FRÉDÉRIC KLOPP

Étude semi-classique d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique, 1990

63466

ORSAY
n° d'ordre

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

le Titre de Docteur en Sciences

Spécialité : **Mathématiques**

par

Frédéric KLOPP

Sujet : **Etude semi-classique d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique**

soutenue le **14 Décembre 1990** devant la Commission d'examen

MM. Didier ROBERT, Président
Bernard HELFFER
Gilles LEBEAU
André MARTINEZ
Johannes SJÖSTRAND

A mes parents

ABSTRACT

Assuming that V is periodic, we study the spectrum of $P_t = -h^2\Delta + V + t\delta V$ acting on $L^2(\mathbb{R}^n)$ when h tends to 0. We first show that P_t restricted to a convenient spectral interval is unitary equivalent to an operator that one may study with a Birman-Schwinger kernel. We then show that P_t admits at least one simple eigenvalue when t is not too small (depending on n) and we study the behaviour of this eigenvalue with respect to t.

AMS Subjects Classification (1985). 35 J 10, 35 P 20, 35 P 25, 47 A 40, 81 H 20.

Remerciements:

Je tiens à remercier tout particulièrement Johannes Sjöstrand pour m'avoir proposé ce sujet ainsi que pour la constance, la disponibilité et le savoir-faire avec lesquels il a dirigé mes recherches durant tout ce travail.

Ma gratitude va aussi à Bernard Helffer et André Martinez qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je suis également très reconnaissant à Didier Robert d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse et à Gilles Lebeau qui a accepté d'en faire partie.

Enfin, je remercie Antoinette Bardot dont l'aide m'a permis de mener à bien la frappe de ce travail.

Etude Semi-classique d'une Perturbation d'un Opérateur de Schrödinger Périodique.

par F.Klopp
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques Bat. 425
91405 Orsay
et U.R.A 760 CNRS.

§0 Introduction:

Nous allons ici étudier le spectre d'opérateurs du type suivant:

(0.1) $P_t = -h^2\Delta + V + t\delta V$

où $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ est L-périodique, L étant un réseau de $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \delta V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et t est un paramètre mesurant la taille de la perturbation. On définit $P = -h^2\Delta + V$.

L'étude d'opérateurs du type (0.1) a d'abord été amorcée par les physiciens voir par exemple le livre de J. Callaway [C] ou celui de Landau et Lifschitz [LL], ceux-ci traitant la plupart du temps des cas particuliers à la dimension 1. Puis, plus récemment, ces opérateurs ont donné lieu a des papiers mathématiques (voir F. Bentosela [B], M. Klaus [K]) dont beaucoup se placent dans l'approximation de la limite semi-classique ou dans le cas des grandes constantes de couplage.

Dans le cas des grandes constantes de couplage (c'est-à-dire h=1 et $t \longrightarrow \infty$), P.A Deift et R. Hempel [DH] ont montré, sous des hypothèses différentes des nôtres que pour presque toute énergie E dans un gap de P, il existe des valeurs du paramètre de perturbation t tel que E soit valeur propre de P_t. Ce résultat fut retrouvé par F. Gesztesy et B. Simon [GS]. Alama, Deift et Hempel [ADH] ont aussi étudié la question du nombre de valeurs propres de P_t dans un gap de P. Dans le cas unidimensionnel et dans l'approximation des grandes constantes de couplage, dans [GHKSV], F. Gesztesy, D. Gurarie, H. Holden, M. Klaus, L. Sadun, B. Simon et P. Vogl ont mis en évidence des phénomènes de cascades de valeurs propres pour des opérateurs du type de P_t.

Dans le cas de la limite semi-classique, dans [S4], B.Simon a étudié la largeur de la premiére bande spectrale de P. Ses résultats ont été obtenus indépendament par Outassourt qui, dans [O], a aussi démontré des résultats sur l'existence de valeurs propres pour P_t dans un gap de P ceci pour des perturbations pas trop petites.

Notre travail va en quelque sorte prolonger le sien mais les techniques utilisées seront différentes. Nous allons nous servir des méthodes mises en place par Helffer et Sjöstrand [HSj1], [HSj2], [Hsj3] puis étendues par Carlsson [Ca] au cas d'une infinité de puits. Nous étudierons le spectre de P_t dans un intervalle I en utilisant des opérateurs de référence $P_{t,j}$ qui sont associés aux puits de potentiel. Ceci nous permettra de ramener notre problème, par équivalence unitaire, à l'étude du spectre d'un opérateur du type noyau de Birman-Schwinger dépendant de t agissant sur $L^2(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T}=(\mathbb{R}^n)^*/L^*$.

On obtient alors l'existence d'un seuil positif ou nul $T_{\delta V}$ ($T_{\delta V}$ est nul en dimension 1 ou 2) tel que pour t positif plus petit que $T_{\delta V}$, il n'y a pas de spectre pour P_t au dessus de la bande spectrale de P dans I. Par contre, pour t plus grand que $T_{\delta V}$, il apparait au moins une valeur propre de P_t, notée $\lambda(t)$, hors de la bande de spectre essentiel de P_t dans I; cette valeur propre est simple et on peut caractériser le comportement en t. On étudie la manière dont $\lambda(t)$ décolle du sommet de la bande spectrale de P quand t croit à partir de $T_{\delta V}$. On obtient qu'en dimension 1 et 3, elle croit comme le carré de $t-T_{\delta V}$, en dimension 2, comme une exponentielle en

$-(t-T_{\delta V})^{-1}$, en dimension 4, comme $-(t-T_{\delta V})/\mathrm{Log}(t-T_{\delta V})$, et linéairement pour les dimensions plus grandes.

Pour ce qui concerne les dimensions supérieures à 3, on montre que pour t assez petit, cette valeur propre est la seule dans l'intervalle I considéré, mises à part celles éventuellement plongées dans le spectre essentiel.

Des résultats analogues aux nôtres ont déja été obtenus dans l'étude de perturbations du laplacien libre par B. Simon puis par M. Klaus et B. Simon. En effet, dans le cas où V est un potentiel négatif à courte portée, B. Simon en dimension 1 et 2 dans [S5] puis M. Klaus et B. Simon en dimension quelconque dans [KS] ont étudié le comportement asymptotique de la plus grande valeur propre négative de $-\Delta+tV$ quand $t>0$ et $t\longrightarrow 0$; ils obtiennent des développements identiques à ceux décrits ci-dessus.

Remerciements: Je voudrais remercier J. Sjöstrand, sous la direction duquel ce travail a été effectué, pour l'aide constante, tant matérielle que morale, qu'il m'a apportée.

§1: Définitions et résultats:

Soit L un réseau c'est-à-dire $L=\bigoplus_{1\le j\le n}\mathbb{Z}u_j$ où $(u_j)_{j\in[1,n]}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On considère l'opérateur de Schrödinger suivant agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$:

(1.1) $P=-h^2\Delta+V$

avec V satisfaisant:

(H.1): $V\in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et V périodique sur le réseau L c'est-à-dire tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tout α dans L: $V(x+\alpha)=V(x)$.

On définit: $L^*=\{\alpha'\in(\mathbb{R}^n)^*;\ \forall\ \alpha\in L\ \alpha\cdot\alpha'\in 2\pi\mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{T}=(\mathbb{R}^n)^*/L^*$. On note alors pour α dans L: $\tau_\alpha:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par $(\tau_\alpha\varphi)(x)=\varphi(x-\alpha)$.

Par l'hypothèse (H.1), on a, pour tout α dans L:

(1.2) $\tau_{-\alpha}\circ P\circ\tau_\alpha=P$.

Nous allons maintenant supposer qu'il n'existe qu'un puits par point du réseau, c'est-à-dire:

(H.2): il existe $\varepsilon_0>0$ assez petit tel que pour $\delta\in[0,\varepsilon_0[$, on a:

$\{x\in\mathbb{R}^n;\ V(x)-\delta^2\le 0\}=\cup_{\alpha\in L}U_{\alpha,\delta}$ où $U_{\alpha,\delta}=U_{0,\delta}+\{\alpha\}$ et tels que si $\alpha\ne\alpha'\Rightarrow U_{\alpha,\delta}\cap U_{\alpha',\delta}=\emptyset$.

On suppose, de plus, que $U_{0,\delta}$ est compact et de diamètre 0 pour la métrique d'Agmon, $(V(x)-\delta^2)_+dx^2$,où $f_+=\max(f,0)$.

On notera, pour $\alpha\in L$, $U_\alpha=U_{\alpha,0}$; on appellera les $(U_\alpha)_{\alpha\in L}$, les puits de potentiel et les $(U_{\alpha,\delta})_{\alpha\in L}$, (pour $\delta>0$), les puits de potentiel étendus. On notera $d_\delta(\cdot,\cdot)$ la distance associée à la métrique d'Agmon $(V(x)-\delta^2)_+dx^2$ (pour $\delta\in[0,\varepsilon_0[$) et $d(\cdot,\cdot)=d_0(\cdot,\cdot)$. On définit: $S_0=\inf_{\alpha\ne 0}(d(U_\alpha,U_0))$

Pour chaque α dans L, on construit un opérateur de référence. Soit $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ et θ_0 une fonction vérifiant

(1.3) $0\le\theta_0\in C_0^\infty(U_{0,\varepsilon})$ et pour tout $x\in U_{0,\varepsilon}$, $V(x)+\theta_0(x)\ge\varepsilon^2/4$.

Notons, pour $\alpha\in L$:

(1.4) $\theta_\alpha=\tau_\alpha(\theta_0)$ et $P_\alpha=P+\Sigma_{\beta\neq\alpha}\theta_\beta$

Remarque: Les fonctions θ_α vérifient:

(1.5) $0\leq\theta_\alpha\in C_0^\infty(U_{\alpha,\varepsilon})$ et pour tout $x\in U_{\alpha,\varepsilon}$, $V(x)+\theta_\alpha(x)\geq\varepsilon^2/4$.

Pour tout α dans L, on sait que P_α est symétrique, borné inférieurement, essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Notons aussi P_α, son extension auto-adjointe qui a pour domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$. Par un théorème de Persson [P], on sait que le spectre de P_α est discret en dessous de $\varepsilon^2/4$.

Par construction, pour tout $\alpha\in L$, on a:

(1.6) $P_\alpha=\tau_\alpha\circ P_0\circ\tau_{-\alpha}$,

donc tous les P_α ont le même spectre. On note $\sigma(P_\alpha)$ le spectre de P_α

Supposons maintenant:

(H.3): Il existe $\mu=\mu(h)$, une valeur propre simple de P_0 telle que $\mu(h)\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$ et une fonction $a(h)>0$ telle que $a(h)\longrightarrow 0$ et $h\mathrm{Log}(a(h))\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$ tels que:

$\sigma(P_0)\cap[\mu-2a(h),\mu+2a(h)]=\{\mu\}$.

On notera alors φ_0 un vecteur propre normalisé associé à μ.

Appelons F ($F\subset L^2(\mathbb{R}^n)$) l'espace spectral associé à P et à $[\mu-a(h),\mu+a(h)]$ et Π_F la projection orthogonale sur F. On obtient alors

Proposition 1.1: Sous les hypothèses (H.1)-(H.3):

(I) Il existe $\gamma>0$ et $h_0>0$ tels que, pour $h\in]0,h_0[$,

$\sigma(P)\cap[\mu-2a(h),\mu+2a(h)]\subset\{\mu-2a(h),\mu,\mu+2a(h)\}+D(0,e^{-\gamma/h})$

où $D(x,r)$ désigne le disque de centre x de rayon r dans $\mathbb{C}$.

(II) Il existe $h_0>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_0[$, $P_{|F}$ est unitairement équivalent à Ω, un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ défini pour

$u \in L^2(\mathbb{T})$, par $\Omega(u)=\omega \cdot u$ où:

(i) ω est un fonction analytique réelle sur $\mathbb{T}$ et analytique dans un voisinage complexe W de $\mathbb{T}$ de la forme $\mathbb{T}+iB(0,1/Ch)$ où C est une constante positive ne dépendant pas de h et $B(x,r)$ désigne la boule de centre x de rayon r dans $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\limsup_{h \to 0}[h\log(\sup_{\theta \in \mathbb{T}}|\omega(\theta)-\mu|)] \leq -S_0$

(iii) Si $\gamma \in L^*$ alors $\gamma/2$ est un point critique de ω et $(\omega)_{0<h<h_0}$ est bornée dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur W.

(iv) $\omega(\theta)$ est la valeur propre de Floquet du problème périodique.

Cette proposition a déja été obtenue par Outassourt [O] sous des hypothèses équivalentes aux nôtres bien que formulées différement. Dans la partie §2, on donnera une preuve de la Proposition 1.1 différente de celle d'Outassourt. La majoration de la largeur de la bande a aussi été établie par Simon [S4]. On notera $i=\inf(\omega(\mathbb{T}))$ et $s=\sup(\omega(\mathbb{T}))$.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'opérateur suivant:

(1.7) $P_t=-h^2\Delta+V+t\delta V=P+t\delta V$

où l'on suppose que δV vérifie:

(H.4): $0 \leq \delta V \in C_0^\infty(\mathring{U}_{0,\varepsilon_0})$, $\delta V>0$ sur U_0 et $\|\delta V\|_\infty=1$.

On peut remarquer alors que pour tout $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ et tout α non nul, on a:

(1.8) $d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)>0$.

On note: $S_{\delta V,\varepsilon}=\inf_{\alpha \neq 0}[d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)]$ et $\rho=(\varphi_0|\delta V\varphi_0)$. Alors, pour $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $S_{\delta V,\varepsilon}>0$ et il existe $a>0$ indépendant de h tel que $a \leq \rho \leq 1$ (pour cela voir (3.25) et sa démonstration).

On va étudier P_t de la même manière que P. Pour cela on construit des opérateurs de référence $P_{t,\alpha}$ à partir des P_α de la façon suivante:

(1.9) si $\alpha \neq 0$ alors $P_{t,\alpha}=P_\alpha$ et $P_{t,0}=P_0+t\delta V$

c'est-à-dire que:

(1.10) $P_{t,\alpha}=P_t+\Sigma_{L\ni\beta\neq\alpha}\tilde{\theta}_\beta$ où $\tilde{\theta}_\beta=\theta_\beta$ si $\beta\neq 0$ et $\tilde{\theta}_0=\theta_0-t\delta V$

Remarque 1.2: Pour h suffisament petit et $|t|\leq a(h)/2$, le spectre de $P_{t,0}$ est toujours discret en dessous de $\varepsilon^2/4$ et on montre facilement que $\sigma(P_{t,0})\cap[\mu-a(h),\mu+a(h)]$ est réduit à une valeur propre simple que l'on notera $\mu(t)$.

Définissons alors: $F_t\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace spectral associé à P_t et $[\mu-a(h),\mu+a(h)]$, et Π_{F_t} la projection spectrale sur F_t. En exhibant, grace aux vecteurs propres des opérateurs de références $P_{t,\alpha}$, une base de F_t, nous démontrons:

Théorème 1.3: Supposons (H.1)-(H.4). Pour tout $\eta\in]0,1/2[$ et $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et pour tout $t\in]-\eta a(h),\eta a(h)[$:

$P_{t|F_t}$ est unitairement équivalent à Ω_t: $L^2(\mathbb{T})\longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par

$\Omega_t f=\omega\cdot f+(\mu_t-\mu)\Pi_0 f+K(t)f$

avec:

(i) $\omega=\omega(\theta)$ la valeur propre de Floquet définie par P dans $[\mu-a(h),\mu+a(h)]$.

(ii) Π_0: $L^2(\mathbb{T})\longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ défini par: $\Pi_0 f=(\mathrm{Vol}(\mathbb{T}))^{-1}\int_{\mathbb{T}}fd\theta$ où $d\theta$ est la mesure de Lebesgue.

(iii) $K(t)$ est un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ à noyau analytique sur $D(0,\eta a(h))\times W(h)\times W(h)$, où $W(h)=\{x+iy;\ x\in\mathbb{T}$ et $|y|<1/Ch\}$ défini dans la Proposition 1.1. Soit $k(t,h,\theta,\theta')$ son noyau. Alors:

$k(t,h,\theta,\theta')=\Sigma_{(\alpha,\beta)\in L\times L}(k_{\alpha,\beta}(t,h)e^{-i(\alpha\cdot\theta-\beta\cdot\theta')})$

avec $k_{\alpha,\beta}(t,h)$ vérifiant qu'il existe $h_{\eta,\gamma,\varepsilon}\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ tels que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\gamma,\varepsilon}[$, on a uniformément pour tout $|t|<\eta a(h)$:

$|\partial_t k_{\alpha,\beta}(t,h)|\leq e^{-(1-\gamma)[d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\beta)]/h}$ si

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ et $|\partial_t k_{0,0}(t,h)|\leq e^{-2(1-\gamma)S_{\delta V,\varepsilon}/h}$.

De plus $K(0)=0$.

(iv) $\mu_t-\mu=(\delta V\varphi_0|\varphi_0)t(1+tq(t))$ où q est analytique sur $D(0,a(h)/2)$

et vérifie: $|q(t)|<1/(a(h)-2|t|)$ pour $t\in D(0,a(h)/2)$.

De plus, l'application $b:t\mapsto\mu_t-\mu$ réalise une bijection de

$D(0,a(h)/8)$ dans un domaine D_h tel que:

$D(0,\rho a(h)/18)\subset D_h\subset D(0,\rho 7a(h)/36)$.

Remarque 1.4: Pour t réel, $K(t,h)$ est auto-adjoint et analytique en t. De plus $K(t,h)$ est compact et si on note:

$\|K\|_\infty=\sup_{(t,\theta,\theta')\in D(0,\eta a(h))\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}}|k(t,h,\theta,\theta')|$ alors, pour tout $\eta\in]0,1/2[$:

(1.11) $h\log(\|K\|_\infty)\leq -S_{\delta V}+o(1)$ quand $h\to 0$.

Par le théorème de Weyl et le Théorème 1.3, on a:

(1.12) $\sigma_{ess}(P_t)\cap[\mu-a(h),\mu+a(h)]=\omega(\mathbb{T})=[i,s]$.

On va s'intéresser à $\sigma(P_t)\cap([\mu-a(h),\mu+a(h)]\setminus[i,s])$, ceci pour $t\in]0,a(h)/8[$, une étude tout à fait symétrique pouvant être menée pour $t\in]-a(h)/8,0[$. Comme nous avons déjà isolé $\sigma_{ess}(P_t)\cap[\mu-a(h),\mu+a(h)]$, le spectre de P_t dans $[\mu-a(h),i[\cup]s,\mu+a(h)]$ est discret. On démontre la

Proposition 1.5: Pour h suffisament petit et $t\in]0,a(h)/8[$, on a $\sigma(P_t)\cap[\mu-a(h),i[=\emptyset$.

Pour étudier $\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]$, on se sert de la réduction donnée par le

Théorème 1.3, puis on étudie l'opérateur Ω_t grâce à une sorte de principe de Birman-Schwinger. On a alors besoin d'hypothèses supplémentaires sur ω:

(H.5): (i) ω n'admet que les éléments de $((1/2)L^*)/L^*$ comme points critiques et de plus, ceux-ci sont non dégénérés.

