

THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

MICHÈLE LODAY-RICHAUD

Classification méromorphe locale des systèmes différentiels linéaires méromorphes : phénomène de Stokes et applications, 1991

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Michèle LODAY-RICHAUD

Sujet de la thèse :

**Classification méromorphe locale des systèmes différentiels
linéaires méromorphes :
Phénomène de Stokes et applications**

soutenue le 22 mai 1991 devant le Jury composé de :

MM. Bernard MALGRANGE, Président

Adrien DOUADY

Philippe FLAJOLET

Frédéric PHAM

Jean-Pierre RAMIS

*Mai, o belasso! au-mai t'aluque,
Au-mai, pecaire! m'emberluque!...
Veguère uno figuiero, un cop, dins moun camin,
Arrapado à la roco nuso
Contro la baumo de Vau-Cluso:
Maigro, pecaire! i lagramuso
Ié dounarié mai d'oumbro un clot de jaussemin!*

*Un cop pèr an vers si racino
Vèn flouqueja l'oundo vesino;
E l'aubret secarous, à l'aboundouso font
Que mounto à-n-éu pèr que s'abéure,
Tan que n'en vòu, se bouto à béure...*

Mistral, *Mirèio*, Cant II

Abstract

This thesis deals with effective computation of meromorphic invariants of linear meromorphic differential systems. The question is double : what to compute? How to do it?

In part I we build a natural isomorphism between the (non abelian) cohomological classifying set of Malgrange-Sibuya and the product of Stokes groups. The proof proceeds by selecting in each cohomology class a special cochain which we call fundamental and it gives an explicit algorithm for this selection. The invariants to be computed appear then as the components of this fundamental cochain in a basis, which we fix, for the structure of finite linear affine space induced by this construction on the classifying set.

In addition, we prove some others consequences of both this isomorphism theorem and the constructivity of its proof : an abstract theory of summation for formal solutions of linear differential systems which coincides with the multisummation of Martinet-Ramis and then too, with the accelero-summation of Ecalle; the level-by-level factorization of formal solutions (Ramis) and the Galois properties of the corresponding Stokes matrices (Ramis et Deligne), obtained here through almost only pure algebra; an explicit well-fitting correspondence between the cohomological classifying set of Malgrange-Sibuya and the savage π_1 of Ramis.

The second question, developped in part II, is algorithmic and numerical : the quantities to be computed being mainly transcendental we look forward approximate, yet informative, numerical values. After a brief description of the method by summation - a priori the most direct and natural method but still embarassed with serious problems of numerical stability (Thomann, Richard-Jung) - we detail our infinitesimal method which, though is does not always allow the calculation of all the invariants, except in dimension two, induces a very good numerical stability. The values appear as limits of linear recurrences. The stability seems to be related to good formal initial choices. We study extensively several examples in dimensions two and three.

C'est dans le cadre du séminaire "Equations différentielles et équations fonctionnelles" dirigé par J.-P. Ramis à Strasbourg que cette thèse a pris forme. Le dynamisme et l'atmosphère cordiale qui y règnent ont été déterminants dans l'intérêt que j'ai porté au sujet. Dans le foisonnement des questions ouvertes qui y étaient proposées, l'une d'elles, le calcul effectif des invariants analytiques a retenu mon attention : J.-P. Ramis suggérait que des arguments qui m'avaient auparavant permis d'établir des théorèmes d'indices, pourraient permettre de généraliser un calcul d'invariants fait par J. Martinet et lui-même dans un cas particulier. Je pensais alors m'engager dans un simple exercice de calcul. Mais j'ai été très vite confrontée à des questions plus théoriques concernant la vraie nature de ces invariants, et qui sont à l'origine des résultats présentés ici.

Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié des conseils de J.-P. Ramis et de la richesse de sa culture scientifique lors de fréquentes conversations.

De nombreux échanges avec les membres de l'équipe : J. Martinet, A. Duval, C. Mitschi, F. Fouché, F. Fauvet, J. Thomann, F. Richard-Jung ont également joué un rôle important. Jean Martinet nous communiquait son enthousiasme et son optimisme mathématiques. Il nous a beaucoup appris par des exposés lumineux. Son absence aujourd'hui est pour nous tous très douloureuse. Anne Duval a été une interlocutrice privilégiée tout au long des années passées ensemble à Strasbourg et encore aujourd'hui. Notre travail commun sur la détermination des solutions des équations différentielles du second ordre, calculables par quadratures a été concrétisé par François Fouché en un logiciel écrit sous SCRATCHPAD. Je suis aussi très redevable à Jean Thomann de l'aide qu'il m'a apportée dans le traitement numérique du dernier exemple de cette thèse : il n'a ménagé pour cela ni son temps ni ses efforts, et toujours avec une égale patience.

R. Gérard, en m'offrant une participation active à son séminaire durant plusieurs années, m'a permis d'élargir mes connaissances dans un domaine voisin, celui des systèmes de Pfaff.

A Orsay, j'ai été accueillie dans l'équipe de "Topologie et Systèmes Dynamiques". Outre les démarches administratives qu'il a bien voulu effectuer pour moi, A. Douady m'a fait bénéficier de sa compétence scientifique, de divers conseils concernant la rédaction de cette thèse et de plusieurs exposés dans le cadre de son séminaire.

Je remercie B. Malgrange et F. Pham pour les conversations que nous avons eues et pour leur participation au jury de cette thèse. Je remercie

de même P. Flajolet d'avoir accepté de me proposer un sujet de deuxième thèse et de m'en avoir patiemment expliqué le contexte.

Enfin que tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidée par leur collaboration ou leur amitié trouvent ici l'expression de ma gratitude : Je tiens à citer J. Frenkel qui a encouragé mes débuts et m'a orientée vers l'analyse complexe, N. Bopp, E. Khalili, J. Le Minor, M.-P. Muller, I. Muller, V. Avanisian, G. Barbançon, D. Bernard, C. Kassel, M. Kretz, P. Nobelis, R. Seroul et bien d'autres ; je devrais citer tous les collègues mathématiciens ou informaticiens de Strasbourg, ou presque. Parmi eux, Claude Godbillon fut à la fois un proche collaborateur et un ami apprécié.

C'est Bernadette Barbichon qui, avec l'aide du logiciel Sweet-TeX de Laurent Siebenmann, a assuré la frappe avec une compétence et un dévouement exceptionnels.

Sommaire

Introduction ...	6
------------------	---

Première partie : Classification cohomologique et applications

Chapitre I. Classifications méromorphes des connexions et des systèmes différentiels. ...	19
1. Catégorie $\mathcal{C}$ des connexions méromorphes. Relations entre connexions et systèmes différentiels ...	19
2. Généralités sur les classifications méromorphes des connexions et des systèmes ...	21
3. Classifications formelles des systèmes différentiels ...	24
3.1. Solution formelle fondamentale ...	25
3.2. Classifications formelles ...	27
3.3. Forme normale d’Hermite ...	28
3.4. Monodromie formelle $\widehat{M}$ de $[A]$...	30
4. Classifications “analytiques” des systèmes différentiels par interprétation cohomologique ...	32
4.1. Les étapes de la classification ...	32
4.2. Groupe des isotropies d’une forme normale d’Hermite ...	34
4.3. Isomorphisme de Malgrange-Sibuya ...	35
5. Classification méromorphe des connexions ...	37

Chapitre II. Faisceau $\Lambda(A_0)$ des sections d’isotropie plates de la forme normale d’Hermite. Groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$	39
1. Représentations de Λ : matrices de Stokes ...	39
1.1. Ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ associé à une direction $\tilde{\theta}$...	39
1.2. Unipotence ...	40
1.3. Changement de feuillet ...	41
1.4. Matrices de Stokes d’un système $[A]$...	43

2.	Filtration de Λ par les niveaux ...	43
3.	Sous-fibres fondamentales de Λ : les groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$	46
3.1.	Ordre $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$ associé à une direction $\tilde{\theta}$...	46
3.2.	Germes de Stokes ...	47
3.3.	Filtration des groupes de Stokes par les niveaux ...	48
Chapitre III.	Cohomologie du faisceau d'isotropie de $[A_0]$. ...	50
1.	Définitions et généralités en cohomologie non abélienne ...	50
1.1.	Cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$...	50
1.2.	Ensemble de cohomologie $H^1(X; \mathcal{F})$...	52
1.3.	Cas où $X = S^1$...	52
1.4.	Cas où $X = S^1$ et $\mathcal{F} = \Lambda(A_0)$...	55
2.	Cohomologie du faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$:	
	le cas sans ramification ...	55
2.1.	Les recouvrements fondamentaux ...	56
2.2.	Les inclusions fondamentales ...	59
2.3.	Les résultats ...	60
2.4.	Algorithme de réduction d'une 1-cochaîne quelconque à la 1-cochaîne fondamentale qui lui est cohomologue ...	63
3.	Effet d'un éclatement sur la cohomologie ...	64
4.	Cohomologie du faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$:	
	le cas avec ramification ...	68
Chapitre IV.	Applications théoriques. ...	71
1.	Structures algébriques sur $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$...	71
1.1.	Structure de variété affine ...	71
1.2.	Structure de variété linéaire affine ...	72
1.3.	Structure de groupe de Lie ...	73
2.	Sommes fondamentales des solutions d'Hermite ...	74
3.	Factorisation des solutions d'Hermite suivant les niveaux ...	77
4.	Propriétés galoisiennes ...	80
5.	Relation avec la classification par le π_1 sauvage ...	88

Deuxième partie : Calcul des invariants

Chapitre V. Préliminaires et méthode de calcul par sommation. ...	93
1. Calcul des invariants formels ...	93
2. Calcul des invariants analytiques : matrices de Stokes ou invariants de Birkhoff ...	94
3. Calcul des matrices de Stokes par (multi-)sommation ...	96
3.1. Formules de sommation ...	99
3.2. Calcul pratique des sommes de $\hat{F}$...	105
3.3. Calcul pratique des matrices de Stokes ...	106
 Chapitre VI. Méthode infinitésimale : cas des systèmes de dimension deux. ...	 108
1. Commentaires ...	108
2. Calcul des invariants de Birkhoff des systèmes d'ordre deux (article [L-R90]) ...	109
 Chapitre VII. Méthode infinitésimale : cas général. ...	 172
1. Réduction au cas séparé. Algorithme ...	172
2. Calcul des invariants dans le cas séparé ...	179
3. Cas de la dimension trois ...	186
3.1. Bilan détaillé de la méthode infinitésimale ...	186
3.2. Etude d'un exemple de dimension 3 et de niveau 1 ...	190
 Bibliographie ...	 203

Introduction

Dans cette thèse, nous présentons une étude locale des systèmes différentiels linéaires méromorphes complexes d'ordre un et de dimension n

$$[A] : \quad \frac{dX}{dx} = AX$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients méromorphes et où l'inconnue X est une matrice colonne de dimension n , au voisinage d'un point singulier irrégulier x_0 du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Le point de vue cohomologique de Malgrange-Sibuya permet de classifier les systèmes méromorphes à équivalence méromorphe près à partir d'un ensemble de cohomologie non abélienne qu'on appelle le "classifiant" cohomologique. Nous montrons, et la démonstration que nous donnons est constructive, comment on peut choisir dans chaque classe de cohomologie un 1-cocycle que nous appelons la chaîne fondamentale. Nous mettons ainsi en bijection naturelle le "classifiant" cohomologique avec un ensemble, le produit des groupes de Stokes, qui est à la fois un groupe de Lie unipotent et une variété linéaire affine. Nous en déduisons par des arguments algébriques simples quelques résultats établis ailleurs avec des arguments d'analyse beaucoup plus délicats : théorème de factorisation des solutions formelles en produit de facteurs k -sommables, propriétés galoisiennes des matrices de Stokes ([Ra p85], [RS89], [Ra85], [MR90], [De86], [Sib90]). Puis, par comparaison avec la théorie de la multisommabilité ([MR90], [Ec90]), nous en déduisons une correspondance entre la classification cohomologique de Malgrange-Sibuya et la classification par le π_1 sauvage de Ramis. Enfin nous présentons deux méthodes de calcul numérique de la chaîne fondamentale.

Nous plaçons toujours la singularité x_0 à l'origine $x_0 = 0$ de $\mathbb{C}$.

Introduction

Deux systèmes $[A]$ et $[B]$ sont dits méromorphiquement, analytiquement ou au sens de Birkhoff équivalents s'il existe une transformation méromorphe, analytique ou de Birkhoff de l'un en l'autre : on passe de $[A]$ à $[B]$ par un changement d'inconnue $X = F^{-1}Y$ où la transformation F (dite aussi transformation de jauge) est méromorphe, analytique ou de Birkhoff (i.e. analytique avec $F(0)$ égale à l'identité I). La matrice B du système $[B]$ est alors égale à

$${}^F A = \frac{dF}{dx} F^{-1} + F A F^{-1}$$

et inversement A est égale à

$${}^{F^{-1}} B = -F^{-1} \frac{dF}{dx} + F^{-1} B F.$$

On définit de même l'équivalence méromorphe formelle, formelle ou au sens de Birkhoff formelle à partir d'un changement d'inconnue $X = \hat{F}^{-1}Y$ méromorphe formel, formel ou de Birkhoff formel. Un tel changement est appelé *une transformation* (méromorphe formelle,...) du système $[A]$ dès lors que le système transformé $[\hat{F} A]$ est à coefficients méromorphes (soit convergents).

La classification méromorphe formelle (respectivement formelle ou de Birkhoff formelle) des systèmes méromorphes est bien connue : on la réalise en choisissant dans chaque classe formelle un système particulier qu'on appelle *une forme normale*. Nous choisirons ici une forme normale $[A_0]$ particulière appelée *une forme normale d'Hermite*. Celle-ci a pour propriété caractéristique d'admettre une solution fondamentale de la forme

$$X_0(x) = P(x)x^J U e^{Q(1/x)}$$

où

$Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ a pour coefficients des polynômes ramifiés de la variable $1/x$ (c'est-à-dire des polynômes d'une puissance fractionnaire de $1/x$) et sans termes constants,

U est une matrice constante universelle tenant compte des "symétries" associées aux ramifications contenues dans Q ,

J est une matrice de Jordan dite des exposants de monodromie formelle, normalisée en imposant aux valeurs propres λ la condition $0 \leq \text{Re} \lambda < 1$; la notation x^J signifie $e^{J \text{Log} x}$,

$P(x)$ est l'identité ou une matrice méromorphe suivant que l'on veut repérer la classe méromorphe formelle ou l'une ou l'autre des classes formelle ou de Birkhoff formelle.

Une telle solution X_0 n'est pas unique mais la matrice Q , appelée *partie irrégulière* de X_0 est, elle, déterminée de manière unique à l'ordre près de ses éléments diagonaux. Le point $x_0 = 0$ est un *point singulier irrégulier* si la partie irrégulière Q est non nulle. C'est un *point singulier régulier* si $Q = 0$ et $J \neq 0$ et c'est un *point régulier* (ou singulier "apparent") si $Q = J = 0$. Les directions oscillatoires (en fait leurs projections sur $\mathbb{C}$) des exponentielles $\exp(q_j - q_\ell)$ pour tous les couples (q_j, q_ℓ) , $q_j \neq q_\ell$ extraits de Q sont appelées *directions de Stokes* et leurs directions de décroissance maximale sont appelées *directions anti-Stokes*. Directions de Stokes et directions anti-Stokes sont communes à tous les systèmes d'une même classe formelle. On trouvera dans ([Jur78]) une démonstration de l'existence d'une forme normale d'Hermite. A partir d'un système quelconque, on obtient sa forme normale d'Hermite par un algorithme algébrique (fini). Ce choix d'une forme normale d'Hermite présente dans la suite deux avantages : il simplifie l'étude théorique dans le cas d'une classe formelle dite avec ramification (Q est effectivement ramifiée) et il permet de normaliser au mieux certaines formules de calcul explicites, par exemple pour le calcul des invariants de Birkhoff fait au chapitre V.

A priori, la classification méromorphe (resp. analytique ou de Birkhoff) raffine la classification précédente. C'est un résultat bien connu que, lorsque $Q = 0$, c'est-à-dire lorsque le point x_0 est régulier ou singulier régulier les transformations de $[A_0]$ sont toutes méromorphes (soit convergentes) et les deux classifications coïncident. Lorsque $Q \neq 0$, c'est-à-dire lorsque le point x_0 est singulier irrégulier, il existe toujours des transformations méromorphes formelles de $[A_0]$ qui ne sont pas convergentes et la classification méromorphe raffine strictement la classification méromorphe formelle. C'est pourquoi nous limitons notre étude au cas d'un point singulier irrégulier.

En l'absence de critère de choix algébrique ou quelque peu naturel, on ne réalise pas cette classification par le choix dans chaque classe d'un représentant particulier. Divers points de vue réalisent de telles classifications : ainsi en est-il du point de vue cohomologique de Malgrange-Sibuya, de l'équation du pont d'Ecalte et du π_1 sauvage de Ramis. Dans cette thèse, nous nous attachons essentiellement au point de vue cohomologique de Malgrange-Sibuya et nous en déduisons une correspondance avec le point de vue du π_1 sauvage de Ramis ; une correspondance entre le π_1 sauvage et l'équation du pont d'Ecalte ayant été établie par Ramis ([MR*]), on achève ainsi d'élucider la relation entre les trois points de vue.

Dans l'interprétation cohomologique de Malgrange-Sibuya le "classifiant" cohomologique apparaît comme l'ensemble de cohomologie non

abélienne $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ du cercle des directions issues de 0 dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans le faisceau $\Lambda(A_0)$ des sections d'isotropies plates de $[A_0]$ c'est-à-dire le faisceau des germes de transformations analytiques plates de $[A_0]$ en lui-même. Ce "classifiant" classe non pas les systèmes méromorphes mais les mêmes systèmes munis d'un isomorphisme de leur formalisé. Les systèmes méromorphes quant à eux sont classifiés par les classes de conjugaison des éléments de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ par le groupe Λ_0 des isotropies de la forme normale $[A_0]$, c'est-à-dire le groupe des transformations méromorphes formelles de $[A_0]$ laissant fixe $[A_0]$. Il est utile de remarquer que les classes méromorphes de systèmes munis d'un isomorphisme de leur formalisé s'identifient aux classes de transformations $\hat{F}$ d'une forme normale $[A_0]$ fixée avec pour relation d'équivalence la multiplication à gauche par les matrices méromorphes inversibles. Et que les classes méromorphes de systèmes s'identifient aux classes de transformations $\hat{F}$ avec pour relation d'équivalence la multiplication à gauche par les matrices méromorphes inversibles et à droite par les matrices de Λ_0 . Le groupe Λ_0 qui est souvent petit voire trivial se calcule facilement, et par un algorithme algébrique, à partir de la forme normale d'Hermite $[A_0]$. L'analyse de l'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ que nous présentons ci-dessous est moins immédiate; elle est l'objet de la première partie de cette thèse (chapitres I, II, III).

On appelle *phénomène de Stokes* le phénomène de discontinuité suivant : on sait, grâce au théorème fondamental des développements asymptotiques que toute transformation formelle $\hat{F}$ de $[A_0]$ en un système $[A]$ ($A = \hat{F} A_0$) "s'incarne" dans toute direction issue de 0 dans $\mathbb{C}$ en au moins un germe F de transformation méromorphe : F est une transformation de $[A_0]$ en $[A]$ ($A = F A_0$) définie, holomorphe et asymptotique à $\hat{F}$ en 0 sur un petit secteur autour de la direction choisie. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz affirme que ce germe peut être prolongé analytiquement au voisinage de 0 sur le revêtement universel $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de $\mathbb{C}^*$. Mais ce prolongement ne demeure pas asymptotique à $\hat{F}$ sauf dans le cas exceptionnel où $\hat{F}$ est elle-même méromorphe donc convergente. On constate des sauts brusques du comportement asymptotique de F en 0 lorsqu'on traverse les ou seulement certaines lignes de Stokes. Ces sauts étant au moins de type exponentiel, ne sont pas affectés par des transformations méromorphes : ils sont communs à toutes les transformations de $[A_0]$ méromorphiquement équivalentes. Les matrices constantes inversibles reliant deux solutions $F^1(x)X_0(x)$ et $F^2(x)X_0(x)$ associées à deux "incarnations" F^1 et F^2 d'une même transformation formelle $\hat{F}$ sont appelées des *matrices de Stokes usuelles*. Le phénomène de Stokes n'existe qu'aux points singuliers irréguliers. Il a pour origine le comportement de la fonction exponentielle : la fonction $e^{-1/x}$ qui est plate, c'est-à-dire asymptotique à zéro comme la fonction nulle 0 dans toute direction issue de 0 et contenue dans le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$, devient non bornée à croissance

exponentielle lorsqu'on traverse l'un ou l'autre demi-axe imaginaire.

Un résultat fondamental de la théorie est que ces sauts suffisent à caractériser la classe méromorphe d'une transformation $\hat{F}$ de $[A_0]$. Le théorème d'isomorphisme de Malgrange-Sibuya donne un sens précis à cette affirmation en établissant que le "classifiant" méromorphe des transformations de $[A_0]$ est exactement l'ensemble de cohomologie non abélienne $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

Nous donnons ici (théorèmes III.3 -III.17) une description de cet ensemble de cohomologie en caractérisant chaque classe de cohomologie par l'une de ses 1-cochaînes, en fait un 1-cocycle, que nous appelons *la cochaîne fondamentale*. Ce choix est naturel et ce faisant nous répondons à une suggestion faite par Malgrange dans [Mal79]. Citons : " Dans le cas où les valeurs propres de la partie principale de A_0 sont distinctes, ces questions ont été étudiées par Balser, Jurkat et Lutz grâce à une analyse précise du "phénomène de Stokes". Dans le cas général une étude analogue s'imposerait."

Cet ensemble de cochaînes fondamentales apparaît comme un produit fini de groupes que nous appelons *les groupes de Stokes de $[A_0]$* et qui sont des sous-groupes des fibres du faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$ au-dessus des directions anti-Stokes. Dans cette description, on repère donc les sauts non par les directions en lesquelles ils se produisent et qui sont les directions de Stokes mais par les directions qui les gouvernent, à savoir les directions anti-Stokes. Les groupes de Stokes se calculent aisément à partir de $[A_0]$.

En choisissant une solution fondamentale de $[A_0]$ et une détermination de l'argument au voisinage de chaque direction anti-Stokes, on représente les éléments des groupes de Stokes par des matrices constantes inversibles et unipotentes appelées matrices de Stokes. A la cochaîne fondamentale on associe ainsi une famille finie de matrices codifiées d'une façon bien déterminée : on les appelle *les matrices de Stokes "du système"* (en fait d'une transformation de $[A_0]$ conduisant à ce système). Ces matrices de Stokes sont des matrices de Stokes usuelles mais la codification est restrictive : on n'obtient pas des matrices de Stokes usuelles quelconques représentant des sauts arbitraires. En compensation, les matrices de Stokes ainsi sélectionnées ont des propriétés particulières : elles appartiennent au groupe de Galois différentiel du système. On dit alors qu'elles sont *galoisiennes*.

A l'origine de ce travail fut la question posée par Ramis du calcul numérique effectif des invariants analytiques d'un système. L'étude précédente répond à la question préliminaire : que convient-il de calculer ? Dans l'interprétation cohomologique, le classifiant apparaît comme un ensemble de cohomologie non abélienne. Comment déterminer les éléments

de cet ensemble infini par le calcul d'un nombre inévitablement fini de certaines quantités et quelles quantités ?

Nous avons vu que la cochaîne fondamentale permet de codifier chaque classe de cohomologie par un nombre fini de matrices constantes : les matrices de Stokes du système. Il s'agit donc de calculer ces matrices de Stokes.

On peut énoncer le même résultat différemment : en construisant la cochaîne fondamentale, on a en fait muni le "classifiant" cohomologique d'une structure naturelle de variété linéaire affine de dimension finie. Cette dimension N est calculable directement et en outre algébriquement à partir du système. Elle est d'ailleurs égale à l'irrégularité du système $[End A_0] : \frac{dX}{dx} = A_0 X - X A_0$, ce que l'on voit immédiatement en combinant les calculs de cette irrégularité faits respectivement par Malgrange ([Mal74]) et par Deligne ([De77], [BV89]). Ainsi, par le choix d'une base de cette variété linéaire affine, la question se ramène au calcul des N composantes d'une cochaîne fondamentale associée au système dans cette base. Il est à remarquer cependant que si la structure linéaire est naturelle, les bases ne le sont pas. Nous avons vu d'ailleurs que, bien que la cochaîne fondamentale soit naturelle, les matrices de Stokes ne le sont pas : elles dépendent de la solution normale choisie et de choix de déterminations de l'argument. On choisit ici une base construite sur les matrices élémentaires concernées et on appelle *invariants de Birkhoff* les composantes de la cochaîne fondamentale dans cette base généralisant ainsi la terminologie adoptée par Balser, Jurkat, Lutz et Peyerimhoff dans le cas de certains systèmes de dimension deux ([JLP76]). La famille des invariants de Birkhoff d'un système est évidemment équivalente à celle de ses matrices de Stokes. Les formules de passage sont immédiates (Proposition V.2).

Remarquons qu'on a ici un phénomène inhabituel : le "classifiant" cohomologique est l'ensemble de cohomologie non abélienne $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$. Le faisceau $\Lambda(A_0)$ est un faisceau de groupes non abéliens qui sont des groupes de Lie unipotents ayant une structure de variété linéaire affine. Grâce à la construction de la cochaîne fondamentale, le classifiant cohomologique hérite à la fois d'une structure naturelle de groupe non abélien, produit fini des groupes de Stokes qui sont des sous-groupes de Lie unipotents de certaines fibres du faisceau $\Lambda(A_0)$, et d'une structure naturelle de variété linéaire affine. Ce phénomène est exceptionnel : en général, un ensemble de cohomologie non abélienne n'hérite pas des structures algébriques du faisceau.

Les invariants analytiques, matrices de Stokes ou invariants de Birkhoff sont transcendants. Pour leur calcul numérique effectif, on propose deux méthodes avec, pour chacune d'elles, ses avantages et ses limites. Celles-ci sont explicitées au chapitre V que nous présentons ci-dessous. Les deux méthodes imposent au départ la détermination d'une solution fondamentale formelle. On pourra bientôt utiliser pour cela le code DESIR,

logiciel construit sous REDUCE par l'équipe de calcul formel de l'IMAG de Grenoble.

Nous détaillons maintenant le contenu de chaque chapitre.

Dans le chapitre I, nous rappelons les définitions et résultats servant de base à l'étude proposée. Nous commençons par relier la notion de système différentiel au point de vue géométrique des connexions. Nous précisons les notions de classifications "formelles" et "analytiques" des systèmes. Nous énonçons les résultats sur les classifications formelles, puis nous explicitons le point de vue cohomologique de la classification analytique y compris le théorème d'isomorphisme de Malgrange-Sibuya.

Dans le chapitre II nous étudions le faisceau des isotropies $\Lambda(A_0)$ d'une forme normale d'Hermite $[A_0]$. Nous introduisons la notion de niveau et nous montrons comment le faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$, qui est un faisceau de groupes non abéliens unipotents, se décompose en un produit semi-direct de groupes du même type, niveau par niveau. Nous définissons les groupes de Stokes comme des sous-fibres particulières de ce faisceau.

Ces deux chapitres ne présentent pas de résultats originaux. Nous y explicitons des concepts ou résultats plus ou moins "bien connus".

Dans le chapitre III nous établissons le théorème fondamental d'identification naturelle du "classifiant" $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$, ensemble de cohomologie non abélienne, au produit des groupes de Stokes de $[A_0]$. Notre démonstration construit explicitement la cochaîne fondamentale qui représente de façon naturelle sa classe de cohomologie. Dans le cas d'un seul niveau la solution est la suivante : parmi tous les recouvrements suffisants pour le calcul de la cohomologie il en existe un moins fin que tous les autres ; on choisit pour cochaînes fondamentales les 1-cochaînes associées à ce recouvrement. Ce résultat est dû à Malgrange qui l'établit en termes de systèmes I-filtrés au sens de Deligne dans [Mal83] (lemme 5.1 p.391). Dans le cas de plusieurs niveaux nous procédons par récurrence descendante sur les niveaux. Nous utilisons la structure de produit semi-direct suivant les niveaux du faisceau $\Lambda(A_0)$ pour décomposer l'ensemble H^1 lui-même niveau par niveau. Il y a plusieurs algorithmes de décomposition suivant qu'on utilise une factorisation en produit semi-direct dans un sens ou dans un autre. Le produit final est unique et naturel. Nous étudions d'abord le cas sans ramification (les $q_j - q_\ell$ sont de vrais polynômes non ramifiés). Nous en déduisons le cas avec ramification par un argument classique de descente : l'existence d'une forme normale d'Hermite permet en effet de n'avoir à considérer, comme dans le cas sans ramification, que de vraies transformations c'est-à-dire des transformations non ramifiées $\hat{F}(x)$ de A_0 . Il est alors immédiat de voir que la cochaîne fondamentale associée à $\hat{F}(t^p)$ où p est l'ordre de la ramification est invariante sous

l'action du groupe de Galois de la ramification $t^p = x$. On peut donc la faire “descendre” du revêtement ramifié à p feuillets en la variable t au plan de la variable x . Malgrange nous a fait remarquer qu'en accord avec l'équivalence entre la catégorie des connexions et celle des systèmes I-filtrés ([Mal83]), il est possible d'obtenir cette décomposition de façon tout à fait analogue directement en termes de systèmes I-filtrés : le résultat se démontre par récurrence croissante sur les niveaux, le passage d'un niveau au suivant se faisant par une variante du lemme 5.1 [Mal83] cité ci-dessus.

De façon indépendante et pour un objectif très différent —la résolution de problèmes de modules— Babbitt et Varadarajan ont été eux-aussi conduits à une version abstraite de ce théorème. Leur démonstration donnée dans [BV89] repose sur des idées dues à Deligne (cf. aussi [BV p85]). Notre approche diffère substantiellement de celle-ci dans le cas avec ramification. En outre, elle explicite un algorithme algébrique, permettant de réduire n'importe quelle 1-cochaîne à la cochaîne fondamentale.

Mentionnons aussi l'étude antérieure faite par Jurkat dans [Jur78]. Celle-ci décrit chaque classe de cohomologie par le choix d'une 1-cochaîne privilégiée indicée par les directions de Stokes et non pas par les directions anti-Stokes. Lorsqu'il y a plusieurs niveaux, ce choix est en général différent du notre. Le passage de cette cochaîne à la notre est parfaitement déterminé et pourrait être détaillé dans un algorithme. Mais ce choix a entre autre inconvénient de ne pas conduire en toute généralité aux formules de sommation par accélération.

Le chapitre IV est consacré à quelques applications théoriques du théorème précédent : nous explicitons d'abord les structures algébriques, structure de variété affine, de variété linéaire affine et de groupe de Lie unipotent induites par celles du faisceau $\Lambda(A_0)$ sur le “classifiant” cohomologique $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

Nous montrons que la cochaîne fondamentale s'obtient par comparaison de sommes F_α de la transformation $\hat{F}$ c'est-à-dire de transformations méromorphes F_α asymptotiques à $\hat{F}$ sur les différents ouverts V_α du recouvrement fondamental et que ces sommes sont déterminées de manière unique. On obtient ainsi un procédé de sommation par des moyens presque exclusivement algébriques, le seul argument d'analyse utilisé étant le théorème des développements asymptotiques classique.

Nous montrons ensuite que les automorphismes de Stokes u_α ou automorphismes de passage d'une solution fondamentale $F_\alpha X_{0,\tilde{\alpha}}$ de (A) à la suivante sont des éléments du groupe de Galois différentiel du système. On note ici $X_{0,\tilde{\alpha}}$ la vraie fonction définie par l'expression formelle X_0 via le choix d'une détermination $\tilde{\alpha}$ de l'argument α . Ces automorphismes sont représentés dans les bases $F_\alpha X_{0,\tilde{\alpha}}$ par les matrices de Stokes, celles-là mêmes qui représentent la cochaîne fondamentale. Rappelons que,

selon Chevalley, une *construction* sur un système est tout système obtenu comme somme directe et produit tensoriel d'un nombre fini d'exemplaires du système et de son dual. L'interprétation géométrique de Chevalley des groupes algébriques permet de définir le groupe de Galois différentiel d'un système comme étant le stabilisateur des espaces de solutions de tous les sous-systèmes de toutes les constructions sur le système considéré. Les propriétés galoisiennes des matrices de Stokes résultent alors du fait que le passage à la cochaîne fondamentale "commute" aux sous-systèmes et aux constructions. Nous donnons en outre un exemple de matrice de Stokes usuelle non galoisienne.

L'existence et l'unicité des sommes F_α nous permet par ailleurs de transcrire la décomposition en facteurs des différents niveaux k de la cochaîne fondamentale en une décomposition de la transformation $\widehat{F}$ elle-même en un produit de transformations k -sommables ([MR82]). Ce produit est ordonné suivant les niveaux k décroissants; il est unique à des modifications triviales près. On retrouve ainsi par un argument algébrique un théorème de Ramis ([Ra pr85]) démontré par des arguments d'analyse fine ([Ra85], [Ra80], [RS89], [Sib90]).

Un corollaire de ce théorème de factorisation est que la transformation $\widehat{F}$ est multisommable. Il résulte alors de l'unicité des sommes F_α et d'un résultat de Martinet-Ramis ([MR90]) que celles-ci coïncident avec les sommes obtenues par multisommabilité à partir des formules d'accélération d'Ecalé.

Ce résultat justifie la correspondance proposée entre cochaînes fondamentales et lacets du π_1 sauvage : à chaque composante $\dot{f}_\alpha$ de la 1-cochaîne fondamentale $c(\widehat{F}) = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ correspond l'action d'un lacet global, pointé en $x_0 = 0$, autour de la partie infinitésimale de la direction anti-Stokes α . A chaque facteur $\dot{f}_\alpha^{k_j}$ d'une décomposition $\dot{f}_\alpha = \dot{f}_\alpha^{k_1} \dot{f}_\alpha^{k_2} \dots \dot{f}_\alpha^{k_r}$ de $\dot{f}_\alpha$ suivant les niveaux correspond l'action d'un lacet élémentaire autour de la singularité infinitésimale de niveau k_j dans la direction α . Ce lacet doit contourner les singularités infinitésimales de niveau inférieur à k_j en laissant à gauche (resp. à droite) celles dont le niveau k_ℓ correspond à un facteur $\dot{f}_\alpha^{k_\ell}$ écrit à gauche (resp. à droite) de $\dot{f}_\alpha^{k_j}$.

Le chapitre V présente deux méthodes numériques de détermination de la cochaîne fondamentale sous forme de matrices de Stokes ou d'invariants de Birkhoff.

La première méthode consiste à calculer numériquement les sommes F_α elles-mêmes par les formules intégrales de Borel-Laplace ou leur généralisation à l'aide des noyaux d'accélération d'Ecalé puis à comparer leurs valeurs deux à deux sur les directions anti-Stokes. La difficulté est le contrôle de l'instabilité des algorithmes lorsqu'on est proche du point singulier $x_0 = 0$ et surtout d'une direction anti-Stokes α c'est-à-dire, hélas, lorsqu'on est proche des seules régions du plan qui nous intéressent.

On maîtrise bien le cas des séries admettant une seule direction singulière et, on sait par ailleurs toujours se ramener à cette situation dans le cas des systèmes de dimension deux. Le cas général est actuellement étudié par Thomann à qui l'on doit le logiciel existant ([Tho90], [Tho91]).

La deuxième méthode s'inspire d'un calcul fait par Martinet et Ramis sur un exemple de dimension deux ([MR82]). Elle consiste à déduire les invariants locaux, en général une partie d'entre eux seulement, du calcul des invariants infinitésimaux. Au niveau infinitésimal la situation est plus confortable parce que le classifiant est un groupe de cohomologie abélienne et qu'on dispose de formules intégrales explicites, les formules de Cauchy-Heine, donnant l'expression de la transformation infinitésimale à partir d'une classe de cohomologie. Il est nécessaire de préparer la situation pour tirer le meilleur profit des informations rendues ainsi accessibles. Nous détaillons les transformations méromorphes et les changements de variable à effectuer sur le système et sur la forme normale (ce ne sont pas les mêmes en général) pour se placer dans un cas relativement agréable dit *cas séparé*. Nous explicitons alors les formules de récurrence permettant de calculer les invariants de Birkhoff du système et les conditions nécessaires pour pouvoir mener à bien un tel calcul. Nous étudions plus particulièrement les cas des systèmes de dimension deux et trois et nous établissons la liste des invariants accessibles par cette méthode : tous les invariants en dimension deux, tous, quelques uns ou pas du tout en dimension trois suivant le type du système. Pour terminer, nous illustrons la méthode par quelques exemples numériques en dimension deux et en dimension trois.

Première partie

Classification cohomologique et applications

I. Classifications méromorphes des connexions et des systèmes différentiels

Ce texte concerne l'étude locale au voisinage de l'origine $x = 0$ des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et de dimension n à coefficients méromorphes d'une seule variable complexe x ; nous abrègerons en systèmes ou systèmes différentiels. La notion de (germes en 0 de) vectoriels à connexion (méromorphes) fournit un cadre géométrique, sans coordonnées, à l'étude de tels systèmes. Cependant, pour accéder à des résultats algorithmiques nous travaillerons évidemment avec des systèmes différentiels et non pas des connexions. Rappelons brièvement comment les uns sont reliés aux autres. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Be85], [De70], [BV89], [Mal p80].

1. Catégorie $\mathcal{C}$ des connexions méromorphes. Relation entre connexions et systèmes différentiels

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps $K = \mathbb{C}\{x\}[1/x]$ des (germes de) fonctions méromorphes en $x = 0$ muni de la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$.

Une **connexion** sur V est la donnée d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire $\nabla : V \longrightarrow V$ qui vérifie

$$\nabla(a.X) = \frac{da}{dx}X + a\nabla(X)$$

pour tout $a \in K$ et tout $X \in V$.

Dans une base quelconque $v = (v_1, \dots, v_n)$ de V sur K un vecteur

$$\vec{X} = \sum x_i v_i \text{ est représenté par une matrice colonne } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;$$

l'application $\mathbb{C}$ -linéaire ∇ est représentée par une matrice carrée M de dimension n , à coefficients dans K et déterminée par $\nabla v = vM$; la matrice ∇X du vecteur $\nabla(\vec{X})$ image du vecteur $\vec{X} = \sum x_i v_i$ par ∇ vérifie alors $\nabla X = \frac{dX}{dx} + MX$. (On notera désormais X à la fois le vecteur $\vec{X}$ et sa matrice dans la base choisie). On associe ainsi modulo le choix d'une base de V les connexions sur V et les systèmes différentiels à coefficients méromorphes. Les (germes en 0 de) **sections horizontales de ∇** sont les sections $X(x)$ de V définies sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ par la condition $\nabla X = 0$. Elles correspondent aux (germes en 0 de) **solutions du système différentiel** $\frac{dX}{dx} + MX = 0$. (Dans la suite nous noterons en général les systèmes $\frac{dX}{dx} = AX$ plutôt que $\frac{dX}{dx} + MX = 0$ comme ils s'introduisent ici naturellement).

Les couples (V, ∇) formés d'un K -espace vectoriel V et d'une connexion ∇ sont appelés des ***K-vectoriels à connexion*** (on dira aussi des ***connexions méromorphes***).

Un ***morphisme de K-vectoriels à connexion*** de (V_1, ∇_1) dans (V_2, ∇_2) est un homomorphisme $h : V_1 \longrightarrow V_2$ de K -espaces vectoriels qui commute avec les connexions ∇_1 et ∇_2 :

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\nabla_1} & V_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ V_2 & \xrightarrow{\nabla_2} & V_2 \end{array}$$

commute.

La catégorie des (germes de) connexions méromorphes est la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les K -vectoriels à connexion et dont les flèches sont les morphismes de K -vectoriels à connexion. Dans cette catégorie $\mathcal{C}$ on a les notions de somme directe $\oplus$, de produit tensoriel $\otimes$, de dual $*$ et de K -vectoriels d'homomorphismes Hom définies comme suit :

- somme directe :

$$V = V_1 \oplus V_2$$

$$\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2 \text{ est donnée par}$$

$$\nabla(X_1 \oplus X_2) = \nabla_1(X_1) \oplus \nabla_2(X_2)$$

- produit tensoriel :

$$V = V_1 \otimes_K V_2$$

$$\nabla = \nabla_1 \otimes \nabla_2 \text{ est donnée par}$$

$$\nabla(X_1 \otimes X_2) = \nabla_1(X_1) \otimes X_2 + X_1 \otimes \nabla_2(X_2)$$

- dual :

$$V^* = \text{dual du } K\text{-espace vectoriel } V$$

$$\nabla^* \text{ est donnée par}$$

$$\nabla^*(f)(X) = \frac{d}{dx} f(X) - f(\nabla X) \quad , \quad f \in V^*$$

- K -vectoriels d'homomorphismes : Notons $\text{Hom}_K(V_1, V_2)$ le K -espace vectoriel des applications K -linéaires de V_1 dans V_2

$$V = \text{Hom}_K(V_1, V_2)$$

$$\nabla_{1,2} \text{ est donnée par}$$

$$\nabla_{1,2}(\varphi)(X_1) = \nabla_2(\varphi(X_1)) - \varphi(\nabla_1(X_1)) \quad , \quad \varphi \in \text{Hom}_K(V_1, V_2) \quad .$$

Ainsi φ est un morphisme de (V_1, ∇_1) dans (V_2, ∇_2) si et seulement si φ est une section horizontale de $\nabla_{1,2}$.

Dans la catégorie des K -espaces vectoriels, $V_1 \otimes V_2^*$ est isomorphe à $\text{Hom}_K(V_1, V_2)$. De façon analogue, dans la catégorie des connexions, le K -vectoriel à connexion $(V_1 \otimes V_2^*, \nabla_1 \otimes \nabla_2^*)$ est isomorphe à $(\text{Hom}_K(V_1, V_2), \nabla_{1,2})$.

On montre que la catégorie $\mathcal{C}$ des (germes en 0 de) connexions méromorphes est une catégorie tensorielle abélienne ([DeMi80]).

Si on choisit des bases v_1 et v_2 dans V_1 et dans V_2 et si on note $-A_1$ la matrice de ∇_1 , $-A_2$ celle de ∇_2 et F la matrice d'un élément $\varphi \in \text{Hom}_K(V_1, V_2)$ on a

$$\begin{aligned} \nabla_1 X &= \frac{dX}{dx} - A_1 X \quad , \quad \nabla_2 Y = \frac{dY}{dx} - A_2 Y \quad , \\ \nabla_{1,2}(\varphi)(X) &= \left(\frac{dF}{dx} - A_2 F + F A_1 \right) X \quad \text{pour tout } X \in V_1 \end{aligned}$$

et, quand φ admet un inverse φ^{-1} dans $\text{Hom}_K(V_1, V_2)$,

$$\begin{aligned} \nabla_{2,1}(\varphi^{-1})(Y) &= \left(\frac{dF^{-1}}{dx} - A_1 F^{-1} + F^{-1} A_2 \right) Y \quad \text{pour tout } Y \in V_2 \\ &= -F^{-1} \left(\frac{dF}{dx} + F A_1 - A_2 F \right) F^{-1} Y \end{aligned}$$

et donc φ^{-1} est une section horizontale de $\nabla_{2,1}$ dès que φ en est une de $\nabla_{1,2}$.

Ainsi pour un choix fixé des K -bases dans V_1 et dans V_2 on peut énoncer de façon équivalente

- $\varphi \in \text{Hom}_K(V_1, V_2)$ est un isomorphisme de (V_1, ∇_1) dans (V_2, ∇_2) si et seulement si sa matrice F , à coefficients dans K , est inversible ($F \in GL(n, K)$) et vérifie $\frac{dF}{dx} = A_2 F - F A_1$.
- ∇_2 est transformée de ∇_1 par φ si et seulement si sa matrice $-A_2$ est donnée par $A_2 = \frac{dF}{dx} F^{-1} + F A_1 F^{-1}$ où F , matrice de φ , est inversible à coefficients dans K .

2. Généralités sur les classifications méromorphes des connexions et des systèmes

Une question importante de la théorie est celle de la classification des K -vectoriels à connexion à isomorphisme près : c'est la classification méromorphe des connexions méromorphes. Bien sûr, on peut se restreindre aux connexions de dimension fixée ($\dim_K V = n$ fixé).

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser une telle classification. Citons celles

1. par l'interprétation cohomologique (MALGRANGE-SIBUYA)
2. par l'équation du pont (ECALLE)
3. par le π_1 sauvage (RAMIS).

Ces méthodes sont substantiellement différentes. Elles ont en commun le point de départ qui consiste à réaliser d'abord une classification moins fine : la classification méromorphe formelle. Dans chaque classe méromorphe formelle on caractérise ensuite les classes méromorphes. Il y a une raison fondamentale à cela : la classification méromorphe formelle est algébrique donc "facile". On dispose d'algorithmes algébriques pour la mener à bien. Ces algorithmes sont implantés sur ordinateur sous REDUCE dans le code DESIR ([T87]). La classification méromorphe est transcendante : on ne peut espérer aucun algorithme général algébrique pour la mener à bien. Il n'est pas évident de prime abord de voir comment ces différentes méthodes de classifications se correspondent. Le lien entre 2. et 3. sera fait dans un livre de Martinet et Ramis à paraître ; le lien entre 1. et 3. sera fait au cours de ce texte (cf. IV.5).

Rappelons brièvement ce qu'on entend par classification méromorphe formelle des connexions méromorphes. Nous énoncerons en détail à l'alinéa suivant les résultats de cette classification en termes de systèmes.

À une connexion (V, ∇) on associe *sa formalisée* $(\hat{V}, \hat{\nabla})$ obtenue par une extension du corps des scalaires K muni de $\frac{d}{dx}$ à son formalisé $\hat{K} = \mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}]$ muni de $\frac{d}{dx}$. Ainsi $\hat{V} = V \otimes_K \hat{K}$ et si $-A$ est la matrice de ∇ dans une base v du K -espace vectoriel V : $\nabla X = \frac{dX}{dx} - AX$, c'est aussi la matrice de $\hat{\nabla}$ dans la base $\hat{v} = v \otimes 1$ du $\hat{K}$ -espace vectoriel $\hat{V}$: $\hat{\nabla} \hat{X} = \frac{d\hat{X}}{dx} - A\hat{X}$.

Un isomorphisme entre les formalisés $(\hat{V}_1, \hat{\nabla}_1)$ et $(\hat{V}_2, \hat{\nabla}_2)$ (on dit aussi une **transformation méromorphe formelle** de (V_1, ∇_1) en (V_2, ∇_2)) est un isomorphisme $\varphi = \hat{V}_1 \longrightarrow \hat{V}_2$ de $\hat{K}$ -espaces vectoriels qui commute avec $\hat{\nabla}_1$ et $\hat{\nabla}_2$:

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{V}_1 & \xrightarrow{\hat{\nabla}_1} & \hat{V}_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \hat{V}_2 & \xrightarrow{\hat{\nabla}_2} & \hat{V}_2 \end{array}$$

commute.

Ainsi de façon équivalente, on peut énoncer pour un choix de bases arbitraire :

Chapitre I

- φ est un isomorphisme méromorphe formel de (V_1, ∇_1) dans (V_2, ∇_2) si et seulement si sa matrice F est dans $GL(n, \hat{K})$ et vérifie

$$\frac{dF}{dx} = A_2 F - F A_1$$

- ∇_2 est une transformée méromorphe formelle de ∇_1 par φ si et seulement si A_2 est donnée par

$$A_2 = \frac{dF}{dx} F^{-1} + F A_1 F^{-1}$$

où la matrice F de φ est dans $GL(n, \hat{K})$.

La classification méromorphe formelle des connexions méromorphes est la classification modulo isomorphismes méromorphes formels.

Traduisons ce qui précède en termes de systèmes :

- la formalisation ne nécessite pas l'introduction de systèmes à coefficients méromorphes formels. Tous les systèmes considérés sont à coefficients méromorphes ;
- l'isomorphisme φ correspond au changement d'inconnues $X = F^{-1}Y$ qui transforme le système

$$[A_1] : \frac{dX}{dx} = A_1 X$$

en le système

$$[A_2] : \frac{dY}{dx} = A_2 Y \quad \text{où} \quad A_2 = \frac{dF}{dx} F^{-1} + F A_1 F^{-1} .$$

On notera $A_2 = {}^F A_1$. Cette notation fait référence à la correspondance entre les solutions : si X est une solution de $[A_1]$, FX est une solution de $[{}^F A_1]$.

Nous dirons que F est une **transformation méromorphe** ou **méromorphe formelle du système** $[A_1]$ **en le système** $[A_2] = [{}^F A_1]$ suivant que F est dans $GL(n, K)$ ou dans $GL(n, \hat{K})$.

- Les classifications méromorphe formelle et méromorphe des connexions méromorphes sont équivalentes à celles des systèmes (méromorphes) à transformations méromorphes formelles ou méromorphes près. En particulier à un changement de base du K -vectoriel (V, ∇) correspond une transformation méromorphe sur le système différentiel associé.

Par ailleurs, sur les systèmes de dimension fixée n , on peut faire agir les transformations méromorphes formelles ou méromorphes de l'un des types suivants :

- **transformation formelle** : sa matrice F est à coefficients séries formelles ($F \in GL(n, \mathbb{C}[[x]])$),
- **transformation de Birkhoff formelle** : sa matrice F est à coefficients séries formelles et vérifie en outre $F(0) = I$ ($F \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$),
- **transformation analytique** : sa matrice F est analytique en 0 ($F \in GL(n, \mathbb{C}\{x\})$),
- **transformation de Birkhoff (analytique)** : sa matrice F est analytique et vérifie en outre $F(0) = I$ ($F \in GL_I(n, \mathbb{C}\{x\})$).

Les changements de base dans V étant généralement méromorphes ne respectent pas ces différents types de transformations et les classifications correspondantes ne se transportent pas aux connexions méromorphes. Nous nous proposons maintenant d'explicitier les classifications des systèmes de dimension n modulo l'action de ces transformations. Nous les relierons ensuite aux classifications méromorphe formelle et méromorphe des connexions.

3. Classifications formelles des systèmes différentiels

Rappelons qu'une matrice F à coefficients méromorphes formels ($F \in GL(n, \hat{K})$ avec $\hat{K} = \mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}]$) est une **transformation** d'un système méromorphe $[A]$ si le système transformé $[^F A]$ est encore à coefficients méromorphes.

Dans ce paragraphe, nous énonçons les résultats concernant les classifications

- méromorphe formelle des systèmes i.e. modulo transformations méromorphes formelles ($F \in GL(n, \hat{K})$),
- formelle des systèmes, i.e. modulo transformations formelles ($F \in GL(n, \mathbb{C}[[x]])$),
- de Birkhoff formelle des systèmes, i.e. modulo transformations de Birkhoff formelles ($F \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$).

Ces classifications sont des raffinements les unes des autres. On les réalise en choisissant dans chaque classe un système d'un type particulier qu'on appelle **forme normale** du système. Cette forme normale n'est pas unique : elle est liée à des conventions de choix. Nous adoptons ici des conventions conduisant à une **forme normale d'Hermite** telle qu'elle est fixée par Jurkat dans [Jur78]. Un tel choix, a priori sans importance, simplifiera fondamentalement l'étude du cas ramifié.

3.1. Solution formelle fondamentale

La recherche des solutions d'un système différentiel $[A]$ dans $\hat{K}^n$, où $\hat{K}$ est l'anneau des séries méromorphes formelles en x , au voisinage d'un point régulier conduit à n solutions $\mathbb{C}$ -linéairement indépendantes ($\mathbb{C}$ est le corps des constantes de $\hat{K}$). On sait en outre que ces séries solutions sont convergentes, leur somme fournissant n vraies solutions linéairement indépendantes. Au voisinage d'un point singulier les séries formelles solutions sont en général divergentes. Mais surtout, elles ne forment pas à elles seules un système de n solutions linéairement indépendantes. Pour obtenir n solutions linéairement indépendantes, on dit encore une **solution fondamentale**, il faut agrandir le corps $\hat{K}$ en un corps $\hat{L}$ et il est naturel d'imposer que :

1. l'extension $\hat{L}$ de $\hat{K}$ soit une extension de corps différentiel ($\hat{L}$ est muni d'une dérivation dont la restriction à $\hat{K}$ coïncide avec la dérivation de $\hat{K}$);
2. la notion d'indépendance linéaire ne change pas (le corps $C_{\hat{L}}$ des constantes de $\hat{L}$ est égal au corps $C_{\hat{K}} = \mathbb{C}$ des constantes de $\hat{K}$);
3. l'extension soit minimale.

Le théorème de Kolchin [Kol73] établit qu'une telle extension existe (car $\hat{K}$ est de caractéristique nulle avec un corps des constantes algébriquement clos) et qu'elle est unique à $\hat{K}$ -isomorphisme près. On l'appelle l'**extension de Picard-Vessiot formelle** du système $[A]$ et on la note $\hat{K}\langle A \rangle$.

THÉORÈME I.1. *L'extension de Picard-Vessiot formelle $\hat{K}\langle A \rangle$ d'un système différentiel $[A]$ est une extension de la forme $\hat{K}\langle A \rangle = \hat{K}\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ obtenue par adjonction à $\hat{K}$ d'un nombre fini d'éléments y_j vérifiant une condition de l'un des types suivants :*

- (i) $y = t$ où t vérifie $t^p = x$ (adjonction d'une ramification d'ordre p de x)
- (ii) $y' = \frac{1}{x}$ (adjonction d'un logarithme formel $\text{Log } x$)
- (iii) $\frac{y'}{y} \in \hat{K}\langle t \rangle$ (adjonction de l'exponentielle d'une primitive ramifiée).

On peut préciser ce résultat :

THÉORÈME I.2 : *Forme d'Hermite ([Jur78]). Tout système méromorphe $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ admet une solution formelle fondamentale de la forme*

$$X = \hat{H} x^L e^Q$$

où $Q = \text{diag}(q_1(\frac{1}{x}), \dots, q_n(\frac{1}{x}))$ est une matrice diagonale dont les termes sont des polynômes ramifiés en $\frac{1}{x}$ ($q_j(\frac{1}{x}) = \tilde{q}_j(\frac{1}{t})$ où $\tilde{q}_j(\frac{1}{t})$ est un polynôme en $\frac{1}{t}$ avec $t = x^{\frac{1}{p_j}}, p_j \in \mathbb{N}^*$) sans terme constant, L est

une matrice constante et $\hat{H}$ est une matrice inversible à coefficients séries méromorphes formelles non ramifiés ($\hat{H} \in GL(n, \hat{K})$).

Il est à remarquer que ce théorème est plus fin que le théorème original de Poincaré-Fabry qui assurait seulement l'existence d'une matrice $\hat{H}$ ramifiée. Nous utiliserons ce raffinement de façon essentielle dans le cas où la matrice Q est ramifiée (théorème III.17).

Une telle écriture d'une solution formelle fondamentale n'est pas unique. On peut la normaliser partiellement d'où :

THÉOREME I.3 : Forme d'Hermite fine ([Jur78]).

Tout système méromorphe $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ admet une solution formelle fondamentale de la forme $X = \hat{F}X_0$ avec $X_0 = Px^Kx^JUe^Q$, où

- Q est comme précédemment; c'est la **partie irrégulière** de X_0
- U est une **matrice constante universelle** que nous préciserons plus loin
- J est une matrice de Jordan dont les valeurs propres λ ont été réduites modulo 1 de façon à vérifier $0 \leq \operatorname{Re} \lambda < 1$; c'est la **matrice des exposants de monodromie formelle réduite**
- K est une matrice diagonale à coefficients entiers (dans $\mathbb{Z}$) "provenant" de la réduction de J
- P est le produit d'une matrice constante P_0 par une matrice triangulaire P_1 à coefficients polynômes en $\frac{1}{x}$ sans termes constants dont la diagonale est égale à l'identité; P est la **partie méromorphe**
- $\hat{F}$ est une matrice à coefficients séries formelles en x telle que $\hat{F}(0) = I$ ($\hat{F} \in GL_I(n; \mathbb{C}[[x]])$).

On peut en outre ordonner les polynômes q_j , $j = 1, \dots, n$ de telle sorte que Q, U et J se décomposent simultanément en blocs diagonaux de la forme suivante : (on note I_s la matrice identité de dimension s et $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{p}}$)

Pour Q , des blocs

$$Q_{s,p} = \operatorname{diag} \left(q\left(\frac{1}{x}\right)I_s, q\left(\frac{1}{xe^{2i\pi}}\right)I_s, \dots, q\left(\frac{1}{xe^{2(p-1)i\pi}}\right)I_s \right)$$

(un tel bloc est de dimension ps : il contient la ramification $t = x^{\frac{1}{p}}$; le polynôme $q(\frac{1}{x})$ apparaît exactement s fois et il n'apparaît dans aucun autre bloc);

Pour U , les blocs correspondants

$$U_{s,p} = \begin{pmatrix} I_s & I_s & I_s & \dots & I_s \\ I_s & \varepsilon^1 I_s & \varepsilon^{1 \times 2} I_s & \dots & \varepsilon^{1 \times (p-1)} I_s \\ I_s & \varepsilon^2 I_s & \varepsilon^{2 \times 2} I_s & \dots & \varepsilon^{2 \times (p-1)} I_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_s & \varepsilon^{p-1} I_s & \varepsilon^{(p-1) \times 2} I_s & \dots & \varepsilon^{(p-1) \times (p-1)} I_s \end{pmatrix}$$

Pour J les blocs correspondants

$$J_{s,p} = \text{diag} \left(J_s, J_s + \frac{1}{p} I_s, J_s + \frac{2}{p} I_s, \dots, J_s + \frac{p-1}{p} I_s \right)$$

où J_s est une matrice de Jordan réduite modulo 1 et vérifiant $0 \leq \text{Re} \lambda < 1/p$.

Nous utiliserons cette forme d'Hermite fine de façon essentielle dans les applications numériques (calcul des invariants de Birkhoff, 2e partie).

3.2. Classifications formelles

Classification méromorphe formelle

Le facteur X_0 tel qu'il est précisé dans le théorème précédent n'est pas unique. Il dépend en particulier

- du choix de l'ordre des blocs
- du choix de l'ordre des blocs de Jordan minimaux des matrices J_s .

Donnons-nous une règle pour fixer chacun de ces choix : lorsqu'une solution formelle fondamentale X de la forme $\hat{F}X_0$ ne satisfait pas à la règle choisie on peut toujours, par multiplication à droite par une matrice de permutation convenable la modifier pour la rendre conforme à cette règle.

Alors, les matrices Q, U et J sont déterminées de manière unique. Q et J caractérisent la classe méromorphe formelle de $[A]$. (U est définie à partir de Q).

Classification formelle

Le facteur $P_1 x^K$ de la partie méromorphe $Px^K = P_0 P_1 x^K$ (Th I.3) n'est pas unique :

- D'abord pour une solution fondamentale X donnée : Connaissant J et Q on peut écrire $X = Hx^J Ue^Q$ où H est une matrice méromorphe formelle bien déterminée. La partie "polaire" $P_1 x^K$ s'obtient par exemple par triangulation formelle de H à gauche c'est-à-dire par multiplication à gauche par des matrices à coefficients séries formelles. On a alors

$$H = \Phi P_1 x^K \quad \text{avec } \Phi \in GL(n, \mathbb{C}[[x]]) .$$

Il y a deux possibilités pour le couple (P_1, K) suivant qu'on impose à P_1 la forme triangulaire supérieure ou la forme triangulaire inférieure.

- Pour deux solutions fondamentales $X = \Phi X_0$ et $\tilde{X} = \tilde{\Phi} \tilde{X}_0$ du système $[A]$ ou même de deux systèmes de la classe de Birkhoff formelle de $[A]$:

Il existe une transformation de Birkhoff formelle T et une matrice constante inversible C telles que

$$T\Phi X_0 = \tilde{\Phi}\tilde{X}_0 C$$

On montre ([Jur78], Satz II) que nécessairement C commute avec Q, U et J . On a alors

$$T\Phi P_1 x^K = \tilde{\Phi}\tilde{P}_1 x^{\tilde{K}} C$$

et $P_1 x^K$ s'obtient à partir de $\tilde{P}_1 x^{\tilde{K}}$ en triangulant $\tilde{P}_1 x^{\tilde{K}} C$. Ainsi la facteur $P_1 x^K$ n'est en général pas unique même si on impose la forme triangulaire supérieure ou inférieure. Les différentes expressions possibles sont reliées entre elles par une relation

$$\tilde{P}_1 x^{\tilde{K}} C = C(x) P_1 x^K$$

où C est une matrice constante inversible qui commute avec Q, U et J et $C(x)$ une transformation de Birkhoff algébrique, $C(x) \in GL_I(n, \mathbb{C}[x])$. On convient de choisir l'une d'elles par une règle quelconque.

Alors les matrices Q, J, K et P_1 caractérisent la classe formelle de $[A]$.

Classification de Birkhoff formelle

Ayant choisi Q, J, K et P_1 pour caractériser la classe formelle de $[A]$, une solution fondamentale de $[A]$ s'écrit $X = \Phi P_1 x^K x^J U e^Q$ où $\Phi \in GL(n, \mathbb{C}[[x]])$. Notons $P_0 = \Phi(0)$. Alors X s'écrit sous la forme

$$X = \hat{F} P_0 P_1 x^K x^J U e^Q \quad \text{avec} \quad \hat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$$

Les matrices Q, J, K, P_1 et P_0 caractérisent la classe de Birkhoff formelle de $[A]$.

3.3. Forme normale d'Hermite

PROPOSITION ET DÉFINITION I.4. *On reprend les notations du théorème I.3. Alors la matrice X_0 est une solution fondamentale d'un unique système différentiel $[A_0]$. Celui-ci est à coefficients méromorphes et il est formellement équivalent à $[A]$ (on a $A = \hat{F} A_0$).*

*Le système $[A_0]$ est appelé une **forme normale d'Hermite** de $[A]$ et X_0 une **solution normale d'Hermite**.*

DÉMONSTRATION : $A_0 = \frac{dX_0}{dx} X_0^{-1}$ et il suffit de vérifier compte tenu des règles de commutation de chaque facteur de X_0 que ce produit est méromorphe.

Pour toute transformation de Birkhoff formelle $\hat{F}$ de $[A_0]$, la matrice $\hat{F}X_0$ est une solution fondamentale de $[\hat{F}A_0]$. Nous l'appellerons une **solution d'Hermite** de $[\hat{F}A_0]$.

Dans la suite nous distinguerons deux cas :

1. Cas sans ramification. On dira que $[A]$ appartient au **cas sans ramification** si les polynômes $q_j(\frac{1}{x})$ de sa partie irrégulière sont non ramifiés. Cela n'exclut pas d'éventuelles ramifications dans la partie régulière réduite x^J .

X_0 prend alors la forme

$$X_0 = Px^K x^J e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où

- $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(q_1(\frac{1}{x})I_{s_1}, q_2(\frac{1}{x})I_{s_2}, \dots, q_r(\frac{1}{x})I_{s_r})$ les polynômes q_j étant deux à deux distincts,
- $J = \text{diag}(J_{s_1}, J_{s_2}, \dots, J_{s_r})$ les blocs de Jordan réduits $J_{s_1}, \dots, J_{s_r}$ pouvant être quelconques,
- K et P sont comme précédemment.

La matrice U a disparu : elle est égale à l'identité.

2. Cas avec ramification. On dira que $[A]$ appartient au **cas avec ramification** si sa partie irrégulière Q contient au moins un polynôme ramifié q . Si l'ordre de cette ramification est p ($t = x^{\frac{1}{p}}$) alors Q contient aussi les p polynômes ramifiés $q(\frac{1}{x}), q(\frac{1}{xe^{2i\pi}}), \dots, q(\frac{1}{xe^{2i(p-1)\pi}})$ avec le même ordre de multiplicité s .

La matrice X_0 a la forme générale énoncée au théorème I.3. avec des blocs de taille $p_j s_j$. On a $p_1 s_1 + \dots + p_r s_r = n$ et certains p_j peuvent être égaux à 1.

Il est important de remarquer — c'est là l'argument majeur pour le choix d'un tel X_0 — que $[A]$ admet alors une solution fondamentale formelle de la forme $X(x) = \hat{F}(x)X_0(x)$ où $\hat{F}(x) \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$ est **non ramifiée**.

La transformation $\hat{F}$ est une transformation de Birkhoff de $[A_0]$; elle est une solution du système méromorphe $\frac{d\hat{F}}{dx} = A\hat{F} - \hat{F}A_0$ vérifiant $\hat{F}(0) = I$. Nous allons voir dans la suite comment la connaissance d'une telle transformation $\hat{F}$ permet de caractériser la classe de Birkhoff et la classe méromorphe de $[A]$ en référence à $[A_0]$ et comment une telle transformation $\hat{F}$ permet de déramifier naturellement la situation.

Remarquer en outre que la partie méromorphe P est elle aussi non ramifiée.

3.4. Monodromie formelle $\hat{M}$ de $[A]$

La monodromie en un point singulier 0 d'une vraie solution fondamentale X d'un système $[A]$ —vraie fonction solution de $[A]$ qui se prolonge en une fonction $\tilde{X}$ sur la surface de Riemann du logarithme au voisinage de 0— est l'action sur $\tilde{X}$ d'un tour autour de 0 dans le sens direct. Elle est déterminée par la matrice constante inversible M_X donnée par la relation

$$\tilde{X}(xe^{2i\pi}) = \tilde{X}(x)M_X$$

Son analogue formel provient de la substitution de $xe^{2i\pi}$ à x dans une solution fondamentale formelle.

DÉFINITION I.5. Matrice de monodromie formelle.

Soit X une solution fondamentale formelle de $[A]$. La matrice de monodromie formelle associée à X est la matrice constante inversible donnée par la relation formelle

$$X(xe^{2i\pi}) = X(x)\hat{M}_X$$

Cette matrice existe et elle est uniquement déterminée puisque $X(xe^{2i\pi})$ est toujours une solution fondamentale formelle du même système que $X(x)$.

Supposons maintenant que $X = \hat{F}X_0$ avec $X_0 = Px^Kx^JUe^Q$ soit une solution d'Hermite. Puisque $\hat{F}$ et P sont non ramifiés, ces facteurs n'interviennent pas dans le calcul de la monodromie formelle. Pour ne pas introduire de nouvelles notations nous négligerons simplement $\hat{F}$ et nous étudierons la monodromie formelle de la solution normale d'Hermite X_0 . Par ailleurs l'expression formelle X_0 est aussi l'expression d'une vraie fonction X_0 sur la surface de Riemann du logarithme $\tilde{C}^*$ et on peut énoncer :

PROPOSITION I.6.

- i) Si $X = \hat{F}X_0$ est une solution d'Hermite alors $\hat{M}_X = \hat{M}_{X_0}$.
- ii) Si X_0 est une solution normale d'Hermite sa monodromie et sa monodromie formelle coïncident. On a $\hat{M}_{X_0} = M_{X_0}$.

Changement de solution normale

La matrice $\hat{M}_{X_0}$ est liée au choix de X_0 . Pour un autre choix $X_1 = C_1(x)X_0C^{-1}$, la matrice $\hat{M}_{X_1}$ vérifie $\hat{M}_{X_1} = C\hat{M}_{X_0}C^{-1}$. (C constante inversible).

Faisons désormais le choix d'une solution d'Hermite X_0 et notons plus simplement $\hat{M}$ au lieu de $\hat{M}_{X_0}$.

Décomposition de $\hat{M}$

La monodromie formelle $\hat{M}$ provient partiellement de la partie irrégulière (ramifications de e^Q) et partiellement de la partie régulière (ramifications et logarithme de x^J). Il est agréable de séparer ces deux contributions : On factorise $\hat{M}$ en $\hat{M} = \hat{M}_{\text{reg}} \hat{M}_{\text{irr}}$ où $\hat{M}_{\text{irr}}$ est la monodromie formelle de la diagonale $[q_1 \dots q_n]$ de Q définie par

$$\left(q_1 \left(\frac{1}{x e^{+2i\pi}} \right) \dots q_n \left(\frac{1}{x e^{+2i\pi}} \right) \right) = \left(q_1 \left(\frac{1}{x} \right) \dots q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) \hat{M}_{\text{irr}}$$

et où $\hat{M}_{\text{reg}} = \hat{M} \hat{M}_{\text{irr}}^{-1}$ ne dépend que de la partie régulière x^J de X_0 .

