical theory of combustion and explosions. Nauka-Moscow(1980). (Traduction anglaise en 1985).

II.COURS :

[C.1] P.CLAVIN, A.LIÑÁN :

Theory of gazeous combustion.An introduction course."Non equilibrium cooperative phenomena in physics and related fields" Velarde Ed, Nato ASI Series,Serie B, physics vol.116 plenum (1983).

[C.2] G.JOULIN :

Flammes non adiabatiques: couplages entre instabilités diffusives et hydrodynamiques.

Ecoles:C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A.:problèmes non linéaires appliqués à la combustion (18-21 Oct. 1983).

[C.3] G.S.S.LUDFORD, B.SCHEURER :

Problèmes mathématiques en combustion. Cours C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A. (Oct. 1983).

[C.4] J.MAWHIN :

Poins fixes, points critiques et problèmes aux limites. Séminaire de mathématiques supérieures.
Les presses de l'université de Montreal (1985).

[C.5] J.MAWHIN :

Topological degree methods in non linear boundary value problems.

C.B.M.S. Regional Conference series in math. n°40 (1979).

[C.6] P.H.RABINOWITZ :

Théorie du degré topologique et application à des problèmes aux limites non linéaires. L.N. 75010, Université Paris VI (1976).

[C.7] G.I.SIVASHINSKY, G.GUTFINGER :

Application of asymptotic methods to laminar flame theory. (1975).

III ARTICLES :

[A.1] J.V.BAXLEY :

Nonlinear second order boundary value problems: intervals of existence, uniqueness and continuous dependance.
Journal of differential equations (45) pp.389-407.

[A.2] J.V.BAXLEY, S.E.BROWN :

Existence and uniqueness for two point boundary value problems.

Proc. of Roy. Soc. of Edin. Vol. 88 A, pp 219-234 (1981).

[A.3] J.W.BEBERNES, R.GAINES :

A generalized two point boundary value problem.

Proc. Amer. Math. Soc. n° 19 (1968) pp.749-754.

[A.4] H.BERESTYCKI, B.NICOLAENKO et B.SCHEURER :

Sur quelques problèmes asymptotiques et application à la combustion.

C.R.A.S., t;296, Série I (1983) pp 105-108.

[A.5] H.BERESTYCKI, B.NICOLAENKO and B. SCHEURER :

Travelling wave solution to combustion models and their singular limits.

Siam Journal of Math. Analy. Vol 16, n°6 (Nov.1985).

[A.6] J.BUCKMASTER :

The quenching of deflagration waves.

Combustion and flame (26) pp 151-162 (1976).

[A.7] W.B.BUSH, F.E.FENDELL :

Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general Lewis number.

Combustion Science and technologie 1,421 (1970).

[A.8] V.GIOVANGIGLI :

Aspects mathématiques d'un modèle de flamme simple. Thèse de 3^{ème} cycle (1982) Paris VI.

[A.9] S.P.HASTINGS, A.B.POORE :

A non linear problem arising from combustion theory
Siam J. Math. Ana., vol 14, n°3, May 1983, pp 425-430

LIÑÁN's problem from combustion theory, part II.
Siam J. Math. Ana., Vol.16, n°2, March 1985, pp.331-340

[A.10] G.JOULIN :

Existence, stabilité et structuration des flammes prémélangées.

Thèse d'état, Poitiers (1979).

[A.11] G.JOULIN, P. CLAVIN :

Analyse asymptotique des conditions d'extinction des
flammas laminaires non adiabatiques.

Acta Astronautica, Vol.3, pp 223-240 (1976).

[A.12] G.JOULIN, G.I.SIVASHINSKY :

On the dynamics of nearly distinguished non adiabatic
cellular flames.

Combustion and Sci.Tech. Vol 31 (1983), pp.75-90.

[A.13] Ja.I.KANEL' :

On steady state solutions to system of equations arising
in combustion theory.

Dokl.Akad.Nauk. 149,2 (1963), pp.367-369.

[A.14] G.S.S.LUDFORD :

The premixed plane flame.

Journal de mécanique, vol. 16, n°1 (1977).

[A.15] M.MARION

Sur les équations de flamme laminaire sans température
d'ignition.

Thèse de 3^{ème} cycle. Paris VI (1983).

[A.16] S.D.TALIAFERRO :

Asymptotic behavior of solutions of: $y'' = \phi(t)y^\lambda$.

Journal of Math.Analy. and App. 66, pp.95-134 (1978).

[A.17] Ya.B.ZELDOVICH :

On the theory of flame propagation.

J. Phys. Chem., 22, pp.27-48 (1948).