(ii) Si $f(h)=s-i=\sup_{\theta\in\mathbb{T}}(\omega(\theta))-\inf_{\theta\in\mathbb{T}}(\omega(\theta))$ alors $h\log(f(h))=-S_0+o(1)$ quand $h\to 0$.

(iii) Soit $\tilde{\omega}(\theta)=(\omega(\theta)-\mu)/f(h)$. Il existe $h_0>0$ et $C>0$ tels que, pour $0<h<h_0$, on ait:

(*) $\tilde{\omega}$ n'atteint son maximum $\tilde{s}$ (resp. son minimum $\tilde{i}$) qu'en un seul point noté θ_s (resp. θ_i).

(**) $\max_{|\alpha|\leq 3}\sup_{\theta\in\mathbb{T}}|\partial_\theta^\alpha\tilde{\omega}(\theta)|\leq C$ et pour $\theta\in\{\theta_s,\theta_i\}$, $|\det[\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta))]|>1/C$.

(***) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $0<\delta(\varepsilon)$ indépendant de h tel que: $|\tilde{\omega}(\theta)-\tilde{s}|>\delta(\varepsilon)$ si $|\mathrm{dist}(\theta,\theta_s)|>\varepsilon$, et $|\tilde{\omega}(\theta)-\tilde{i}|>\delta(\varepsilon)$ si $|\mathrm{dist}(\theta,\theta_i)|>\varepsilon$.

Remarque: Dans un appendice, on montre que de telles hypothèses sur ω découlent naturellement d'hypothèses de symétrie sur le réseau L lorsque les minima de V sont supposés non dégénérés et que μ est la valeur propre de fond de puits de P_0.

Notons $D_s(\omega)=|\det(\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s)))|^{-1/2}$ et $D_i(\omega)=|\det(\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_i)))|^{-1/2}$.

On obtient alors les deux théorèmes suivants:

Théorème 1.6: Supposons (H.1)-(H.5) et $n=1$ ou 2. Il existe $h_0>0$ tel que pour $h\in]0,h_0[$, il existe $\lambda(t)$ une fonction croissante analytique réelle sur $]0,a(h)/8[$ dans $]s,\mu+a(h)]$ qui est valeur propre simple de P_t et qui vérifie:

(1) si $t/f(h)\longrightarrow 0^+$:

(i) si $n=1$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_1(h,t)\cdot(\rho t/f(h))^2$,

(ii) si $n=2$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=\exp(-(1+o(1))\cdot C_2(h,t)\cdot(f(h)/(\rho t)))$,

(2) pour tout $C>1$, il existe $C'>0$ tel que pour $t\in]f(h)/C,a(h)/8[$, on a:

$$1/C'\leq\partial_t\lambda(t)\leq 1,$$

(3) si $t/f(h)\longrightarrow+\infty$ et $t/a(h)\longrightarrow 0$: $\lambda(t)=s+(1+o(1))\cdot(\rho t)$,

avec $C_n(h,t)$ vérifiant que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ et pour tout $t\in]0,a(h)/8[$,

(i) $C_1(h,t)=(2^{1/2}\cdot\pi D_s(\omega)/\mathrm{Vol}\mathbb{T})^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(ii) $C_2(h,t)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}/(2\pi D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$.

De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ et pour $t\in]0,a(h)/8[$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t dans $]s+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h})(\lambda(t)-s),\mu+a(h)]$.

Remarque: Dans [S5], B. Simon a déja obtenu des asymptotiques similaires à (i-ii) dans l'étude des valeurs propres de $-\Delta+t\delta V$ pour δV négatif et à courte portée, en dimension 1 ou 2.

L'étude de la valeur propre $\lambda(t)$ quand $t/f(h)$ tend vers $+\infty$ a déjà été faite par Outassourt dans [O].

On définit $I(\lambda)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-1}d\theta$ pour $\lambda\in]s,+\infty[$ si $n=1$ ou 2

et pour $\lambda\in[s,+\infty[$ si $n\geq 3$.

Théorème 1.7: Supposons (H.1)-(H.5) et $n\geq 3$. Il existe $h_0>0$ tel que, pour $h\in]0,h_0[$, il existe une constante $T_{\delta V}>0$ et $\lambda(t)$, une fonction croissante analytique réelle sur $]T_{\delta V},a(h)/8[$ dans $]s,\mu+a(h)]$ qui est valeur propre simple de P_t; elle vérifie:

(1) si $u=(t-T_{\delta V})/f(h)\longrightarrow 0^+$:

si $n=3$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_3(h,t)\cdot(\rho u)^2$,

si $n=4$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=-(1+o(1))\cdot C_4(h,t)\cdot(\rho u/\log(\rho u))$,

si $n\geq 5$: $(\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_n(h,t)\cdot\rho u$,

(2) pour tout $C>1$, il existe $C'>0$ tel que pour $t\in]T_{\delta V}+f(h)/C,a(h)/8[$, on

a: $1/C'\leq\partial_t\lambda(t)\leq 1$,

(3) si $(t-T_{\delta V})/f(h)\longrightarrow+\infty$ et $t/a(h)\longrightarrow 0$: $\lambda(t)=s+(1+o(1))\cdot(\rho t)$,

avec $T_{\delta V}$ et $C_n(h,t)$ vérifiant que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ pour tout $t\in]0,a(h)/8[$,

(i) $T_{\delta V}=\rho(I(s))^{-1}\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(ii) $n\geq 5$: $C_n(h,t)=(-\partial_\lambda(I)_{|\lambda=s})^{-1}\cdot I(s)^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(iii) $C_4(h,t)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(4\pi^2D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$,

(iv) $C_3(h,t)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(2^{5/2}\cdot\pi^2D_s(\omega)))^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}))$.

Pour $t\in]0,T_{\delta V}[$, on a, $\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]=\emptyset$. Si $n\geq 5$, $\lambda(T_{\delta V})=s$ est une valeur propre de $P_{T_{\delta V}}$.

De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $h\in]0,h_\varepsilon[$, il existe une constante positive $\tau_{\delta V}$ vérifiant: $\tau_{\delta V}\geq f(h)\cdot e^{(S_{\delta V}-\varepsilon)/h}$, telle que, pour $t\in]T_{\delta V},\tau_{\delta V}]$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t dans $]s,\mu+a(h)]$, et pour $t\in]\tau_{\delta V},a(h)/8[$, $\lambda(t)$ est la seule valeur propre de P_t

dans $]s+O(e^{-(S_{\delta V}-\varepsilon)/h})(\lambda(t)-s),\mu+a(h)]$.

Remarque: Dans [KS], M. Klaus et B. Simon ont obtenus des asymptotiques similaires à (ii-iv) dans l'étude des valeurs propres de $-\Delta+t\delta V$ pour δV négatif et à courte portée, en dimension 3 ou plus.

Il convient également de faire remarquer que, $\lambda(t)$ étant simple, si on note φ_t un vecteur propre unitaire associé à $\lambda(t)$ alors, par (1.7)

(1.12) $\partial_t\lambda(t)=(\delta V\varphi_t|\varphi_t)$.

Alors les Théorèmes 1.6 et 1.7, nous disent que φ_t est localisée au voisinage de supp(δV) quand $(t-T_{\delta V})/f(h)$ est grand. Par contre, quand $(t-T_{\delta V})/f(h)\longrightarrow 0$, φ_t n'est localisée au voisinage de supp(δV) qu'en dimension plus grande que 5 alors que dans les dimensions 1 à 4, φ_t se "délocalise" (la justification de ceci est fondée sur les démonstrations des Théorèmes 1.6 et 1.7).

§2. Etude du cas non perturbé: preuve de la Proposition 1.1:

Pour montrer la première assertion de la Proposition 1.1, on reprend la démonstration du Théorème 4.2 de Carlsson [Ca]. Remarquons que dans notre cas, par (1.6), on a pour tout $\alpha \in L$,

(2.1) $\sigma(P_\alpha)=\sigma(P_0)$ donc $\cup_{\alpha \in L}(\sigma(P_\alpha))=\sigma(P_0)$.

On construit $R_0(z)$ un opérateur borné pour $z \notin \sigma(P_0)$ et $\mathcal{R}e(z) \leq \varepsilon^2/8$ où $\mathcal{R}e(z)$ désigne la partie réelle de z (la norme de $R_0(z)$ dépend de $d_e(z,\sigma(P_0))$ et de $d_e(z,[\varepsilon^2/4,+\infty[)$ où d_e désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{C}$) qui vérifie

(2.2) $(P-z)R_0(z)=1+T(z)$

où T est tel qu'il existe $c>0$ et $h_0>0$ tels que pour $h \in]0,h_0[$ et pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(2.3) $\|T(z)u\| \leq (d_e(z,\sigma(P_0)))^{-1}e^{-c/h}\|u\|$.

Donc, il existe $c>0$ tel que pour h suffisament petit, $1+T(z)$ donc $(P-z)$ est inversible pour $d_e(z,\sigma(P_0))>e^{-c/h}$, ce qui achève la démonstration du point (I) de la Proposition 1.1.

Pour $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ (ε_0 étant donné par l'hypothèse (H.2)), on note d_ε la distance associée à la métrique d'Agmon $(V(x)-\varepsilon^2)_+dx^2$. Notons alors, pour $\alpha \in L$ et $x \in \mathbb{R}^n$: $d_{\varepsilon,\alpha}(x)=d_\varepsilon(x,U_\alpha)$ et définissons les fonctions d_ε^1, d_ε^2 sur $L \times L$ par: $d_\varepsilon^1(\alpha,\beta)=d_\varepsilon(U_\beta,U_\alpha)$ si $\alpha \neq \beta$ et

$d_\varepsilon^1(\alpha,\alpha)=2\inf_{\alpha \neq \beta} d_\varepsilon(U_\alpha,U_\beta)= 2\inf_{\alpha \neq 0} d_\varepsilon(U_\alpha,U_0)$ (grâce à la périodicité de V), et

$d_\varepsilon^2(\alpha,\beta)=\inf_{\alpha \neq \gamma,\eta \neq \beta}(d_\varepsilon(U_\alpha,U_\gamma)+d_\varepsilon(U_\gamma,U_\eta)+d_\varepsilon(U_\eta,U_\beta))$.

Soit Φ_ε une fonction positive localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant

(2.4) $|\nabla\Phi_\varepsilon|\leq(V-\varepsilon^2)_+^{1/2}$ où $(\cdot)_+=\max(\cdot,0)$.

On définit, si $\|\cdot\|$ désigne la norme habituelle sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, l'espace $L^2_{\Phi_\varepsilon,h}$ par $L^2_{\Phi_\varepsilon,h}=\{u\in L^2_{loc};\ e^{\Phi_\varepsilon/h}u\in L^2\}$ muni de la norme

$\|\cdot\|_{\Phi_\varepsilon,h}=\|e^{\Phi_\varepsilon/h}(\cdot)\|$.

Sous les hypothèses (H.1)-(H.3), définissons $\varphi_\alpha=\tau_\alpha(\varphi_0)$ pour $\alpha\in L$. D'après (1.6), c'est un vecteur propre normalisé pour P_α associé à μ.

On sait d'après la formule (5.1) du travail de Carlsson [Ca] qu'il existe $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ tel que pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_1[$, il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\varepsilon]$ et pour tout α dans L, on a $\varphi_\alpha\in L^2_{d_{\varepsilon,\alpha}}$ et il existe $C>0$ indépendant de α tel que:

(2.5) $\|\varphi_\alpha\|_{d_{\varepsilon,\alpha},h}+\|\nabla\varphi_\alpha\|_{d_{\varepsilon,\alpha},h}\leq C/\varepsilon$.

Si on note $\psi_\alpha=\Pi_F\varphi_\alpha$, alors pour tout $\alpha\in L$, $\psi_\alpha\in L^2_{d_{\varepsilon,\alpha}}$ et vérifie

(2.6) $\|\psi_\alpha\|_{d_{\varepsilon,\alpha},h}+\|\nabla\psi_\alpha\|_{d_{\varepsilon,\alpha},h}\leq C/\varepsilon$ (C étant indépendant de α).

De plus $(\psi_\alpha)_{\alpha\in L}$ est une base de F au sens que tout élément f de F s'écrit de manière unique et avec convergence en norme comme $f=\Sigma a_\alpha\psi_\alpha$, avec $\|f\|^2/C\leq\Sigma|a_\alpha|^2\leq C\|f\|^2$ et avec $C>0$ indépendant de f et de h. A l'instar de Carlsson [Ca], on définit:

Définition 2.1: Pour $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1[$ et pour une famille de réels positifs $(s_{\alpha,\beta,\varepsilon})_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$, on dit qu'une matrice $\mathcal{a}=((a_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$ est $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-s_{\alpha,\beta,\varepsilon}/h))$ si pour tout $\eta>0$ il existe $h_\eta\in]0,h_\varepsilon]$ tel que pour $h\in]0,h_\eta]$ et pour $(\alpha,\beta)\in L\times L$:

(2.7) $|a_{\alpha,\beta}|\leq\exp(-(1-\eta)s_{\alpha,\beta,\varepsilon}/h)$.

On définit ainsi $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$ et $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^2_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$.

Notons $\mathcal{V}$ la matrice de Gram correspondante, ayant pour coefficients $(\psi_\alpha|\psi_\beta)$, $(\alpha,\beta)\in L\times L$. D'après [Ca], on a: $\mathcal{V}=I+\mathcal{T}+\mathcal{R}$ où $\mathcal{T}=((t_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$ et $\mathcal{R}=((r_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$ avec:

(2.8) $t_{\alpha,\beta}=(\varphi_\alpha|\varphi_\beta)$ pour $\alpha\neq\beta$, $=0$, pour $\alpha=\beta$,

(2.9) $\mathcal{R}=\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^2(\alpha,\beta)/h)$.

Remarquons que d'après (2.5):

(2.10) $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}+\mathcal{R}=\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^1(\alpha,\beta)/h)$.

Comme $(1+z)^{-1/2}$ est définie par une série entière, la proposition B.6 de [Ca] entraine que $\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$ existe et:

(2.11) $\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}=I-\frac{1}{2}\mathcal{T}+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^2(\alpha,\beta)/h))$.

La base $(\psi_\alpha)\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$ est orthonormée. De plus, dans cette base, la matrice de P est:

(2.12) $\mathcal{M}=((m_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}=\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}((\psi_\alpha|P\psi_\beta))\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$

Par l'hypothèse (H.1) on a $\tau_\alpha\circ P=P\circ\tau_\alpha$ pour tout $\alpha\in L$, donc pour $z\notin\sigma(P)$, $(z-P)^{-1}$ et Π_F commutent avec τ_α. On en déduit que pour tous $\alpha,\beta\in L$:

(2.13) $(\psi_\alpha|\psi_\beta)=(\Pi_F\varphi_0|\tau_{\beta-\alpha}\Pi_F\varphi_0)$,

(2.14) $p_{\alpha,\beta}=_{\text{def.}}(\psi_\alpha|P\psi_\beta)=(\Pi_F\varphi_0|\tau_{\beta-\alpha}P\Pi_F\varphi_0)$,

donc la matrice de P dans $(\psi_\alpha)\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}}$ est une matrice de convolution.

D'après le théorème principal de Carlsson (et sa démonstration, voir partie 5 de [Ca]), on sait que

(2.15) $m_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,\beta}\mu+w_{\alpha,\beta}+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^2(\alpha,\beta)/h))$,

où

(2.16) $w_{\alpha,\beta}=-\frac{1}{2}((\varphi_\alpha|r_\beta)+(r_\alpha|\varphi_\beta))$,

avec

(2.17) $r_\alpha=\Sigma_{\beta\neq\alpha}\theta_\beta\varphi_\alpha$.

Rappelons aussi que $w_{\alpha,\beta}=\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^1(\alpha,\beta)/h)$.

Notons par $\mathfrak{F}$ la transformée de Fourier de $l^2(L)$ dans $L^2(\mathbb{T})$ définie par,

(2.18) $(\mathfrak{F}((a_\alpha)_{\alpha\in L}))(\theta)=\Sigma_{\alpha\in L}a_\alpha e^{i\alpha\cdot\theta}$,

si $(a_\alpha)_{\alpha\in L}\in l^2(L)$. Alors $\mathfrak{F}^{-1}$ s'écrit, pour $\alpha\in L^2(\mathbb{T})$ et $\alpha\in L$,

(2.19) $(\mathfrak{F}^{-1}(u))_\alpha=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\int_{\mathbb{T}}u(\theta)e^{-i\alpha\cdot\theta}d\theta$.

Alors, si on munit $L^2(\mathbb{T})$ du produit scalaire défini, pour u et v dans $L^2(\mathbb{T})$, par: $(u|v)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\cdot\int_{\mathbb{T}}(u\cdot\bar{v})d\theta$, $\mathfrak{F}$ est une transformation unitaire de $l^2(L)$ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Comme $\mathfrak{M}$ (qui décrit $P_{|F}$) est une matrice de convolution, on obtient, en conjugant par $\mathfrak{F}$, que $P_{|F}$ est unitairement équivalent à la multiplication par la fonction ω sur $\mathbb{T}$, définie par

(2.20) $\omega(\theta)=\Sigma_{\alpha\in L}m_{\alpha,0}e^{i\alpha\theta}$.

D'après (2.5) et la remarque suivant (2.17), il existe C indépendante de h telle que la série (2.20) converge normalement sur

(2.21) $W=\{\theta+iy;\ \theta\in\mathbb{T},\ |y|\leq 1/Ch\}=\mathbb{T}+iB(0,(Ch)^{-1})$.

En effet, l'hypothèse (H.2) nous dit que si, pour $x\in\mathbb{R}^n$, on désigne par $|x|$ la norme euclidienne de x, alors il existe $C>0$ (indépendant de ε) tel que, pour tout $\alpha\in L$, on a,

(2.22) $Cd_\varepsilon(U_\alpha,U_0)\geq|\alpha|\geq d_\varepsilon(U_\alpha,U_0)/C$.

Ceci nous donne immédiatement pour une autre constante C:

$|m_{0,\alpha}|\leq Ce^{-|\alpha|/Ch}$.

Comme P est auto-adjoint à coefficients réels, on obtient pour tout $\alpha\in L$:

(2.23) $m_{\alpha,0}=m_{0,\alpha}=m_{-\alpha,0}=m_{0,-\alpha}\in\mathbb{R}$,

et ω est une fonction réelle et paire. De plus, comme ω est

L^*-périodique, on a, pour tout $\gamma \in L^*$ et tout $\theta \in \mathbb{T}$

(2.24) $\omega(\gamma - \theta) = \omega(\theta)$.

En dérivant, on voit que les points de $(1/2)\Gamma^*$ sont des points critiques de ω.

Notre discussion peut aussi se combiner avec la théorie de Floquet (voir Outassourt [O], B.Simon [S4], Skriganov [Sk]) et on peut déduire que $\omega(\mathbb{T})$ est une bande simple du spectre de P engendré par la valeur propre de Floquet, $\omega(\theta)$. En particulier $\omega(\theta)$ ne dépend pas du choix de ε et de la fonction de bouchage θ_0.