Forme des matrices $\hat{M}_{\text{irr}}$, $\hat{M}_{\text{reg}}$

(X_0 est supposé sous forme d'Hermite fine).

Les matrices $\hat{M}_{\text{irr}}$, $\hat{M}_{\text{reg}}$ et $\hat{M} = \hat{M}_{\text{reg}} \hat{M}_{\text{irr}}$ sont diagonales par blocs comme $x^J U e^{Q(\frac{1}{x})}$.

- Au bloc non ramifié $x^{J_s} e^{q(\frac{1}{x}) I_s}$ de X_0 de dimension s correspondent les blocs de même taille s

$$\begin{cases} \hat{M}_{\text{irr},s} = I_s \\ \hat{M}_{\text{reg},s} = e^{2i\pi J_s} \end{cases}$$

- Au bloc ramifié $x^{J_{s,p}} U_{s,p} e^{Q_{s,p}(\frac{1}{x})}$ de dimension sp correspondent les blocs de même taille sp

$$\hat{M}_{\text{irr},s} = \begin{pmatrix} O_s & \dots & \dots & I_s \\ I_s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_s & \dots & I_s & O_s \end{pmatrix} \quad (\text{matrice de permutation circulaire des blocs de taille } s)$$

et

$$\hat{M}_{\text{reg},s} = e^{2i\pi \text{diag}[J_s, J_s, \dots, J_s]}$$

Remarquer que :

1) $\hat{M}_{\text{irr}}$ conjugue $e^{Q(\frac{1}{x e^{+2i\pi}})}$ et $e^{Q(\frac{1}{x})}$. On a

$$e^{Q(\frac{1}{x e^{+2i\pi}})} = \hat{M}_{\text{irr}}^{-1} e^{Q(\frac{1}{x})} \hat{M}_{\text{irr}} \quad .$$

2) $\hat{M}_{\text{reg},s}$ n'est pas la matrice de monodromie de $x^{J_{s,p}}$ qui vaut $e^{2i\pi \text{diag}[J_s, J_s + \frac{1}{p} I_s, \dots, J_s + \frac{p-1}{p} I_s]}$. La matrice U a pour effet de la "symétriser".

3) $\hat{M}_{\text{irr},s}$ et $\hat{M}_{\text{reg},s}$ commutent.

4. Classifications “analytiques”* des systèmes différentiels par interprétation cohomologique

On peut raffiner chacune des classifications formelles précédentes en imposant aux transformations agissant à l’intérieur d’une même classe d’être convergentes au voisinage de 0. Aux classifications méromorphe formelle, formelle, au sens de Birkhoff formelle correspondent ainsi les classifications méromorphe, analytique, au sens de Birkhoff (analytique). Nous avons déjà cité plusieurs méthodes de classification :

- 1° par l’interprétation cohomologique (MALGRANGE-SIBUYA),
- 2° par l’équation du pont (ECALLE),
- 3° par le π_1 sauvage (RAMIS).

Ces méthodes mettent en bijection l’ensemble des classes analytiques avec un autre ensemble ... plus ou moins accessible. On ne fait pas comme pour les classifications formelles le choix d’un système dans chaque classe d’équivalence pour caractériser celle-ci parce qu’on ne dispose d’aucun critère de choix privilégié algorithmique.

Nous détaillons maintenant ce qu’on entend par classifications “analytiques” par l’interprétation cohomologique.

4.1. Les étapes de la classification

Plaçons-nous pour fixer les idées dans le cadre de Birkhoff. Tous les énoncés se transposent de façon évidente au cadre analytique ou méromorphe.

Les étapes de la classification sont les suivantes :

1° On fixe une classe de Birkhoff formelle et dans celle-ci une forme normale de référence $[A_0]$ (a priori quelconque, si besoin est ou à loisir une forme normale d’Hermite).

2° Dans cette classe formelle, on classe à équivalence analytique près non pas les systèmes différentiels $[A]$ mais les couples $([A], \hat{F})$ de systèmes $[A]$ munis d’une transformation $\hat{F}$ de $[A_0]$ en $[A]$.

Rappelons que $\hat{F}$ est une transformation (de Birkhoff) de $[A_0]$ en $[A]$ si elle vérifie les deux conditions $\hat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$ et $A = \hat{F} A_0$. Dès lors qu’on a fixé $[A_0]$, le système $[A]$ est donc déterminé par la donnée de $\hat{F}$ et il revient au même de se donner le couple $([A], \hat{F})$ ou la transformation $\hat{F}$ seule.

Notons $\hat{G}_I(A_0) = \{\hat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]]) \mid \hat{F} A_0 \text{ soit à coefficients méromorphes}\}$ l’ensemble des transformations de $[A_0]$. La relation d’équivalence analytique se traduit sur $\hat{G}_I(A_0)$ par l’action à gauche du groupe

* “analytique” par opposition à “formel” signifie soit méromorphe, soit analytique, soit de Birkhoff.

$G_I = GL_I(n, \mathbb{C}\{x\})$ de celles des transformations de $\widehat{G}_I(A_0)$ qui sont analytiques.

Le classifiant correspondant est donc le quotient

$$G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0) \quad .$$

3 On déduit la classification analytique des systèmes $[A]$ de la classification précédente par un nouveau passage au quotient qui traduit l'identification d'un système $[A]$ à l'ensemble des transformations $\widehat{F}$ de $[A_0]$ en $[A]$ i.e. telles que $\widehat{F} A_0 = A$.

Ce quotient est le quotient à droite de $G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0)$ par le groupe $G_{I,0}(A_0)$ des isotropies (de Birkhoff) de $[A_0]$:

$$G_{I,0}(A_0) = \{\widehat{F} \in \widehat{G}_I(A_0) \mid \widehat{F} A_0 = A_0\} \quad .$$

Le classifiant cherché des classes analytiques des systèmes $[A]$ de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$ est donc le double quotient

$$G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0) / G_{I,0}(A_0)$$

de $\widehat{G}_I(A_0)$ par G_I à gauche et par $G_{I,0}(A_0)$ à droite.

Il lui correspond la relation d'équivalence $\widehat{F} \sim \widehat{F}'$ ($\widehat{F}$ et $\widehat{F}' \in \widehat{G}_I(A_0)$) si et seulement si il existe φ analytique ($\varphi \in G_I$) et ψ isotropie de $[A_0]$ ($\psi \in \widehat{G}_{I,0}(A_0)$) telles que $\widehat{F} = \varphi \widehat{F}' \psi$.

Notons

$\widehat{G}_{\text{an}}(A_0)$, $\widehat{G}_{\text{mer}}(A_0)$ les ensembles de transformations formelles ou méromorphes formelles de $[A_0]$,

$G_{\text{an}} = GL(n, \mathbb{C}\{x\})$ ou $G_{\text{mer}} = GL(n, \mathbb{C}\{x\}[1/x])$ les groupes de transformations analytiques ou méromorphes,

et $\widehat{G}_{\text{an},0}(A_0)$, $\widehat{G}_{\text{mer},0}(A_0)$ les groupes des isotropies analytiques ou méromorphes de $[A_0]$.

Nous noterons aussi $\widehat{G}(A_0)$, G et G_0 sans les indices I , an ou mer lorsque le contexte est indifférent ou ne prête pas à ambiguïté.

REMARQUE I.7. Comparaison des différents cadres.

i) On a les isomorphismes canoniques évidents

$$G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0) \simeq G_{\text{an}} \setminus \widehat{G}_{\text{an}}(A_0) \simeq G_{\text{mer}} \setminus \widehat{G}_{\text{mer}}(A_0) \quad .$$

Ainsi la classification des transformations (point 2 ci-dessus) est indépendante du contexte choisi. C'est la partie difficile de la classification. Nous la développons plus loin (théorème d'isomorphisme de Malgrange-Sibuya).

ii) Les groupes d'isotropie $G_{I,0}(A_0)$, $G_{\text{an},0}(A_0)$ et $G_{\text{mer},0}(A_0)$ ne sont en général pas égaux (voir les exemples en 4.2 ci-dessous). Par suite, la classification des systèmes dépend du contexte choisi.

4.2. Groupes des isotopies d'une forme normale d'Hermite

Les groupes des isotopies sont a priori des groupes de séries formelles. On montre que ([Jur78], p.55) si $[A_0]$ est une forme normale d'Hermite alors ces groupes sont "algébriques" ($G_{I,0}$ et $G_{\text{an},0}$ sont formés de matrices à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$, $G_{\text{mer},0}$ dans $\mathbb{C}[x, 1/x]$).

Ils sont faciles à déterminer à partir d'une solution normale d'Hermite X_0 de $[A_0]$.

$G_{\text{an},0}$ et $G_{\text{mer},0}$ contiennent toutes les homothéties λI , $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nous dirons qu'ils sont triviaux lorsqu'ils ne contiennent aucune autre transformation.

Exemple I.8

La solution normale d'Hermite X_0 de $[A_0]$ déterminée par les conventions choisies (I.3.2) est de la forme $X_0 = x^J U e^Q$.

Alors

$G_{I,0}(A_0)$ est trivial ($G_{I,0}(A_0) = \{I\}$),

$G_{\text{an},0}(A_0) = G_{\text{mer},0}(A_0)$ sont constitués des matrices constantes inversibles qui commutent avec Q , U et J .

Cas particulier

$X_0 = e^Q$, $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ où les q_j sont deux à deux distincts.

Alors, $G_{\text{an},0}(A_0) = G_{\text{mer},0}(A_0) = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\} \simeq \mathbb{C}^{*n}$.

DÉMONSTRATION : $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ est une isotropie de $[A_0]$ si et seulement si il existe une matrice constante inversible C telle que $\hat{F}X_0 = X_0C$. Or $X_0CX_0^{-1}$ est une série formelle si et seulement si C commute avec Q , U et J ([Jur78], Satz II) d'où le résultat.

Conséquence I.9

Soit $[A_0]$ un système de solution d'Hermite $X_0 = x^J U e^Q$.

Alors, pour tout $[A]$ dans la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$, il existe une unique transformation de Birkhoff de $[A_0]$ en $[A]$.

DÉMONSTRATION : En effet, s'il en existait deux, $\hat{F}$ et $\hat{G}$, alors $\hat{F}^{-1}\hat{G}$ serait une isotropie de Birkhoff de $[A_0]$ et donc égale à I .

Exemple I.10

$X_0 = x^K x^J U e^Q$ avec $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ et (pour simplifier) $k_1 > k_2 > \dots > k_n$.

Alors,

$G_{I,0}(A_0)$ est l'ensemble des matrices de la forme $x^K(I + N)x^{-K}$ où N est une matrice constante, nilpotente, triangulaire supérieure et qui commute avec Q , U et J ,

$G_{\text{an},0}(A_0)$ est l'ensemble des matrices $x^K M x^{-K}$ où M est une matrice constante, triangulaire supérieure, inversible et qui commute avec Q , U et J ,

$G_{\text{mer},0}(A_0)$ est l'ensemble des matrices $x^K M x^{-K}$ où M est constante inversible et commute avec Q , U et J .

Exemple I.11

$n = 2$, $X_0 = P_1(1/x)e^{Q(1/x)}$ où $Q = \text{diag}(q_1, q_2)$ avec $q_1 \neq q_2$ et $P_1(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1/x) & 1 \end{pmatrix}$ avec $p \in \frac{1}{x}\mathbb{C}[1/x]$ et $p \neq 0$.

Alors,

$G_{I,0}(A_0)$ et $G_{\text{an},0}(A_0)$ sont triviaux,

$G_{\text{mer},0}(A_0)$ est constitué des matrices de la forme

$$P_1\left(\frac{1}{x}\right)\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P_1\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)p(1/x) & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Il est isomorphe à $\mathbb{C}^{*2}$.

DÉMONSTRATION : Comme dans l'exemple I.8, une isotropie $\hat{F}$ est nécessairement de la forme $\hat{F} = X_0 C X_0^{-1}$ avec C qui commute avec Q ; donc C est diagonale, $C = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. La matrice $P_1 C P_1^{-1}$ est méromorphe. Elle n'est analytique que si C est scalaire ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$).

Remarquer que $G_{\text{mer},0}(A_0)$ n'est trivial que si la condition C commute avec Q , U et J impose $C = \lambda I$.

4.3. Isomorphisme de Malgrange-Sibuya

Le point central de la classification est le point 2. Il s'agit de décrire le quotient $G \setminus \hat{G}(A_0)$. Le théorème de Malgrange-Sibuya interprète ce quotient en termes de classes de cohomologie.

Rappelons ci-dessous comment on associe une classe de cohomologie à un élément de $\hat{G} = GL(n, \mathbb{C}[[x]])$ ou de $\hat{G}(A_0)$. Nous avons vu que $\hat{G}(A_0)$

peut être indifféremment l'un quelconque des ensembles $\widehat{G}_I(A_0)$, $\widehat{G}_{\text{an}}(A_0)$, $\widehat{G}_{\text{mer}}(A_0)$. Choisissons pour fixer les idées $\widehat{G}(A_0) = \widehat{G}_{\text{an}}(A_0)$.

Soit S^1 le cercle unité des directions issues de 0 dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{U} = \{U_j; j \in J\}$ un recouvrement de S^1 par des ouverts U_j connexes sans intersection trois à trois et ordonnés cycliquement sur S^1 (les U_j doivent être vus comme des secteurs d'origine 0 et de rayon fini dans $\mathbb{C}$). Un tel recouvrement de S^1 est souvent qualifié de “bon”; nous donnerons une autre définition d'un bon recouvrement ultérieurement (III.1.c).

Soit $\widehat{F} \in \widehat{G}$. On sait alors, par le théorème de Borel-Ritt ([Wa65]) qu'il existe des matrices F_j dont les coefficients sont analytiques ($F_j \in GL(n, \mathcal{O}(U_j))$) et qui sont asymptotiques à $\widehat{F}$ sur U_j . On peut donc associer à $\widehat{F}$ la 1-cochaîne $(F_j^{-1}F_{j+1})$ définie sur le 1-nerf $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j = U_j \cap U_{j+1}\}$ de $\mathcal{U}$. Cette 1-cochaîne est à valeurs dans le faisceau Λ_I au-dessus de S^1 des germes d'applications analytiques plates en 0 : les sections de Λ_I au-dessus d'un secteur U de sommet 0 sont les matrices $F \in GL(n, \mathcal{O}(U))$ asymptotiques à l'identité sur U .

Les 1-cochaînes associées aux différents choix des réalisations F_j de $\widehat{F}$ définissent la même classe de cohomologie dans $H^1(S^1; \Lambda_I)$. En outre, cette classe de cohomologie ne dépend que de la classe analytique (à gauche) de $\widehat{F}$. Elle définit donc une application de $G \setminus \widehat{G}$ dans $H^1(S^1; \Lambda_I)$. On l'appelle l'application de Malgrange-Sibuya et on la note $\exp \mu$.

THÉORÈME DE MALGRANGE-SIBUYA (classique). *L'application*

$$\exp \mu : G \setminus \widehat{G} \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda_I)$$

est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $\widehat{F}$ appartienne à $\widehat{G}(A_0)$. Alors, le théorème des développements asymptotiques appliqué au système $[A_0; A = \widehat{F} A_0]$ qui admet $\widehat{F}$ pour solution, permet d'imposer en outre que les F_j soient solution du même système. La 1-cochaîne construite est à valeurs dans le **faisceau** $\Lambda(A_0)$ **des sections d'isotropie plates de** $[A_0]$ au-dessus de S^1 : une section au-dessus d'un secteur U de sommet 0 est une matrice F de $GL(n, \mathcal{O}(U))$ solution du système d'isotropie $[A_0; A_0]$ de $[A_0]$ et asymptotique à I sur U . L'application $\exp \mu$ ci-dessus induit donc une application que nous noterons encore $\exp \mu$ de $G \setminus \widehat{G}(A_0)$ dans $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

Il est facile d'en déduire une version dite “avec systèmes” du théorème d'isomorphisme précédent ([Mal79]) :

THÉORÈME DE MALGRANGE-SIBUYA (avec systèmes). *L'application*

$$\exp \mu : G \setminus \widehat{G}(A_0) \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(A_0))$$

est un isomorphisme.

C'est à cette application $\exp \mu$ que nous ferons référence lorsque nous parlerons d'isomorphisme de Malgrange-Sibuya sans autre précision.

Ce théorème a été démontré successivement par Y. Sibuya ([Sib76]), B. Malgrange ([Mal79], [Mal83]) et J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR82]).

La première démonstration du théorème classique due à Sibuya n'est publiée à ce jour qu'en japonais. Elle devrait bientôt figurer dans un livre de Sibuya ([Sib90]) à paraître en anglais. L'ingrédient essentiel est un lemme de matrices holomorphes de Cartan. Le principe consiste à itérer l'application de Cauchy-Heine (cf. ci-dessous VII.2), flèche inverse de la flèche infinitésimale μ associée à $\exp \mu$: Cette application fournit des fonctions (F_j) dont le développement asymptotique $\hat{F}$ est bon jusqu'à l'ordre un. A chaque étape, on modifie la 1-cochaîne à l'aide des F_j déjà construites de façon à ce que l'application de Cauchy-Heine fournisse de nouvelles fonctions (F_j) dont le développement asymptotique est bon un cran plus loin. Des majorations fines permettent de passer à la limite.

La démonstration de Malgrange est une version avec condition de développement asymptotique à l'origine du théorème de Grauert : "Tout fibré au-dessus d'une variété de Stein (ici D^*) qui est topologiquement trivial est analytiquement trivial".

La démonstration de Martinet-Ramis en est une variante suggérée par Malgrange dans [Mal81]. Elle est basée sur le théorème d'intégration des structures presque complexes de Newlander-Nirenberg ([MR82]).

La classification de Birkhoff, analytique ou méromorphe des systèmes s'en déduit en quotientant par l'action du groupe G_0 des isotropies de Birkhoff, analytiques ou méromorphes de (A_0) .

COROLLAIRE. *L'application*

$$\exp \tilde{\mu} : G \setminus \hat{G}(A_0)/G_0 \longrightarrow G_0^{-1} \cdot H^1(S^1; \Lambda(A_0)) \cdot G_0$$

déduite de $\exp \mu$ par passage aux quotients fournit une classification canonique des systèmes à isomorphisme de Birkhoff, analytique ou méromorphe près.

5. Classification méromorphe des connexions

Les résultats de classification précédents s'étendent aux connexions.

On choisit une forme normale (V_0, ∇_0) , K -vectoriel à connexion quelconque dans $\mathcal{C}$.

On considère la catégorie $\mathcal{T}_{(V_0, \nabla_0)}$ des transformations formelles à l'origine O de la forme normale (V_0, ∇_0) :

- ses objets sont les (germes de) K -vectoriels à connexion (V, ∇) munis d'un isomorphisme φ de leur formalisé $(\widehat{V}, \widehat{\nabla})$ dans celui de (V_0, ∇_0) (ils sont désignés par “meromorphic marked pairs” dans [BV89]);
- ses flèches sont les morphismes $u : (V, \nabla) \rightarrow (V', \nabla')$ tels que le diagramme suivant entre les formalisés commute

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{V}, \widehat{\nabla}) & \xrightarrow{\widehat{u}} & (\widehat{V}', \widehat{\nabla}') \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi' \\ & (\widehat{V}_0, \widehat{\nabla}_0) & \end{array}$$

Notons $\mathcal{M}(V_0, \nabla_0)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets de cette catégorie.

On définit comme pour les systèmes différentiels le faisceau $\Lambda(V_0, \nabla_0)$ sur S^1 des isotropies plates de (V_0, ∇_0) et une application

$$\text{Exp } \mu : \mathcal{M}(V_0, \nabla_0) \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(V_0, \nabla_0)) .$$

On peut énoncer

THÉORÈME DE MALGRANGE-SIBUYA. *L'application $\text{Exp } \mu$ est une bijection canonique.*

La classification méromorphe des connexions s'en déduit en quotientant par l'action du groupe $G_0 = G_0(\nabla_0)$ des isotropies de (V_0, ∇_0) .

COROLLAIRE. *L'application*

$$\text{Exp } \tilde{\mu} : \mathcal{M}(V_0, \nabla_0)/G_0 \longrightarrow G_0^{-1} \cdot H^1(S^1; \Lambda(V_0, \nabla_0)) \cdot G_0$$

déduite de $\text{Exp } \mu$ par passage aux quotients fournit une classification canonique des connexions à isomorphisme méromorphe près.

II. Faisceau $\Lambda(A_0)$ des sections d'isotropie plates de la forme normale d'Hermite. Groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$

Fixons $[A_0]$ une forme normale d'Hermite et X_0 l'une de ses solutions d'Hermite et notons $\Lambda = \Lambda(A_0)$ le faisceau des sections d'isotropie plates de $[A_0]$ défini au chapitre précédent (cf. I.4.3). Le faisceau Λ est un faisceau de groupes non abéliens sur S^1 .

1. Représentations de Λ : Matrices de Stokes

L'expression formelle X_0 définit de façon naturelle une vraie fonction encore notée X_0 sur la surface de Riemann du logarithme (revêtement universel $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de $\mathbb{C}^*$). A tout choix $\tilde{\theta}$ d'un relèvement de θ sur $\tilde{\mathbb{C}}^*$ (i.e un choix d'une détermination de l'argument) correspond un choix d'une détermination $X_{0,\tilde{\theta}}$ de X_0 définie sur un secteur de sommet 0 contenant la direction θ .

Par définition, un germe $\varphi_\theta \in \Lambda_\theta$ transforme la solution fondamentale $X_{0,\tilde{\theta}}$ de $[A_0]$ en une solution fondamentale de $[A_0]$. Il existe donc une matrice constante inversible $C_{\tilde{\theta}}$ (dépendant de $\tilde{\theta}$ c'est-à-dire de la détermination choisie) telle que

$$\varphi_\theta(x) = X_{0,\tilde{\theta}}(x) C_{\tilde{\theta}} X_{0,\tilde{\theta}}(x)^{-1}$$

Nous dirons que la matrice $C_{\tilde{\theta}}$ est la **représentation** du germe φ_θ dans le feuillet $\tilde{\theta}$ de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ via X_0 . Elle est déterminée de manière unique à partir de φ_θ et de $\tilde{\theta}$ à condition d'avoir fixé une solution fondamentale formelle X_0 .

1.1 Ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ associé à une direction $\tilde{\theta}$

DÉFINITION II.1. On peut munir l'ensemble $\{q_1, \dots, q_n\}$ des éléments diagonaux de la matrice Q , partie irrégulière de X_0 , de la **relation d'ordre** suivante :

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell \Leftrightarrow e^{(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x})} \text{ est plate sur un voisinage de la direction } \tilde{\theta}.$$

Plate signifie ici asymptotique à 0 (contexte additif).

En notant $a/x^k = \text{pp}((q_j - q_\ell)(\frac{1}{x}))$ la partie principale en 0 de $(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x})$, on a aussi

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell \Leftrightarrow \text{Re}(ae^{-ik\tilde{\theta}}) < 0$$

On dira alors que k est le **degré** du polynôme $q = q_j - q_\ell$ ou **l'ordre** de l'exponentielle e^q (k n'est pas toujours entier; il peut être rationnel quand q est ramifié) et que $\operatorname{Re}(ae^{-ik\tilde{\theta}})$ est le **type** de l'exponentielle e^q dans la direction $\tilde{\theta}$.

PROPOSITION II.2. *Le groupe Λ_θ des germes d'isotropie de $[A_0]$ en θ est représenté dans un feuillet $\tilde{\theta}$ quelconque via X_0 par le groupe noté $\operatorname{Rep}_{\tilde{\theta}, X_0}(\Lambda_\theta)$ ou $\operatorname{Rep}_{\tilde{\theta}}(\Lambda_\theta)$ des matrices de la forme*

$$C_{\tilde{\theta}} = I + \sum_{(j,\ell) \mid q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)}$$

où les $c_{(j,\ell)}$ sont des coefficients constants dans $\mathbb{C}$ et les $E_{(j,\ell)}$ les matrices élémentaires dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indices (j,ℓ) qui vaut 1.

DÉMONSTRATION : L'expression de $C_{\tilde{\theta}}$ traduit la condition de platitude imposée dans la définition des germes $\varphi_\theta \in \Lambda_\theta$: φ_θ asymptotique à I au voisinage de la direction θ . Il suffit de remarquer que $X_{0,\tilde{\theta}}(x)C_{\tilde{\theta}}X_{0,\tilde{\theta}}(x)^{-1}$ est plat si et seulement si $e^Q C_{\tilde{\theta}} e^{-Q}$ est plat.

DÉFINITION II.3. Nous dirons qu'une exponentielle $e^{q_j - q_\ell}$ est une **exponentielle de la représentation $C_{\tilde{\theta}}$ d'un germe $\varphi_\theta \in \Lambda_\theta$** si elle apparaît dans l'expression $e^Q C_{\tilde{\theta}} e^{-Q}$ c'est-à-dire si le coefficient $c_{(j,\ell)}$ dans l'expression développée de $C_{\tilde{\theta}}$ est non nul.

1.2 Unipotence

La relation $\prec_{\tilde{\theta}}$ n'est pas un ordre total sur la diagonale $q_1, \dots, q_n$ de Q . Pour $\tilde{\theta}$ fixé, on peut néanmoins ordonner $q_1, \dots, q_n$ par ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ croissant au sens suivant : Si $j < \ell$ et si $q_j \neq q_\ell$, alors ou bien q_j et q_ℓ ne sont pas comparables ou bien on a $q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell$. Alors les matrices

$$C_{\tilde{\theta}} = I + \sum_{(j,\ell) \mid q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)} \text{ de } \operatorname{Rep}_{\tilde{\theta}}(\Lambda_\theta) \text{ sont triangulaires supérieures}$$

avec une diagonale égale à l'identité I . En effet, on n'a jamais $q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_j$ et si $q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell$, alors $j < \ell$ et en particulier on n'a pas $q_\ell \prec_{\tilde{\theta}} q_j$. Les matrices $C_{\tilde{\theta}}$ sont donc unipotentes et avec elles les germes $\varphi_\theta = X_{0,\tilde{\theta}} C_{\tilde{\theta}} X_{0,\tilde{\theta}}$. On peut donc énoncer :

PROPOSITION II.4.

- (i) *Le faisceau Λ est un faisceau de groupes non abéliens unipotents.*
- (ii) *Pour toute direction θ issue de 0 dans $\mathbb{C}$ et pour tout relèvement $\tilde{\theta}$ de θ à $\tilde{\mathbb{C}}^*$, il existe une permutation des éléments diagonaux $q_1, \dots, q_n$ de Q pour laquelle les éléments de $\text{Rep}_{\tilde{\theta}}(\Lambda_{\theta})$ sont sous forme triangulaire simultanée. Sauf cas trivial, cette réduction n'est pas valable simultanément pour toutes les directions θ .*

1.3 Changement de feuillet

On passe d'un feuillet de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ au suivant dans la solution "formelle" X_0 en substituant $xe^{2i\pi}$ à x . Si on note $\hat{M}$ la matrice de monodromie formelle on a $X_0(xe^{2i\pi}) = X_0(x)\hat{M}$. On a donc la relation

$$C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \hat{M}^{-1} C_{\tilde{\theta}} \hat{M}$$

Détaillons un peu plus cette relation sur l'écriture développée de $C_{\tilde{\theta}}$. Nous avons vu que dans la substitution de $xe^{2i\pi}$ à x les termes $q_1, \dots, q_n$ de Q subissent une permutation $\hat{M}_{\text{irr}}$ (C'est une permutation circulaire dans chaque bloc de ramification lorsqu'on a ordonné les polynômes q_j comme dans la forme d'Hermite fine). Notons q_{j-} l'antécédent de q_j dans cette permutation. On a $q_{j-}(\frac{1}{xe^{2i\pi}}) = q_j(\frac{1}{x})$ d'où l'équivalence

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_{\ell} \Leftrightarrow q_{j-} \prec_{\tilde{\theta}+2\pi} q_{\ell-} .$$

Dans le cas sans ramification, l'application $j \mapsto j-$ est l'identité. La notion d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ est indépendante du relèvement $\tilde{\theta}$ de θ . On peut la noter $\prec_{\theta}$ et, pour tout germe φ_{θ} , l'ensemble des exponentielles de sa représentation est indépendant du feuillet $\tilde{\theta}$. La matrice $C_{\tilde{\theta}}$ garde la même forme lorsqu'on change de feuillet

$$C_{\tilde{\theta}} = I + \sum_{(j,\ell) \mid q_j \prec_{\theta} q_{\ell}} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)} .$$

L'ensemble de sommation reste le même. La valeur des coefficients $c_{(j,\ell)}$ n'est pas conservée.

EXEMPLE II.5. Cas sans ramification en dimension $n = 2$.

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} x^{\lambda_1} e^{q_1(\frac{1}{x})} & 0 \\ 0 & x^{\lambda_2} e^{q_2(\frac{1}{x})} \end{pmatrix}$$

La matrice de monodromie formelle $\hat{M} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\lambda_2} \end{pmatrix}$ est diagonale.

Si $C_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}^*$, est la matrice d'un germe φ_{θ} dans le feuillet $\tilde{\theta}$, alors dans le feuillet suivant la matrice représentant φ_{θ} est donnée par

$$C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & ce^{-2i\pi(\lambda_1-\lambda_2)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $C_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & 1 \end{pmatrix}$, alors $C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c'e^{-2i\pi(-\lambda_1+\lambda_2)} & 1 \end{pmatrix}$. La forme de $C_{\tilde{\theta}}$ est conservée. La valeur des coefficients change.

Dans le cas avec ramification, l'application $j \mapsto j-$ est une vraie permutation. La notion d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ change avec le feuillet. Les exponentielles de la représentation changent lorsqu'on passe du feuillet au suivant. Les matrices $C_{\tilde{\theta}}$ et $C_{\tilde{\theta}+2\pi}$ n'ont pas la même forme : on n'a plus dans les expressions de $C_{\tilde{\theta}}$ et de $C_{\tilde{\theta}+2\pi}$ le même ensemble de sommation.

EXEMPLE II.6. Cas avec ramification en dimension $n = 2$.

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} x^{\lambda} & 0 \\ 0 & x^{\lambda+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1(\frac{1}{x}) & 0 \\ 0 & q_2(\frac{1}{x}) \end{pmatrix}$$

On ne peut avoir ici que la ramification $\frac{1}{2}$ (car la dimension vaut $n = 2$) et on a nécessairement $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1}{2}$ modulo $\mathbb{Z}$. En réduisant modulo les entiers, on obtient $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1}{2}$. De plus, on a $q_1(\frac{1}{xe^{2i\pi}}) = q_2(\frac{1}{x})$. Ainsi $\hat{M}_{\text{irr}}$ est la matrice de permutation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\pi\lambda} \\ e^{2i\pi\lambda} & 0 \end{pmatrix}$

Si $C_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}^*$, est la matrice d'un germe φ_{θ} dans le feuillet $\tilde{\theta}$, alors dans le feuillet suivant la matrice représentant φ_{θ} est donnée par

$$C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Si $C_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, alors $C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices $C_{\tilde{\theta}}$ et $C_{\tilde{\theta}+2\pi}$ n'ont pas la même forme : elles sont conjuguées par la permutation $\hat{M}_{\text{irr}}$.

1.4. Matrices de Stokes d'un système $[A]$

Supposons que φ_{θ} soit le germe en θ de l'une des composantes d'une 1-cochaîne associée au système $[A]$ dans la construction de l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya. On dit alors qu'une représentation $C_{\tilde{\theta}}$ de φ_{θ} est une **matrice de Stokes usuelle du système** $[A]$.

Nous donnons plus loin (Définition II.18) une définition beaucoup plus restrictive d'une matrice de Stokes en nous restreignant aux composantes d'une 1-cochaîne bien particulière que nous appelons la 1-cochaîne fondamentale. Les matrices de Stokes ainsi définies deviennent naturelles : elles s'interprètent en termes de lacets du π_1 sauvage de Ramis ([Ra88]) ; elles sont en particulier galoisiennes ainsi que chacun de leurs "facteurs".

2. Filtration de Λ par les niveaux

Etant donné un germe φ_{θ} , les ordres des différentes exponentielles de sa représentation dans un feuillet $\tilde{\theta}$ sont indépendants du feuillet choisi. On a en effet $d^0(q_{j-} - q_{\ell-}) = d^0(q_j - q_{\ell})$ pour tout couple (j, ℓ) . Ces ordres constituent donc une propriété intrinsèque des germes φ_{θ} .

DÉFINITION II.7.

- i) Un **germe** φ_{θ} du faisceau Λ est dit **pur de niveau** k si toutes les exponentielles $e^{q_j - q_{\ell}}$ de l'une quelconque de ses représentations sont d'ordre exactement k ($k \in \mathbb{Q}$).
- ii) Il est dit **de niveau** $\leq k$, $< k$, $\geq k$, ou $> k$ si toutes les exponentielles de l'une quelconque de ses représentations sont d'ordre $\leq k$, $< k$, $\geq k$ ou $> k$.

On note Λ^k le sous-faisceau des germes purs de niveau k et $\Lambda^{\leq k}$, $\Lambda^{< k}$, ... les sous-faisceaux de Λ des germes de niveau $\leq k$, $< k$, ...

On peut donner une version analytique de cette définition : nous dirons qu'une fonction f définie sur un secteur U de sommet 0 est **exponentiellement plate d'ordre** k sur U si sur tout germe de sous-secteur V fermé de sommet 0 dans U , elle est majorée par une exponentielle d'ordre k et plate sur V . On peut alors énoncer la définition précédente sous la forme suivante qui a l'avantage de s'étendre aux isotopies de n'importe quel système $[A]$, pas nécessairement une forme normale d'Hermite $[A_0]$.

DÉFINITION II.7 BIS.

- i) Le sous-faisceau Λ^k des **germes purs de niveau k** de Λ est le faisceau de sous-groupes engendré par les sections de Λ exponentiellement plates d'ordre k sur des secteurs d'ouverture $\frac{\pi}{k}$.
- ii) Les sous-faisceaux $\Lambda^{\leq k}$, $\Lambda^{< k}$, ... **des germes de niveau $\leq k$, $< k$** , ... sont les sous-faisceaux de Λ engendrés par les germes purs de niveau $\leq k$, $< k$, ...

Dans la suite, nous ne nous servirons que des faisceaux Λ^k , $\Lambda^{\leq k}$, et $\Lambda^{< k}$. C'est pourquoi à la suite des énoncés portant sur $\Lambda^{\leq k}$, et $\Lambda^{< k}$, nous omettrons en général les énoncés correspondants sur $\Lambda^{\geq k}$, et $\Lambda^{> k}$ même s'il sont vrais eux aussi.

LEMME II.8.

- i) le produit de deux germes purs de niveau k est un germe pur de niveau k .
- ii) Si g est un germe de niveau $< k$ et f un germe pur de niveau k , alors fg , gf et g coïncident modulo des termes purs de niveau k . On note $fg =_{< k} gf =_{< k} g$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de le vérifier sur les représentations des germes considérés dans un feuillet $\tilde{\theta}$ quelconque. Les deux affirmations résultent alors immédiatement des propriétés de la relation d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$:

- i) Le produit de deux exponentielles plates d'ordre k est une exponentielle plate et du même ordre k .
- ii) Le produit d'une exponentielle plate d'ordre k par une exponentielle plate d'ordre $< k$ est une exponentielle plate d'ordre k .

PROPOSITION II.9.

- i) Pour tout k , les faisceaux Λ^k , $\Lambda^{\leq k}$, et $\Lambda^{< k}$ sont des faisceaux de sous-groupes de Λ .
- ii) L'ensemble des niveaux de Λ , c'est-à-dire des k pour lesquels Λ^k est non trivial, est fini. On le note $\mathcal{K} = \{k_r < \dots < k_1\}$.

DÉMONSTRATION :

- i) Le lemme II.8 i) montre que Λ^k est stable par produit. Par ailleurs, dans une représentation dans un feuillet $\tilde{\theta}$ quelconque, une matrice élémentaire $I + cE_{(j,\ell)}$ (pure) de niveau k a pour inverse $I - cE_{(j,\ell)}$ qui est pure de même niveau k . Et toute matrice $I + \sum c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)}$ pure de niveau k s'écrit comme un produit de matrices élémentaires de niveau k (par exemple, les matrices $I + c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)}$ elles-mêmes à condition d'effectuer le produit dans un ordre convenable). Ainsi, l'inverse de tout germe pur de niveau k est un germe pur de niveau k et Λ^k est un groupe.

Chapitre II

$\Lambda^{\leq k}$ et $\Lambda^{< k}$ sont les groupes engendrés par les groupes $\Lambda^{k'}$ pour $k' \leq k$ et pour $k' < k$.

ii) Les niveaux de Λ sont les degrés des différents polynômes (éventuellement ramifiés) $q_j - q_\ell$ pour tous les couples (q_j, q_ℓ) , $q_j \neq q_\ell$, extraits de la partie irrégulière Q de X_0 . Ils sont donc en nombre fini.

On montre que les niveaux sont aussi les pentes du polygone de Newton du système $\text{End}[A_0] : \frac{dX}{dx} - [A_0, X] = 0$.

PROPOSITION II.10. Pour tout $k \in \mathcal{K}$,

- i) Le faisceau de groupes Λ^k est distingué dans $\Lambda^{\leq k}$,
- ii) la suite exacte de faisceaux

$$1 \longrightarrow \Lambda^k \xrightarrow{i} \Lambda^{\leq k} \xrightarrow{p} \Lambda^{< k} \longrightarrow 1 ,$$

où i est l'injection canonique de $\Lambda^{< k}$ dans $\Lambda^{\leq k}$ et p la troncature aux termes de niveau $< k$, est scindée.

DÉMONSTRATION :

i) Si g est un germe en θ de niveau $< k$ et f un germe pur de niveau k , alors le produit gfg^{-1} est de niveau $\leq k$. Le lemme II.8.ii) montre que $gfg^{-1} = {}_{<k}fgg^{-1} = {}_{<k}f = {}_{<k}I$. Le germe gfg^{-1} est donc pur de niveau k .

ii) est évident; l'injection canonique de $\Lambda^{< k}$ dans $\Lambda^{\leq k}$ est une section de p .

COROLLAIRE II.11. La filtration

$$\Lambda^{k_1} = \Lambda^{\geq k_1} \subset \Lambda^{\geq k_2} \subset \dots \subset \Lambda^{\geq k_r} = \Lambda$$

est normale.

COROLLAIRE II.12. Factorisation par niveaux - Algorithme.

i) Pour tout $k \in \mathcal{K}$, le faisceau $\Lambda^{\leq k}$ s'identifie de deux façons différentes à un produit semi-direct de $\Lambda^{< k}$ et de Λ^k :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\leq k} &\simeq \Lambda^{< k} \ltimes \Lambda^k \\ &\simeq \Lambda^k \rtimes \Lambda^{< k} \end{aligned}$$

En d'autres termes, tout germe f du faisceau $\Lambda^{\leq k}$ se factorise de deux façons différentes en un produit d'un germe de niveau $< k$ et d'un germe pur de niveau k :

$$f^{\leq k} = f^{< k} g^k \quad \text{ou} \quad f^{\leq k} = f^k f^{< k}$$

avec $f^{<k} \in \Lambda^{<k}$, g^k et $f^k \in \Lambda^k$.

Le facteur $f^{<k}$ est indépendant du sens de factorisation. On l'obtient en supprimant dans n'importe quelle représentation de $f^{\leq k}$ tous les termes purs de niveau k . On en déduit le facteur de niveau k en posant $g^k = (f^{<k})^{-1} f^{\leq k}$ ou $f^k = f^{\leq k} (f^{<k})^{-1}$.

ii) Le faisceau Λ s'identifie au produit semi-direct dans un ordre arbitraire des sous-faisceaux Λ^k de ses germes purs de niveau k .

$$\Lambda \simeq \times_{k \in \mathcal{K}} \Lambda^k$$

L'algorithme de factorisation précédent se généralise en un algorithme de factorisation par niveau dans n'importe quel ordre. Seul le facteur de plus bas niveau est indépendant de l'ordre des facteurs.

3. Sous-fibres fondamentales de Λ : les groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$

3.1. Ordre $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$ associé à une direction $\tilde{\theta}$

DÉFINITION II.13. On peut munir l'ensemble $\{q_1, \dots, q_n\}$ des éléments diagonaux de la matrice Q , partie irrégulière de X_0 , de la **relation d'ordre** suivante :

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}, \max} q_\ell \Leftrightarrow \tilde{\theta} \text{ est une direction de décroissance maximale de } e^{(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x})}$$

On dit alors que **l'exponentielle** $e^{q_j - q_\ell}$ **est portée par** $\tilde{\theta}$ ou que $\tilde{\theta}$ **appartient au front de** $q_j - q_\ell$. En notant $\frac{a}{x^k}$ la partie principale en 0 de $(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x})$, on a aussi l'équivalence

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}, \max} q_\ell \Leftrightarrow ae^{-ik\tilde{\theta}} \text{ est réel négatif .}$$

L'ordre de l'exponentielle $e^{q_j - q_\ell}$ est alors $k \in \mathbb{Q}$ et son type dans la direction $\tilde{\theta}$ vaut $ae^{-ik\tilde{\theta}}$.

LEMME II.14 (transitivité). *Le produit de deux exponentielles portées par $\tilde{\theta}$ est une exponentielle portée par $\tilde{\theta}$.*

Les relations d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ et $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$ sont compatibles : Si $q_j \prec_{\tilde{\theta}, \max} q_\ell$, alors $q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell$. La réciproque est fausse.

Changement de feuillet

Comme pour la relation d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$, on a l'équivalence :

$$q_j \prec_{\tilde{\theta}, \max} q_\ell \Leftrightarrow q_{j-} \prec_{\tilde{\theta}+2\pi, \max} q_{\ell-}$$

Dans le cas sans ramification, la relation $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$ est donc elle aussi indépendante du feuillet $\tilde{\theta}$. On peut la noter $\prec_{\theta, \max}$.

3.2. Germes de Stokes

Si le relèvement $\tilde{\theta}$ de θ porte au moins l'une des exponentielles $e^{q_j - q_\ell}$, il en est de même de tout relèvement de θ (dans le feuillet suivant, $\tilde{\theta} + 2\pi$ porte $e^{q_j - q_\ell -}$ qui peut différer de $e^{q_j - q_\ell}$ dans le cas avec ramification). La propriété est une propriété intrinsèque de la direction θ .

DÉFINITION II.15. Une direction α issue de 0 dans $\mathbb{C}$ est appelée une **direction anti-Stokes de $[A_0]$** si l'un quelconque de ses relèvements $\tilde{\alpha}$ à $\tilde{\mathbb{C}}^*$ porte une exponentielle $e^{q_j - q_\ell}$ pour au moins un couple (q_j, q_ℓ) , $q_j \neq q_\ell$ extrait de la diagonale de Q .

PROPOSITION II.16. L'ensemble des directions anti-Stokes de $[A_0]$ est fini. Il est entièrement déterminé par la matrice Q , partie irrégulière de X_0 . Nous le notons $\mathcal{A}(Q)$ ou $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$.

Si toutes les exponentielles de la représentation d'un germe φ_θ dans un feuillet $\tilde{\theta}$ sont portées par $\tilde{\theta}$, alors il en est de même dans tous les feuillets. La propriété est intrinsèque au germe φ_θ .

DÉFINITION II.17. Un germe φ_θ est appelé un **germe de Stokes** si les exponentielles $e^{q_j - q_\ell}$ de sa représentation dans un feuillet quelconque $\tilde{\theta}$ sont toutes portées par $\tilde{\theta}$.

PROPOSITION ET DÉFINITION II.18.

- i) Dans une direction θ qui n'est pas une direction anti-Stokes, tous les germes de Stokes sont triviaux.
- ii) Dans une direction anti-Stokes $\theta = \alpha \in \mathcal{A}$, l'ensemble des germes de Stokes est un sous-groupe non trivial de Λ_α qu'on appelle **groupe de Stokes de $[A_0]$ en α** et qu'on note $\text{Sto}_\alpha(A_0)$.
- iii) Le groupe $\text{Sto}_{\tilde{\alpha}}(A_0)$ des représentations de $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ dans le feuillet $\tilde{\alpha}$ est le sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ constitué des matrices unipotentes

de la forme

$$C_{\tilde{\alpha}} = I + \sum_{(j,\ell) \mid q_j \prec_{\tilde{\alpha}, \max} q_\ell} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)} \quad , \quad c_{(j,\ell)} \in \mathbb{C} \quad .$$

*Contrairement à l'usage, nous appellerons **matrices de Stokes** (dans le feuillet $\tilde{\alpha}$) les matrices de $\text{Sto}_{\tilde{\alpha}}(A_0)$ et **elles seules**. (cf. Définition III.13).*

DÉMONSTRATION :

- i) est évident par définition des directions anti-Stokes et des germes de Stokes.
- ii) se démontre comme la proposition II.9 i) en remplaçant la relation d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ par la relation $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$. En particulier, le lemme II.14 remplace le lemme II.8.i).
- iii) traduit la définition d'un germe de Stokes en α sur la matrice qui le représente dans le feuillet $\tilde{\alpha}$.

NOTATION II.19. Nous noterons désormais $(j, \ell) \mathcal{E} \tilde{\alpha}$ pour exprimer que le couple (j, ℓ) est porté par $\tilde{\alpha}$ c'est-à-dire tel que $q_j \prec_{\tilde{\alpha}, \max} q_\ell$.

Nous montrons dans le chapitre suivant (théorème III.3, définition III.11, corollaire III.12) que toute transformation formelle de $[A_0]$ est caractérisée à équivalence analytique près par la donnée en chaque direction anti-Stokes d'un germe de Stokes (1-cochaîne fondamentale). Par le choix d'un feuillet — usuellement on choisit un même feuillet pour toutes les directions anti-Stokes — les classes analytiques de transformations formelles de $[A_0]$ sont alors caractérisées par la liste de leurs matrices de Stokes (dans le feuillet choisi). La démonstration de ces théorèmes repose de façon essentielle sur la notion de niveau étudiée en II.2 et que nous précisons maintenant en restriction aux germes de Stokes.

3.3. Filtration des groupes de Stokes par les niveaux

La notion de niveau d'un germe d'isotropie et les propriétés afférentes se restreignent sans modification aux germes de Stokes ; les mêmes démonstrations restent valables en remplaçant la relation d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}}$ par la relation d'ordre $\prec_{\tilde{\theta}, \max}$.

DÉFINITION II.20. On appelle **germes de Stokes purs de niveau k , de niveau $\leq k$, $< k$, ... en $\alpha \in \mathcal{A}$** , les éléments des groupes

$$\begin{aligned} \text{Sto}_\alpha^k(A_0) &= \text{Sto}_\alpha(A_0) \cap \Lambda_\alpha^k \\ \text{Sto}_\alpha^{\leq k}(A_0) &= \text{Sto}_\alpha(A_0) \cap \Lambda_\alpha^{\leq k} \\ \text{Sto}_\alpha^{< k}(A_0) &= \text{Sto}_\alpha(A_0) \cap \Lambda_\alpha^{< k} \\ &\dots \end{aligned}$$

intersections du groupe de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ avec les sous-groupes de Λ_α de niveau correspondant.

On note $\mathcal{K}_\alpha$ l'ensemble des niveaux de $\text{Sto}_\alpha(A_0)$, i.e. l'ensemble des $k \in \mathcal{K}$ pour lesquels $\text{Sto}_\alpha^k(A_0)$ est non trivial.

On peut énoncer l'analogie de la proposition II.10 et de ses corollaires.

PROPOSITION II.21. *Pour toute direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $k \in \mathcal{K}$*

- i) *le groupe $\text{Sto}_\alpha^k(A_0)$ est distingué dans $\text{Sto}_\alpha^{\leq k}(A_0)$;*
- ii) *la suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow \text{Sto}_\alpha^k(A_0) \xrightarrow{i} \text{Sto}_\alpha^{\leq k}(A_0) \xrightarrow{p} \text{Sto}_\alpha^{< k}(A_0) \longrightarrow 1 \quad ,$$

où i est l'injection canonique et p la troncature aux niveaux $< k$, est scindée.

COROLLAIRE II.22. *Notons $k'_s < k'_{s-1} < \dots < k'_1$ les éléments de $\mathcal{K}_\alpha$. La filtration*

$$\text{Sto}_\alpha^{k'_1}(A_0) = \text{Sto}_\alpha^{\geq k'_1}(A_0) \subset \text{Sto}_\alpha^{\geq k'_2}(A_0) \subset \dots \subset \text{Sto}_\alpha^{\geq k'_s}(A_0) = \text{Sto}_\alpha(A_0)$$

est normale.

COROLLAIRE II.23.

- i) *Pour tout $k \in \mathcal{K}_\alpha$, le groupe $\text{Sto}_\alpha^{\leq k}(A_0)$ s'identifie de deux façons différentes au produit semi-direct de $\text{Sto}_\alpha^{< k}(A_0)$ et de $\text{Sto}_\alpha^k(A_0)$:*

$$\begin{aligned} \text{Sto}_\alpha^{\leq k}(A_0) &\simeq \text{Sto}_\alpha^{< k}(A_0) \ltimes \text{Sto}_\alpha^k(A_0) \\ &\simeq \text{Sto}_\alpha^k(A_0) \rtimes \text{Sto}_\alpha^{< k}(A_0) \quad . \end{aligned}$$

- ii) *Le groupe $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ s'identifie au produit semi-direct dans un ordre arbitraire des sous-groupes $\text{Sto}_\alpha^k(A_0)$ de ses germes purs de niveau k*

$$\text{Sto}_\alpha(A_0) \simeq \ltimes_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\alpha^k(A_0) \quad .$$

Cette décomposition s'accompagne d'un algorithme de factorisation suivant les niveaux analogue à celui énoncé dans le corollaire II.12.

III. Cohomologie du faisceau d'isotropie de $[A_0]$

Nous commençons par quelques rappels classiques pour faciliter la lecture. Pour plus de détails, on pourra se reporter par exemple à la thèse de J. Frenkel [Fr56] .

1. Définitions et généralités en cohomologie non abélienne

1.1. Cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$

Soit X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes (en général non abéliens) sur X et $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ un recouvrement ouvert de X .

On note $\Gamma(U; \mathcal{F})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de l'ouvert U .

Une **0-cochaîne** est une famille $(f_j) \in \prod_{j \in J} \Gamma(U_j; \mathcal{F})$ de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus des ouverts U_j du recouvrement $\mathcal{U}$.

Une **1-cochaîne** est une famille $(f_{i,j}) \in \prod_{(i,j) \in J \times J} \Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$ de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus des intersections deux à deux non vides $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ des ouverts U_j du recouvrement $\mathcal{U}$.

Condition de cocycle

Une 1-cochaîne $(f_{i,j})_{(i,j) \in J \times J}$ est un 1-cocycle si elle satisfait à la condition de compatibilité :

$f_{i,j} \cdot f_{j,k} = f_{i,k}$ sur tout ouvert $U_i \cap U_j \cap U_k$ (la multiplication est la multiplication de groupes dans $\mathcal{F}$).

En particulier, on a $f_{i,i} = I$ (l'identité) sur U_i pour tout $i \in J$ et $f_{i,j} = f_{j,i}^{-1}$ pour tout $(i,j) \in J \times J$.

Condition de cohomologie

Deux 1-cocycles $(f_{i,j})$ et $(g_{i,j})$ sont dits **cohomologues** s'il existe une 0-cochaîne $(c_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} \Gamma(U_i; \mathcal{F})$ telle que

$$g_{i,j} = c_i f_{i,j} c_j^{-1} \quad \text{pour tout } (i,j) \in J \times J .$$

La condition de cohomologie est une relation d'équivalence entre 1-cocycles.

(1-)cohomologie de Čech du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$

C'est l'ensemble noté $H^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{F})$ ou $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ des classes de 1-cocycles modulo la relation de cohomologie.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens, on retrouve le groupe de cohomologie de Čech abélienne. Mais, en général, $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ n'est pas un groupe; il n'hérite pas naturellement de la structure de groupe de $\mathcal{F}$.

Raffinement

Un recouvrement $\mathcal{V} = \{V_\ell; \ell \in L\}$ est un raffinement du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j; j \in J\}$ (on dit encore que $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$) si tout ouvert V_ℓ de $\mathcal{V}$ est contenu dans au moins un ouvert U_j de $\mathcal{U}$.

Il existe au moins une **application d'inclusion** entre les indices

$$\begin{aligned} \sigma : L &\longrightarrow J \\ \ell &\longmapsto j = \sigma(\ell) \end{aligned}$$

telle que $V_\ell \subset U_{\sigma(\ell)}$.

Il lui correspond l'application entre les 1-cochaînes

$$\begin{aligned} \sigma^* : \prod_{(i,j) \in J \times J} \Gamma(U_{i,j}; \mathcal{F}) &\longrightarrow \prod_{(\ell,k) \in L \times L} \Gamma(V_{\ell,k}; \mathcal{F}) \\ f = (f_{i,j}) &\longmapsto \sigma^*(f) = (g_{\ell,k} = f_{\sigma(\ell), \sigma(k)} \mid_{V_{\ell,k}}) \end{aligned}$$

où $g_{\ell,k} = f_{\sigma(\ell), \sigma(k)} \mid_{V_{\ell,k}}$ est la restriction à l'ouvert $V_{\ell,k}$ de la composante $f_{\sigma(\ell), \sigma(k)}$ de la 1-cochaîne f .

Cette application est compatible avec les conditions de cocycle et de cohomologie. Elle induit donc une application "d'inclusion" entre ensembles de cohomologie

$$\mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \quad .$$

Cette application ne dépend que des recouvrements $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$, pas de σ et elle vérifie ([Fr56]) :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \circ \mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \mathfrak{S}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \\ \mathfrak{S}(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = I \\ \mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \text{ est injective (c'est aussi une "inclusion").} \end{cases}$$

L'injectivité de $\mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ pour tout raffinement $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ montre qu'on enrichit l'ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ en raffinant $\mathcal{U}$, d'où la notion suivante.

1.2. Ensemble de cohomologie $H^1(X; \mathcal{F})$

C'est par définition la limite inductive sur les recouvrements $\mathcal{U}$ de X , filtrés par l'inclusion, des ensembles de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. On note

$$H^1(X; \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{F}) .$$

Pas plus que $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, l'ensemble $H^1(X; \mathcal{F})$ n'hérite en général de la structure de groupe de $\mathcal{F}$.

1.3. Cas où $X = S^1$

Pour des raisons de commodité d'expression, nous orientons S^1 et nous nous référons toujours au sens d'orientation choisi. Il semble plus conforme à l'usage des calculs de matrices de Stokes d'orienter S^1 dans **le sens des aiguilles d'une montre** : On a l'habitude de tourner dans le sens direct autour de l'infini ce qui, sur la sphère de Riemann, revient à tourner dans le sens inverse autour de l'origine. C'est aussi ce sens de rotation qui assure la correspondance entre cocycles et lacets élémentaires du π_1 sauvage sans "changement de signe". C'est donc le sens que nous choisissons désormais. Nous utiliserons également la terminologie **droite - gauche** avec la convention suivante : On se déplace vers la droite lorsqu'on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre, vers la gauche sinon.

Nous dirons qu'un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ est un **bon recouvrement** de S^1 s'il ne comporte qu'un nombre fini $\nu = \#J$ d'ouverts U_j qui sont connexes et non emboîtés ($U_j \setminus U_\ell$ est toujours connexe, éventuellement vide : on accepte que deux U_j puissent être égaux).

Ces ouverts sont donc naturellement ordonnés sur S^1 et on peut les numéroter cycliquement $U_1, U_2, \dots, U_\nu$ (avec la convention $U_{\nu+j} = U_j$). L'ensemble d'indices J se trouve ainsi muni d'un ordre cyclique déterminé par la condition que l'application $j \mapsto M_j$ milieu de l'arc U_j est croissante pour l'ordre cyclique considéré et l'orientation choisie de S^1 .

De façon évidente, tout recouvrement de S^1 admet un raffinement qui est un bon recouvrement. On peut donc pour le calcul de la cohomologie se restreindre à ne considérer que de bons recouvrements. C'est ce que nous ferons désormais, en supposant en outre que les indices j de J correspondent à une numérotation cyclique des ouverts U_j conforme au sens de parcours choisi sur S^1 .

PROPOSITION III.1. *Soit $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ un bon recouvrement de S^1 . L'ensemble des 1-cocycles de $\mathcal{U}$ s'identifie aux familles de 1-cochaînes partielles $(f_{j,j+1})_{j \in J}$ du produit $\prod_{j \in J} \Gamma(U_{j,j+1}; F)$ sans condition de cocycle.*

Ceci nous amène à considérer la notion de 1-nerf :

Une famille $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j, j \in J\}$ d'ouverts de S^1 est un **1-nerf sur S^1** si les $\dot{U}_j$ sont les intersections deux à deux des ouverts consécutifs d'un bon recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$:

$$\dot{U}_j = U_j \cap U_{j+1} \quad .$$

Les "cas limites" suivants sont à préciser séparément :

- $\dot{\mathcal{U}}$ ne contient qu'un seul ouvert $\dot{U}$. Il peut être considéré comme associé à un "bon recouvrement" formé d'un seul ouvert $\dot{U}$ "faisant plus d'un tour" (figure III.1.1).

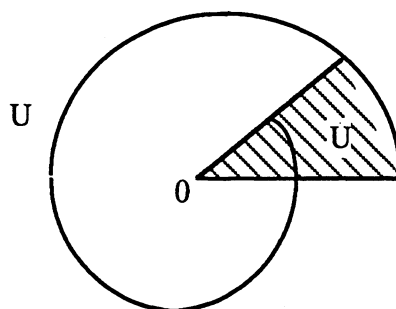


Figure III.1.1

- $\dot{\mathcal{U}}$ contient deux ouverts $\dot{U}_1$ et $\dot{U}_2$. Pour le bon recouvrement associé $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ on a une seule intersection $U_1 \cap U_2$ avec deux composantes connexes $\dot{U}_1$ et $\dot{U}_2$ (figure III.1.2);

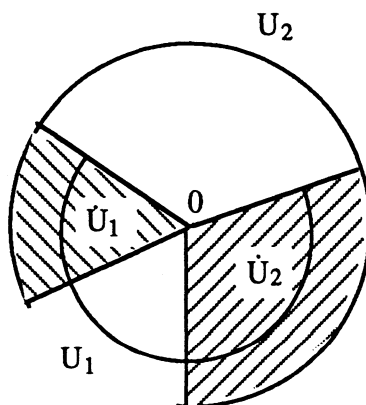


Figure III.1.2

Un 1-nerf provient d'un vrai recouvrement de S^1 mais n'est en général pas lui-même un recouvrement de S^1 .

PROPOSITION III.2.

- On peut toujours numérotter cycliquement les ouverts d'un 1-nerf $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j, j \in J\}$ sur S^1 . Nous imposerons en outre un ordre croissant avec le sens d'orientation fixé sur S^1 .

ii) Si $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j, j \in J\}$ est un 1-nerf sur S^1 il provient d'un unique recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ de S^1 défini par :

U_j est l'arc d'origine l'origine de $\dot{U}_{j-1}$ et d'extrémité l'extrémité de $\dot{U}_j$ c'est-à-dire que, si $\dot{U}_{j-1} =]\theta_{j-1}, \theta'_{j-1}[$ et $\dot{U}_j =]\theta_j, \theta'_j[$, alors $U_j =]\theta_{j-1}, \theta'_j[$.

iii) On a alors $\dot{U}_j = U_{j,j+1}$, et l'ensemble des 1-cocycles du recouvrement $\mathcal{U}$ est l'ensemble produit $\prod_{j \in J} \Gamma(\dot{U}_j; \mathcal{F})$ que nous noterons pour abréger $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \mathcal{F})$.

Raffinement

Ce n'est pas parce que $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$ qu'il en est de même de $\dot{\mathcal{V}}$ et $\dot{\mathcal{U}}$: Les ouverts de $\dot{\mathcal{V}}$ ne sont pas nécessairement inclus dans les ouverts de $\dot{\mathcal{U}}$.

Ainsi, par exemple, si $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\nu\}$ est formé de ν ouverts deux à deux distincts et si on considère le raffinement $\mathcal{V} = \{V_0 = U_1, V_1 = U_1, V_2 = U_2, \dots, V_\nu = U_\nu\}$, alors $\dot{\mathcal{V}}$ contient l'ouvert $V_0 \cap V_1 = U_1$ qui n'est inclus dans aucun des ouverts de $\dot{\mathcal{U}}$.

Cependant, on réalise un raffinement de $\mathcal{U}$ chaque fois, par exemple, qu'on intercale un ouvert supplémentaire dans $\dot{\mathcal{U}}$ ou qu'on rétrécit l'un des ouverts de $\dot{\mathcal{U}}$.

Inclusions

Soit $\mathcal{V} = \{V_\ell, \ell \in L\}$ un raffinement de $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ et σ une application d'inclusion de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$ qu'on suppose croissante pour l'ordre cyclique sur J et sur L :

$$\sigma : \ell \in L \mapsto j = \sigma(\ell) \in J$$

$$\sigma^* : \begin{cases} \prod_{j \in J} \Gamma(U_{j,j+1}; \mathcal{F}) & \longrightarrow \prod_{\ell \in L} \Gamma(V_{\ell,\ell+1}; \mathcal{F}) \\ (f_{j,j+1}) & \longmapsto (g_{\ell,\ell+1} = f_{\sigma(\ell), \sigma(\ell+1)} \mid V_{\ell,\ell+1}) \end{cases} .$$

En termes de 1-nerfs $\dot{\mathcal{U}}$ et $\dot{\mathcal{V}}$ et si on définit les 1-cocycles par $(\dot{f}_j = f_{j,j+1})$ et $(\dot{g}_\ell = g_{\ell,\ell+1})$, on a grâce à la condition de cocycle

$$\sigma^* : \begin{cases} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \mathcal{F}) & \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{V}}; \mathcal{F}) \\ (\dot{f}_j) & \longmapsto (\dot{g}_\ell = \prod_{\sigma(\ell) \leq j < \sigma(\ell+1)} \dot{f}_j) \end{cases} .$$

En particulier, si $\sigma(\ell) = \sigma(\ell + 1)$, on a $\dot{g}_\ell = I$ sur $\dot{V}_\ell$.

1.4. Cas où $X = S^1$ et $\mathcal{F} = \Lambda(A_0)$

Il résulte de l'étude faite au chapitre précédent que le faisceau $\Lambda = \Lambda(A_0)$ des sections d'isotropie plates de $[A_0]$ est un faisceau constant par morceaux sur S^1 . Les discontinuités ont lieu en les *directions de Stokes* i.e. les directions en lesquelles il existe au moins deux polynômes q_j et q_ℓ de la diagonale de Q distincts et non comparables. Par suite, l'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda)$ coïncide avec un ensemble de cohomologie de Čech associé à un recouvrement assez fin quelconque : les flèches injectives $\mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : H^1(\mathcal{U}; \Lambda) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}; \Lambda)$ deviennent en effet bijectives dès que les recouvrements considérés sont assez fins.

Pour préciser ces ensembles de cohomologie nous allons séparer les cas sans et avec ramification. Cette séparation est motivée plus par une commodité de présentation que par des raisons de fond : Nous verrons que les résultats sont tout à fait semblables mais il serait désagréable au moins au début d'avoir à considérer des "ouverts de S^1 d'ouverture supérieure à 2π " et des "recouvrements faisant plusieurs tours" Nous étudions d'abord en détail le cas sans ramification ; puis l'effet d'un éclatement "inutile" en effectuant un éclatement arbitraire dans le cas sans ramification et nous en déduisons enfin l'étude du cas avec ramification.

2. Cohomologie du faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$: le cas sans ramification

Dans ce paragraphe un peu technique, nous établissons le résultat suivant :

THÉOREME III.3. *On a un isomorphisme naturel*

$$h : \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_\alpha(A_0) \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(A_0))$$

du produit des groupes de Stokes de $[A_0]$ dans l'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

Ce théorème permet d'identifier chaque cocycle (ou plutôt chaque classe de cohomologie de cocycles) à une famille finie de germes de Stokes (cf. II.3.2). Etant naturelle, cette famille a des propriétés particulières. Nous en donnons quelques conséquences théoriques et applications dans le chapitre suivant. En particulier, cette famille est galoisienne (théorème IV.22) : Ses éléments appartiennent au groupe de Galois différentiel du système $[A]$ en 0, alors que cette propriété n'a généralement pas lieu pour une matrice de Stokes usuelle quelconque (cf. IV.4 Exemple de matrice de Stokes usuelle non "galoisienne") et elle nous permet de faire le lien avec la classification par le π_1 sauvage (cf. IV.5). Notons en

outre que, dans les quelques calculs théoriques de matrices de Stokes dont nous disposons, c'est cette famille qui apparaît comme la plus directement accessible au calcul. Il en est ainsi par exemple du calcul des matrices de Stokes des équations hypergéométriques généralisées fait récemment par A. Duval et Cl. Mitschi à l'aide des fonctions G de Meijer ([DM89]).

L'approche que nous faisons de ce théorème est délibérément constructive. Notre objectif est en effet d'obtenir non seulement le résultat mais avec lui une construction algorithmique permettant à partir de n'importe quel cocycle de donner la liste des transformations algébriques conduisant aux matrices de Stokes "naturelles". Une démonstration abstraite de ce théorème reposant sur une idée de P. Deligne et utilisant des faisceaux de $\mathbb{C}$ -algèbres a été donnée par Babbitt et Varadarajan dans ([BV89]). Une version préliminaire de leur article ([BV p85]) contient une démonstration plus voisine de celle proposée ici mais valable seulement dans le cas sans ramification ([BV89], Introduction 3, p. 6 et II.2. Remark, p. 152).

L'isomorphisme h est *naturel* en ce sens qu'il commute aux isomorphismes et aux constructions (Cf. IV.4- Définition IV.17).

La démonstration du théorème III.3 procède par récurrence descendante sur les niveaux en comparant à chaque niveau k les ensembles de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda^k)$, $H^1(S^1; \Lambda^{\leq k})$ et $H^1(S^1; \Lambda^{< k})$.

2.1. Les recouvrements fondamentaux

DÉFINITION III.4. Un bon recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ de S^1 ou son 1-nerf $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j, j \in J\}$ est dit **suffisant pour un faisceau** $\mathcal{F}$ s'il est suffisant pour le calcul de la cohomologie de $\mathcal{F}$, i.e. si

$$H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \equiv H^1(S^1; \mathcal{F}) \quad .$$

L'existence d'un tel recouvrement est une propriété du faisceau $\mathcal{F}$.

PROPOSITION III.5. *Un recouvrement $\mathcal{U}$ (ou son 1-nerf $\dot{\mathcal{U}}$) est suffisant pour le faisceau d'isotropie $\Lambda = \Lambda(A_0)$ s'il est **Q -suffisant** i.e. si chaque secteur de platitude des exponentielles $e^{q_j - q_\ell}$ pour tous les couples (q_j, q_ℓ) extraits de la diagonale de Q contient au moins un ouvert $\dot{U}_j$ de $\mathcal{U}$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit d'établir que, si $\mathcal{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$, alors l'application

$$\mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : H^1(\mathcal{U}; \Lambda) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}; \Lambda)$$

est surjective donc bijective. Or on passe de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$ par un nombre fini de raffinements élémentaires consistant à

- rétrécir un ouvert de $\mathcal{U}$ en rétrécissant un seul ouvert de $\dot{\mathcal{U}}$,
- supprimer un ouvert de $\mathcal{U}$,
- doubler un ouvert de $\mathcal{U}$, i.e. intercaler un nouvel ouvert égal à l'un de ses deux voisins.

Rappelons que la flèche $\mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ ne dépend pas de l'inclusion σ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$, mais seulement de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{U}$. À chaque étape, on peut faire pour σ le choix le plus simple. Nous laissons les détails au lecteur.

On a une proposition analogue pour les faisceaux Λ^k , $\Lambda^{\leq k}$ ou $\Lambda^{< k}$ de niveau k , $\leq k$ ou $< k$ en se restreignant aux exponentielles $e^{q_j - q_i}$ de niveau k , $\leq k$ ou $< k$.