§3. Etude du spectre de l'opérateur $P_{t,0}$:

On notera dist la distance euclidienne dans $\mathbb{C}$ et on fait les hypothèses (H.1)-(H.4). Alors, on a

Lemme 3.1: Pour $t\in D(0,a(h))$, le spectre de $P_{t,0}$ dans $\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{dist}(z,\mu)<2a(h)-|t|\}$ est réduit à une seule valeur propre simple μ_t vérifiant: $|\mu_t-\mu|\le|t|$. De plus, μ_t est une fonction holomorphe sur le disque $D(0,a(h))$ vérifiant, pour $|t|<a(h)/2$:

(3.1) $|\mu_t-(\mu+t(\delta V\varphi_0|\varphi_0))|\le(\delta V\varphi_0|\varphi_0)|t|^2/(a(h)-2|t|)$

où μ est la valeur propre de P_0 introduite dans l'hypothèse (H.3) et φ_0 est un vecteur propre normalisé associé.

Preuve: Soit $t\in D(0,a(h))$. On a défini

(3.2) $P_{t,0}=P_0+t\delta V$

Soit $D_t=\{z\in\mathbb{C};|t|<\mathrm{dist}(z,\mu)<2a(h)-|t|\}$. Pour $z\in D_t$, $(z-P_0)^{-1}$ existe et:

(3.3) $\|(z-P_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}\le 1/\mathrm{dist}(z,\partial D_0)<1/|t|$.

Donc:

(3.4) $(z-P_{t,0})^{-1}=(z-P_0)^{-1}(1-t\delta V(z-P_0)^{-1})^{-1}$,

existe pour $z\in D_t$ et on a:

(3.5) $\|(z-P_{t,0})^{-1}\|\le 1/\mathrm{dist}(z,\partial D_t)$.

En particulier le spectre de $P_{t,0}$ dans $D(\mu,2a(h)-|t|)$ est contenu dans $\overline{D(\mu,|t|)}$.

Soit $\mathcal{C}=\{z\in\mathbb{C};\ |z-\mu|=a(h)\}$. Pour $z\in\mathcal{C}$, on a

(3.6) $\|(z-P_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}\le 1/a(h)$.

Soit $\Pi_{t,0}$ le projecteur spectral associé au spectre de $P_{t,0}$ dans $D(\mu,2a(h)-|t|)$:

(3.7) $\Pi_{t,0}=1/(2i\pi)\int_{\mathcal{C}}(z-P_{t,0})^{-1}\,dz$

Cette famille de projecteurs est continue en t et, $\Pi_{0,0}$ est de rang 1 d'où $\Pi_{t,0}$ est de rang 1 pour $|t|<a(h)$. On en déduit que le spectre de $P_{t,0}$ dans $\{z\in\mathbb{C};\mathrm{dist}(z,\mu)<2a(h)-|t|\}$ est réduit à une seule valeur propre simple. Notons μ_t cette valeur propre. En tenant compte de la remarque suivant (3.5), on obtient:

(3.8) $|\mu_t-\mu|\leq|t|$.

Comme μ_t est simple et que $P_{t,0}$ est analytique de type A au sens de Kato, le théorème de perturbation de Kato nous dit que μ_t est analytique pour t dans $D(0,a(h))$. (3.5) donne pour $z\in\mathcal{C}$:

(3.10) $\|(z-P_{t,0})^{-1}\|\leq1/(a(h)-|t|)$.

Utilisant que $(z-P_{0,t})^{-1}-(z-P_{0,0})^{-1}=(z-P_{0,t})^{-1}t\delta V(z-P_{0,0})^{-1}$, on obtient

(3.11) $\Pi_{t,0}\varphi_0-\varphi_0=t/(2i\pi)\int_{\mathcal{C}}(z-P_{t,0})^{-1}(z-\mu)^{-1}\delta V\varphi_0 dz$.

Notons:

(3.12) $\gamma_t=\Pi_{t,0}\varphi_0-\varphi_0$.

Alors, par (3.10)

(3.13) $\|\gamma_t\|\leq\|\delta V\varphi_0\|\,|t|/(a(h)-|t|)$.

De plus, pour t réel, on a:

(3.14) $\|\Pi_{t,0}\varphi_0\|^2=(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)=1+(\gamma_t|\varphi_0)$

(3.15) $(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\Pi_{t,0}\varphi_0)=(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$

donc, pour t réel,

(3.16) $\mu_t=(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\Pi_{t,0}\varphi_0)/\|\Pi_{t,0}\varphi_0\|^2$

$$=(1+(\gamma_t|\varphi_0))^{-1}(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0).$$

En utilisant (3.7) et (3.12), on voit que $(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$ et $(\gamma_t|\varphi_0)$ se prolongent analytiquement de $]-a(h),a(h)[$ au disque $D(0,a(h))$ par les mêmes expressions. Donc, comme μ_t est analytique en t dans $D(0,a(h))$, μ_t vérifie (3.16) pour t dans $D(0,a(h)/2)$.

Explicitons $(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$:

(3.17) $$(P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)=(P_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)+(P_{t,0}\gamma_t|\varphi_0)$$
$$=\mu+t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)+\mu(\gamma_t|\varphi_0)+t(\gamma_t|\delta V\varphi_0)$$
$$=\mu(1+(\gamma_t|\varphi_0))+t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)+t(\gamma_t|\delta V\varphi_0)$$
$$=(1+(\gamma_t|\varphi_0))(\mu+t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)) +$$
$$t((\gamma_t|\delta V\varphi_0)-(\delta V\varphi_0|\varphi_0)(\gamma_t|\varphi_0)).$$

Donc:

(3.18) $$\mu_t-\mu-t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)=t(1+(\gamma_t|\varphi_0))^{-1}[(\gamma_t|\delta V\varphi_0-(\delta V\varphi_0|\varphi_0)\varphi_0)],$$

c'est-à-dire,

(3.19) $$\mu_t-\mu-t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)=t(1+(\gamma_t|\varphi_0))^{-1}[(\gamma_t|[1-\Pi_{0,0}]\delta V\varphi_0)].$$

En utilisant (3.13):

(3.20)
$$|\mu_t-\mu-t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)|\leq\|\delta V\varphi_0\|^2|t|^2/(a(h)-(1+\|\delta V\varphi_0\|)|t|)$$

donc, par l'hypothèse (H.4):

(3.21) $$|\mu_t-\mu-t(\delta V\varphi_0|\varphi_0)|\leq(\delta V\varphi_0|\varphi_0)|t|^2/(a(h)-2|t|)$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Nous allons maintenant étudier l'action de $P_{t,0}$ sur des espaces L^2 à poids définis dans la partie §2. On a

Proposition 3.2: Soit φ_ε une fonction positive, lipschitzienne vérifiant $|\nabla\varphi_\varepsilon|\leq(V-\varepsilon^2)_+^{1/2}$ presque partout. Alors pour $|\mathrm{Re}(z)|<\varepsilon^2/32$ et $\mathrm{dist}(z,\sigma(P_{t,0}))>a(h)\cdot\delta$ avec $\delta\in]0,1[$, il existe $C>0$ et $h_\varepsilon>0$ tels que, pour $h\in]0,h_\varepsilon[$, pour $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour $t\in D(0,a(h))$, (3.22) $\|u\|_{\varphi_\varepsilon,h}+h\|\nabla u\|_{\varphi_\varepsilon,h}\leq C/(\varepsilon^3 a(h)\cdot\delta)\|(P_{t,0}-z)u\|_{\varphi_\varepsilon,h}$,

et,

(3.23) $\|u\|_{\varphi_\varepsilon,h}+h\|\nabla u\|_{\varphi_\varepsilon,h}\leq C/(\varepsilon^3 a(h)\cdot\delta)\|(P_t-z)u\|_{\varphi_\varepsilon,h}$.

Preuve: Pour démontrer (3.22), on constate que si φ_ε vérifie les hypothèses de la Proposition 3.2, alors il existe h_ε telle que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$, pour $t\in D(0,a(h))$, on a

(3.24) $|\nabla\varphi_\varepsilon|<(V+\mathrm{Re}(t)\delta V-(\varepsilon/2)^2)_+^{1/2}$.

Notons $Q=P+\Sigma_{\alpha\in L}\theta_\alpha=P_t+\Sigma_{\alpha\in L}\tilde{\theta}_\alpha$. Donc $P_{t,0}=Q-\tilde{\theta}_0$. Comme le potentiel $V+t\delta V$ est un potentiel régulier au sens de Carlsson, on peut alors appliquer le Théorème 3.1 de Carlsson à $P_{t,0}$ et φ_ε ce qui donne (3.22). En fait, on n'applique pas exactement le Théorème 3.1 car t est un paramètre complexe c'est-à-dire que $P_{t,0}$ n'est plus auto-adjoint, mais une version modifiée obtenue sans difficultés supplémentaires à partir de l'identité d'Agmon écrite pour $P_{\mathrm{Re}(t),0}$. En considèrant (1.9), on voit que les $(P_{t,\alpha})_{\alpha\neq 0}$ vérifient les hypothèses du Théorème 3.1 de Carlsson. On obtient alors (3.23) en constatant que, pour h assez petit, le Théorème 4.2 de [Ca] et sa démonstration s'appliquent à P_t uniformément pour $t\in D(0,a(h))$.

Prouvons maintenant qu'il existe a>0 indépendant de h pour h assez petit tel que

(3.25) $a\leq(\delta V\varphi_0|\varphi_0)\leq 1$.

Par l'hypothèse (H.4), il existe $\eta>0$ et $a>0$ tels que: $\delta V>2a$ sur $U_{0,\eta}$ donc:

(3.26) $2a\int_{U_{0,\eta}}|\varphi_0|^2\leq(\delta V\varphi_0|\varphi_0)\leq 1$

et:

(3.27) $\int_{U_{0,\eta}}(\varphi_0)^2=1-\int_{\mathbb{R}^n\setminus U_{0,\eta}}(e^{-2d_{\eta/2}(x,U_0)/h})(e^{d_{\eta/2}(x,U_0)/h}\varphi_0)^2dx$

or, par la formule (5.1) de Carlsson [Ca], on sait qu'il existe $C>0$ et $h_\eta>0$ tels que, pour $h\in]0,h_\eta[$, $e^{d_{\eta/2}(x,U_0)/h}\varphi_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|e^{d_{\eta/2}(x,U_0)/h}\varphi_0\|_{L^2}\leq C/\eta$ donc, comme $d_{\eta/2}(\mathbb{R}^n\setminus U_{0,\eta},U_0)>0$,

(3.28) $\int_{\mathbb{R}^n\setminus U_{0,\eta}}(e^{-2d_{\eta/2}(x,U_0)/h})(e^{d_{\eta/2}(x,U_0)/h}\varphi_0)^2dx\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$

On en conclut que pour h suffisament petit,

(3.29) $a\leq\rho=(\delta V\varphi_0|\varphi_0)\leq 1$.

§4. Construction d'une base orthonormée de F_t:

Dans cette section nous allons exhiber une base orthonormale de F_t, $(\psi_\alpha)_{\alpha\in L}$ (F_t étant défini dans la section 1) puis dans la prochaine section nous décrirons la matrice de P_t dans cette base (F_t étant stable par P_t). On a:

Proposition 4.1 : Sous les hypothèses (H.1)-(H.4). Pour $\eta\in]0,1/2[$ et $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que pour $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et pour $t\in]-\eta a(h),\eta a(h)[$, $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ est une base de F_t.

Preuve: Soit $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$. On sait, d'après Carlsson [Ca], qu'il existe $h_\varepsilon>0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$, $(\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ est une base de $F(=F_0)$ et de plus, si $\mathcal{V}$ est la matrice de Gram de cette famille de vecteurs alors:

(4.1) $\mathcal{V}=I+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$.

Notons $\mathcal{V}_t$ la matrice de Gram de $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$. Nous allons montrer qu'elle est inversible ce qui nous dira que les $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_u\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_u)_{u\in L}$ sont linéairement indépendants.

A l'instar de la partie §2, on définit pour α et β dans L, si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, $d^{\delta V}_\varepsilon(\alpha,\beta)=d_\varepsilon(\text{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(\text{supp}(\delta V),U_\beta)$, et $d^{\delta V}_\varepsilon(0,0)=2S_{\delta V,\varepsilon}$ où $S_{\delta V,\varepsilon}=d_\varepsilon(\text{supp}(\delta V),\text{supp}(\Omega))$ où, par définition, $\Omega=\Sigma_{\alpha\in L\setminus\{0\}}\theta_\alpha$. Et on définit alors $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta V}_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$ en utilisant la Définition 2.1. Alors on a:

Lemme 4.2: Pour $\eta\in]0,1/2[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que pour $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et uniformément pour $t\in D(0,\eta a(h))$,

(4.2) $\partial_t(\mathcal{V}_t)=\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta V}_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$.

Preuve: Pour la démonstration de ce Lemme, on va fixer $\eta\in]0,1/2[$. Les coefficients de $\mathcal{V}_t$ sont:

(4.3) $v_{t,\alpha,\beta}=(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|\,\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\beta\|)^{-1}(\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\beta)$

$=[(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\beta|\varphi_\beta)]^{-1/2}(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)$

D'aprés la Proposition 1.1, il existe un $c>0$ tel que, pour h assez petit, si $m(h)=e^{-c/h}$,

(4.4) $\omega(\mathbb{T})=\sigma(P)\cap[\mu-2a(h)+m(h),\mu+2a(h)-m(h)]\subset[\mu-m(h),\mu+m(h)]$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle défini précédemment. Alors, pour $z\in\mathcal{C}$,

(4.5) $(z-P)^{-1}$ existe et $\|(z-P)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq 1/(a(h)-m(h))$.

Pour $z\in\mathbb{C}$, on a,

(4.6) $(z-P_t)=(1-t\delta V(z-P)^{-1})(z-P)$.

Donc, il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$, $(z-P_t)^{-1}$ existe pour $|t|<\eta a(h)$ et:

(4.7) $\|(z-P_t)^{-1}\|\leq(a(h)-m(h)-|t|)^{-1}$.

Alors,

(4.8) $\Pi_{F_t}=1/(2i\pi)\int_{\mathcal{C}}(z-P_t)^{-1}dz$,

Nous allons maintenant estimer les $\partial_t((\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta))$ pour $t\in D(0,\eta a(h))$ et h suffisamment petit. On a:

(4.9) $\partial_t((\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta))=(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)$.

En utilisant alors la Proposition 3.2, on obtient un lemme de préparation qui nous donne l'action de $\partial_t(\Pi_{F_t})$ sur les espaces à poids définis dans la partie 2.

Lemme 4.3: Soient φ_ε et ψ_ε deux fonctions positives et lipschitziennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant:

(4.10) $|\nabla\varphi_\varepsilon|\leq(V-\varepsilon^2)_+^{1/2}$ et $|\nabla\psi_\varepsilon|\leq(V-\varepsilon^2)_+^{1/2}$,

Alors, il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$, pour $z\in\mathcal{C}$, on a uniformément pour t dans $D(0,\eta a(h))$:

(i) $z\notin\sigma(P_t)\cup\sigma(P_{t,0})$,

(ii) $\partial_t((z-P_t)^{-1})$ et $\partial_t((z-P_{t,0})^{-1})$ appartiennent à $\mathcal{L}(L^2_{\varphi_\varepsilon,h},L^2_{\psi_\varepsilon,h})$ et de normes majorées par:

$C[\varepsilon^3 a(h)]^{-2}e^{\sup_{\mathrm{supp}\langle\delta V\rangle}(\psi_\varepsilon(\cdot)-\varphi_\varepsilon(\cdot))/h}$,

où la constante C ne dépend ni de t, ni de h.

Preuve: On a,

(4.11) $\partial_t((z-P_t)^{-1})=(z-P_t)^{-1}\delta V(z-P_t)^{-1}$,

(4.12) $\partial_t((z-P_{t,0})^{-1})=(z-P_{t,0})^{-1}\delta V(z-P_{t,0})^{-1}$.

Pour h suffisamment petit, par le Proposition 3.2, il existe $C>0$ tel que, pour tout $t\in D(0,\eta a(h))$, pour $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour $z\in\mathcal{C}$, on a,

(4.13) $\|(z-P_t)^{-1}u\|_{\varphi_\varepsilon,h}\leq C/(\varepsilon^3 a(h))\|u\|_{\varphi_\varepsilon,h}$,

et,

(4.14) $\|(z-P_{t,0})^{-1}u\|_{\varphi_\varepsilon,h}\leq C/(\varepsilon^3 a(h))\|u\|_{\varphi_\varepsilon,h}$.

De plus,

(4.15) $\|\delta V u\|_{\psi_\varepsilon,h}=\|e^{(-\varphi_\varepsilon+\psi_\varepsilon)/h}\delta V e^{\varphi_\varepsilon/h}u\|$

$$\leq e^{\sup_{\mathrm{supp}\langle\delta V\rangle}(\psi_\varepsilon-\varphi_\varepsilon)/h}\|u\|_{\varphi_\varepsilon,h}.$$

Donc, $\partial_t((z-P_t)^{-1})$ et $\partial_t((z-P_{t,0})^{-1})$ se prolongent de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à des opérateurs de $L^2_{\varphi_\varepsilon,h}$ dans $L^2_{\psi_\varepsilon,h}$ de normes respectives majorées par $Ce^{\sup_{\mathrm{supp}\langle\delta V\rangle}(\psi_\varepsilon-\varphi_\varepsilon)/h}/(\varepsilon^3 a(h))^2$ (ceci pour h suffisamment petit dépendant de ε et de η et C ne dépendant ni de t, ni de h).

□

On sait que,

(4.16) $\partial_t(\Pi_{F_t})=1/(2i\pi)\int_{\mathcal{C}}(\partial_t(z-P_t)^{-1})dz$,

(4.17) $\partial_t(\Pi_{t,0})=1/(2i\pi)\int_{\mathcal{C}}(\partial_t(z-P_{t,0})^{-1})dz$.

Du Lemme 4.3, pour φ_ε et ψ_ε vérifiant les hypothèses de ce lemme, on déduit immédiatement qu'il existe $C>0$ (C ne dépend ni de h, ni de t) tel que pour h assez petit (dépendant de ε et de η) et $t \in D(0,\eta a(h))$:

(4.18) $\partial_t(\Pi_{F_t})$ et $\partial_t(\Pi_{t,0})$ appartiennent à $\mathcal{L}(L^2_{\varphi_\varepsilon,h}, L^2_{\psi_\varepsilon,h})$ de normes majorées par:

$C[\varepsilon^6 a(h)]^{-1} e^{\sup_{supp(\delta V)}(\psi_\varepsilon(\cdot)-\varphi_\varepsilon(\cdot))/h}$.