On a noté $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$ l'ensemble des directions anti-Stokes de $[A_0]$, $\mathcal{K}_\alpha$ l'ensemble des niveaux de la fibre de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ pour toute direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{K} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{K}_\alpha = \{k_r < \dots < k_1\}$ l'ensemble de tous les niveaux de $[A_0]$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_\alpha$ et $\mathcal{K}$ sont déterminés par la partie irrégulière Q de X_0 .

Notons, pour tout niveau $k \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}^k$, $\mathcal{A}^{\leq k}$ et $\mathcal{A}^{< k}$ les sous-ensembles de $\mathcal{A}$ des directions anti-Stokes α dont un niveau est k , $\leq k$ ou $< k$, et $\mathcal{K}^{\max \leq k} = \{K_R < \dots < K_1 = k\}$ l'ensemble des niveaux qui dans au moins une fibre de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ sont maximaux parmi ceux qui sont $\leq k$.

$\mathcal{A}^k$, $\mathcal{A}^{\leq k}$, $\mathcal{A}^{< k}$ et $\mathcal{K}^{\max \leq k}$ sont déterminés par Q et par k . L'ensemble $\mathcal{A}^k$ est invariant par rotation d'angle $\frac{\pi}{k}$.

Nous nous proposons de construire des recouvrements $\mathcal{U}^k, \mathcal{U}^{\leq k}, \mathcal{U}^{< k}$ pour tous les niveaux $k \in \mathcal{K}$. On veut que ces recouvrements soient suffisants pour les faisceaux $\Lambda^k, \Lambda^{\leq k}, \Lambda^{< k}$ respectivement et comparables entre eux et que de plus, ils ne soient pas trop fins afin de réduire l'ensemble des 0-cochaînes possibles.

Définition de $\mathcal{U}^k$, recouvrement fondamental de niveau $k \in \mathcal{K}$

Le faisceau Λ^k est un faisceau à un seul niveau. Parmi les recouvrements suffisants pour Λ^k , il en existe un moins fin que tous les autres : c'est lui que nous prendrons comme **recouvrement fondamental** $\mathcal{U}^k$. Il est défini par le 1-nerf

$$\dot{\mathcal{U}}^k = \{\dot{U}_\alpha^k, \alpha \in \mathcal{A}^k\},$$

où l'ouvert $\dot{U}_\alpha^k$ est le secteur $V(\alpha, \frac{\pi}{k})$ d'ouverture $\frac{\pi}{k}$ bissecté par α .

Il n'existe sur $\mathcal{U}^k$ aucune 0-cochaîne à valeurs dans Λ^k . Ainsi on a

$$H^1(S^1; \Lambda^k) = H^1(\mathcal{U}^k; \Lambda^k) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}^k} \Gamma(\dot{U}_\alpha^k, \Lambda^k).$$

Dans le cas où le faisceau Λ est à un seul niveau k , alors Λ est égal à Λ^k ; le recouvrement $\mathcal{U}^k$ est le moins fin des recouvrements suffisants pour Λ et il n'y a pas d'autres recouvrements à considérer.

Dans le cas à plusieurs niveaux, le faisceau Λ ne se réduit à aucun des faisceaux Λ^k et les recouvrements $\mathcal{U}^k$ associés aux différents niveaux k ne sont de façon générale ni suffisants pour Λ ni comparables entre eux. Nous allons donc introduire une famille de recouvrements $\mathcal{U}^{\leq k}$ qui sont d'une part suffisants pour $\Lambda^{\leq k}$, d'autre part comparables à $\mathcal{U}^k$ et comparables entre eux deux à deux. En outre, nous leur imposons de n'admettre aucune 0-cochaîne du niveau le plus élevé k , ce qui leur interdit d'être très fins; mais nous ne cherchons pas à minimiser leur finesse.

Définition de $\mathcal{U}^{\leq k}$, recouvrement fondamental de niveau $\leq k$

Remarquons tout d'abord, qu'en général l'ensemble des secteurs $\dot{V}_{\alpha, \kappa} = V(\alpha, \frac{\pi}{\kappa})$ pour les couples (α, κ) d'une direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}$ et d'un niveau $\kappa \leq k$ de $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ ne définit pas un 1-nerf, pas plus que l'ensemble des $\dot{V}_\alpha = V(\alpha, \frac{\pi}{\kappa})$ pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\kappa = \max\{k' \in \mathcal{K}_\alpha, k' \leq k\}$.

Nous construisons $\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}$ en modifiant les $\dot{V}_\alpha$ par récurrence descendante sur les niveaux maximaux $K \in \mathcal{K}^{\max \leq k}$. Noter qu'en particulier, on aura autant d'ouverts dans $\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}$ que de directions anti-Stokes dans $\mathcal{A}^{\leq k}$.

CONSTRUCTION. Au niveau le plus élevé $K_1 = k$, on ne modifie rien : On choisit

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k} &= \dot{V}_\alpha \\ &= V(\alpha, \frac{\pi}{k}) \text{ pour tous les } \alpha \in \mathcal{A}^k. \end{aligned}$$

Supposons construits les $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k}$ jusqu'au niveau K_i exclu et soit α de niveau maximum K_i (maximum parmi les niveaux de $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ qui sont $\leq k$). Parmi les directions anti-Stokes α' dirigeant les $\dot{\mathcal{U}}_{\alpha'}^{\leq k}$ déjà construits, notons α^- le prédécesseur de α et α^+ son successeur (il se peut qu'exceptionnellement $\alpha^+ = \alpha^-$). On choisit $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k} \subset \dot{V}_\alpha$ le plus grand possible et tel qu'à ce stade la famille construite soit celle d'un 1-nerf :

$$\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k} = \dot{V}_\alpha \cap]O^-, E^+[,$$

où O^- est l'origine de $\dot{\mathcal{U}}_{\alpha^-}^{\leq k}$ et E^+ l'extrémité de $\dot{\mathcal{U}}_{\alpha^+}^{\leq k}$.

Si on a tronqué $\dot{V}_\alpha$ à l'origine (ou à l'extrémité), alors $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k}$ (ou $\dot{\mathcal{U}}_{\alpha^+}^{\leq k}$) est contenu dans $\dot{\mathcal{U}}_{\alpha^-}^{\leq k}$. Sinon $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k} = V(\alpha, \frac{\pi}{K_i})$.

PROPOSITION III.6. Pour tout $k \in \mathcal{K}$,

- i) Le recouvrement $\mathcal{U}^{\leq k}$ est un raffinement de $\mathcal{U}^k$ et de $\mathcal{U}^{< k}$.
- ii) Les recouvrements $\mathcal{U}^k, \mathcal{U}^{\leq k}, \mathcal{U}^{< k}$ sont suffisants pour $\Lambda^k, \Lambda^{\leq k}, \Lambda^{< k}$ respectivement.
- iii) Le recouvrement $\mathcal{U}^k$ n'admet aucune 0-cochaîne dans Λ^k . Le recouvrement $\mathcal{U}^{\leq k}$ n'admet aucune 0-cochaîne de niveau k dans $\Lambda^{\leq k}$.
- iv) Les recouvrements fondamentaux $\mathcal{U}^k, \mathcal{U}^{\leq k}, \mathcal{U}^{< k}$ sont indépendants de la forme normale d'Hermite X_0 choisie. Ils ne dépendent que de Q .

DÉMONSTRATION : C'est évident par construction. ii) est un corollaire de la proposition (III.5).

2.2. Les inclusions fondamentales

Les seules inclusions entre indices que nous utiliserons sont les injections canoniques de $\mathcal{A}^k$ dans $\mathcal{A}^{\leq k}$, $\mathcal{A}^{< k}$ dans $\mathcal{A}^{\leq k}$, ... Mais pour comparer les ensembles de cohomologie $H^1(\mathcal{U}^k; \Lambda^k)$, $H^1(\mathcal{U}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$ et $H^1(\mathcal{U}^{< k}; \Lambda^{< k})$, il faut changer non seulement de recouvrement mais aussi de faisceaux. Il nous faut donc préciser les notations :

A tout niveau $k \in \mathcal{K}$, les injections canoniques de $\mathcal{A}^k$ et de $\mathcal{A}^{< k}$ dans $\mathcal{A}^{\leq k}$ induisent entre 1-cochaînes les applications injectives

$$\sigma^k : \begin{cases} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) & \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k}) \\ \dot{f} = (\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}^k} & \longmapsto \sigma^k(\dot{f}) = (\dot{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}} \end{cases}$$

où

$$\dot{F}_\alpha = \begin{cases} \dot{f}_\alpha \text{ restreinte à } \dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k} \text{ et considérée comme section de } \Lambda^{\leq k} & \text{si } \alpha \in \mathcal{A}^k \\ I \text{ (l'identité de } \dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k}) & \text{si } \alpha \notin \mathcal{A}^k \end{cases}$$

et mutatis mutandis

$$\sigma^{< k} : \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{< k}; \Lambda^{< k}) \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k}) .$$

Ces injections σ^k et $\sigma^{< k}$ permettent de multiplier entre elles des 1-cochaînes de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k)$ et de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{< k}; \Lambda^{< k})$ en les considérant comme 1-cochaînes de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$.

On a noté $\Lambda = \Lambda^{\leq k_1}$ où k_1 est le plus grand niveau de $[A_0]$. Notons de même $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\leq k_1}$. Nous utiliserons les applications injectives

$$\tau^k : \begin{cases} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) & \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \Lambda) \\ \dot{f} = (\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}^k} & \longmapsto \tau^k(\dot{f}) = (\dot{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \end{cases}$$

où

$$\dot{F}_\alpha = \begin{cases} \dot{f}_\alpha \text{ restreinte à } \dot{\mathcal{U}}_\alpha \text{ et considérée comme section de } \Lambda & \text{si } \alpha \in \mathcal{A}^k \\ I \text{ (l'identité de } \dot{\mathcal{U}}_\alpha) & \text{si } \alpha \notin \mathcal{A}^k . \end{cases}$$

On les obtient par composition des précédentes.

2.3. Les résultats

PROPOSITION III.7. *Pour tout niveau $k \in \mathcal{K}$, on a des bijections naturelles*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha}^k(A_0) \xrightarrow{i^k} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) \xrightarrow{s^k} H^1(S^1; \Lambda^k) .$$

DÉMONSTRATION : On définit la première flèche par le prolongement de chaque germe $\dot{f}_{\alpha}$ à son domaine naturel de définition $\dot{U}_{\alpha}^k$. C'est un isomorphisme de groupes. Dans la suite, il nous arrivera de confondre les germes $\dot{f}_{\alpha}$ et leur image par i^k .

La deuxième flèche est la surjection canonique. Elle permet d'identifier toute classe de cohomologie à une 1-cochaîne sur $\dot{\mathcal{U}}^k$: on a vu en effet que le recouvrement $\mathcal{U}^k$ est suffisant pour Λ^k et qu'il n'admet aucune 0-cochaîne dans Λ^k .

Cette flèche est naturelle au même sens que h .

PROPOSITION III.8.

i) *L'application de multiplication des 1-cochaînes*

$$\mathfrak{S}^{\leq k} : \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{< k}; \Lambda^{< k}) \times \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$$

définie par $\mathfrak{S}^{\leq k}(\dot{f}, \dot{g}) = (\dot{F}_{\alpha} \dot{G}_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}}$ où on a noté $(\dot{F}_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}} = \sigma^{< k}(\dot{f})$ et $(\dot{G}_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}} = \sigma^k(\dot{g})$ est injective.

ii) *Si les 1-cochaînes $\mathfrak{S}^{\leq k}(\dot{f}, \dot{g})$ et $\mathfrak{S}^{\leq k}(\dot{f}', \dot{g}')$ sont cohomologues dans $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$, alors les 1-cochaînes $\dot{f}$ et $\dot{f}'$ le sont dans $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{< k}; \Lambda^{< k})$.*

iii) *Toute 1-cochaîne de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$ est cohomologue à une 1-cochaîne dans l'image de $\mathfrak{S}^{\leq k}$.*

DÉMONSTRATION :

i) est évident : l'injectivité de la multiplication des sections est équivalente à l'injectivité de la multiplication des germes en chacune des directions anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}$ (proposition II.10).

ii) Une relation de cohomologie entre $\mathfrak{S}^{\leq k}(\dot{f}, \dot{g})$ et $\mathfrak{S}^{\leq k}(\dot{f}', \dot{g}')$ s'écrit

$$\dot{F}'_{\alpha} \dot{G}'_{\alpha} = c_{\alpha}^{-1} (\dot{F}_{\alpha} \dot{G}_{\alpha}) c_{\alpha^{+}}$$

où $c = (c_{\alpha})$ est une 0-cochaîne de $\mathcal{U}^{\leq k}$ à valeurs dans $\Lambda^{\leq k}$ ($c_{\alpha} \in \Gamma(\mathcal{U}_{\alpha}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}$) et où α^{+} est la direction anti-Stokes de niveau $\leq k$ qui suit α . Or le recouvrement $\mathcal{U}^{\leq k}$ n'admet pas de 0-cochaîne de niveau k . Donc c est en fait à valeurs dans $\Lambda^{< k}$. Puisque

Chapitre III

Λ^k est distingué dans $\Lambda^{\leq k}$ (proposition II.10), la relation de cohomologie s'écrit

$$\dot{F}'_\alpha \dot{G}'_\alpha = (c_\alpha^{-1} \dot{F}_\alpha c_{\alpha+}) \dot{G}_\alpha \text{ avec } \dot{G}_\alpha \in \Gamma(\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k}; \Lambda^k) .$$

Puisqu'en outre $\Lambda^{\leq k}$ est égal au produit semi-direct $\Lambda^{< k} \ltimes \Lambda^k$, on en déduit

- l'égalité $\dot{G}'_\alpha = \dot{G}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}$,
- la relation de cohomologie dans le faisceau $\Lambda^{< k}$ sur le recouvrement $\mathcal{U}^{\leq k}$

$$\dot{F}'_\alpha = c_\alpha^{-1} F_\alpha c_{\alpha+} .$$

Cette relation provient d'une relation de cohomologie sur le recouvrement moins fin $\mathcal{U}^{< k}$ puisque celui-ci est déjà suffisant pour $\Lambda^{< k}$.

iii) Soit $(\dot{h}_\alpha)$ une 1-cochaîne de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{\leq k})$. On peut factoriser $(\Lambda^{\leq k} \simeq \Lambda^{< k} \ltimes \Lambda^k)$ chacune de ses composantes en

$$\dot{h}_\alpha = \dot{F}_\alpha \dot{G}_\alpha \text{ avec } \begin{cases} (\dot{F}_\alpha) \in \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^{< k}) \\ (\dot{G}_\alpha) \in \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}; \Lambda^k) \end{cases}$$

Le recouvrement $\mathcal{U}^{< k}$ est suffisant pour $\Lambda^{< k}$ et $\mathcal{U}^{\leq k}$ en est un raffinement : la 1-cochaîne $(\dot{F}_\alpha)$ est donc cohomologue à une 1-cochaîne $(\dot{F}'_\alpha)$ "provenant" de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^{< k}; \Lambda^{< k})$

$$c_\alpha^{-1} \dot{F}_\alpha c_{\alpha+} = \dot{F}'_\alpha \text{ où } (\dot{F}'_\alpha) = \mathfrak{S}^{< k}(\dot{f}'_\alpha) ,$$

la 0-cochaîne (c_α) étant nécessairement à valeurs dans $\Lambda^{< k}$ ($\dot{\mathcal{U}}^{\leq k}$ n'admet pas de 0-cochaîne de niveau k). On a alors

$$c_\alpha^{-1} \dot{h}_\alpha c_{\alpha+} = \dot{F}'_\alpha \dot{G}'_\alpha$$

où $(\dot{G}'_\alpha = c_{\alpha+}^{-1} G_\alpha c_{\alpha+})_{\alpha \in \mathcal{A}^{\leq k}}$ est de niveau pur k (Λ^k est distingué dans $\Lambda^{\leq k}$).

De même le recouvrement $\mathcal{U}^k$ est suffisant pour Λ^k et $\mathcal{U}^{\leq k}$ en est un raffinement : la 1-cochaîne $(\dot{G}'_\alpha)$ est donc cohomologue à une 1-cochaîne "provenant" de $\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k)$, la relation de cohomologie étant encore de niveau $< k$. Cette relation est donc triviale et la 1-cochaîne $(c_\alpha^{-1} \dot{h}_\alpha c_{\alpha+})$ convient.

COROLLAIRE III.9. *On a le même résultat en effectuant dans chaque ouvert $\dot{\mathcal{U}}_\alpha^{\leq k}$ le produit de $\dot{F}_\alpha$ et de $\dot{G}_\alpha$ dans n'importe quel ordre fixé à l'avance.*

THÉORÈME III.10.

i) *L'application de multiplication des 1-cochaînes*

$$\tau : \begin{cases} \prod_{k \in \mathcal{K}} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) & \longrightarrow \Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \Lambda) \\ (\dot{f}^k)_{k \in \mathcal{K}} & \longmapsto \prod_{k \in \mathcal{K}} \tau^k(\dot{f}^k) \end{cases} ,$$

produit dans un ordre quelconque fixé à l'avance dans chaque ouvert de $\dot{\mathcal{U}}$, est injective.

ii) *Par passage au quotient, elle induit sur la cohomologie une bijection naturelle*

$$\mathfrak{T} : \prod_{k \in \mathcal{K}} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) = \prod_{k \in \mathcal{K}} H^1(S^1; \Lambda^k) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}; \Lambda) = H^1(S^1; \Lambda)$$

DÉMONSTRATION :

i) τ est injective comme composée d'applications injectives.

ii) se déduit de la proposition précédente III.8 par récurrence descendante sur les niveaux; l'injectivité de $\mathfrak{T}$ est donnée par le point ii), la surjectivité par le point iii).

L'application $\mathfrak{T}$ est naturelle au même sens que h . Elle généralise l'application s^k de la proposition (III.7).

DÉFINITION III.11. Le théorème III.10 montre que toute classe de cohomologie c de $H^1(S^1; \Lambda)$ contient une unique 1-cochaîne appartenant à l'image de τ . On appelle cette cochaîne la **1-cochaîne fondamentale** de la classe de cohomologie c , ou 1-cochaîne fondamentale de $\hat{F}$ quand $c = \exp \mu(\hat{F})$ et on la note $c(\hat{F})$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.3 : Le théorème III.3 est un corollaire immédiat du théorème III.10. L'application τ se factorise en

$$\prod_{k \in \mathcal{K}} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\bigotimes_{k \in \mathcal{K}_\alpha} \text{Sto}_\alpha^k(A_0) \right) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_\alpha(A_0) \xrightarrow{i} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \Lambda) .$$

où la première flèche est l'isomorphisme de factorisation des sections suivant les niveaux et i l'injection canonique. Par passage au quotient i donne l'isomorphisme naturel cherché.

On peut encore énoncer

COROLLAIRE III.12. *Tout élément de $H^1(S^1; \Lambda)$ est représenté de manière unique par sa 1-cochaîne fondamentale. L'ensemble des 1-cochaînes fondamentales représentant les éléments de $H^1(S^1; \Lambda)$ s'identifie aux familles $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de germes de Stokes en chaque direction anti-Stokes α .*

Par abus de langage, on désignera aussi par 1-cochaînes fondamentales ces familles de germes de Stokes.

DÉFINITION III.13. Soit $\dot{f} = (\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_\alpha(A_0)$ la 1-cochaîne fondamentale d'une classe de cohomologie $c = \exp \mu(\widehat{F})$. On appelle **matrices de Stokes (fondamentales)** de $\widehat{F}X_0$ les matrices représentant les composantes $\dot{f}_\alpha$ de $\dot{f}$ via la solution d'Hermite X_0 dans un feuillet quelconque. Elles sont définies par les relations

$$\dot{f}_\alpha(x) = X_{0,\tilde{\alpha}}(x) C_{\tilde{\alpha}} X_{0,\tilde{\alpha}}(x)^{-1} .$$

On peut fixer le feuillet de façon arbitraire : on impose $\tilde{\alpha} \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ avec θ_0 quelconque par exemple $\theta_0 = 0$. On l'appelle alors le **feuillet principal**.

2.4. Algorithme de réduction d'une 1-cochaîne quelconque à la 1-cochaîne fondamentale qui lui est cohomologue

Données

Une solution normale X_0 , donnée par exemple par le code DESIR.

Une 1-cochaîne $\dot{g} = (\dot{g}_j)$ associée à un 1-nerf $\dot{\mathcal{V}} = \{\dot{V}_j, j \in J\}$.

Algorithme

- 1) Répertorier tous les secteurs Q -admissibles $V(\alpha, \frac{\pi}{k})$ pour tous les couples (α, k) d'une direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$ et d'un niveau $k \in \mathcal{K}_\alpha$ dans la direction α .
- 2) Supprimer les ouverts $\dot{V}_j$ de $\dot{\mathcal{V}}$ sur lesquels $\dot{g}_j = I$. On supprime ainsi en particulier tous ceux qui ne sont pas Q -adaptés, i.e. qui ne sont contenus dans aucun secteur Q -admissible $V(\alpha, \frac{\pi}{k})$.
- 3) Pour chaque ouvert $\dot{V}_j$ restant, déterminer ses directions anti-Stokes de rattachement, i.e. les directions anti-Stokes α pour lesquelles au moins l'un des secteurs Q -admissibles $V(\alpha, \frac{\pi}{k})$ contient $\dot{V}_j$. Les ordonner de préférence dans le sens de parcours choisi sur S^1 :

$$\alpha_{j,1} < \alpha_{j,2} < \dots < \alpha_{j,r_j} .$$

- 4) Factoriser $\dot{g}_j$ en un produit de facteurs "rattachés" aux groupes de Stokes $\text{Sto}_{\alpha_{j,1}}, \dots, \text{Sto}_{\alpha_{j,r_j}}$

$$\dot{g}_j = \dot{g}_{j,1} \dot{g}_{j,2} \dots \dot{g}_{j,r_j} .$$

Chacun de ces $\dot{g}_{j,i}$ est le prolongement sur $\dot{V}_j$ d'un germe $g_{j,i}$ appartenant au groupe de Stokes $\text{Sto}_{\alpha_{j,i}}$. (L'ordre des facteurs étant fixé, cette factorisation existe et est unique).

- 5) Remplacer la liste circulaire des $\dot{g}_j$ par la liste circulaire des $\dot{g}_{j,i}$ en conservant l'ordre des $\dot{g}_j$ et de leurs facteurs. Noter pour chaque $\dot{g}_{j,i}$ sa direction anti-Stokes de rattachement.

6) Regrouper par des permutations élémentaires (Cf remarque III.14 ci-dessous) tous les $\dot{g}_{j,i}$ rattachés à la même direction anti-Stokes de telle sorte que l'ordre respectif des "paquets" soit celui de leur direction anti-Stokes de rattachement.

7) Pour chaque direction anti-Stokes α , noter $\dot{f}_\alpha$ le produit des termes du paquet rattaché à α dans l'ordre dans lequel ces termes se présentent. Noter $\dot{f}_\alpha = I$ pour un paquet vide (la direction anti-Stokes α n'est pas intervenue).

Résultat

La 1-cochaîne $\dot{f} = (\dot{f}_\alpha)$ est la 1-cochaîne fondamentale cohomologue à $\dot{g}$ dans $H^1(\mathcal{U}; \Lambda(A_0))$.

REMARQUE III.14. On réalise une permutation élémentaire de la façon suivante :

Soient g et g' deux termes consécutifs à permuter dans la liste. Notons α et α' leur direction anti-Stokes de rattachement. On a $g \in \text{Sto}_\alpha$ et $g' \in \text{Sto}_{\alpha'}$ et les domaines de définition naturels de g et de g' sont des secteurs $V(\alpha, \frac{\pi}{k})$ et $V(\alpha', \frac{\pi}{k'})$ non disjoints. Sur $V(\alpha, \frac{\pi}{k}) \cap V(\alpha', \frac{\pi}{k'})$ le produit gg' peut se factoriser dans l'autre sens et de façon unique (corollaire II.22) : $gg' = g''g'''$ avec $g'' \in \text{Sto}_{\alpha'}$ et $g''' \in \text{Sto}_\alpha$.

On remplace le couple (g, g') par le couple (g'', g''') .

3. Effet d'un éclatement sur la cohomologie

L'éclatement $t \mapsto x = t^p, p \in \mathbb{N}^*$ qui fait de $\mathbb{C}_t$ (plan de la variable complexe t) un revêtement ramifié à p feuillets de $\mathbb{C}_x$ (plan de la variable complexe x) transforme un système

$$[A] : \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{sur } \mathbb{C}_x$$

en un système

$$[A^{*p}] : \frac{dY}{dt} = A^{*p}Y \quad \text{où } A^{*p}(t) = pt^{p-1}A(t^p) \quad \text{sur } \mathbb{C}_t .$$

Si le système $[A]$ est à coefficients analytiques, $[A^{*p}]$ l'est aussi.

Il est facile de voir qu'un tel éclatement induit une application injective entre les ensembles de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ et $H^1(S^1; \Lambda(A_0^{*p}))$ associés à des formes normales $[A_0]$ et $[A_0^{*p}]$ quelconques. Nous nous proposons d'expliciter cette injection en termes de 1-cochaînes fondamentales (Définition III.11 et corollaire III.12).

Choix des formes normales

Fixons une forme normale d'Hermite $[A_0]$ pour $[A]$ de solution normale d'Hermite $X_0(x)$. Alors le système $[A_0^{*p}]$ appartient à la classe de Birkhoff formelle de $[A^{*p}]$ et il admet $X_0^{*p}(t) = X_0(t^p)$ pour solution fondamentale. Lorsque $[A]$ appartient au cas sans ramification, X_0^{*p} est encore une solution normale d'Hermite, ce qui n'est plus vrai lorsque $[A]$ appartient au cas avec ramification. Mais dans tous les cas, on peut choisir le système $[A_0^{*p}]$ comme forme normale pour la classe de Birkhoff formelle de $[A^{*p}]$: l'ensemble $H^1(S^1; \Lambda(A_0^{*p}))$ classe alors tous les systèmes de solutions de la classe de Birkhoff formelle de X_0^{*p} (à transformation analytique de la variable t près). On commente plus loin le choix d'une forme normale autre que $[A_0^{*p}]$ (Remarque III.20).

Notons Q la partie irrégulière de X_0 et Q^{*p} celle de X_0^{*p} . On a $Q^{*p}(t) = Q(t^p)$.

Relèvement des recouvrements

Notons pour les distinguer S_x^1 l'ensemble des directions issues de 0 dans $\mathbb{C}_x$ et S_t^1 celles dans $\mathbb{C}_t$. L'éclatement $t \mapsto x = t^p$ fait de S_t^1 un revêtement à p feuillets de S_x^1 .

Soit $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ un recouvrement de S_x^1 . Il se "relève" par l'éclatement en un recouvrement $\mathcal{U}^{*p} = \{U_{j,i}^{*p}, j \in J, i \in [0, 1, \dots, p-1]\}$ de S_t^1 où les ouverts $U_{j,i}^{*p}$ pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ sont les p relèvements de U_j dans les différents feuillets. L'ensemble des ouverts de $\mathcal{U}^{*p}$ est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$: nous dirons qu'il est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariant (voir figure III.3.1).

Si $\mathcal{U}$ est bon, $\mathcal{U}^{*p}$ l'est aussi.

Si $\mathcal{U}$ est Q -suffisant, $\mathcal{U}^{*p}$ est Q^{*p} -suffisant.

Si $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_j, j \in J\}$ est le 1-nerf d'un bon recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$, le 1-nerf $\dot{\mathcal{U}}^{*p}$ de $\mathcal{U}^{*p}$ est constitué des relèvements $\dot{U}_{j,i}$, pour $i = 0, 1, \dots, p-1$, de chacun des ouverts $\dot{U}_j$ dans les différents feuillets.

Relèvement des cochaînes

Par composition avec l'éclatement $t \mapsto x = t^p$, une 1-cochaîne $\dot{f} = (\dot{f}_j)$ sur $\dot{\mathcal{U}}$ se relève en une 1-cochaîne $\dot{f}^{*p} = (\dot{f}_{j,i}^{*p})$ sur $\dot{\mathcal{U}}^{*p}$ définie sur chaque ouvert $\dot{U}_{j,i}^{*p}$ par $\dot{f}_{j,i}^{*p}(t) = \dot{f}_j(t^p)$. Celle-ci est donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariante.

Réciproquement, toute 1-cochaîne $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariante sur S_t^1 est le relèvement d'une 1-cochaîne sur S_x^1 . Cette correspondance est compatible avec les relations de cohomologie. Elle induit une application injective

$$R_p : H^1(S_x^1; \Lambda(A_0)) \longrightarrow H^1(S_t^1; \Lambda(A_0^{*p})) .$$

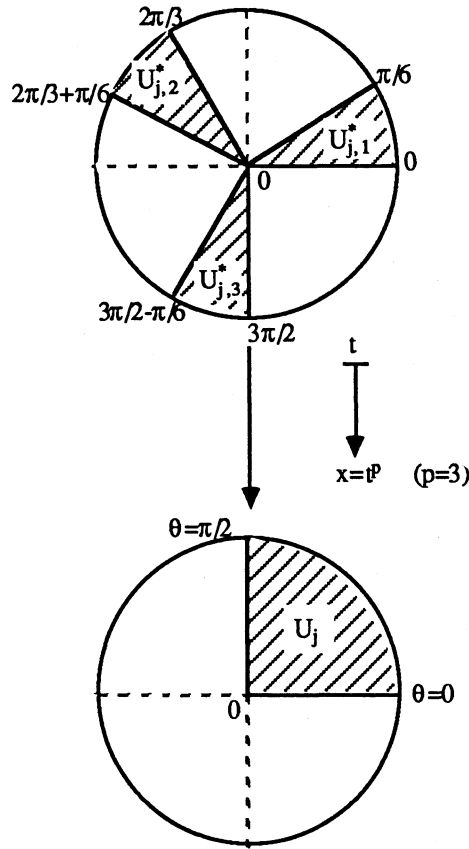


Figure III.3.1

L'injectivité provient du fait que si deux 1-cochaînes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariantes sont cohomologues via une 0-cochaîne quelconque, alors elles sont cohomologues via une 0-cochaîne $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariante : il suffit pour le voir de symétriser les relations de cohomologie.

Relèvement de l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya

L'éclatement $t \longrightarrow x = t^p$ induit de même par composition une application entre les ensembles de transformations $\widehat{G}(A_0)$ et $\widehat{G}(A_0^{*p})$ de $[A_0]$ et de $[A_0^{*p}]$ (cf. définition I.4). Celle-ci est compatible avec l'action à gauche des groupes G_x et G_t des transformations convergentes et elle induit entre les quotients une application injective

$$\rho_p : G_x \backslash \widehat{G}(A_0) \longrightarrow G_t \backslash \widehat{G}(A_0^{*p}) .$$

La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de la définition de l'isomorphisme $\exp \mu$ noté ici $\exp \mu_x$ ou $\exp \mu_t$ suivant que la variable est x ou t . (cf. I.4.3).

PROPOSITION III.15. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}_t & & t & & G_t \setminus \widehat{G}(A_0^{*p}) \xrightarrow{\exp \mu_t} H^1(S_t^1; \Lambda(A_0^{*p})) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \rho_p \\
 \mathbb{C}_x & & x = t^p & & G_x \setminus \widehat{G}(A_0) \xrightarrow{\exp \mu_x} H^1(S^1; \Lambda(A_0)) \\
 & & & & \uparrow R_p
 \end{array}$$

est commutatif.

Les deux flèches verticales sont injectives; les deux flèches horizontales sont bijectives.

Relèvement des directions anti-Stokes

Chaque direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$ de $[A_0]$ admet p relèvements $\alpha_1^{*p}, \dots, \alpha_p^{*p}$ dans p feuillets successifs de S_t^1 au-dessus de $\alpha \in S_x^1$. L'ensemble $\mathcal{A}^{*p}$ de ces relèvements pour toutes les directions anti-Stokes α de $[A_0]$ constitue l'ensemble des directions anti-Stokes de $[A_0^{*p}]$. Cet ensemble est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariant; dans un feuillet quelconque, tout arc $[\theta, \theta + \frac{2\pi}{p}[$ d'ouverture $\frac{2\pi}{p}$ en est un "domaine fondamental". Fixons un tel domaine $[\theta_0, \theta_0 + \frac{2\pi}{p}[$ et notons $\mathcal{A}_{\theta_0}^{*p} = \mathcal{A}^{*p} \cap [\theta_0, \theta_0 + \frac{2\pi}{p}[$ la restriction de $\mathcal{A}^{*p}$ à ce domaine.

Les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{\theta_0}^{*p}$ admettent le même nombre d'éléments et l'ensemble $\mathcal{A}^{*p}$, qui en contient p fois plus, se déduit de $\mathcal{A}_{\theta_0}^{*p}$ par l'action des p rotations d'angle $\frac{2k\pi}{p}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Relèvement des 1-cochaînes fondamentales

Supposons que $[A_0]$ est donc aussi $[A_0^{*p}]$ appartienne au cas sans ramification et identifions par l'application h notée ici h_x ou h_t suivant que la variable est x ou t , les ensembles de cohomologie à des ensembles de 1-cochaînes fondamentales (Th. III.3, Déf. III.11, Corol. III.12) :

$$\begin{aligned}
 h_x &: \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha}(A_0) \xrightarrow{\sim} H^1(S_x^1; \Lambda(A_0)) \\
 \text{et } h_t &: \prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p}) \xrightarrow{\sim} H^1(S_t^1; \Lambda(A_0^{*p})) .
 \end{aligned}$$

Notons

$$R'_p : \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha}(A_0) \longrightarrow \prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p})$$

l'application de relèvement des germes de Stokes via l'éclatement $t \mapsto x = t^p$. L'application R'_p vérifie $R'_p = h_t^{-1} R_p h_x$ et réalise une bijection

entre les 1-cochaînes “appartenant” à $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha}(A_0)$ et les 1-cochaînes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariantes “appartenant” à $\prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p})$. Elle induit donc une bijection r_p entre $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha}(A_0)$ et la restriction (rest) du produit $\prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p})$ aux seuls “indices” α^{*p} d’un domaine fondamental, par exemple $\alpha^{*p} \in \mathcal{A}_{\theta_0}^{*p}$.

On résume ce qui précède en énonçant :

PROPOSITION III.16. *Supposons que $[A_0]$ appartienne au cas sans ramification. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_t \setminus \widehat{G}(A_0^{*p}) & \xrightarrow{\exp \mu_t} & H^1(S^1; \Lambda(A_0^{*p})) & \xrightarrow{h_t^{-1}} & \prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p}) & \xrightarrow{\text{rest}} & \prod_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}_0^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p}) \\
 \uparrow \rho_p & & \uparrow R_p & & \uparrow R'_p & \nearrow r_p & \\
 G_x \setminus \widehat{G}(A_0) & \xrightarrow{\exp \mu_x} & H^1(S^1; \Lambda(A_0)) & \xrightarrow{h_x^{-1}} & \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0) & &
 \end{array}$$

est commutatif et l’application $r_p := \text{rest} \circ R'_p$ est un isomorphisme de groupes.

Les flèches ρ_p , R_p , R'_p sont des injections, rest est la projection canonique donc une surjection et les flèches $\exp \mu_t$, $\exp \mu_x$, h_t , h_x sont des bijections.

4. Cohomologie du faisceau d’isotropie $\Lambda(A_0)$: le cas avec ramification

On se propose dans ce paragraphe d’établir l’isomorphisme h dans le cas avec ramification en termes de cohomologie de Čech. On répond ainsi en particulier à une question posée par Babbitt et Varadarajan ([BV89], Remark p. 152).

L’argumentation repose sur l’étude du cas sans ramification faite au paragraphe précédent et en particulier sur le fait qu’on peut choisir, pour tout système $[A]$, une solution d’Hermite $\widehat{F}X_0$ dans laquelle la série formelle $\widehat{F}$ est non ramifiée ($\widehat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$).

On reprend les notations du paragraphe précédent, mais on suppose maintenant que $[A_0]$ est une forme normale d’Hermite appartenant au cas **avec ramification**. Notons p le ppcm des ordres de ramification de Q . Alors $[A_0^{*p}]$ appartient au cas **sans ramification**. Si $[A]$ est un système de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$, le système $[A^{*p}]$ est dans la classe de Birkhoff formelle de $[A_0^{*p}]$. Soit $X_0 = P(x)x^K x^J U e^{Q(\frac{1}{x})}$ la solution normale d’Hermite choisie pour $[A_0]$ (Q est ramifiée et donc $U \neq I$). Alors, $X_0^{*p}(t) = P(t^p)t^{pK}t^{pJ}U e^{Q(\frac{1}{t^p})}$ est une solution fondamentale non ramifiée de $[A_0^{*p}]$, mais qui n’est pas sous la forme normale d’Hermite puisque, dans le cas sans ramification, on doit avoir $U = I$ ce qui n’est pas le cas ici. Cependant l’ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda(A_0^{*p}))$ est encore un

Chapitre III

classifiant analytique des systèmes de solutions de la classe formelle de X_0^{*p} . On indique en fin de paragraphe (remarque III.19) comment réaliser le passage d'un tel cocycle au cocycle associé au choix d'une forme normale d'Hermite.

L'énoncé de la proposition III.16 reste valable si on le modifie en supprimant la flèche h_x^{-1} qui n'existe pas, du moins pas encore. Cependant les applications R'_p et $h_t^{-1} \circ R_p$ sont injectives et ont la même image (qui est isomorphe par l'application rest à $\Pi_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}_0^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p})$). Et donc on peut compléter le diagramme par une flèche bijective que nous noterons encore h_x^{-1} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_t \setminus \widehat{G}(A_0^{*p}) & \xrightarrow{\exp \mu_t} & H^1(S_t^1; \Lambda(A_0^{*p})) & \xrightarrow{h_t^{-1}} & \Pi_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p}) & \xrightarrow{\text{rest}} & \Pi_{\alpha^{*p} \in \mathcal{A}_0^{*p}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0^{*p}) \\
 \uparrow \rho_p & & \uparrow R_p & & \uparrow R'_p & & \nearrow r_p \\
 G_x \setminus \widehat{G}(A_0) & \xrightarrow{\exp \mu_x} & H^1(S^1; \Lambda(A_0)) & \xrightarrow{h_x^{-1}} & \Pi_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Sto}_{\alpha^{*p}}(A_0) & &
 \end{array}$$

On peut donc énoncer

THÉORÈME III.17. *Même dans le cas avec ramification, on a une bijection naturelle*

$$h : \prod_{\alpha \in \mathcal{A}^p} \text{Sto}_{\alpha}(A_0) \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(A_0))$$

du produit des groupes de Stokes dans la cohomologie à valeurs dans le faisceau d'isotropie.

Ici encore on s'autorisera à appeler ***1-cochaîne fondamentale*** d'une classe de cohomologie de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ l'image de celle-ci par h^{-1} .

REMARQUE III.18. Rappelons que, même dans le cas avec ramification, les groupes de Stokes $\text{Sto}_{\alpha}(A_0)$ ont un sens intrinsèque : Ce sont leurs représentations qui changent avec le feuillet choisi pour les représenter (cf. III.1.c).

REMARQUE III.19. Passage de X_0^{*p} à une solution d'Hermite Y_0 .

Dans le cas avec ramification, $X_0^{*p}(t) = P(t^p)t^{pK}t^{pJ}Ue^{Q(\frac{1}{t^p})}$ n'est pas la solution normale d'Hermite, mais on peut l'y ramener par une transformation de Birkhoff analytique : Il s'agit en effet, dans l'expression de X_0^{*p} , de faire "glisser" U vers la gauche. Or la matrice $\mathcal{M}_0(t) = t^{pJ}U t^{-pJ}$ est méromorphe (convergente); il suffit pour s'en assurer de vérifier qu'elle n'a pas de monodromie (cf. lemme V.10). Ainsi par exemple, en dimension 2 on a nécessairement $p = 2$ ($= \text{ppcm}(2,1)$) et

$$t^{2J}U t^{-2J} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix}.$$

On a dans ce cas $2J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En triangulant $P(t^p)t^{pK}\mathcal{M}_0(t)$, on obtient $X_0^{*p}(t) = \mathcal{M}(t)Y_0(t)$ où $\mathcal{M}(t) \in GL_I(n, \mathbb{C}\{t\})$ et $Y_0(t)$ est sous forme normale d'Hermite.

Notons $B_0(t) = Y_0'(t)Y_0(t)^{-1}$.

Les systèmes $[B_0]$ et $[A_0^{*p}]$ sont dans la même classe de Birkhoff formelle. Une solution fondamentale formelle de $[A^{*p}]$ s'écrit

$$\hat{F}(x)X_0^{*p}(t) = \hat{F}(x)\mathcal{M}(t)Y_0(t) .$$

$\hat{F}$ ne dépend que de $x = t^p$ mais $\mathcal{M}$ dépend de t . On peut choisir $\hat{F}(t^p)$ comme transformation de Birkhoff formelle de $[A_0^{*p}]$ en $[A^{*p}]$ et $\hat{F}(t^p)\mathcal{M}(t)$ comme transformation de Birkhoff formelle de $[B_0]$ en $[A^{*p}]$. Les 1-cochaînes associées dans un bon recouvrement $\mathcal{U} = \{U_j\}$ s'écrivent alors respectivement $F_j^{-1}F_{j+1}$ et $\mathcal{M}^{-1}F_j^{-1}F_{j+1}\mathcal{M}$ où les F_j sont des solutions de l'équation de passage de $[A_0^{*p}]$ à $[A^{*p}]$ asymptotiques à $\hat{F}$ sur les ouverts U_j ($\mathcal{M}$ est analytique : elle se relève en elle-même dans chaque ouvert U_j). Ainsi les cocycles associés à $[A^{*p}]$ dans $H^1(S_t^1; \Lambda(A_0^{*p}))$ et dans $H^1(S_t^1; \Lambda(B_0))$ sont conjugués l'un de l'autre par la transformation analytique $\mathcal{M}$.

REMARQUE III.20. Choix de la forme normale $[A_0^{*p}]$.

Si, lorsque le recouvrement $\mathcal{U}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariant, on peut construire à partir de $\hat{F}$ un cocycle $\varphi = (F_j^{-1}F_{j+1})$ lui aussi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariant, il n'en est plus de même du cocycle $\mathcal{M}^{-1}\varphi\mathcal{M}$ puisque $\mathcal{M}$ est fonction de t et non de x : En éliminant la matrice U , on a rompu les symétries. Ainsi il était essentiel dans la démonstration précédente du théorème III.17 de faire le choix de $[A_0^{*p}]$ comme forme normale puisque cette démonstration repose de façon essentielle sur la $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariance des cochaînes.

REMARQUE III.21. Relation entre les représentations associées à X_0^{*p} et à Y_0 .

Si la composante $F_j^{-1}F_{j+1}$ de φ est représentée dans un feuillet $\tilde{\theta}$ par une matrice $C_{\tilde{\theta}}$, on a

$$\begin{aligned} F_j^{-1}F_{j+1}(t) &= X_0^{*p}(t)C_{\tilde{\theta}}X_0^{*p}(t)^{-1} \\ \text{d'où} \quad \mathcal{M}^{-1}F_j^{-1}F_{j+1}\mathcal{M} &= \mathcal{M}^{-1}(t)X_0^{*p}C_{\tilde{\theta}}X_0^{*p(t)^{-1}}\mathcal{M}(t) \\ &= Y_0(t)C_{\tilde{\theta}}Y_0(t)^{-1} . \end{aligned}$$

Ainsi le cocycle associé au système $[A^{*p}]$ qu'il soit construit sur la forme normale X_0^{*p} ou sur la forme d'Hermite Y_0 admet les mêmes matrices de représentation et, en particulier, les mêmes matrices de Stokes.

IV. Applications théoriques

1. Structures algébriques sur $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$

On fixe X_0 une solution d'Hermite de $[A_0]$.

1.1. Structure de variété affine

Nous avons vu (Proposition II.2) que les fibres en $\theta \in S^1$ du faisceau $\Lambda(A_0)$ sont représentables dans un feuillet quelconque de la surface de Riemann du logarithme au-dessus de θ par les matrices $C_{\tilde{\theta}}$ de la forme

$$C_{\tilde{\theta}} = I + \sum_{(j,\ell) \mid q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)} , \quad c_{(j,\ell)} \in \mathbb{C} .$$

(On a noté $E_{(j,\ell)}$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indices (j,ℓ) qui vaut 1.) En outre, les représentations dans les différents feuillets sont conjuguées les unes des autres :

$$C_{\tilde{\theta}+2\pi} = \hat{M}^{-1} C_{\tilde{\theta}} \hat{M} ,$$

où $\hat{M}$ est la matrice de monodromie de X_0 (II.1.3). Les fibres du faisceau $\Lambda(A_0)$ admettent donc une structure canonique de variété linéaire affine. Ainsi, lorsque le faisceau $\Lambda(A_0)$ est à un seul niveau k , la bijection $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \Gamma(\dot{U}_\alpha; \Lambda(A_0)) \xrightarrow[\sim]{s^k} H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ (Prop. III.7) permet de munir l'ensemble $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ d'une structure linéaire affine.

De même, les fibres du sous-faisceau Λ^k des germes de niveau pur k sont représentables par les matrices

$$C_{\tilde{\theta}} = I + \sum_{\substack{(j,\ell) \mid \\ q_j \prec_{\tilde{\theta}} q_\ell \text{ et } d^0(q_j - q_\ell) = k}} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)} , \quad c_{(j,\ell)} \in \mathbb{C} .$$

Les fibres de Λ^k admettent donc une structure canonique de variété linéaire affine et celle-ci se transporte à $H^1(S^1; \Lambda^k)$ grâce à la bijection (Prop. III.7)

$$\Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) \xrightarrow[\sim]{s^k} H^1(S^1; \Lambda^k) .$$

Dans le cas où le faisceau Λ admet un seul niveau k (d'où $\Lambda^k = \Lambda$), on remarque que, si $\mathcal{V} = \{V_\ell, \ell \in L\}$ est un bon recouvrement raffinant

$\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$, alors, pour toute inclusion croissante $\sigma : L \rightarrow J$, l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : \prod_j \Gamma(\dot{U}_j; \Lambda^k) &\longrightarrow \prod_\ell \Gamma(\dot{V}_\ell; \Lambda^k) \\ (\dot{f}_j) &\longmapsto (\dot{g}_\ell = \prod_{\sigma(\ell) \leq j < \sigma(\ell+1)} \dot{f}_j) \end{aligned}$$

est non linéaire dès que $\sigma(\ell+1) \neq \sigma(\ell) + 1$; elle est toutefois algébrique. Ainsi, bien que pour les différents raffinements $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}^k$, les structures linéaires affines induites sur $H^1(S^1; \Lambda^k)$ par celles de $\prod_\ell \Gamma(\dot{V}_\ell; \Lambda^k)$ soient en général différentes, elles définissent sur $H^1(S^1; \Lambda^k)$ une unique structure (algébrique) affine.

Dans le cas général où le faisceau Λ admet un nombre quelconque de niveaux, considérons $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}' : \prod_{k \in \mathcal{K}} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}; \Lambda)$ deux des bijections du théorème III.10.ii correspondant à des multiplications dans des ordres différents ; l'application $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}'$ est algébrique. Les applications $\mathcal{T}$ permettent donc de transporter la structure de variété affine produit de $\prod_{k \in \mathcal{K}} \Gamma(\dot{\mathcal{U}}^k; \Lambda^k)$ à $H^1(S^1; \Lambda)$. La propriété est encore valable dans le cas avec ramification.

Ce résultat a été établi par Malgrange dans [Mal83] (Remarque 5.4). Voir aussi [BV89] (Theorem 3.4.1 et Appendix p. 164).

1.2. Structure de variété linéaire affine

C'est la structure sur laquelle reposent les calculs de matrices de Stokes (i.e. de cocycles).

Les groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ sont des sous-variétés linéaires affines des fibres $\Lambda_\alpha(A_0)$. Ses éléments sont représentés (Prop. et Déf. II.18-Not. II.19) par les matrices

$$C_{\tilde{\alpha}} = I + \sum_{(j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}} c_{(j,\ell)} E_{(j,\ell)}, \quad c_{(j,\ell)} \in \mathbb{C}.$$

L'isomorphisme naturel h (Théorème III.3 et III.17) permet de transporter la structure linéaire produit des groupes de Stokes en une structure naturelle de variété linéaire affine sur l'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$; cette structure induit la structure affine précédente par oubli.

Pour chaque direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$, fixons un relèvement $\tilde{\alpha}$ de α sur la surface de Riemann du logarithme et fixons I comme origine de la variété linéaire affine $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

La famille des germes en $\alpha \in \mathcal{A}$ de la forme $I + X_{0,\tilde{\alpha}}(x) E_{(j,\ell)} X_{0,\tilde{\alpha}}(x)^{-1}$ pour tous les couples (j,ℓ) portés par $\tilde{\alpha}$ (i.e. tels que $q_j \prec_{\tilde{\alpha}, \max} q_\ell$) est libre

et la sous-variété linéaire de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ qu'elle engendre est indépendante des relèvements $\tilde{\alpha}$ choisis. On en déduit

PROPOSITION IV.1 : Base de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$. *Pour chaque direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$, un relèvement $\tilde{\alpha}$ étant fixé, la famille des cocycles élémentaires du recouvrement fondamental $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ définis par*

$$T_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} = I + X_{0,\tilde{\alpha}} E_{(j,\ell)} X_{0,\tilde{\alpha}}^{-1} \quad \text{sur } \dot{U}_\alpha ,$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout couple (j,ℓ) porté par $\tilde{\alpha}$, est une base de la variété linéaire affine $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ d'origine I .

Pour les calculs explicites (cf. deuxième partie), c'est dans une telle base que nous déterminerons les cocycles ou les matrices de Stokes qui les représentent. Il est en outre usuel de choisir tous les relèvements $\tilde{\alpha}$ dans un même feuillet, qualifié de feuillet principal (Définition III.13). Les cocycles déterminés dans une telle base sont des 1-cochaînes fondamentales.

La proposition précédente entraîne

PROPOSITION IV.2. *La dimension $N = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ de la variété linéaire affine $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ est finie et égale à $N = \sum_{(j,\ell)} d^0(q_j - q_\ell)$. (Pour un polynôme ramifié $q(x) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i x^{i/p}$ où $a_\nu \neq 0$, le degré est fractionnaire défini par $d^0 q = \nu/p$.)*

On sait par ailleurs que cette dimension est égale à l'irrégularité du système $[A_0]$ c'est-à-dire à la différence entre indice formel et indice analytique de $[A_0]$ ([Mal74]). L'expression de l'irrégularité donnée par Deligne ([De77], [BV89], Prop. 2.63 p. 145, Th. 3.4.1 p. 164) conduit immédiatement à la valeur de N ci-dessus.

1.3. Structure de groupe de Lie

Cette structure est reliée au point de vue des dérivations étrangères d'Ecale.

Les groupes de Stokes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ sont des sous-groupes de Lie de $GL(n, \mathcal{A}_\alpha)$ où $\mathcal{A}_\alpha$ désigne la fibre en α du faisceau $\mathcal{A}$ au-dessus de S^1 des germes de fonctions analytiques admettant un développement asymptotique en 0. Ils sont conjugués modulo le choix d'une détermination du logarithme à des sous-groupes de Lie de $GL_I(n, \mathbb{C})$ par l'application $C \mapsto X_0(x) C X_0(x)^{-1}$. Leur produit (fini) est encore un groupe de Lie ainsi que $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ grâce à l'isomorphisme naturel h (Théorème III.3).

En outre, les groupes $\text{Sto}_\alpha(A_0)$ étant unipotents, l'application exponentielle réalise un difféomorphisme avec leur algèbre de Lie $\text{sto}_\alpha(A_0)$. On munit ainsi $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ d'une structure linéaire tangente. Sauf en dimension 2, celle-ci ne coïncide pas avec la structure linéaire affine précédente. La relation entre les deux est donnée par la formule de Campbell-Hausdorf.

2. Sommes fondamentales des solutions d'Hermite

Soit $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ (ou $\hat{G}_I(A_0)$ ou $\hat{G}_{\text{mer}}(A_0)$) une transformation formelle transformant un système $[A_0] : \frac{dX}{dx} = A_0 X$ choisi comme forme normale en le système $[A = {}^F A_0] : \frac{dX}{dx} = AX$. La transformation $\hat{F}$ est l'une quelconque des solutions formelles de l'équation de passage de $[A_0]$ à $[A]$, à savoir

$$[A_0; A] : \frac{d\hat{F}}{dx} = A\hat{F} - \hat{F}A_0 .$$

On ne suppose pas pour l'instant que $[A_0]$ est une forme normale d'Hermite.

DÉFINITION IV.3. Etant donnée une solution formelle $\hat{F}$ de l'équation $[A_0; A]$, nous dirons qu'une fonction F est une **incarnation de $\hat{F}$** sur un secteur V si F est solution de l'équation $[A_0; A]$ et asymptotique à $\hat{F}$ en 0 sur V .

Nous réserverons la dénomination de **somme de $\hat{F}$** à celles des incarnations de $\hat{F}$ qui définissent la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F})$ (voir ci-dessous déf. IV.4 et IV.6).

Le théorème des développements asymptotiques ([Hu42], [Wa65]) assure que pour toute $\hat{F}$ solution d'un système différentiel analytique et tout secteur V assez petit, il existe une incarnation F de $\hat{F}$ sur V (dans le cas d'un système linéaire de niveau maximum k_1 , "assez petit" peut être remplacé par "d'ouverture $< \pi/k_1$ ").

Rappelons comment est défini l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya $\exp \mu : G \setminus \hat{G}(A_0) \rightarrow H^1(S^1; \Lambda(A_0))$. On se donne $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ (d'où sa classe dans $G \setminus \hat{G}(A_0)$) et sur un bon recouvrement $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ assez fin, des incarnations F_j de $\hat{F}$. Alors $\exp \mu(\hat{F})$ est la classe de cohomologie de la 1-cochaîne $\dot{F} = (\dot{F}_j)_{j \in J}$ définie par $\dot{F}_j = F_j^{-1} F_{j+1}$ sur $\dot{V}_j = V_j \cap V_{j+1}$ (cette classe est indépendante des incarnations choisies).

DÉFINITION IV.4. Nous dirons qu'une telle cochaîne **provient d'incarnations** de $\hat{F}$ sur $\mathcal{V}$.

PROPOSITION IV.5. Soit $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ et $(\dot{F}_j)_{j \in J}$ une 1-cochaîne d'un recouvrement $\mathcal{V} = \{V_j; j \in J\}$ représentant $\exp \mu(\hat{F}) \in H^1(S^1; \Lambda(A_0))$.

Alors, $(\dot{F}_j)$ provient d'incarnations F_j de $\hat{F}$ sur $\mathcal{V}$. En outre, celles-ci sont déterminées de manière unique.

DÉMONSTRATION : Nous venons de voir qu'il existe de telles 1-cochaînes sur tout recouvrement assez fin.

- Si $\dot{F} = (\dot{F}_j)_{j \in J}$ et $\dot{G} = (\dot{G}_j)_{j \in J}$ sont deux 1-cochaînes cohomologues d'un même recouvrement $\mathcal{V} = \{V_j; j \in J\}$ et si $\dot{F}$ provient d'incarnations de $\hat{F}$ sur $\mathcal{V}$, alors $\dot{G}$ aussi.

En effet, par hypothèse, on a $\dot{F}_j = F_j^{-1}F_{j+1}$ où les F_j sont des solutions de l'équation $[A_0; A]$ de passage de $[A_0]$ à $[A]$ asymptotiques à $\hat{F}$ sur V_j et il existe une 0-cochaîne $(c_j)_{j \in J}$ telle que

$$\dot{G}_j = c_j^{-1}(F_j^{-1}F_{j+1})c_{j+1} \quad .$$

Les fonctions $G_j = F_j c_j$ conviennent.

Ainsi, si le recouvrement $\mathcal{V}$ est assez fin, toute 1-cochaîne représentant $\exp \mu(\hat{F})$ dans $\mathcal{V}$ provient d'incarnations de $\hat{F}$ sur $\mathcal{V}$.

- Montrons enfin que si $\dot{F} = (\dot{F}_j)_{j \in J}$ est une 1-cochaîne d'un (bon) recouvrement quelconque $\mathcal{V} = \{V_j; j \in J\}$ représentant le cocycle $\exp \mu(\hat{F})$, alors $\dot{F}$ provient d'incarnations de $\hat{F}$ sur $\mathcal{V}$.

En effet, considérons un raffinement $\mathcal{W} = \{W_\ell; \ell \in L\}$ de $\mathcal{V}$ qui soit

d'une part, un sous-revêtement de $\mathcal{V}$: pour tout $j \in J$, il existe un sous-ensemble non vide $L(j)$ de L tel que $V_j = \bigcup_{\ell \in L(j)} W_\ell$, et $L = \bigcup_{j \in J} L(j)$;

d'autre part, assez fin pour qu'on puisse affirmer que toutes les 1-cochaînes représentant $\exp \mu(\hat{F})$ sur $\mathcal{W}$ proviennent d'incarnations de $\hat{F}$ sur $\mathcal{W}$.

Choisissons une inclusion $\sigma : L \rightarrow J$ qui soit surjective et croissante et considérons la 1-cochaîne $\dot{G} = (\dot{G}_\ell)_{\ell \in L}$ définie par $\dot{G} = \sigma^*(\dot{F})$. Celle-ci possède donc les propriétés suivantes :

si $\sigma(\ell) = \sigma(\ell + 1)$, alors $\dot{G}_\ell = I$;

si $\sigma(\ell) \neq \sigma(\ell + 1)$, alors $\sigma(\ell + 1) = \sigma(\ell) + 1$ et $\dot{G}_\ell = \dot{F}_{\sigma(\ell)}|_{W_\ell}$ et, pour tout $\ell \in L$, $\dot{G}_\ell = G_\ell^{-1}G_{\ell+1}$ où G_ℓ est une solution de $[A_0; A]$ asymptotique à $\hat{F}$ sur W_ℓ .

Ainsi, si $\sigma(\ell) = \sigma(\ell + 1)$, alors $G_\ell^{-1}G_{\ell+1} = I$ et les deux fonctions G_ℓ et $G_{\ell+1}$ se recollent en une solution de $[A_0; A]$ asymptotique à $\hat{F}$ sur $W_\ell \cup W_{\ell+1}$.

Si $\sigma(\ell) \neq \sigma(\ell + 1)$ et si $W_\ell \cup W_{\ell+1} \subset V_{\sigma(\ell)}$, alors ce sont G_ℓ et $G_{\ell+1}\dot{F}_{\sigma(\ell)}^{-1}$ qui se recollent sur $W_\ell \cap W_{\ell+1}$ en une solution de $[A_0; A]$ asymptotique à $\hat{F}$ sur $W_\ell \cup W_{\ell+1}$.

Les fonctions F_j définies sur V_j , en posant, pour tout $\ell \in L(j)$, $F_j|_{W_\ell} = G_\ell F_{j, \sigma(\ell)}^{-1}$, conviennent. En particulier, pour les ℓ tels que $\sigma(\ell) = j$ (il en existe au moins un puisque σ est surjective), cela donne $F_j|_{W_\ell} = G_\ell$.

- Unicité. Soit (F_j) et (G_j) des incarnations de $\hat{F}$ définissant la même 1-cochaîne sur $\mathcal{V} = \{V_j; j \in J\}$. Alors, pour tout j , on a $F_j^{-1}F_{j+1} = G_j^{-1}G_{j+1}$ sur V_j . Ainsi, les fonctions $G_j F_j^{-1}$ se recollent en une fonction analytique autour de 0 et asymptotique à I en 0. C'est donc l'identité I et $F_j = G_j$ pour tout $j \in J$. $\square$

Supposons maintenant que $[A_0]$ soit une forme normale d'Hermite.

DÉFINITION IV.6. Sommes fondamentales de $\widehat{F}$. On appelle **sommes fondamentales** ou plus simplement **sommes** d'une transformation $\widehat{F} \in \widehat{G}(A_0)$ les incarnations F_α de la 1-cochaîne fondamentale associée à $\widehat{F}$ sur le recouvrement fondamental $\mathcal{U} = \{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Pour toute direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$, notons

$S_\alpha^-(\widehat{F}) = S_\alpha(\widehat{F}) = F_\alpha$ la somme de $\widehat{F}$ sur U_α (somme “avant” α ou “par la gauche”; rappelons qu'on a orienté S^1 dans le sens des aiguilles d'une montre);

et $S_\alpha^+(\widehat{F}) = S_{\alpha^+}(\widehat{F}) = F_{\alpha^+}$ la somme de $\widehat{F}$ sur U_{α^+} (somme “après” α ou “par la droite”; rappelons que α^+ désigne la direction anti-Stokes qui suit α).

Par ailleurs, la théorie de l'accélération d'Ecalte [Ec90] permet de construire des opérateurs de sommation pour $\widehat{F}$. Pour leur définition et les notations, on se réfère à [MR90], Definition 2, ou ci-dessous V.3.1.

Dans toute direction $d \notin \mathcal{A}$, on définit un seul opérateur noté $S_{k_1, \dots, k_r; d}$ ($k_1, \dots, k_r$ indiquent les niveaux du système).

A toute direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$, on associe deux opérateurs :

l'un, $S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^-$ de sommation dans une direction voisine de α et “avant” α ou “à gauche” de α ;

l'autre, $S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^+$ de sommation dans une direction voisine de α et “après” α ou “à droite” de α .

Le théorème 14(i) de [MR90] établit que la 1-cochaîne $\dot{f} = (\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ provenant de ces sommes, à savoir

$$\dot{f}_\alpha = S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^-(\widehat{F})^{-1} S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^+(\widehat{F})$$

n'est autre que la 1-cochaîne fondamentale $c(\widehat{F})$ de $\widehat{F}$ désignée par “Stokes cocycle”. D'où, grâce à l'unicité établie dans la proposition IV.5 ci-dessus, le résultat :

PROPOSITION IV.7. *Les sommes fondamentales de $\widehat{F}$ coïncident avec les sommes obtenues par accélération*

$$\begin{cases} S_\alpha^-(\widehat{F}) = S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^-(\widehat{F}) \\ S_\alpha^+(\widehat{F}) = S_{k_1, \dots, k_r; \alpha}^+(\widehat{F}) \end{cases} .$$

Nous n'utiliserons pas ce théorème de comparaison dans la suite de ce chapitre. En particulier, les résultats qui suivent sont obtenus de façon totalement indépendante des théories de l'accélération et de la multisommabilité.

3. Factorisation des solutions d'Hermite suivant les niveaux

Soit $[A_0]$ une forme normale qui n'est pas nécessairement une forme normale d'Hermite.

DÉFINITION IV.8. Soit $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ une transformation de $[A_0]$.

- i) Nous dirons que $\hat{F}$ **est de niveau** $< k$ (ou $\leq k$) si $\exp \mu(\hat{F})$ est représentable par une 1-cochaîne de niveau $< k$ (ou $\leq k$) (Définition II.7bis,ii).
- ii) Nous dirons que $\hat{F}$ **est k -sommable** si $\exp \mu(\hat{F})$ est représentable par une 1-cochaîne de niveau pur k (Définition II.7bis, i).

Si $[A_0]$ est une forme normale d'Hermite, la 1-cochaîne fondamentale elle-même a alors ces propriétés.

PROPOSITION IV.9. Si $\hat{F}$ est k -sommable, la 1-cochaîne de niveau pur k qui représente $\exp \mu(\hat{F})$ est essentiellement unique (i.e. elle est unique à des composantes triviales $\dot{F}_j = I$ près).

DÉMONSTRATION : C'est évident puisqu'il ne peut exister de 0-cochaînes de niveau pur k définie sur des secteurs d'ouverture $> \pi/k$.

On peut alors énoncer la définition suivante :

DÉFINITION IV.10. Soit $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ une transformation k -sommable et soit $(\dot{F}_j) \in \prod_j \Gamma(\dot{V}_j; \Lambda(A_0))$ une 1-cochaîne de niveau pur k représentant $\exp \mu(\hat{F})$, les secteurs $\dot{V}_j$ étant d'ouverture π/k .

Nous appelons ici **directions singulières de $\hat{F}$** les bissectrices de ceux des ouverts $\dot{V}_j$ pour lesquels $\dot{F}_j$ est non triviale ($\dot{F}_j \neq I$).

On vérifie aisément que cette définition est compatible avec la notion plus générale de direction singulière pour la sommation ([MR90], lemma 10). On montre en outre ([MR82]) que la k -sommabilité de $\hat{F}$ est équivalente aux deux propriétés :

$\hat{F}$ est une série de Gevrey de niveau k et, pour toute direction d sauf un nombre fini, elle s'incarne en des fonctions qui sont asymptotiques à $\hat{F}$ en 0 au sens de Gevrey de niveau k sur un secteur bissecté par d et d'ouverture $> \pi/k$ ([Ra80], [L-R90]). Nous n'utiliserons pas cette caractérisation.

PROPOSITION IV.11. Soit $[A]$ un système de forme normale d'Hermite $[A_0]$ et $\hat{F}$ une transformation de $[A_0]$ en $[A]$ ($A = \hat{F} A_0$ et $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$) où $\hat{G}(A_0)$ désigne indifféremment $\hat{G}_I(A_0)$, $\hat{G}_{\text{an}}(A_0)$ ou $\hat{G}_{\text{mer}}(A_0)$.

On note comme précédemment :

$\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ avec $k_r < k_{r-1} < \dots < k_1$ l'ensemble des niveaux de $[A_0]$;

$\mathcal{A}$ l'ensemble de ses directions anti-Stokes et $\mathcal{A}^k$ le sous-ensemble de celles qui portent un germe de niveau k ;

$\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ le recouvrement fondamental associé à $[A_0]$ et $\dot{\mathcal{U}} = \{\dot{U}_\alpha = U_\alpha \cap U_{\alpha+}, \alpha \in \mathcal{A}\}$ son 1-nerf ;

$\dot{f} = c(\hat{F}) \in \Gamma(\dot{\mathcal{U}}; \Lambda(A_0))$ la 1-cochaîne fondamentale de $\hat{F}$ (définition III.11).

Notons en outre $k \leq k_1$ le niveau maximal de la 1-cochaîne $\dot{f}$ et

$$\dot{f} = \dot{f}^{<k} \dot{g}^k \quad \text{ou} \quad \dot{f} = \dot{f}^k \dot{f}^{<k}$$

les deux factorisations possibles de $\dot{f}$ en un germe de niveau $< k$ et un germe de niveau pur k (Cor. II.12 et 23).

Soit $\hat{F}^{<k}$ une transformation de $[A_0]$ ($\hat{F}^{<k} \in G(A_0)$) admettant $c(\hat{F}^{<k}) = \dot{f}^{<k}$ pour 1-cochaîne fondamentale.

Notons enfin $A_1 = \hat{F}^{<k} A_0$ et $\exp \mu_1 : G \setminus \hat{G}(A_1) \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(A_1))$ l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya construit sur $[A_1]$ comme forme normale de référence.

Alors, on a :

i) $\hat{F}$ se factorise en un produit

$$\hat{F} = \hat{F}^k \hat{F}^{<k} ,$$

dans lequel $\hat{F}^{<k} \in \hat{G}(A_0)$ est de niveau $< k$ (donc de niveau $k' \leq \max\{k_i \in \mathcal{K} \mid k_i < k\}$) et $\hat{F}^k = \hat{F}(\hat{F}^{<k})^{-1}$ est une transformation de $[A_1]$ ($\hat{F}^k \in \hat{G}(A_1)$) qui est k -sommable et de directions singulières contenues dans $\mathcal{A}^k$;

ii) la classe de cohomologie $\exp \mu_1(\hat{F}^k) \in H^1(S^1; \Lambda(A_1))$ est représentée par la 1-cochaîne

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \left(S_\alpha^+(\hat{F}^{<k}) \dot{g}_\alpha^k S_\alpha^+(\hat{F}^{<k})^{-1} \right)_{\alpha \in \mathcal{A}} \\ &= \left(S_\alpha^-(\hat{F}^{<k}) \dot{f}_\alpha^k S_\alpha^-(\hat{F}^{<k})^{-1} \right)_{\alpha \in \mathcal{A}} . \end{aligned}$$

iii) Si on étend la notation $S_\alpha(\hat{F}^k)$ aux incarnations de $\hat{F}^k$ qui définissent la 1-cochaîne $\dot{\varphi}$ sur le recouvrement fondamental $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, on a donc, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \dot{g}_\alpha^k &= S_\alpha^+(\hat{F}^{<k})^{-1} S_\alpha(\hat{F}^k)^{-1} S_{\alpha+}(\hat{F}^k) S_\alpha^+(\hat{F}^{<k}) , \\ \dot{f}_\alpha^k &= S_\alpha^-(\hat{F}^{<k})^{-1} S_\alpha(\hat{F}^k)^{-1} S_{\alpha+}(\hat{F}^k) S_\alpha^-(\hat{F}^{<k}) , \end{aligned}$$

et, en particulier, $S_\alpha(\hat{F}) = S_\alpha(\hat{F}^k) S_\alpha(\hat{F}^{<k})$.

iv) La factorisation de $\hat{F}$ est essentiellement unique c'est-à-dire unique au sens suivant : si $\hat{F} = \hat{G}^k \hat{G}^{<k}$ est une autre factorisation de $\hat{F}$ comme en i), alors il existe h analytique ($h \in G$) telle que $\hat{F}^k = \hat{G}^k h$ et $\hat{F}^{<k} = h^{-1} \hat{G}^{<k}$.