On a alors:

Lemme 4.4: Il existe $h_{\varepsilon,\eta}>0$ et $C>0$ (ne dépendant ni de t, ni de h) tels que pour $h \in]0,h_{\varepsilon,\eta}[$, pour $t \in D(0,\eta a(h))$ et pour $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$:

(4.19) $|(\Pi_F \partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F \varphi_\alpha | \varphi_\beta)| \leq$

$$C\varepsilon^{-14} a(h)^{-1} e^{-(d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\beta))/h}.$$

Preuve: En appliquant le Lemme 4.3 et (4.18) à $\varphi_\varepsilon = d_\varepsilon(.,U_\alpha)$ et $\psi_\varepsilon = d_\varepsilon(.,supp(\delta V))$, on obtient:

(4.20) $\partial_t(\Pi_{F_t})$ et $\partial_t(\Pi_{t,0})$ appartiennent à

$\mathcal{L}(L^2_{d_\varepsilon(.,U_\alpha),h}, L^2_{d_\varepsilon(.,supp(\delta V)),h})$ de normes majorées par:

$C[\varepsilon^6 a(h)]^{-1} e^{-d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\alpha)/h}$.

Si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$: d'après la formule (5.1) de [Ca], $\Pi_F \varphi_\alpha \in L^2_{d_\varepsilon(.,U_\alpha),h}$ et $\|\varphi_\alpha\|_{d_\varepsilon(x,U_\alpha),h} \leq C/\varepsilon$ pour tout $\alpha \in L$. En utilisant (4.20), on obtient l'estimée annoncée:

(4.21) $|(\Pi_F \partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F \varphi_\alpha | \varphi_\beta)| \leq$

$$C\varepsilon^{-14} a(h)^{-1} e^{-(d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\beta))/h}.$$

□

Il nous reste à étudier $(\Pi_F \partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F \varphi_0 | \varphi_0)$. On a:

Lemme 4.5: Il existe $h_{\varepsilon,\eta}>0$ et $C>0$ (ne dépendant ni de h, ni de t) tels que pour $h \in]0,h_{\varepsilon,\eta}[$, pour $t \in D(0,\eta a(h))$:

(4.22)

$$|(\Pi_F \partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F \varphi_0 | \varphi_0) - (\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0 | \varphi_0)| \leq C(\varepsilon^{17/2} a(h))^{-2} e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}.$$

Preuve: On a:

(4.23) $(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_0|\varphi_0)-(\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)$

$$=(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})(\Pi_F-\Pi_{0,0})\varphi_0|\varphi_0)+(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)+$$
$$((\Pi_F-\Pi_{0,0})\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0).$$

On a

(4.24) $\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0}=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}}(z-P_t)^{-1}\Omega(z-P_{t,0})^{-1}dz,$

et en dérivant par rapport à t

(4.25) $\partial_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0})=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}}\partial_t((z-P_t)^{-1})\Omega(z-P_{t,0})^{-1}dz+$

$$(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}}(z-P_t)^{-1}\Omega\partial_t((z-P_{t,0})^{-1})dz$$

En utilisant la Proposition 3.2 et le fait que Ω opère continument de $L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V))}$ dans $L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\Omega))}$ de norme majorée par $Ce^{-\inf_{supp(\Omega)}d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V))/h}$, pour h assez petit, on a, uniformément pour $t\in D(0,\eta a(h))$,

(4.26) $\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0}$ opère continuement de $L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V))}$ dans

$L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\Omega))}$ de norme majorée par

$C\varepsilon^{-6}a(h)^{-1}e^{-d_\varepsilon(supp(\Omega),supp(\delta V))/h}$.

De plus, par le Lemme 4.3 et (4.25), pour h assez petit, on obtient, uniformément pour $t\in D(0,\eta a(h))$,

(4.27) $\partial_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0})$ opère continuement de

$L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V))}$ dans $L^2_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\Omega))}$ de norme majorée par

$C\varepsilon^{-9}a(h)^{-2}e^{-d_\varepsilon(supp(\Omega),supp(\delta V))/h}$.

D'après la formule (5.1) de [Ca] et comme $U_0\subset supp(\delta V)$ par l'hypothèse (H.4),

(4.28) $\|\varphi_0\|_{d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V)),h}\leq\|\varphi_0\|_{d_\varepsilon(\cdot,U_0),h}\leq C/\varepsilon.$

En utilisant le Lemme 4.3 et ses conséquences appliqués à $\varphi_\varepsilon=\psi_\varepsilon=d_\varepsilon(\cdot,supp(\delta V))$ et (4.26)-(4.28), on obtient:

(4.29) $|(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})(\Pi_F-\Pi_0)\varphi_0|\varphi_0)|\leq C(\varepsilon^{17/2}a(h))^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}$,

(4.30) $|(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)|\leq C(\varepsilon^7a(h))^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}$,

(4.31) $|((\Pi_F-\Pi_0)\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)|\leq C(\varepsilon^7a(h))^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}$,

d'où, par (4.23):

(4.32) $|(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_0|\varphi_0)-(\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)|\leq$

$$C(\varepsilon^{17/2}a(h))^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}.$$

□

Pour achever la démonstration du Lemme 4.2, il suffit de minorer les dénominateurs intervenant dans l'expression (4.3). Grâce au Lemme 4.4, en intégrant en t, on a, pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$:

(4.33) $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)=(\Pi_F\varphi_\alpha|\Pi_F\varphi_\beta)+\tilde{O}(\exp(-d_{\mathcal{E}}^{V}(\alpha,\beta)/h))$,

donc d'aprés (4.1), il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$, on a, pour tout $t\in D(0,\eta a(h))$ et tout $\alpha\neq0$,

(4.34) $|(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)|>1/2$

Et par le Lemme 4.5,

(4.35) $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0)=(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)+\tilde{O}(\exp(-d_{\mathcal{E}}^{V}(0,0)/h))$,

ainsi en utilisant les calculs de la partie §3

(4.36) $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0)=1+(\gamma_t|\varphi_0)+\tilde{O}(\exp(-d_{\mathcal{E}}^{V}(0,0)/h))$,

avec $\|\gamma_t\|\leq|t|/(a(h)-|t|)<\eta/(1-\eta)$. Mais souvenons-nous que $\eta<1/2$, donc d'après (4.36), il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$, on a, pour tout $t\in D(0,\eta a(h))$

(4.37) $|(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0)|>(1-2\eta)/(2(1-\eta))>0$

De plus, les formules (4.1), (4.33) et le Lemme 4.4 nous disent que pour $\eta<1/2$ et pour tout $\gamma>0$, il existe $h_{\gamma,\eta}>0$ et $C>0$ (ne dépendant ni de t, ni de h) tels que pour $h\in]0,h_{\gamma,\eta}[$, on a, pour tout $t\in D(0,\eta a(h))$ et pour tout

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$,

(4.38) $|(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)|\leq$

$$Ce^{-(1-\gamma)(d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(U_\alpha,U_\beta))/h},$$

d'où, par l'inégalité triangulaire,

(4.39) $|(\Pi_F\partial_t(\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)|\leq$

$$Ce^{-(1-\gamma)(d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\beta))/h}.$$

Donc, en utilisant la formule de Leibniz appliquée à (4.3), on obtient que pour $\eta<1/2$ et pour tout $\gamma>0$, il existe $h_{\gamma,\eta}>0$ et $C>0$ (ne dépendant que de η) tels que pour $h\in]0,h_{\gamma,\eta}[$, on a, pour tout $t\in D(0,\eta a(h))$:

(4.40) $|\partial_t(v_{t,\alpha,\beta})|\leq\exp(-(1-\gamma)d_\varepsilon^{\delta V}(\alpha,\beta)/h)$.

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.2.

□

D'après (4.8), Π_{F_t} est analytique en t pour t dans $D(0,\eta a(h))$ (au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$). Par (4.34) et (4.37), pour h suffisament petit, $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)$ ne s'annule pas pour t dans $D(0,\eta a(h))$; on en déduit immédiatement que les coefficients de $\mathcal{V}_t$ sont analytiques pour $|t|<\eta a(h)$ (tout ceci pour h suffisamment petit).

Fin de la preuve de la Proposition 4.1:

D'après le Lemme 4.2, pour $\eta\in]0,1/2[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que pour $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et uniformément pour $t\in D(0,\eta a(h))$,

(4.41)

$$\mathcal{V}_t=I+\tilde{O}(\exp(-d_\varepsilon^1(\alpha,\beta)/h))+\tilde{O}(\exp(-d_\varepsilon^{\delta V}(\alpha,\beta)/h),$$

donc, pour h suffisament petit, $\mathcal{V}_t$ est inversible c'est-à-dire que $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ est libre.

Pour achever la démonstration de la Proposition 4.1, on va montrer maintenant le:

Lemme 4.6: Pour tout $\eta\in]0,1/2[$, il existe $h_\eta>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\eta[$ et tout $t\in]-\eta a(h),\eta a(h)[$, $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ engendre F_t.

Preuve: En effet, soit $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Pi_{F_t}\varphi$ soit orthogonal à l'espace vectoriel fermé engendré par $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ noté $\mathrm{Vect}((\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L})$; or on sait, d'après Carlsson [Ca], que $(\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ est une base de F, donc il existe $(a_\alpha)_{\alpha\in L}\in l^2(L)$ tels que:

(4.42) $\Pi_F\Pi_{F_t}\varphi=\Sigma_{\alpha\in L}a_\alpha\Pi_F\varphi_\alpha$,

donc $\Pi_{F_t}\Pi_F\Pi_{F_t}\varphi\in\mathrm{Vect}((\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L})$ et

(4.43) $\|\Pi_{F_t}\varphi-\Pi_{F_t}\Pi_F\Pi_{F_t}\varphi\|\leq\|\Pi_{F_t}(\Pi_{F_t}-\Pi_F)\|\,\|\Pi_{F_t}\varphi\|$

Alors, comme $\|\Pi_{F_t}\|=1$, si $\|\Pi_{F_t}-\Pi_F\|<1$, on obtient par (4.43) et l'hypothèse que $\Pi_{F_t}\varphi$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}((\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L})$, que $\|\Pi_{F_t}\varphi\|=0$. Par conséquent, si $\|\Pi_{F_t}-\Pi_F\|<1$, l'orthogonal de $\mathrm{Vect}((\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L})$ dans F_t est réduit à $\{0\}$ c'est-à-dire $F_t=\mathrm{Vect}((\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L})$.

Voyons pour quel t on a $\|\Pi_{F_t}-\Pi_F\|<1$. Par (4.10),

(4.44) $\Pi_{F_t}-\Pi_F=t(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}}(z-P_t)^{-1}\delta V(z-P)^{-1}\,dz$,

donc la définition de $\mathcal{C}$, (4.5) et (4.7) nous donnent

(4.45) $\|\Pi_{F_t}-\Pi_F\|\leq|t|a(h)/[(a(h)-m(h)-|t|)\cdot(a(h)-m(h)]$

Donc on cherche t tel que

(4.46) $|t|a(h)/[(a(h)-m(h)-|t|)\cdot(a(h)-m(h))]<1$,

c'est-à-dire,

(4.47) $|t|<[(1-m(h)/a(h))^2/(1-m(h)/2a(h))]\cdot a(h)/2$.

Comme $m(h)/a(h)\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$, on déduit de (4.47) que pour tout

$\eta\in]0,1/2[$, il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$ et pour $t\in D(0,\eta a(h))$, on a

(4.48) $\|\Pi_{F_t}-\Pi_F\|<1$,

ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.1.

La base $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)_{\alpha\in L}$ n'est pas orthonormée mais $(\|\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha\|^{-1}\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha)\mathcal{V}_t{}^{-1/2}$ est orthonormée. Dans la suite, cette base de F_t sera notée $\mathcal{B}$. Remarquons tout de suite que pour h assez petit, le spectre de $\mathcal{V}_t$ est contenu dans $D(1,a(h))$ et on a:

(4.49) $(\mathcal{V}_t)^{-1/2}=(2\pi i)^{-1}\int_{(\partial D(1,1/2))}z^{-1/2}(z-\mathcal{V}_t)^{-1}dz$,

ce qui donne en dérivant par rapport à t,

(4.50) $\partial_t(\mathcal{V}_t)^{-1/2}=(2\pi i)^{-1}\int_{(\partial D(1,1/2))}z^{-1/2}(z-\mathcal{V}_t)^{-1}\partial_t\mathcal{V}_t(z-\mathcal{V}_t)^{-1}dz$.

D'après les définitions de $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$ et de $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^{\mathcal{S}V}(\alpha,\beta)/h))$ données dans la partie 2, et par l'appendice B du travail de Carlsson [Ca], on a:

(4.51) $$\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^{\mathcal{S}V}(\alpha,\beta)/h))\cdot\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_\varepsilon(\alpha,\beta)/h)) = \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^{\mathcal{S}V}(\alpha,\beta)/h)),$$

où le premier membre désigne la composition de deux matrices qui sont respectivement $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^{\mathcal{S}V}(\alpha,\beta)/h))$ et $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_\varepsilon(\alpha,\beta)/h))$.

On en déduit l'estimée suivante pour la matrice $\partial_t(\mathcal{V}_t)^{-1/2}$,

(4.52) $\partial_t(\mathcal{V}_t)^{-1/2}=\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\varepsilon^{\mathcal{S}V}(\alpha,\beta)/h))$.

§5: Réduction de P_t à un opérateur sur $L^2(\mathbb{T})$:

Dans ce paragraphe, nous allons étudier $\mathcal{Q}_t$, la matrice de P_t dans $\mathcal{B}$. Cette matrice est donnée par:

(5.1) $\mathcal{Q}_t=(\mathcal{V}_t)^{-1/2}\mathcal{M}_t(\mathcal{V}_t)^{-1/2}$,

où $\mathcal{M}_t$ est la matrice de coefficients $m_{t,\alpha,\beta}$ avec:

(5.2)

$$m_{t,\alpha,\beta}=[(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha)(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\beta|\varphi_\beta)]^{-\frac{1}{2}}(\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\beta|\varphi_\alpha).$$

Nous allons montrer la

Proposition 5.1: Sous les hypothèses (H.1)-(H.4). Pour tout $\eta\in]0,1/2[$ et tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et tout $t\in D(0,\eta a(h))$, on a:

(5.3) $\partial_t(\mathcal{M}_t)=\partial_t[\mu_t]\mathcal{P}_0+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta}\underline{Y}_{\varepsilon}(\alpha,\beta)/h))$

où $\mathcal{P}_0$ désigne la matrice ayant pour coefficients $\delta_{\alpha,0}\delta_{\beta,0}$.

Preuve: Fixons $\eta\in]0,1/2[$ et $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$. Grâce aux Lemmes 4.4 et 4.5, on connait déjà des estimées pour $\partial_t((\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\alpha))$ pour $\alpha\in L$. Donc pour obtenir (5.3), il ne nous reste qu'à étudier $\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta))$. On obtient:

Lemme 5.2: Il existe $C>0$ (ne dépendant ni de h, ni de t) et $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tels que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$, pour tout $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ et tout $t\in D(0,\eta a(h))$, on a:

(5.4) $$|\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta))|\leq C[\varepsilon^{14}a(h)]^{-1}e^{-(d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\beta))/h}.$$

Preuve: On sait

(5.5) $P_t(z-P_t)^{-1}=-1+z(z-P_t)^{-1}$,

donc,

(5.6) $\partial_t(P_t\Pi_{F_t})=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}} z(z-P_t)^{-1}\delta V(z-P_t)^{-1}dz.$

Soit $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. En utilisant la Proposition 3.2 appliquée à $\varphi_\varepsilon=d_\varepsilon(.,U_\alpha)$ et $\psi_\varepsilon=d_\varepsilon(.,\mathrm{supp}(\delta V))$ et la formule (5.1) de Carlsson [Ca], on obtient:

$$(5.7)\quad |(\Pi_F\partial_t(P_t\Pi_{F_t})\Pi_F\varphi_\alpha|\varphi_\beta)|\leq C[\varepsilon^{14}a(h)]^{-1}e^{-(d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\alpha)+d_\varepsilon(\mathrm{supp}(\delta V),U_\beta))/h}.$$

Ceci démontre le Lemme 5.2.

On va maintenant estimer $\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))$:

Lemme 5.3: Il existe $C>0$ (ne dépendant ni de t, ni de h) et $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tels que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et tout $t\in D(0,\eta a(h))$, on a:

$$(5.8)\quad |\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-\partial_t(\mu_t(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0))|\leq C\varepsilon^{-17}a(h)^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}.$$

Preuve: On va appliquer les mêmes idées que dans la démonstration du Lemme 4.6. On a:

$$(5.9)\quad \partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-\partial_t(\mu_t(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0))=$$

$$\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-\partial_t((P_{t,0}\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0))=$$

$$(\Pi_F\partial_t(P_t\Pi_{F_t})(\Pi_F-\Pi_{0,0})\varphi_0|\varphi_0)+(\Pi_F\partial_t(P_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0}))\Pi_{0,0}\varphi_0|\varphi_0)+$$
$$(\Pi_F\partial_t((P_t-P_{t,0})\Pi_{t,0})\Pi_{0,0}\varphi_0|\varphi_0)+$$
$$((\Pi_F-\Pi_{0,0})\partial_t(P_{t,0}\Pi_{t,0})\Pi_{0,0}\varphi_0|\varphi_0)$$
$$=$$
$$(\Pi_F\partial_t(P_t\Pi_{F_t})(\Pi_F-\Pi_{0,0})\varphi_0|\varphi_0)+(\Pi_F\partial_t(P_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0}))\varphi_0|\varphi_0)+$$
$$(\Pi_F\Omega\partial_t(\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0)+((\Pi_F-\Pi_{0,0})\partial_t(P_{t,0}\Pi_{t,0})\varphi_0|\varphi_0).$$

Par (4.24) et (5.5), on obtient,

$$(5.10)\quad \partial_t(P_t(\Pi_{F_t}-\Pi_{t,0}))=$$
$$-\Omega\partial_t(\Pi_{t,0})+(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}} z\partial_t((z-P_t)^{-1})\Omega(z-P_{t,0})^{-1}dz+$$

$$(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}} z(z-P_t)^{-1}\Omega\partial_t((z-P_{t,0})^{-1})dz,$$

(5.11) $\partial_t(P_t\Pi_{F_t})=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}} z(z-P_t)^{-1}\delta V(z-P_t)^{-1}dz,$

et

(5.12) $\partial_t(P_{t,0}\Pi_{t,0})=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}} z(z-P_{t,0})^{-1}\delta V(z-P_{t,0})^{-1}dz.$

Par (5.10)-(5.12), (4.18), (4.26)-(4.28) et par le Lemme 4.3, en faisant exactement les mêmes estimées que dans la démonstration du Lemme 4.5, on obtient:

(5.14) $|\partial_t((\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-\partial_t(\mu_t(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)|\leq$

$$C\varepsilon^{-17}a(h)^{-2}e^{-2S_{\delta V,\varepsilon}/h}.$$

□

Fin de la preuve de la Proposition 5.1: Pour obtenir la Proposition 5.1, pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, il suffit maintenant d'utiliser la formule de Leibniz, les résultats (4.34), (4.37) et les arguments développés en (4.38), (4.39) pour obtenir pour $\partial_t(m_{t,\alpha,\beta})$ les estimées annoncées. Considèrons la différence $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$. Pour $t=0$, d'après [Ca], elle vaut $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta}\mathcal{Y}(0,0)/h))$. Le Lemme 4.5 nous donne la même estimée pour $\partial_t((\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0))$ en $t\neq0$ donc pour $t\neq0$, $(\Pi_F\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$ est $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta}\mathcal{Y}(0,0)/h))$. En utilisant le Lemme 5.3, on peut faire le même raisonnement pour $(\Pi_F P_t\Pi_{F_t}\Pi_F\varphi_0|\varphi_0))-\mu_t(\Pi_{t,0}\varphi_0|\varphi_0)$. Il est alors clair que

(5.15) $\partial_t m_{t,0,0}=\partial_t\mu_t+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\delta}\mathcal{Y}(0,0)/h)).$

Ceci termine la démonstration de la Proposition 5.1.