Ce sont les deux égalités du point iii) que nous interpréterons en termes de lacets du π_1 sauvage.

DÉMONSTRATION : Plaçons-nous dans le cas sans ramification. Le cas avec ramification s'en déduit comme dans le théorème III.17 par une propriété de descente.

(i) découle de (ii) à condition de remarquer que $\dot{\varphi}$ est k -sommable, ce qui est évident de par les expressions qui la définissent.

(ii) La 1-cochaîne "tordue" $\dot{\varphi} = (S_{\alpha+}(\hat{F}^{<k}) \dot{g}_{\alpha}^k S_{\alpha+}(\hat{F}^{<k})^{-1})$ est à valeurs dans le faisceau des isotopies plates de $[A_1]$ et définit donc une classe de cohomologie de $H^1(S^1; \Lambda(A_1))$. Soit F^* l'un de ses relèvements à $\hat{G}(A_1)$ par $(\exp \mu_1)^{-1}$. Il s'agit de montrer que F^* et $\hat{F}^k$ coïncident à la multiplication à gauche près par une matrice analytique.

Soit F_{α}^* , $\alpha \in \mathcal{A}$, des incarnations de F^* définissant la 1-cochaîne $\dot{\varphi}$. Le produit $F^* F^{<k}$ est une transformation de $[A_0]$ ($F^* F^{<k} \in \hat{G}(A_0)$) et le cocycle $\exp \mu(F^* F^{<k})$ est défini par la 1-cochaîne

$$\begin{aligned} (F_{\alpha}^* S_{\alpha}(\hat{F}^{<k}))^{-1} (F_{\alpha+}^* S_{\alpha+}(\hat{F}^{<k})) &= S_{\alpha}(\hat{F}^{<k})^{-1} \dot{\varphi}_{\alpha} S_{\alpha+}(\hat{F}^{<k}) \\ &= S_{\alpha}(\hat{F}^{<k})^{-1} S_{\alpha+}(\hat{F}^{<k}) \dot{g}_{\alpha}^k \\ &= \dot{f}_{\alpha} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{F}$ et $F^* \hat{F}^{<k}$ appartiennent à la même classe analytique : il existe f analytique telle que $\hat{F} = f F^* \hat{F}^{<k}$ et en particulier $\hat{F}^k = f F^*$.

On peut faire la même démonstration à partir de la deuxième expression de $\dot{\varphi}$ et il est immédiat de vérifier que ces deux expressions sont égales.

(iii) résulte de (ii) grâce à la proposition IV.5.

(iv) Unicité. Il suffit de voir que la cochaîne fondamentale $c(\hat{F}^{<k})$ du facteur de niveau $< k$ est nécessairement $\dot{f}^{<k}$ c'est-à-dire la troncature de $\dot{f}$ aux termes de niveau $< k$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors $\dot{f}^{<k} = c(\hat{F}^{<k}) \dot{h}$ où la 1-cochaîne $\dot{h}$ est non triviale et de niveau $< k$. La 1-cochaîne $\dot{h} \dot{g}^k$ n'est donc pas cohomologue à une 1-cochaîne de niveau pur k pas plus que sa conjuguée $S_{\alpha}^+(\hat{F}^{<k}) (\dot{h} \dot{g}^k) S_{\alpha}^+(\hat{F}^{<k})^{-1}$. Or celle-ci représente la classe de cohomologie $\exp \mu_1(\hat{F}^k)$ et donc le facteur $\hat{F}^k$ n'est pas de niveau pur k d'où la contradiction.

Par récurrence descendante sur les niveaux de $[A_0]$, on en déduit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME IV.12. Soit $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ un système de forme normale d'Hermite $[A_0] : \frac{dX}{dx} = A_0X$ et $\hat{F} \in \hat{G}(A_0)$ une transformation de $[A_0]$ en $[A = {}^F A_0]$.

Notons $k_r < k_{r-1} < \dots < k_1$ les niveaux de $[A_0]$ et $\mathcal{A}^{k_i}$ l'ensemble des directions anti-Stokes de niveau k_i (directions qui portent au moins un germe pur de niveau k_i).

Il existe une factorisation

$$\hat{F} = \hat{F}_1 \hat{F}_2 \dots \hat{F}_r$$

de $\hat{F}$ dans laquelle, pour tout $i = 1, 2, \dots, r$,

(i) le facteur $\hat{F}_i$ est k_i -sommable et ses directions singulières appartiennent à $\mathcal{A}^{k_i}$,

(ii) la matrice $A^i = (\hat{F}_i \hat{F}_{i+1} \dots \hat{F}_r) A_0$ est à coefficients méromorphes. Autrement dit, le système $[A^i]$ appartient à la classe formelle de $[A_0]$.

Cette factorisation est essentiellement unique au même sens que dans la proposition précédente. En outre, si $\hat{F}(0) = I$ (i.e. $\hat{F} \in \hat{G}_I(A_0)$), alors on peut imposer la même condition à chacun des facteurs $\hat{F}_i$.

Ce théorème a été démontré sous une forme ramifiée un peu plus faible par J.-P. Ramis dans ([Ra, p.851], Theorem 7), puis sous cette forme dans [MR90]. Ces démonstrations utilisent la version Gevrey du théorème d'isomorphisme de Malgrange-Sibuya pour les systèmes différentiels qui repose sur le délicat théorème fondamental des développements asymptotiques Gevrey [RS89]. La démonstration donnée ci-dessus n'utilise le théorème de Malgrange-Sibuya que sous sa forme classique. Elle remplace des arguments d'analyse fine par l'algorithmique de la 1-cochaîne fondamentale.

4. Propriétés galoisiennes

Nous faisons d'abord quelques rappels de théorie de Galois différentielle pour faciliter la lecture et fixer les notations.

On note $K = \mathbb{C}\{x\}[1/x]$ le corps des séries méromorphes à l'origine et $\hat{K} = \mathbb{C}[[x]][1/x]$ son formalisé, le corps des séries méromorphes formelles à l'origine.

A un K -vectoriel à connexion (V, ∇) (I.1), on associe modulo le choix d'une K -base de V , un système différentiel $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$. On note $D = \frac{d}{dx} - A$.

Soit $Y = [Y_1 \dots Y_n]$ une matrice fondamentale de solutions de $[A]$ définie sur un germe de secteur quelconque de sommet 0. On peut en fait toujours prolonger ces solutions au germe en 0 de la surface de Riemann du logarithme.

Le corps des fractions $L = K(y_{(j,\ell)}; 1 \leq j, \ell \leq n)$ des éléments $y_{(j,\ell)}$ de la matrice Y est un corps différentiel. Il est en effet stable par dérivation puisque, pour tout j , $\frac{dY_j}{dx} = AY_j$ avec A à coefficients dans K . En outre, ses constantes (éléments dont la dérivée est nulle) sont exactement les constantes de K . Un tel corps différentiel L est appelé une **extension de Picard-Vessiot de la connexion** (V, ∇) ou du système $[A]$. On montre ([Kol73]) qu'une telle extension de K est unique à K -isomorphisme différentiel près.

On appelle **groupe de Galois (différentiel local) de (V, ∇) ou de $[A]$** le groupe des K -automorphismes différentiels $\text{Aut}_{\text{diff}}(L/K)$ de L c'est-à-dire le groupe des automorphismes de corps de L qui laissent fixe chaque élément de K et qui commutent avec la dérivation. On le notera indifféremment $\text{Gal}_K(A)$, $\text{Gal}_K(D)$ ou $\text{Gal}_K(\nabla)$.

On note V_A^{sol} le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions de $[A]$ dont une base est donnée par les colonnes $Y_1 \dots Y_n$ d'une matrice fondamentale quelconque. En termes de connexion, on a $V^{\text{sol}} = (V \otimes_K L)^\nabla$ espace des sections horizontales pour ∇ dans l'espace déduit du K -espace vectoriel V par extension des scalaires de K à L .

A tout élément σ du groupe de Galois $\text{Gal}_K(\nabla)$ correspond de façon naturelle une application $\mathbb{C}$ -linéaire de V^{sol} : en effet, si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est

une solution de $[A]$, alors $\sigma(Y) = \begin{pmatrix} \sigma(y_1) \\ \vdots \\ \sigma(y_n) \end{pmatrix}$ aussi puisque σ commute

à la dérivation et à la multiplication par des éléments de K (A est à coefficients de K). En outre, σ étant un automorphisme, il transforme une base de solutions $Y = (Y_1 \dots Y_n)$ de $[A]$ en une base de solutions $\sigma(Y) = (\sigma(Y_1) \dots \sigma(Y_n))$ de $[A]$ et l'application obtenue est conservée par un changement de K -base dans V . On obtient ainsi une représentation

$$\rho : \begin{cases} \text{Gal}_K(\nabla) & \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V^{\text{sol}}) \\ \sigma & \longmapsto (\rho(\sigma) : [Y_1 \dots Y_n] \longmapsto [\sigma(Y_1) \dots \sigma(Y_n)]) \end{cases}$$

du groupe de Galois de (V, ∇) .

Cette représentation est fidèle : si $\rho(\sigma)$ est l'identité de V^{sol} , alors σ est l'identité de $\text{Gal}_K(\nabla)$. Mais nous allons voir qu'elle n'est pas surjective.

DÉFINITION IV.13. On dit d'une application linéaire de $GL_{\mathbb{C}}(V^{\text{sol}})$ ou de sa matrice dans une base fixée qu'elle est **galoisienne** si elle appartient à l'image $\rho(\text{Gal}_K(\nabla))$ de la représentation ρ de $\text{Gal}_K(\nabla)$.

Soit $[A]$ un système différentiel associé à une connexion (V, ∇) par le choix d'une K -base de V .

Soit $[A_0]$ une forme normale d'Hermite de solution X_0 et $\hat{F}X_0$ une solution formelle fondamentale de $[A]$.

Supposons que F^1 et F^2 soient deux incarnations de $\hat{F}$ sur un même secteur voisinage d'une direction θ et notons $X_{0,\tilde{\theta}}$ la vraie fonction déduite de X_0 par le choix d'un relèvement $\tilde{\theta}$ de θ i.e. d'une détermination de l'argument.

Alors, $Y^1 = F^1 X_{0,\tilde{\theta}}$ et $Y^2 = F^2 X_{0,\tilde{\theta}}$ sont deux solutions fondamentales de $[A]$ sur le secteur considéré et il existe donc une unique matrice (constante inversible) C telle que $Y^2 = Y^1 C$. Celle-ci usuellement appelée une matrice de Stokes du système $[A]$ est la matrice dans la base Y^1 de l'application linéaire de $GL_C(V_A^{\text{sol}})$ définie par

$$Y^1 \mapsto Y^2 = Y^1 C$$

et elle induit par changement de K -base de V une application linéaire de $GL_C(V^{\text{sol}})$.

Pour abréger, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous dirons que la matrice de Stokes C "est" ou "n'est pas" galoisienne sans précision de la base Y^1 lorsque l'application linéaire $Y^1 \mapsto Y^1 C$ est ou n'est pas galoisienne.

PROPOSITION IV.14. *La représentation $\rho : \text{Gal}_K(\nabla) \rightarrow GL_C(V^{\text{sol}})$ du groupe de Galois n'est pas surjective. Plus précisément, les matrices de Stokes usuelles "ne sont pas" toutes galoisiennes.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de donner un exemple. Nous avons choisi le système associé à l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$.

EXEMPLE IV.15 : Matrice de Stokes usuelle "non galoisienne".

Considérons le K -vectoriel à connexion (V, ∇) défini dans une K -base $\mathfrak{e} = (e_1, e_2)$ par le système

$$[A] : \frac{dY}{dx} = AY \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^3} & -(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) \end{pmatrix}.$$

$[A]$ est le système compagnon de l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$ obtenu en prenant pour inconnue $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Il admet pour solution formelle fondamentale

$$\hat{Y} = \hat{F}X_0 \quad \text{avec} \quad X_0 = \begin{pmatrix} e^{1/x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} -1 & \hat{g} \\ \frac{1}{x^2} & \hat{g}' \end{pmatrix},$$

où $\hat{g} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$ est la série d'Euler et $\hat{g}'$ sa dérivée.

Chapitre IV

Plaçons-nous sur le secteur $\operatorname{Re} x > 0$ et choisissons-y une incarnation g de $\widehat{g}$. Les matrices

$$F^1 = \begin{pmatrix} -1 & g \\ \frac{1}{x^2} & g' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^2 = \begin{pmatrix} -1 + cge^{-1/x} & g \\ \frac{1}{x^2} + cg'e^{-1/x} & g' \end{pmatrix}$$

sont toutes deux asymptotiques à $\widehat{F}$ sur $\operatorname{Re} x > 0$ pour tout $c \in \mathbb{C}$. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ faisant passer de la solution $Y^1 = F^1 X_0$ à la solution $Y^2 = F^2 X_0$ sur $\operatorname{Re} x > 0$ est une matrice de Stokes usuelle du système $[A]$, quel que soit $c \in \mathbb{C}$, et il est clair que, pour $c \neq 0$, elle n'est pas galoisienne. En effet, notons $Y^1 = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$. Si la matrice C était galoisienne, elle serait la représentation par ρ d'un automorphisme σ du corps différentiel $K(y_1, y_2, z_1, z_2)$ vérifiant $\begin{pmatrix} \sigma(y_1) \\ \sigma(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + cz_1 \\ y_2 + cz_2 \end{pmatrix}$. Or les fonctions $y_1 = -e^{1/x}$ et $y_2 = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$ vérifient la relation, à coefficients dans K , $x^2 y_1 + y_2 = 0$, alors que, pour tout $c \in \mathbb{C}^*$, on a $x^2 \sigma(y_1) + \sigma(y_2) \neq 0$. Ainsi, σ n'est pas un homomorphisme d'algèbre, a fortiori pas un automorphisme de corps différentiel.

Remarquons en outre que le sous K -espace vectoriel W de V engendré par $-e_1 + \frac{1}{x^2}e_2$ est stable sous l'action de $D = \frac{d}{dx} - A$. Alors que le sous- $\mathbb{C}$ -espace W^{sol} de V^{sol} engendré par les solutions de la sous-connexion $(W, \nabla|_W)$ à savoir le sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de V^{sol} engendré par $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ n'est pas stable par l'endomorphisme de matrice C dans la base Y^1 . Nous allons voir que, grâce à l'interprétation géométrique de Chevalley du groupe de Galois différentiel, cette propriété suffit à établir que la matrice de Stokes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ "n'est pas" galoisienne quand $c \neq 0$.

Remarquons enfin que si on calcule les matrices de Stokes fondamentales pour ce système, on trouve

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c = 0 \quad \text{sur} \quad \operatorname{Re} x > 0$$

et

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c' = 2i\pi \quad \text{sur} \quad \operatorname{Re} x < 0 \quad .$$

Ce calcul est classique, mais on peut aussi par exemple l'effectuer en utilisant la méthode infinitésimale détaillée dans [L-R90] (et ci-dessous, chapitre VI). Nous nous proposons maintenant de montrer que les matrices de Stokes fondamentales "sont" galoisiennes.

Dans [Ra p85], Ramis montre que les matrices de Stokes obtenues par multisommabilité "sont" galoisiennes. Or nous avons vu que ce sont

les mêmes que les matrices de Stokes fondamentales (Proposition IV.7), d'où une démonstration du résultat. Deligne dans une lettre à Ramis ([De86]) en propose une autre démonstration reposant sur l'interprétation géométrique de Chevalley du groupe de Galois différentiel et la théorie asymptotique Gevrey des équations différentielles. La démonstration que nous exposons ici est voisine de celle de Deligne en ce sens qu'elle repose elle aussi sur l'interprétation géométrique de Chevalley du groupe de Galois. Mais elle en diffère par la quantité d'analyse employée. Ici encore, on remplace des arguments délicats d'analyse fine, théorie de la multissommabilité ou théorie asymptotique Gevrey, par l'algorithmique de la 1-cochaîne fondamentale.

DÉFINITION IV.16. Sous-connexion. Soit (V, ∇) un K -vectoriel à connexion. On dit qu'un K -vectoriel à connexion (W, ∇_W) est un sous- K -vectoriel de (V, ∇) ou que ∇_W est une sous-connexion de ∇ si

- (i) W est un sous- K -espace vectoriel de V ,
- (ii) $\nabla_W = \nabla|_W$ restriction de ∇ à W .

L'espace $W^{\text{sol}} = (W \otimes_K L)^{\nabla_W}$ des solutions de (V, ∇) qui sont aussi solutions de (W, ∇_W) , est un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de $V^{\text{sol}} = (V \otimes_K L)^{\nabla}$.

En choisissant une K -base de V qui complète une K -base de W , la connexion ∇ s'écrit comme un système de la forme

$$[A] : \quad \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 = 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

où le bloc carré A_1 a pour dimension $\dim_K W$, et ∇_W s'écrit sur W comme le système $[A_1] : \frac{dX}{dx} = A_1 X$. En particulier, les solutions de $[A_1]$ "sont" des solutions de $[A]$ modulo les inclusions de sous-espaces évidentes. Et on peut toujours construire un système fondamental de solutions de $[A]$ en complétant un système fondamental de solutions de $[A_1]$.

DÉFINITION IV.17. Construction $(\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(\nabla))$ sur une connexion (V, ∇) . On désigne ainsi les éléments de l'algèbre engendrée par la connexion (V, ∇) et les opérations algébriques usuelles : somme directe, produit tensoriel et dual sur celle-ci.

Ce sont donc les connexions de la forme $(\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(\nabla))$ avec

$$\mathcal{C}(V) = \bigoplus_{m,p \text{ finie}} \left(\left(\bigotimes_K^m V \right) \otimes_K \left(\bigotimes_K^p V^* \right) \right)$$

et

$$\mathcal{C}(\nabla) = \bigoplus_{m,p} \left(\nabla^{\otimes m} \otimes (\nabla^*)^{\otimes p} \right) .$$

Chapitre IV

Elles sont entièrement déterminées par (V, ∇) . Les constructions s'étendent aux espaces de solutions

$$\mathcal{C}(V)^{\text{sol}} \cong \mathcal{C}(V^{\text{sol}})$$

et à leurs automorphismes : à tout $u \in GL_{\mathbb{C}}(V^{\text{sol}})$ correspond de façon naturelle, l'automorphisme $\mathcal{C}(u) \in GL_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}(V^{\text{sol}}))$ (automorphisme dual, somme directe, ...).

THEOREME IV.18 ([Be85]). Interprétation géométrique de Chevalley pour le groupe de Galois différentiel.

Soit (V, ∇) un K -vectoriel à connexion.

Un automorphisme $u \in GL_{\mathbb{C}}(V^{\text{sol}})$ est galoisien si et seulement si les applications linéaires $\mathcal{C}(u) \in GL_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}(V^{\text{sol}}))$ associées à chaque construction $(\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(\nabla))$ laissent stables tous les sous- $\mathbb{C}$ -espaces de solutions W^{sol} des différentes sous-connexions (W, ∇_W) de $(\mathcal{C}(V), \mathcal{C}(\nabla))$.

Dans le contre-exemple de l'équation d'Euler donné ci-dessus, nous avons vu que cette propriété d'invariance est déjà en défaut pour la construction "triviale" (V, ∇) elle-même en prenant pour W le sous- K -espace de V engendré par $-e_1 + \frac{1}{x^2}e_2$.

DÉFINITION IV.19. Automorphismes de Stokes u_{α} . Reprenons les notations précédentes :

Soit $[A]$ un système associé à une connexion (V, ∇) par le choix d'une K -base de V .

Soit $[A_0]$ une forme normale d'Hermite de solution fondamentale X_0 et $\hat{F}X_0$ une solution formelle fondamentale de $[A]$.

Nous avons vu qu'à chaque direction anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$, on peut associer de façon unique

- la 1-cochaîne fondamentale $\dot{f}_{\alpha}$,
- les sommes fondamentale $S_{\alpha}(\hat{F})$ sur chaque ouvert U_{α} du recouvrement fondamental. Et on a noté $S_{\alpha}^{-}(\hat{F}) = S_{\alpha}(\hat{F})$ la somme de $\hat{F}$ sur U_{α} et $S_{\alpha}^{+}(\hat{F}) = S_{\alpha+}(\hat{F})$ la somme sur l'ouvert suivant $U_{\alpha+}$.

A tout choix d'un relèvement $\tilde{\alpha}$ de α correspond une matrice de Stokes $C_{\tilde{\alpha}} \in GL(n, \mathbb{C})$ définie par

$$S_{\alpha}^{+}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}} = S_{\alpha}^{-}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}C_{\tilde{\alpha}} \quad \text{sur} \quad \dot{U}_{\alpha} = U_{\alpha} \cap U_{\alpha+} \quad .$$

L'application linéaire

$$\begin{aligned} u_{\alpha,A} : V_A^{\text{sol}} &\longrightarrow V_A^{\text{sol}} \\ Y_{\tilde{\alpha}} = S_{\alpha}^{-}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}} &\longmapsto S_{\alpha}^{+}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

de matrice $C_{\tilde{\alpha}}$ dans la base $Y_{\tilde{\alpha}}$ de V_A^{sol} est un automorphisme de V_A^{sol} indépendant du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α , du choix de $[A_0]$ et de la solution $\hat{F}X_0$. Une transformation méromorphe du système $[A]$ en un système $[A']$ conjugue $u_{\alpha,A}$ et $u_{\alpha,A'}$. Cette application provient donc d'une application linéaire $u_{\alpha} : V^{\text{sol}} \rightarrow V^{\text{sol}}$ indépendamment du choix d'une K -base de V . Nous la désignerons par **automorphisme de Stokes de la connexion** (V, ∇) **dans la direction** α .

LEMME IV.20. Soit $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ un système dont la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ admet un bloc inférieur gauche de zéros.

Alors, $[A]$ admet une solution d'Hermite qui complète une solution d'Hermite du système

$$[A_1] : \frac{dX}{dx} = A_1 X \quad .$$

DÉMONSTRATION : Nous n'avons pas besoin ici de la forme d'Hermite fine précisée dans le théorème I.3. Nous nous limitons à montrer qu'il existe une solution formelle fondamentale de $[A]$ de la forme

$$\hat{F}x^L e^{Q(1/x)} \quad \text{où} \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ 0 & F_4 \end{pmatrix} \in GL(n, \hat{K}) \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix} \quad .$$

- Il existe une solution formelle fondamentale de la forme Φe^Q où la matrice Φ est à coefficients formels logarithmiques avec un bloc de zéros $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{pmatrix}$. En effet, soit $\hat{X} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{pmatrix} e^Q$ une solution formelle de partie irrégulière e^Q . Notons $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_4 \end{pmatrix}$ la décomposition de Q en blocs de la taille de ceux de A . La matrice $\hat{X} = \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{Q_1} & \varphi_2 e^{Q_4} \\ \varphi_3 e^{Q_1} & \varphi_4 e^{Q_4} \end{pmatrix}$ vérifie le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\varphi_1 e^{Q_1}) = \dots & \frac{d}{dx}(\varphi_2 e^{Q_4}) = \dots \\ \frac{d}{dx}(\varphi_3 e^{Q_1}) = A_4 \varphi_3 e^{Q_1} & \frac{d}{dx}(\varphi_4 e^{Q_4}) = A_4 \varphi_4 e^{Q_4} \end{cases} \quad .$$

On peut, quitte à effectuer une permutation sur les colonnes de $\hat{X}$, supposer que $\varphi_4 e^{Q_4}$ est de rang maximal c'est-à-dire est une solution formelle fondamentale du système $[A_4] : \frac{dX}{dx} = A_4 X$. Or $\varphi_3 e^{Q_1}$ est une solution du même système. Il existe donc une matrice constante C telle que

$$\varphi_3 e^{Q_1} = \varphi_4 e^{Q_4} C \quad .$$

Une égalité de la forme $\varphi_4^{-1} \varphi_3 = e^{Q_4} C e^{-Q_1}$ où le premier membre est formel logarithmique et le deuxième membre purement exponentiel n'est

possible que si chaque membre est constant. On a alors $e^{Q_4}C = C'e^{Q_1}$ avec $C' \in \text{End}(n, \mathbb{C})$. La solution

$$\begin{aligned} \hat{X} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{Q_1} - \varphi_2 e^{Q_4} C & \varphi_2 e^{Q_4} \\ 0 & \varphi_4 e^{Q_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\varphi_1 - \varphi_2 C') e^{Q_1} & \varphi_2 e^{Q_4} \\ 0 & \varphi_4 e^{Q_4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est de la forme cherchée en prenant

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 C' \\ \Phi_2 &= \varphi_2 \\ \Phi_4 &= \varphi_4 \quad . \end{aligned}$$

- On peut écrire Φ sous la forme $\hat{F}x^L$ avec $\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \\ 0 & \hat{F}_4 \end{pmatrix}$ méromorphe formelle et $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix}$ constante. En effet, notons maintenant $\hat{X} = \Phi e^Q$; la matrice de monodromie formelle $\hat{M}$ de $\hat{X}$ définie par $\hat{X}(xe^{2i\pi}) = \hat{X}(x)\hat{M}$ admet nécessairement un bloc de zéros puisque $\varphi_4 e^{Q_4}$ est inversible: $\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & \hat{M}_2 \\ 0 & \hat{M}_4 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $e^{Q(\frac{1}{xe^{2i\pi}})}$ et $e^{Q(\frac{1}{x})}$ sont conjuguées l'une de l'autre par une permutation qui conserve les blocs e^{Q_1} et e^{Q_4} . On a donc aussi $\Phi(xe^{2i\pi}) = \Phi(x)\hat{M}'$ avec $\hat{M}'$ de la même forme que $\hat{M}$. Choisissons un logarithme L de $\hat{M}'$ admettant lui aussi un bloc de zéros

$$e^{2i\pi L} = \hat{M}' \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Alors, l'expression $\Phi(x)x^{-L}$ est formelle logarithmique sans monodromie; elle est donc formelle. Elle admet en outre un bloc de zéros. On peut donc choisir $\hat{F}(x) = \Phi(x)x^{-L}$.

LEMME IV.21. *Soit $[A]$ un système admettant une solution d'Hermite de la forme $\hat{F}x^L e^Q$ avec*

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \\ 0 & \hat{F}_3 \end{pmatrix} \in GL(n, \hat{K}) \quad , \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix} \in \text{End}(n, \mathbb{C}) \quad .$$

Alors, les sommes fondamentales $S_\alpha(\hat{F})$ préservent le bloc de zéros contenu dans $\hat{F}$.

DÉMONSTRATION : Sur tout recouvrement assez fin, il existe des incarnations de $\hat{F}$ conservant le bloc de zéros de $\hat{F}$. La 1-cochaîne associée contient donc un tel bloc et celui-ci est conservé par l'algorithme de réduction à

la 1-cochaîne fondamentale $\dot{f}_\alpha$ (cf. III.2.4). Dans cette réduction, on ne conjugue que par des 0-cochaînes ayant le même bloc de zéros et ce faisant on transforme les incarnations de $\hat{F}$ dont on est parti en les sommes fondamentales $S_\alpha(\hat{F})$. Celles-ci admettent donc le même bloc de zéros que $\hat{F}$.

THÉOREME IV.22. *Les automorphismes de Stokes u_α sont galoisiens.*

DÉMONSTRATION : On utilise la caractérisation donnée par l'interprétation géométrique de Chevalley du groupe de Galois (théorème IV.18).

Montrons d'abord la propriété d'invariance pour la connexion (V, ∇) elle-même. Si (W, ∇_W) est une sous-connexion de (V, ∇) , alors dans une K -base de V qui complète une K -base de W , la connexion (V, ∇) s'écrit $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ et la sous-connexion (W, ∇_W) est donnée par $[A_1] : \frac{dX}{dx} = A_1 X$.

Grâce au lemme IV.20, on peut choisir une solution d'Hermite $\hat{F}X_0$ où $\hat{F}$ et $X_0 = x^L e^Q$ contiennent un bloc inférieur gauche de zéros. Le lemme IV.21 montre que les sommes fondamentales $S_\alpha(\hat{F})$ ont aussi un bloc de zéros. Il en est donc de même, pour tout relèvement $\tilde{\alpha}$ de α , de la base $Y_{\tilde{\alpha}} = S_{\tilde{\alpha}}^-(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}$ de V_A^{sol} et de la matrice de Stokes $C_{\tilde{\alpha}}$ représentant l'automorphisme de Stokes $u_{\alpha,A} : V_A^{\text{sol}} \rightarrow V_A^{\text{sol}}$ dans cette base. Ainsi, l'automorphisme $u_{\alpha,A}$ laisse stable le sous-espace W^{sol} engendré dans V^{sol} par les $\dim_K W$ premiers vecteurs de la base $Y_{\tilde{\alpha}}$.

La propriété d'invariance pour les constructions est immédiate si on remarque que tous les ingrédients utilisés, solution formelle d'Hermite, 1-cochaîne fondamentale, sommes fondamentales commutent aux constructions.

5. Relation avec la classification par le π_1 sauvage

Soit $[A] : \frac{dX}{dx} = AX$ de solution d'Hermite $\hat{F}X_0$, où $X_0 = x^L e^Q$ avec $Q = \text{diag}[q_1, \dots, q_n]$ et $L \in \text{End}(n, \mathbb{C})$.

Nous faisons ici des rappels minimaux sans justification sur le π_1 sauvage. Pour plus de détails, on se reportera à [MR90].

Voisinage infinitésimal de l'origine : "Halo analytique"

On remplace l'origine 0 de $\mathbb{C}$ par un disque fermé de "rayon infini" qu'on appelle, par analogie avec le langage de l'analyse non-standard, le halo analytique de 0.

Singularités infinitésimales

Dans le halo analytique, on marque sur chaque direction anti-Stokes α , le point de module k , si la direction α porte une exponentielle $e^{q_i - q_e}$ de niveau k . L'ensemble des points marqués et de l'origine constitue l'ensemble des singularités infinitésimales (possibles) en 0 du système $[A]$.

Monodromie formelle $\hat{M}$

Elle s'interprète comme l'action sur la solution $\hat{F}X_0$ d'un lacet entourant la seule singularité infinitésimale 0 dans le halo analytique.

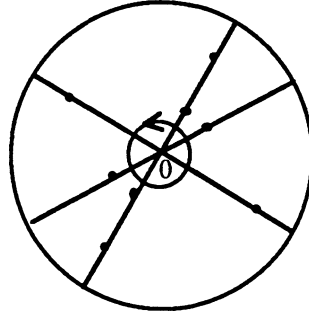


Figure IV.1

1-cochaîne fondamentale $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$

La proposition IV.7 qui établit la coïncidence entre les sommes fondamentales et les sommes de $\hat{F}$ obtenues par multisommation ou accélération permet l'interprétation suivante des composantes $\dot{f}_\alpha$ de la 1-cochaîne fondamentale : interpréter les opérateurs de sommation S_θ comme des prolongements de 0 à $+\infty$ suivant le rayon θ , S_α^+ est un prolongement dans une direction voisine de α à droite de α et S_α^- dans une direction voisine de α à gauche de α ; et déformer les chemins obtenus sans "traverser" de singularité infinitésimale.

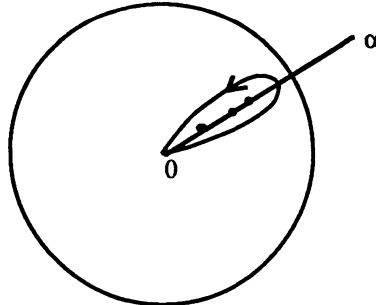


Figure IV.2

La composante $\dot{f}_\alpha = S_\alpha^-(\hat{F})^{-1} S_\alpha^+(\hat{F})$ correspond à l'action sur $\hat{F}$

d'un lacet pointé en 0 et entourant toutes les singularités infinitésimales du rayon anti-Stokes α .

Facteurs de niveau k de la 1-cochaîne fondamentale

On transcrit suivant le même principe les formules (iii) de la proposition IV.11 :

$$\begin{aligned} \dot{f}_\alpha^k &= S_\alpha^-(\hat{F}^{<k})^{-1} S_\alpha^-(\hat{F}^k)^{-1} S_\alpha^+(\hat{F}^k) S_\alpha^-(\hat{F}^{<k}) \\ \dot{g}_\alpha^k &= S_\alpha^-(\hat{F}^{<k})^{-1} S_\alpha^-(\hat{F}^k)^{-1} S_\alpha^+(\hat{F}^k) S_\alpha^+(\hat{F}^{<k}) . \end{aligned}$$

$\dot{f}_\alpha^k$ et $\dot{g}_\alpha^k$ sont les facteurs de niveau k de $\dot{f}_\alpha$ respectivement mis en facteur à gauche et à droite.

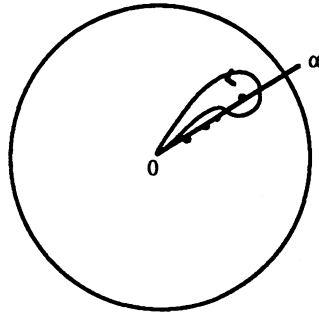


Figure IV.3

$\dot{f}_\alpha^k$ facteur de niveau k écrit à gauche correspond à l'action sur $\hat{F}$ d'un lacet pointé en 0 autour de la singularité de niveau k et qui évite les singularités de niveau inférieur par la gauche (figure IV.3).

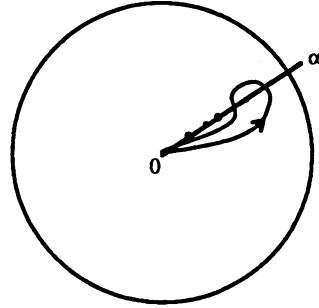


Figure IV.4

$\dot{g}_\alpha^k$ facteur de niveau k écrit à droite correspond à l'action sur $\hat{F}$ d'un lacet pointé en 0 autour de la singularité de niveau k et qui évite les singularités de niveau inférieur par la droite (figure IV.4).

On laisse le soin au lecteur d'établir la correspondance entre facteur de niveau quelconque de $\dot{f}_\alpha$ dans un agencement quelconque des facteurs et les contorsions d'un lacet du π_1 sauvage entre les singularités infinitésimales.

Deuxième partie

Calcul des invariants

V. Préliminaires et méthode de calcul par sommation

1. Calcul des invariants formels

Etant donné un système $[A]$ de dimension n , on dispose d'algorithmes algébriques pour le calcul de l'une des solutions d'Hermite $\widehat{F}X_0$. La méthode est relativement simple : on détermine la partie irrégulière de X_0 et la monodromie formelle en calculant les racines des équations caractéristiques des polygones de Newton successifs du système $[A]$ (ou de l'équation linéaire d'ordre n associée). Puis on détermine la partie méromorphe et $\widehat{F}$ par une méthode de type Frobenius.

La réalisation effective de ces calculs est en général très lourde et justifie l'emploi d'un logiciel sur ordinateur. Un tel logiciel est partiellement réalisé par l'équipe de Calcul Formel de l'IMAG de Grenoble sous la direction de J. Della Dora dans un code nommé DESIR et implanté sous REDUCE. Celui-ci sera applicable à n'importe quel système saisissable sur ordinateur : ses coefficients doivent être des fractions rationnelles de x dont les coefficients sont des nombres algébriques. On doit déterminer des valeurs exactes des racines caractéristiques qui sont des nombres algébriques. On ne peut se contenter de valeurs numériques approchées. Le calcul doit être fait en calcul formel (dans une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ par les racines caractéristiques). La méthode de Frobenius fournit à partir de ces données formelles les relations de récurrence qui déterminent les coefficients de $\widehat{F}$. A ce stade, on peut choisir de poursuivre le calcul numériquement en engendrant formellement du code FORTRAN.

Les problèmes soulevés par l'implantation et l'activation effective d'un tel logiciel sont nombreux : afin de ne pas atteindre rapidement, même sur des exemples relativement simples, les limites des ordinateurs, il est indispensable de conduire le plus économiquement possible chacune des étapes du calcul et toute amélioration des algorithmes existants est appréciable.

Une solution de ces problèmes a fait l'objet d'un certain nombre de thèses dans l'équipe de Calcul Formel de l'IMAG de Grenoble (D. Duval et E. Tournier en 1987, thèses d'état, A. Hilali en 1987, Barkatou en 1989 et Chen en février 1990, Thèses) avant de déboucher sur le code DESIR et le projet DESIR2.

On serait en mesure actuellement d'améliorer ce code à la fois par l'exploitation des résultats obtenus dans les dernières thèses et par une meilleure convivialité. Il est envisagé de le reprendre entièrement sous SCRATCHPAD avec les techniques de programmation "objets". Mais en tout état de cause, on peut considérer que la partie formelle de l'étude de $[A]$ est opérationnelle.

2. Calcul des invariants analytiques : matrices de Stokes ou invariants de Birkhoff

Résumons ce qui précède. L'étude analytique locale d'un système $[A]$ se ramène aux deux points suivants :

- la détermination du groupe des isotropies de la forme normale $[A_0]$ choisie (cf. I.4.1.3 et I.4.2). Ce groupe est algébrique. Il est "petit", souvent trivial et il est facile à déterminer à partir d'une solution normale X_0 . Nous en avons donné des exemples au chapitre I (Exemples I.8, I.10, I.11). Nous n'en dirons rien de plus.
- la détermination de la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F}) = (\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'une transformation de Birkhoff $\hat{F}$ de la forme normale $[A_0]$ choisie en un système $[A]$. Cette 1-cochaîne est équivalente à la donnée d'une famille de germes de Stokes (Th. III.3 et III.17) qu'on peut décrire en terme de matrices de Stokes ou d'invariants de Birkhoff. Leur calcul est difficile. Il est, de façon essentielle, transcendant. Nous proposons ci-dessous deux méthodes d'évaluation numérique. Mais auparavant, nous précisons le cadre et les notations.

On donne

$X_0 = P x^K x^J U e^Q$ avec $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ une solution normale d'Hermite de la forme normale $[A_0]$ choisie,

$\hat{F}$ une transformation de Birkhoff de $[A_0]$ en $[A]$ ($\hat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$) et $A = \hat{F} A_0$,

$[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ un domaine principal de variation de l'argument (par exemple $\theta_0 = 0$).

On note désormais

$\tilde{\theta}$ le relèvement dans le feuillet principal $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ d'une direction θ ,

$\tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}$ l'ensemble des relèvements $\tilde{\alpha}$ des directions anti-Stokes $\alpha \in \mathcal{A}$ dans le feuillet principal $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

Pour tout $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}$, il existe au moins un couple (q_j, q_ℓ) porté par $\tilde{\alpha}$ i.e. tel que $q_j \prec_{\tilde{\alpha}, \max} q_\ell$ (définition II.13); on note $(j, \ell) \mathcal{E} \tilde{\alpha}$.

Alors (Prop. IV.1), la famille des 1-cochaînes élémentaires définies, pour tout $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}$ et tout couple $(j, \ell) \mathcal{E} \tilde{\alpha}$ par

$$\tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}} = I + X_{0, \tilde{\alpha}} E_{(j, \ell)} X_{0, \tilde{\alpha}}^{-1} \quad \text{sur} \quad \dot{U}_\alpha$$

($\tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}} = I$ sur les autres $\dot{U}_\alpha$) est une base vectorielle de la variété linéaire affine $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ d'origine I et la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F})$ se décompose de façon unique dans cette base.

On note

$$c\tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}} = I + cX_{0, \tilde{\alpha}} E_{(j, \ell)} X_{0, \tilde{\alpha}}^{-1}$$

et

$$c\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} + c'\tau_{(j',\ell');\tilde{\alpha}} = I + X_{0,\tilde{\alpha}}(cE_{(j,\ell)} + c'E_{(j',\ell')})X_{0,\tilde{\alpha}}^{-1} .$$

DÉFINITION V.1.

i) La base $\mathcal{T}_{X_0,\theta_0} = \{\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0} \text{ et } (j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}\}$ ci-dessus est appelée la **base “canonique” de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ construite sur X_0 et θ_0** . En pratique, sauf précision contraire, nous fixerons $\theta_0 = 0$ et nous parlerons de la base “canonique” $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{X_0}$ construite sur X_0 .

ii) La famille $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}$ des composantes de la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F})$ dans une base “canonique”

$$c(\hat{F}) = \sum_{\substack{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0} \\ \text{et } (j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}}} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}$$

est appelée **un système d’invariants de Birkhoff de $\hat{F}$** (système dans la base $\mathcal{T}_{X_0,\theta_0}$ et en général on fixe $\theta_0 = 0$).

On déduit immédiatement des définitions (déf. III.13 et V.1)

PROPOSITION V.2. X_0 et θ_0 étant fixés, le système $(c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}})_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}, (j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}}$ des invariants de Birkhoff de $\hat{F}$ dans la base “canonique” $\mathcal{T}_{X_0,\theta_0}$ construite sur X_0 et θ_0 est équivalent à la famille $(C_{\tilde{\alpha}})_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}}$ des matrices de Stokes de $\hat{F}X_0$ grâce aux formules

$$C_{\tilde{\alpha}} = I + \sum_{(j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} E_{(j,\ell)} .$$

Il est donc indifférent, pour obtenir $c(\hat{F})$ de déterminer l’un de ses systèmes d’invariants de Birkhoff associé à un choix d’une base $\mathcal{T}$ ou la famille correspondante de ses matrices de Stokes.

Supposons à nouveau que $[A]$ est à coefficients rationnels; on sait d’ailleurs grâce au théorème d’algébrisation de Birkhoff [Bir13] que, localement, tout système analytique est analytiquement équivalent à un système à coefficients rationnels.

On peut envisager plusieurs méthodes, avec variantes, pour le calcul numérique des invariants analytiques :

- La plus naturelle que nous présentons d’abord consiste à déterminer directement les matrices de Stokes $C_{\tilde{\alpha}}$ en calculant les sommes fondamentales F_{α} de $\hat{F}$. On a alors $C_{\tilde{\alpha}} = X_{0,\tilde{\alpha}}^{-1} F_{\alpha}^{-1} F_{\alpha} X_{0,\tilde{\alpha}}$. La proposition IV.5 d’existence et d’unicité des sommes F_{α} ne suffit pas. Il faut en outre des formules explicites de calcul : on dispose de formules intégrales du type

Borel-Laplace (Euler, Borel, Leroy) dans le cas où le système $[A]$ admet un seul niveau et de formules intégrales utilisant des noyaux plus compliqués, les noyaux d'accélération d'Ecalte dans le cas où le système $[A]$ admet plusieurs niveaux. Nous détaillons ces formules au paragraphe suivant.

- Une deuxième méthode que nous présentons ensuite impose des contraintes restrictives, de plus en plus difficiles à réaliser quand la dimension n du système augmente. En dimension $n = 2$, elle permet le calcul de tous les invariants de Birkhoff. Ce cas est détaillé et assorti d'exemples dans l'article [L-R90] que nous reproduisons au paragraphe 4. Nous présentons ensuite l'algorithme général et les contraintes qu'il impose. Nous donnons enfin l'inventaire des différents cas rencontrés en dimension trois et nous terminons par un exemple en dimension trois.

Cette méthode a l'avantage de ne comporter que des transformations algébriques sur les systèmes et de donner les invariants de Birkhoff comme limites de suites récurrentes linéaires. Elle repose sur la comparaison entre l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya et l'isomorphisme infinitésimal correspondant jointe à de bonnes estimations asymptotiques. Lorsqu'elle est applicable cette méthode conduit à des algorithmes assez stablement convergents et accélérables alors que les problèmes d'instabilité semblent beaucoup plus difficiles à maîtriser dans les algorithmes de sommation.

3. Calcul des matrices de Stokes par (multi-) sommation

Soit $k_r < \dots < k_1$ les niveaux du systèmes $[A]$ et $\hat{F}X_0$ une solution d'Hermite de $[A]$.

Nous avons vu qu'alors la série $\hat{F}$ est un produit de séries k_1 -sommable, $\dots$, k_r -sommable (théorème IV.12) : elle est multisommable de niveaux $k_1, \dots, k_r$; que les sommes F_α sont uniques (Prop. IV.5 et Déf. IV.6). En outre, dans toute direction θ qui n'est pas une direction anti-Stokes, on a des opérateurs intégraux explicites $S_{k_1, \dots, k_r, \theta}(\hat{F})$ pour déterminer ces sommes. Nous précisons ces opérateurs S sans justification ([MR90], [Ec90]).

Rappelons d'abord la définition de **la transformée de Laplace** (en la variable $1/x$) d'une fonction φ dans la direction θ

$$\mathcal{L}_\theta(\varphi)(x) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \varphi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi \quad .$$

Lorsque φ est à croissance exponentielle dans la direction θ , i.e. lorsque φ est un $O(e^{|\alpha\xi|})$, l'intégrale de Laplace est convergente et définit une fonction $\mathcal{L}_\theta(\varphi)(x)$ analytique sur un disque passant par 0 et de diamètre de longueur $1/|\alpha|$ porté par la direction θ . Ce disque est appelé **disque de Borel** de $\mathcal{L}_\theta(\varphi)$.

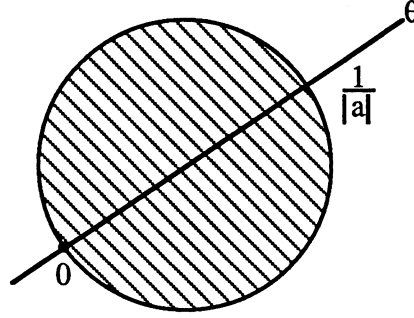


Figure V.3.1

Rappelons aussi la définition de la *transformation de Borel* $\mathcal{B}$.

Si $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a^n x^{n+1}$ est une série sans terme constant, sa transformée de Borel formelle $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$ est une série formelle définie par $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(n+1)} \xi^n$. La transformée de Borel de $\hat{f}$ est la fonction analytique $\mathcal{B}(\hat{f})$ somme de la série $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})$ lorsque celle-ci est convergente.

On peut étendre la définition aux séries ramifiées $\hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^{\frac{n}{p}+1}$ en posant $\hat{\mathcal{B}}(\hat{f})(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)} \xi^{n/p}$ et en calculant la somme non pas sur $\mathbb{C}$ mais sur la surface de Riemann du logarithme $\tilde{\mathbb{C}}^*$.

On peut aussi l'étendre aux constantes en posant $\hat{\mathcal{B}}(a_0) = a_0 \delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0. Mais dans la pratique on peut toujours s'arranger pour n'avoir à considérer que des séries sans terme constant.

Lorsque f est une fonction définie au voisinage de 0 sur un secteur d'ouverture $\pi + \omega > \pi$ bissecté par une direction θ , on peut donner une version fonctionnelle de cette formule en posant

$$\mathcal{B}(f)(\xi) = \int_{\mathcal{C}} f(x) e^{\xi/x} \frac{dx}{x^2} \quad ,$$

où le contour $\mathcal{C}$ est le bord d'un croissant de Borel (voir figure V.3.2) et ceci lorsque l'intégrale est convergente.

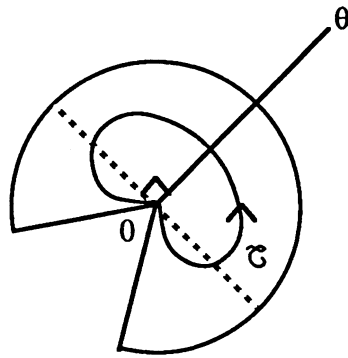
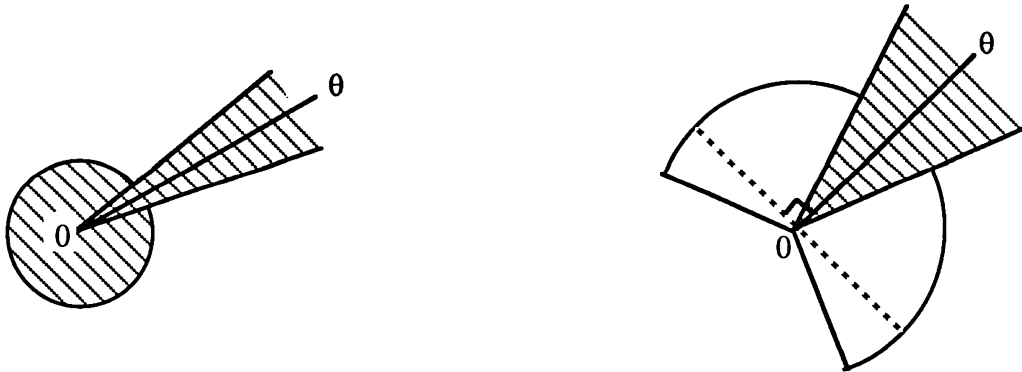


Figure V.3.2

$\mathcal{C}$ est dessiné dans le secteur de définition de f . Il part de 0 et arrive en 0 avec des tangentes n'appartenant pas au demi-plan bisecté par θ .

Sous de bonnes conditions vérifiées par f (par exemple, f bornée ou à croissance modérée en 0 le long de $\mathcal{C}$), on obtient ainsi un germe de fonction analytique sur un secteur bisecté par θ et d'ouverture ω .

Nous appellerons ici **transformée de Borel de f** (f série formelle ou fonction) **dans la direction θ** et nous noterons $\mathcal{B}_\theta(f)$ ou plus simplement $\mathcal{B}(f)$ la fonction analytique, lorsqu'elle existe, obtenue en prolongeant jusqu'à l'infini sur un secteur voisinage de la direction θ la fonction analytique construite près de 0 par les transformations précédentes. Le domaine de définition de $\mathcal{B}_\theta(f)$ est de la forme dessinée sur la figure V.3.3.



Cas où f est une série formelle

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$$

Cas où f est une fonction définie sur un secteur d'ouverture $\pi + \omega$

Figure V.3.3

3.1. Formules de sommation

Cas d'un seul niveau $k = 1$ (Borel-sommabilité ou sommabilité de niveau 1)

$\widehat{F}$ est 1-sommable (on dit aussi Borel-sommable).

Le diagramme permettant de sommer $\widehat{F}$ dans une direction $\theta \notin \mathcal{A}$ est le suivant

$$\widehat{F} \xrightarrow{B_\theta} \cdot \xrightarrow{\mathcal{L}_\theta} F = S_{k;\theta}(\widehat{F}) \quad .$$

F est une fonction analytique sur un croissant de Borel réunion des disques de Borel de $\widehat{F}$ dans la direction θ et les directions voisines de θ .

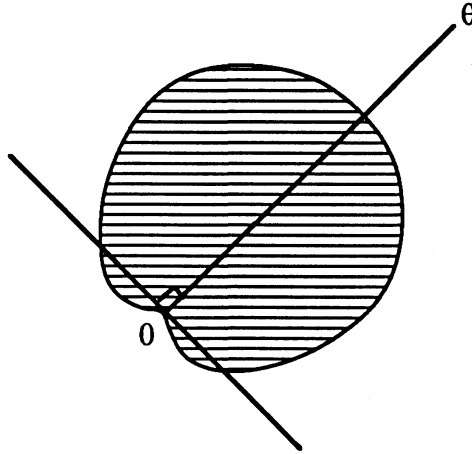


Figure V.3.4

L'exemple type est celui de l'équation d'Euler

$$x^2 y' + y = x \quad .$$

La seule série solution $\widehat{f}_1(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$ est 1-sommable. On peut lui appliquer des opérateurs de Borel et de Laplace dans toute direction $\theta \neq \pi(2\pi)$, ce qui conduit à la somme $f_1(x) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/x} d\xi$ pour $\operatorname{Re}(xe^{i\theta}) > 0$ ([L-R avril 90]).

On se ramène au cadre des systèmes considéré jusqu'à présent en écrivant d'abord l'équation d'Euler sous la forme homogène

$$x^3 y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$$

obtenue en dérivant l'équation d'Euler écrite $xy' + \frac{1}{x}y = 1$, puis sous la forme de système d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^3} & -(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) \end{pmatrix} Y \quad .$$

Celui-ci admet la solution d'Hermite

$$\widehat{F}X_0 = \begin{pmatrix} e^{1/x} & \widehat{f}_1 \\ -e^{1/x}/x^2 & \widehat{f}_1' \end{pmatrix}$$

où

$$\widehat{F}(x) \in GL_I(2, \mathbb{C}[[x]]) \quad \text{et} \quad X_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/x & 1 \end{pmatrix} x^K e^{Q(1/x)}$$

avec $K = \text{diag}(-1, 0)$ et $Q(1/x) = \text{diag}(1/x, 0)$.

J. Thomann obtient pour somme f_1 de $\widehat{f}_1$ au point $x = 0,5$ la valeur $f_1(0,5) = 0,361328$ en accord avec les valeurs données dans les tables numériques de l'exponentielle intégrale.

Cas d'un seul niveau k quelconque (sommabilité de niveau k)

$\widehat{F}$ est k -sommable.

Appelons ρ_k l'application de ramification suivante :

- pour une série formelle, on pose $\rho_k(\sum_{n \geq 0} a_n x^n) = \sum a_n t^{n/k}$; c'est la série obtenue par le changement de variable "formel" $x = t^{1/k}$.
- pour une fonction $f(x)$ définie près de 0 sur la surface de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbb{C}}_x^*$, c'est la fonction obtenue par le changement de variable

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{C}}_x^* &\longleftrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}_t^* \\ x &\longmapsto t = x^k \\ x = t^{1/k} &\longleftarrow t \end{aligned}$$

(on a fait sur $\widetilde{\mathbb{C}}_x^*$ et sur $\widetilde{\mathbb{C}}_t^*$ le choix d'une détermination de l'argument).

L'application ρ_k admet pour réciproque l'application $\rho_{1/k}$.

Le diagramme permettant de sommer $\widehat{F}$ dans une direction $\theta \notin \mathcal{A}$ est le suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{F} & & F = S_{k;\theta}(\widehat{F}) \\ \downarrow \rho_k & & \uparrow \rho_{1/k} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k;\theta}} \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k;\theta}} \cdot \end{array}$$

On peut si on le préfère rester dans l'espace des fonctions ou séries de la variable x en "remontant" par la ramification les opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{F} & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k;\theta}} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k;\theta}} & F \\ \rho_k \downarrow & & \rho_{1/k} \uparrow & \downarrow \rho_k & \uparrow \rho_{1/k} \\ \cdot & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k;\theta}} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k;\theta}} & \cdot \end{array}$$

où $\mathcal{B}_{k;\theta}$ et $\mathcal{L}_{k;\theta}$ sont les opérateurs définis par $\mathcal{B}_{k;\theta} = \rho_{1/k} \mathcal{B}_{k\theta} \rho_k$ et $\mathcal{L}_{k;\theta} = \rho_{1/k} \mathcal{L}_{k\theta} \rho_k$.

Ces opérateurs conjugués par une ramification d'ordre k des opérateurs de Borel et de Laplace de niveau 1 sont appelés **opérateurs de Borel et de Laplace de niveau k** .

L'exemple type est donné pour $k = 2$ par l'équation d'Euler-bis

$$\frac{x^3}{2} y' + y = x^2$$

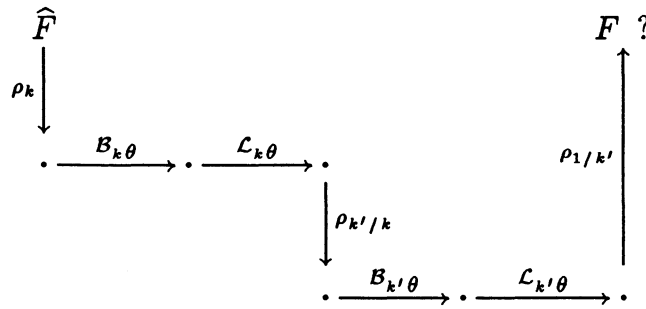
qui admet pour seule solution série formelle, au voisinage de 0, la série $\hat{f}_2(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{2(n+1)}$. On ne peut pas sommer cette série par une intégrale de Borel-Laplace de niveau 1 : la fonction $\mathcal{B}(f_2)$ est bien définie, mais elle est à croissance exponentielle d'ordre 2 dans toutes les directions $\pi/4 < \theta < 3\pi/4 \pmod{\pi}$.

On peut la sommer dans toutes les directions $\theta \neq \pi/2 \pmod{\pi}$ par des opérateurs de Borel-Laplace de niveau $k = 2$ ([L-R, avril 90]).

J. Thomann obtient pour somme f_2 de $\hat{f}_2$ au point $x = 0,5$ la valeur $f_2(0,5) = 0,206346$ en accord avec les valeurs données dans les tables numériques de l'exponentielle intégrale.

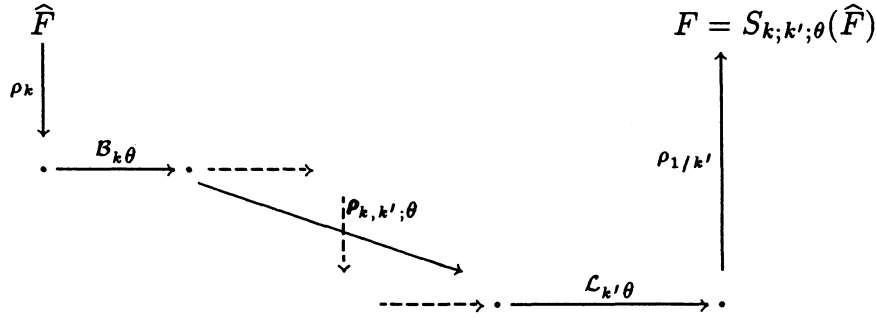
Cas de deux niveaux k et k' , $k < k'$

$\hat{F}$ est multisommable de niveaux k et k' . L'application successive des procédés de sommation des niveaux k et k' donnerait le diagramme suivant



Ce diagramme ne permet pas de déterminer F : en effet, on ne peut pas appliquer un opérateur de Laplace à $\mathcal{B}_{k\theta} \circ \rho_k(\hat{F})$ parce que son ordre de croissance est trop élevé. Une solution, due à J. Ecalle ([Ec90]), consiste à regrouper les trois opérateurs $\mathcal{L}_{k\theta}$, $\rho_{k'/k}$ et $\mathcal{B}_{k'\theta}$ en un seul opérateur $\rho_{k,k';\theta}$ en en donnant une nouvelle forme intégrale par application du théorème de Fubini. On peut alors, pour toute direction $\theta \notin \mathcal{A}$, sommer

$\widehat{F}$ par le diagramme suivant



où $\rho_{k,k';\theta}(\varphi)(\tau) = \frac{2i\pi}{\tau} \int_0^{e^{ik\theta}\infty} C_{k'/k} \left(\frac{\xi}{\tau^{k/k'}} \right) \varphi(\xi) d\xi$.

Le noyau $\mathcal{C}$ est un noyau d'accélération d'Ecalte. On le définit pour un coefficient $a > 1$ quelconque par

$$\mathcal{C}_a(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} e^{u-u^{1/a}\zeta} du \quad ,$$

où $\mathcal{H}$ désigne un contour de Hankel "autour" de $\mathbb{R}^-$.

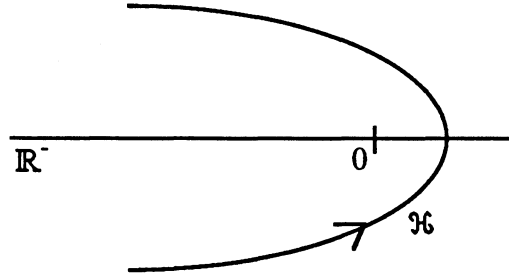


Figure V.3.5

On a aussi $\mathcal{C}_a(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s/a)} \zeta^{-s} ds$.

Ces noyaux $\mathcal{C}_a$ ont, dans toute direction vérifiant $|\arg \zeta| < (1 - \frac{1}{a})\pi/2$ une croissance à l'infini du type

$$\zeta^{b/2} e^{-(\frac{1}{b} a^{-b/a} \zeta^b)} \quad \text{où } b \text{ est défini par } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad .$$

Lorsque $a = p/q$ ($p > 0$, $q > 0$ et $(p, q) = 1$) est rationnel, ces noyaux sont reliés aux fonctions G de Meijer. On a en particulier

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(\zeta) &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2/4} \\ \mathcal{C}_3(\zeta) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} G_{0,2}^{2,0} \left(\left(\frac{\zeta}{3} \right)^3 \mid \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

et de façon générale

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{q/p}(\zeta) &= \frac{\sqrt{pq}}{(2\pi)^{q-p}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} \frac{\prod_{j=1, \dots, q-1} \Gamma(s + j/q)}{\prod_{j=1, \dots, p-1} \Gamma(s + j/p)} \left(p^p \left(\frac{\zeta}{q} \right)^q \right)^{-s} ds \\ &= \frac{\sqrt{pq}}{(2\pi)^{q-p}} G_{p-1, q-1}^{q-1, 0} \left(p^p \left(\frac{\zeta}{q} \right)^q \middle| \begin{matrix} \frac{1}{p}, & \frac{2}{p}, & \dots, & \frac{p-1}{p} \\ \frac{1}{q}, & \frac{2}{q}, & \dots, & \frac{q-1}{q} \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

lorsque $|\arg \zeta| < \pi/q$.

Et surtout, ils sont solutions d'équations différentielles linéaires

$$L_{p,q}(\mathcal{C}_{p,q}) = 0 \quad ,$$

où $L_{p,q}$ est l'opérateur différentiel linéaire donné par

$$\begin{aligned} L_{p,q} &= \frac{d^q}{d\zeta^q} - (-1)^{q-p} \prod_{j=1}^p \left(\frac{p}{q} \zeta \frac{d}{d\zeta} + j \right) \\ &= q \prod_{j=1}^{q-1} (\delta - j) - (-1)^{q-p} p \zeta^q \prod_{j=1}^{p-1} \left(\frac{p}{q} \delta + j \right) \quad , \end{aligned}$$

en notant $\delta = \zeta \frac{d}{d\zeta}$ l'opérateur d'Euler.

Or nous avons vu, et ce sera toujours le cas, que le noyau d'accélération permettant de sommer $\widehat{F}$ a un coefficient $a = k'/k$ rationnel. On pourra donc toujours évaluer numériquement tous les noyaux $\mathcal{C}_a$ nécessaires par intégration numérique des équations différentielles ci-dessus.

On peut ici encore rester dans l'espace des fonctions de x . On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{F} & \xrightarrow{B_{k;\theta}} & \cdot & \xrightarrow{A_{k,k';\theta}} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k';\theta}} & F = S_{k,k';\theta}(\widehat{F}) \\ \rho_k \downarrow & & \rho_{1/k} \uparrow \downarrow \rho_k & & \rho_{1/k'} \uparrow \downarrow \rho_{k'} & & \rho_{1/k'} \uparrow \\ \cdot & \xrightarrow{B_k \theta} & \cdot & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k'\theta}} & \cdot \\ & & & \searrow \rho_{k,k';\theta} & & & \\ & & & \cdot & & & \end{array}$$

L'exemple type est celui de l'équation de Ramis-Sibuya ([RS89]) :

$$Dy = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

où

$$D = x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} + x^2(4+5x^2-2x^3)\frac{d}{dx} + 2(2-x+x^2)$$

qui admet pour solution formelle $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ ($\hat{f}_1$ série d'Euler, $\hat{f}_2$ série d'Euler-bis).

Cette série est (k, k') -sommable avec $k = 1$ et $k' = 2$. On ne peut la sommer ni par un opérateur de Borel-Laplace de niveau 1 ($\mathcal{L}_{1,\theta}$ n'est pas applicable à $\mathcal{B}_{1,\theta}(\hat{f})$ dans les directions $\theta \in]\pi/4, 3\pi/4[\pmod{\pi}$), ni par un opérateur de Borel-Laplace de niveau 2 ($\mathcal{B}_{2,\theta}(\hat{f})$ n'existe pas). Mais on peut la sommer en suivant le diagramme de sommation des niveaux 1 et 2 :

$$\hat{f} \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,\theta}=\mathcal{B}_\theta} \cdot \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2;\theta}} \cdot \xrightarrow{\mathcal{L}_{2;\theta}} f = S_{1,2;\theta}(\hat{f})$$

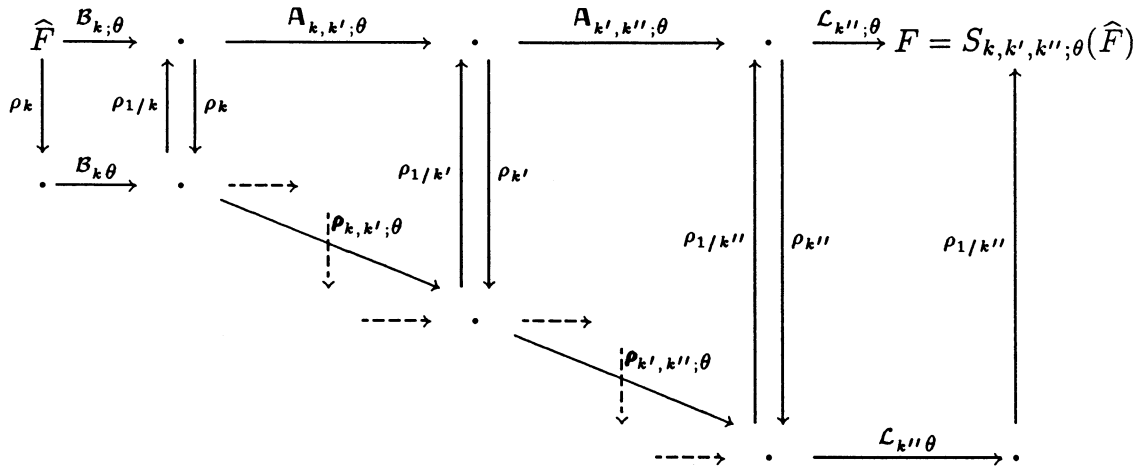
dans toute direction θ non portée par l'axe imaginaire ([L-R avril90]).

Cet exemple a été traité numériquement par Thomann qui obtient pour somme de la série $\hat{f}$ au point $x = 0,5$ la valeur $\hat{f}(0,5) = 0,567650$, alors que la valeur "exacte" déduite des tables de l'exponentielle intégrale $f_1(0,5) + f_2(0,5) = 0,567674$. On obtient donc quatre chiffres significatifs exacts. Mais le résultat est très sensible à la précision des valeurs initiales ([Tho90]).

Cas d'un nombre quelconque de niveaux

Ecrivons le diagramme de sommation pour trois niveaux $k < k' < k''$.

$\hat{F}$ est multisommable de niveaux k, k' et k'' ou (k, k', k'') -sommable.



On peut encore se limiter à un regroupement des opérateurs trois par trois et donc les opérateurs d'accélération ρ et A déjà introduits suffisent.

On étend ce diagramme de façon évidente au cas d'un nombre fini quelconque de niveaux.

3.2. Calcul pratique des sommes de $\hat{F}$

Plaçons-nous encore dans le cas où $[A]$ est un système à coefficients rationnels et supposons qu'on a déterminé une solution fondamentale d'Hermite $\hat{F}X_0$ par exemple par le code DESIR. On se propose de sommer $\hat{F}$ puis d'en déduire les matrices de Stokes $\hat{F}X_0$.

Calcul de la somme de $\hat{F}$ dans une direction $\theta \notin A$ fixée

Ce travail a été entrepris par J. Thomann au Centre de Calcul de Strasbourg-Cronenbourg et complété par une visualisation graphique par F. Richard-Jung. Le cas à un seul niveau est en partie opérationnel et en voie d'implantation comme complément au code DESIR. L'étude du cas à plusieurs niveaux est en cours.