□

Fin de la preuve du Théorème 1.3:

D'aprés les définitions des ordres de grandeur matriciels

$\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))$, $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^2_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))$ et $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))$ données dans les parties 2 et 4, et par l'appendice B du travail de Carlsson [Ca], on a:

(5.16) $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))\cdot \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)) = \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))$

et

(5.17) $\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))\cdot \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^2_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))=$

$$\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)).$$

Sachant cela, en combinant la Proposition 5.1 et les formules (5.1) et (4.52), on obtient:

(5.18) $\partial_t(\mathcal{q}_t)= \partial_t((\mathcal{V}_t)^{-1/2})\mathcal{M}_t(\mathcal{V}_t)^{-1/2}+ (\mathcal{V}_t)^{-1/2}\partial_t(\mathcal{M}_t)(\mathcal{V}_t)^{-1/2}+$

$$(\mathcal{V}_t)^{-1/2}\mathcal{M}_t\partial_t((\mathcal{V}_t)^{-1/2}).$$

$$=(I+ \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)))\cdot$$

$$(\partial_t\mu_t\mathcal{P}_0+ \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)))\cdot$$

$$(I+ \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^1_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)))+$$

$$\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h))$$

$$=\partial_t\mu_t\mathcal{P}_0+ \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)).$$

Puis, en intégrant en t, on déduit que:

(5.19) $\mathcal{q}_t=\mathcal{M}+(\mu_t-\mu)\mathcal{P}_0+ \tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d^{\mathcal{S}V}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)/h)).$

En conjugant $\mathcal{q}_t$ par la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ de $l^2(L)$ dans $L^2(\mathbb{T})$ définie dans la partie 2, on voit, que pour tout $\eta\in]0,1/2[$ et $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, il existe $h_{\eta,\varepsilon}>0$ tel que, pour tout $h\in]0,h_{\eta,\varepsilon}[$ et pour tout $t\in]-\eta a(h),\eta a(h)[$, $P_{t|F_t}$ est unitairement équivalent à l'opérateur Ω_t de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ défini par $\Omega_t f=\omega\cdot f+(\mu_t-\mu)\Pi_0 f+K(t)f$ avec:

(i) $\omega=\omega(\theta)$ la valeur propre de Floquet définie par P.

(ii) $\Pi_0: L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ défini par: $\Pi_0 f=(Vol(\mathbb{T}))^{-1}\int_{\mathbb{T}} f d\theta$ où $d\theta$ est la mesure de Lebesgue.

(iii) $K(t)$ est un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ défini, pour $u \in L^2(\mathbb{T})$, par:

$(K(t)u)(\theta)=(Vol\mathbb{T})^{-1}\int_{\mathbb{T}} k(t,\theta,\theta')u(\theta')d\theta'$,

où

$k(t,h,\theta,\theta')=\Sigma_{(\alpha,\beta)\in L\times L}(k_{\alpha,\beta}(t,h)e^{i(\alpha\cdot\theta-\beta\cdot\theta')})$

avec $k_{\alpha,\beta}(t,h)$ vérifiant que pour tout $\gamma>0$, il existe $h_{\eta,\gamma,\varepsilon}>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_{\eta,\gamma,\varepsilon}[$, on a uniformément pour tout $|t|<\eta a(h)$:

$|\partial_t k_{\alpha,\beta}(t,h)|\le e^{-(1-\gamma)[d_\varepsilon(supp(\delta V,U_\alpha)+d_\varepsilon(supp(\delta V,U_\beta)]/h}$ si

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ et $|\partial_t k_{0,0}(t,h)|\le e^{-2(1-\gamma)S_{\delta V,\varepsilon}/h}$.

Des estimées ci-dessus, on déduit que $k(t,h,\theta,\theta')$ est analytique sur $D(0,\eta a(h))\times W\times W$, où $W=\{x+iy;\ x\in\mathbb{T}$ et $|y|<1/Ch\}$ a été défini dans la Proposition 1.1 (car $d_\varepsilon(supp(\delta V),U_\alpha)=(1+o(1))\cdot d_\varepsilon(U_0,U_\alpha)$ quand $|\alpha|\to+\infty$).

Démontrons maintenant que $b(t)=\mu_t-\mu$ réalise la bijection annoncée dans le point (iv) du Théorème 1.3. D'après le Lemme 3.1,

(5.20) $b(t)=(\varphi_0|\delta V\varphi_0)t(1+tq(t))$

avec, pour $t\in D(0,a(h)/2)$,

(5.21) $|q(t)|<1/(a(h)-2|t|)$.

Or $(1+tq(t))^{-1}$ existe si $|tq(t)|<1$ c'est-à-dire qu'il suffit:

(5.22) $|t|<a(h)-2|t|$ c'est-à-dire $|t|<a(h)/3$

De plus, si on note $\tilde{b}(t)=b(t)/(\varphi_0|\delta V\varphi_0)$ alors:

(5.23) $\partial_t(\tilde{b}(t))=1+2tq(t)+t^2\partial_t(q(t))$.

Donc

(5.24) $|\partial_t(\tilde{b}(t))|\ge1-|2tq(t)+t^2\partial_t(q(t))|$,

et d'après (5.21) et les estimées de Cauchy pour $|t|<x<a(h)/2$:

(5.25) $|\partial_t(q(t))| \leq 1/[(a(h)-2x)(x-|t|)]$.

En minimisant le membre de droite, on obtient:

(5.26) $|\partial_t(q(t))| \leq 8/(a(h)-2|t|)^2$

Donc, par (5.21) et (5.23),

(5.27) $|\partial_t(\tilde{b}(t))-1| \leq 2|t|(a(h)+2|t|)/(a(h)-2|t|)^2$.

Pour $t \in D(0,a(h)/8)$, on obtient

(5.28) $|\partial_t(\tilde{b}(t))-1| \leq 5/9$.

Donc, $\tilde{b}$ est bijective de $D(0,a(h)/8)$ dans $\tilde{b}(D(0,a(h)/8)=D_h$. En effet, si $t_0, t_1 \in D(0,a(h)/8)$, on a,

(5.29) $\tilde{b}(t_0)-\tilde{b}(t_1)=\int_0^1 \partial_t(\tilde{b}(s\cdot t_1+(1-s)\cdot t_0))ds\cdot(t_0-t_1)$

donc

(5.30) $|\tilde{b}(t_0)-\tilde{b}(t_1)| \geq 4/9|t_0-t_1|$.

L'encadrement de D_h nous est donné par les estimées de $\partial_t(\tilde{b}(t))$ et de $\partial_t(\tilde{b}^{-1}(t'))$ pour $t \in D(0,a(h)/8)$ et $t' \in D_h$,

(5.33) $4/9 \leq |\partial_t(\tilde{b}(t))| \leq 14/9$ et $9/14 \leq |\partial_t(\tilde{b}^{-1}(t'))| \leq 9/4$

ce qui achève la preuve du Théorème 1.3. En effet, pour h fixé, comme D_h est un voisinage ouvert de 0, il existe $\delta>0$ (dépendant de h) tel que $D(0,\delta a(h)) \subset D_h$. Or, par (5.33), $\tilde{b}^{-1}(D(0,ra(h))) \subset D(0,9r\cdot a(h)/4)$ donc en faisant croitre r de δ à 1/18, on obtient $\tilde{b}^{-1}(D(0,a(h)/18)) \subset D(0,a(h)/8)$ c'est-à-dire $D(0,a(h)/18) \subset D_h$. On obtient l'autre membre de l'encadrement de D_h de la même manière.

§6. Démonstration de la Proposition 1.5:

Rappelons que d'après la Proposition 1.1, il existe $h_0>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_0[$, le spectre de P dans $[\mu-9a(h)/8,i[$ est vide. Comme $\|\delta V\|_\infty\leq 1$, on déduit de cela et du Théorème 1.3, que, pour $t\in]0,a(h)/8[$, $\sigma(P_t)\cap[\mu-a(h),i[\subset\sigma(P_t)\cap[\mu-(9a(h)/8-|t|),i[$ est discret.

On va montrer que, en fait, le spectre de P_t dans $[\mu-a(h),i[$ est vide. L'idée de la démonstration est la suivante: on va montrer que, si $\lambda(t)$ est une valeur propre de P_t alors $\lambda(t)$ ne peut que croitre en t (ceci parce que $\delta V\geq 0$) et que sa dérivée est inférieure à 1 (car $\|\delta V\|_\infty\leq 1$). Donc, si on suppose que $\sigma(P_t)\cap[\mu-a(h),i[$ est non vide pour $t\in]0,a(h)/8[$ et si on appelle $\lambda(t)$ une valeur propre de P_t dans $[\mu-a(h),i[$, en suivant $\lambda(t)$ quand t décroit jusqu'à 0, on obtiendrait une valeur propre de P dans $[\mu-9a(h)/8,i[$ ce qui contredit ce qui a été dit ci-dessus pour P.

Remarquons d'abord que, comme

(6.1) $\sigma(P_t)\subset\sigma(P_{t'})+B(0,|t-t'|)$,

si $\lambda(t)$ désigne une valeur propre de P_t alors celle-ci est lipschitzienne en t. Donc $\lambda(t)$ est dérivable presque partout. On notera φ_t un vecteur propre normalisé associé à $\lambda(t)$ et π_t la projection spectrale sur l'espace propre associé à $\lambda(t)$.

Soit t_0 un point où $\lambda(t)$ est dérivable et $t>t_0$. Alors

(6.2) $\lambda(t)-\lambda(t_0)=(P_t\varphi_t|\varphi_t)-(P_{t_0}\varphi_{t_0}|\varphi_{t_0})$.

On peut choisir

(6.3) $\varphi_t=\|\pi_t\varphi_{t_0}\|^{-1}\pi_t\varphi_{t_0}$.

Comme les opérateurs considérés sont auto-adjoints, par un calcul similaire à celui fait en partie 3 pour $P_{t,0}$, on obtient,

(6.4) $\|\pi_t - \pi_{t_0}\| = O(t-t_0)$,

donc,

(6.5) $\|\pi_t \varphi_{t_0}\| = 1 - O((t-t_0)^2)$.

Ainsi, par (6.3),

(6.6) $\lambda(t) - \lambda(t_0) = (P_t \pi_t \varphi_{t_0} | \pi_t \varphi_{t_0}) - (P_{t_0} \varphi_{t_0} | \varphi_{t_0}) + O((t-t_0)^2)$.

Or,

(6.7) $(P_t \pi_t \varphi_{t_0} | \pi_t \varphi_{t_0}) = (P_t \varphi_{t_0} | \varphi_{t_0}) - (P_t (1-\pi_t) \varphi_{t_0} | (1-\pi_t) \varphi_{t_0})$

$\qquad = (P_t \varphi_{t_0} | \varphi_{t_0}) + O((t-t_0)^2)$.

On en déduit, par (6.6),

(6.8) $\lambda(t) - \lambda(t_0) = (t-t_0)(\delta V \varphi_{t_0} | \varphi_{t_0}) + O((t-t_0)^2)$.

Donc, comme $\|\varphi_{t_0}\| = 1$ et $0 \leq \delta V \leq 1$,

(6.9) $0 \leq \partial_t(\lambda)_{|t=t_0} \leq 1$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 1.5.

§7: Un opérateur auxiliaire:

Dans cette section, nous allons montrer que l'étude de $\sigma(P_t)\cap[\mu-a(h),\mu+a(h)]\setminus\omega(\mathbb{T})$ se réduit à l'étude du spectre d'un opérateur compact agissant sur $L^2(\mathbb{T})$.

On fixe $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$. Notons $J(h)=[\mu-a(h),\mu+a(h)]$ et rappelons que par définition $[i,s]=\omega(\mathbb{T})$. Par le théorème de Weyl: $\sigma_{ess}(P_t)\cap J(h)=\omega(\mathbb{T})$. Il ne nous reste qu'à étudier $\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]$ puisque $\sigma(P_t)\cap[\mu-a(h),i[$ est donné par la Proposition 1.5.

Remarque: Dans ce papier, on n'étudiera pas les valeurs propres de P_t plongées dans $\omega(\mathbb{T})=\sigma_{ess}(P_t)$.

Par le Théorème 1.3, on sait que pour tout $\eta\in]0,1/2[$, il existe $h_\eta>0$ tel que pour $h\in]0,h_\eta[$ et $t\in]-\eta a(h),\eta a(h)[$, on a $\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]=\sigma(\Omega_t)\cap]s,\mu+a(h)]$ où $\Omega_t:L^2(\mathbb{T})\longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ est défini par: $\Omega_t u=\omega\cdot u+b(t)\Pi_0 u+K(t)u$ avec Π_0, $K(t)$, $b(t)$ et ω définis dans l'énoncé du Théorème 1.3. On sait aussi que le spectre de Ω_t dans $]s,\mu+a(h)]$ est discret. Dans la suite, nous prendrons η fixé.

Alors dire que $\lambda\in\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]$ est équivalent à dire qu'il existe $u\in L^2(\mathbb{T})$ telle que:

(7.1) $\Omega_t u=\lambda u$,

c'est-à-dire

(7.2) $\omega\cdot u+b(t)\Pi_0 u+K(t)u=\lambda u$,

d'où

(7.3) $\tilde{u}=(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}(b(t)\Pi_0+K(t))(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}\tilde{u}$

où $\tilde{u}=(\lambda-\omega)^{\frac{1}{2}}u$.

Dire que $\lambda\in\sigma(P_t)\cap]s,\mu+a(h)]$ est donc équivalent à dire que 1 est valeur propre de

(7.4)

$$(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}(b(t)\Pi_0+K(t))(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}} = b(t)\cdot(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}(\Pi_0+H(t))(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

où $H(t)_{déf}=K(t)/b(t)$.

Soit K un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mathbb{T})$ à noyau $k(\theta,\theta')$ analytique sur $D\times D$ où D est un voisinage complexe de $\mathbb{T}$. Pour φ une fonction d'un ensemble $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$, on défini $\|\varphi\|_{\infty,E} = \sup_{x\in E}(|\varphi(x)|)$ et on notera $\|K\|_\infty=\|k\|_{\infty,\mathbb{T}^2}$. Nous allons étudier l'opérateur $\Gamma_{\lambda,K}$ de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même et défini, pour $u\in L^2(\mathbb{T})$, par,

(7.5) $\Gamma_{\lambda,K}u= (\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}(\Pi_0+K)(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}u$.

On définit pour $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\omega(\mathbb{T})$:

(7.6) $I(\lambda)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T})^{-1}\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-1}d\theta$.

Alors le spectre de $\Gamma_{\lambda,K}$ (pour $\lambda\in]s,+\infty[$) est décrit par la:

Proposition 7.1:

I) Pour $\lambda\in]s,+\infty[$, $\Gamma_{\lambda,0}$ est de rang 1 et $\sigma(\Gamma_{\lambda,0})=\{0,I(\lambda)\}$ où une fonction propre normalisée associée à $I(\lambda)$ est donnée par:

$\varphi_{\lambda,0}=I(\lambda)^{-\frac{1}{2}}(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}$

II) Soit K un opérateur auto-adjoint à noyau analytique sur $D\times D$ tel que $\|K\|_\infty<1/4$. Alors, pour $\lambda\in]s,+\infty[$, $\Gamma_{\lambda,K}$ est un opérateur auto-adjoint compact tel que:

(i) $\sigma(\Gamma_{\lambda,K})\subset[-I(\lambda)\|K\|_\infty, I(\lambda)\|K\|_\infty]\cup[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty), I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]$

(ii) $\sigma(\Gamma_{\lambda,K})\cap[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty), I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]=\{vp(\lambda,K)\}$ où $vp(\lambda,K)$ est une valeur propre simple vérifiant:

(1) $vp(\lambda,K)$ est analytique réelle en λ

(2) $|vp(\lambda,K)-I(\lambda)|\leq|I(\lambda)|\,\|K\|_\infty$

(3) $|\partial_\lambda(vp(\lambda,K)-I(\lambda))|\leq|\partial_\lambda(I(\lambda))|\,\|K\|_\infty$

(4) Il existe un vecteur propre normalisé associé à $vp(\lambda,K)$ de la forme $\varphi_{\lambda,K}=\varphi_{\lambda,0}(1+\psi_{\lambda,K})$ où $\psi_{\lambda,K}$ est analytique sur D et $\|\psi_{\lambda,K}\|_\infty \leq C\|K\|_\infty$ où C est indépendante de h.

Preuve: La partie I) de la Proposition 7.1 est immédiate car Π_0 est la projection orthogonale sur 1 (la fonction constante de $L^2(\mathbb{T})$) dans $L^2(\mathbb{T})$.

Notons: $\varphi_{\lambda,0}(\theta)=I(\lambda)^{-\frac{1}{2}}(\lambda-\omega(\theta))^{-\frac{1}{2}}$.

On va considèrer $\Gamma_{\lambda,K}$ comme une perturbation de $\Gamma_{\lambda,0}$:

(7.7) $\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0}=(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}K(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}$

donc:

(7.8) $\|\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}\leq \|(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}K(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}\|_{H.S}$

où $\|.\|_{H.S}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt.

d'où:

(7.9) $\|\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}\leq I(\lambda)\|k\|_{\infty,\mathbb{T}\times\mathbb{T}}$

Comme λ est supposé réel, tous les opérateurs considérés sont auto-adjoints et on a:

(7.10)

$$\sigma(\Gamma_{\lambda,K})\subset\sigma(\Gamma_{\lambda,0})+[-\|\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))},\|\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))}]$$

Donc le spectre de $\Gamma_{\lambda,K}$ est contenu dans:

$[-I(\lambda)\|K\|_\infty,I(\lambda)\|K\|_\infty]\cup[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty),I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]$

Par hypothèse $\|K\|_\infty<1/4$, donc:

(7.11) $[-I(\lambda)\|K\|_\infty,I(\lambda)\|K\|_\infty]\cap[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty),I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]=\emptyset$

Comme $\Gamma_{\lambda,K}$ est compact, son spectre est discret en dehors de 0. Intéressons nous maintenant au spectre de $\Gamma_{\lambda,K}$ dans $[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty),I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]$. Pour $\alpha\in[0,1]$, considèrons $\Gamma_{\lambda,\alpha K}$ opérant sur $L^2(\mathbb{T})$; c'est une famille analytique en α au sens de la norme des opérateurs. Soient $\Pi_{\lambda,\alpha K}$ leurs projecteurs spectraux associés à $[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty),I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]$. Cette famille de projecteurs est analytique en α au sens de la norme, donc de rang constant. En particulier:

(7.12) $rg(\Pi_{\lambda,K})=rg(\Pi_{\lambda,0})=rg(\Pi_0)=1.$

Ainsi, $\Gamma_{\lambda,K}$ n'a qu'une valeur propre dans $[I(\lambda)(1-\|K\|_\infty),I(\lambda)(1+\|K\|_\infty)]$ et cette valeur propre est simple. Nous la noterons $vp(\lambda,K)$. Notons que:

(7.13) $|vp(\lambda,K)-I(\lambda)|\leq I(\lambda)\cdot\|K\|_\infty.$

Comme $\Gamma_{\lambda,K}$ est analytique en λ (au sens de la norme des opérateurs) sur $]s,+\infty[$ et comme $vp(\lambda,K)$ est simple, $vp(\lambda,K)$ est analytique réelle pour $\lambda\in]s,+\infty[$.