Indiquons brièvement les étapes possibles du travail. Commençons par le cas à un seul niveau k et supposons pour simplifier que $k = 1$.

- $\hat{B}_\theta(\hat{F})$ est une série convergente. On peut calculer les valeurs $\mathcal{B}_\theta(\hat{F})(\xi)$ de son prolongement analytique en les points ξ de la demi-droite θ par diverses méthodes. J. Thomann choisit de préférence une approximation rationnelle de type Padé, dans le cas où $\hat{F}$ ne présente qu'une seule direction singulière. Mais dans tous les cas, le système $[A]$ ayant des coefficients rationnels, $\mathcal{B}_\theta(\hat{F})$ vérifie un système différentiel linéaire facile à déterminer. A partir d'une valeur initiale $\mathcal{B}_\theta(\hat{F})(\xi)$ en un point ξ quelconque, par exemple $\xi = 0$ qui n'est pas un point singulier pour $\mathcal{B}_\theta(\hat{F})$, on peut appliquer une méthode de résolution numérique, une méthode de Kutta-Runge par exemple.
- Pour obtenir la valeur de F en un point $x = x_0$ quelconque de la demi-droite θ , on calcule l'intégrale de Laplace de la fonction $\mathcal{B}_\theta(\hat{F})$ obtenue.
- Pour obtenir la valeur de F en d'autres points x , on peut à nouveau utiliser $F(x_0)$ comme valeur initiale pour résoudre numériquement le système $[A]$ par une méthode de Kutta-Runge.

Lorsque $[A]$ admet plusieurs niveaux, on doit faire précéder le calcul de l'intégrale de Laplace de celui d'une ou de plusieurs intégrales d'accélération. Il faut donc en outre déterminer les noyaux d'accélération C_a . Mais nous avons vu que les valeurs de a à considérer sont de la forme $a = k'/k$ où k et k' sont deux pentes consécutives du polygone de Newton du système $\text{End}(A_0) = [A_0; A_0]$. Elles sont donc rationnelles et les noyaux correspondants sont solutions d'équations différentielles linéaires connues explicitées à l'alinéa précédent. Une fois encore, on peut facilement les déterminer numériquement par la méthode de Kutta-Runge.

D'autres méthodes ont été explorées qui peuvent quelquefois avantageusement remplacer la méthode précédente : sommation de $\hat{F}$ au plus

petit terme, développement en série de facultés, plus généralement approximation directe de $F(x)$ par des approximants de type Padé, etc.

Reste le problème de la validité des résultats obtenus. La précision des calculs semble difficile à évaluer. Des estimations théoriques d'erreur ont été faites par J. Thomann à certaines étapes du calcul ([Tho91]), d'où a résulté par exemple le choix des approximants de type Padé. Par ailleurs, on peut utiliser le tracé de courbes réalisé par F. Richard-Jung ([R-J88]) non seulement comme un luxe final mais comme un outil tactique : l'apparition d'irrégularités dans le tracé ou de brusques décrochements sont en général le signe d'une dégradation de la méthode. Il est alors opportun d'affiner les calculs ou de les poursuivre par d'autres méthodes de sommation.

Ces algorithmes sont opérationnels dans le cas des systèmes d'ordre deux. Ils conduisent à des résultats satisfaisants corroborés par les tracés des solutions et ils ont été testés avec succès sur plusieurs exemples classiques (exponentielle intégrale, équations de Bessel, fonction d'Airy ([R-J88])). On se ramène dans ce cas, et cela est toujours possible, à la sommation de séries n'admettant qu'une seule direction singulière (direction anti-Stokes dans laquelle la série n'est effectivement pas sommable). Dans le cas des systèmes d'ordre trois ou pour sommer directement des séries admettant plusieurs directions singulières, les algorithmes utilisés sont très instables et peu fiables pour l'instant. Ils nécessitent de profondes améliorations.

3.3. Calcul pratique des matrices de Stokes

La sommation numérique de $\hat{F}$ par la méthode précédente est d'autant meilleure que la direction choisie est plus éloignée des directions singulières (elle devient en fait impraticable près des directions singulières). La méthode de Kutta-Runge, quant à elle, est d'autant meilleure qu'on est loin de la singularité. Ces remarques suggèrent la tactique suivante pour le calcul des matrices de Stokes.

Soit α une direction anti-Stokes et $\tilde{\alpha}$ un choix d'une détermination de l'argument de α , d'où un choix d'une détermination de $X_{0,\tilde{\alpha}}(x)$ au voisinage de $\tilde{\alpha}$.

Notons comme à l'accoutumée α^- et α^+ les directions anti-Stokes immédiatement à gauche et à droite de α . On opère comme suit :

- On choisit les deux directions θ^- et θ^+ bissectrices des angles (α^-, α) et (α, α^+) .
- On somme en des points x_0^- et x_0^+ voisins de 0 sur θ^- et sur θ^+ , d'où des valeurs de $S_{\theta^-}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_0^-)$ et $S_{\theta^+}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_0^+)$.

- On prolonge les solutions $S_{\theta^-}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_0^-)$ et $S_{\theta^+}(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_0^+)$ ainsi obtenues en x_0^- et x_0^+ par une méthode de Kutta-Runge suivant θ^- et θ^+ jusqu'à des valeurs x_1^- et x_1^+ de x assez éloignées de 0.
- On continue le prolongement le long des arcs de cercle de centre 0 et de rayon $|x_1^-| = |x_1^+|$ jusqu'à la direction anti-Stokes α ; d'où des valeurs $S_{\alpha}^-(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_{\alpha})$ et $S_{\alpha}^+(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_{\alpha})$ au point $x_{\alpha} = |x_1^-| e^{i\alpha} = |x_1^+| e^{i\alpha}$.
- On en déduit la matrice de Stokes $C_{\tilde{\alpha}}$ par

$$C_{\tilde{\alpha}} = \left(S_{\alpha}^-(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_{\alpha}) \right)^{-1} \left(S_{\alpha}^+(\hat{F})X_{0,\tilde{\alpha}}(x_{\alpha}) \right) .$$

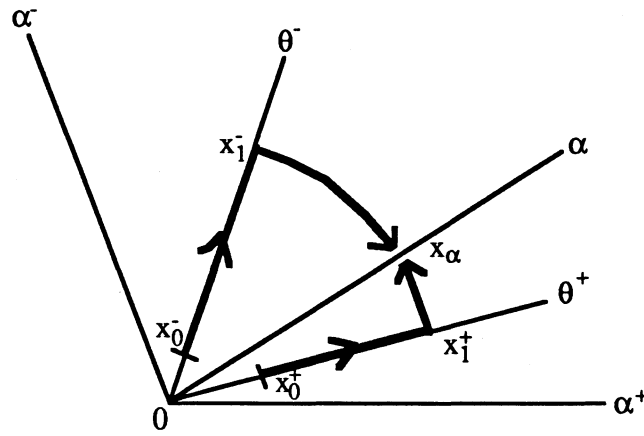


Figure V.3.6

Cette méthode n'a été testée numériquement que sur quelques exemples simples. Il reste à surmonter des problèmes de stabilité des algorithmes et de souplesse d'utilisation du logiciel.

Chapitre VI. Méthode infinitésimale : cas des systèmes de dimension deux

1. Commentaires

La méthode permet dans ce cas de calculer tous les invariants de Birkhoff d'une transformation de Birkhoff $\hat{F}$ relativement à une forme normale d'Hermite X_0 quelconque.

Le principe consiste à se ramener d'abord au cas d'une forme normale séparée

$$X_0(x) = Z(x)x^J e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où $Z(x) = \text{diag}(z_1, z_2) \in GL_I(2, \mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$

et où $Q = \text{diag}(q_1, q_2)$ vérifie la condition : “ $q_1 - q_2$ est un monôme”.

On détermine ensuite les invariants de Birkhoff associés aux directions anti-Stokes portées par un même couple (j, ℓ) ($(j, \ell) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$) comme solution d'un système de Cramer. Les coefficients de ce système sont calculés exactement; les seconds membres sont obtenus comme limites de suites récurrentes. Tout le calcul repose sur une utilisation fine du théorème de comparaison de l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya à l'isomorphisme infinitésimal correspondant qui permet d'évaluer le comportement asymptotique quand n tend vers l'infini des coefficients $\hat{F}_{(j, \ell)}(n)$. On utilise en particulier de façon essentielle le fait que $q_1 - q_2$ soit un monôme. Nous reviendrons sur ce point au chapitre VII.

Le cas de la dimension deux a fait l'objet d'un article séparé [L-R90] que nous reproduisons ci-dessous. Le chapitre I nécessaire pour rendre autonome la lecture de cet article peut être omis : il résume une situation plus longuement détaillée dans les pages précédentes. Les chapitres II, III et IV détaillent l'algorithme et sa démonstration dans le cas de dimension deux. Le chapitre V présente le calcul numérique complet des invariants de Birkhoff sur trois exemples. Puis, pour chacun de ces exemples, on calcule le groupe d'isotropie (analytique) de la forme normale afin de préciser les invariants analytiques.

Signalons quelques problèmes de notations : Dans cet article le faisceau d'isotropie $\Lambda(A_0)$ est noté $\text{Sto}(A_0)$... et appelé faisceau de Stokes. Il nous semble aujourd'hui plus opportun de réserver l'attribut “de Stokes” aux sous-fibres du faisceau $\Lambda(A_0)$ qui caractérisent le phénomène de Stokes : celles que nous avons appelées “groupes de Stokes” et notées $\text{Sto}_\alpha(A_0)$. Nous n'avons pas conservé ici, au chapitre VII, les notations utilisées dans cet article lorsque celles-ci n'étaient pas confortablement adaptables aux dimensions supérieures ($n \geq 3$). En particulier, dans l'article, pour le recouvrement fondamental et les invariants de Birkhoff, les

indices ne font référence ni aux directions anti-Stokes ni aux matrices élémentaires de base $E_{(j,\ell)}$ concernées mais seulement à l'ordre cyclique de S^1 . Nous le regrettons.

2. Calcul des invariants de Birkhoff des systèmes d'ordre deux (article [L-R90])

La classification de Birkhoff formelle des (germes en 0 de) systèmes différentiels linéaires à coefficients analytiques¹.

$$[A] : x^{r+1} \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{avec } r \in \mathbb{N} \quad \text{et } A \in M(n, \mathbb{C}\{x\})$$

est bien connue tant du point de vue théorique que pratique.

Rappelons que deux systèmes sont dits formellement équivalents au sens de Birkhoff si on peut passer de l'un à l'autre par un changement de fonction inconnue $X \mapsto FX$ où F est une matrice de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}[[x]])$ telle que $F(0)$ soit l'identité I . Pour caractériser chaque classe formelle, on y choisit un système particulier $[A_0]$ qu'on appelle forme normale; plus précisément, on choisit une solution X_0 de celui-ci qu'on appelle solution d'Hermite de $[A_0]$ (cf. JURKAT W.B. [J]). La détermination effective de X_0 est implantée depuis plusieurs années déjà sur ordinateur, sous REDUCE, dans un code nommé DESIR (Equipe de Calcul Formel, IMAG-GRENOBLE, cf. [T], E. TOURNIER, Thèse).

Pour X_0 fixé, on peut étudier les matrices F de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}[[x]])$ telles que $F(0) = I$ et que FX_0 soit solution d'un système $[A]$ (à coefficients non pas formels mais analytiques). On obtient évidemment ainsi tous les systèmes $[A]$ de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$ et on peut définir sur un tel ensemble de matrices la relation d'équivalence analytique : On passe de l'une des matrices à l'autre par multiplication à gauche par une matrice T de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}\{x\})$ telle que $T(0) = I$. La caractérisation de chaque classe d'équivalence par le choix de l'un de ses éléments n'est pas aussi facile et naturelle que dans le cas formel (cf. cependant ECALLE [E], §II.2, Aperçu sur la synthèse canonique).

Une solution théorique à ce problème de classification est donnée par le théorème d'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA (cf. [M1]) : Les classes d'équivalence analytiques des matrices F (associées à X_0 fixé) sont en bijection avec l'ensemble de cohomologie non abélienne $H^1(S^1; \mathrm{St}(A_0))$ sur le cercle S^1 à valeurs dans le faisceau de Stokes de $[A_0]$ (= faisceau des sections d'isotropie plates de $[A_0]$). Un tel ensemble de cohomologie

¹ Pour alléger, on abrègera l'expression "système différentiel linéaire à coefficients analytiques" en "système" et "système fondamental de solutions" en "solution" du système.

est ici particulièrement simple : On montre qu'il est naturellement, en un sens à préciser, isomorphe à un espace affine de dimension finie. Par le choix d'une base, $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ s'identifie donc tout simplement à un espace vectoriel $\mathbb{C}^N$. La dimension N dépend de $[A_0]$, mais elle se "lit" directement sur l'expression de X_0 . A chaque matrice F correspond un élément $(c_1, \dots, c_N)$ de $\mathbb{C}^N$. Les composantes $c_1, \dots, c_N$ sont appelées **système d'invariants de Birkhoff** de F et dépendent évidemment de la base choisie.

Le but de cet article est de donner une méthode effective de calcul numérique des invariants de Birkhoff pour tous les systèmes d'ordre 2 quel qu'en soit le rang de Poincaré. Dans ce cas, le choix d'une base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ ne pose aucun problème : A l'ordre de ses éléments près, il est tout à fait naturel.

Un calcul de ces invariants a été proposé par JURKAT-LUTZ-PEYERIMHOFF par une autre méthode dans le cas des systèmes linéaires d'ordre 2 et de rang de Poincaré $r = 1$ ([JLP1]). Un cas particulier a été traité par MARTINET-RAMIS dans [MR].

La méthode proposée ici comporte deux étapes :

— *Une étape de calcul formel*. On réduit le problème à un cas dit "séparé" en procédant à des changements algébriques de variable et de fonctions inconnues, tout en contrôlant l'action de ces changements dans l'espace des invariants de Birkhoff.

— *Une étape de calcul numérique*. Pour des systèmes "séparés", on peut appliquer la méthode de calcul utilisée par MARTINET-RAMIS dans [MR]. C'est une méthode asymptotique basée sur la comparaison entre l'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA et l'isomorphisme infinitésimal correspondant. Elle fournit les invariants de Birkhoff comme limites de suites déterminées par des relations de récurrence linéaires.

La classification analytique des systèmes se déduit aisément de celle des matrices F : Chaque classe analytique de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$ est caractérisée par ses "invariants de Birkhoff" modulo conjugaison par les éléments du groupe d'isotropie G_0 de $[A_0]$. Le groupe G_0 est toujours facile à déterminer ; il est souvent simple, voire trivial.

En fin d'article, nous avons illustré la méthode par trois exemples numériques surmontant à eux trois tous les types de difficultés qu'on peut rencontrer.

Ce travail m'a été proposé par J.-P. RAMIS que je tiens à remercier ici pour son écoute patiente.

Sommaire

I. Généralités. Rappels théoriques.	100
1. Transformé de Birkhoff formel ${}^F A$ d'un système A ...	100
2. Transformé de Birkhoff analytique ${}^F A$ d'un système A ...	100
3. Forme normale d'Hermite A_0	
Cas particulier : Forme d'Hermite des systèmes d'ordre 2 ...	101
4. Classe de Birkhoff formelle $\widehat{B}(A)$ ou analytique $B(A)$	
d'un système A ...	102
5. Classification de Birkhoff analytique : Position du problème ...	102
6. $\widehat{G}(A_0)$ et $\widehat{G}_I(A_0)$ ensembles de transformations formelles	
admissibles pour A_0 ...	103
7. Isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA ...	103
8. G_0 : groupe d'isotropie de A_0 ...	104
9. Classification de Birkhoff analytique : Solution du problème ...	105
10. Invariants de Birkhoff. Invariants analytiques ...	105
11. Méthode de calcul effectif des invariants de Birkhoff ...	106
1. Choix d'une base affine dans $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$...	106
2. Réduction au cas séparé ...	106
3. Calcul dans le cas séparé ...	107
II. Systèmes d'ordre 2. Base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$.	108
1. Cas sans ramification ...	108
1. Recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0)$ de S^1 ...	108
2. Structure affine sur $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$...	108
3. Invariants de Birkhoff ...	109
4. Remarque : Choix d'une détermination du logarithme ...	109
2. Cas avec ramification ($x = t^2$) ...	110
1. Transformation par éclatement ...	110
2. Structure affine sur $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$...	111
3. Invariants de Birkhoff ...	111
4. Remarque ...	112

III. Systèmes d'ordre 2. Réduction au cas séparé .	114
1. Elimination de la partie méromorphe ...	114
1. Cas sans ramification ...	114
2. Cas avec ramification $x = t^2$...	118
2. Elimination de la matrice U (avec perte de l'invariance par Gal_2) ...	118
3. Réduction de $q_1 - q_2$ à un "monôme" ...	119
IV. Calcul effectif des invariants de Birkhoff dans le cas séparé.	122
1. Détermination de la série formelle F telle que $A = {}^F A_0$...	123
2. Données infinitésimales associées ...	123
3. Comparaison entre données de départ et données infinitésimales. Principe du calcul ...	124
4. Parties principales des coefficients $\text{CH}_{j,j+1}(n)$...	124
5. Calcul des invariants de Birkhoff c_j pour j impair ...	126
6. Calcul des invariants de Birkhoff c_j pour j pair ...	127
7. Remarque : Calcul des limites $\mathcal{G}_q$ et $\mathcal{H}_q$...	127
V. Trois exemples.	129
1. Premier exemple (avec monodromie et $q_1 - q_2$ non monôme) ...	129
2. Deuxième exemple (avec partie méromorphe et $q_1 - q_2$ non monôme) ...	140
3. Troisième exemple (avec ramification) ...	146
Bibliographie.	152

I. Généralités. Rappels théoriques

On considère des systèmes différentiels linéaires d'ordre n de la forme

$$x^{r+1} \frac{dX}{dx} = AX$$

où $r \in \mathbb{N}$ et où A est une matrice $n \times n$ à coefficients analytiques au voisinage de $x = 0$ dans $\mathbb{C}$ (on note $A \in M(n, \mathbb{C}\{x\})$), et pour abrégé, on note $[A]$ un tel système sans précision de r quand il n'y a pas d'ambiguïté.

On ne suppose en général pas que r est le rang de Poincaré du système $[A]$: il peut être strictement supérieur au rang de Poincaré. Mais on suppose toujours que les coefficients de la matrice A sont analytiques en 0.

I.1. Transformé de Birkhoff formel $[{}^F A]$ d'un système $[A]$

C'est tout système différentiel linéaire à coefficients analytiques

$$[{}^F A] : x^{r+1} \frac{dY}{dx} = {}^F A Y$$

obtenu à partir de $x^{r+1} dX/dx = AX$ par le changement de fonction inconnue $X = F^{-1}Y$ où F est une transformation formelle ($F \in \text{GL}(n, \mathbb{C}[[x]])$) vérifiant $F(0) = I$.

Un tel système n'est à coefficients analytiques que pour des F convenables.

Inversement, A s'obtient à partir de ${}^F A$ par le changement de fonction inconnue $Y = FX$. Les matrices A et ${}^F A$ se déduisent donc l'une de l'autre par les relations

$$A = -x^{r+1} F^{-1} \frac{dF}{dx} + F^{-1} ({}^F A) F$$

et

$${}^F A = x^{r+1} \frac{dF}{dx} F^{-1} + F A F^{-1}.$$

On a ${}^G({}^F A) = ({}^{GF})A$ et en particulier ${}^{F^{-1}}({}^F A) = A = {}^F({}^{F^{-1}}A)$.

REMARQUE. Les notations adoptées font référence aux solutions fondamentales : si X est une solution fondamentale de $[A]$, alors $F \cdot X$ est une solution fondamentale de $[{}^F A]$.

I.2. Transformé de Birkhoff analytique $[^F A]$ d'un système $[A]$

On impose en outre que F soit à coefficients analytiques à l'origine : F dans $\text{GL}(n, \mathbb{C}\{x\})$ et telle que $F(0) = I$. Si A est à coefficients analytiques, $^F A$ l'est aussi automatiquement.

I.3. Forme normale d'Hermite $[A_0]$ (cf. [J], p.51)

Parmi tous les transformés de Birkhoff formels de $[A]$, il en existe un $[A_0]$ qui admet une solution fondamentale de la forme d'Hermite

$$X_0(x) = P(x)x^K x^J U e^{Q(1/x)}$$

où

$$Q(1/x) = \begin{pmatrix} q_1\left(\frac{1}{x}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n\left(\frac{1}{x}\right) \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale avec $q_i(1/x) \in (1/x^{1/2})\mathbb{C}[1/x^{1/2}]$,

U est une matrice universelle à coefficients constants,

J est la forme de Jordan réduite de la monodromie formelle,

K est une matrice diagonale à coefficients entiers (dans $\mathbb{Z}$),

$P(x)$, partie méromorphe, est, à une matrice constante inversible près, une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale et à coefficients dans $\mathbb{C}[1/x]$.

Cette forme d'Hermite n'est pas unique. On convient d'ordonner suivant une règle à choisir les polynômes q_i d'une part, les blocs de Jordan minimaux de J d'autre part.

Cas particulier : Forme d'Hermite des systèmes d'ordre 2

Les cas suivants peuvent se présenter (I = matrice unité 2×2) :

a) $Q(1/x) = q(1/x)I$ avec $q(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$ (pas de ramification).

Alors

$$U = I$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq \text{Re}\lambda_1, \text{Re}\lambda_2, \text{Re}\lambda < 1$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \text{ avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$P = P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\left(\frac{1}{x}\right) & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P_0 \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \text{ et } p(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x].$$

Ce cas n'interviendra pas dans la suite car il ne conduit à aucun invariant de Birkhoff analytique ($N = 0$).

b) $Q(1/x) = \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$ avec $q_1(1/x)$ et $q_2(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$ et $q_1 \neq q_2$ (pas de ramification).

Alors

$$U = I$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_1 \text{ et } \operatorname{Re} \lambda_2 < 1$$

K et P comme précédemment .

Ce cas fera apparaître $N = 2 \times d^0(q_1 - q_2)$ invariants de Birkhoff analytiques.

$$\text{c) } Q(1/x) = \begin{pmatrix} q'(1/x) + (1/x^{1/2})q(1/x) & 0 \\ 0 & q'(1/x) - (1/x^{1/2})q(1/x) \end{pmatrix}$$

où $xq'(1/x)$ et $q(1/x) \in \mathbb{C}[1/x]$ et $q \neq 0$ sinon on serait dans le cas a) (ramification $x^{1/2} = t$).

Alors

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$$

Enfin, K et P sont comme précédemment. Remarquer, en particulier que P ne contient pas de ramification (P est méromorphe en x).

Ce cas fera apparaître $N = 2 \times d^0 q + 1$ invariants de Birkhoff analytiques.

I.4. Classe de Birkhoff formelle $\hat{B}(A)$ ou analytique $B(A)$ d'un système $[A]$

C'est l'ensemble de tous les systèmes (différentiels, linéaires, à coefficients analytiques) qui s'obtiennent comme transformé de Birkhoff formel ou analytique de A .

Deux éléments de $\hat{B}(A)$ ou de $B(A)$ sont dits formellement ou analytiquement équivalents au sens de Birkhoff.

I.5. Classification de Birkhoff analytique : Position du problème

Etant donné un système $[A]$, on lui associe :

— sa forme normale d’Hermite $[A_0]$ (et plus précisément une solution fondamentale d’Hermite X_0 fixée une fois pour toutes en se donnant des règles de choix là où il y a possibilité de choix) ;

— sa classe de Birkhoff formelle $\widehat{B}(A)$.

On a évidemment $\widehat{B}(A) = \widehat{B}(A_0)$.

L’équivalence de Birkhoff analytique définit une partition de $\widehat{B}(A_0)$ en classes de Birkhoff analytiques qu’on se propose de caractériser.

On ne sait pas bien ici, parce qu’on n’a aucun critère de choix quelque peu canonique, caractériser ces classes en faisant le choix dans chacune d’elles d’un élément particulier comme on peut le faire pour caractériser la classe formelle de $[A]$ en y choisissant la forme normale d’Hermite $[A_0]$. Mais on peut obtenir la classification analytique par l’interprétation cohomologique de MALGRANGE ([M1]) : Les classes analytiques de $\widehat{B}(A_0)$ s’identifient à un quotient de l’ensemble de cohomologie non abélienne $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ à valeurs dans le faisceau de Stokes $\text{St}(A_0)$ c’est-à-dire le faisceau des sections d’isotropie plates de A_0 (une autre méthode, version “infinitésimale” de la précédente, est fournie par ECALLE-Equation du Pont [E]).

De façon générale, un ensemble de cohomologie non abélienne ([F]) n’hérite naturellement d’aucune des structures portées par le faisceau. On a ici une situation exceptionnelle où la structure linéaire affine de $\text{St}(A_0)$ permet de munir l’ensemble $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ d’une structure linéaire affine de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Cette structure n’est en général pas unique : il lui est associé cependant une structure unique de variété algébrique (cf. [BV], [M2]).

Nous explicitons, plus loin, le cas des systèmes d’ordre $n = 2$. En ce qui concerne “la” structure affine de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$, ce cas est particulièrement simple parce qu’il ne peut conduire à aucun mélange de niveaux : les niveaux sont les degrés des différences $q_i - q_j$ des polynômes de la partie irrégulière Q ; ici on n’a qu’un seul degré $d^0(q_1 - q_2) = d^0(q_2 - q_1)$. On obtient une structure linéaire affine naturelle de dimension finie sur $\mathbb{C}$ pour $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ en montrant qu’on peut remplacer cet ensemble par un ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ associé à un recouvrement naturel $\mathcal{U}(A_0)$ de S^1 ([M2]).

I.6. $\widehat{G}(A_0)$ et $\widehat{G}_I(A_0)$ ensembles de transformations formelles admissibles pour $[A_0]$

On note

$$\widehat{G}(A_0) = \{ F \in \text{GL}(n, \mathbb{C}[[x]]) \mid A = {}^F A_0 \in M(n, \mathbb{C}\{x\}) \}$$

l'ensemble des transformations formelles qui transforment $[A_0]$ en un système analytique, et

$$\widehat{G}_I(A_0) = \{F \in \widehat{G}(A_0) \mid F(0) = I\}$$

le sous-ensemble des transformations de Birkhoff formelles de $[A_0]$ (celles qui sont en outre tangentes d'ordre 1 à l'identité).

Notons en outre, $G = \text{GL}(n, \mathbb{C}\{x\})$ le groupe des (germes de) transformations analytiques et G_I le sous-groupe des transformations de G tangentes d'ordre 1 à l'identité ($F(0) = I$).

La classe de Birkhoff formelle $\widehat{B}(A_0)$ de $[A_0]$ est l'orbite de $[A_0]$ sous l'action de $\widehat{G}_I(A_0)$.

I.7. Isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA ([M1], th.3.2)

On appelle ainsi l'isomorphisme

$$\exp_\mu : G \setminus \widehat{G}(A_0) \longrightarrow H^1(S^1; \text{St}(A_0))$$

— $G \setminus \widehat{G}(A_0)$ désigne le quotient à gauche de $\widehat{G}(A_0)$ par le groupe des transformations analytiques G . On a un isomorphisme canonique évident entre $G \setminus \widehat{G}(A_0)$ et $G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0)$, et donc $G \setminus \widehat{G}(A_0)$ s'identifie aux classes de transformations de Birkhoff formelles de A_0 modulo celles qui sont analytiques.

— $\text{St}(A_0)$ est le faisceau de Stokes de A_0 c'est-à-dire le faisceau des sections d'isotropie plates de A_0 au-dessus de S^1 considéré comme l'éclaté de 0 dans $\mathbb{C}$. Un germe de section de $\text{St}(A_0)$ est donc défini par la donnée d'une transformation $f \in \text{GL}(n, \mathcal{O}(U))$ analytique sur un secteur U de sommet 0 dans $\mathbb{C}$ et telle que :

- i) $\lim_{x \rightarrow 0, x \in U} f(x) = I$ et f est asymptotique à I en 0 sur U ,
- ii) $A_0 = {}^f A_0$ (le changement de fonctions inconnues $X \mapsto fX$ laisse A_0 invariante).

— $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ est l'ensemble de cohomologie non abélienne sur S^1 à valeurs dans $\text{St}(A_0)$ (cf. [F]).

— $\exp_\mu$ est défini comme suit : Soit $F \in \widehat{G}_I(A_0)$ et soit $A = {}^F A_0$. Pour un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i, i = 1, \dots, \nu\}$ assez fin, le théorème des développements asymptotiques ([W], [Hu], [RS]) fournit des fonctions $F_i \in \text{GL}(n, \mathcal{O}(U_i))$ telles que

- i) F_i vérifie le système $A = {}^{F_i} A_0$ sur U_i ,
- ii) F_i est asymptotique à F sur U_i .

La 1-cochaîne

$$(\varphi_{i,j}(x) = F_i^{-1}F_j(x)) \in \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\nu} \Gamma(U_{i,j}, St(A_0))$$

définit un cocycle de $H^1(\mathcal{U}; St(A_0))$ et donc de $H^1(S^1; St(A_0))$.

(Ce cocycle ne dépend pas des relèvements F_i ; en outre, la cochaîne $\varphi_{i,j}$ reste inchangée si on multiplie F à gauche par une transformation analytique.)

I.8. G_0 : groupe d'isotropie de $[A_0]$

C'est le groupe

$$G_0 = \left\{ F \in \widehat{G} = GL(n, \mathbb{C}[[x]]) \mid A_0 = {}^F A_0 \right\}$$

des transformations formelles qui laissent invariant le système $[A_0]$.

G_0 est contenu dans $\widehat{G}(A_0)$, mais pas dans $\widehat{G}_I(A_0)$ puisqu'il contient toujours les matrices scalaires λI pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Il est important pour la suite de remarquer que G_0 est un sous-groupe de $G = GL(n, \mathbb{C}\{x\})$. En fait, il est même algébrique : G_0 est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C}[x])$ (cf. [J], p.55).

EXEMPLE 1. Considérons un système $[A_0]$ de solution d'Hermite

$$X_0(x) = \exp \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix} \text{ avec } q_1 \neq q_2 \text{ } (q_1, q_2 \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]).$$

Une matrice F appartient à G_0 si et seulement si il existe une matrice $C \in GL(2, \mathbb{C})$ telle que $FX_0 = X_0C$. En écrivant que $X_0CX_0^{-1}$ est une série formelle, on en déduit que $F = X_0CX_0^{-1}$ convient si et seulement si C commute avec X_0 . On a alors, $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}^* \right\}$. On vérifie que G_0 est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{C}[x])$. En outre, il est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^2$.

EXEMPLE 2. Considérons un système $[A_0]$ de solution d'Hermite

$X_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1/x) & 1 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$ avec $q_1 \neq q_2$ et $p(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$ non nul.

Le raisonnement précédent montre que les éléments de G_0 sont les matrices $F = X_0 C X_0^{-1}$ où C est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et telles que le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1/x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p(1/x) & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu)p(1/x) & \mu \end{pmatrix}$$

soit une série formelle.

Par suite, $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$ est le groupe trivial $\mathbb{C}^* I$.

I.9. Classification de Birkhoff analytique : Solution du problème

Le théorème d'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA résoud de façon théorique le problème de la classification analytique des transformations F de $\widehat{G}_I(A_0)$ ou de $\widehat{G}(A_0)$.

Le groupe algébrique G_0 n'agit pas sur $\widehat{G}_I(A_0)$; mais il agit sur $\widehat{G}(A_0)$ par multiplication à droite et donc il agit aussi sur les classes analytiques $G \setminus \widehat{G}(A_0) \cong G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0)$.

L'application qui à $F \in \widehat{G}(A_0)$ associe le système $[^F A_0]$ n'est pas injective : Deux systèmes $[^F A_0]$ et $[^{F'} A_0]$ où F et F' appartiennent à $\widehat{G}(A_0)$ coïncident si et seulement si il existe une matrice C_0 de G_0 telle que $F = F' C_0$. (En effet, $[^F A_0] = [^{F'} A_0] \Leftrightarrow$ il existe $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $F X_0 = F' X_0 C \Leftrightarrow F'^{-1} F \in G_0$). Les classes analytiques dans la classe de Birkhoff formelle $\widehat{B}(A_0)$ de $[A_0]$ s'identifient donc au quotient $(G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0))/G_0 \cong G \setminus \widehat{G}(A_0)/G_0$.

Les éléments de G_0 étant analytiques, l'action à droite par un élément C_0 de G_0 sur $G \setminus \widehat{G}(A_0)$ se transporte via $\exp_\mu$ en la conjugaison $\varphi \mapsto C_0^{-1} \varphi C_0$ des cocycles φ par C_0 . Notons $G_0^{-1} \cdot H^1(S^1; \text{St}(A_0)) \cdot G_0$ l'ensemble de ces classes de conjugaison.

Ainsi l'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA induit un isomorphisme :

$$(G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0))/G_0 \xrightarrow{\sim} G_0^{-1} \cdot H^1(S^1; \text{St}(A_0)) \cdot G_0$$

permettant de caractériser les classes de Birkhoff analytiques $(G_I \setminus \widehat{G}_I(A_0))/G_0$ de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$ en termes de (classes de) cocycles.

I.10. Invariants de Birkhoff. Invariants analytiques

Soit $[A]$ un système différentiel linéaire analytique.

On suppose fixés

- une forme normale $[A_0]$ ainsi que l'une, X_0 , de ses solutions fondamentales d'Hermite dans la classe formelle de $[A]$,
- la structure linéaire affine de dimension finie sur $\mathbb{C}$ de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$,
- une base de l'espace affine $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$.

Soit $F \in \widehat{G}_I(A_0)$ telle que $A = {}^F A_0$. On appelle

Invariants de Birkhoff de F les composantes de $\exp_\mu(F)$ dans la base affine de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ choisie, et

Invariants analytiques de $[A]$ les classes de conjugaison des invariants de Birkhoff de F sous l'action du groupe d'isotropie G_0 de $[A_0]$.

Par abus de langage, on dira aussi invariants de Birkhoff de $[A]$ pour désigner l'un quelconque des systèmes d'invariants de Birkhoff d'une transformation F de $\widehat{G}_I(A_0)$ telle que $A = {}^F A_0$.

I.11. Méthode de calcul effectif des invariants de Birkhoff

Nous nous proposons dans la suite de donner une méthode de calcul effectif des invariants de Birkhoff pour tous les systèmes d'ordre 2.

Par rapport à l'exemple du cas "séparé" traité dans [MR] (VI.4), on peut rencontrer trois nouveaux types de difficultés :

- i) On peut avoir une ramification ($t = x^{1/2}$);
- ii) La partie méromorphe P vient mélanger ce qu'on voudrait séparer;
- iii) Le polynôme $q_1 - q_2$ n'est pas nécessairement un monôme.

Le schéma de calcul est le suivant :

1) Choix d'une base affine dans $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$

— Cas sans ramification : $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ coïncide avec l'ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ associé à un recouvrement naturel $\mathcal{U}(A_0)$ de S^1 (pour des systèmes d'ordre 2 on n'a qu'un seul niveau). Cet ensemble est muni naturellement d'une structure d'espace affine de dimension finie. On lui associe une base qui n'est naturelle que modulo le choix d'une détermination du logarithme.

— Cas avec ramification : On se ramène au cas sans ramification par un éclatement $x = t^2$. On est alors soumis à une condition de "descente" traduisant l'invariance par le changement de variable $t \mapsto -t$ (invariance galoisienne). La base associée est vraiment naturelle.

2) Réduction au cas séparé

2.1. Elimination de la partie méromorphe. $X_0 = (Px^K)x^JUe^Q$.

On se débarrasse de la partie méromorphe P et même de Px^K par des changements de fonctions inconnues (un changement dans $[A_0]$ et un autre dans $[A]$).

2.2. Elimination de la matrice U (avec rupture des symétries).

— Cas sans ramification : $U = I$; on n'a rien à faire.

— Cas avec ramification : on peut écrire $x^JU = Vx^J$ où V est méromorphe en $t = x^{1/2}$ et on applique la technique de 2.1 ci-dessus des changements de fonctions pour se débarrasser de V .

2.3. Réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme. On effectue un changement de variable du type

$$x = \frac{u}{1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{\nu-1} u^{\nu-1}} \quad \text{où } \nu = d^0(q_1 - q_2) .$$

3) Calcul dans le cas séparé

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} a_1(1 + z_1(x)) & 0 \\ 0 & a_2(1 + z_2(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & x^{\lambda_2} \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$$

où z_1 et $z_2 \in x\mathbb{C}\{x\}$ et où $q_1 - q_2(1/x)$ est un monôme en $1/x$.

Ce cas est analogue à l'exemple traité dans [MR](VI.4). On peut lui appliquer la même méthode de calcul : méthode asymptotique basée sur la comparaison entre isomorphisme de Malgrange-Sibuya et isomorphisme infinitésimal correspondant.

II. Systèmes d'ordre 2. Base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$

II.1. Cas sans ramification $X_0 = Px^K x^J e^Q$

1) Recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0)$ de S^1 .

Soit $\nu = d^0(q_1 - q_2)$. Les secteurs de décroissance de $e^{q_1 - q_2}$ sont au nombre de ν et alternent avec les ν secteurs de décroissance de $e^{q_2 - q_1}$. Tous ces secteurs sont d'ouverture π/ν . Ils sont séparés par les 2ν rayons de Stokes de A_0 .

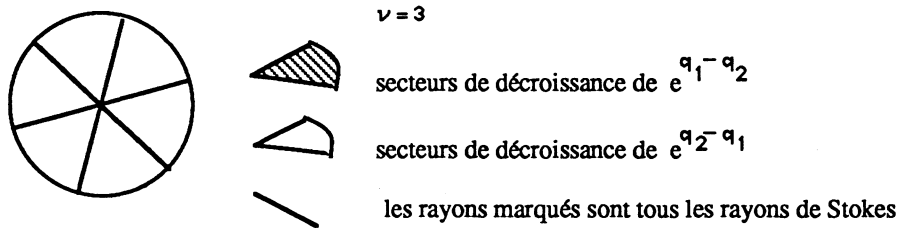


Figure II.1

On choisit l'un des secteurs de décroissance, de $e^{q_1 - q_2}$ par exemple, qu'on appelle $U_{1,2}$ et on note $U_{2,3}, U_{3,4}, \dots, U_{2\nu,1}$ les autres secteurs de décroissance de $e^{q_1 - q_2}$ ou de $e^{q_2 - q_1}$ suivant leur ordre d'apparition lorsqu'on parcourt le cercle S^1 dans le sens direct à partir de $U_{1,2}$. On note enfin $R_1, \dots, R_{2\nu}$ les 2ν rayons de Stokes les séparant (R_k séparant $U_{k-1,k}$ de $U_{k,k+1}$).

On définit les ouverts

$$U_1 = U_{2\nu,1} \cup R_1 \cup U_{1,2}$$

$$U_2 = U_{1,2} \cup R_2 \cup U_{2,3}$$

...

$$U_{2\nu} = U_{2\nu-1,2\nu} \cup R_{2\nu} \cup U_{2\nu,1}$$

de telle sorte que

$$U_{1,2} = U_1 \cap U_2$$

...

$$U_{2\nu,1} = U_{2\nu} \cap U_1$$

Le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0)$ est défini par

$$\mathcal{U}(A_0) = \{U_i \mid i = 1, \dots, 2\nu\} .$$

2) **Structure affine sur $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$.** On a

$$\begin{aligned} H^1(S^1; \text{St}(A_0)) &= H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0)) \\ &= \prod_{j=1}^{2\nu} \Gamma(U_{j,j+1}; \text{St}(A_0)) . \end{aligned}$$

Or, pour chaque ouvert $U_{j,j+1}$, les sections $\Gamma(U_{j,j+1}; \text{St}(A_0))$ ont une structure naturelle d'espace affine de dimension un engendré par la section

$$\begin{aligned} X_0(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0(x)^{-1} & \text{ si } j \text{ est impair} \\ X_0(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0(x)^{-1} & \text{ si } j \text{ est pair ,} \end{aligned}$$

où $X_0(x)$ est défini par l'expression $P(1/x)x^Kx^J e^{Q(1/x)}$ dans laquelle on a fait le choix d'une détermination du logarithme sur $U_{j,j+1}$.

$H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ apparaît donc naturellement comme le produit de 2ν espaces affines de dimension un sur $\mathbb{C}$.

Pour les bases, on fera désormais le choix de détermination du logarithme suivant : On suppose que $U_{1,2}$ ne contient pas le demi-axe réel négatif (on le choisit ainsi). Sur $U_{1,2}$, on choisit la détermination principale du logarithme et on prolonge cette détermination à $U_{2,3}, \dots, U_{2\nu,1}$ en tournant sur S^1 dans le sens direct.

D'où le résultat : $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ est un espace affine de dimension 2ν sur $\mathbb{C}$ engendré par les cocycles élémentaires

$$\begin{aligned} \tau_{2j-1,2j} &= \begin{cases} X_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j-1,2j} \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1} . \end{cases} \\ \tau_{2j,2j+1} &= \begin{cases} X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j,2j+1} \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases} \end{aligned}$$

pour tous les $j \in \mathbb{Z} \bmod \nu$.

3) **Invariants de Birkhoff.** Etant donné un système $[A] = [{}^F A_0]$, on appellera *invariants de Birkhoff* de F (ou de $[A]$ par abus) sans autre précision, les composantes du cocycle $\exp_\mu(F)$ dans la base $\tau = (\tau_{j,j+1}; j = 1, 2, \dots, 2\nu)$ ci-dessus.

Ce sont ces nombres qu'on se propose d'évaluer.

4) Remarque. Le choix d'une détermination du logarithme influe sur la base τ . Si on change de détermination du logarithme, on obtient, après un tour par exemple,

$$\tilde{X}_0(x) = X_0(x)\hat{M} \quad \text{avec} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (\text{monodromie formelle})$$

D'où si on note

$$\tilde{\tau}_{2j-1,2j}(x) = \begin{cases} \tilde{X}_0(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(x)^{-1} & \text{si } x \in U_{2j-1,2j} \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases}$$

on a, sur $U_{2j-1,2j}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{2j-1,2j}(x) &= X_0(x)\hat{M} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{M}^{-1} X_0^{-1}(x) \\ &= X_0(x) \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\pi(\lambda_1-\lambda_2)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1}(x) \\ &= I + e^{2i\pi(\lambda_1-\lambda_2)} X_0(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_0^{-1}(x) \end{aligned}$$

ce qu'on peut noter pour la structure vectorielle sous-jacente d'origine I :

$$\tilde{\tau}_{2j-1,2j}(x) = e^{2i\pi(\lambda_1-\lambda_2)} \tau_{2j-1,2j}(x) .$$

De même

$$\tilde{\tau}_{2j,2j+1}(x) = e^{2i\pi(\lambda_2-\lambda_1)} \tau_{2j,2j+1}(x) .$$

Evidemment, les invariants de Birkhoff doivent, eux, subir la correction inverse.

II.2. Cas avec ramification ($x = t^2$)

$$X_0 = Px^K x^J U e^Q$$

où

$$Q(1/x) = \begin{pmatrix} q'(1/x) + (1/x^{1/2})q(1/x) & 0 \\ 0 & q'(1/x) - (1/x^{1/2})q(1/x) \end{pmatrix}$$

1) Transformation par éclatement. Par un éclatement $x = t^2$, les systèmes $[A]$ et $[A_0]$ sont transformés respectivement en

$$[\tilde{A}] \quad t^{2r+1} \frac{dY}{dt} = 2A(t^2)Y$$

et

$$[\tilde{A}_0] \quad t^{2r+1} \frac{dY}{dt} = 2A_0(t^2)Y .$$

Choisissons $[\tilde{A}_0]$ de solution fondamentale

$$\tilde{X}_0(t) = P(t^2)t^{2K}t^{2J}U \exp \begin{pmatrix} q'(1/t^2) + (1/t)q(1/t^2) & 0 \\ 0 & q'(1/t^2) - (1/t)q(1/t^2) \end{pmatrix}$$

comme forme normale de référence dans la classe de Birkhoff formelle $\hat{B}(\tilde{A})$ de $[\tilde{A}]$. Ce n'est en général pas la forme normale d'Hermite de $[\tilde{A}]$ car on l'obtient par des transformation formelles en t^2 et non en t . Ce système $[\tilde{A}_0]$ ainsi que $[\tilde{A}]$ est invariant sous l'action du groupe de Galois des racines carrées de 1 c'est-à-dire par le changement de variable $t \mapsto te^{i\pi} = -t$.

Soit ν le degré de $q(1/x)$ en $1/x$. Le degré de $q_1(1/t^2) - q_2(1/t^2) = (2/t)q(1/t^2)$ en $1/t$ est donc égal à $\tilde{\nu} = 2\nu + 1$ ($\tilde{\nu}$ est toujours impair).

2) Structure affine sur $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$. On définit comme précédemment (cas sans ramification) le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(\tilde{A}_0) = \{\tilde{U}_j \mid j = 1, \dots, 2\tilde{\nu}\}$ de S^1 associé à $[\tilde{A}_0]$ et on a

$$H^1(S^1; \text{St}(\tilde{A}_0)) \simeq \prod_{j=1}^{2\tilde{\nu}} \Gamma(\tilde{U}_{j,j+1}; \text{St}(\tilde{A}_0)) .$$

On montre que $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ est isomorphe au sous-ensemble des cocycles de $H^1(S^1; \text{St}(\tilde{A}_0))$ invariants par l'action du groupe de Galois Gal_2 des racines carrées de 1. Cet ensemble est représenté en cohomologie de Čech du recouvrement $\mathcal{U}(\tilde{A}_0)$ par les familles de 1-cochaînes

$$(\varphi_{j,j+1}) \in \prod_{j=1}^{2\tilde{\nu}} \Gamma(U_{j,j+1}; \text{St}(\tilde{A}_0))$$

telles que

$$\varphi_{j+\tilde{\nu}, j+1+\tilde{\nu}}(t) = \varphi_{j,j+1}(te^{-i\pi}) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ mod } 2\tilde{\nu} .$$

D'où l'isomorphisme

$$H^1(S^1; \text{St}(A_0)) \simeq \prod_{j=1}^{\tilde{\nu}=2\nu+1} \Gamma(\tilde{U}_{j,j+1}; \text{St}(\tilde{A}_0))$$

qui permet de munir $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ d'une structure naturelle d'espace affine de dimension $\tilde{\nu} = 2\nu + 1$ (dans le cas des systèmes d'ordre 2, chacun

des espaces de sections est de dimension 1) engendré par les cocycles élémentaires

$$\tau_{2j-1,2j}(t) = \begin{cases} \tilde{X}_0(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(t)^{-1} & \text{sur } \tilde{U}_{2j-1,2j} \\ I & \text{sur les autres } \tilde{U}_{i,i+1} \quad (j = 1, \dots, \nu + 1) \end{cases}$$

$$\tau_{2j,2j+1}(t) = \begin{cases} \tilde{X}_0(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(t)^{-1} & \text{sur } \tilde{U}_{2j,2j+1} \\ I & \text{sur les autres } \tilde{U}_{i,i+1} \quad (j = 1, \dots, \nu) \end{cases}$$

3) Invariants de Birkhoff. Etant donné un système $[A] = [{}^F A_0]$, il lui correspond par l'éclatement $t^2 = x$, le système $[\tilde{A}] = [{}^{\tilde{F}} \tilde{A}_0]$. Conformément à l'isomorphisme

$$H^1(S^1; \text{St}(A_0)) \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^{\tilde{\nu}=2\nu+1} \Gamma(\tilde{U}_{j,j+1}; \text{St}(\tilde{A}_0)) ,$$

on définira les invariants de Birkhoff de F (ou de $[A]$ par abus) comme étant les $\tilde{\nu} = (2\nu + 1)$ premières composantes $c_1, c_2, \dots, c_{\tilde{\nu}}$ du cocycle $\widetilde{\exp}_\mu(\tilde{F})$ sur la base $\tau = (\tau_{j,j+1}; j = 1, \dots, 2\tilde{\nu} = 2(2\nu + 1))$ ci-dessus.

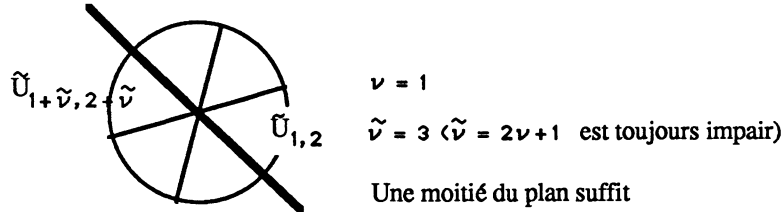


Figure II.2

4) Remarque. Dans ce cas, non seulement la base τ est indépendante du choix d'une détermination du logarithme, mais elle est même globalement invariante par rotation d'angle π dans le plan des t (correspondant à un tour complet dans le plan des x). Il suffit de vérifier qu'on a, pour $j = 1, \dots, \tilde{\nu} = 2\nu + 1$,

$$\tau_{j,j+1}(t) = \tau_{j+\tilde{\nu}, j+\tilde{\nu}+1}(te^{i\pi}) .$$

Faisons la vérification pour j impair ($j = 2k - 1$) par exemple (pour j pair, il faudrait transposer les matrices constantes). On a

$$\tau_{2k-1,2k}(t) = \tilde{X}_0(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(t)^{-1}$$

et

$$\tau_{2k-1+\bar{\nu}, 2k+\bar{\nu}}(t') = \tau_{2k+2\nu, 2k+2\nu+1}(t') = \tilde{X}_0(t') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(t')^{-1}.$$

Or, pour $X_0(x) = Px^K x^J U e^Q$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} q' + (1/x^{1/2})q & 0 \\ 0 & q' - (1/x^{1/2})q \end{pmatrix}$$

et $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1/2 \end{pmatrix}$

(la différence des valeurs propres modulo 1 est nécessairement égale à $1/p$ où $p = 2$ est l'ordre de la ramification([J], p.32)), la monodromie formelle $\hat{M}$ définie par $X_0(xe^{2i\pi}) = X_0(x)\hat{M}$ a pour valeur

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\pi\lambda} \\ e^{2i\pi\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $t' = te^{i\pi}$ ($t = x^{1/2}$), on a donc $\tilde{X}_0(t') = \tilde{X}_0(t)\hat{M}$, et par suite

$$\begin{aligned} \tau_{2k-1+\bar{\nu}, 2k+\bar{\nu}}(t') &= \tilde{X}_0(t)\hat{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{M}^{-1} \tilde{X}_0(t)^{-1} \\ &= \tilde{X}_0(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}_0(t)^{-1} \\ &= \tau_{2k-1, 2k}(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons vu que les cocycles de $H^1(S^1; \text{St}(\tilde{A}_0))$ provenant du plan des x sont invariants par l'action du groupe de Galois des racines carrées de 1 c'est-à-dire par rotation d'angle π dans le plan des t .

Il en résulte alors que dans l'expression

$$\widetilde{\text{exp}}_\mu(\tilde{F}) = \sum_{j=1}^{2\bar{\nu}} c_j \tau_{j,j+1}$$

les $\bar{\nu}$ premiers coefficients $c_1, c_2, \dots, c_{\bar{\nu}}$ coïncident avec les $\bar{\nu}$ suivants : $c_1 = c_{1+\bar{\nu}}, c_2 = c_{2+\bar{\nu}}, \dots, c_{\bar{\nu}} = c_{\bar{\nu}+\bar{\nu}}$.

Tout ceci nous permet de préciser le point suivant :

La base τ est bien déterminée à partir du choix d'un ouvert $\tilde{U}_1$ comme premier ouvert du recouvrement $\mathcal{U}(\tilde{A}_0)$.

Les invariants de Birkhoff de F sont les $\bar{\nu}$ premières parmi les $2\bar{\nu}$ composantes de $\widetilde{\text{exp}}_\mu(\tilde{F})$ dans la base τ .

Pour un autre choix du premier ouvert $\tilde{U}_1$ dans la liste $\mathcal{U}(\tilde{A}_0)$ c'est-à-dire si on effectue une permutation circulaire sur les ouverts $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{2\bar{\nu}}$ du recouvrement $\mathcal{U}(\tilde{A}_0)$, les $2\bar{\nu}$ éléments de la base τ ainsi que les $\bar{\nu}$ invariants de Birkhoff de F subissent la "même" permutation (= permutation de même ordre).

III. Systèmes d'ordre 2. Réduction au cas séparé

III.1. Elimination de la partie méromorphe

1. Cas sans ramification.

$$X_0 = Px^K x^J e^Q$$

où $Q(1/x) = \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$ avec $q_1(1/x)$ et $q_2(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$ et $q_1 \neq q_2$.

On note $\nu = d^0(q_1 - q_2)$.

LEMME. Soit $F \in \text{GL}(n, \mathbb{C}[[x]])$ telle que $F(0) = I$. Il existe des matrices K^1 , P^1 et F^1 vérifiant respectivement des conditions analogues à celles satisfaites par K , P et F (cf. I.3, Forme normale d'Hermite) telles que

$$FPx^K = x^{K^1} P^1 F^1.$$

DÉMONSTRATION : Etant donnée une matrice H inversible à coefficients méromorphes, la méthode du pivot permet de l'écrire sous la forme FPx^K : Pour cela on triangule H jusqu'à obtenir une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1/x) & 1 \end{pmatrix} x^K$ avec $p(1/x)$ dans $(1/x)\mathbb{C}[1/x]$ en n'effectuant que des multiplications à gauche par des matrices à coefficients séries formelles ([J], p.52). De façon duale, on peut écrire H sous la forme $x^{K^1} P^1 F^1$ en ne s'autorisant que des multiplications à droite par des matrices à coefficients séries formelles.

Il y a en outre unicité de K , $p(1/x)$, K^1 , $p^1(1/x)$ lorsqu'on impose la forme triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure, mais nous n'avons besoin pour la suite que de l'existence.

EXEMPLE. Dans l'exemple 2 traité en V.2, l'équation $[A]$ admet une solution fondamentale $F(x)P(1/x)x^K e^{Q(1/x)}$ où F est une matrice de $\text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ telle que $F(0) = I$, où

$$P(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x} + 1) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre VI

On montre qu'en prenant

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^1(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) & 1 \end{pmatrix},$$

on peut trouver $F^1 \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ telle que $F^1(0) = I$ et que

$$F(x)P(1/x)x^K = x^{K^1}P^1(1/x)F^1(x).$$

On a obtenu ce résultat en cherchant à mettre la matrice $(F(x)P(1/x)x^K)$ sous forme triangulaire inférieure par des multiplications à droite.

A titre d'exemple, explicitons le même calcul en cherchant à obtenir une forme triangulaire supérieure. Notons $H(x) = F(x)P(1/x)x^K$ et rappelons qu'on a trouvé pour F^1 l'expression $F^1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^1(x) & 1 \end{pmatrix}$ avec $h^1(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$. On a

$$H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) + h^1(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

On permute les colonnes, d'où

$$H_1(x) = H(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) + h^1(x) \end{pmatrix}.$$

On réduit le terme (2×2) à un monôme :

$$\begin{aligned} H_2(x) &= H_1(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1(x))^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2x}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1)^{-1} \\ 1 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On annule le terme (2×1) :

$$\begin{aligned} H_3(x) &= H_2(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1)^{-1} & -\frac{3}{2x}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1)^{-1} \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On réduit le terme (1×1) à un monôme :

$$\begin{aligned} H_4(x) &= H_3(x) \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2x}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1)^{-1} \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On met “la diagonale” en facteur à gauche :

$$\begin{aligned} H_4 &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2x^2}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2h^1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2x^2} + \frac{3}{4x} + (\frac{3}{8} + x\check{h}(x)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \check{h}(x) \in \mathbb{C}[[x]] . \end{aligned}$$

On se débarrasse de $(3/8 + x\check{h}(x))$:

$$\begin{aligned} H_5 &= H_4 \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{3}{8} + x\check{h}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2x^2} + \frac{3}{4x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H &= H_5 \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} + x\check{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1 + \frac{x}{2} + \dots)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}(1 + \frac{x}{2} + \dots)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= H_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} F^2(x) \end{aligned}$$

avec $F^2(x)$ dans $\text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ et $F^2(0) = I$.

On a donc

$$F(x)P(1/x)x^K = x^{K^2}P^2(1/x)F^2(x)$$

avec

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2x^2} + \frac{3}{4x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} .$$

Revenons à l'élimination de la partie méromorphe.

Notons

$$— \quad X_0^1 = x^J e^Q ,$$

$$— \quad A^1 = (x^{K^1} P^1)^{-1} A$$

obtenue à partir de A par le changement de variable $X = (x^{K^1} P^1)Y$,

$$— \quad A_0^1 = (Px^K)^{-1} A_0$$

obtenue à partir de A_0 par le changement de variable $X = (Px^K)Y$.

Les équations $[A^1]$ et $[A_0^1]$ sont à coefficients analytiques. Elles admettent respectivement pour solution fondamentale $F^1 X_0^1$ et X_0^1 . Elles

Chapitre VI

sont donc dans la même classe de Birkhoff formelle et on a $F^1 \in \widehat{G}_I(A_0^1)$.
En outre, X_0^1 est sous forme d'Hermite.

Les recouvrements fondamentaux associés à $[A_0]$ et à $[A_0^1]$ ne dépendent que de e^Q et donc coïncident

$$\mathcal{U}(A_0) = \mathcal{U}(A_0^1) = \{U_i; i = 1, \dots, 2\nu\} .$$

Notons $(\tau_{j,j+1})_{j=1,\dots,2\nu}$ et $(\tau_{j,j+1}^1)_{j=1,\dots,2\nu}$ les bases des espaces affines $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ et $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0^1))$ telles qu'on les a définies en II et notons

$$\exp_\mu : G \setminus \widehat{G}(A_0) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0)) \simeq H^1(S^1; \text{St}(A_0))$$

et

$$\exp_{\mu^1} : G \setminus \widehat{G}(A_0^1) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0^1)) \simeq H^1(S^1; \text{St}(A_0^1))$$

les isomorphismes de MALGRANGE-SIBUYA associés aux systèmes $[A_0]$ et $[A_0^1]$.

PROPOSITION. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} G \setminus \widehat{G}(A_0) & \xrightarrow{F \mapsto F^1} & G \setminus \widehat{G}(A_0^1) \\ \downarrow \exp_\mu & & \downarrow \exp_{\mu^1} \\ H^1(S^1; \text{St}(A_0)) & & H^1(S^1; \text{St}(A_0^1)) \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{C}^{2\nu}, \text{base } \tau) & \xrightarrow{\text{identité}} & (\mathbb{C}^{2\nu}, \text{base } \tau^1) \end{array}$$

En d'autres termes, les composantes du cocycle $\exp_\mu(F)$ dans la base $\tau = (\tau_{j,j+1}; j = 1, \dots, 2\nu)$ sont les mêmes que celles du cocycle $\exp_{\mu^1}(F^1)$ dans la base $\tau^1 = (\tau_{j,j+1}^1; j = 1, \dots, 2\nu)$.

DÉMONSTRATION : L'application $\exp_\mu$ prend en F la valeur

$$\exp_\mu(F) = (F_j^{-1} F_{j+1})_{j=1,\dots,2\nu \bmod 2\nu}$$

où, pour tout j , F_j désigne l'une quelconque des fonctions telles que

$$\begin{aligned} F_j(x) &\in \text{GL}(2, \mathcal{O}(U_j)) \text{ est asymptotique à } F \text{ sur } U_j \\ \text{et } F_j(x)X_0(x) &\text{ est solution de } [A] \text{ sur } U_j . \end{aligned}$$

L'application $\exp_{\mu^1}$ prend en F^1 la valeur

$$\exp_{\mu^1}(F^1) = ((F_j^1)^{-1} F_{j+1}^1)_{j=1,\dots,2\nu \bmod 2\nu}$$

où les F_j^1 sont soumises aux conditions analogues à celles des F_j .

Or, $F^1 = (x^{K^1} P^1)^{-1} F(Px^K)$ et les fonctions $x^{K^1} P^1$ et Px^K sont méromorphes à l'origine. Ayant choisi les F_j , on peut alors choisir les F_j^1 sous la forme $F_j^1 = (x^{K^1} P^1)^{-1} F_j(Px^K)$ (elles ont le bon comportement asymptotique et elles sont solutions de $[A^1]$ sur chaque U_j). On a donc l'égalité

$$\exp_{\mu^1}(F^1) = (Px^K)^{-1} \exp_{\mu}(F)(Px^K) .$$

D'autre part, pour un même choix d'une matrice C et d'une détermination du logarithme sur chaque $U_{j,j+1}$, les matrices $X_0 C X_0^{-1}$ et $X_0^1 C (X_0^1)^{-1}$ vérifient

$$X_0^1 C (X_0^1)^{-1} = (Px^K)^{-1} X_0 C X_0^{-1} (Px^K) .$$

Les bases τ et τ^1 se correspondent donc par la même relation de conjugaison que les cocycles

$$\tau_{j,j+1}^1 = (Px^K)^{-1} \tau_{j,j+1} (Px^K) \quad \text{pour tout } j .$$

2. Cas avec ramification $x = t^2$.

$$X_0 = Px^K x^J U e^Q \quad \text{où } Q(1/x) = \begin{pmatrix} q'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^{1/2}} q(\frac{1}{x}) & 0 \\ 0 & q'(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^{1/2}} q(\frac{1}{x}) \end{pmatrix} .$$

La démarche est identique; il suffit d'introduire l'éclatement $x = t^2$ nécessaire au calcul des invariants de Birkhoff.

On applique le lemme III.1.1. pour déterminer F^1 , P^1 et K^1 à partir de F , P et K et on note de façon analogue

$$\begin{aligned} X_0^1 &= x^J U e^Q \\ A^1 &= (x^{K^1} P^1)^{-1} A \\ A_0^1 &= (Px^K)^{-1} A_0 . \end{aligned}$$

On effectue l'éclatement $x = t^2$. Notons alors $\tilde{A}, \tilde{A}^1, \dots$ les transformés de $A, A^1, \dots$ par cet éclatement et notons τ et τ^1 les bases de cocycles associées à $[\tilde{A}_0]$ et à $[\tilde{A}_0^1]$ respectivement telles qu'elles ont été définies au §II.2.2.

La proposition III.1.1. reste valable dans le plan de la variable t mais on ne retiendra comme invariants de Birkhoff que les $2\nu + 1$ (où $\nu = d^0 q$) premières composantes de $\widetilde{\exp}_{\mu}(\tilde{F})$ et de $\widetilde{\exp}_{\mu}(\tilde{F}^1)$ dans les bases τ et τ^1 .

III.2. Elimination de la matrice U (avec perte de l'invariance par Gal_2)

Il n'y a à éliminer U parce qu'elle est différente de l'identité I que dans le cas avec ramification. On a alors $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on travaille, après éclatement $x = t^2$, sur les systèmes $[\tilde{A}]$, $[\tilde{A}_0]$, ... en la variable t .

Supposons déjà éliminée la partie méromorphe $P(t^2)t^{2K}$ par la méthode du paragraphe précédent. La même méthode permet d'éliminer U grâce au

LEMME. *Soit une solution fondamentale $\tilde{F}(t)\tilde{X}_0(t)$ de $[\tilde{A}]$ où $\tilde{F}$ est une matrice de $\tilde{G}_I(\tilde{A}_0)$ et où $\tilde{X}_0(t) = t^{2J}Ue^{Q(1/t)}$ avec*

$$\begin{aligned} 2J &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ Q(1/t) &= \begin{pmatrix} q'(1/t^2) + (1/t)q(1/t^2) & 0 \\ 0 & q'(1/t^2) - (1/t)q(1/t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

i) On a $t^{2J}U = \begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ t & -1 \end{pmatrix} t^{2J}$;

ii) Il existe une matrice F de $\text{GL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ vérifiant $F(0) = I$ et il existe une constante $\gamma \in \mathbb{C}$ telles qu'on ait

$$\tilde{F}(t) \begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ t & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F(t).$$

DÉMONSTRATION : Rappelons que la matrice J est la matrice de monodromie modulo 1 et que, s'il y a ramification, elle est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 - \lambda_2$ réel et $|\lambda_1 - \lambda_2| = 1/2$. Quitte à avoir mis en facteur à gauche dans x^K la bonne puissance de x , on peut donc supposer que J s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad 2J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

L'identité (i) se vérifie trivialement.

Pour vérifier (ii), notons $\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f} & \tilde{g} \\ \tilde{h} & \tilde{k} \end{pmatrix}$. On a

$$\tilde{f}(0) = \tilde{k}(0) = 1$$

$$\tilde{g}(0) = \tilde{h}(0) = 0$$

et, en outre, ces séries ne contiennent que des puissances paires de t puisqu'elles proviennent de séries en x par la substitution $x = t^2$. On cherche

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \text{ vérifiant } \tilde{F} \begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ t & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \tilde{F}.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} h &= t(\tilde{f} + t\tilde{g}) \\ k &= \tilde{f} - t\tilde{g} \\ f &= (1/2)(\tilde{f} + \tilde{k}) + (1/2t)\tilde{h} + (t/2)\tilde{g} \\ g &= (1/2t)(\tilde{f} - \tilde{k}) + (1/2t^2)\tilde{h} - (1/2)\tilde{g} \end{aligned}$$

En particulier, on a $f(0) = k(0) = 1$, $h(0) = 0$, mais $g(0) = (1/t^2)\tilde{h}(t)_{t=0}$. Notons $\gamma = g(0)$ et mettons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en facteur à gauche dans $\tilde{F}$. Il en résulte l'existence et l'unicité de γ et de F . Les coefficients de F ne sont évidemment plus des séries paires en t : on a perdu l'invariance par l'action de Gal_2 .

III.3. Réduction de $q_1 - q_2$ à un "monôme"

Supposons que, grâce aux réductions précédentes et à un éclatement éventuel $x = t^2$, on ait ramené le problème du calcul des invariants de Birkhoff au cas d'un système $[A]$ de solution fondamentale $F(x)X_0(x)$ relativement à une forme normale $[A_0]$ de solution fondamentale $X_0(x) = x^J e^Q$ avec

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et $Q(1/x) = \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$ ($q_1(1/x)$ et $q_2(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$).

LEMME. Soit $\nu = d^0(q_1 - q_2)$ et $(q_1 - q_2)(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x^\nu} + \frac{b_1}{x^{\nu-1}} + \dots + \frac{b_{\nu-1}}{x}$. Il existe un changement de variable

$$x = \frac{u}{1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{\nu-1} u^{\nu-1}}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1} \in \mathbb{C}$$

tel que les parties polaires $Q_1(\frac{1}{u})$ et $Q_2(\frac{1}{u})$ de $q_1(\frac{1}{x(u)})$ et de $q_2(\frac{1}{x(u)})$ respectivement vérifient

$$(Q_1 - Q_2)\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{a}{u^\nu}.$$

Chapitre VI

DÉMONSTRATION : Effectuons dans $(q_1 - q_2)(\frac{1}{x})$ un changement de variable de la forme proposée :

$$(q_1 - q_2) \left(\frac{1}{x(u)} \right) = \frac{a}{u^\nu} (1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{\nu-1} u^{\nu-1})^\nu + \dots \\ \dots + \frac{b_{\nu-1}}{u} (1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{\nu-1} u^{\nu-1}) \quad .$$

On obtient alors une expression de la forme

$$(q_1 - q_2) \left(\frac{1}{x(u)} \right) = \frac{a}{u^\nu} + \frac{b'_1}{u^{\nu-1}} + \dots + \frac{b'_{\nu-1}}{u} + R(u) \quad ,$$

où $R(u)$ est un polynôme en u et où les coefficients $b'_1, \dots, b'_{\nu-1}$ sont déterminés à partir des coefficients $a, b_1, \dots, b_{\nu-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}$ par des expressions de la forme

$$b'_i = \nu a \alpha_i + B_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$$

dans lesquelles les termes notés B_i sont des polynômes des coefficients $a, b_1, \dots, b_i$ et des seuls coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ d'indice inférieur à i ($B_1 = b_1$ ne dépend d'aucun des α_i).