Nous allons maintenant préciser un vecteur propre normalisé associé à $vp(\lambda,K)$ que l'on notera $\varphi_{\lambda,K}$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(\lambda)$ et de rayon $I(\lambda)/2$, comme on a supposé $\|K\|_\infty<1/4$, on sait que $(z-\Gamma_{\lambda,K})^{-1}$ existe pour $z\in\mathcal{C}$ et :

(7.14) $\|(z-\Gamma_{\lambda,K})^{-1}\|\leq 4/I(\lambda).$

De plus:

(7.15) $(z-\Gamma_{\lambda,K})\varphi_{\lambda,0}=(z-I(\lambda))\varphi_{\lambda,0}+(\Gamma_{\lambda,0}-\Gamma_{\lambda,K})\varphi_{\lambda,0}$

donc:

(7.16) $\Pi_{\lambda,K}\varphi_{\lambda,0}=\varphi_{\lambda,0}+v_{\lambda,K},$

avec

(7.17) $v_{\lambda,K}=(2i\pi)^{-1}\int_{\mathcal{C}}(z-\Gamma_{\lambda,K})^{-1}(z-I(\lambda))^{-1}(\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0})\varphi_{\lambda,0}dz.$

Ainsi

(7.18) $\|v_{\lambda,K}\|_{L^2(\mathbb{T})}<4\|K\|_\infty.$

En posant $\varphi_{\lambda,K}=\|\Pi_{\lambda,K}\varphi_{\lambda,0}\|^{-1}\Pi_{\lambda,K}\varphi_{\lambda,0}$, on a

(7.19) $\varphi_{\lambda,K}=\varphi_{\lambda,0}+u_{\lambda,K}$ où $\|u_{\lambda,K}\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq C\|K\|_\infty.$

Or:

(7.20) $\varphi_{\lambda,K}=(vp(\lambda,K))^{-1}(\Gamma_{\lambda,K}\varphi_{\lambda,K})=$

$=(vp(\lambda,K))^{-1}(I(\lambda)\varphi_{\lambda,0}+(\Gamma_{\lambda,K}-\Gamma_{\lambda,0})\varphi_{\lambda,0}+\Gamma_{\lambda,K}u_{\lambda,K})$

$=\varphi_{\lambda,0}(vp(\lambda,K)^{-1}I(\lambda)+vp(\lambda,K)^{-1}I(\lambda)(K(\varphi^2_{\lambda,0})+(\Pi_0+K)(\varphi_{\lambda,0}u_{\lambda,K}))).$

D'où

(7.21) $\varphi_{\lambda,K}=\varphi_{\lambda,0}(1+\psi_{\lambda,K})$

où:

(7.22) $\psi_{\lambda,K}=$

$vp(\lambda,K)^{-1}(I(\lambda)-vp(\lambda,K))+vp(\lambda,K)^{-1}I(\lambda)(K(\varphi^2_{\lambda,0})+(\Pi_0+K)(\varphi_{\lambda,0}u_{\lambda,K}))$

c'est-à-dire d'après les estimées précédentes sur K, $vp(\lambda,K)$ et $u_{\lambda,K}$, on sait que $\psi_{\lambda,K}$ est analytique réelle en $\lambda\in]s,+\infty[$, et uniformément pour $\lambda\in]s,+\infty[$:

(7.23) $\|\psi_{\lambda,K}\|_{\infty,\mathbb{T}}\leq C\|K\|_{\infty}.$

De plus, (7.22) nous dit que $\psi_{\lambda,K}(\theta)$ est analytique dans D. Pour $\lambda>s$, comme $\Gamma_{\lambda,K}$ est auto-adjoint, que $\varphi_{\lambda,K}$ est de norme 1 et que $vp(\lambda,K)=(\varphi_{\lambda,K}|\Gamma_{\lambda,K}\varphi_{\lambda,K})$, on a:

(7.24) $\partial_\lambda(vp(\lambda,K))=(\partial_\lambda(\Gamma_{\lambda,K})\varphi_{\lambda,K}|\varphi_{\lambda,K})$

$=-1/2\{([\lambda-\omega(\theta)]^{-3/2}[\Pi_0+K][\lambda-\omega(\theta)]^{-1/2}\varphi_{\lambda,K}|\varphi_{\lambda,K})+$

$([\lambda-\omega(\theta)]^{-1/2}[\Pi_0+K][\lambda-\omega(\theta)]^{-3/2}\varphi_{\lambda,K}|\varphi_{\lambda,K})\}$

$=-\mathrm{Re}([\Pi_0+K][\lambda-\omega(\theta)]^{-1/2}\varphi_{\lambda,K}|[\lambda-\omega(\theta)]^{-3/2}\varphi_{\lambda,K}).$

On calcule

(7.25) $\partial_\lambda(vp(\lambda,K))=$

$-\mathrm{Re}((\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-2}\cdot\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}(1+k(\theta,\theta'))I(\lambda)^{-1}(\lambda-\omega(\theta))^{-2}\cdot$

$(\lambda-\omega(\theta'))^{-1}(1+\psi_{\lambda,K}(\theta))(1+\psi_{\lambda,K}(\theta'))d\theta d\theta'),$

d'où:

(7.26) $\partial_\lambda(vp(\lambda,K))=-I(\lambda)^{-1}(\mathrm{Vol}(\mathbb{T})^{-2}\cdot$

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-2}(\lambda-\omega(\theta'))^{-1}\cdot(1+\mu(\theta,\theta',\lambda,K))d\theta d\theta'\right),$$

avec:

(7.27) $\mu(\theta,\theta',\lambda,K)$ analytique en (θ,θ') sur $D\times D$, et analytique en λ dans $]s,+\infty[$ et

(7.28) $\|\mu(K)\|_{\infty,\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times]s,+\infty]}\leq C\|K\|_\infty$

De (7.26), on déduit:

(7.29) $\partial_\lambda(vp(\lambda,K)-I(\lambda))=$

$$-I(\lambda)^{-1}\cdot(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-2}\cdot\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-2}(\lambda-\omega(\theta'))^{-1}\mathrm{Re}(\mu(\theta,\theta',\lambda,K))d\theta d\theta',$$

et:

(7.30) $|\partial_\lambda(vp(\lambda,K)-I(\lambda))|\leq C|\partial_\lambda(I(\lambda))|\,\|K\|_\infty.$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 7.1.

Remarque: Exactement la même étude peut être faite pour $\lambda\in]-\infty,i[$. Les résultats sont les mêmes à une modification de signe près.

Le comportement de $I(\lambda)$ en fonction de λ et de h va jouer un rôle primordial à cause des estimées (7.13) et (7.30) qui vont nous permettre d'obtenir des asymptotiques pour les valeurs propres de P_t. Nous allons donc l'étudier de manière précise. En reprenant les notations de l'hypothèse (H.5), on pose:

(7.31) $\tilde{\lambda}=(f(h))^{-1}\lambda$ et $\tilde{s}=\sup_{\theta\in\mathbb{T}}(\tilde{\omega}(\theta))$

et

(7.32) $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})f(h)I(\lambda)$ c'est-à-dire $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\int_{\mathbb{T}}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}\,d\theta.$

Alors on a le

Lemme 7.2: Pour $\tilde{\lambda}>\tilde{s}$, $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$ est analytique réelle décroissante.

Supposons que l'hypothèse (H.5) est vérifiée et rappelons que, par définition, $D_s(\omega)=|\text{dét}(\text{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s)))|^{-1/2}$. Alors, pour h suffisament petit et uniformément en h, on a, quand $\tilde{\lambda}\to\tilde{s}$, $\tilde{\lambda}>\tilde{s}$:

(i) si n=1: $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=2^{1/2}\cdot\pi D_s(\omega)(\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{-1/2}(1+o(1))$,

(ii) si n=2: $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=-2\pi D_s(\omega)\log(\tilde{\lambda}-\tilde{s})(1+o(1))$,

(iii) si n=3:

$$\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\tilde{J}(\tilde{s})-2^{5/2}\cdot\pi^2 D_s(\omega)(\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{1/2}+o((\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{1/2}),$$

(iv) si n=4:

$$\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\tilde{J}(\tilde{s})+4\pi^2 D_s(\omega)(\tilde{\lambda}-\tilde{s})\log(\tilde{\lambda}-\tilde{s})+o((\tilde{\lambda}-\tilde{s})\log(\tilde{\lambda}-\tilde{s})),$$

(v) si n≥5:

$$\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\tilde{J}(\tilde{s})+\partial_{\tilde{\lambda}}(\tilde{J})|_{\tilde{\lambda}=\tilde{s}}\cdot(\tilde{\lambda}-\tilde{s})+o((\tilde{\lambda}-\tilde{s})).$$

Et quand $\tilde{\lambda}-\tilde{s}\to+\infty$: $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\text{Vol}(\mathbb{T})\cdot(\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{-1}\cdot(1+o(1))$.

Preuve:

Le fait que $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$ est analytique réelle se voit immédiatement sur l'expression de $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$; de plus $\partial_{\lambda}(\tilde{J}(\tilde{\lambda}))=-\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\tilde{\omega}(\theta))^{-2}d\theta<0$ donc $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$ décroit.

Quand $\tilde{\lambda}-\tilde{s}\to+\infty$, on a:

(7.33)

$$\tilde{J}(\tilde{\lambda})=(\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{-1}(\int_{\mathbb{T}}(1+(\tilde{s}-\tilde{\omega}(\theta))/(\tilde{\lambda}-\tilde{s}))^{-1}d\theta)=\text{Vol}(\mathbb{T})\cdot(\tilde{\lambda}-\tilde{s})^{-1}(1+o(1)).$$

Le comportement de $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$ au voisinage de $\tilde{s}$ s'obtient en calculant l'intègrale au moyen d'un changement de coordonnées de Morse au voisinage du point θ_s où $\tilde{\omega}$ atteint son maximum.

Par l'hypothèse (H.5)(iii,**), on peut appliquer le lemme de Morse uniformément pour $h\in]0,h_0[$, c'est-à-dire qu'il existe U voisinage de θ_s dans $\mathbb{T}$, V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme D_h analytique réel de U dans V, vérifiant, pour tout θ dans U:

(7.34) $\tilde{\omega}(\theta)=\tilde{s}-|D_h(\theta)|^2$,

et tels qu'il existe $r_1,r_2>0$ (indépendant de h) tels que, pour $h\in]0,h_0[$, $D_h(B(\theta_s,r_1))\subset B(0,r_2)\subset V$ où $B(a,r)$ désigne le boule de centre a et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$. De plus D_h et $(D_h)^{-1}$ sont uniformément bornées dans C^∞. Notons $V_h=D_h^{-1}(B(0,r_2))$. Alors $B(\theta_s,r_1)\subset V_h\subset U$.

Soit $J(x)$, le déterminant jacobien de $D_h^{-1}(x)$. Alors, par (7.34):

(7.35) $J(0)=2^{n/2}|\det(\mathrm{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s)))|^{-1/2}=2^{n/2}D_s(\omega)$

L'hypothèse (H.5)(iii,*) nous permet de majorer $J(0)$ uniformément en h assez petit. On a:

(7.36) $\tilde{J}(\tilde{\lambda})=\int_{\mathbb{T}\setminus V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}d\theta+\int_{V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}d\theta)$

D'aprés l'hypothèse (H.5)(iii,***), il existe $\delta=\delta(r_1)>0$ tel que l'on ait:

(7.37) $\int_{\mathbb{T}\setminus V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}d\theta\leq \mathrm{Vol}(\mathbb{T})(\tilde{\lambda}-\tilde{s}+\delta^2)^{-1}$

De plus, on a:

(7.38) $\int_{V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}d\theta=\int_{V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{s}+|D_h(\theta)|^2)^{-1}d\theta$

$$=\int_{B(0,r_2)}((\tilde{\lambda}-\tilde{s})+|x|^2)^{-1}J(x)dx$$

$$=\int_0^{r_2}((\tilde{\lambda}-\tilde{s})+r^2)^{-1}r^{n-1}\int_{S^{n-1}}J(r\sigma)d\sigma dr,$$

où S^{n-1} est la sphère de dimension n-1.

Or, comme ω est analytique, J l'est aussi. On peut donc développer $\int_{S^{n-1}}J(r\sigma)d\sigma$ en une série entière de la variable r,

(7.39) $\int_{S^{n-1}}J(r\sigma)d\sigma=\Sigma_{p\in\mathbb{N}}a_pr^p$,

avec $a_0=J(0)\cdot\mathrm{Vol}(S^{n-1})$.

D'où

(7.40) $\int_{V_h}(\tilde{\lambda}-\tilde{\omega}(\theta))^{-1}d\theta=\Sigma_{p\in\mathbb{N}}a_p\int_0^{r_2}((\tilde{\lambda}-\tilde{s})+r^2)^{-1}r^{n+p-1}dr.$

Il nous reste donc à étudier le comportement, quand $\tilde{\lambda}\longrightarrow\tilde{s}$, des intégrales

$\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}r^{n+p-1}dr$. Un petit calcul donne,

(7.41) $\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}dr=\pi/2\cdot(\tilde\lambda-\tilde s)^{-1/2}\cdot(1+o(1))$,

(7.42) $\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}r^p dr=(\tilde\lambda-\tilde s)^{-1/2}o(1)$,

si $p>0$, et

(7.43) $\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}rdr=-1/2\cdot\log(\tilde\lambda-\tilde s)\cdot(1+o(1))$,

(7.44) $\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}r^p dr=\log(\tilde\lambda-\tilde s)o(1)$,

si $p>1$.

Ce qui, par (7.35) et (7.36) nous donne (i) et (ii).

Pour $n\geq 3$, on remarque

(7.45) $\tilde J(\tilde\lambda)-\int_{\mathbb{T}}(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-1}d\theta=$

$\int_{\mathbb{T}\setminus V_h}((\tilde\lambda-\tilde\omega(\theta))^{-1}-(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-1})d\theta+\int_{V_h}((\tilde\lambda-\tilde\omega(\theta))^{-1}-(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-1})d\theta.$

Alors comme précédemment,

(7.46)

$|\int_{\mathbb{T}\setminus V_h}((\tilde\lambda-\tilde\omega(\theta))^{-1}-(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-1})d\theta|\leq|\tilde\lambda-\tilde s|\delta^{-2}\mathrm{Vol}(\mathbb{T})(\tilde\lambda-\tilde s+\delta^2)^{-1}.$

Et, en faisant le même changement de variable que ci-dessus,

(7.47)

$\int_{V_h}((\tilde\lambda-\tilde\omega(\theta))^{-1}-(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-1})d\theta=$

$$\Sigma_{p\in\mathbb{N}}a_p\int_0^\delta 2(((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}r^{n+p-1}-r^{n+p-3})dr=$$

$$-(\tilde\lambda-\tilde s)\Sigma_{p\in\mathbb{N}}a_p\int_0^\delta 2((\tilde\lambda-\tilde s)+r^2)^{-1}r^{n+p-3}dr).$$

Ce qui, par (7.35) et (7.41)-(7.44), nous donne (iii) et (iv).

Pour $n\geq 5$, il suffit de remarquer que $\partial_\lambda(\tilde J)_{|\lambda=\tilde s}=-\int_{\mathbb{T}}(\tilde s-\tilde\omega(\theta))^{-2}d\theta$ converge pour obtenir (v).

§8: Démonstration des Théorèmes 1.6, 1.7:

Si, pour $t \in D(0,a(h)/8)$, on note $r=b(t)$, alors on a,

(8.1) $\Omega_t=\omega+b(t)\Pi_0+K(t)=\omega+r(\Pi_0+H(r))=\Theta_r$,

avec $H(r)=K(b^{-1}(r))/r$.

Le Théorème 1.3 nous dit que

(8.2) $K(t)=\int_0^t(\partial_t(K(t))dt$,

avec $\partial_t(K(t))$ analytique dans $D(0,a(h)/8)$ et vérifiant, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et tout $t\in D(0,a(h)/8)$,

(8.3) $\|\partial_t(K(t))\|_\infty \leq e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$ et $K(0)=0$.

D'après l'étude faite dans la partie §5, on sait que, pour $r\in D_h$,

(8.4) $9/(14\rho)\leq|\partial_r b^{-1}(r)|\leq 9/(4\rho)$.

Alors, en utilisant les estimées de Cauchy et un développement en série entière pour $K(b^{-1}(r))$, on obtient que, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et $r\in D_h$,

(8.5) $\|\partial_r(H(r))\|_\infty \leq \rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$ et $\|H(0)\|\leq\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Le fait que l'on obtienne ce résultat pour tout r dans D_h et non pas dans un domaine plus petit, vient du fait que (8.3) est valable pour t dans $D(0,a(h)/4)$.

Remarque: On sait que $D(0,\rho a(h)/18)\subset D_h\subset D(0,7\rho a(h)/36)$ et que $[0,5\rho a(h)/48[\subset D_h\cap\mathbb{R}^+\subset[0,7\rho a(h)/48[$.

De plus, d'après (iii) et (iv) du Théorème 1.3, on sait que, pour $r\in D_h$, $H(r)$ est un opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ à noyau analytique sur $D_h\times W(h)\times W(h)$. Comme $b(\mathbb{R}\cap D(0,a(h)/8))=\mathbb{R}\cap D_h$, $H(r)$ est auto-adjoint quand r est réel. Donc, quand r est réel, on peut appliquer la Proposition 7.1 à $(\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}[\Pi_0+H(r)](\lambda-\omega)^{-\frac{1}{2}}$ noté $\Gamma_{\lambda,H(r)}$.

On démontre alors les théorèmes suivants:

Théorème 8.1: Supposons $n=1$ ou 2. Il existe $h_0>0$ tel que pour $h\in]0,h_0[$, il existe $\lambda(r)$ une fonction croissante analytique réelle sur $D_h\cap\mathbb{R}^+$ dans $]s,\mu+a(h)]$ qui est valeur propre simple de Θ_r et qui vérifie:

(1) si $r/f(h)\to 0^+$:

si $n=1$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_1(h,r)\cdot(r/f(h))^2$,

si $n=2$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=\exp(-(1+o(1))\cdot C_2(h,r)\cdot(f(h)/r))$,

(2) pour tout $C>0$, il existe $C'>0$ tel que pour $r\in]f(h)/C,Cf(h)[$, on a:

$$1/C'\leq\partial_r\lambda(r)\leq 2,$$

(3) si $r/f(h)\to+\infty$: $\lambda(r)=s+(1+o(1))\cdot r$,

avec $C_n(h,r)$ vérifiant que, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et pour tout $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$,

(i) $C_1(h,r)=(2^{1/2}\cdot\pi D_s(\omega)/\mathrm{Vol}\mathbb{T})^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta v}-\gamma)/h}))$,

(ii) $C_2(h,r)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}/(2\pi D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta v}-\gamma)/h}))$.

De plus, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et pour $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, $\lambda(r)$ est la seule valeur propre de Θ_r dans $]s+O(e^{-(S_{\delta v}-\gamma)/h})(\lambda(r)-s),\mu+a(h)]$.

Théorème 8.2: Supposons $n\geq 3$. Il existe $h_0>0$ tel que pour $h\in]0,h_0[$, il existe une constante $T_{\delta V}>0$ et $\lambda(r)$, une fonction croissante analytique réelle sur $D_h\cap]T_{\delta V},+\infty[$ dans $]s,\mu+a(h)]$ qui est valeur propre simple de Θ_r; elle vérifie:

(1) si $u=(r-T_{\delta V})/f(h)\to 0^+$:

si $n=3$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_3(h,r)\cdot u^2$, si $n=4$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=-(1+o(1))\cdot C_4(h,r)\cdot(u/\log(u))$,

si $n\geq 5$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_n(h,r)\cdot u$,

(2) pour tout $C>0$, il existe $C'>0$ tel que pour $r\in]f(h)/C,Cf(h)[$, on a:

$$1/C'\leq \partial_r\lambda(r)\leq 2,$$

(3) si $(r-T_{\delta V})/f(h)\to+\infty$: $\lambda(r)=s+(1+o(1))\cdot r$,

avec $T_{\delta V}$ et $C_n(h,r)$ vérifiant que, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et pour tout $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$,

(i) $T_{\delta V}=(I(s))^{-1}\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h}))$,

(ii) pour $n\geq 5$:

$C_n(h,r)=(-\partial_{\tilde{\lambda}}(\tilde{J})|_{\tilde{\lambda}=\tilde{s}})^{-1}\cdot \mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h}))$,

(où les notations $\tilde{J}$, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{s}$ sont définies dans la partie 7),

(**) $C_4(h,r)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(8\pi^2 D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h})$,

(***) $C_3(h,r)=(\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}(I(s)f(h))^2)^2/(2^5\pi^4 D_s(\omega)^2)\cdot(1+O(e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h})$.

Pour $r\in]0,T_{\delta V}[$, on a, $\sigma(\Theta_r)\cap]s,\mu+a(h)]=\emptyset$. Si $n\geq 5$, $\lambda(T_{\delta V})=s$ est une valeur propre de $\Theta_{T_{\delta V}}$.

De plus, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\gamma[$, il existe une constante positive $\tau_{\delta V}=_{\text{déf}}\rho e^{(S_{\delta V}-\gamma)/h}\cdot(I(s))^{-1}$, telle que pour $r\in]T_{\delta V},\tau_{\delta V}]$, $\lambda(r)$ est la seule valeur propre de Θ_r dans $]s,\mu+a(h)]$, et pour $r\in D_h\cap]\tau_{\delta V},+\infty[$, $\lambda(r)$ est la seule valeur propre de Θ_r dans $]s+O(e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h})(\lambda(r)-s),\mu+a(h)]$.

Preuve des Théorèmes 8.1 et 8.2: Dans la partie §7, nous avons vu que λ dans $]s,\mu+a(h)]$ est valeur propre de multiplicité p de Θ_r si et seulement si 1 est valeur propre de multiplicité p de $r\cdot\Gamma_{\lambda,H(r)}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe v, une valeur propre de multiplicité p de $\Gamma_{\lambda,H(r)}$ (défini par (7.5)) telle que $v\cdot r=1$.

D'après l'estimée (8.5), on sait que, pour h suffisament petit, pour tout $r\in D_h$,

(8.6) $\|H(r)\|\leq 1/4$.

Alors, H(r) vérifie les hypothèses de la Proposition 7.1 uniformément pour $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$. Donc on sait que le spectre de $\Gamma_{\lambda,H(r)}$ est contenu dans la réunion de deux intervalles disjoints

$[-I(\lambda)\|H(r)\|_\infty,I(\lambda)\|H(r)\|_\infty]\cup[I(\lambda)(1-\|H(r)\|_\infty),I(\lambda)(1+\|H(r)\|_\infty)]$, et que

(8.7) $\sigma(\Gamma_{\lambda,H(r)})\cap[I(\lambda)(1-\|H(r)\|_\infty),I(\lambda)(1+\|H(r)\|_\infty)]=\{vp(\lambda,H(r))\}$,

où $vp(\lambda,H(r))$ est une valeur propre simple.

Nous allons maintenant résoudre l'équation

(8.8) $r\cdot vp(\lambda,H(r))=1$,

et nous nous occuperons plus loin des valeurs propres de Θ_r créées par les valeurs propres de $\Gamma_{\lambda,H(r)}$ dans $[-I(\lambda)\|H(r)\|_\infty,I(\lambda)\|H(r)\|_\infty]$. On a

Lemme 8.3: Pour $\lambda\in]s,\mu+a(h)]$ et $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, on a

1) Pour $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$ fixé, $vp(\lambda,H(r))$ décroit en λ pour λ dans $]s,\mu+a(h)]$.

2) Pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que, pour $h\in]0,h_\gamma[$, $\lambda\in]s,\mu+a(h)]$ et $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, on a $|\partial_r(vp(\lambda,H(r)))|\leq|I(\lambda)|\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\delta)/h}$.

Preuve: Pour r dans D_h, $\Gamma_{\lambda,H(r)}$ est analytique en r au sens de la norme Hilbert-Schmidt et:

(8.9) $\partial_r(\Gamma_{\lambda,H(r)}(h))=(\lambda-\omega(h))^{-\frac{1}{2}}[\partial_r(H(r))](\lambda-\omega(h))^{-\frac{1}{2}}$

d'où:

(8.10) $\|\partial_r(\Gamma_{\lambda,H(r)}(h))\|_{H.S}\leq|I(\lambda)|\,\|\partial_r(H(r))\|_\infty$.

Donc, par (8.5), pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que, pour $h\in]0,h_\gamma[$, on a

(8.11) $\|\partial_r(\Gamma_{\lambda,H(r)}(h))\|_{H.S}\leq |I(\lambda)|\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

De plus, comme $vp(\lambda,H(r))$ est valeur propre simple et que $H(r)$ est analytique en r dans D_h et auto-adjoint quand r est réel, $vp(\lambda,H(r))$ est analytique réelle en r dans $D_h\cap\mathbb{R}$; si on note $\varphi_{\lambda,H(r)}$ un vecteur propre normalisé, alors $\varphi_{\lambda,H(r)}$ peut être choisi analytique en r dans $D_h\cap\mathbb{R}$ (pour cela, voir par exemple la démonstration de la Proposition 7.1). Comme

(8.12) $vp(\lambda,H(r))=(\varphi_{\lambda,H(r)}|\Gamma_{\lambda,H(r)}(h)\varphi_{\lambda,H(r)})$,

on a:

(8.13) $\partial_r(vp(\lambda,K(r)))=(\partial_r(\Gamma_{\lambda,H(r)}(h))\varphi_{\lambda,H(r)}|\varphi_{\lambda,H(r)})$.

D'où,

(8.14) $|\partial_r(vp(\lambda,H(r)))|<|I(\lambda)|\,\|\partial_r(H(r))\|_\infty\leq |I(\lambda)|\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\delta)/h}$.

En appliquant la Proposition 7.1 à $\Gamma_{\lambda,H(r)}$, on obtient,

(8.15) $|\partial_\lambda(vp(\lambda,H(r))-I(\lambda))|\leq|\partial_\lambda(I(\lambda))|\cdot\|H(r)\|_\infty$.

Comme $\partial_\lambda(I(\lambda))$ est négatif pour λ dans $]s,\mu+a(h)]$, d'après (8.5), pour h assez petit et $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, $\partial_\lambda(vp(\lambda,H(r)))$ est négatif c'est-à-dire que $vp(\lambda,H(r))$ décroit en λ pour λ dans $]s,\mu+a(h)]$.

Preuve du Théorème 8.1: Nous supposons donc $n=1$ ou 2. La Proposition 7.1 et le Lemme 7.2 nous disent que

(8.16) $\sup_{\lambda>s}vp(\lambda,H(r)))=+\infty$.

Donc par le Lemme 8.3, pour tout r fixé, $vp(\lambda,H(r))$ réalise une bijection décroissante en λ de $]s,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Alors, pour tout $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, il existe un unique $\lambda(r)$ dans $]s,+\infty[$ tel que

(8.17) $r\cdot vp(\lambda(r),H(r))=1$,

c'est-à-dire tel que $\lambda(r)$ est valeur propre simple de Θ_r. $\lambda(r)$ est analytique en r car, au voisinage de chaque r, elle nous est donnée par le théorème d'inversion local appliqué à l'équation (8.17) et que $vp(\lambda,H(r))$ est analytique en r et λ. De plus, en dérivant (8.17) par rapport à r, on obtient (8.18)

$$\partial_r(\lambda(r))=-\{vp(\lambda(r),H(r))+r\partial_r[vp(\cdot,H(r))](\lambda(r))\}/\{r\partial_\lambda[vp(\cdot,H(r))](\lambda(r))\}.$$

Or d'après la Proposition 7.1 appliquée à $\Gamma_{\lambda,H(r)}$,

(8.19) $vp(\lambda(r),H(r))=I(\lambda(r))(1+g(r))$

où, grâce à (8.5), g vérifie uniformément pour r dans $D_h\cap\mathbb{R}^+$ et pour h suffisamment petit (dépendant de γ),

(8.20) $|g(r)|<\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Donc, par (8.18), pour h assez petit

(8.21) $\partial_r(\lambda(r))>0$,

c'est-à-dire $\lambda(r)$ croit strictement en r.

Nous allons maintenant démontrer les estimées annoncées pour $\lambda(r)$. Par (8.19), en reprenant les notations de la partie §7,

(8.22) $r\cdot I(\lambda(r))(1+g(r))=r\cdot(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\cdot f(h)^{-1}\cdot \tilde{J}(\tilde{\lambda}(r))\cdot(1+g(r))=1$,

c'est-à-dire,

(8.23) $\tilde{\lambda}(r)=\tilde{J}^{-1}(\mathrm{Vol}\mathbb{T}\cdot f(h)/(r(1+g(r)))$.

Donc, par (8.22) et par les estimées de $\tilde{J}(\tilde{\lambda})$ données au Lemme 7.2, on a

(8.24) si $v=r/f(h)\longrightarrow 0^+$:

(i) si $n=1$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_1(h,r)\cdot(v)^2$,

(ii) si $n=2$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=\exp(-(1+o(1))\cdot C_2(h,r)\cdot v)$,

avec $C_n(h,r)$ vérifiant que, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et pour tout $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$,

(8.25) (i) $C_1(h,r)=(2^{1/2}\cdot\pi D_s(\omega)/\mathrm{Vol}\mathbb{T})^2\cdot(1+O(e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}))$,

(ii) $C_2(h,r)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}/(2\pi D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}))$.

Placons nous maintenant dans le cas où $v=r/f(h)\longrightarrow+\infty$. Par les encadrements donnés sur D_h, on a $|r|\le 7\rho a(h)/36$. On déduit que $h\to 0^+$.

On sait que

(8.26) $\tilde{\lambda}(r)=(\tilde{J}^{-1})((1+o(1))\cdot \mathrm{Vol}\mathbb{T}/v)$,

c'est-à-dire, en utilisant le Lemme 7.2,

(8.27) quand $v\to +\infty$, $\lambda(r)=s+(1+o(1))\cdot r$.

Par (8.18), (8.19), (8.14), (8.5), (8.17) et les points (II.ii.2-3) de la Proposition 7.1, on a

(8.28) $\partial_r(\lambda(r))=-(1+m(r))\cdot(I(\lambda(r))^2/\partial_\lambda I(\lambda(r)))$,

où m vérifie uniformément pour r dans $D_h\cap\mathbb{R}^+$ et pour h suffisamment petit (dépendant de γ),

(8.29) $|m(r)|<\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Comme $-\partial_\lambda I(\lambda)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T})^{-1}\cdot\int_{\mathbb{T}}(\lambda-\omega(\theta))^{-2}d\theta$, il existe $C'>1$ tel que pour $r\in D_h\cap[f(h)/C,+\infty[$,

(8.30) $0<1/C'\le|\partial_r(\lambda(r))|\le 2$.

Ceci achève l'étude de $\lambda(r)$ si n=1 ou 2.

Nous allons maintenant essayer de préciser les λ pour lesquels il peut exister v dans $[-I(\lambda)\|H(r)\|_\infty,I(\lambda)\|H(r)\|_\infty]$ tel que $v\cdot r=1$. Nous savons que $I(\lambda)$ réalise une bijection décroissante en λ de $]s,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Notons I^{-1} sa bijection réciproque.

Lemme 8.4: Pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\gamma[$, on a $I(\lambda)\|H(r)\|_\infty|r|<1$ si $\lambda\in]s+g_h(r),\mu+a(h)]$ où $g_h(r)$ est définie sur $D_h\cap\mathbb{R}^+$ par $g_h(r)=I^{-1}(e^{(S_\delta v-\gamma)/h}\rho/r)-s$.

Preuve du Lemme 8.3: D'après (8.1), pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$, on a

(8.31) $\|H(r)\|_\infty|r|\le|r|\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Donc une condition suffisante pour que $I(\lambda)\|H(r)\|_\infty|r|<1$ est que:

(8.32) $I(\lambda)<\rho e^{(S_\delta v-\gamma)/h}/|r|$.

Comme $I(\lambda)$ est bijective décroissante, le résultat est immédiat.

□

Du Lemme 8.4, on déduit immédiatement que, pour h suffisamment petit (dépendant de γ) et pour $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, $\lambda(r)$ est la seule valeur propre de Θ_r dans $]s+g_h(r),\mu+a(h)]$. Remarquons que, pour $C>1$ et pour $x>0$,

(8.33) $I(s+Cx)\geq I(s+x)/C$,

donc, si on pose $y=I(x+s)/C$ alors $x=I^{-1}(Cy)-s$ et par (8.33), on conclut que pour $C>1$ et $y>0$,

(8.34) $C(I^{-1}(Cy)-s)\leq I^{-1}(y)-s$.

Donc, par le Lemme 8.4 et par (8.22), pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\gamma[$, on a,

(8.35) $g_h(r)/(\lambda(r)-s)\leq\rho e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Ceci achève la démonstration de Théorème 8.1.

Preuve du Théorème 8.2: On suppose maintenant $n\geq 3$. Donc pour r fixé dans $D_h\cap\mathbb{R}^+$, $r\cdot vp(\lambda,H(r))$ réalise une bijection de $[s,+\infty[$ dans $]0,r\cdot vp(s,H(r))]$ car $r\cdot vp(\lambda,H(r))$ atteint son maximum sur $[s,+\infty[$ en s. Nous allons étudier ce maximum. On définit:

$vp(s,H(r))=\lim_{\lambda\searrow s}(vp(\lambda,H(r))$. On a

(8.36) $\partial_r(rvp(s,H(r)))=vp(s,H(r))+r\partial_r(vp(s,H(r)))$

d'où, par (8.14):

(8.37) $|\partial_r(r\cdot vp(s,H(r)))-vp(s,H(r))|<|I(s)|\,\|\partial_r(H(r))\|_\infty$.

Donc,par l'assertion (ii-2) de la Proposition 7.1, pour h suffisamment petit, $rvp(s,H(r))$ croit en r pour r dans $D_h\cap\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 quand r tend vers 0. Ainsi il existe $T_{\delta V}>0$ tel que $r\cdot vp(s,K(r))<1$ pour tout $r<T_{\delta V}$, et

$r\cdot vp(\lambda,H(r))>1$ si $r>T_{\delta V}$. C'est-à-dire, pour $r<T_{\delta V}$, il n'y a pas de $\lambda>s(h)$ tels que $r\cdot vp(\lambda,H(r))=1$ et, pour $r\geq T_{\delta V}$, il existe un unique $\lambda(r)$ dans $[s,+\infty[$ tel que

(8.38) $r\cdot vp(\lambda(r),H(r))=1.$

$\lambda(r)$ est alors valeur propre simple de Θ_r. Le fait que $\lambda(r)$ soit analytique en r provient à nouveau du fait que l'on inverse localement $rvp(\lambda,H(r))$ qui est une fonction analytique. De plus (8.18) et (8.21) restent toujours valables; on en déduit que $\lambda(r)$ croit strictement en r.

Définissons $T_0=1/I(s)$. Nous allons estimer $|T_{\delta V}-T_0|$. On sait:

(8.39) $T_{\delta V}vp(s,H(T_{\delta V}))=T_0 I(s)=1$

donc

(8.40) $|T_{\delta V}-T_0|/|T_0|=|vp(s,H(T_{\delta V}))-I(s)|/|vp(s,H(T_{\delta V}))|.$

En utilisant (8.5) et en intégrant (8.14) en r, on obtient, pour h assez petit (dépendant de γ),

(8.41) $|T_{\delta V}-T_0|\leq|T_0|\rho^{-1}e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h}.$

Nous allons maintenant démontrer les estimées annoncées pour $\lambda(r)$. Par la Proposition 7.1, on sait

(8.42) $\partial_\lambda(vp(\lambda,H(r)))=\partial_\lambda(I(\lambda))\cdot(1+g(\lambda,r)),$

où, grace à (8.5), g vérifie uniformément pour $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$, $\lambda\in[s,+\infty[$ et pour h suffisament petit (dépendant de γ),

(8.43) $|g(\lambda,r)|<\rho^{-1}e^{-(S_{\delta V}-\gamma)/h}.$

Ceci associé au Lemme 8.3, à (8.17) et à (8.18) nous dit alors que,

(8.44) $(1+g_1(r))\cdot\partial_\lambda(I(\lambda(r)))\cdot\partial_r(\lambda(r))=-r^{-2},$

où g_1 vérifie (8.20). Or on sait que $\lambda(r)$ est bijective et analytique réelle pour r dans $D_h\cap\mathbb{R}^+$. Donc pour $(r,r')\in(D_h\cap\mathbb{R}^+)^2$, en intégrant (8.44) entre r et r', on obtient

(8.45) $I(\lambda(r))-I(\lambda(r'))=(1+g_2(r,r'))\cdot((r'-r)/rr')$,

où g_2 vérifie uniformément pour $(r,r')\in(D_h\cap\mathbb{R}^+)^2$ et pour h suffisament petit (dépendant de γ),

(8.46) $|g_2(r,r')|<\rho^{-1}e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}$.

Alors, en posant $u=(r-T_{\delta V})/f(h)$, on obtient,

(8.47) $\tilde{J}(\tilde{\lambda}(r))-\tilde{J}(\tilde{\lambda}(r'))=(1+g_2(r,r'))\cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{T})(u'-u)/((u+T_{\delta V})(u'+T_{\delta V}))$.