La partie polaire $(Q_1 - Q_2)(\frac{1}{u})$ de $(q_1 - q_2)(\frac{1}{x(u)})$ est égale à $\frac{a}{u^\nu}$ à condition de choisir successivement

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\nu a} B_1 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\nu a} B_2(\alpha_1) \\ \dots \quad \dots \\ \alpha_{\nu-1} = -\frac{1}{\nu a} B_{\nu-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-2}) \quad .$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

En appliquant ce changement de variable aux systèmes $[A_0]$ et $[A]$, on obtient

$[A_0^1]$ de solution fondamentale $X_0^1(u) = X_0(x(u))$ et

$[A^1]$ de solution fondamentale $F^1(u)X_0^1(u)$ avec $F^1(u) = F(x(u))$.

$X_0^1(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1(1 + z_1(u)) & 0 \\ 0 & a_2(1 + z_2(u)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\lambda_1} e^{Q_1(1/u)} & 0 \\ 0 & u^{\lambda_2} e^{Q_2(1/u)} \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont dans $\mathbb{C}^*$ et z_1 et z_2 sont des fonctions analytiques telles que $z_1(0) = z_2(0) = 0$.

Notons $[\bar{A}_0^1]$ le système de solution fondamentale

$$\bar{X}_0^1(u) = \begin{pmatrix} a_1 u^{\lambda_1} e^{Q_1(1/u)} & 0 \\ 0 & a_2 u^{\lambda_2} e^{Q_2(1/u)} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \bar{F}^1(u) = F^1(u) \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix}.$$

Le système $[\bar{A}_0^1]$ est analytiquement équivalent à $[A_0^1]$ au sens de Birkhoff. Il est aussi simple qu'on peut l'espérer (cf. remarque ci-dessous).

Les recouvrements fondamentaux

$$\mathcal{U}(A_0) = \{U_j, j = 1, \dots, 2\nu\}$$

$$\text{et } \mathcal{U}(\bar{A}_0^1) = \mathcal{U}(A_0^1) = \{U_j^1, j = 1, \dots, 2\nu\}$$

associés à $[A_0]$, $[\bar{A}_0^1]$ et $[A_0^1]$ respectivement se correspondent par l'identification $x \mapsto u$ du plan des x au plan des u car $q_1 - q_2(1/x)$ et $Q_1 - Q_2(1/u)$ ont "même" partie principale donc "mêmes" secteurs de décroissance.

Soient τ , τ^1 et $\bar{\tau}^1$ les bases de cocycles associées à X_0 , X_0^1 et $\bar{X}_0^1$ respectivement comme en II, de la forme $X_0(x)CX_0(x)^{-1}$, $X_0^1(u)CX_0^1(u)^{-1}$ et $\bar{X}_0^1(u)C\bar{X}_0^1(u)^{-1}$.

PROPOSITION. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} G \setminus \widehat{G}(A_0) & \xrightarrow{F \mapsto F^1} & G \setminus \widehat{G}(A_0^1) & \xrightarrow{F^1 \mapsto \bar{F}^1} & G \setminus \widehat{G}(\bar{A}_0^1) \\ \downarrow \exp_\mu & & \downarrow \exp_{\mu^1} & & \downarrow \overline{\exp}_{\mu^1} \\ H^1(S^1; \text{St}(A_0)) & & H^1(S^1; \text{St}(A_0^1)) & & H^1(S^1; \text{St}(\bar{A}_0^1)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{C}^{2\nu}, \text{base } \tau) & \xrightarrow{\text{identité}} & (\mathbb{C}^{2\nu}, \text{base } \tau^1) & \xrightarrow{\text{identité}} & (\mathbb{C}^{2\nu}, \text{base } \tau^1) \end{array}$$

En d'autres termes, les composantes des cocycles $\exp_\mu(F)$, $\exp_{\mu^1}(F^1)$ et $\overline{\exp}_{\mu^1}(\bar{F}^1)$ dans les bases τ , τ^1 et $\bar{\tau}^1$ respectivement sont les mêmes.

DÉMONSTRATION : Pour la première application identité, tout se transpose par le changement de variable $x \mapsto u$: Si le cocycle $F_j^{-1}(x)F_{j+1}(x)$ de $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ vaut $\lambda_j \tau_{j,j+1}(x) = \lambda_j X_0(x)C_j X_0(x)^{-1}$ sur $U_{j,j+1}$, alors le cocycle $F_j^1(u)^{-1}F_{j+1}^1(u) = F_j(x(u))^{-1}F_{j+1}(x(u))$ de $H^1(\mathcal{U}(A_0^1); \text{St}(A_0^1))$ vaut $\lambda_j \tau_{j,j+1}(x(u)) = \lambda_j \tau_{j,j+1}^1(u)$ sur $U_{j,j+1}^1$.

Chapitre VI

La deuxième application identité résulte de ce que $[A_0^1]$ et $[\bar{A}_0^1]$ sont analytiquement équivalentes. On a

$$X_0^1(u) = \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix} \bar{X}_0^1(u)$$

et $\bar{F}^1(u) = F^1(u) \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix} ;$

d'où on a simultanément les relations

$$\tau_{j,j+1}^1(u) = \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix} \bar{\tau}_{j,j+1}^1(u) \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$F_j^1(u)^{-1} F_{j+1}^1(u) = \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix} \bar{F}_j(u)^{-1} \bar{F}_{j+1}(u) \begin{pmatrix} 1 + z_1(u) & 0 \\ 0 & 1 + z_2(u) \end{pmatrix}^{-1} .$$

REMARQUE. En tant que système, $[\bar{A}_0^1]$ est plus "simple" que $[A_0^1]$. Mais il n'est pas clair qu'on ait intérêt à le choisir comme forme normale de préférence à $[A_0^1]$. En effet, dans la pratique, on déterminera les coefficients des séries formelles $\bar{F}^1(u)$ ou $F^1(u)$ par identification. Il se peut que les relations de récurrence ainsi obtenues pour déterminer $\bar{F}^1(u)$ "convergent" moins vite, ou soient moins simples que celles qui déterminent $F^1(u)$ (cf. V.1. Exemple 1).

IV - Calcul effectif des invariants de Birkhoff dans le cas "séparé"

Soit $[A] : x^{r+1}(dX/dx) = AX$ un système différentiel linéaire d'ordre 2 à coefficients analytiques. On se propose d'évaluer numériquement un système d'invariants de Birkhoff pour $[A]$.

Ce qui précède nous permet toujours de nous ramener à un système $[A]$ de forme normale $[A_0]$ dite "séparée" : La solution fondamentale d'Hermite associée X_0 est de la forme

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} a_1(1+z_1(x)) & 0 \\ 0 & a_2(1+z_2(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & x^{\lambda_2} \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$$

avec

- a_1 et $a_2 \in \mathbb{C}^*$,
- $z_1(x)$ et $z_2(x) \in x\mathbb{C}\{x\}$,
- λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$,
- $q_1(1/x)$ et $q_2(1/x) \in (1/x)\mathbb{C}[1/x]$,
- $q_1 - q_2(1/x) = a/x^\nu$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$ (si $a = 0$, il n'y a pas d'invariants de Birkhoff),

et on peut même, si on le désire, se débarrasser de z_1 et z_2 .

Fixons une telle forme normale de référence. On a ici comme liberté de choix

- une permutation de q_1 et q_2 (qui entraîne la même permutation entre λ_1 et λ_2);
- le produit de $1+z_1$ et de $1+z_2$ par des fonctions analytiques quelconques tangentes à 1 à l'origine (par exemple $1/(1+z_1)$ et $1/(1+z_2)$) permettant de se débarrasser des termes $z_1(x)$ et $z_2(x)$.

Soit alors $F \in \hat{G}_I(A_0)$ telle que $A = {}^F A_0$. Les cocycles élémentaires $\tau_{j,j+1}(x)$, $j = 1, 2, \dots, 2\nu$, définis en II forment une base affine de $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0)) \cong H^1(S^1; \text{St}(A_0))$. On peut donc écrire le cocycle $\exp_\mu(F)$, image de F par l'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA, sous la forme

$$\exp_\mu(F) = \sum_{j=1}^{2\nu} c_j \tau_{j,j+1}.$$

Rappelons que, si dans les réductions préliminaires qui ont ramené le système initial à $[A]$ on n'a pas fait d'éclatement (cas sans ramification), alors les coefficients c_j , $j = 1, \dots, 2\nu$, forment un système d'invariants de Birkhoff pour le système initial. Si on a fait un éclatement (cas avec ramification), la famille des coefficients c_j , $j = 1, \dots, 2\nu$, est invariante

par permutation d'indices d'ordre ν ($c_{j+\nu} = c_j$ pour tout $j \bmod 2\nu$) et un système d'invariants de Birkhoff pour le système initial est constitué de ν coefficients consécutifs; on a choisi en outre de prendre les ν premiers.

Ce sont ces coefficients c_j , $j = 1, \dots, \nu$ ou 2ν qu'on se propose d'évaluer.

Le calcul va les séparer en deux familles :

- Les c_j pour j impair qui sont reliés aux coefficients g_n de

$$F = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix} x^n$$

- Les c_j pour j pair qui sont reliés aux coefficients h_n de F .

IV.1. Détermination de $F = I + \sum_{n \geq 1} F(n)x^n$ telle que $A = {}^F A_0$

On peut déterminer les coefficients $F(n) = \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix}$ de proche en proche par identification dans l'équation de passage de $[A]$ à $[A_0]$:

$$x^{r+1}(dF/dx) = AF - FA_0 .$$

En fait, nous n'aurons besoin que des seules relations permettant de déterminer les coefficients g_n et h_n (plus précisément des variantes G_n et H_n de ceux-ci; voir remarque IV.6).

Dans le cas où la matrice A du système étudié est algébrique et où on garde dans X_0 les fonctions z_1 et z_2 qui s'introduisent naturellement dans le changement de variable $x = x(u)$ lors de la réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme (cf. V.1, Exemple 1), on obtient pour déterminer g_n et h_n de vraies relations de récurrence linéaires d'ordre fini. Dans les autres cas, on obtient des relations linéaires à un nombre croissant de termes.

IV.2. Données infinitésimales associées

Aux cocycles élémentaires, choisis comme base de $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$,

$$\tau_{2j-1,2j}(x) = \begin{cases} I + X_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j-1,2j} \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases}$$

et

$$\tau_{2j,2j+1}(x) = \begin{cases} I + X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j,2j+1} \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases} ,$$

on associe les cocycles infinitésimaux élémentaires

$$\tau'_{2j-1,2j}(x) = \begin{cases} X_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j-1,2j} \\ 0 & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases}$$

et

$$\tau'_{2j,2j+1}(x) = \begin{cases} X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_0^{-1} & \text{sur } U_{2j,2j+1} \\ 0 & \text{sur les autres } U_{i,i+1} \end{cases}$$

(cocycles abéliens au sens usuel pour la structure additive des matrices et le recouvrement $\mathcal{U}(A_0)$). Au cocycle $\sum_{j=1}^{2\nu} c_j \tau_{j,j+1}$, on associe le cocycle

infinitésimal $\sum_{j=1}^{2\nu} c_j \tau'_{j,j+1}$.

L'application de Cauchy-Heine qui n'est autre que la réciproque de l'isomorphisme infinitésimal permet d'associer à tous ces cocycles infinitésimaux des séries formelles par des formules explicites :

A $\tau'_{j,j+1}$, elle associe la série $\sum_{n \geq 0} \text{CH}_{j,j+1}(n) x^n$ où

$$\text{CH}_{j,j+1}(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \xi^{-n-1} \tau'_{j,j+1}(\xi) d\xi ,$$

γ_j désignant un "germe" de bissectrice du secteur $U_{j,j+1}$ issu de 0 ;

à $\sum_{j=1}^{2\nu} c_j \tau'_{j,j+1}$, elle associe la série $\sum_{n \geq 0} (\sum_{j=1}^{2\nu} c_j \text{CH}_{j,j+1}(n)) x^n$.

IV.3. Comparaison entre données de départ et données infinitésimales. Principe du calcul

La comparaison entre l'isomorphisme de MALGRANGE-SIBUYA et l'isomorphisme infinitésimal correspondant ([MR], VI.4.3) fournit la relation

$$(*) \quad \text{pp} \left(\sum_{j=1}^{2\nu} c_j \text{CH}_{j,j+1}(n) \right) = \text{pp}(F(n)) .$$

(On note *pp* pour partie principale par rapport à la variable $n \in \mathbb{N}$ quand n tend vers l'infini.)

Or d'une part, nous venons de voir qu'on sait évaluer asymptotiquement les $F(n)$ par des relations de récurrence linéaires ; d'autre part,

on sait calculer les parties principales des coefficients de Cauchy-Heine $CH_{j,j+1}(n)$. La relation (*) fournit alors des relations entre les coefficients c_j . Dans le cas d'une forme normale "séparée", mais dans ce cas seulement, ces relations déterminent de façon simple l'ensemble des coefficients c_j . Elles se séparent en deux systèmes de Cramer déterminant, l'un les coefficients c_j pour j pair, l'autre les coefficients c_j pour j impair.

IV.4. Parties principales des coefficients $CH_{j,j+1}(n)$

Les formules asymptotiques qu'on va obtenir sont indépendantes de z_1 et de z_2 . Pour simplifier, nous supposons donc dès à présent que $z_1 = z_2 = 0$. Notons $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\nu}$ les arguments des bissectrices des secteurs $U_{1,2}, U_{2,3}, \dots, U_{2\nu,1}$ correspondant au choix fait de la détermination du logarithme sur chacun de ces secteurs. On a $\alpha_j = \alpha_1 + (j-1)\pi/\nu$ pour $j = 1, \dots, 2\nu$. Pour les secteurs d'ordre impair $U_{1,2}, \dots, U_{2\nu-1,2\nu}$, on fait le calcul suivant :

$$CH_{1,2}(n) = \frac{1}{2i\pi} \frac{a_1}{a_2} \int_{\gamma_1} \xi^{-n+\Lambda-1} e^{a/\xi^\nu} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On ramène cette intégrale à une vraie fonction gamma par le changement de variable $s = |a| e^{i\alpha_1\nu} \xi^{-\nu}$, $ds/s = -\nu d\xi/\xi$,

$$CH_{1,2}(n) = \frac{1}{2i\pi\nu} \frac{a_1}{a_2} (|a| e^{i\alpha_1\nu})^{-(n-\Lambda)/\nu} \int_0^\varepsilon s^{(n-\Lambda)/\nu-1} e^{-s} ds \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$CH_{1,2}(n) = \frac{1}{2i\pi\nu} \frac{a_1}{a_2} (|a| e^{i\alpha_1\nu})^{-(n-\Lambda)/\nu} \Gamma\left(\frac{n-\Lambda}{\nu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (I + \varepsilon_{1,2}(n))$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{1,2}(n) = 0$.

Du même calcul le long de la bissectrice γ_{2j-1} de $U_{2j-1,2j}$, on déduit

$$CH_{2j-1,2j}(n) = CH_{1,2}(n) e^{-(j-1)2i\pi(n-\Lambda)/\nu} (I + E_{2j-1,2j}(n))$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2j-1,2j}(n) = 0$.

C'est la forme particulière de ce coefficient $e^{-(j-1)2i\pi(n-\Lambda)/\nu}$, c'est-à-dire sa périodicité d'ordre ν en n , qui permet la suite du calcul telle qu'elle est proposée. C'est aussi ce qui nous impose de ramener l'exposant $q_1 - q_2$ de l'exponentielle à un monôme a/x^ν . Pour les secteurs d'ordre pair $U_{2,3}, \dots, U_{2\nu,1}$, on a :

$$CH_{2,3}(n) = \frac{1}{2i\pi} \frac{a_2}{a_1} \int_{\gamma_2} \xi^{-n-\Lambda-1} e^{-a/\xi^\nu} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d'où

$$\boxed{\text{CH}_{2,3}(n) = \frac{1}{2i\pi\nu} \frac{a_2}{a_1} (|a| e^{i\alpha_2\nu})^{-(n+\Lambda)/\nu} \Gamma\left(\frac{n+\Lambda}{\nu}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (I + \varepsilon_{2,3}(n))}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{2,3} = 0$, et

$$\boxed{\text{CH}_{2j,2j+1}(n) = \text{CH}_{2,3}(n) e^{-(j-1)2i\pi(n+\Lambda)/\nu} (I + E_{2j,2j+1}(n))}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2j,2j+1}(n) = 0$.

On peut, à ce stade, faire un certain nombre de remarques.

a) Les $\text{CH}_{j,j+1}$ pour j impair, comme pour j pair, ont tous en module le même comportement asymptotique, mais ce comportement diffère entre les $\text{CH}_{j,j+1}$ pour j impair et les $\text{CH}_{j,j+1}$ pour j pair : Les uns sont donc toujours dominants par rapport aux autres (seule exception : $\Lambda = 0$ et encore faut-il avoir supprimé le facteur x^K si $K \neq kI$ dans la forme normale X_0).

b) Dans la partie principale des $\text{CH}_{j,j+1}$ pour j impair, seul le terme (1×2) en 1re ligne et 2e colonne est non nul : on déduira les invariants de Birkhoff c_j pour j impair de la seule "valeur asymptotique" des coefficients g_n ; pour j pair, seul le terme (2×1) en 2e ligne et 1re colonne est non nul : on déduira les invariants de Birkhoff c_j pour j pair de la seule "valeur asymptotique" des coefficients h_n .

c) *Cette séparation est fondamentale* : Si la suite du calcul mélangeait des termes pour j impair et pour j pair, dont les comportements asymptotiques ne sont pas du même ordre, *on ne pourrait obtenir que les invariants de Birkhoff correspondant aux termes dominants (donc la moitié d'entre eux seulement)*.

C'est la raison qui nous contraint à nous débarrasser de la partie méromorphe même constante et de la matrice U (III.1 et 2).

IV.5. Calcul des invariants de Birkhoff c_j pour j impair

On écrit les ν égalités asymptotiques ($q = 0, 1, \dots, \nu - 1$) :

$$\text{pp}(\text{coef}_{1,2}(\sum_{j=1}^{\nu} c_{2j-1} \text{CH}_{2j-1,2j}(m\nu + q))) = \text{pp}(g_{m\nu+q}),$$

où $\text{pp}(\dots)$ désigne ici la partie principale quand m tend vers $+\infty$.

Ces égalités s'obtiennent en restreignant l'égalité asymptotique IV.3.(*) aux éléments en 1re ligne et 2e colonne des matrices considérées, puis en appliquant cette égalité aux sous-suites des termes de ν en ν .

Chapitre VI

On remarque que, pour q fixé, les termes $\text{CH}_{2j-1,2j}(m\nu + q)$ sont tous en partie principale proportionnels à l'un d'eux $\text{CH}_{1,2}(m\nu + q)$:

$$\text{CH}_{2j-1,2j}(m\nu + q) = \text{CH}_{1,2}(m\nu + q) e^{-(j-1)2i\pi(q-\Lambda)/\nu} (I + E_{2j-1,2j}(m\nu + q))$$

(le coefficient de proportionnalité $e^{-(j-1)2i\pi(q-\Lambda)/\nu}$ est indépendant de l'indice m). Le premier membre des égalités asymptotiques ci-dessus s'écrit donc

$$\text{pp}(\text{coef}_{1,2}(\text{CH}_{1,2}(m\nu + q))) \sum_{j=1}^{\nu} c_{2j-1} e^{-(j-1)2i\pi(q-\Lambda)/\nu}$$

où l'expression sous le signe $\sum$ est une constante indépendante de m .

Notons

$$G_{m\nu+q} = \frac{g_{m\nu+q}}{\text{pp}(\text{coef}_{1,2}(\text{CH}_{1,2}(m\nu + q)))} .$$

On a alors les résultats suivants :

PROPOSITION. 1) Pour chaque $q = 0, 1, \dots, (\nu - 1)$, la suite

$$G_{m\nu+q} = \frac{2i\pi\nu(|a|e^{i\alpha_1\nu})^{m+(q-\Lambda)/\nu}}{\Gamma(m + (q - \Lambda)/\nu)} \frac{a_2}{a_1} g_{m\nu+q}$$

admet une limite finie $\mathcal{G}_q \in \mathbb{C}$ quand m tend vers $+\infty$.

2) On obtient une "valeur approchée" de $\mathcal{G}_q$ en calculant les termes $G_{m\nu+q}$ de proche en proche comme les $g_{m\nu+q}$ (cf. remarque IV.7 ci-dessous).

3) Les invariants de Birkhoff $c_1, c_3, \dots, c_{2\nu-1}$ sont l'unique solution du système de Cramer

$$\sum_{j=1}^{\nu} c_{2j-1} e^{-(j-1)2i\pi(q-\Lambda)/\nu} = \mathcal{G}_q, \quad q = 0, 1, \dots, (\nu - 1) .$$

IV.6. Calcul des invariants de Birkhoff c_j pour j pair

On fait le même calcul à partir des éléments en 2e ligne et 1re colonne dans l'égalité IV.3.(*), la série (h_n) jouant maintenant le rôle de (g_n) . On écrit les ν égalités ($q = 0, 1, \dots, \nu - 1$) :

$$\text{pp}(\text{coef}_{2,1}(\sum_{j=1}^{\nu} c_{2j} \text{CH}_{2j,2j+1}(m\nu + q))) = \text{pp}(h_{m\nu+q}) .$$

Pour q fixé, les $\text{CH}_{2j,2j+1}(m\nu + q)$ sont tous proportionnels en partie principale à $\text{CH}_{2,3}(m\nu + q)$ suivant la relation

$$\text{CH}_{2j,2j+1}(m\nu + q) = \text{CH}_{2,3}(m\nu + q) e^{-(j-1)2i\pi(q+\Lambda)/\nu} (I + E_{2j,2j+1}(m\nu + q))$$

et le premier membre de l'égalité asymptotique ci-dessus s'écrit

$$\text{pp}(\text{coef}_{2,1}(\text{CH}_{2,3}(m\nu + q))) \sum_{j=1}^{\nu} c_{2j} e^{-(j-1)2i\pi(q+\Lambda)/\nu}.$$

Notons

$$H_{m\nu+q} = \frac{h_{m\nu+q}}{\text{pp}(\text{coef}_{2,1}(\text{CH}_{2,3}(m\nu + q)))}.$$

On a alors les résultats suivants :

PROPOSITION. 1) Pour chaque $q = 0, 1, \dots, (\nu - 1)$, la suite

$$H_{m\nu+q} = \frac{2i\pi\nu(|a|e^{i\alpha_2\nu})^{-m-(q+\Lambda)/\nu} \frac{a_1}{a_2} h_{m\nu+q}}{\Gamma(m + (q + \Lambda)/\nu)}$$

admet une limite finie $\mathcal{H}_q \in \mathbb{C}$ quand m tend vers $+\infty$.

2) On obtient une "valeur approchée" de $\mathcal{H}_q$ en calculant les coefficients $H_{m\nu+q}$ de proche en proche comme les $h_{m\nu+q}$ (cf. remarque IV.7 ci-dessous).

3) Les invariants de Birkhoff $c_2, c_4, \dots, c_{2\nu}$ sont l'unique solution du système de Cramer

$$\sum_{j=1}^{\nu} c_{2j} e^{-(j-1)2i\pi(q+\Lambda)/\nu} = \mathcal{H}_q, \quad q = 0, 1, \dots, (\nu - 1).$$

IV.7. Remarque : Calcul des limites $\mathcal{G}_q$ et $\mathcal{H}_q$

Chacune des sous-suites $(G_{m\nu+q})_m$ converge vers une limite finie $\mathcal{G}_q$. La suite $(G_n)_n$ "oscille" donc entre un certain nombre de valeurs finies. Le coefficient $\frac{\Gamma((n-\Lambda)/\nu)}{2i\pi\nu(|a|e^{i\alpha_1\nu})^{(n-\Lambda)/\nu}}$, ainsi que le coefficient g_n qui est du même ordre de grandeur, tend très fortement vers l'infini. La relation de récurrence pour déterminer les g_n , si simple soit-elle, "explosera" inévitablement très vite lors d'un traitement par ordinateur.

D'après ce qui précède, il n'en va pas de même de la relation de récurrence transposée sur la suite (G_n) qui, elle, conserve un ordre de grandeur numérique fini.

La même remarque vaut pour la suite (H_n) .

Il est donc préférable de travailler avec G_n et H_n au lieu de g_n et h_n . Pour obtenir directement les relations de récurrence définissant les suites G_n et H_n , il suffirait d'écrire $F(n)$ sous la forme

$$F(n) = \begin{pmatrix} f_n & G_n \frac{\Gamma((n-\Lambda)/\nu)}{2i\pi\nu(|a|e^{i\alpha_1\nu})^{(n-\Lambda)/\nu} \frac{a_1}{a_2}} \\ H_n \frac{\Gamma((n+\Lambda)/\nu)}{2i\pi\nu(|a|e^{i\alpha_2\nu})^{(n+\Lambda)/\nu} \frac{a_2}{a_1}} & h_n \end{pmatrix}$$

avant de faire l'identification dans l'équation $x^{r+1}(dF/dx) = AF - FA_0$.

La vitesse de convergence des relations de récurrence et l'évaluation de l'erreur sont elles aussi des problèmes pratiques importants que nous n'avons pas abordés mais auxquels il conviendrait de s'attacher en vue d'une implantation de l'algorithme sur ordinateur. Rappelons simplement que l'une de nos libertés pour influencer sur la vitesse réside par exemple dans un choix astucieux des fonctions $z_1(x)$ et $z_2(x)$ de la forme normale de référence X_0 (cf. III.3 et V.1 Exemple 1). On a aussi en général plusieurs choix possibles de la partie méromorphe de X_0 (cf. III.1).

V. Trois exemples

V.1. Exemple 1

Cet exemple n'admet ni ramification, ni partie méromorphe. Il contient de la monodromie formelle modulo 1 (termes en $x^{1/3}$ de la solution) et $q_1 - q_2$ n'est pas réduit à un monôme.

On se propose de déterminer les invariants de Birkhoff du système

$$[A] \quad x^3 \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{3}x^2 & \frac{1}{2}x \\ 2x & 2 + x - x^2 \end{pmatrix}.$$

On choisit pour forme normale de $[A]$, la forme d'Hermite

$$[A_0] \quad x^3 \frac{dX}{dx} = A_0 X \quad \text{avec} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}x^2 & 0 \\ 0 & 2 + x \end{pmatrix}$$

et pour solution fondamentale normale, la solution d'Hermite

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} x^{1/3} e^{q_1(1/x)} & 0 \\ 0 & e^{q_2(1/x)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1(1/x) = -\frac{1}{2x^2} \\ q_2(1/x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \end{cases}$$

définie sans ambiguïté sur la surface de Riemann du logarithme.

Le système $[A]$ admet alors une solution fondamentale formelle de la forme FX_0 où $F \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ et $F(0) = I$.

Cet exemple ne contenant ni ramification, ni partie méromorphe même constante, la partie "réduction au cas séparé" de l'algorithme ne comporte que la réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme.

Réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme. On effectue le changement de variable $x = u/(1 - u)$.

Les systèmes $[A]$ et $[A_0]$ deviennent respectivement

$$[A^1] \quad u^3(1 - u) \frac{dX}{du} = A^1 X \quad \text{avec} \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 - 2u + \frac{7}{3}u^2 & \frac{1}{2}u(1 - u) \\ 2u(1 - u) & 2 - 3u \end{pmatrix}$$

$$[A_0^1] \quad u^3(1 - u) \frac{dX}{du} = A_0^1 X \quad \text{avec} \quad A_0^1 = \begin{pmatrix} 1 - 2u + \frac{4}{3}u^2 & 0 \\ 0 & 2 - 3u + u^2 \end{pmatrix}$$

et leurs solutions fondamentales deviennent

Chapitre VI

pour $[A_0^1]$: $X_0^1(u) = X_0(u/(1-u))$ c'est-à-dire

$$X_0^1(u) = \begin{pmatrix} u^{1/3}(1-u)^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{e}} e^{q_1^1(1/u)} & 0 \\ 0 & e^{q_2^1(1/u)} \end{pmatrix}$$

avec
$$\begin{cases} q_1^1(1/u) = -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} \\ q_2^1(1/u) = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \end{cases}$$

pour $[A^1]$: $F^1(u)X_0^1(u)$ avec $F^1(u) = F(u/(1-u))$.

Notons

$$\begin{aligned} F^1(u) &= \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \\ &= I + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix} u^n. \end{aligned}$$

F^1 est l'unique transformation formelle, solution du système de passage de $[A^1]$ à $[A_0^1]$

$$u^3(1-u) \frac{dF^1}{du} = A^1 F^1 - F^1 A_0^1$$

qui vérifie $F^1(0) = I$. Par identification, on en déduit pour déterminer g et h (on n'a besoin ni de f , ni de k) les équations

$$\begin{aligned} u^4(1-u) \frac{d^2 g}{du^2} + (u - 2u^2 + \frac{8}{3}u^3 - \frac{11}{3}u^4 + 2u^5) \frac{dg}{du} + (-1 + 3u - \frac{14}{3}u^2)g &= 0 \\ u^4(1-u) \frac{d^2 h}{du^2} + u(-1 + u + \frac{7}{3}u^2 - 2u^3) \frac{dh}{du} + h &= 0 ; \end{aligned}$$

d'où les relations de récurrence

$$(\alpha) \quad \boxed{\begin{aligned} (n-1)g_n &= (2n-5)g_{n-1} - g_{n-2} \\ &+ (n-3)(2n - \frac{13}{3})g_{n-3} - (n-3)(n-4)g_{n-4} \end{aligned}}$$

$$(\beta) \quad \boxed{\begin{aligned} (n-1)h_n &= (n-1)h_{n-1} + (n-2)(n - \frac{2}{3})h_{n-2} \\ &- (n-3)(n-2)h_{n-3} \end{aligned}}$$

avec les conditions initiales

$$(\alpha_0) \quad \boxed{g_0 = 0, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_2 = -\frac{1}{2}, \quad g_3 = \frac{1}{4}}$$

$$(\beta_0) \quad \boxed{h_0 = 0, \quad h_1 = h_2 = -2}$$

REMARQUE. $X_0^1(u)$ n'est pas de la forme d'Hermite "pure". Il faudrait pour cela se débarrasser du facteur $(1-u)^{-1/3}$ en effectuant le changement de fonction inconnue $X \mapsto \begin{pmatrix} (1-u)^{-1/3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, d'où une nouvelle forme normale de référence $[\bar{A}_0^1]$ (cf. proposition III.1).

Mais alors les équations définissant g et h ne seraient plus à coefficients polynomiaux, mais à coefficients analytiques. On n'aurait plus de vraies relations de récurrence pour le calcul des g_n et des h_n , mais des relations à un nombre croissant de termes.

Il est donc sur ce point plus simple (sinon numériquement plus performant) de choisir $[A_0^1]$ plutôt que $[\bar{A}_0^1]$ comme forme normale. En outre, pour la suite, en ce qui concerne les formules de calculs asymptotiques, les deux choix sont équivalents.

Définition des invariants de Birkhoff de F . L'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ s'identifie à l'ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ du recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0) = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, où

$$U_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg x < -\frac{\pi}{4} + \pi \bmod 2\pi\}$$

$$U_2 = \{x \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4} + \pi \bmod 2\pi\}$$

$$U_3 = \{x \in \mathbb{C} \mid \frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4} + \pi \bmod 2\pi\}$$

$$U_4 = \{x \in \mathbb{C} \mid \frac{5\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4} + \pi \bmod 2\pi\}$$

(Cf. Figure V.1.1)

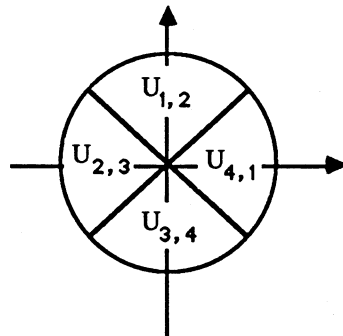


Figure V.1.1

Comme convenu, $U_{1,2} = U_1 \cap U_2$ est un secteur de décroissance de $e^{q_1 - q_2}$; il ne rencontre pas $\mathbb{R}^-$ et on y choisit la détermination principale du logarithme qu'on prolonge aux autres $U_{i,i+1}$ en tournant dans le sens

Chapitre VI

direct. Ainsi on a $x^{1/3} = |x|^{1/3} e^{(1/3)i \arg x}$ avec

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4} & \text{ sur } U_{1,2} \\ \frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4} & \text{ sur } U_{2,3} \\ \frac{5\pi}{4} < \arg x < \frac{7\pi}{4} & \text{ sur } U_{3,4} \\ \frac{7\pi}{4} < \arg x < \frac{9\pi}{4} & \text{ sur } U_{4,1} . \end{aligned}$$

$H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ est naturellement un espace affine de dimension 4 de base $\tau = (\tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,4}, \tau_{4,1})$ où les cocycles élémentaires $\tau_{i,i+1}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= X_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x^{1/3} e^{q_1 q_2(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{1,2} \\ \tau_{2,3} &= X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x^{-1/3} e^{q_2 - q_1(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{2,3} \\ \tau_{3,4} &= X_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x^{1/3} e^{q_1 - q_2(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{3,4} \\ \tau_{4,1} &= X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x^{-1/3} e^{q_2 - q_1(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{4,1} \end{aligned}$$

et où $q_1 - q_2(1/x) = (1/2x^2) + (1/x)$ n'est pas un monôme.

A la matrice F correspond, par l'application $\exp_\mu$, un cocycle $c_1\tau_{1,2} + c_2\tau_{2,3} + c_3\tau_{3,4} + c_4\tau_{4,1}$ ($c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$) de $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$. *Les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 sont les invariants de Birkhoff de F dont on se propose de calculer une valeur numérique approchée.*

Pour cela, on remplace les systèmes $[A]$ et $[A_0]$ par $[A^1]$ et $[A_0^1]$ et on fait le calcul asymptotique proposé. On remarquera qu'on ne peut pas faire le calcul asymptotique proposé directement sur $[A]$ et $[A_0]$ car $q_1 - q_2$ n'étant pas un monôme les parties principales de Cauchy-Heine comportent en facteur des puissances de $e^{\sqrt{n}}$ qui compromettent la suite du calcul : Les équations

$$\text{pp}(c_1 \text{CH}_{1,2}(n) + c_3 \text{CH}_{3,4}(n)) = \text{pp} \begin{pmatrix} 0 & g_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{pp}(c_2 \text{CH}_{2,3}(n) + c_4 \text{CH}_{4,1}(n)) = \text{pp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_n & 0 \end{pmatrix}$$

ne se scindent pas, chacune, en deux équations formant système de Cramer pour déterminer c_1, c_3 d'une part et c_2, c_4 d'autre part.

Base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0^1))$. Le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0^1) = \{U_1^1, U_2^1, U_3^1, U_4^1\}$ est défini dans le plan des u comme $\mathcal{U}(A_0)$ dans le plan des x . (Cf. Figure V.1.2)

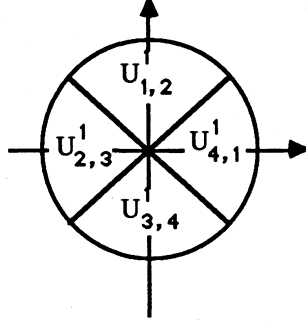


Figure V.1.2

On fait les mêmes choix de déterminations du logarithme et on prend pour base de $H^1(\mathcal{U}(A_0^1); \text{St}(A_0^1))$ la famille $\tau^1 = (\tau_{1,2}^1, \tau_{2,3}^1, \tau_{3,4}^1, \tau_{4,1}^1)$ analogue à la famille τ , ce qui donne

$$\tau_{1,2}^1 = \begin{cases} I + \frac{1}{\sqrt{e}} u^{1/3} (1-u)^{-(1/3)} e^{q_1^1 - q_2^1(1/u)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{1,2}^1 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^1 \end{cases}$$

$$\tau_{2,3}^1 = \begin{cases} I + \sqrt{e} u^{-1/3} (1-u)^{1/3} e^{q_2^1 - q_1^1(1/u)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{2,3}^1 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^1 \end{cases}$$

$$\tau_{3,4}^1 = \begin{cases} I + \frac{1}{\sqrt{e}} u^{1/3} (1-u)^{-(1/3)} e^{q_1^1 - q_2^1(1/u)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{3,4}^1 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^1 \end{cases}$$

$$\tau_{4,1}^1 = \begin{cases} I + \sqrt{e} u^{-1/3} (1-u)^{1/3} e^{q_2^1 - q_1^1(1/u)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{4,1}^1 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^1 \end{cases}$$

et où, ici, $q_1^1 - q_2^1(1/u) = 1/2u^2$ est un monôme.

Nous avons vu qu'à F^1 est associé par $\exp_{\mu^1}$ le cocycle $c_1\tau_{1,2}^1 + c_2\tau_{2,3}^1 + c_3\tau_{3,4}^1 + c_4\tau_{4,1}^1$ où les c_i sont les invariants de Birkhoff de F cherchés (Proposition III.3).

Coefficients de Cauchy-Heine associés à F^1 . Ce sont

$$\text{CH}_{1,2}^1(n) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} \int_0^{e^{i\pi/2}\infty} \frac{\xi^{1/3}(1-\xi)^{-1/3}}{\xi^{n+1}} e^{1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{CH}_{2,3}^1(n) = \frac{\sqrt{e}}{2i\pi} \int_0^{e^{i\pi}\infty} \frac{\xi^{-1/3}(1-\xi)^{1/3}}{\xi^{n+1}} e^{-1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{CH}_{3,4}^1(n) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} \int_0^{e^{3i\pi/2}\infty} \frac{\xi^{1/3}(1-\xi)^{-1/3}}{\xi^{n+1}} e^{1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{CH}_{4,1}^1(n) = \frac{\sqrt{e}}{2i\pi} \int_0^{e^{2i\pi}\infty} \frac{\xi^{-1/3}(1-\xi)^{1/3}}{\xi^{n+1}} e^{-1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $\text{CH}_{1,2}^1(n)$ et $\text{CH}_{3,4}^1(n)$ n'interviennent que dans le terme (1×2) (en 1re ligne, 2e colonne : matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), alors que $\text{CH}_{2,3}^1(n)$ et $\text{CH}_{4,1}^1(n)$ n'interviennent que dans le terme (2×1) (en 2e ligne, 1re colonne : matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

Ce phénomène de scindage provient de l'absence de partie méromorphe même constante dans X_0^1 et il a pour conséquence la séparation en le calcul de c_1 et c_3 d'une part et le calcul de c_2 et c_4 d'autre part.

Calcul de c_1 et de c_3 . On a

$$\text{pp}(\text{CH}_{1,2}^1(n)) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} e^{i\pi/6} e^{-i\pi n/2} 2^{n/2-7/6} \Gamma\left(\frac{3n-1}{6}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{pp}(\text{CH}_{3,4}^1(n)) = (-1)^n e^{i\pi/3} \text{pp}(\text{CH}_{1,2}^1(n)) .$$

On écrit l'équation

$$\text{pp}(c_1\tau_{1,2}^1 + c_3\tau_{3,4}^1) = \text{pp} \begin{pmatrix} 0 & g_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui identifie les comportements asymptotiques des termes (1×2) de $c_1\tau_{1,2}^1 + c_2\tau_{2,3}^1 + c_3\tau_{3,4}^1 + c_4\tau_{4,1}^1$ et de F^1 .

Puis, on extrait de cette équation les ν équations des termes de ν en ν . Ici $\nu = d^0(q_1^1 - q_2^1) = 2$. On sépare donc en sous-suite des termes d'indice pair et sous-suite des termes d'indice impair, ce qui fournit pour déterminer c_1 et c_3 le système de Cramer

$$\begin{cases} c_1 + e^{i\pi/3}c_3 = \mathcal{G}_0 \\ c_1 - e^{i\pi/3}c_3 = \mathcal{G}_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{G}_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} G_{2m} \\ \mathcal{G}_1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} G_{2m+1} \end{cases}$$

et $G_n = 2i\pi\sqrt{e}e^{-i\pi/6}e^{i\pi n/2}2^{-n/2+7/6}\Gamma(\frac{3n-1}{6})^{-1}g_n$.

Or, le coefficient g_n de la série F^1 est connu par la relation de récurrence (α) avec conditions initiales (α_0) , ce qui va nous permettre d'évaluer numériquement $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_1$. On a donc

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1) \\ c_3 &= \frac{1}{2}e^{-i\pi/3}(\mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_1) \end{aligned}}$$

Rappelons encore que le fait qu'on puisse obtenir ainsi un système de Cramer pour déterminer c_1 et c_3 en séparant sous-suite des termes d'indice pair et sous-suite des termes d'indice impair est dû à ce que $q_1^1 - q_2^1$ est un monôme (de degré 2).

Calcul de c_2 et de c_4 . On a

$$\text{pp}(\text{CH}_{2,3}^1(n)) = \frac{\sqrt{e}}{2i\pi}(-1)^n e^{-i\pi/3} 2^{n/2-5/6} \Gamma(\frac{3n+1}{6})$$

et

$$\text{pp}(\text{CH}_{4,1}^1(n)) = (-1)^n e^{-i\pi/3} \text{pp}(\text{CH}_{2,3}^1(n)) .$$

En opérant comme pour c_1 et c_3 , on obtient pour déterminer c_2 et c_4 le système de Cramer

$$\begin{cases} c_2 + e^{-i\pi/3} c_4 = \mathcal{H}_0 \\ c_2 - e^{-i\pi/3} c_4 = \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{2m} \\ \mathcal{H}_1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{2m+1} \end{cases}$$

et

$$H_n = \frac{2i\pi}{\sqrt{e}}(-1)^n e^{i\pi/3} 2^{-n/2+5/6} \Gamma(\frac{3n+1}{6})^{-1} h_n$$

(h_n est le coefficient (2×1) de la série F^1 défini par la relation de récurrence (β) avec les conditions initiales (β_0)). On a donc

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1) \\ c_4 &= \frac{1}{2}e^{i\pi/3}(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_1) \end{aligned}}$$

REMARQUE. On observe que les parties principales des coefficients de Cauchy-Heine $CH_{1,2}^1$ et $CH_{3,4}^1$ d'une part, $CH_{2,3}^1$ et $CH_{4,1}^1$ d'autre part ne sont pas du même ordre de grandeur : Ceci est toujours le cas lorsque la monodromie formelle n'est pas nulle.

La séparation entre le calcul de c_1 et c_3 d'une part et celui de c_2 et c_4 d'autre part est donc fondamentale. Sinon, on ne pourrait, par limite asymptotique, obtenir que les deux invariants associés aux termes dominants; ici donc, on ne pourrait obtenir que c_2 et c_4 puisque $CH_{2,3}^1$ et $CH_{4,1}^1$ sont dominants sur $CH_{1,2}^1$ et $CH_{3,4}^1$.

Rappelons que cette séparation est due à l'absence de partie méromorphe, y compris constante, dans X_0^1 .

Calcul numérique de $\mathcal{G}_0$ et de $\mathcal{G}_1$. La relation de récurrence (α) définissant g_n est fortement explosive puisque g_n croît comme $2^{n/2}\Gamma((3n-1)/6)$. Celle qui définit G_n ne l'est pas : La sous-suite des termes pairs doit converger vers $\mathcal{G}_0$, celle des termes impairs vers $\mathcal{G}_1$.

Si on pose $G_n = 2i\pi\sqrt{e}e^{-i\pi/6}2^{7/6}G'_n$, on a

$$g_n = e^{-i\pi n/2}2^{n/2}\Gamma((3n-1)/6)G'_n$$

et les relations (α) et (α_0) deviennent

$$(\alpha') \quad G'_n = \frac{2n-5}{2(n-1)}\gamma_n i\sqrt{2}G'_{n-1} + \frac{3n^2-7n-12}{(n-1)(3n-7)}G'_{n-2} \\ - \frac{(n-3)(6n-13)}{2(n-1)(3n-10)}\gamma_n i\sqrt{2}G'_{n-3} - \frac{9(n-3)(n-4)}{(n-1)(3n-13)(3n-7)}G'_{n-4}$$

$$(\alpha'_0) \quad \begin{cases} G'_0 = 0, & G'_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}\Gamma(1/3)}, \\ G'_2 = \frac{1}{4\Gamma(5/6)}, & G'_3 = \frac{-3i}{2^3\sqrt{2}\Gamma(1/3)}. \end{cases}$$

avec $\gamma_n = \frac{\Gamma((3n-1)/6-1/2)}{\Gamma((3n-1)/6)}$.

Introduisons maintenant les inconnues r et a par

$$\begin{cases} r_{2m} = \Gamma(5/6)G'_{2m} \\ r_{2m+1} = i\sqrt{2}\Gamma(1/3)G'_{2m+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{2m} = \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}\gamma_{2m} \\ a_{2m+1} = -\frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)}\gamma_{2m+1} \end{cases}$$

L'introduction de r et de a n'a rien d'impératif. Mais ce faisant, on obtient des coefficients et valeurs initiales plus simples car rationnelles. On obtient, pour déterminer les r et les a , les relations

$$\boxed{r_{2m} = \frac{4m-5}{2(2m-1)}a_{2m}r_{2m-1} + \frac{12m^2-14m-12}{(2m-1)(6m-7)}r_{2m-2} \\ + \frac{(2m-3)(12m-13)}{2(2m-1)(6m-10)}a_{2m}r_{2m-2} - \frac{18(2m-3)(m-2)}{(2m-1)(6m-13)(6m-7)}r_{2m-4}}$$

$$r_{2m+1} = \frac{4m-3}{4m} a_{2m+1} r_{2m} + \frac{6m^2-m-8}{3m(3m-2)} r_{2m-1} - \frac{(m-1)(12m-7)}{2m(6m-7)} a_{2m+1} r_{2m-2} - \frac{9(m-1)(2m-3)}{4m(3m-5)(3m-2)} r_{2m-3}$$

avec

$$r_0 = 0, \quad r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{4}, \quad r_3 = \frac{3}{8}$$

et les relations

$$a_{2m+2} = \frac{6m-4}{6m-1} a_{2m} \quad \text{et} \quad a_{2m+3} = \frac{6m-1}{6m+2} a_{2m+1}$$

avec

$$a_4 = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad a_5 = -\frac{15}{4}.$$

Ce sont ces formules qu'on a programmées pour déterminer une valeur approchée de $\mathcal{G}_0$ et de $\mathcal{G}_1$, d'où l'on déduit par les formules (1) une valeur approchée des invariants de Birkhoff c_1 et c_3 de F . Les valeurs successives des termes de 250 en 250 des suites r_{2m} et r_{2m+1} jusqu'à $m = 30000$ sont consignées dans la table A et donnent comme valeurs approchées de c_1 et de c_3

$$\begin{aligned} c_1 &\simeq 4.462 + i \, 4.112 \\ c_3 &\simeq 4.011 + i \, 2.836 \end{aligned}$$

(Par accélération de convergence du 1er ordre, on obtient ces résultats environ 5 fois plus vite.)

Calcul numérique de $\mathcal{H}_0$ et de $\mathcal{H}_1$. La relation de récurrence (β) définissant (h_n) est elle aussi fortement explosive puisque h_n croît comme $2^{n/2} \Gamma((3n+1)/6)$.

Si on pose $H_n = (2i\pi/\sqrt{e}) e^{i\pi/3} 2^{5/6} H'_n$, on a

$$h_n = (-1)^n \Gamma((3n+1)/6) 2^{n/2} H'_n$$

et les relations (β) et (β_0) deviennent

$$(\beta') \quad H'_n = -\delta_n H'_{n-1} + \frac{(n-2)(3n-2)}{(n-1)(3n-5)} H'_{n-2} + 3 \frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)(3n-8)} \delta_n H'_{n-3}$$

$$(\beta'_0) \quad H'_0 = 0, \quad H'_1 = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(2/3)}, \quad H'_2 = \frac{-1}{\Gamma(2/3 + 1/2)}$$

Chapitre VI

$m :$	$r_{2m} :$	$r_{2m+1} :$	$m :$	$r_{2m} :$	$r_{2m+1} :$
0	0.00000000	-0.50000000	15000	0.39046776	0.91974159
1	0.25000000	0.37500000	15250	0.39043910	0.91986663
250	0.41154878	0.81329885	15500	0.39041113	0.91998861
500	0.40501543	0.84983628	15750	0.39038382	0.92010767
750	0.40193663	0.86581987	16000	0.39035714	0.92022391
1000	0.40004864	0.87527662	16250	0.39033108	0.92033745
1250	0.39873795	0.88169698	16500	0.39030561	0.92044839
1500	0.39775897	0.88641811	16750	0.39028071	0.92055682
1750	0.39699144	0.89007633	17000	0.39025635	0.92066284
2000	0.39636852	0.89301793	17250	0.39023252	0.92076653
2250	0.39584971	0.89544953	17500	0.39020919	0.92086799
2500	0.39540881	0.89750302	17750	0.39018636	0.92096729
2750	0.39502803	0.89926704	18000	0.39016400	0.92106450
3000	0.39469480	0.90080367	18250	0.39014209	0.92115970
3250	0.39439995	0.90215780	18500	0.39012063	0.92125295
3500	0.39413661	0.90336287	18750	0.39009960	0.92134433
3750	0.39389954	0.90444430	19000	0.39007898	0.92143389
4000	0.39368461	0.90542186	19250	0.39005876	0.92152169
4250	0.39348858	0.90631114	19500	0.39003892	0.92160778
4500	0.39330882	0.90712467	19750	0.39001946	0.92169224
4750	0.39314320	0.90787259	20000	0.39000036	0.92177509
5000	0.39298994	0.90856328	20250	0.38998162	0.92185641
5250	0.39284758	0.90920365	20500	0.38996321	0.92193622
5500	0.39271488	0.90979954	20750	0.38994514	0.92201458
5750	0.39259079	0.91035584	21000	0.38992739	0.92209153
6000	0.39247442	0.91087677	21250	0.38990995	0.92216712
6250	0.39236500	0.91136590	21500	0.38989281	0.92224137
6500	0.39226185	0.91182634	21750	0.38987597	0.92231434
6750	0.39216441	0.91226079	22000	0.38985941	0.92238606
7000	0.39207216	0.91267160	22250	0.38984313	0.92245656
7250	0.39198466	0.91306083	22500	0.38982712	0.92252587
7500	0.39190151	0.91343031	22750	0.38981137	0.92259404
7750	0.39182236	0.91378165	23000	0.38979588	0.92266109
8000	0.39174690	0.91411630	23250	0.38978064	0.92272704
8250	0.39167485	0.91443551	23500	0.38976564	0.92279194
8500	0.39160597	0.91474046	23750	0.38975087	0.92285581
8750	0.39154002	0.91503216	24000	0.38973634	0.92291867
9000	0.39147680	0.91531155	24250	0.38972202	0.92298056
9250	0.39141613	0.91557947	24500	0.38970793	0.92304149
9500	0.39135785	0.91583668	24750	0.38969405	0.92310149
9750	0.39130179	0.91608388	25000	0.38968037	0.92316059
10000	0.39124782	0.91632170	25250	0.38966690	0.92321881
10250	0.39119582	0.91655071	25500	0.38965363	0.92327616
10500	0.39114566	0.91677145	25750	0.38964054	0.92333267
10750	0.39109725	0.91698440	26000	0.38962765	0.92338836
11000	0.39105047	0.91719002	26250	0.38961494	0.92344326
11250	0.39100525	0.91738870	26500	0.38960240	0.92349737
11500	0.39096149	0.91758083	26750	0.38959005	0.92355071
11750	0.39091912	0.91776677	27000	0.38957786	0.92360332
12000	0.39087807	0.91794683	27250	0.38956584	0.92365519
12250	0.39083827	0.91812133	27500	0.38955398	0.92370635
12500	0.39079966	0.91829054	27750	0.38954229	0.92375682
12750	0.39076217	0.91845472	28000	0.38953074	0.92380661
13000	0.39072576	0.91861412	28250	0.38951936	0.92385573
13250	0.39069038	0.91876896	28500	0.38950812	0.92390420
13500	0.39065597	0.91891946	28750	0.38949702	0.92395204
13750	0.39062250	0.91906581	29000	0.38948607	0.92399925
14000	0.39058992	0.91920821	29250	0.38947526	0.92404586
14250	0.39055819	0.91934683	29500	0.38946459	0.92409187
14500	0.39052728	0.91948183	29750	0.38945404	0.92413729
14750	0.39049715	0.91961337	30000	0.38944364	0.92418215

Table de Convergence A

Liste des valeurs numériques des suites convergentes r_{2m} et r_{2m+1} définies par récurrence en V.1. Leurs limites $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_1$ permettent de calculer les invariants de Birkhoff $c_1 \simeq 4.462 + i4.112$ et $c_3 \simeq 4.011 + i2.836$ de l'exemple V.1.

avec

$$\delta_n = \frac{\Gamma((3n+1)/6 - 1/2)}{\sqrt{2}\Gamma((3n+1)/6)}.$$

Introduisons les inconnues s et b par

$$\begin{cases} s_{2m-1} = \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{2}} H'_{2m-1} \\ s_{2m} = -\Gamma(2/3 + 1/2) H'_{2m} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_{2m-1} = \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{2}\Gamma(2/3+1/2)} \delta_{2m-1} \\ b_{2m} = \frac{\sqrt{2}\Gamma(2/3+1/2)}{\Gamma(2/3)} \delta_{2m} \end{cases};$$

d'où, pour déterminer les s et les b , les relations

$$\begin{aligned} s_{2m-1} = & b_{2m-1} s_{2m-2} + \frac{(2m-3)(6m-5)}{4(m-1)(3m-4)} s_{2m-3} \\ & - 3 \frac{(m-2)(2m-3)}{(m-1)(6m-11)} b_{2m-1} s_{2m-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2m} = & b_{2m} s_{2m-1} + \frac{4(m-1)(3m-1)}{(2m-1)(6m-5)} s_{2m-2} \\ & - 3 \frac{(2m-3)(m-1)}{(2m-1)(3m-4)} b_{2m} s_{2m-3} \end{aligned}$$

avec

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 1$$

et les relations

$$b_{2m-1} = \frac{6m-11}{6m-8} b_{2m-3} \quad \text{et} \quad b_{2m} = \frac{6m-8}{6m-5} b_{2m-2}$$

avec

$$b_3 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad b_4 = \frac{2}{3}.$$

On a programmé sommairement ces relations, sans estimation d'erreurs. La table B fournit les valeurs numériques des termes de 250 en 250 des suites s_{2m} et s_{2m+1} jusqu'à $m = 30000$. Le calcul de s_{2m} fournit une valeur approchée de $\mathcal{H}_0$; celui de s_{2m+1} une valeur approchée de $\mathcal{H}_1$. On en déduit une valeur approchée des invariants de Birkhoff c_2 et c_4 de F par les formules (2), ce qui donne

$$\begin{aligned} c_2 &\simeq -2.035 + i \, 1.175 \\ c_4 &\simeq 26.799 + i \, 15.472 \end{aligned}.$$

Chapitre VI

$m :$	$s_{2m} :$	$s_{2m+1} :$	$m :$	$s_{2m} :$	$s_{2m+1} :$
0	0.00000000	1.00000000	15000	4.74151373	4.68387362
1	1.00000000	1.62500000	15250	4.74185079	4.68418526
250	4.46826856	4.43170931	15500	4.74217968	4.68448933
500	4.55949818	4.51576807	15750	4.74250071	4.68478615
750	4.60012816	4.55325441	16000	4.74281420	4.68507598
1000	4.62441150	4.57567124	16250	4.74312043	4.68535911
1250	4.64101044	4.59099911	16500	4.74341968	4.68563579
1500	4.65327745	4.60232909	16750	4.74371221	4.68590626
1750	4.66281971	4.61114374	17000	4.74399828	4.68617075
2000	4.67051682	4.61825473	17250	4.74427810	4.68642947
2250	4.67689606	4.62414870	17500	4.74455192	4.68668264
2500	4.68229525	4.62913753	17750	4.74481994	4.68693044
2750	4.68694221	4.63343155	18000	4.74508236	4.68717307
3000	4.69099688	4.63717844	18250	4.74533937	4.68741070
3250	4.69457529	4.64048538	18500	4.74559116	4.68764350
3500	4.69776397	4.64343225	18750	4.74583790	4.68787164
3750	4.70062892	4.64608002	19000	4.74607977	4.68809526
4000	4.70322145	4.64847610	19250	4.74631691	4.68831452
4250	4.70558220	4.65065802	19500	4.74654947	4.68852955
4500	4.70774377	4.65265589	19750	4.74677762	4.68874049
4750	4.70973270	4.65449423	20000	4.74700147	4.68894747
5000	4.71157081	4.65619320	20250	4.74722118	4.68915060
5250	4.71327625	4.65776957	20500	4.74743685	4.68935001
5500	4.71486426	4.65923743	20750	4.74764862	4.68954581
5750	4.71634772	4.66060867	21000	4.74785660	4.68973811
6000	4.71773764	4.66189345	21250	4.74806090	4.68992701
6250	4.71904344	4.66310050	21500	4.74826163	4.69011261
6500	4.72027329	4.66423736	21750	4.74845889	4.69029500
6750	4.72143428	4.66531057	22000	4.74865278	4.69047427
7000	4.72253261	4.66632586	22250	4.74884340	4.69065052
7250	4.72357371	4.66728827	22500	4.74903084	4.69082383
7500	4.72456239	4.66820223	22750	4.74921518	4.69099427
7750	4.72550291	4.66907168	23000	4.74939651	4.69116193
8000	4.72639906	4.66990011	23250	4.74957491	4.69132688
8250	4.72725422	4.67069066	23500	4.74975046	4.69148920
8500	4.72807143	4.67144612	23750	4.74992323	4.69164894
8750	4.72885341	4.67216903	24000	4.75009330	4.69180619
9000	4.72960262	4.67286165	24250	4.75026073	4.69196100
9250	4.73032129	4.67352603	24500	4.75042560	4.69211344
9500	4.73101144	4.67416406	24750	4.75058796	4.69226356
9750	4.73167491	4.67477743	25000	4.75074788	4.69241143
10000	4.73231337	4.67536768	25250	4.75090543	4.69255710
10250	4.73292836	4.67593623	25500	4.75106065	4.69270063
10500	4.73352129	4.67648439	25750	4.75121361	4.69284206
10750	4.73409343	4.67701333	26000	4.75136436	4.69298145
11000	4.73464599	4.67752417	26250	4.75151296	4.69311884
11250	4.73518004	4.67801791	26500	4.75165944	4.69325429
11500	4.73569680	4.67849548	26750	4.75180387	4.69338783
11750	4.73619662	4.67895775	27000	4.75194630	4.69351952
12000	4.73668094	4.67940551	27250	4.75208675	4.69364939
12250	4.73715037	4.67983952	27500	4.75222530	4.69377749
12500	4.73760567	4.68026045	27750	4.75236196	4.69390386
12750	4.73804753	4.68066896	28000	4.75249679	4.69402853
13000	4.73847659	4.68106565	28250	4.75262983	4.69415154
13250	4.73889347	4.68145107	28500	4.75276112	4.69427293
13500	4.73929873	4.68182574	28750	4.75289069	4.69439274
13750	4.73969289	4.68219016	29000	4.75301859	4.69451100
14000	4.74007647	4.68254479	29250	4.75314484	4.69462774
14250	4.74044991	4.68289006	29500	4.75326949	4.69474299
14500	4.74081366	4.68322637	29750	4.75339256	4.69485679
14750	4.74116814	4.68355411	30000	4.75351409	4.69496916

Table de Convergence B

Liste des valeurs numériques des suites s_{2m} et s_{2m+1} définies par récurrence en V.1. Leurs limites $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ permettent de calculer les invariants de Birkhoff $c_2 \simeq -2.035 + i1.175$ et $c_4 \simeq 26.799 + i15.472$ de l'exemple V.1.

Invariants analytiques de [A]. Le groupe d'isotropie formelle G_0 de [A] est constitué des matrices C constantes inversibles qui commutent avec X_0 . On a donc

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Les invariants analytiques de [A] sont le quotient des invariants de Birkhoff (c_1, c_2, c_3, c_4) de [A] précédemment calculés par l'action de G_0 par conjugaison. Ce sont donc les classes

$$\boxed{(\alpha c_1, \frac{1}{\alpha} c_2, \alpha c_3, \frac{1}{\alpha} c_4) \text{ pour tout } \alpha = \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{C}^*}.$$

V.2. Exemple 2

Cet exemple n'admet ni ramification, ni monodromie formelle. Il contient une partie méromorphe et $q_1 - q_2$ n'est pas réduit à un monôme.

On se propose de calculer les invariants de Birkhoff du système

$$[A] \quad x^4 \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} x - x^3 & 0 \\ \frac{1}{3}(2 + 3x + 6x^2 + x^3) & 2x + x^2 \end{pmatrix}.$$

On choisit pour forme normale de [A], la forme d'Hermite

$$[A_0] \quad x^4 \frac{dX}{dx} = A_0 X \quad \text{avec} \quad A_0 = \begin{pmatrix} x - x^3 & 0 \\ \frac{1}{3}(2 + 3x + 5x^2 + x^3) & 2x + x^2 \end{pmatrix},$$

et, pour solution fondamentale normale, la forme d'Hermite

$$X_0(x) = P(1/x)x^K e^{Q(1/x)}$$

définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$P(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(2/x + 1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$Q(1/x) = \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1(1/x) = -1/(2x^2) \\ q_2(1/x) = -1/x^2 - 1/x \end{cases}$$

Le système [A] admet alors une solution fondamentale formelle de la forme FX_0 où F est dans $\text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ et vérifie $F(0) = I$.

Dans cet exemple, la partie "réduction au cas séparé" de l'algorithme comporte deux étapes :

- l'élimination de la partie méromorphe $P(1/x)x^K$;
- la réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme.

Elimination de la partie méromorphe. La matrice formelle $F(x)$ est l'unique solution formelle du système

$$x^4 \frac{dF}{dx} = AF - FA_0$$

qui vérifie $F(0) = I$. On voit immédiatement par identification qu'elle est de la forme

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{3} + h_2 x^2 + \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(A ce stade, on n'a toujours besoin que d'un nombre fini de termes de F ; ce nombre est déterminé par K et le degré de P .)

En factorisant à gauche "la partie méromorphe", initialement en facteur à droite, on obtient

$$\begin{aligned} F(x)P(1/x)x^K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{3} + h_2 x^2 + \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x}) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) + x\tilde{h}(x) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \tilde{h}(x) \in \mathbb{C}[[x]] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x\tilde{h}(x) & 1 \end{pmatrix} \\ &= x^{K^1} P^1(1/x) F^1(x) \end{aligned}$$

$$\text{avec } K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^1(1/x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } F^1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^1(x) & 1 \end{pmatrix} \text{ dans } \text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]]) \text{ telle que } F^1(0) = I.$$

On élimine la partie méromorphe $P(1/x)x^K$ en effectuant les changements de fonctions inconnues

$$X \mapsto x^{K^1} P^1(1/x) X \text{ dans } [A]$$

et

$$X \mapsto P(1/x)x^K X \text{ dans } [A_0].$$

Les systèmes $[A]$ et $[A_0]$ deviennent respectivement

$$[A^1] \quad x^3 \frac{dX}{dx} = A^1 X \text{ avec } A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{3} & 2+x \end{pmatrix}$$

$$[A_0^1] \quad x^3 \frac{dX}{dx} = A_0^1 X \text{ avec } A_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2+x \end{pmatrix}$$

et leurs solutions fondamentales deviennent

$$\text{pour } [A_0^1], \quad X_0^1 = e^{Q(1/x)},$$

$$\text{pour } [A^1], \quad F^1(x)X_0^1(x) \text{ avec } F^1 \text{ dans } \text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]]) \text{ telle que } F^1(0) = I.$$

Réduction de $q_1 - q_2$ à un monôme. $q_1 - q_2$ a la même valeur que dans l'exemple 1. On effectue à nouveau le changement de variable $x = u/(1 - u)$. Les systèmes $[A^1]$ et $[A_0^1]$ deviennent respectivement

$$[A^2] \quad u^3 \frac{dX}{du} = A^2 X \quad \text{avec} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1-u & 0 \\ -\frac{u}{3} & 2-u \end{pmatrix}$$

$$[A_0^2] \quad u^3 \frac{dX}{du} = A_0^2 X \quad \text{avec} \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} 1-u & 0 \\ 0 & 2-u \end{pmatrix}$$

et leurs solutions fondamentales deviennent

pour $[A_0^2]$, $X_0^2(u) = X_0^1(u/(1-u))$, c'est-à-dire

$$X_0^2(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}} e^{q_1^2(1/u)} & 0 \\ 0 & e^{q_2^2(1/u)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1^2(1/u) = -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} \\ q_2^2(1/u) = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \end{cases}$$

pour $[A^2]$, $F^2(u)X_0^2(u)$ avec $F^2(u) = F^1(u/(1-u)) \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[[u]])$ et telle que $F^2(0) = I$.

Notons

$$\begin{aligned} F^2(u) &= \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \\ &= I + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix} u^n. \end{aligned}$$

La matrice F^2 est l'unique transformation formelle, solution du système de passage de $[A^2]$ à $[A_0^2]$

$$u^3 \frac{dF}{du} = A^2 F - A_0^2 F$$

qui vérifie $F(0) = I$. Par identification, on obtient

$$\begin{cases} f(u) = 1 \\ g(u) = 0 \\ k(u) = 1 \\ h(u) = \sum_{n \geq 0} h_n u^n \end{cases}$$

où les h_n sont déterminés par la relation de récurrence

$$h_n = (n-2)h_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2$$

à partir des conditions initiales

$$h_0 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{3}.$$

On trouve, dans cet exemple, une relation de récurrence particulièrement simple qui se résout explicitement en

$$\boxed{h_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad h_{2n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)h_1}$$

avec $h_1 = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition des invariants de Birkhoff de F . L'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ s'identifie à l'ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ où le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0)$ est le même que dans l'exemple 1 (il est construit à partir de $q_1 - q_2$ qui a la même valeur que dans l'exemple 1; cf. Figure V.2.1).

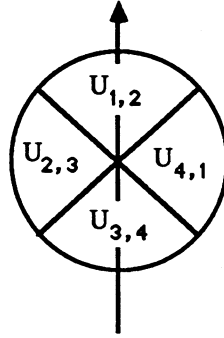


Figure V.2.1

$H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$ est naturellement un espace affine de dimension 4, de base $\tau = (\tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,4}, \tau_{4,1})$ où les cocycles élémentaires $\tau_{i,i+1}$ sont définis par

$$\tau_{1,2} = X_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + \frac{1}{3x} e^{q_1 - q_2(1/x)} \begin{pmatrix} \frac{2}{x} + 1 & 3 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x} + 1)^2 & -(\frac{2}{x} + 1) \end{pmatrix} \text{ sur } U_{1,2}$$

$$\tau_{2,3} = X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x e^{q_2 - q_1(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{2,3}$$

$$\tau_{3,4} = X_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + \frac{1}{3x} e^{q_1 - q_2(1/x)} \begin{pmatrix} \frac{2}{x} + 1 & 3 \\ -\frac{1}{3}(\frac{2}{x} + 1)^2 & -(\frac{2}{x} + 1) \end{pmatrix} \text{ sur } U_{3,4}$$

$$\tau_{4,1} = X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0^{-1} = I + x e^{q_2 - q_1(1/x)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } U_{4,1}$$

A la matrice F correspond par l'application $\exp_\mu$ un cocycle

$$c_1 \tau_{1,2} + c_2 \tau_{2,1} + c_3 \tau_{3,4} + c_4 \tau_{4,1}$$

de $H^1(\mathcal{U}(A_0); \text{St}(A_0))$. Les coefficients c_1, c_2, c_3 et c_4 sont les invariants de Birkhoff de F dont on se propose de calculer une valeur numérique approchée. En fait, ici, puisqu'on connaît F explicitement et non pas par des relations de récurrence, on obtiendra la valeur exacte de c_1, c_2, c_3 et c_4 .

Dans cet exemple à nouveau, on ne peut pas mettre en oeuvre l'algorithme avec succès directement sur les systèmes $[A]$ et $[A_0]$. On l'appliquera à $[A^2]$ et $[A_0^2]$.

L'inconvénient dû au fait que $q_1 - q_2$ n'est pas un monôme est le même que dans l'exemple 1, et il se surmonte par le changement de variable $x = u/(1 - u)$.

L'inconvénient dû à l'existence d'une partie méromorphe $P(1/x)$ apparaît dans le mélange inévitable des termes en $e^{q_1-q_2}$ et en $e^{q_2-q_1}$ dans la combinaison linéaire $c_1\tau_{1,2} + c_2\tau_{2,1} + c_3\tau_{3,4} + c_4\tau_{4,1}$.