Maintenant pour obtenir les estimées annoncées, il suffit de prendre $u'=0$ et on en déduit, par le Lemme 7.2,

(8.48) si $u=(r-T_{\delta V})/f(h)\longrightarrow 0^+$:

si $n=3$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_3(h,r)\cdot u^2$,

si $n=4$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=-(1+o(1))\cdot C_4(h,r)\cdot(u/\log(u))$,

si $n\geq 5$: $(\lambda(r)-s)/f(h)=(1+o(1))\cdot C_n(h,r)\cdot u$,

avec $C_n(h,r)$ vérifiant que, pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour $h\in]0,h_\gamma[$ et pour tout $r\in D_h\cap\mathbb{R}^+$,

(8.49) (*) pour $n\geq 5$:

$C_n(h,r)=(-\partial_{\tilde{\lambda}}(\tilde{J})|_{\tilde{\lambda}=\tilde{s}})^{-1}\cdot(\mathrm{Vol}\mathbb{T}(I(s)f(h))^2)\cdot(1+O(e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}))$,

(**) $C_4(h,r)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}(I(s)f(h))^2/(4\pi^2 D_s(\omega)))\cdot(1+O(e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}))$,

(***) $C_3(h,r)=(\mathrm{Vol}\mathbb{T}(I(s)f(h))^2)^2/(2^5\pi^4 D_s(\omega)^2)\cdot(1+O(e^{-(S_\delta v-\gamma)/h}))$.

Placons nous maintenant dans le cas où $u\longrightarrow+\infty$ alors $v=r/f(h)\longrightarrow+\infty$, donc en utilisant exactement le même raisonnement que dans le cas de la dimension 1 et 2, on obtient,

(8.50) quand $u\longrightarrow+\infty$, $\lambda(r)=s+(1+o(1))\cdot r$.

L'estimée (8.30) dans le cas $r\in D_h\cap]C^{-1}f(h),+\infty[$ s'obtient de la même manière que pour $n=1$ ou 2. Nous allons à nouveau préciser les λ pour lesquels il peut exister v dans $[-I(\lambda)\|H(r)\|_\infty, I(\lambda)\|H(r)\|_\infty]$ tel que $v\cdot r=1$.

Nous savons que $I(\lambda)$ réalise une bijection décroissante en λ de $[s,+\infty[$ dans $]0,I(s)]$. Notons I^{-1} sa bijection réciproque.

Lemme 8.5: Pour tout $\gamma>0$, il existe $h_\gamma>0$ tel que pour tout $h\in]0,h_\gamma[$, si $I(\lambda)\|H(r)\|_\infty|r|\geq 1$ alors $r\geq\tau_{\delta V}=_{déf}\rho e^{(S_\delta v-\gamma)/h}.(I(s))^{-1}$ et $\lambda\leq I^{-1}(e^{(S_\delta v-\gamma)/h}\rho/r)$.

Preuve: La démonstration de ce lemme est exactement celle du Lemme 8.4 mis à part le fait que l'image de $I(\lambda)$ est bornée donc si r est assez petit, l'équation (8.32) est toujours satisfaite.

□

Comme (8.34) reste valable dans ce cas, par le Lemme 8.5, on obtient (8.35) exactement comme dans le cas n=1 ou 2.

Pour achever de démontrer le Théorème 8.2, il suffit de remarquer que, si $n\geq 5$, alors $(s-\omega(\theta))^{-1}$ est dans $L^2(\mathbb{T})$ ce qui associé à la Proposition 7.1, nous dit 1 est valeur propre de $\Gamma_{s,H(T_{\delta V})}$; donc s est valeur propre de $\Theta_{T_{\delta V}}$.

□

Pour obtenir les Théorèmes 1.6 et 1.7, il suffit de faire le changement de variable $r=b(t)$. Alors comme $\lambda(t)=_{déf}\lambda(b(t))$ est une valeur propre simple de P_t, si φ_t est un vecteur propre unitaire associé à $\lambda(t)$, en dérivant la relation

(8.51) $(P_t\varphi_t|\varphi_t)=\lambda(t)$,

on obtient, pour tout $t\in D(0,a(h)/8)$,

(8.52) $\partial_t\lambda(t)\leq 1$.

Puis, en se servant de l'encadrement (5.33), on déduit aisément les Théorèmes 1.6 et 1.7 des Théorèmes 8.1 et 8.2.

Appendice:

Dans cet appendice, nous allons d'abord donner un exemple de potentiel périodique pour lequel les hypothèses (H.1)-(H.3) sont vérifiées. Puis en imposant des conditions de symétrie supplémentaires sur le réseau, nous verrons que (H.5) est également vérifiée.

Soit $(u_i)_{1\le i\le n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $L=\bigoplus_{1\le i\le n}\mathbb{Z}u_i$. Si $x=\Sigma_{1\le i\le n}a_iu_i$, on note $|x|=\Sigma_{1\le i\le n}|a_i|$. On note C_0 la cellule de base du réseau. Soit alors $V\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, une fonction positive, L-périodique telle que: $V(x)=0\Leftrightarrow x\in L$. Les puits de V notés U_i seront alors les points de L.

On suppose de plus que Hess(V)(0) est définie et positive, où Hess(V) désigne la matrice hessienne de V. Par périodicité, pour tout $\alpha\in L$, $|\nabla V(\alpha)|=0$ et Hess(V)(α) est définie et positive.

Pour ε suffisament petit, on définit les $U_{\alpha,\varepsilon}$ comme dans la partie 1. On prend θ_0 une fonction positive dans $C_0^\infty(U_{0,\varepsilon})$ telle que, pour $x\in U_{0,\varepsilon/2}$,

(a.1) $\theta_0(x)=\varepsilon^2/4$.

Alors, si on note θ_α les translatés de θ_0 par les points de L,

(a.2) $V+\Sigma_{\alpha\in L}\theta_\alpha>\varepsilon^2/4$.

En le définissant commme dans la partie 1, P_0 n'a qu'un seul puits {0} et celui-ci est un minimum non dégénéré du potentiel. On peut alors appliquer des résultats classiques (cf [HSj1], [S2]), à savoir que la première valeur propre de P_0 est simple et de plus, si on la note μ, on sait qu'il existe $r_0>\mu_0>0$ tels que:

(a.3) $\sigma(P_0)\cap[0,r_0h]=\{\mu\}$

où $\mu=\mu_0h+O(h^2)$.

On constate que (H.1)-(H.3) sont vérifiées.

Supposons de plus, que pour $(\alpha,\beta)\in L\times L$, $d(U_\alpha,U_\beta)=S_0$ implique $|\alpha-\beta|=1$ et qu'il existe G, un groupe fini d'isométries lineaires de $\mathbb{R}^n$, tel que:

(i) G agit transitivement sur $L_1=\{\alpha\in L;|\alpha|=1\}$ c'est-à-dire que pour tout $(\alpha,\beta)\in L_1\times L_1$, il existe $g\in G$ tel que $g(\alpha)=\beta$,

(ii) pour tout $g\in G$ et tout $x\in\mathbb{R}^n$, $V(g(x))=V(x)$.

Remarque: Le (ii) associé à la condition $[V(x)=0\Leftrightarrow x\in L]$ nous garantit que le réseau est invariant par G. De plus, chaque élément de G réalise une bijection de L dans L.

Pour $g\in G$, on note g_* l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même défini pour $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, par $g_*(u)=u\circ g^{-1}$. On a, pour ε suffisament petit, que pour tout $g\in G$, $g(U_{0,\varepsilon})=U_{0,\varepsilon}$.

On construit alors $\tilde\theta_0=|G|^{-1}\Sigma_{g\in G}g_*(\theta_0)$ (où $|G|$ est le cardinal de G); c'est une fonction positive dans $C_0^\infty(U_{0,\varepsilon})$ telle que, pour $x\in U_{0,\varepsilon/2}$,

(a.4) $\tilde\theta_0(x)=\varepsilon^2/4$.

On note $\tilde\theta_\alpha$ les translatés de $\tilde\theta_0$ pour $\alpha\in L$ et on définit l'opérateur $\tilde P_0=P+\Sigma_{\beta\neq 0}\tilde\theta_\beta$. $\tilde P_0$ n'a qu'un seul puits $\{0\}$ et celui-ci est un minimum non dégénéré du potentiel. Les opérateurs $\tilde P_\alpha$ vérifient alors les mêmes proprietés que les opérateurs P_α construits ci-dessus. De plus, on a, pour tout $g\in G$:

(a.5) $g_*\circ\tilde P_0\circ(g_*)^{-1}=\tilde P_0$ et $g_*\circ P\circ(g_*)^{-1}=P$.

On note alors φ_0, le vecteur propre réel positif normalisé associé à l'unique valeur propre de $\tilde P_0$ dans $[0,r_0h]$. Comme $\varphi_0>0$, pour tout $g\in G$, on a ,

(a.6) $g_*(\varphi_0)=\varphi_0$.

De plus pour $\alpha\in L$ et $g\in G$, si $\tau_\alpha u(x)=u(x-\alpha)$ pour $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

(a.7) $g_*\circ\tau_\alpha\circ(g_*)^{-1}=\tau_{g(\alpha)}$.

(On trouvera d'autres constructons de ce type dans [HSj2].)

Or comme G agit transitivement sur $\{\alpha\in L;|\alpha|=1\}$ pour $|\alpha|=|\beta|=1$, il existe $g\in G$ tel que $g(\alpha)=\beta$ donc

(a.8)

$$(\pi_F\varphi_0|\tau_\beta\pi_F\varphi_0)=(\pi_F\varphi_0|\tau_{g(\alpha)}\pi_F\varphi_0)=(\pi_F\varphi_0|g_*\circ\tau_\alpha\circ(g_*)^{-1}\pi_F\varphi_0)$$
$$=(\pi_F\varphi_0|\tau_\alpha\pi_F\varphi_0),$$

et,

(a.9) $$(\pi_F\varphi_0|\tau_\beta\pi_FP\varphi_0)=(\pi_F\varphi_0|g_*\circ\tau_\alpha\circ(g_*)^{-1}\pi_FP\varphi_0)$$
$$=(\pi_F\varphi_0|\tau_\alpha\pi_FP\varphi_0).$$

Les mêmes relations sont valables pour la matrice de Gram. Donc si m_α désignent les coefficients de Fourier de ω calculés dans la partie 2, on a, pour tout $|\alpha|=|\beta|=1$,

(a.10) $m_\alpha=m_\beta$.

Dans la partie §2, nous avons vu que, pour $\alpha\in L$,

(a.11) $m_\alpha=\delta_{\alpha,0}+w_{\alpha,0}+\tilde{\mathcal{O}}(\exp(-d_\xi^2(\alpha,0)/h))$,

avec,

(a.12) $w_{\alpha,0}=-1/2((\varphi_\alpha|(\Sigma_{\gamma\neq0}\theta_\gamma)\varphi_0)+((\Sigma_{\gamma\neq\alpha}\theta_\gamma)\varphi_\alpha|\varphi_0))$.

Ceci nous dit, qu'il existe $C>0$ telle que, pour $|\alpha|>1$,

(a.13) $|m_\alpha|\le Ce^{-(S_0+(|\alpha|+1)/C)/h}$.

Nous allons maintenant estimer m_α pour $|\alpha|=1$ en suivant la méthode de Helffer et Sjöstrand [HSj1]. Remarquons que, d'après la section 2 et (a.11), pour estimer m_α, il suffit d'estimer $w_{\alpha,0}$. Soit Γ l'hyperplan $\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|=|x-\alpha|\}$; notons $\Gamma^+=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|\ge|x-\alpha|\}$ et $\Gamma^-=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|\le|x-\alpha|\}$. De plus, on notera n la normale à Γ orientée vers 0.

Alors,

(a.14) $-(\varphi_\alpha|(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0)=-\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx$

$$=-\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx-\int_{\Gamma^-}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx.$$

D'après ce qui a été dit sur la localisation des $(\varphi_\gamma)_{\gamma\in L}$ dans §2, il existe $C>0$ telle que,

(a.15) $|\int_{\Gamma^-}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx|\leq Ce^{-(S_0+1/C)/h}$,

(a.16) $|\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha(\Sigma_{\gamma\neq\alpha}\theta_\gamma)\cdot\varphi_0 dx|\leq Ce^{-(S_0+1/C)/h}$,

De plus, comme φ_0 est vecteur propre associé à μ pour P_0,

(a.17) $-\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx=\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(P-\mu)\varphi_0 dx$

$$=-h^2\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot\Delta\varphi_0 dx+\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(V-\mu)\cdot\varphi_0 dx.$$

Donc, par la formule de Green,

(a.18) $-\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\varphi_0 dx=-h^2\int_\Gamma((\varphi_\alpha\cdot\nabla\varphi_0-\varphi_0\cdot\nabla\varphi_\alpha)\cdot n)d\sigma+$

$$-h^2\int_{\Gamma^+}\varphi_0\cdot\Delta\varphi_\alpha dx+\int_{\Gamma^+}\varphi_\alpha\cdot(V-\mu)\cdot\varphi_0 dx$$

$$=-h^2\int_\Gamma((\varphi_\alpha\cdot\nabla\varphi_0-\varphi_0\cdot\nabla\varphi_\alpha)\cdot n)d\sigma+h^2\int_{\Gamma^+}\varphi_0\cdot(\Sigma_{\gamma\neq\alpha}\theta_\gamma)\varphi_\alpha dx,$$

car φ_α est vecteur propre associé à μ pour P_α (ici, $d\sigma$ désigne la mesure de surface sur Γ.)

De même, par symétrie sur 0 et α,

(a.19) $-\int_{\Gamma^-}\varphi_\alpha(\Sigma_{\gamma\neq\alpha}\theta_\gamma)\cdot\varphi_0 dx=$

$$-h^2\int_\Gamma((-\varphi_\alpha\cdot\nabla\varphi_0+\varphi_0\cdot\nabla\varphi_\alpha)\cdot(-n))d\sigma+h^2\int_{\Gamma^-}\varphi_0(\Sigma_{\gamma\neq 0}\theta_\gamma)\cdot\varphi_\alpha dx.$$

Donc, par (a.11-12), (a.15-16), (a.18-19), il existe $C>0$ telle que

(a.20) $|m_\alpha+h^2\int_\Gamma((\varphi_\alpha\cdot\nabla\varphi_0-\varphi_0\cdot\nabla\varphi_\alpha)\cdot n)d\sigma|\leq Ce^{-(S_0+1/C)/h}$.

Puis le terme $h^2\int_\Gamma((\varphi_\alpha\cdot\nabla\varphi_0-\varphi_0\cdot\nabla\varphi_\alpha)\cdot n)d\sigma$ s'estime comme dans [H.Sj1] grace aux estimations B.K.W obtenues pour les fonctions propres φ_0 et φ_α, au voisinage des géodésiques minimales de la métrique d'Agmon. On obtient qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que, pour h assez petit (a.21) $h^{1/2}/C<|m_\alpha|\cdot e^{So/h}<Ch^{1-m/2}$.

D'après la partie 2, on sait,

(a.22) $\omega(\theta)=\Sigma_{\alpha\in L}m_\alpha e^{i\alpha\theta}$,

avec, d'après (2.20), $m_\alpha=m_{-\alpha}$ pour $\alpha\in L$.

Donc, on a,

(a.23) $\omega(\theta)=m_0+\Sigma_{\alpha\in L}m_\alpha\cos(\alpha\theta)$.

Sous cette forme, en utilisant (a.13), (a.21), on a

(a.20) $\omega(\theta)=m_0+2\cdot m_{u_1}(\Sigma_{1\leq i\leq n}\cos(u_i\theta)+\Sigma_{|\alpha|>1}b_\alpha\cos(\alpha\theta))$

où b_α sont tels qu'il existe C>0 tel que, pour h suffisament petit,

$|b_\alpha|<e^{-1/(Ch)}e^{-|\alpha|/(Ch)}$.

Sous cette forme, on vérifie aisément que, pour h suffisament petit, ω satisfait l'hypothèse (H.5).

Références:

[ADH] S. Alama, P. Deift, R. Hempel, Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H-\lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. Comm. Math. Phys., 121, 1989, 291-321.

[A] S. Agmon, Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equation, Princeton University Press, 1982, 29.

[B] F. Bentosela, Scattering from impurities in a crystal., Comm. Math. Phys. 46, 1976, 153-166.

[Bi] M.Sh. Birman, Perturbations of operators with periodic coefficients, Proceedings of the conference "Schrödinger operators: standard and non-standard", Dubna, 1988.

[C] J. Callaway, Energy Band Theory., Academic Press, New York/London, 1964.

[Ca] U. Carlsson, An infinite number of Wells in the semi-classical limit, Preprint de l'université de Lund, 1989 (à paraitre dans Asymptotic Analysis).

[DH] P. Deift, R. Hempel, On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H-\lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$. Comm. Math. Phys., 103, 1986, 461-490.

[GHKSV] F. Gesztesy, D. Gurarie, H. Holden, M. Klaus, L. Sadun, B. Simon, P. Vogl, Trapping and cascading of eigenvalues in the large coupling limit., Comm. Math. Phys. 118, 1988, 597-634.

[GS] F. Gesztesy, B. Simon, On a theorem of Deift and Hempel., Comm. Math. Phys. 116, 1988, 503-505.

[HSj1] B. Helffer, J. Sjöstrand, Multiple wells in the semi-classical limit 1, Comm. P.D.E 9(4) 1984, 337-408.

[HSj2] B. Helffer, J. Sjöstrand, Puits multiples en limite semi-classique 2. Interaction moléculaire. Perturbations , Annales I.H.P 42(2), 1985, 127-212.

[HSj3] B. Helffer, J. Sjöstrand, Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique I., Actes des Journées des E.D.P à St Jean de Monts, 1985.

[K] M. Klaus, Some applications of the Birman-Schwinger principle., Helv. Phys. Acta 55, 1982, 49-68.

[KS] M. Klaus, B.Simon, Coupling constant thresholds in non relativistic quantum mechanics., Ann. of Phys. 130, 1980, 251-281.

[LL] L. Landau, E. Lifschitz, Mécanique quantique, théorie non relativiste, Editions MIR, Moscou, 1966.

[O] A. Outassourt, Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, J. Funct. Anal. 72, 1987, 65-93.

[P] A. Persson, Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator, Math. Scand. 8, 1960, 143-153.

[S1] B. Simon, On the absorption of eigenvalues by continuous spectra in regular perturbation problems., J. Funct. Ana. 25, 1977, 338-344.

[S2] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Nondegenerate minima: Asymptotic expansion., Annales I.H.P 38(3), 1983, 295-307.

[S3] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues II. Tunneling., Ann. of Math. 120, 1984, 89-118.

[S4] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids., Ann. of Phys. 158(2), 1984,415-420.

[S5] B.Simon, The bound state of a weakly coupled Schrödinger operator in one or two dimensions., Ann. of Phys. 97, 1976, 279-288.

[Sj] J. Sjöstrand, Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions, C.I.M.E Lectures Eté 1989 (à paraitre aux L.N.M Springer).

[Sk] M.M. Skriganov, Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators., Proc. of the Steklov Inst. of Math., 2, 1987.