Il n'y a pas de mélange en ce qui concerne les termes 1×2 (1re ligne, 2e colonne; termes appelés $g = \sum g_n x^n$ dans F). La méthode de calcul asymptotique par Cauchy-Heine s'applique et permet (via le changement $x = u/(1-u)$) de calculer c_1 et c_3 à partir du comportement asymptotique des coefficients g_n . (Ici, $g_n = 0$, donc $c_1 = c_3 = 0$). Mais le même calcul appliqué aux termes 2×1 (2e ligne, 1re colonne; termes appelés $h = \sum h_n x^n$ dans F) conduit à évaluer par Cauchy-Heine un mélange de termes en $c_1 \frac{1}{x} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^2 e^{q_1-q_2(1/x)}$ et $c_3 \frac{1}{x} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^2 e^{q_1-q_2(1/x)}$ d'une part, et en $c_2 x e^{q_2-q_1(1/x)}$ et $c_4 x e^{q_2-q_1(1/x)}$ d'autre part. Or la contribution asymptotique des premiers est toujours dominante par rapport à la contribution asymptotique des seconds. Tout ce qu'on peut espérer c'est donc à nouveau un calcul de c_1 et c_3 puisque c_2 et c_4 n'apparaîtront que dans les termes à négliger. D'où la nécessité de supprimer la partie méromorphe.

Base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0^2))$. Le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0^2) = \{U_1^2, U_2^2, U_3^2, U_4^2\}$ est défini dans le plan des u comme $\mathcal{U}(A_0)$ dans le plan x (cf. Figure V.2.2).

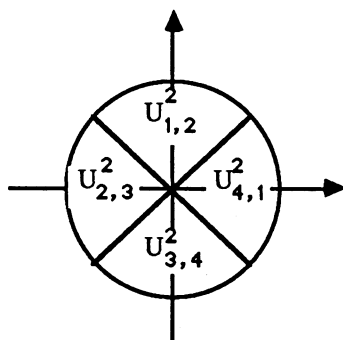


Figure V.2.2

On y choisit pour base de $H^1(\mathcal{U}(A_0^2); \text{St}(A_0^2))$ la famille

$$\tau^2 = (\tau_{1,2}^2, \tau_{2,3}^2, \tau_{3,4}^2, \tau_{4,1}^2)$$

définie à partir de X_0^2 comme τ à partir de X_0 , ce qui donne

$$\tau_{1,2}^2(u) = \begin{cases} I + \frac{1}{\sqrt{e}} e^{1/(2u^2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{1,2}^2 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{2,3}^2 = \begin{cases} I + \sqrt{e} e^{-1/(2u^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{2,3}^2 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{3,4}^2(u) = \begin{cases} I + \frac{1}{\sqrt{e}} e^{1/(2u^2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{3,4}^2 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{4,1}^2 = \begin{cases} I + \sqrt{e} e^{-1/(2u^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{4,1}^2 \\ I & \text{sur les autres } U_{i,i+1}^2 \end{cases}$$

On a bien $q_1^2 - q_2^2(1/u) = 1/(2u^2)$ sous forme de monôme et on n'a plus le mélange des termes qu'on avait dans la base τ .

A la matrice F^2 est associé, par $\exp_\mu$, le cocycle $c_1\tau_{1,2}^2 + c_2\tau_{2,3}^2 + c_3\tau_{3,4}^2 + c_4\tau_{4,1}^2$ où les c_i sont les invariants de Birkhoff de F qu'on cherche à évaluer (Proposition III.3). On peut donc appliquer l'algorithme à F^2 dans la base τ^2 .

Coefficients de Cauchy-Heine associés à F^2 . Ce sont

$$\begin{aligned} \text{CH}_{1,2}^2(n) &= \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} \int_0^{e^{i\pi/2}\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} e^{1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{CH}_{2,3}^2(n) &= \frac{\sqrt{e}}{2i\pi} \int_0^{e^{i\pi}\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} e^{-1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{CH}_{3,4}^2(n) &= \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} \int_0^{e^{3i\pi/2}\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} e^{1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{CH}_{4,1}^2(n) &= \frac{\sqrt{e}}{2i\pi} \int_0^{e^{2i\pi}\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} e^{-1/(2\xi^2)} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Constatons encore la séparation de $c_1 \text{CH}_{1,2}^2(n) + c_3 \text{CH}_{3,4}^2(n)$ et de $c_2 \text{CH}_{2,3}^2(n) + c_4 \text{CH}_{4,1}^2(n)$ en un terme en 1re ligne et 2e colonne d'une part et un terme en 2e ligne et 1re colonne d'autre part; et rappelons que ce scindage est dû à l'absence de partie méromorphe même constante dans X_0^2 .

Calcul de c_1 et de c_3 . On a

$$\text{pp}(\text{CH}_{1,2}^2(n)) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{e}} 2^{(n/2)-1} e^{-ni\pi/2} \Gamma(n/2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{pp}(\text{CH}_{3,4}^2(n)) = (-1)^n \text{pp}(\text{CH}_{1,2}^2(n)) .$$

La forme de cette deuxième relation est essentielle pour la suite du calcul. Rappelons qu'elle est due au fait que $q_1^2 - q_2^2(1/u)$ est un monôme. C'est

elle qui permet, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs, de scinder l'égalité

$$pp(c_1 CH_{1,2}^2(n) + c_3 CH_{3,4}^2(n)) = pp \begin{pmatrix} 0 & g_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en deux équations formant, pour déterminer c_1 et c_3 , le système de Cramer

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = \mathcal{G}_0 \\ c_1 - c_3 = \mathcal{G}_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{G}_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} G_{2m} \\ \mathcal{G}_1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} G_{2m+1} \end{cases}$$

avec $G_n = 2i\pi \sqrt{e} 2^{-(n/2)+1} e^{ni\pi/2} \Gamma(n/2)^{-1} g_n$.

Or, le coefficient $g = \sum_{n \geq 1} g_n u^n$ de F^2 est nul. On a donc $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1 = 0$ et donc

$$\boxed{c_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_3 = 0}.$$

Calcul de c_2 et de c_4 . On a

$$pp(CH_{2,3}^2(n)) = \frac{(-1)^n}{2i\pi} \sqrt{e} 2^{(n/2)-1} \Gamma(n/2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$pp(CH_{4,1}^2(n)) = (-1)^n pp(CH_{2,3}^2(n)).$$

Cette deuxième relation étant elle aussi une conséquence du fait que $q_1^2 - q_2^2(1/u)$ est un monôme.

L'égalité $pp(c_2 CH_{2,3}^2(n) + c_4 CH_{4,1}^2(n)) = pp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_n & 0 \end{pmatrix}$ fournit le système de Cramer

$$\begin{cases} c_2 + c_4 = \mathcal{H}_0 \\ -c_2 + c_4 = \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{2m} \\ \mathcal{H}_1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{2m+1} \end{cases}$$

avec $H_n = \frac{2i\pi}{\sqrt{e}} 2^{-(n/2)+1} \Gamma(n/2)^{-1} h_n$.

Or le coefficient $h = \sum_{n \geq 1} h_n u^n$ de F^2 est donné par $h_{2m} = 0$ et $h_{2m+1} = 1.3.5 \dots (2m-3)(2m-1) \cdot \frac{1}{3}$. Mais $2^m \Gamma(m+1/2) = 1.3.5 \dots (2m-3)(2m-1) \Gamma(1/2)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; d'où $\mathcal{H}_0 = 0$ et $\mathcal{H}_1 = \frac{2i}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}$, et donc

$$\boxed{c_2 = -\frac{i}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \quad \text{et} \quad c_4 = \frac{i}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}}.$$

Invariants analytiques de $[A]$. Le groupe d'isotropie G_0 de $[A_0]$ se calcule comme dans I.8, Exemple 2. C'est le groupe trivial $G_0 = \mathbb{C}^* I$. Les invariants analytiques de $[A]$ sont donc les invariants de Birkhoff (c_1, c_2, c_3, c_4) de $[A]$ définis à un coefficient de proportionnalité près. Un représentant est donné par la famille

$$\boxed{(0, -1, 0, +1)}.$$

V.3. Exemple 3

Cet exemple est un exemple avec ramification. Il n'a ni monodromie ni partie méromorphe et $q_1 - q_2$ est réduit à un monôme.

On se propose d'évaluer l'unique invariant de Birkhoff du système

$$[A] \quad x^2 \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x & 2x \end{pmatrix}$$

en choisissant pour forme normale, la forme d'Hermite

$$[A_0] \quad x^2 \frac{dX}{dx} = A_0 X \quad \text{avec} \quad A_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 2x \end{pmatrix}$$

et pour solution fondamentale normale, la solution d'Hermite

$$X_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1(1/x) & 0 \\ 0 & q_2(1/x) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} q_1(1/x) = \frac{-1}{2x^{1/2}} \\ q_2(1/x) = \frac{1}{2x^{1/2}} \end{cases}$$

définie sans ambiguïté sur la surface de Riemann du logarithme.

Le système [A] admet alors une solution fondamentale formelle de la forme $F(x)X_0(x)$ où $F \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[[x]])$ et $F(0) = I$.

Eclatement $x = t^2$. Par l'éclatement $x = t^2$, [A], [A₀] et X_0 se transforment en

$$[A^1] \quad t^3 \frac{dX}{dt} = A^1 X \quad \text{avec} \quad A^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^4 & 1 \\ t^2 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$[A_0^1] \quad t^3 \frac{dX}{dt} = A_0^1 X \quad \text{avec} \quad A_0^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad X_0^1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1/(2t)} & 0 \\ 0 & e^{+1/(2t)} \end{pmatrix}.$$

Le système [A¹] admet alors une solution fondamentale de la forme $F^1 X_0^1$ où F^1 est une matrice paire de t ($F \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[[t^2]])$) telle que $F^1(0) = I$.

Dans cet exemple, la partie "réduction au cas séparé" de l'algorithme se réduit à l'élimination de la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (cf. III.2).

Elimination de la matrice U (cf. III.2). On effectue les changements de fonctions inconnues

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 2t & -1 \end{pmatrix} X \text{ dans } [A^1] \text{ et } X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ t & -1 \end{pmatrix} X \text{ dans } [A_0^1].$$

Les systèmes $[A^1]$ et $[A_0^1]$ deviennent

$$[A^2] \quad t^2 \frac{dX}{dt} = A^2 X \quad \text{avec} \quad A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 2t & -1 + 2t + t^3 \end{pmatrix}$$

$$[A_0^2] \quad t^2 \frac{dX}{dt} = A_0^2 X \quad \text{avec} \quad A_0^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + 2t \end{pmatrix}$$

et leurs solutions fondamentales deviennent respectivement

$$— \text{ pour } [A_0^2]: X_0^2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} q_1^2(1/t) & 0 \\ 0 & q_2^2(1/t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} q_1^2(1/t) = \frac{-1}{2t} \\ q_2^2(1/t) = \frac{1}{2t} \end{cases}$$

$$— \text{ pour } [A^2]: F^2(t)X_0^2(t),$$

où $F^2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/t \\ 2t & -1 \end{pmatrix}^{-1} F^1(t) \begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ t & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $GL(2, \mathbb{C}[[t]])$ qui vérifie $F^2(0) = I$, mais qui n'a plus de raison d'être paire comme F^1 (la constante γ du lemme III.2 est nulle).

Détermination de F^2 . Notons

$$\begin{aligned} F^2(t) &= \begin{pmatrix} f^2 & g^2 \\ h^2 & k^2 \end{pmatrix} \\ &= I + \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix} t^n. \end{aligned}$$

F^2 est l'unique transformation formelle, solution du système de passage de $[A^2]$ à $[A_0^2]$

$$t^2 \frac{dF}{dt} = A^2 F - F A_0^2$$

qui vérifie $F^2(0) = I$.

Par identification, on obtient, pour déterminer g et h , les relations de récurrence avec conditions initiales suivantes :

$$\boxed{4(n-2)g_n = 4n(n-2)g_{n-1} + g_{n-2} - 2(n-2)g_{n-3}} \quad (n \geq 3)$$

avec

$$g_0 = 0 \quad , \quad g_1 = 0 \quad , \quad g_2 = -\frac{1}{4}$$

et

$$4(n-1)h_n = -4(n-1)(n-2)h_{n-1} + h_{n-2} + 2(n-1)h_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

avec

$$h_0 = 0 \quad , \quad h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = 0 \quad .$$

Base de $H^1(S^1; \text{St}(A_0^2))$ et invariant de Birkhoff de F . On a $q_1^2 - q_2^2(1/t) = -1/t$. La fonction $e^{q_1^2 - q_2^2(1/t)}$ admet donc pour secteur de décroissance le demi-plan $\text{Re}(t) > 0$.

Le recouvrement fondamental $\mathcal{U}(A_0^2)$ associé à $[A_0^2]$ est défini par $\mathcal{U}(A_0^2) = \{U_1^2, U_2^2\}$ avec

$$U_1^2 = \{t \in \mathbb{C} \mid \arg t \neq -\pi/2\}$$

$$U_2^2 = \{t \in \mathbb{C} \mid \arg t \neq +\pi/2\} .$$

(Cf. Figure V.3)

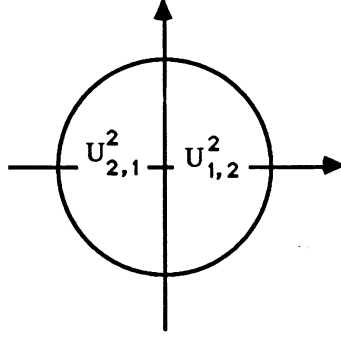


Figure V.3

On notera ici

$$U_{1,2}^2 = \{t \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \arg t < +\pi/2\}$$

$$\text{et } U_{2,1}^2 = \{t \in \mathbb{C} \mid +\pi/2 < \arg t < 3\pi/2\}$$

les deux composantes connexes de $U_1^2 \cap U_2^2$ (on adapte les notations habituelles faute d'un nombre suffisant d'ouverts dans $\mathcal{U}(A_0^2)$).

L'ensemble de cohomologie $H^1(S^1; \text{St}(A_0^2))$ est isomorphe à l'ensemble de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U}(A_0^2); \text{St}(A_0^2))$ qui est naturellement un espace affine de dimension deux, de base $\tau^2 = (\tau_{1,2}^2, \tau_{2,1}^2)$ donnée par

$$\tau_{1,2}^2 = \begin{cases} X_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (X_0^2)^{-1} = I + \begin{pmatrix} 0 & (1/t)e^{-1/t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{1,2}^2 \\ I & \text{sur } U_{2,1}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{2,1}^2 = \begin{cases} I & \text{sur } U_{1,2}^2 \\ X_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (X_0^2)^{-1} = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ te^{1/t} & 0 \end{pmatrix} & \text{sur } U_{2,1}^2 \end{cases}$$

Soit τ l'unique générateur de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$ qui induit les deux générateurs de la base τ^2 par l'éclatement $x = t^2$ (et les transformations d'élimination de U). A la matrice F correspond par l'application $\exp_\mu$ un cocycle $c\tau$ de $H^1(S^1; \text{St}(A_0))$. *Ce coefficient est l'unique invariant de Birkhoff de F qu'on se propose d'évaluer numériquement.*

Le système $[A^2]$, comme système de la variable t , admet deux invariants c_1 et c_2 définis par

$$\exp_\mu(F^2) = c_1\tau_{1,2}^2 + c_2\tau_{2,1}^2 \in H^1(\mathcal{U}(A_0^2); \text{St}(A_0^2))$$

Mais $[A^2]$ et $[A_0^2]$ provenant de $[A]$ et de $[A_0]$ par un éclatement $x = t^2$, on sait que nécessairement $c_1 = c_2$ (cf. II.2.4). En outre, vue la correspondance entre les bases τ et τ^2 , on a $c = c_1 = c_2$.

On obtient donc ici deux procédés de calcul de c , l'un consistant à évaluer la valeur de c_1 (ce qui se fait à partir de la suite (g_n)), l'autre la valeur de c_2 (ce qui se fait à partir de la suite (h_n)). Naturellement, un seul des deux calculs suffit. Nous allons cependant les réaliser tous les deux afin de pouvoir "constater" l'égalité $c_1 = c_2$.

Coefficients de Cauchy-Heine associés à F^2 . Ce sont

$$\begin{aligned} \text{CH}_{1,2}^2(n) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} \frac{1}{\xi} e^{-1/\xi} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{CH}_{2,1}^2(n) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{-\infty} \frac{1}{\xi^{n+1}} \xi e^{1/\xi} d\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{CH}_{1,2}^2(n) = \frac{1}{2i\pi} \Gamma(n+1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{CH}_{2,1}^2(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i\pi} \Gamma(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Calcul de $c = c_1$. La relation $\text{pp}(c_1 \text{CH}_{1,2}^2(n)) = \text{pp} \begin{pmatrix} 0 & g_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'écrit

$$(c_1/2i\pi) \Gamma(n+1) = g_n + o(n),$$

Chapitre VI

$n :$	$G_n :$	$H_n :$	$n :$	$G_n :$	$H_n :$
2	-0.1250000000	0.0001000000	15000	-0.1249990438	-0.1250073251
3	-0.1250000000	0.1250000000	15250	-0.1249990438	-0.1250073251
4	-0.1263020833	-0.1250000000	15500	-0.1249990438	-0.1250073251
250	-0.1249992947	-0.1250075822	15750	-0.1249990438	-0.1250073251
500	-0.1249991063	-0.1250073884	16000	-0.1249990438	-0.1250073251
750	-0.1249990715	-0.1250073531	16250	-0.1249990438	-0.1250073251
1000	-0.1249990593	-0.1250073407	16500	-0.1249990438	-0.1250073251
1250	-0.1249990537	-0.1250073351	16750	-0.1249990438	-0.1250073251
1500	-0.1249990507	-0.1250073320	17000	-0.1249990438	-0.1250073251
1750	-0.1249990488	-0.1250073301	17250	-0.1249990438	-0.1250073251
2000	-0.1249990476	-0.1250073289	17500	-0.1249990438	-0.1250073251
2250	-0.1249990468	-0.1250073281	17750	-0.1249990438	-0.1250073251
2500	-0.1249990462	-0.1250073275	18000	-0.1249990438	-0.1250073251
2750	-0.1249990458	-0.1250073271	18250	-0.1249990438	-0.1250073251
3000	-0.1249990454	-0.1250073268	18500	-0.1249990438	-0.1250073251
3250	-0.1249990452	-0.1250073265	18750	-0.1249990438	-0.1250073251
3500	-0.1249990450	-0.1250073263	19000	-0.1249990437	-0.1250073251
3750	-0.1249990448	-0.1250073261	19250	-0.1249990437	-0.1250073251
4000	-0.1249990447	-0.1250073260	19500	-0.1249990437	-0.1250073251
4250	-0.1249990446	-0.1250073259	19750	-0.1249990437	-0.1250073251
4500	-0.1249990445	-0.1250073258	20000	-0.1249990437	-0.1250073251
4750	-0.1249990444	-0.1250073257	20250	-0.1249990437	-0.1250073250
5000	-0.1249990443	-0.1250073256	20500	-0.1249990437	-0.1250073250
5250	-0.1249990443	-0.1250073256	20750	-0.1249990437	-0.1250073250
5500	-0.1249990442	-0.1250073255	21000	-0.1249990437	-0.1250073250
5750	-0.1249990442	-0.1250073255	21250	-0.1249990437	-0.1250073250
6000	-0.1249990441	-0.1250073254	21500	-0.1249990437	-0.1250073250
6250	-0.1249990441	-0.1250073254	21750	-0.1249990437	-0.1250073250
6500	-0.1249990441	-0.1250073254	22000	-0.1249990437	-0.1250073250
6750	-0.1249990440	-0.1250073254	22250	-0.1249990437	-0.1250073250
7000	-0.1249990440	-0.1250073253	22500	-0.1249990437	-0.1250073250
7250	-0.1249990440	-0.1250073253	22750	-0.1249990437	-0.1250073250
7500	-0.1249990440	-0.1250073253	23000	-0.1249990437	-0.1250073250
7750	-0.1249990440	-0.1250073253	23250	-0.1249990437	-0.1250073250
8000	-0.1249990440	-0.1250073253	23500	-0.1249990437	-0.1250073250
8250	-0.1249990439	-0.1250073252	23750	-0.1249990437	-0.1250073250
8500	-0.1249990439	-0.1250073252	24000	-0.1249990437	-0.1250073250
8750	-0.1249990439	-0.1250073252	24250	-0.1249990437	-0.1250073250
9000	-0.1249990439	-0.1250073252	24500	-0.1249990437	-0.1250073250
9250	-0.1249990439	-0.1250073252	24750	-0.1249990437	-0.1250073250
9500	-0.1249990439	-0.1250073252	25000	-0.1249990437	-0.1250073250
9750	-0.1249990439	-0.1250073252	25250	-0.1249990437	-0.1250073250
10000	-0.1249990439	-0.1250073252	25500	-0.1249990437	-0.1250073250
10250	-0.1249990439	-0.1250073252	25750	-0.1249990437	-0.1250073250
10500	-0.1249990438	-0.1250073252	26000	-0.1249990437	-0.1250073250
10750	-0.1249990438	-0.1250073251	26250	-0.1249990437	-0.1250073250
11000	-0.1249990438	-0.1250073251	26500	-0.1249990437	-0.1250073250
11250	-0.1249990438	-0.1250073251	26750	-0.1249990437	-0.1250073250
11500	-0.1249990438	-0.1250073251	27000	-0.1249990437	-0.1250073250
11750	-0.1249990438	-0.1250073251	27250	-0.1249990437	-0.1250073250
12000	-0.1249990438	-0.1250073251	27500	-0.1249990437	-0.1250073250
12250	-0.1249990438	-0.1250073251	27750	-0.1249990437	-0.1250073250
12500	-0.1249990438	-0.1250073251	28000	-0.1249990437	-0.1250073250
12750	-0.1249990438	-0.1250073251	28250	-0.1249990437	-0.1250073250
13000	-0.1249990438	-0.1250073251	28500	-0.1249990437	-0.1250073250
13250	-0.1249990438	-0.1250073251	28750	-0.1249990437	-0.1250073250
13500	-0.1249990438	-0.1250073251	29000	-0.1249990437	-0.1250073250
13750	-0.1249990438	-0.1250073251	29250	-0.1249990437	-0.1250073250
14000	-0.1249990438	-0.1250073251	29500	-0.1249990437	-0.1250073250
14250	-0.1249990438	-0.1250073251	29750	-0.1249990437	-0.1250073250
14500	-0.1249990438	-0.1250073251	30000	-0.1249990437	-0.1250073250
14750	-0.1249990438	-0.1250073251			

Table de Convergence C

Liste des valeurs numériques des suites G_n et H_n définies par récurrence en V.3. Leur limite commune $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ permet de calculer l'unique invariant de Birkhoff $c \simeq -i\pi/4$ de l'exemple V.3.

ce qui donne

$$\boxed{c_1 = 2i\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n} \quad \text{avec} \quad \boxed{G_n = \frac{g_n}{\Gamma(n+1)}}$$

(Ici la suite G_n elle-même admet une limite puisqu'on est dans le cas où on doit prendre les sous-suites des termes de ν en ν avec $\nu = 1$ ($\nu = d^0(q_1^2 - q_2^2)$)).

Par ailleurs, des relations définissant g_n , on obtient que la suite G_n est définie par la relation de récurrence avec conditions initiales suivantes :

$$\boxed{G_n = G_{n-1} + \frac{1}{4n(n-1)(n-2)}G_{n-2} - \frac{1}{2n(n-1)(n-2)}G_{n-3}} \quad (n \geq 3)$$

avec $\boxed{G_0 = 0 \quad , \quad G_1 = 0 \quad , \quad G_2 = -\frac{1}{8}} \quad .$

Calcul de $c = c_2$. La relation $\text{pp}(c_2 \text{CH}_{2,1}^2(n)) = \text{pp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_n & 0 \end{pmatrix}$ s'écrit

$$c_2((-1)^{n+1}/2i\pi)\Gamma(n-1) = h_n + o(n) \quad ,$$

ce qui donne

$$\boxed{c_2 = 2i\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_n = \frac{(-1)^{n+1}h_n}{\Gamma(n-1)}} \quad .$$

Par ailleurs, des relations définissant (h_n) , on obtient que la suite (H_n) est définie par la relation de récurrence avec conditions initiales suivantes ($n \geq 5$) :

$$\boxed{H_n = H_{n-1} + \frac{1}{4(n-1)(n-2)(n-3)}H_{n-2} - \frac{1}{2(n-2)(n-3)(n-4)}H_{n-3}}$$

avec $\boxed{H_2 = 0 \quad , \quad H_3 = \frac{1}{8} \quad , \quad H_4 = -\frac{1}{8}} \quad .$

Une programmation sommaire, sans évaluation d'erreurs, a donné les résultats consignés dans la table C.

On constate "l'égalité" de c_1 et de c_2 . On en déduit pour valeur approchée de l'unique invariant de Birkhoff de F

$$\boxed{c \simeq -i\frac{\pi}{4}} \quad .$$

Invariants analytiques de $[A]$. Le groupe d'isotropie G_0 de $[A_0]$ est le groupe trivial $G_0 = \mathbb{C}^*I$. L'unique invariant analytique de $[A]$ vaut donc 1 à coefficient d'homogénéité près.

Bibliographie

- [BV] BABBITT D.G., VARADARAJAN V.S., *Local moduli for meromorphic differential equations, I, the Stokes sheaf and its cohomology*, Preprint (cf. Bull. AMS, vol. 12, n°1, 1985, 95-98).
- [E] ECALLE J., *Les fonctions résurgentes, tome III; L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publications Mathématiques d'Orsay, 85-05.
- [F] FRENKEL J., *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Thèse 22 décembre 1956, Gauthier-Villars, série A n°2963, n°d'ordre 3835.
- [Hu] HUKUHARA M., *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires III*, Mem. Fac. Sci. Kyushu University 2 (1942), 125-137.
- [J] JURKAT W.B., *Meromorphe Differentialgleichungen*, Lecture Notes in Math. n°637, Springer Verlag.
- [JPL1] JURKAT W., LUTZ D., PEYERIMHOFF A., *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations I*, J. Math. Anal. Appl., vol.53 (1976), 438-470.
- [JPL2] JURKAT W., LUTZ D., PEYERIMHOFF A., *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations II*, Houston J. Math., vol.2, n°2 (1976), 207-238.
- [L] LUTZ D.A., *Birkhoff invariants and meromorphic differential equations*, in *Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe* (R. GERARD et J.-P. RAMIS), Lecture Notes in Math. n°712, 66-76, Springer-Verlag.
- [M1] MALGRANGE B., *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers*, in *Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe* (R. GERARD et J.-P. RAMIS), Lecture Notes in Math. n°712, 77-86, Springer-Verlag.
- [M2] MALGRANGE B., *La classification des connexions irrégulières à une variable*, Mathématique et physique. Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure (Paris 1979-82), Progress in Mathematics, vol.37, 381-399, Birkhäuser, 1983.
- [MR] MARTINET J., RAMIS J.-P., *Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications Math. de l'I.H.E.S., n°55 (1982), 63-164.
- [RS] RAMIS J.-P., SIBUYA Y., *Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorem for asymptotic solutions*, Preprint IRMA Strasbourg, France et University of Minnesota (Minneapolis, 55455 USA).
- [T] TOURNIER E., *Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel :DESIR. Etude théorique et réalisation*. Thèse 2 avril 1987, Université scientifique, technologique et médicale de Grenoble.
- [W] WASOW W., *Asymptotic expansions of ordinary differential equations*, Interscience (1965), R.E.Krieger Publ. Co (1976).

Chapitre VII. Méthode infinitésimale : cas général

Nous reprenons les notations et conventions fixées ci-dessus en V.2 et nous essayons d'étendre la méthode précédente en dimension $n \geq 3$.

La partie algébrique de réduction au cas séparé se généralise sans difficulté à ceci près qu'on ne peut en général rendre monômial qu'un seul polynôme $q_j - q_\ell$ (et son opposé $q_\ell - q_j$) à la fois. Nous la reprenons ci-dessous en dimension quelconque et nous dégageons l'algorithme correspondant.

La partie asymptotique de calcul effectif est plus délicate par suite de la restriction précédente. Elle ne se généralise pas au calcul de tous les invariants.

1. Réduction au cas séparé. Algorithme

DÉFINITION VII.1. On dit qu'une solution d'Hermite X est (j_0, ℓ_0) -séparée si elle est de la forme

$$X = Z(x)x^J e^{Q(\frac{1}{x})} \quad \text{où } Z \in GL_I(n, \mathbb{C}\{x\}) ;$$

J est une matrice d'exposants de monodromie sous forme de Jordan réduite

et $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ vérifie les deux conditions suivantes

- i) Les q_j , $j = 1, \dots, n$, sont des vrais polynômes non ramifiés ($q_j(\frac{1}{x}) \in \frac{1}{x}\mathbb{C}[\frac{1}{x}]$),
- ii) Le polynôme $q_{j_0} - q_{\ell_0}$ est un monôme.

Une forme d'Hermite (j_0, ℓ_0) -séparée n'est pas une forme normale d'Hermite au sens strict de la définition I.4 lorsque $Z \neq I$, mais elle appartient à la classe de Birkhoff analytique d'une forme normale d'Hermite et elle peut sans inconvénient être choisie comme forme normale de référence. On la notera de même X_0 .

PROPOSITION VII.2. Si X_0 est (j_0, ℓ_0) -séparée, le groupe des isotropies de Birkhoff de $[A_0 = X_0' X_0^{-1}]$ est trivial.

DÉMONSTRATION : Notons $X_0 = Z(x)x^J e^Q$ et supposons que T soit une isotropie de Birkhoff de $[A_0]$; alors TX_0 est une solution de $[A_0]$ et il existe donc une matrice constante inversible C telle que $TX_0 = X_0 C$. Mais nécessairement ([Jur78] Satz II), C commute avec Q et J , et donc on a $T = ZCZ^{-1}$. En particulier, $T(0) = C$. La condition $T(0) = I$ entraîne $C = I$ et par suite $T = I$.

PROPOSITION VII.3. Soit $[A]$ un système de forme normale $[A_0]$. On note X_0 la solution normale d'Hermite de $[A_0]$ conforme aux conventions fixées et $\widehat{F}$ une transformation de Birkhoff de $[A_0]$ en $[A]$.

Fixons un couple d'indice (j_0, ℓ_0) , $1 \leq j_0 \neq \ell_0 \leq n$. Alors on peut, par un algorithme algébrique fini, construire à partir du couple $([A], [A_0])$ un couple $([B], [B_0])$ tel que

i) $[B_0]$ admet une solution d'Hermite (j_0, ℓ_0) -séparée

$$Y_0 = Z(x)x^J e^{Q(\frac{1}{x})} ,$$

ii) $[B]$ appartient à la classe de Birkhoff formelle de $[B_0]$ et l'unique transformation de Birkhoff de $[B_0]$ en $[B]$ admet dans la base "canonique" construite sur Y_0 un système d'invariants de Birkhoff équivalent à celui de $\widehat{F}$ dans la base "canonique" construite sur X_0 (cf. Déf. V.9).

La démonstration et l'algorithme s'obtiennent par application successive des lemmes ci-dessous.

Précisons d'abord ce que devient la base "canonique" $\mathfrak{T}_{X_0, \theta_0}$ dans un éclatement $x = t^p$ d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Notons comme en III.3 $X_0^{*p}(t) = X_0(t^p)$ et $\widehat{F}^{*p}(t) = \widehat{F}(t^p)$ les transformées de X_0 et de $\widehat{F}$ par l'éclatement $x = t^p$ et soit $[A_0^{*p}]$ le système qui admet X_0^{*p} comme solution. Choisissons comme domaine principal de variation de l'argument pour le système $[A_0^{*p}]$ l'intervalle $[\theta_0^{*p}, \theta_0^{*p} + 2\pi[$ avec $\theta_0^{*p} = \theta_0/p$.

L'ensemble des directions anti-Stokes $\mathcal{A}^{*p}$ de $[A_0^{*p}]$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariant :

$$\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0} \Leftrightarrow (\tilde{\alpha} + 2k\pi)/p \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0^{*p}} \text{ pour } k = 0, 1, \dots, p-1$$

et la base "canonique" $\mathfrak{T}_{X_0^{*p}, \theta_0^{*p}}$ de $H^1(S^1; \Lambda(A_0^{*p}))$ est reliée à celle $\mathfrak{T}_{X_0, \theta_0}$ de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ par les relations :

$$(VII.4) \quad \tau_{(j, \ell); (\tilde{\alpha} + 2h\pi)/p}^{*p}(t) = \widehat{M}_{X_0}^{-h} \tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}}(t^p e^{-2i\pi h}) \widehat{M}_{X_0}^h$$

pour tout $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0}$, $(j, \ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}$ et $h = 0, 1, \dots, p-1$. En particulier, pour $h = 0$, on a

$$(VII.5) \quad \tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}/p}^{*p}(t) = \tau_{(j, \ell); \tilde{\alpha}}(t^p) .$$

LEMME VII.6 Suppression des ramifications. Les invariants de Birkhoff $c_{(j, \ell); \tilde{\alpha}}$ de $\widehat{F}(x)$ dans la base $\mathfrak{T}_{x_0, \theta_0}$ sont reliés à ceux $c_{(j, \ell); \tilde{\alpha}^{*p}}^{*p}$ de $\widehat{F}^{*p}(t) = \widehat{F}(t^p)$ dans la base $\mathfrak{T}_{X_0^{*p}, \theta_0^{*p}}$ où $X_0^{*p} = X_0(t^p)$ et $\theta_0^{*p} = \theta_0/p$, par les relations

$$c_{(j, \ell); \tilde{\alpha}} = c_{(j, \ell); \tilde{\alpha}/p}^{*p} \text{ pour tout } \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\theta_0} \text{ et tout } (j, \ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}$$

En outre, la 1-cochaîne fondamentale de $\widehat{F}^{*p}$ étant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariante, les autres coefficients de Birkhoff de $\widehat{F}^{*p}$ sont déterminés à partir des précédents ci-dessus par les relations : Pour tout h fixé on a

$$\sum_{(j,\ell)\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p} c_{(j,\ell);(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p}^{*p} \tau_{(j,\ell);(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p}^{*p}(t) \\ = \sum_{(j,\ell)\mathcal{E}\widetilde{\alpha}/p} c_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p} \tau_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p}(te^{-2i\pi h/p}) ,$$

relation qu'on peut écrire de façons équivalentes

$$\sum_{(j,\ell)\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p} c_{(j,\ell);(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p}^{*p} \tau_{(j,\ell);(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p}^{*p}(t) \\ = \sum_{(j,\ell)\mathcal{E}\widetilde{\alpha}/p} c_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p} \widehat{M}_{X_0}^h \tau_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p}(t) \widehat{M}_{X_0}^{-h}$$

ou

$$\sum_{(j,\ell)\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p} c_{(j,\ell);(\widetilde{\alpha}+2\pi h)/p}^{*p} \widehat{M}_{X_0}^{-h} \tau_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p}(t) \widehat{M}_{X_0}^h \\ = \sum_{(j,\ell)\mathcal{E}\widetilde{\alpha}/p} c_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p} \tau_{(j,\ell);\widetilde{\alpha}/p}^{*p}(t) .$$

Ainsi, il revient au même de calculer les invariants de Birkhoff de $\widehat{F}$ ou ceux de $\widehat{F}^{*p}$. Plus précisément, on obtient les invariants de Birkhoff de $\widehat{F}$ en calculant les N premiers parmi les pN invariants de Birkhoff de $\widehat{F}^{*p}$, et tous les invariants de Birkhoff de $\widehat{F}^{*p}$ s'en déduisent.

DÉFINITION VII.7. Nous disons dans ce cas que les **systèmes d'invariants de Birkhoff** de $\widehat{F}$ et de $\widehat{F}^{*p}$ sont **équivalents**.

LEMME VII.8. Soit $J_{s,p} = \bigoplus_{j=0}^{p-1} (J_s + \frac{j}{p} I_s)$ l'un des blocs de J dans la forme d'Hermite $X_0 = Px^K x^J U e^Q$ et soit $U_{s,p}$ le bloc correspondant dans U (Cf. théorème I.3).

Alors le produit $x^{J_{s,p}} U_{s,p} x^{-J_{s,p}}$ est méromorphe en la variable $t = x^{1/p}$, c'est-à-dire la matrice $V(t) = t^{pJ_{s,p}} U_{s,p} t^{-pJ_{s,p}}$ est méromorphe en t .

DÉMONSTRATION : Le facteur $x^{\oplus J_s}$ commute avec $U_{s,p}$ et le facteur $x^{\oplus \frac{j}{p} I_s}$ est ramifié d'ordre p . $\square$

LEMME VII.9. Soit $\hat{H} \in GL(n, \mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$.

Alors, il existe deux factorisations de $\hat{H}$ en

$$\hat{H} = \hat{F}^* R^* x^{K^*} \quad \text{et} \quad \hat{H} = x^K R \hat{F}$$

où

$$\hat{F}^* \text{ et } \hat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]]),$$

K^* et K sont diagonales à coefficients entiers ($\in \mathbb{Z}$),

$R^* = R_0^* R_1^*$ et $R = R_1 R_0$ avec R_0^* et R_0 matrices constantes inversibles et R_1^* et R_1 matrices triangulaires dont la diagonale est l'identité et dont les coefficients sont des polynômes en $1/x$ sans termes constants.

En outre, ces factorisations sont uniques si on impose à R_1^* et à R_1 la forme triangulaire supérieure (ou inférieure).

DÉMONSTRATION : Les deux factorisations sont duales l'une de l'autre et elles s'obtiennent par la méthode du pivot : on multiplie $\hat{H}$ par des matrices élémentaires à coefficients séries formelles à gauche pour obtenir $R^* x^{K^*}$ et à droite pour obtenir $x^K R$.

UNICITÉ : Supposons que $x^K R_1 R_0 \hat{F} = x^{K'} R'_1 R'_0 \hat{F}'$ avec $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ et $K' = \text{diag}(k'_1, \dots, k'_n)$.

Alors, $R'_0 \hat{F}' \hat{F}^{-1} R_0^{-1} = R'_1{}^{-1} x^{K-K'} R_1 = x^{K-K'} I + N$ avec N triangulaire et nilpotente. Or la matrice $R'_0 \hat{F}' \hat{F}^{-1} R_0^{-1}$, et donc en particulier sa diagonale, est à coefficients séries formelles. Donc $kj \geq k'j$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et par symétrie $K = K'$. Alors en identifiant les termes constants on obtient $R_0 = R'_0$ puis $N = 0$ et $\hat{F} = \hat{F}'$. $\square$

LEMME VII.10. Soit (j, ℓ) un couple d'indices tel que le polynôme $q_j - q_\ell$ soit non ramifié de degré $k > 0$. Notons

$$(q_j - q_\ell)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^k} + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \dots + \frac{b_{k-1}}{x} \quad .$$

Il existe un changement de variable tangent à l'identité

$$x = \frac{u}{1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{k-1} u^{k-1}} \quad , \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$$

tel que la fonction $(q_j - q_\ell)\left(\frac{1}{x(u)}\right)$ ait pour partie polaire $(Q_j - Q_\ell)\left(\frac{1}{u}\right)$ en 0 le monôme

$$(Q_j - Q_\ell)\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{a}{u^k} \quad .$$

DÉMONSTRATION : Les relations d'identification de la partie polaire de $(q_j - q_\ell)\left(\frac{1}{x(u)}\right)$ à $\frac{a}{u^k}$ forment un système linéaire triangulaire admettant une solution unique en $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ (cf. [L-R90] lemme III.3). $\square$

PROPOSITION VII.11. Algorithme de réduction à la forme séparée.

Données Un système $[A]$ et une de ses formes normales d'Hermite $[A_0]$.

Une transformation de Birkhoff $\hat{F}$ de $[A_0]$ en $[A]$ déterminée par un nombre fini de conditions initiales (les isotopies de $[A_0]$ sont polynômiales de degré borné).

Un couple d'indices (j_0, ℓ_0) , $1 \leq j_0 \neq \ell_0 \leq n$.

Algorithme

1) Déterminer la solution normale d'Hermite

$$X_0(x) = P(x)x^K x^J U e^{Q(1/x)}$$

conforme aux conditions adoptées (elle est calculable par exemple par le code DESIR)

S'assurer que $q_{j_0} \neq q_{\ell_0}$.

Déterminer le ppcm p des ordres de ramification de Q .

2) Effectuer l'éclatement $t \mapsto x = t^p$. Les systèmes $[A_0]$ et $[A]$ sont transformés en $[A_0^1]$ et $[A^1]$ donnés par

$$A_0^1(t) = pt^{p-1} A_0(t^p) \quad \text{et} \quad A^1(t) = pt^{p-1} A(t^p) .$$

X_0 et $\hat{F}$ sont transformés en X_0^1 et $\hat{F}^1$ donnés par

$$X_0^1(t) = X_0(t^p) = P(t^p)t^{pK}t^{pJ}e^{Q^1(1/t)} \quad \text{et} \quad \hat{F}^1(t) = \hat{F}(t^p) .$$

(Si $p \neq 1$ on a ainsi supprimé les ramifications).

3) Si $U \neq I$ (cas où $p \neq 1$), déterminer $V(t) = t^{pJ} U e^{-pJ}$. On a alors

$$X_0^1(t) = \Phi_0^1(t)t^{pJ}e^{Q^1(1/t)}$$

où $\Phi_0^1(t) = P(t^p)t^{pK}V(t)$ est méromorphe (lemme VII.8).

4) Factoriser à gauche la partie méromorphe $\Phi^1(t)$ du produit $\Phi(t) = \hat{F}^1(t)P(t^p)t^{pK}V(t)$. On obtient Φ^1 par la méthode du pivot appliquée à droite et il suffit de connaître un nombre fini de termes de $\hat{F}^1$ (Lemme VII.9).

On note $\Phi(t) = \Phi^1(t)\hat{F}^2(t)$, $\hat{F}^2 \in GL_I(n, \mathbb{C}[[t]])$.

5) Déterminer $A_0^2 = \Phi_0^1 A_0^1$ et $A^2 = \Phi^1 A^1$ (remarquer qu'on n'applique pas la même transformation à A_0^1 et à A^1).

$[A_0^2]$ admet une solution normale d'Hermite de la forme

$$X_0^2(t) = t^{pJ} e^{Q^1(1/t)}$$

Chapitre VII

et $[A^2]$ une solution d'Hermite de la forme $\hat{F}^2 X_0^2$ avec $\hat{F}^2 \in GL_I(n, \mathbb{C}[[t]])$.

6) Déterminer le changement de variable

$$t = \frac{u}{1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{k-1} u^{k-1}} \quad \text{où } k = d^0(q_{j_0}^1 - q_{\ell_0}^1)$$

qui rend monômiale la partie polaire $Q'(\frac{1}{u})$ de $(q_{j_0}^1 - q_{\ell_0}^1)(\frac{1}{t(u)})$ en 0 (lemme VII.10).

$$\text{Noter } Q^1(\frac{1}{t(u)}) = Q'(\frac{1}{u}) + R(u).$$

7) Déterminer les systèmes $[A_0^3]$ et $[A^3]$ déduits de $[A_0^2]$ et de $[A^2]$ par ce changement de variable. On a $A_0^3(u) = \frac{d}{dt}t(u) \cdot A_0^2(t(u))$ et $A^3(u) = \frac{d}{dt}t(u) \cdot A^2(t(u))$.

On a, en outre, $X_0^3(u) = \exp R(0) \cdot Z(u) u^{p^J} e^{Q'(1/u)}$ avec

$$Z(u) = e^{R(u) - R(0)} \cdot (1 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{k-1} u^{k-1})^{p^J} \in GL_I(n, \mathbb{C}\{u\})$$

et $X^3(u) = \hat{F}^3(u) X_0^3(u)$ avec $\hat{F}^3(u) = \hat{F}^2(t(u)) \in GL_I(n, \mathbb{C}[[u]])$.

8) Déterminer $A^4 = \exp -R(0) A^3$ et $A_0^4 = \exp -R(0) A_0^3$. On a

$$X_0^4(u) = Z(u) u^{p^J} e^{Q'(1/u)}$$

et

$$X^4(u) = \hat{F}^4(u) X_0^4(u) \quad \text{où } \hat{F}^4(u) = \exp -R(0) \cdot \hat{F}^3(u) \cdot \exp R(0) \in GL_I(n, \mathbb{C}[[u]]) .$$

La solution d'Hermite X^4 est (j_0, ℓ_0) -séparée.

Résultats

Les systèmes $[B = A^4]$ et $[B_0 = A_0^4]$.

En effet : X_0^4 est une solution d'Hermite (j_0, ℓ_0) -séparée de $[A_0^4]$ et le système des invariants de Birkhoff de $\hat{F}^4$ (unique transformation de Birkhoff de $[A_0^4]$ en $[A^4]$) dans la base "canonique" construite sur X_0^4 est équivalent au système des invariants de Birkhoff de $\hat{F}$ dans la base "canonique" construite sur X_0 .

DÉMONSTRATION DE L'ALGORITHME ET DE LA PROPOSITION VII.3 : Les lemmes VII.6 à VII.10 autorisent chacune des étapes. Les invariants de Birkhoff sont invariants par changement de variable (ce sont des constantes). On les retrouve après un éclatement comme étant une partie des invariants de Birkhoff équivalente au système complet de ces invariants (lemme VII.6). Il reste à voir qu'ils sont conservés lors du passage de (A_0^1, A^1) à (A_0^2, A^2) (le passage de (A_0^3, A^3) à (A_0^4, A^4) est analogue). Or, soit α une direction anti-Stokes de $[A_0^1]$ (et donc aussi de $[A_0^2]$) et soit

$\tilde{\alpha}$ son relèvement au feuillet choisi. Notons F_{α}^{1-} et F_{α}^{1+} (resp. F_{α}^{2-} et F_{α}^{2+}) les sommes fondamentales de $\hat{F}^1$ (resp. $\hat{F}^2$) de part et d'autre de la direction α et $C_{\tilde{\alpha}}^1$ (resp. $C_{\tilde{\alpha}}^2$) la matrice de Stokes associée à la direction $\tilde{\alpha}$. On a, par définition

$$C_{\tilde{\alpha}}^1 = \left(F_{\alpha}^{1-}(t) X_{0,\tilde{\alpha}}^1(t) \right)^{-1} \left(F_{\alpha}^{1+}(t) X_{0,\tilde{\alpha}}^1(t) \right)$$

et

$$C_{\tilde{\alpha}}^2 = \left(F_{\alpha}^{2-}(t) X_{0,\tilde{\alpha}}^2(t) \right)^{-1} \left(F_{\alpha}^{2+}(t) X_{0,\tilde{\alpha}}^2(t) \right)$$

pour tout $t \in \dot{U}_{\alpha}$.

De l'identité formelle

$$\hat{F}^1(t) X_0^1(t) = \Phi^1(t) \hat{F}^2(t) X_0^2(t) \quad ,$$

on déduit

$$C_{\tilde{\alpha}}^2 = \left(F_{\alpha}^{2-} X_{0,\tilde{\alpha}}^2 \right)^{-1} \left((\Phi_{\alpha}^{1-})^{-1} \Phi_{\alpha}^{1+} \right) \left(F_{\alpha}^{2+} X_{0,\tilde{\alpha}}^2 \right) \quad .$$

Mais puisque Φ^1 est méromorphe, on a $\Phi_{\alpha}^{1-} = \Phi_{\alpha}^{1+}$ et donc $C_{\tilde{\alpha}}^2 = C_{\tilde{\alpha}}^1$.

PROPOSITION VII.12. *On peut en outre dans la proposition VII.3, imposer $Z(x) = I$.*

L'algorithme VII.11 est à compléter par le point

9) *Noter $X_0^5(u) = u^p J e^{Q'(1/u)}$, $X^5 = X^4$ et $A^5 = A^4$.*

Déterminer A_0^5 par $A_0^5 = \frac{dX_0^5}{du} (X_0^5)^{-1}$ ou par le changement d'inconnues $Y = ZX$, d'où $A_0^5 = Z^{-1} A_0^4$.

On a $X^5(u) = \hat{F}^5(u) X_0^5(u)$ avec $\hat{F}^5 = \hat{F}^4 Z$.

On prend pour résultat $[B = A^5]$ et $[B_0 = A_0^5]$.

REMARQUE VII.13. La matrice Z est diagonale par blocs analogues à ceux de J . En particulier, dans le cas où X_0 n'a pas de logarithmes, elle est diagonale.

Le seul intérêt à conserver le facteur Z peut être numérique; en effet, dans le cas où on conserve Z , la transformation de Birkhoff $\hat{F} = \hat{F}^4$ est déterminée par de vraies relations de récurrence linéaires (à un nombre fini fixe de termes), alors que ce n'est plus le cas pour $\hat{F} = \hat{F}^4 Z$ qui vérifie des relations de récurrence à un nombre croissant de termes.

2. Calcul des invariants dans le cas séparé

Supposons que $[A_0]$ admette une solution d'Hermite de la forme $X_0(x) = Z(x)x^J e^{Q(1/x)}$ avec $Z \in GL_I(n, \mathbb{C}\{x\})$ et Q quelconque.

Soit $[A]$ un système de la classe de Birkhoff formelle de $[A_0]$ et $\hat{F}$ l'unique transformation de Birkhoff de $[A_0]$ en $[A]$.

Notons $J = D + N$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et N nilpotente.

Nous rappelons d'abord comment sont définis l'isomorphisme infinitésimal et son inverse l'application de Cauchy-Heine ([MR82], Th.3.2.1 et 3.2.2).

Isomorphisme infinitésimal

C'est l'isomorphisme

$$\mu : \hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M} \longrightarrow H_{ab}^1(S^1; \Lambda_0)$$

où

$\hat{\mathcal{M}} = M(n, \mathbb{C}[[x]])$ est l'anneau des matrices à coefficients séries formelles,

$\mathcal{M} = M(n, \mathbb{C}\{x\})$ est le sous-anneau des matrices à coefficients séries convergentes,

$\hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M}$ est l'ensemble des classes d'éléments de $\hat{\mathcal{M}}$ modulo l'addition par des éléments de $\mathcal{M}$,

Λ_0 est le faisceau au-dessus S^1 des germes de matrices holomorphes asymptotiques à 0 à l'origine de $\mathbb{C}$

et où μ est défini comme suit :

Soit $\mathcal{U} = \{U_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ un (bon) recouvrement de S^1 et soit $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}}$. On sait grâce au théorème de Borel-Ritt qu'il existe des matrices $M_\gamma \in M(n, \mathcal{O}(U_\gamma))$ à coefficients holomorphes sur U_γ et asymptotiques à $\hat{M}$ sur U_γ . La 1-cochaîne $(-M_\gamma + M_{\gamma+1})_{\gamma \in \Gamma}$ est à valeurs dans Λ_0 . Sa classe de cohomologie abélienne est indépendante du choix des matrices M_γ "relevant" $\hat{M}$ et du choix de $\hat{M}$ dans sa classe modulo $\mathcal{M}$. C'est par définition $\mu(\hat{M})$.

Application de Cauchy-Heine

L'isomorphisme infinitésimal μ admet pour inverse l'application de Cauchy-Heine définie comme suit : c'est l'application additive qui à une 1-cochaîne élémentaire d'un recouvrement $\mathcal{U}$

$$(\varphi) = \begin{cases} \varphi & \text{sur l'un des ouverts } \hat{U} \text{ de } \hat{\mathcal{U}} \\ 0 & \text{sur les autres ouverts de } \hat{\mathcal{U}} \end{cases}$$

associe la classe dans $\hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M}$ de la matrice

$$\text{CH}^{(\varphi)} = \left(\text{CH}_{(j,\ell)}^{(\varphi)} = \sum_n \text{CH}_{(j,\ell)}^{(\varphi)}[n]x^n \right)$$

$$\text{où } \text{CH}_{(j,\ell)}^{(\varphi)}[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi_{(j,\ell)}(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

et où γ est un rayon quelconque dans $\dot{U}$.

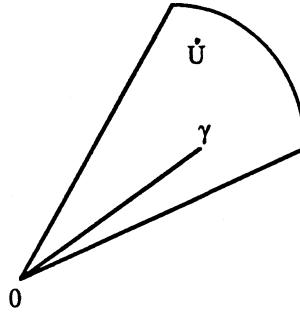


Figure VII.2.1

Nous omettrons désormais l'indice supérieur (φ) . La différence des deux séries $\text{CH}_{(j,\ell)}$ obtenues en intégrant sur deux rayons différents (en longueur ou en direction) est une série convergente. Ces formules définissent donc bien une application à valeurs dans $\hat{\mathcal{M}}/\mathcal{M}$.

Base “canonique” de $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ construite sur X_0 et $\theta_0 = 0$

C'est la base $\mathfrak{T} = \{\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_0; (j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}}$ formée des 1-cochaînes élémentaires

$$\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}(x) = I + Z(x)x^N x^{\lambda_j - \lambda_\ell} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)} x^{-N} Z(x)^{-1} \text{ sur } \dot{U}_\alpha$$

(dans le membre de droite, on a noté pour simplifier x au lieu de $\tilde{x}$ le relèvement de x au feuillet principal $0 \leq \arg x < 2\pi$) (Prop. IV.1).

Dans le cas sans logarithme ($N = 0$) et pour $Z = I$, la matrice $\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} - I$ est proportionnelle à la matrice élémentaire $E_{(j,\ell)}$: par projection sur une telle base, on “sépare” les coefficients des matrices.

“Base” infinitésimale $\mathfrak{T}'$ associée

C'est la famille $\mathfrak{T}' = \{\tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_0; (j,\ell) \in \mathcal{E}\tilde{\alpha}}$ des 1-cochaînes abéliennes élémentaires à valeurs dans Λ_0 associées à $\mathfrak{T}$ par les formules

$$\tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}(x) = x^{\lambda_j - \lambda_\ell} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)} \quad (0 \leq \arg x < 2\pi) \text{ sur } \dot{U}_\alpha.$$

Noter qu'on a supprimé Z et les logarithmes.

Cocycle abélien associé

Au cocycle $c(\widehat{F}) = \left(\sum_{(j,\ell)\varepsilon\tilde{\alpha}} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \right)_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_0 = \tilde{\mathcal{A}} \cap [0, 2\pi[}$, on associe le cocycle abélien

$$c'(\widehat{F}) = \left(\sum_{(j,\ell)\varepsilon\tilde{\alpha}} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \right)_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}_0}.$$

Série de Cauchy-Heine associée

Nous choisissons des rayons d'intégration illimités et portés par les relèvements principaux des directions anti-Stokes.

Au cocycle $c'(\widehat{F})$, on associe donc la série matricielle

$$\text{CH}^{c'(\widehat{F})} = \left(\text{CH}_{(j,\ell)}^{c'(\widehat{F})} = \sum_{n \geq 0} \text{CH}_{(j,\ell)}[n] x^n \right)$$

$$\text{où } \text{CH}_{(j,\ell)}[n] = \sum_{\tilde{\alpha} \mid (j,\ell)\varepsilon\tilde{\alpha}} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{e^{i\tilde{\alpha}}\infty} \frac{\tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

Théorème de comparaison entre l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya et l'isomorphisme infinitésimal correspondant (il s'agit du théorème de Malgrange-Sibuya classique c'est-à-dire sans système différentiel).

Soit

$$\widehat{F} = I + \widehat{f} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]]),$$

$\dot{F} = (I + \dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une 1-cochaîne représentant la classe de cohomologie $\exp \mu(\widehat{F})$,

et $F_\alpha = I + f_\alpha$ des incarnations de $\widehat{F} = I + \widehat{f}$ (Prop. IV.3) telles que

$$I + \dot{f}_\alpha = (I + f_\alpha^-)^{-1} (I + f_\alpha^+) \quad \text{pour tout } \alpha.$$

Alors la 1-cochaîne infinitésimale $\dot{\Phi} = (\dot{\Phi}_\alpha)$ définie par

$$\dot{\Phi}_\alpha = (I + f_\alpha^-) \dot{f}_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha$$

représente la classe de cohomologie abélienne $\mu(\widehat{F})$.

DÉMONSTRATION : On a en effet $\dot{\Phi}_\alpha = -f_\alpha^- + f_\alpha^+ = -F_\alpha^- + F_\alpha^+$.

Principe de la méthode : Le théorème de comparaison appliqué à la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F})$ de $\hat{F}$ nous dit que la série de Cauchy-Heine de $\hat{\Phi}$ est dans la classe analytique additive de $\hat{F}$

$$\hat{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \text{CH}^{\hat{\Phi}}[n]x^n \text{ modulo } \mathcal{M} = GL(n, \mathbb{C}\{x\}) .$$

Les coefficients $\text{CH}^{\hat{\Phi}}[n]$ de cette série de Cauchy-Heine dépendent des invariants de Birkhoff $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}$ cherchés et on essaie de déterminer ceux-ci à partir de l'égalité précédente.

Remarquons tout d'abord que, l'égalité $\hat{F} = \sum_n \text{CH}^{\hat{\Phi}}[n]x^n$ n'ayant lieu que modulo les séries convergentes, cela n'a pas de sens de comparer ces séries terme à terme : on va comparer les comportements asymptotiques quand n tend vers l'infini des coefficients $\hat{F}[n]$ et $\text{CH}^{\hat{\Phi}}[n]$.

Par ailleurs, on n'a pas d'expression explicite simple des sommes F_α de $\hat{F}$ et donc aussi de $\hat{\Phi}$ (bien qu'on dispose actuellement de formules intégrales itérées d'accélération).

Le principe consiste à remplacer la 1-cochaîne infinitésimale $\hat{\Phi}$ par la 1-cochaîne abélienne $c'(\hat{F})$ associée dont la série de Cauchy-Heine

$$\hat{F}' = \sum_{n \geq 0} \text{CH}^{c'(\hat{F})}[n]x^n$$

est plus simple, et d'évaluer si, ce faisant, l'erreur commise peut être négligée. On utilise alors les relations fournies par l'équivalence $\hat{F}[n] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \hat{F}'[n]$.

Etude asymptotique de la série de Cauchy-Heine $\hat{F}'$ de $c'(\hat{F})$

On a noté $\tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}(x) = x^{\lambda_j - \lambda_\ell} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)}$.

Notons

$$\Lambda = \lambda_j - \lambda_\ell,$$

$$\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}[n] = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{e^{i\tilde{\alpha}}\infty} \xi^{\Lambda-n} e^{(q_j - q_\ell)(1/\xi)} \frac{d\xi}{\xi},$$

$$k = d^0(q_j - q_\ell)$$

et $\tilde{\alpha}_r = \tilde{\alpha}_0 + 2r\pi/k$, $r = 0, 1, \dots, k-1$ les relèvements principaux des directions anti-Stokes portées par (j, ℓ) .

On a $\hat{F}'_{(j,\ell)}[n] = \sum_{r=0}^{k-1} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r} \text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n]$.

Les coefficients $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}$ sont les coefficients de Birkhoff qu'on cherche à déterminer. Les fonctions $\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}[n]$ sont des fonctions gamma généralisées. On sait toujours en calculer un développement asymptotique quand $n \rightarrow +\infty$ ([Duv83]); nous allons le préciser en distinguant le cas où $q_j - q_\ell$ est un monôme du cas où il n'en est pas un.

Cas où $(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x^k}$

Par le changement de variable $s = -a/\xi^k$ (on a $-a = |a| e^{i\tilde{\alpha}_r k}$), les intégrales de Cauchy-Heine ci-dessus deviennent

$$\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n] = \frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_r k} \right)^{-(n-\Lambda)/k} \int_0^{+\infty} \xi^{(n-\Lambda)/k} e^{-s} \frac{ds}{s} .$$

On est ramené à une intégrale définissant une vraie fonction gamma. On a

$$(VII.14) \quad \text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n] = \frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_r k} \right)^{-(n-\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n-\Lambda}{k}\right) ,$$

et en particulier

$$\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n] = e^{-2i\pi r(n-\Lambda)/k} \text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_0}[n] .$$

Le coefficient de “proportionnalité” dépend de n , mais il est périodique de période k ; il est donc constant si n varie en progression arithmétique de pas k . On a ainsi, pour $q = 0, 1, \dots, k-1$, les k relations

$$\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[mk+q] = e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} \text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_0}[mk+q] , \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} ,$$

d'où

(VII.15)

$$\hat{F}'_{(j,\ell)}[mk+q] = \left(\sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r} \right) \text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_0}[mk+q] .$$

En conclusion, on sait évaluer le terme d'indices (j, ℓ) de la matrice de Cauchy-Heine (a fortiori son comportement asymptotique) et on peut énoncer :

Les sous-suites $\left(\hat{F}'_{(j,\ell)}[mk+q] \right)_{m \geq 0}$ de ses coefficients de k en k sont proportionnelles à

$$\text{CH}_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_0}[mk+q] = \frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_0 k} \right)^{-m-(q-\Lambda)/k} \Gamma\left(m + \frac{q-\Lambda}{k}\right) .$$

Seuls les coefficients de proportionnalité dépendent des coefficients de Birkhoff $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}$ cherchés et ils en dépendent linéairement.

Cas où $(q_j - q_\ell)(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x^k} + R(\frac{1}{x})$ avec $R \neq 0$ et $d^0 R < k$

On a maintenant ([Duv83])

$$(VII.16) \quad CH_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_r k} \right)^{-(n-\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n-\Lambda}{k}\right) e^{\sum_{s=1}^{k-1} \beta_s \left(\frac{n}{|a| e^{i\tilde{\alpha}_r k}}\right)^{1-(s/k)}}$$

où les coefficients β_s dépendent de a et des coefficients de R (en particulier, β_1 est égal au coefficient du terme de degré $k-1$ de R).

On a un facteur exponentiel supplémentaire qui ne conserve pas les propriétés du cas précédent. On constate en particulier que :

d'une part, on n'a pas de formule simple permettant de comparer les $CH_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n]$ dans les différentes directions $\tilde{\alpha}_r$ et donc pas d'équivalence asymptotique de $CH_{(j,\ell)}[n]$ indépendant des coefficients de Birkhoff $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}$ à la constante près;

d'autre part, ce facteur devient toujours exponentiellement grand avec n dans au moins une des directions anti-Stokes $\tilde{\alpha}_r$.

Il apparaît ici l'importance du choix de $q_j - q_\ell$ sous forme monômiale.

Evaluation des erreurs et fin du calcul

Supposons pour simplifier que X_0 n'a pas de logarithme ($N = 0$). Alors Z est diagonale et on peut sans grand changement supposer en outre que $Z = I$. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre les arguments au cas général avec logarithme.

On a $c'(\hat{F}) = c(\hat{F}) - I$. On passe de la 1-cochaîne abélienne $c'(\hat{F})$ à la 1-cochaîne infinitésimale $\dot{\Phi}$ en multipliant à gauche par les facteurs inconnus $\dot{F}_\alpha^- = I + \dot{f}_\alpha^-$. Ce faisant, on agit sur les lignes de $c'(\hat{F})$ et les perturbations se propagent à l'intérieur de chaque colonne. On va donc comparer les séries de Cauchy-Heine colonne par colonne.

Fixons une colonne ℓ .

Le coefficient d'indices (j, ℓ) de la matrice $\hat{F}'[n]$

$$\hat{F}'_{(j,\ell)}[n] = \sum_{r=0}^{k-1} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r} CH_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}[n]$$

a été évalué précédemment (VII.15) et (VII.16).

La perturbation apportée par le facteur $\dot{f}_\alpha^-$ (majoré par $Cte |x|$ au voisinage de 0) est une somme de termes d'ordre $CH_{(j',\ell);\tilde{\alpha}}[n-1]$ pour tous les couples (j', ℓ) de la colonne ℓ .

Chapitre VII

La fin du calcul repose alors sur les deux arguments suivants :

i) Si chacun des termes $\text{CH}_{(j',\ell);\tilde{\alpha}}[n-1]$ est d'ordre strictement inférieur à $\hat{F}'_{(j,\ell)}[n]$, la perturbation n'affecte pas le comportement asymptotique de $\hat{F}'_{(j,\ell)}[n]$. On peut écrire $\hat{F}_{(j,\ell)}[n] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \hat{F}'_{(j,\ell)}[n]$.

ii) Si $q_j - q_\ell$ est un monôme, on a, pour $q = 0, 1, \dots, k-1$, les relations

$$(VII.17) \quad \hat{F}'_{(j,\ell)}[mk + q] = \left(\sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r} \right) \frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_0 k} \right)^{-m-(q-\Lambda)/k} \Gamma\left(m + \frac{q-\Lambda}{k}\right) .$$

Posons $\mathcal{L}_{(j,\ell)}[q] = \lim_{m \rightarrow +\infty} L_{(j,\ell)}[mk + q]$ avec

$$L_{(j,\ell)}[mk + q] = \frac{\hat{F}_{(j,\ell)}[mk + q]}{\frac{1}{2i\pi k} \left(|a| e^{i\tilde{\alpha}_0 k} \right)^{-m-(q-\Lambda)/k} \Gamma\left(m + \frac{q-\Lambda}{k}\right)} .$$

On peut calculer $\mathcal{L}_{(j,\ell)}[q]$ à partir des relations de récurrence définissant $\hat{F}_{(j,\ell)}[n]$.

On obtient alors les coefficients de Birkhoff $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}$ cherchés comme solution du système de Cramer :

$$(VII.18) \quad \sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} c_{(j_0,\ell_0);\tilde{\alpha}_k} = \mathcal{L}_{(j_0,\ell_0)}[q] , \quad q = 0, 1, \dots, k-1 .$$

Conditions de validité du calcul des coefficients $c_{(j,\ell);\tilde{\alpha}_r}$, $r = 0, 1, \dots, k-1$

Il s'agit de préciser quand sont réalisées les contraintes (i) et (ii) ci-dessus. Les formules (VII.14) et (VII.16) permettent d'énoncer les conditions :

$k = d^0(q_j - q_\ell)$ est le plus bas niveau de la colonne ℓ (i.e. $d^0(q_{j'} - q_\ell) \geq k$, $\forall j'$).

Si pour une valeur $j' \neq j$, le polynôme $q_{j'} - q_\ell = \frac{a'}{x^k} + \dots$ est de degré exactement k , on doit avoir :

ou bien $|a'| > |a|$,

ou bien $|a'| = |a|$ et $(q_{j'} - q_\ell)(\frac{1}{x}) = \frac{a'}{x^k}$ est un monôme.

Autrement dit : toutes les exponentielles $e^{q_{j'} - q_\ell}$ de la colonne ℓ doivent être d'ordre $\geq k$. En outre, celles qui sont d'ordre k doivent être de type $\geq |a|$ et si elle sont de type $|a|$, l'exposant doit être un monôme.

3. Cas de la dimension trois. Exemple

On conserve les notations des paragraphes V.2, VII.1 et VII.2 ci-dessus et on précise les différentes possibilités pour les systèmes de dimension $n = 3$.

On se donne une forme normale X_0 et une transformation de Birkhoff $\widehat{F} \in GL_I(n, \mathbb{C}[[x]])$ de X_0 . On suppose X_0 réduite à la forme

$$X_0 = x^J e^Q \quad \text{avec} \quad Q = \text{Diag}(q_1, q_2, q_3) \quad .$$

3.1. Bilan détaillé de la méthode infinitésimale

1er cas : $q_1 = q_2 = q_3$

Alors $H^1(S^1; \Lambda(A_0))$ est trivial. Il n'y a pas d'invariants de Birkhoff.

2e cas : $q_1 = q_2 = q, q_3 \neq q$

Notons $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varepsilon E_{1,2}$ avec $\varepsilon = 1$ ou 0 suivant que X_0 contient ou ne contient pas de logarithme.

Supposons que dans la réduction préliminaire de X_0 on ait aussi réduit $q - q_3$ à un monôme. Notons $(q - q_3)(1/x) = a/x^k$; $k = d^0(q - q_3) = d^0(q_3 - q)$.

Les directions anti-Stokes sont les directions $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ du front de $q - q_3$ et $\alpha'_0, \dots, \alpha'_{k-1}$ du front de $q_3 - q$ (Définition II.13). Leurs relèvements au feuillet principal vérifient

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_r &= \tilde{\alpha}_0 + 2\pi r/k \\ \tilde{\alpha}'_r &= \tilde{\alpha}'_0 + 2\pi r/k \\ \tilde{\alpha}'_0 &= \tilde{\alpha}_0 \pm \pi/k \quad . \end{aligned}$$

La base "canonique" $\mathfrak{T}_{X_0}$ s'écrit, pour $r = 0, 1, \dots, k-1$,

$$\begin{cases} \tau_{(j,3);\tilde{\alpha}_r} = I + x^J e^{q-q_3} E_{(j,3)} x^{-J} \quad , & j = 1, 2 \\ \tau_{(3,\ell);\tilde{\alpha}'_r} = I + x^J e^{q_3-q} E_{(3,\ell)} x^{-J} \quad , & \ell = 1, 2 \quad . \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \tau_{(j,3);\tilde{\alpha}_r} = I + x^{\lambda-\lambda_3} e^{(q-q_3)(1/x)} E_{(1,3)} \\ \tau_{(2,3);\tilde{\alpha}_r} = I + x^{\lambda-\lambda_3} e^{(q-q_3)(1/x)} (E_{(2,3)} + \varepsilon E_{(1,3)} \text{Log } x) \\ \tau_{(3,1);\tilde{\alpha}'_r} = I + x^{\lambda_3-\lambda} e^{(q_3-q)(1/x)} E_{(3,1)} \\ \tau_{(3,2);\tilde{\alpha}'_r} = I + x^{\lambda_3-\lambda} e^{(q-q_3)(1/x)} (E_{(3,2)} + \varepsilon E_{(1,3)} \text{Log } x) \quad . \end{cases}$$

Chapitre VII

On justifie aisément la suppression des termes contenant un logarithme dans la base infinitésimale $\mathfrak{T}'_{X_0}$ associée

$$\begin{cases} \tau'_{(j,3);\tilde{\alpha}_r} = x^{\lambda-\lambda_3} e^{(q-q_3)} E_{(j,3)} & , \quad j = 1, 2 \\ \tau'_{(3,\ell);\tilde{\alpha}'_r} = x^{\lambda_3-\lambda} e^{(q_3-q)(1/x)} E_{(3,\ell)} & , \quad \ell = 1, 2 \end{cases} .$$

En effet, l'intégrale $\int_{\gamma} \xi^{\lambda-\lambda_3} e^{(q-q_3)(1/\xi)} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}}$ a, lorsque n tend vers l'infini, un comportement asymptotique dominant celui de $\int_{\gamma} \xi^{\lambda-\lambda_3} e^{(q-q_3)(1/\xi)} \text{Log } \xi \frac{d\xi}{\xi^{n+1}}$. Dans la série de Cauchy-Heine, les termes contenant un logarithme sont donc subdominants. On peut les négliger.

Remarquons que les matrices $E_{(1,2)}$ et $E_{(2,1)}$ n'apparaissent pas dans la base $\mathfrak{T}_{X_0}$: il n'y a pas d'invariants de Birkhoff de type $c_{(1,2);\tilde{\alpha}}$ ou $c_{(12,1);\tilde{\alpha}}$.

On a $4k$ coefficients de Birkhoff à calculer : les quatre familles

$$c_{(1,3);\tilde{\alpha}_r} \quad , \quad c_{(2,3);\tilde{\alpha}_r} \quad , \quad c_{(3,1);\tilde{\alpha}'_r} \quad , \quad c_{(3,2);\tilde{\alpha}'_r} \quad ,$$

pour $r = 0, 1, \dots, k-1$.

Notons $\Lambda = \lambda - \lambda_3$. Alors

$$\begin{aligned} \text{CH}_{(1,3);\tilde{\alpha}_0}[n] &= \text{CH}_{(2,3);\tilde{\alpha}_0}[n] = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{e^{i\tilde{\alpha}_0}\infty} \xi^{\Lambda-n} e^{a/\xi^k} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2i\pi k} (|a| e^{i\tilde{\alpha}_0 k})^{-(n-\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n-\Lambda}{k}\right) \\ \text{CH}_{(3,1);\tilde{\alpha}'_0}[n] &= \text{CH}_{(3,2);\tilde{\alpha}'_0}[n] = \frac{1}{2i\pi k} (|a| e^{i\tilde{\alpha}'_0 k})^{-(n+\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n+\Lambda}{k}\right) . \end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{L}_{(j,3)}[q] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{F}_{(j,3)}[mk+q] \Big/ \left(\frac{1}{2i\pi k} (|a| e^{i\tilde{\alpha}_0 k})^{-(n-\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n-\Lambda}{k}\right) \right)$$

et

$$\mathcal{L}_{(3,\ell)}[q] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{F}_{(3,\ell)}[mk+q] \Big/ \left(\frac{1}{2i\pi k} (|a| e^{i\tilde{\alpha}'_0 k})^{-(n+\Lambda)/k} \Gamma\left(\frac{n+\Lambda}{k}\right) \right)$$

pour $j = 1, 2$, $\ell = 1, 2$ et $q = 0, 1, \dots, k-1$.

On obtient des valeurs numériques approchées de ces limites en calculant un certain nombre de termes des suites du second membre à partir des relations de récurrence qu'elles vérifient.

Les coefficients de Birkhoff sont alors les solutions des quatre systèmes de Cramer

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} c_{(1,3);\tilde{\alpha}_r} = \mathcal{L}_{(1,3)}[q] , \quad q = 0, 1, \dots, k-1 , \\
 (2) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q-\Lambda)/k} c_{(2,3);\tilde{\alpha}_r} = \mathcal{L}_{(2,3)}[q] , \quad q = 0, 1, \dots, k-1 , \\
 (3) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q+\Lambda)/k} c_{(3,1);\tilde{\alpha}'_r} = \mathcal{L}_{(3,1)}[q] , \quad q = 0, 1, \dots, k-1 , \\
 (4) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} e^{-2i\pi r(q+\Lambda)/k} c_{(3,2);\tilde{\alpha}'_r} = \mathcal{L}_{(3,2)}[q] , \quad q = 0, 1, \dots, k-1 .
 \end{aligned}$$

3e cas : q_1, q_2, q_3 deux à deux distincts et X_0 admet deux niveaux $k_2 < k_1$

Notons $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (X_0 ne contient pas de logarithme; rappelons qu'en outre $0 \leq \text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2, \text{Re } \lambda_3 < 1$).

Ordonnons q_1, q_2 et q_3 de telle sorte que $d^0(q_1 - q_2) = k_2$. Alors $d^0(q_1 - q_3) = d^0(q_2 - q_3) = k_1$.

La base "canonique" $\mathfrak{T}_{X_0}$ définie par

$$\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} = I + x^{\lambda_j - \lambda_\ell} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} \mathcal{E}_{(j,\ell)} \quad \text{pour } 1 \leq j \neq \ell \leq n \text{ et } \tilde{\alpha} E(j, \ell)$$

est "séparée" (seul le terme $E_{(j,\ell)}$ apparaît dans $\tau_{(j,\ell);\tilde{\alpha}}$).

La base infinitésimale associée s'écrit

$$\tau'_{(j,\ell);\tilde{\alpha}} = x^{\lambda_j - \lambda_\ell} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)} .$$

Calcul des invariants $c_{(1,2);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(2,1);\tilde{\alpha}}$

Supposons que, par les réductions préliminaires, on ait ramené $q_1 - q_2$ à la forme monômiale (de degré $k_2 < k_1 = d^0(q_1 - q_3) = d^0(q_2 - q_3)$).

Les coefficients de Cauchy-Heine $\text{CH}_{(1,2);\tilde{\alpha}}$ et $\text{CH}_{(2,1);\tilde{\alpha}}$ sont dominants dans leur colonne. On peut appliquer la méthode infinitésimale à la 1re et à la 2e colonne pour calculer les coefficients de Birkhoff $c_{(1,2);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(2,1);\tilde{\alpha}}$ pour tous les $\tilde{\alpha}$ portés par (1,2) ou (2,1). Le calcul se conduit comme dans le cas précédent.

Calcul des invariants $c_{(1,3);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(2,3);\tilde{\alpha}}$

$q_1 - q_3$ et $q_2 - q_3$ ont nécessairement même partie principale a/x^{k_1} . Supposons qu'on ait ramené $q_2 - q_3$ à la forme monômiale $(q_2 - q_3)(1/x) = a/x^{k_1}$. Alors, d'une part $q_1 - q_3$ n'est pas un monôme, d'autre part il a même partie principale que $q_2 - q_3$. Les formules asymptotiques (V.18) montrent que dans la série de Cauchy-Heine, les perturbations ne sont pas négligeables. Détaillons simplement un exemple en prenant $\Lambda = 0$, $(q_2 - q_3)(1/x) = -1/x^2$ et $(q_1 - q_3)(1/x) = -1/x^2 + \alpha/x$. Les directions anti-Stokes sont $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. On a

$$\text{CH}_{(2,3);\mathbb{R}^+}(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/\xi^2}}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{4i\pi} \int_0^{+\infty} s^{n/2} e^{-s} \frac{ds}{s} = \frac{1}{4i\pi} \Gamma(n/2)$$

et

$$\text{CH}_{(1,3);\mathbb{R}^+}(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/\xi^2 + \alpha/\xi}}{\xi^{n+1}} d\xi \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4i\pi} \Gamma(n/2) e^{\alpha\sqrt{n}}.$$

De même $\text{CH}_{(1,3);\mathbb{R}^-}(n) \sim \text{CH}_{(2,3);\mathbb{R}^-}(n) e^{-\alpha\sqrt{n}}$. L'un au moins des facteurs $e^{\alpha\sqrt{n}}$ ou $e^{-\alpha\sqrt{n}}$ ne tend pas vers zéro. Et l'approximation faite en remplaçant la 1-cochaîne infinitésimale $\hat{\Phi}$ associée à la 1-cochaîne fondamentale $c(\hat{F})$ par la 1-cochaîne abélienne $c'(\hat{F}) = c(\hat{F}) - I$ n'est pas acceptable.

On ne peut pas calculer par cette méthode les invariants de Birkhoff $c_{(1,3);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(2,3);\tilde{\alpha}}$, ni de même $c_{(3,1);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(3,2);\tilde{\alpha}}$.

4e cas : q_1, q_2, q_3 deux à deux distincts et X_0 admet un seul niveau k ($d^0(q_1 - q_2) = d^0(q_2 - q_3) = d^0(q_3 - q_1) = k$).

Notons encore $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et supposons que $q_1 - q_2$ ait été mis sous forme monômiale

$$(q_1 - q_2)(1/x) = \frac{a}{x^k}.$$

Alors, soit $(q_2 - q_3)$ et $(q_3 - q_1)$ sont tous deux des monômes, soit ni l'un ni l'autre n'en est un.

- Si $q_1 - q_2, q_2 - q_3$ et $q_3 - q_1$ ne sont pas réductibles simultanément à des monômes, alors on ne peut calculer par la méthode infinitésimale aucun des invariants de Birkhoff.

- Si $(q_1 - q_2)(1/x) = a/x^k$, $(q_2 - q_3)(1/x) = b/x^k$ et $(q_3 - q_1)(1/x) = c/x^k$, avec $|a| \leq |b| \leq |c|$, alors on peut toujours calculer par la méthode infinitésimale les invariants de Birkhoff $c_{(1,2);\tilde{\alpha}}$, $c_{(2,1);\tilde{\alpha}}$ et $c_{(2,3);\tilde{\alpha}}$. Par

dualité (remplacer $[A_0]$ et $[A]$ par leurs duaux $[A_0^*]$ et $[A^*]$, X_0 par ${}^tX_0^{-1}$ et $\widehat{F}$ par ${}^t\widehat{F}^{-1}$), on peut aussi calculer $c_{(3,2);\widetilde{\alpha}}$.

Si, en outre, $|c| = |b|$, on peut calculer les invariants $c_{(1,3);\widetilde{\alpha}}$ et par dualité $c_{(3,1);\widetilde{\alpha}}$.

Nous traitons maintenant un exemple de dimension $n = 3$ dans lequel $k = 1$ et $|a| < |b| < |c|$.

3.2. Etude d'un exemple de dimension 3 et de niveau 1

Considérons le système différentiel

$$[A] : \frac{dX}{dx} = AX \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/x & 0 \\ -1/x & 1/x^2 & ix \\ 1 & 0 & (2 + i/2)/x^2 \end{pmatrix}.$$

Il admet pour forme normale d'Hermite

$$[A_0] : \frac{dX}{dx} = A_0X \quad \text{où} \quad A_0 = \frac{1}{x^2} \text{diag}(0, 1, 2 + i/2)$$

de solution normale d'Hermite

$$X_0(x) = e^{Q(1/x)} \quad \text{avec} \quad Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3)$$

et $q_1(1/x) = 0$, $q_2(1/x) = -1/x$, $q_3(1/x) = -(2 + i/2)/x$.

Il existe une unique transformation de Birkhoff $\widehat{F}$ de $[A_0]$ en $[A]$, unique solution du système

$$[A_0; A] : \frac{d\widehat{F}}{dx} = A\widehat{F} - \widehat{F}A_0$$

satisfaisant à la condition initiale $\widehat{F}(0) = I$.

Le système $[A]$ admet un seul niveau $k = 1$ ($= d^0(q_1 - q_2) = d^0(q_2 - q_3) = d^0(q_3 - q_1)$) et les trois polynômes $q_1 - q_2$, $q_2 - q_3$ et $q_3 - q_1$ sont simultanément des monômes. Notons

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{a}{x}, & a &= 1 \\ (q_2 - q_3)\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{b}{x}, & b &= 1 + i/2 \\ (q_3 - q_1)\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{c}{x}, & c &= -(2 + i/2). \end{aligned}$$

On a $|a| < |b| < |c|$.

Chapitre VII

Les directions anti-Stokes sont

$$\begin{array}{ll}
 \alpha = \pi \text{ portée par } (1, 2) & \alpha = 0 \text{ portée par } (2, 1) \\
 \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} \text{ portée par } (2, 3) & \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ portée par } (3, 2) \\
 \alpha = \pi + \arg(2 + i/2) \text{ portée par } (1, 3) & \alpha = \arg(2 + i/2) \text{ portée par } (3, 1)
 \end{array}$$

Puisque chaque couple (j, ℓ) porte une seule direction anti-Stokes (le niveau k vaut 1), nous noterons celle-ci $\alpha_{(j, \ell)}$ et nous noterons indifféremment $c_{(j, \ell)}$ ou $c_{(j, \ell); \tilde{\alpha}_{(j, \ell)}}$ les invariants de Birkhoff.

On a à calculer les six coefficients

$$\begin{array}{lll}
 c_{(1,2)} = c_{(1,2);\pi} , & c_{(2,1)} = c_{(2,1);0} , & c_{(2,3)} = c_{(2,3);7\pi/6} , \\
 c_{(3,2)} = c_{(3,2);\pi/6} , & c_{(1,3)} = c_{(1,3);\pi+\tilde{\alpha}} , & c_{(3,1)} = c_{(3,1);\tilde{\alpha}} ,
 \end{array}$$

où $\tilde{\alpha} = \text{Arg}(2 + i/2)$ (détermination principale). Ceux-ci représentent un système complet d'invariants de Birkhoff $c_{(j, \ell)}$, $1 \leq j \neq \ell \leq 3$, ou de matrices de Stokes $C_{(j, \ell)} = I + c_{(j, \ell)} E_{(j, \ell)}$.

La méthode de calcul par sommation permet a priori de calculer ces six coefficients. Nous l'esquissos ci-dessous. Malheureusement, elle n'a pu être conduite jusqu'au terme des valeurs numériques : on se heurte encore dans l'utilisation des procédures de sommation pourtant opérationnelles en dimension deux à des problèmes d'instabilité nécessitant une étude particulière. Celle-ci vient d'être commencée par J. Thomann au Centre de Calcul de Strasbourg-Cronembourg.

La méthode infinitésimale ne permet le calcul que des trois coefficients $c_{(1,2)}$, $c_{(2,1)}$ et $c_{(2,3)}$ (par dualité, on pourrait aussi obtenir le coefficient $c_{(3,2)}$). Les calculs se déroulent bien. Les relations de récurrence sont stables quoique nécessitant une bonne précision sur les valeurs initiales (les valeurs initiales et quelques suivantes ont été calculées exactement en calcul formel).

Calculs préliminaires utiles aux deux méthodes

Soit $\hat{F} = [\hat{F}_{(j, \ell)}]$. Il suffit de déterminer une ligne de la matrice $\hat{F}$. Nous avons choisi d'établir les relations de récurrence définissant la 3e ligne $\hat{F}_{(1,3)}, \hat{F}_{(2,3)}, \hat{F}_{(3,3)}$.

Notons $\hat{F}_{(1)}, \hat{F}_{(2)}, \hat{F}_{(3)}$ les trois colonnes de $\hat{F}$.

Le système $[A_0; A]$ se sépare en trois systèmes différentiels portant sur les trois colonnes de $\hat{F}$.

Pour déterminer, $\widehat{F}_{(1)}$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(1,1)} &= \widehat{F}'_{(3,1)} - (2 + i/2) \frac{1}{x^2} \widehat{F}_{(3,1)} \\ \widehat{F}_{(2,1)} &= x \widehat{F}''_{(3,1)} - (2 + i/2) \frac{1}{x} \widehat{F}'_{(3,1)} + 2(2 + i/2) \frac{1}{x^2} \widehat{F}_{(3,1)} \\ x^4 \widehat{F}'''_{(3,1)} &+ (-6 + i/2)x^2 + x^3 \widehat{F}''_{(3,1)} + ((2 + i/2) + 3(2 + i/2)x + x^2) \widehat{F}'_{(3,1)} \\ &- (2(2 + i/2)/x + 5(2 + i/2) + ix^4) \widehat{F}_{(3,1)} = 0\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $\widehat{F}_{(1,1)}(0) = 1$, $\widehat{F}_{(2,1)}(0) = \widehat{F}_{(3,1)}(0) = 0$.

Pour déterminer $\widehat{F}_{(2)}$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(1,2)} &= -x \widehat{F}'_{(2,2)} + ix^2 \widehat{F}_{(3,2)} \\ \widehat{F}_{(2,2)} &= x \widehat{F}''_{(3,2)} - i/(2x) \widehat{F}'_{(3,2)} + (1 + i/2)(-1/x^3 + 2/x^2) \widehat{F}_{(3,2)} \\ x^5 \widehat{F}'''_{(3,2)} &+ (-ix^3/2 + x^4) \widehat{F}''_{(3,2)} + (-(1 + i/2)x + (2 + 3i/2)x^2 + x^3) \widehat{F}'_{(3,2)} \\ &+ (3(1 + i/2) - 5(1 + i/2)x - ix^5) \widehat{F}_{(3,2)} = 0\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $\widehat{F}_{(1,2)}(0) = \widehat{F}_{(3,2)}(0) = 0$, $\widehat{F}_{(2,2)}(0) = 1$.

Pour déterminer $\widehat{F}_{(3)}$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(1,3)} &= \widehat{F}'_{(3,3)} \\ \widehat{F}_{(2,3)} &= x \widehat{F}''_{(3,3)} + ((2 + i/2)/x) \widehat{F}'_{(3,3)} \\ x^4 \widehat{F}'''_{(3,3)} &+ (x^3 + (3 + i)x^2) \widehat{F}''_{(3,3)} + ((2 + i/2)(1 + i/2) - (2 + i/2)x + x^2) \widehat{F}'_{(3,3)} \\ &- 4ix^4 \widehat{F}_{(3,3)} = 0\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $\widehat{F}_{(1,3)}(0) = \widehat{F}_{(2,3)}(0) = 0$, $\widehat{F}_{(3,3)}(0) = 1$.

En notant $\widehat{F}_{(j,\ell)} = \sum_{n \geq 0} \widehat{F}_{(j,\ell)}[n]x^n$, les équations différentielles ci-dessus donnent pour déterminer les séries $\widehat{F}_{(3,\ell)}$, $\ell = 1, 2, 3$, les relations de récurrence linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}(2+i/2)(n-2)\widehat{F}_{(3,1)}[n] &= ((3+i/2)(n-1)(n-2) - (2+i/2)(3n-8))\widehat{F}_{(3,1)}[n-1] \\ &- ((n-3)^2 + 1)(n-2)\widehat{F}_{(3,1)}[n-2] + i\widehat{F}_{(3,1)}[n-5]\end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\widehat{F}_{(3,1)}[-2] = \widehat{F}_{(3,1)}[-1] = \widehat{F}_{(3,1)}[0] = \widehat{F}_{(3,1)}[1] = 0 \text{ et } \widehat{F}_{(3,1)}[2] = -1/(2+i/2) ;$$

$$\begin{aligned}(1+i/2)(n-3)\widehat{F}_{(3,2)}[n] &= ((-i(n-1)(n-2)/2 + (2+3i/2)(n-1) - 5(1+i/2))\widehat{F}_{(3,2)}[n-1] \\ &+ ((n-3)^2 + 1)(n-2)\widehat{F}_{(3,2)}[n-2] - i\widehat{F}_{(3,2)}[n-5]\end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\widehat{F}_{(3,2)}[-1] = \widehat{F}_{(3,2)}[0] = \widehat{F}_{(3,2)}[1] = \widehat{F}_{(3,2)}[2] = 0 \text{ et } \widehat{F}_{(3,2)}[3] = -1/(1+i/2) ;$$

et

$$(2+i/2)(1+i/2)n\widehat{F}_{(3,3)}[n] = (-(3+i)(n-2) + (2+i/2))(n-1)\widehat{F}_{(3,3)}[n-1] \\ - ((n-3)^2 + 1)(n-2)\widehat{F}_{(3,3)}[n-2] + i\widehat{F}_{(3,3)}[n-5]$$

avec les conditions initiales

$$\widehat{F}_{(3,3)}[-4] = \widehat{F}_{(3,3)}[-3] = \widehat{F}_{(3,3)}[-2] = \widehat{F}_{(3,3)}[-1] = 0 \text{ et } \widehat{F}_{(3,3)}[0] = 1 .$$

Méthode de calcul par sommation

Les calculs à effectuer se lisent clairement sur l'expression de la 1-cochaîne fondamentale $c(\widehat{F})$. Expliciteons-la

$$c(\widehat{F}) = \left((F_{\alpha(j,\ell)}^-)^{-1} F_{\alpha(j,\ell)}^+ \right)_{1 \leq j \neq \ell \leq 3} \\ = \left(I + c_{(j,\ell)} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)} \right) .$$

En la détaillant suivant les colonnes, cette formule s'écrit

$$\begin{pmatrix} F_{(1);\alpha(j,\ell)}^+ & F_{(2);\alpha(j,\ell)}^+ & F_{(3);\alpha(j,\ell)}^+ \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} F_{(1);\alpha(j,\ell)}^- & F_{(2);\alpha(j,\ell)}^- & F_{(3);\alpha(j,\ell)}^- \end{pmatrix} \left(I + c_{(j,\ell)} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)} \right) .$$

(Aucun terme n'étant "multi-valué", il n'est pas nécessaire ici de choisir une détermination $\tilde{\alpha}$ pour les directions anti-Stokes α .)

D'où, si $\ell' \neq \ell$, on a

$$F_{(\ell');\alpha(j,\ell)}^+ = F_{(\ell');\alpha(j,\ell)}^- ;$$

la direction $\alpha(j,\ell)$ n'est pas singulière pour la colonne $F_{(\ell')}$.

Pour $\ell' = \ell$, on a

$$F_{(\ell);\alpha(j,\ell)}^+ = F_{(\ell);\alpha(j,\ell)}^- + c_{(j,\ell)} e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} F_{(j);\alpha(j,\ell)}$$

($F_{(j);\alpha(j,\ell)}^+ = F_{(j);\hat{\alpha}(j,\ell)}^-$ puisque, j étant différent de ℓ , $\alpha(j,\ell)$ n'est pas une direction singulière pour $\widehat{F}_j$).

Ainsi, chaque colonne admet deux directions singulières au plus. Détaillons ce qui précède par une liste complète.

COLONNE $\widehat{F}_{(1)}$. Elle admet les deux directions singulières $\alpha(2,1) = 0$ et $\alpha(3,1) = \alpha = \arg(2+i/2)$ dirigées par les vecteurs $a = 1$ et $-c = 2+i/2$.

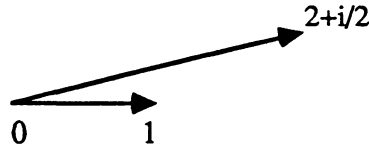


Figure VII.3.1

Et elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} -F_{(1);0}^-(x) + F_{(1);0}^+(x) &= c_{(2,1)} e^{-1/x} F_{(2)}(x) , \\ -F_{(1);\alpha}^-(x) + F_{(1);\alpha}^+(x) &= c_{(3,1)} e^{-(2+i/2)/x} F_{(3)}(x) ; \end{aligned}$$

d'où les matrices de Stokes

$$\begin{aligned} C_{(2,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{(2,1)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha(2,1) = 0 , \\ C_{(3,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{(3,1)} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha = \alpha(3,1) = \arg(2+i/2) . \end{aligned}$$

COLONNE $\widehat{F}_{(2)}$. Elle admet les deux directions singulières $\alpha(1,2) = \pi$ et $\alpha(3,2) = \pi/6$ dirigées par les vecteurs $-a = -1$ et $b = 1+i/2$.

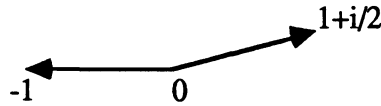


Figure VII.3.2

Et elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} -F_{(2);\pi}^-(x) + F_{(2);\pi}^+(x) &= c_{(1,2)} e^{1/x} F_{(1)}(x) , \\ -F_{(2);\pi/6}^-(x) + F_{(2);\pi/6}^+(x) &= c_{(3,2)} e^{-(1+i/2)/x} F_{(3)}(x) ; \end{aligned}$$

d'où les matrices de Stokes

$$\begin{aligned} C_{(1,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & c_{(1,2)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha(1,2) = \pi , \\ C_{(3,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_{(3,2)} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha(3,2) = \pi/6 . \end{aligned}$$

COLONNE $\widehat{F}_{(3)}$. Elle admet les deux directions singulières $\alpha(1,3) = \pi + \alpha = \arg -(2 + i/2)$ et $\alpha(2,3) = 7\pi/6$ dirigées par les vecteurs $c = -(2 + i/2)$ et $-b = -(1 + i/2)$.

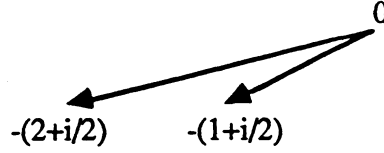


Figure VII.3.3

Et elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} -F_{(3);\pi+\alpha}^-(x) + F_{(3);\pi+\alpha}^+(x) &= c_{(1,3)} e^{(2+i/2)/x} F_{(1)}(x) , \\ -F_{(3);7\pi/6}^-(x) + F_{(3);7\pi/6}^+(x) &= c_{(2,3)} e^{(1+i/2)/x} F_{(2)}(x) ; \end{aligned}$$

d'où les matrices de Stokes

$$\begin{aligned} C_{(1,3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{(1,3)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha(1,3) = \pi + \alpha , \\ C_{(2,3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{(2,3)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la direction } \alpha(2,3) = 7\pi/6 . \end{aligned}$$

Terminons par le dessin des chemins de sommations conformément à la méthode indiquée en V.3.3 (cf. figure VII.3.4).

On a indiqué en pointillés les directions singulières et en traits pleins les chemins de sommation (leur origine est 0; leur extrémité est portée par une direction singulière).

Les indices (j, ℓ) indiquent quelle matrice de Stokes $C_{(j,\ell)}$ est obtenue par sommation dans cette direction : on somme de part et d'autre de cette direction la colonne C_ℓ et on compare à la somme de la colonne C_j corrigée par une exponentielle $e^{-v/x}$; les coefficient v est le "vecteur" marqué sur chaque direction singulière.

Pour déterminer le coefficient de proportionnalité de deux vecteurs, il suffit d'en comparer une seule composante; nous avons choisi la troisième.

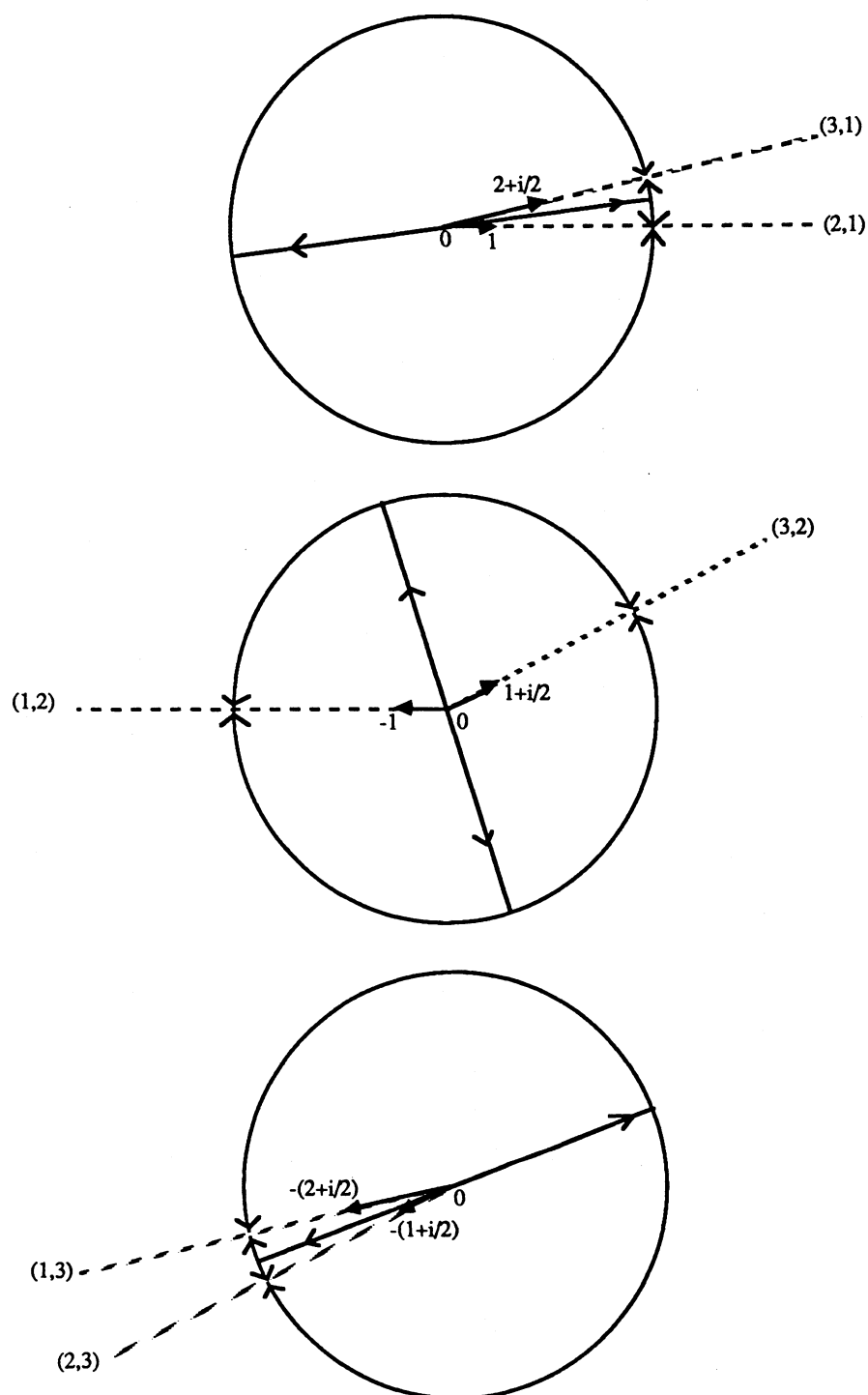


Figure VII.3.4

Méthode infinitésimale

La 1-cochaîne fondamentale de $\widehat{F}$ s'écrit

$$c(\widehat{F}) = (c_{(j,\ell)} \tau_{(j,\ell)})_{\alpha_{(j,\ell)}} \quad , \quad 1 \leq j \neq \ell \leq 3 \quad ,$$

où $\tau_{(j,\ell)} \equiv \tau_{(j,\ell);\alpha(j,\ell)} = I + e^{(q_j - q_\ell)(1/x)} E_{(j,\ell)}$ sur $\dot{U}_{\alpha(j,\ell)}$.

La 1-cochaîne infinitésimale $\dot{\Phi} = (\dot{\Phi}_{\alpha(j,\ell)})$ est donnée par

$$\dot{\Phi}_{\alpha(j,\ell)} = F_{\alpha(j,\ell)}^- \left(c_{(j,\ell)} \tau'_{(j,\ell)} \right) \quad , \quad 1 \leq j \neq \ell \leq 3 \quad ,$$

où $\tau'_{(j,\ell)} = \tau_{(j,\ell)} - I$ et où $F_{\alpha(j,\ell)}^-$ est une somme fondamentale de $\hat{F}$; elle est donc en particulier asymptotique à $\hat{F}$ en 0.

La 1-cochaîne abélienne associée $c'(\hat{F})$ s'obtient en remplaçant $F_{\alpha(j,\ell)}^-$ par I et vaut donc

$$c'(\hat{F}) = \left(c_{(j,\ell)} \tau'_{(j,\ell)} \right) \quad .$$

Les termes dominants de chaque colonne de la série de Cauchy-Heine $\text{CH}^{c'(\hat{F})}$ de $c'(\hat{F})$ sont respectivement les éléments d'indices $(2,1)$, $(1,2)$ et $(2,3)$: ils sont à comparer aux éléments $\hat{F}_{(2,1)}[n]$, $\hat{F}_{(1,2)}[n]$ et $\hat{F}_{(2,3)}[n]$ de mêmes indices dans la série $\hat{F}$. Or nous n'avons déterminé que les éléments $\hat{F}_{(3,1)}$, $\hat{F}_{(3,2)}$ et $\hat{F}_{(3,3)}$ de la 3e ligne de $\hat{F}$. On pourrait naturellement calculer aussi $\hat{F}_{(2,1)}$, $\hat{F}_{(1,2)}$ et $\hat{F}_{(2,3)}$ pour appliquer la méthode infinitésimale telle que présentée de façon générale. Nous avons préféré ici (et sans hésitation ! Comparez la longueur des calculs) évaluer le comportement asymptotique des termes de la 3e ligne de la série de Cauchy-Heine $\text{CH}^{\dot{\Phi}}$ de $\dot{\Phi}$. Il suffit pour cela de "pousser" un peu plus loin le développement asymptotique de $F_{\alpha(j,\ell)}^-$ (pris égal à I dans $c'(\hat{F})$) : on prend comme approximation de $\dot{\Phi}$ non pas $c'(\hat{F})$ mais la 1-cochaîne $\dot{\psi}$ définie par

$$\dot{\psi}_{\alpha(j,\ell)} = c_{(j,\ell)} pp(\hat{F}) \tau'_{(j,\ell)} \quad , \quad 1 \leq j \neq \ell \leq 3 \quad ,$$

où $pp(\hat{F})$ est la matrice obtenue en remplaçant chaque terme de $\hat{F}$ par sa partie principale en 0. On obtient ainsi l'égalité asymptotique entre les n-ème coefficients de la 3e ligne de $\hat{F}$

$$\left(\hat{F}_{(3,1)}[n] \quad \hat{F}_{(3,2)}[n] \quad \hat{F}_{(3,3)}[n] \right)$$

et les n-èmes coefficients des séries de Cauchy-Heine de

$$\left(c_{(2,1)} pp(\hat{F}_{(3,2)}) e^{(q_2 - q_1)(1/x)} \quad c_{(1,2)} pp(\hat{F}_{(3,1)}) e^{(q_1 - q_2)(1/x)} \quad c_{(2,3)} pp(\hat{F}_{(3,2)}) e^{(q_2 - q_3)(1/x)} \right)$$

Or nous avons vu que $\hat{F}_{(3,1)}[0] = \hat{F}_{(3,1)}[1] = 0$ et $\hat{F}_{(3,1)}[2] = -1/(2 + i/2)$, donc $pp(\hat{F}_{(3,1)}) = (-1/(2 + i/2))x^2$; et que $\hat{F}_{(3,2)}[0] = \hat{F}_{(3,2)}[1] = \hat{F}_{(3,2)}[2] = 0$ et $\hat{F}_{(3,2)}[3] = -1/(1 + i/2)$, donc $pp(\hat{F}_{(3,2)}) = (-1/(1 + i/2))x^3$.

On en déduit, pour déterminer $c_{(2,1)}$, $c_{(1,2)}$ et $c_{(2,3)}$, les équations asymptotiques

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(3,1)}[n] &\sim c_{(2,1)} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-1}{1+i/2} \xi^3 e^{-1/\xi} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \\ &= -c_{(2,1)} \frac{\Gamma(n-3)}{2i\pi(1+i/2)} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(3,2)}[n] &\sim c_{(1,2)} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{-\infty} \frac{-1}{2+i/2} \xi^2 e^{(1+i/2)/\xi} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \\ &= (-1)^{n+1} c_{(1,2)} \frac{\Gamma(n-2)}{2i\pi(2+i/2)} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{(3,3)}[n] &\sim c_{(2,3)} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{e^{7i\pi/6}\infty} \frac{-1}{1+i/2} \xi^3 e^{(1+i/2)/\xi} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \\ &= (-1)^n c_{(2,3)} \frac{\Gamma(n-3)}{2i\pi(1+i/2)^{n-2}} \quad ,\end{aligned}$$

d'où les trois formules (=trois systèmes de Cramer de dimension $k=1$)

$$\begin{cases} c_{(2,1)} &= -2i\pi(1+i/2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\widehat{F}_{(3,1)}[n]}{\Gamma(n-3)} \\ c_{(1,2)} &= -2i\pi(2+i/2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\widehat{F}_{(3,2)}[n]}{\Gamma(n-2)} \\ c_{(2,3)} &= -2i\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} (1+i/2)^{n-2} \frac{\widehat{F}_{(3,3)}[n]}{\Gamma(n-3)} \end{cases}$$

Pour effectuer le calcul numériquement, on a posé

$$\begin{aligned}L_{(2,1)}[n] &= \frac{\widehat{F}_{(3,1)}[n]}{\Gamma(n-3)} \\ L_{(1,2)}[n] &= (1+i/2)(-1)^n \frac{\widehat{F}_{(3,2)}[n]}{\Gamma(n-2)} \\ L_{(2,3)}[n] &= (-1)^{n-1} (1+i/2)^{n-4} \frac{\widehat{F}_{(3,3)}[n]}{\Gamma(n-3)}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} c_{(2,1)} &= \pi(1-2i) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{(2,1)}[n] \\ c_{(1,2)} &= \frac{-2\pi}{5}(2+9i) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{(1,2)}[n] \\ c_{(2,3)} &= \frac{\pi}{2}(4-3i) \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{(2,3)}[n] \end{cases}$$

On a calculé les valeurs des suites $L_{(j,\ell)}[n]$ jusqu'à $n=20000$. On a ensuite appliqué un procédé d'accélération au premier ordre en calculant les termes successifs des suites

$$u_{(j,\ell)}[n] = (n+1)L_{(j,\ell)}[n+1] - nL_{(j,\ell)}[n] \quad .$$

Chapitre VII

Ce procédé améliore de façon évidente la vitesse de convergence. Pour chaque invariant, les deux valeurs ainsi calculées sont très voisines. En outre, l'une des suites est croissante, l'autre décroissante d'où vraisemblablement un encadrement de la valeur cherchée.

n :	$L_{(1,2)}[n]$:	$u_{(1,2)}[n]$:	n :	$L_{(1,2)}[n]$:	$u_{(1,2)}[n]$:
4	-0.40000000 +i 1.20000000		8250	1.94581487 +i 0.43343671	1.94628530 +i 0.43348325
5	2.18000000 -i 2.24000000		8500	1.94582870 +i 0.43343808	1.94628530 +i 0.43348324
6	1.36444444 +i 4.44000000		8750	1.94584175 +i 0.43343937	1.94628529 +i 0.43348324
7	-1.34994444 -i 4.50933333		9000	1.94585407 +i 0.43344059	1.94628529 +i 0.43348324
8	7.10727556 +i 4.29581778		9250	1.94586572 +i 0.43344174	1.94628529 +i 0.43348324
9	-6.71706402 -i 0.79025126		9500	1.94587676 +i 0.43344284	1.94628528 +i 0.43348324
10	10.53506927 -i 2.64017600		9750	1.94588724 +i 0.43344387	1.94628528 +i 0.43348324
20	5.36130870 +i 14.75807099	-170.74630 +i 113.40375	10000	1.94589719 +i 0.43344486	1.94628528 +i 0.43348324
30	-9.5316348 +i 2.37981776	-271.89498 -i 520.57161	10250	1.94590666 +i 0.43344579	1.94628528 +i 0.43348324
40	1.19190958 -i 6.43092077	617.64984 -i 261.21171	10500	1.94591567 +i 0.43344668	1.94628528 +i 0.43348324
50	5.44689528 +i 0.35592454	169.06995 +i 499.91909	10750	1.94592427 +i 0.43344753	1.94628527 +i 0.43348324
60	1.78397214 +i 2.13093289	-327.71541 +i 82.91122	11000	1.94593247 +i 0.43344835	1.94628527 +i 0.43348324
70	1.12980001 +i 0.32637041	-30.40771 -i 190.29614	11250	1.94594031 +i 0.43344912	1.94628527 +i 0.43348324
80	1.96543275 +i 0.10553461	102.57556 -i 8.77611	11500	1.94594781 +i 0.43344986	1.94628527 +i 0.43348323
90	2.03461332 +i 0.46758467	2.67636 +i 49.99649	11750	1.94595499 +i 0.43345057	1.94628527 +i 0.43348323
100	1.88740943 +i 0.48170763	-21.187176 -i 0.99535	12000	1.94596187 +i 0.43345125	1.94628527 +i 0.43348323
250	1.93069968 +i 0.43192428	3.38245 -i 9.90404	12250	1.94596847 +i 0.43345191	1.94628527 +i 0.43348323
500	1.93850876 +i 0.43270999	1.94634762 +i 0.43349968	12500	1.94597481 +i 0.43345253	1.94628527 +i 0.43348323
750	1.94110455 +i 0.43296911	1.94630152 +i 0.43348943	12750	1.94598089 +i 0.43345313	1.94628526 +i 0.43348323
1000	1.94240108 +i 0.43309816	1.94629248 +i 0.43348598	13000	1.94598675 +i 0.43345371	1.94628526 +i 0.43348323
1250	1.94317856 +i 0.43317542	1.94628931 +i 0.43348477	13250	1.94599238 +i 0.43345427	1.94628526 +i 0.43348323
1500	1.94369671 +i 0.43322686	1.94628785 +i 0.43348421	13500	1.94599780 +i 0.43345481	1.94628526 +i 0.43348323
1750	1.94406672 +i 0.43326356	1.94628705 +i 0.43348391	13750	1.94600303 +i 0.43345532	1.94628526 +i 0.43348323
2000	1.94434418 +i 0.43329108	1.94628657 +i 0.43348373	14000	1.94600807 +i 0.43345582	1.94628526 +i 0.43348323
2250	1.94455995 +i 0.43331247	1.94628626 +i 0.43348361	14250	1.94601293 +i 0.43345630	1.94628526 +i 0.43348323
2500	1.94473256 +i 0.43332957	1.94628605 +i 0.43348353	14500	1.94601763 +i 0.43345677	1.94628526 +i 0.43348323
2750	1.94487376 +i 0.43334356	1.94628589 +i 0.43348347	14750	1.94602216 +i 0.43345721	1.94628526 +i 0.43348323
3000	1.94499143 +i 0.43335521	1.94628578 +i 0.43348343	15000	1.94602655 +i 0.43345765	1.94628526 +i 0.43348323
3250	1.94509098 +i 0.43336507	1.94628569 +i 0.43348339	15250	1.94603079 +i 0.43345807	1.94628526 +i 0.43348323
3500	1.94517631 +i 0.43337352	1.94628563 +i 0.43348337	15500	1.94603489 +i 0.43345847	1.94628526 +i 0.43348323
3750	1.94525026 +i 0.43338084	1.94628557 +i 0.43348335	15750	1.94603887 +i 0.43345887	1.94628526 +i 0.43348323
4000	1.94531496 +i 0.43338725	1.94628553 +i 0.43348333	16000	1.94604272 +i 0.43345925	1.94628526 +i 0.43348323
4250	1.94537205 +i 0.43339290	1.94628549 +i 0.43348332	16250	1.94604645 +i 0.43345962	1.94628526 +i 0.43348323
4500	1.94542280 +i 0.43339792	1.94628547 +i 0.43348331	16500	1.94605007 +i 0.43345997	1.94628525 +i 0.43348323
4750	1.94546820 +i 0.43340241	1.94628544 +i 0.43348330	16750	1.94605358 +i 0.43346032	1.94628525 +i 0.43348323
5000	1.94550906 +i 0.43340646	1.94628542 +i 0.43348329	17000	1.94605699 +i 0.43346066	1.94628525 +i 0.43348323
5250	1.94554603 +i 0.43341012	1.94628540 +i 0.43348328	17250	1.94606029 +i 0.43346098	1.94628525 +i 0.43348323
5500	1.94557964 +i 0.43341344	1.94628539 +i 0.43348328	17500	1.94606351 +i 0.43346130	1.94628525 +i 0.43348323
5750	1.94561032 +i 0.43341648	1.94628537 +i 0.43348327	17750	1.94606663 +i 0.43346161	1.94628525 +i 0.43348323
6000	1.94563845 +i 0.43341926	1.94628536 +i 0.43348327	18000	1.94606967 +i 0.43346191	1.94628525 +i 0.43348323
6250	1.94566432 +i 0.43342182	1.94628535 +i 0.43348327	18250	1.94607262 +i 0.43346220	1.94628525 +i 0.43348323
6500	1.94568821 +i 0.43342418	1.94628534 +i 0.43348326	18500	1.94607549 +i 0.43346249	1.94628525 +i 0.43348323
6750	1.94571032 +i 0.43342637	1.94628534 +i 0.43348326	18750	1.94607829 +i 0.43346276	1.94628525 +i 0.43348323
7000	1.94573086 +i 0.43342840	1.94628533 +i 0.43348326	19000	1.94608101 +i 0.43346303	1.94628525 +i 0.43348323
7250	1.94574998 +i 0.43343029	1.94628532 +i 0.43348325	19250	1.94608367 +i 0.43346330	1.94628525 +i 0.43348323
7500	1.94576782 +i 0.43343206	1.94628532 +i 0.43348325	19500	1.94608625 +i 0.43346355	1.94628525 +i 0.43348323
7750	1.94578452 +i 0.43343371	1.94628531 +i 0.43348325	19750	1.94608877 +i 0.43346380	1.94628525 +i 0.43348323
8000	1.94580017 +i 0.43343526	1.94628531 +i 0.43348325	20000	1.94609123 +i 0.43346404	1.94628525 +i 0.43348323

Table de convergence D

Liste des valeurs numériques de la suite convergente $L_{(1,2)}[n]$ définie par récurrence à partir des expressions ci-dessus et liste des valeurs numériques de la suite accélérée $u_{(1,2)}[n]$. Le coefficient de Stokes $c_{(1,2)}$ qui s'en déduit vaut respectivement $c_{(1,2)} = 0.01129878 - i23.09921488$ et $c_{(1,2)} = 0.0110314 - i23.10142977$.

$n :$	$L_{(2,3)}[n] :$	$u_{(2,3)}[n] :$	$n :$	$L_{(2,3)}[n] :$	$u_{(2,3)}[n] :$
5	0.02352941 +i 0.09411765		8500	0.05468210 +i 0.36033754	0.05473098 +i 0.36037345
6	0.03171857 +i 0.20530565		8750	0.05468350 +i 0.36033856	0.05473098 +i 0.36037345
7	0.02293236 +i 0.28879649		9000	0.05468482 +i 0.36033953	0.05473098 +i 0.36037345
8	0.00838562 +i 0.33739618		9250	0.05468607 +i 0.36034045	0.05473098 +i 0.36037345
9	-0.00350856 +i 0.35952452		9500	0.05468725 +i 0.36034132	0.05473098 +i 0.36037345
10	-0.00966163 +i 0.36594183	-0.01807593 +i 0.35372005	9750	0.05468837 +i 0.36034214	0.05473098 +i 0.36037345
20	0.02626117 +i 0.35030027	0.06942678 +i 0.35436291	10000	0.05468944 +i 0.36034292	0.05473098 +i 0.36037345
30	0.03833058 +i 0.35237579	0.05828742 +i 0.35790991	10250	0.05469045 +i 0.36034367	0.05473098 +i 0.36037346
40	0.04305810 +i 0.35390906	0.05636651 +i 0.35906169	10500	0.05469141 +i 0.36034438	0.05473098 +i 0.36037346
50	0.04564724 +i 0.35499172	0.05566725 +i 0.35957302	10750	0.05469233 +i 0.36034505	0.05473098 +i 0.36037346
60	0.04728951 +i 0.35577714	0.05533699 +i 0.35983606	11000	0.05469321 +i 0.36034570	0.05473098 +i 0.36037346
70	0.04842632 +i 0.35636766	0.05515515 +i 0.35998825	11250	0.05469405 +i 0.36034632	0.05473097 +i 0.36037346
80	0.04926067 +i 0.35682604	0.05504443 +i 0.36008399	11500	0.05469485 +i 0.36034691	0.05473097 +i 0.36037346
90	0.04989943 +i 0.35719146	0.05497204 +i 0.36014805	11750	0.05469562 +i 0.36034747	0.05473097 +i 0.36037346
100	0.05040431 +i 0.35748926	0.05492213 +i 0.36019300	12000	0.05469636 +i 0.36034801	0.05473097 +i 0.36037346
250	0.05304404 +i 0.35917751	0.05475835 +i 0.36034636	12250	0.05469707 +i 0.36034853	0.05473097 +i 0.36037346
500	0.05389425 +i 0.35976876	0.05473757 +i 0.36036683	12500	0.05469774 +i 0.36034903	0.05473097 +i 0.36037346
750	0.05417462 +i 0.35996886	0.05473387 +i 0.36037054	12750	0.05469840 +i 0.36034951	0.05473097 +i 0.36037346
1000	0.05431425 +i 0.36006946	0.05473259 +i 0.36037183	13000	0.05469902 +i 0.36034997	0.05473097 +i 0.36037346
1250	0.05439785 +i 0.36013000	0.05473200 +i 0.36037242	13250	0.05469962 +i 0.36035041	0.05473097 +i 0.36037346
1500	0.05445351 +i 0.36017043	0.05473168 +i 0.36037274	13500	0.05470021 +i 0.36035084	0.05473097 +i 0.36037346
1750	0.05449324 +i 0.36019935	0.05473149 +i 0.36037294	13750	0.05470076 +i 0.36035125	0.05473097 +i 0.36037346
2000	0.05452301 +i 0.36022106	0.05473136 +i 0.36037306	14000	0.05470130 +i 0.36035165	0.05473097 +i 0.36037346
2250	0.05454615 +i 0.36023795	0.05473128 +i 0.36037315	14250	0.05470182 +i 0.36035203	0.05473097 +i 0.36037346
2500	0.05456466 +i 0.36025147	0.05473122 +i 0.36037321	14500	0.05470233 +i 0.36035240	0.05473097 +i 0.36037346
2750	0.05457980 +i 0.36026254	0.05473117 +i 0.36037326	14750	0.05470281 +i 0.36035276	0.05473097 +i 0.36037346
3000	0.05459242 +i 0.36027177	0.05473114 +i 0.36037329	15000	0.05470328 +i 0.36035310	0.05473097 +i 0.36037346
3250	0.05460309 +i 0.36027958	0.05473111 +i 0.36037332	15250	0.05470374 +i 0.36035344	0.05473097 +i 0.36037346
3500	0.05461223 +i 0.36028628	0.05473109 +i 0.36037334	15500	0.05470417 +i 0.36035376	0.05473097 +i 0.36037346
3750	0.05462015 +i 0.36029208	0.05473108 +i 0.36037336	15750	0.05470460 +i 0.36035407	0.05473097 +i 0.36037346
4000	0.05462709 +i 0.36029716	0.05473106 +i 0.36037337	16000	0.05470501 +i 0.36035437	0.05473097 +i 0.36037346
4250	0.05463320 +i 0.36030165	0.05473105 +i 0.36037338	16250	0.05470541 +i 0.36035467	0.05473097 +i 0.36037347
4500	0.05463864 +i 0.36030563	0.05473104 +i 0.36037339	16500	0.05470580 +i 0.36035495	0.05473097 +i 0.36037347
4750	0.05464350 +i 0.36030920	0.05473103 +i 0.36037340	16750	0.05470617 +i 0.36035523	0.05473097 +i 0.36037347
5000	0.05464788 +i 0.36031241	0.05473103 +i 0.36037341	17000	0.05470654 +i 0.36035550	0.05473097 +i 0.36037347
5250	0.05465184 +i 0.36031531	0.05473102 +i 0.36037341	17250	0.05470689 +i 0.36035576	0.05473097 +i 0.36037347
5500	0.05465544 +i 0.36031795	0.05473102 +i 0.36037342	17500	0.05470724 +i 0.36035601	0.05473097 +i 0.36037347
5750	0.05465872 +i 0.36032037	0.05473101 +i 0.36037342	17750	0.05470757 +i 0.36035626	0.05473097 +i 0.36037347
6000	0.05466173 +i 0.36032258	0.05473101 +i 0.36037343	18000	0.05470790 +i 0.36035650	0.05473097 +i 0.36037347
6250	0.05466450 +i 0.36032461	0.05473100 +i 0.36037343	18250	0.05470821 +i 0.36035673	0.05473097 +i 0.36037347
6500	0.05466706 +i 0.36032649	0.05473100 +i 0.36037343	18500	0.05470852 +i 0.36035695	0.05473097 +i 0.36037347
6750	0.05466943 +i 0.36032823	0.05473100 +i 0.36037344	18750	0.05470882 +i 0.36035717	0.05473097 +i 0.36037347
7000	0.05467163 +i 0.36032984	0.05473099 +i 0.36037344	19000	0.05470911 +i 0.36035739	0.05473097 +i 0.36037347
7250	0.05467368 +i 0.36033134	0.05473099 +i 0.36037344	19250	0.05470939 +i 0.36035760	0.05473097 +i 0.36037347
7500	0.05467559 +i 0.36033275	0.05473099 +i 0.36037344	19500	0.05470967 +i 0.36035780	0.05473097 +i 0.36037347
7750	0.05467737 +i 0.36033406	0.05473099 +i 0.36037344	19750	0.05470994 +i 0.36035800	0.05473097 +i 0.36037347
8000	0.05467905 +i 0.36033529	0.05473099 +i 0.36037345	20000	0.05471020 +i 0.36035819	0.05473097 +i 0.36037347

Table de convergence E

Liste des valeurs numériques de la suite convergente $L_{(2,3)}[n]$ définie par récurrence à partir des expressions ci-dessus et liste des valeurs numériques de la suite accélérée $u_{(2,3)}[n]$. Le coefficient de Stokes $c_{(2,3)}$ qui s'en déduit vaut respectivement $c_{(2,3)} = 2.04190482 + i2.00638152$ et $c_{(2,3)} = 2.04210476 + i2.00637967$.

$n :$	$L_{(2,1)}[n] :$	$u_{(2,1)}[n] :$	$n :$	$L_{(2,1)}[n] :$	$u_{(2,1)}[n] :$
4	-1.60146550 + i 0.90901689		8250	-2.96516454 + i 1.44614964	-2.96523092 + i 1.44564718
5	-3.37106436 + i 2.66079988		8500	-2.96516649 + i 1.44613487	-2.96523093 + i 1.44564721
6	-4.16376203 + i 4.36694036		8750	-2.96516833 + i 1.44612093	-2.96523093 + i 1.44564724
7	-4.00612147 + i 5.36062759		9000	-2.96517007 + i 1.44610778	-2.96523093 + i 1.44564727
8	-3.40503428 + i 5.53023524		9250	-2.96517172 + i 1.44609533	-2.96523093 + i 1.44564729
9	-2.80218888 + i 5.11154840		9500	-2.96517328 + i 1.44608354	-2.96523094 + i 1.44564731
10	-2.40895544 + i 4.42187107	-0.67915563 - i 3.44348930	9750	-2.96517475 + i 1.44607235	-2.96523094 + i 1.44564733
20	-2.91481042 + i 1.79599574	-3.16686968 + i 1.28329385	10000	-2.96517616 + i 1.44606173	-2.96523094 + i 1.44564735
30	-2.94882938 + i 1.63988943	-2.96993104 + i 1.37038878	10250	-2.96517749 + i 1.44605162	-2.96523094 + i 1.44564737
40	-2.95337953 + i 1.57785689	-2.96508283 + i 1.41003246	10500	-2.96517877 + i 1.44604200	-2.96523095 + i 1.44564739
50	-2.95564339 + i 1.54584261	-2.96447278 + i 1.42502530	10750	-2.96517998 + i 1.44603282	-2.96523095 + i 1.44564740
60	-2.95711375 + i 1.52630911	-2.96449364 + i 1.43221672	11000	-2.96518114 + i 1.44602406	-2.96523095 + i 1.44564741
70	-2.95817491 + i 1.51314891	-2.96460400 + i 1.43621013	11250	-2.96518225 + i 1.44601569	-2.96523095 + i 1.44564743
80	-2.95898472 + i 1.50368039	-2.96471061 + i 1.43865478	11500	-2.96518331 + i 1.44600769	-2.96523095 + i 1.44564744
90	-2.95962550 + i 1.49654129	-2.96479852 + i 1.44025921	11750	-2.96518432 + i 1.44600002	-2.96523095 + i 1.44564745
100	-2.96014608 + i 1.49096617	-2.96486846 + i 1.44136863	12000	-2.96518529 + i 1.44599268	-2.96523096 + i 1.44564746
250	-2.96310326 + i 1.46279254	-2.96516557 + i 1.44503029	12250	-2.96518622 + i 1.44598563	-2.96523096 + i 1.44564747
500	-2.96415052 + i 1.45406784	-2.96521425 + i 1.44549839	12500	-2.96518712 + i 1.44597887	-2.96523096 + i 1.44564748
750	-2.96450694 + i 1.45122808	-2.96522350 + i 1.44558207	12750	-2.96518798 + i 1.44597237	-2.96523096 + i 1.44564749
1000	-2.96468654 + i 1.44982070	-2.96522676 + i 1.44561099	13000	-2.96518880 + i 1.44596612	-2.96523096 + i 1.44564750
1250	-2.96479475 + i 1.44898023	-2.96522828 + i 1.44562429	13250	-2.96518960 + i 1.44596011	-2.96523096 + i 1.44564751
1500	-2.96486708 + i 1.44842156	-2.96522910 + i 1.44563148	13500	-2.96519036 + i 1.44595432	-2.96523096 + i 1.44564752
1750	-2.96491884 + i 1.44802331	-2.96522960 + i 1.44563581	13750	-2.96519110 + i 1.44594874	-2.96523096 + i 1.44564752
2000	-2.96495770 + i 1.44772505	-2.96522992 + i 1.44563861	14000	-2.96519181 + i 1.44594336	-2.96523096 + i 1.44564753
2250	-2.96498796 + i 1.44749334	-2.96523015 + i 1.44564052	14250	-2.96519250 + i 1.44593817	-2.96523096 + i 1.44564754
2500	-2.96501219 + i 1.44730813	-2.96523031 + i 1.44564189	14500	-2.96519316 + i 1.44593316	-2.96523096 + i 1.44564754
2750	-2.96503203 + i 1.44715670	-2.96523042 + i 1.44564291	14750	-2.96519381 + i 1.44592832	-2.96523097 + i 1.44564755
3000	-2.96504856 + i 1.44703059	-2.96523051 + i 1.44564368	15000	-2.96519442 + i 1.44592364	-2.96523097 + i 1.44564755
3250	-2.96506256 + i 1.44692392	-2.96523058 + i 1.44564428	15250	-2.96519502 + i 1.44591912	-2.96523097 + i 1.44564756
3500	-2.96507456 + i 1.44683254	-2.96523064 + i 1.44564475	15500	-2.96519560 + i 1.44591474	-2.96523097 + i 1.44564756
3750	-2.96508497 + i 1.44675337	-2.96523068 + i 1.44564513	15750	-2.96519616 + i 1.44591050	-2.96523097 + i 1.44564756
4000	-2.96509408 + i 1.44668411	-2.96523072 + i 1.44564545	16000	-2.96519671 + i 1.44590639	-2.96523097 + i 1.44564757
4250	-2.96510212 + i 1.44662302	-2.96523075 + i 1.44564571	16250	-2.96519724 + i 1.44590241	-2.96523097 + i 1.44564758
4500	-2.96510926 + i 1.44656873	-2.96523077 + i 1.44564592	16500	-2.96519775 + i 1.44589855	-2.96523097 + i 1.44564758
4750	-2.96511566 + i 1.44652017	-2.96523080 + i 1.44564611	16750	-2.96519824 + i 1.44589480	-2.96523097 + i 1.44564758
5000	-2.96512142 + i 1.44647647	-2.96523081 + i 1.44564626	17000	-2.96519872 + i 1.44589116	-2.96523097 + i 1.44564759
5250	-2.96512663 + i 1.44643694	-2.96523083 + i 1.44564640	17250	-2.96519919 + i 1.44588763	-2.96523097 + i 1.44564759
5500	-2.96513136 + i 1.44640101	-2.96523084 + i 1.44564652	17500	-2.96519965 + i 1.44588421	-2.96523097 + i 1.44564760
5750	-2.96513569 + i 1.44636821	-2.96523086 + i 1.44564662	17750	-2.96520009 + i 1.44588087	-2.96523097 + i 1.44564760
6000	-2.96513966 + i 1.44633814	-2.96523087 + i 1.44564671	18000	-2.96520052 + i 1.44587763	-2.96523097 + i 1.44564760
6250	-2.96514330 + i 1.44631049	-2.96523088 + i 1.44564679	18250	-2.96520093 + i 1.44587448	-2.96523097 + i 1.44564760
6500	-2.96514667 + i 1.44628496	-2.96523088 + i 1.44564686	18500	-2.96520134 + i 1.44587142	-2.96523097 + i 1.44564761
6750	-2.96514979 + i 1.44626133	-2.96523089 + i 1.44564692	18750	-2.96520173 + i 1.44586843	-2.96523097 + i 1.44564761
7000	-2.96515269 + i 1.44623939	-2.96523090 + i 1.44564697	19000	-2.96520212 + i 1.44586553	-2.96523097 + i 1.44564761
7250	-2.96515538 + i 1.44621896	-2.96523090 + i 1.44564702	19250	-2.96520249 + i 1.44586270	-2.96523097 + i 1.44564762
7500	-2.96515790 + i 1.44619989	-2.96523091 + i 1.44564707	19500	-2.96520286 + i 1.44585994	-2.96523097 + i 1.44564762
7750	-2.96516026 + i 1.44618206	-2.96523091 + i 1.44564711	19750	-2.96520321 + i 1.44585725	-2.96523097 + i 1.44564762
8000	-2.96516247 + i 1.44616535	-2.96523092 + i 1.44564715	20000	-2.96520356 + i 1.44585463	-2.96523097 + i 1.44564762

Table de convergence F

Liste des valeurs numériques de la suite convergente $L_{(2,1)}[n]$ définie par récurrence à partir des expressions ci-dessus et liste des valeurs numériques de la suite accélérée $u_{(2,1)}[n]$. Le coefficient de Stokes $c_{(2,1)}$ qui s'en déduit vaut respectivement $c_{(2,1)} = -7.27522993 + i32.37321348$ et $c_{(2,1)} = -7.27700579 + i32.37214153$.

Bibliographie

- [BV p85] D.G. BABBITT, V.S. VARADARAJAN, *Local moduli for meromorphic differential equation I, the Stokes sheaf and its cohomology*, Preprint (cf. Bull. AMS, vol.12, n° 1, 1985, pp 95-98), UCLA 1985.
- [BV89] D.G. BABBITT, V.S. VARADARAJAN, *Local moduli for meromorphic differential equation*, Astérisque n° 169 – 170 (1989).
- [Bal80] W. BALSER, *Zum Einzigkeitssatz in der Invariantentheorie meromorpher Differentialgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 318 (1980), 51-82.
- [Ba89] M. BARKATOU, *Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe*, Thèse, Institut National Polytechnique à Grenoble (1989).
- [Be79] D. BERTRAND, *Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, Séminaire Bourbaki, 31e année, juin 1979, exposé n° 538.
- [Be85] D. BERTRAND, *Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle*, Cours de 3e cycle à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1985-86; notes de cours rédigées par René Lardon.
- [Bi13] G.D. BIRKHOFF, *Equivalent singular points of ordinary linear differential equations*, Math. Ann. vol.74 n° 1 (1913), 134-139.
- [Chen90] G. CHEN, *Solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires homogènes*, Thèse, U.S.T.M. de Grenoble (1990).
- [De70] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics n° 163, Springer-Verlag (1970).
- [De77] P. DELIGNE, Lettre à Malgrange (22 août 77).
- [De86] P. DELIGNE, Lettre à Varadarajan (4 janvier 86), lettre à Ramis (7 janvier 86), lettres à Ramis (25 et 28 février 86).
- [DeMi80] P. DELIGNE, J.S. MILNE, *Tannakian categories*, Lectures Notes in Mathematics n° 900, Springer-Verlag (1980).
- [D.Du87] D. DUVAL, *Diverses questions relatives au calcul formel avec des nombres algébriques*, Thèse d'Etat, U.S.T.M. de Grenoble (1987).
- [Duv83] A. DUVAL, *Etude asymptotique d'une intégrale analogue à la fonction "Γ modifiée"*, in Lecture Notes in Mathematics, Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe, II, édité par R. Gérard et J.-P. Ramis, n° 1015, Springer-Verlag (1983) 50-63.
- [DM89] A. DUVAL, C. MITSCHI, *Matrices de Stokes et groupe de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées*, Pacific Journal of Math., vol.138 n° 1 (1989) .
- [Ec90] J. ECALLE, *L'accélération et ses applications*, à paraître dans "Travaux en cours", Hermann, 1990.

- [Fr56] J. FRENKEL, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Thèse 22 décembre 1956, Gauthier-Villars, série A n° 2963, n° d'ordre 3835.
- [Hi87] A. HILALI, *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*, Thèse, U.S.T.M. de Grenoble (1987).
- [Hu42] M. HUKUHARA, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III*, Mem. Fac. Sci. Kyushu University 2 (1942), 125-137.
- [Jur78] W.B. JURKAT, *Meromorphe differentialgleichungen*, Lecture Notes in Mathematics n° 637, Springer-Verlag (1978).
- [JLP76] W. JURKAT, D. LUTZ, A. PEYERIMHOFF, *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations, I*, Journal of Math. Analysis and Applications 53 (1976), 438-470; *II*, Houston J. Math. vol.2, n° 2 (1976), 207-238.
- [Kol73] E.R. KOLCHIN, *An introduction to differential algebra*, Academic Press, 1973.
- [L-R90] M. LODAY-RICHAUD, *Calcul des invariants de Birkhoff des systèmes d'ordre deux*, Funkcialaj Ekvacioj, 33 (1990), 161-225; Prépublication d'Orsay 88-31 (1988).
- [L-R avril90] M. LODAY-RICHAUD, *Introduction à la multisommabilité*, Gazette des mathématiciens n° 44, SMF (avril 1990), 41-63.
- [Mal74] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement mathématique n° 20, fasc.1-2 (1974), 147-176.
- [Mal79] B. MALGRANGE, *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers*, in Lecture Notes in Mathematics, Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe, édité par R. Gérard et J.-P. Ramis, n° 712, Springer-Verlag (1979), 77-86.
- [Mal p80] B. MALGRANGE, *Modules microdifférentiels et classes de Gevrey*, Preprint, Institut Fourier, Grenoble (1980).
- [Mal81] B. MALGRANGE, *Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, Séminaire Bourbaki n° 582, nov. 1981.
- [Mal83] B. MALGRANGE, *La classification des connexions irrégulières à une variable*, "Mathématiques et Physique", Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure (Paris 1979-82), 381-399; Progress in Math. vol.37, Birkhäuser (1983).
- [Mal85] B. MALGRANGE, *Introduction aux travaux de J. Ecalte*, L'Enseignement Mathématique, t.31 (1985), 261-282.
- [MR82] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications Mathématiques de l'IHES n° 55 (1982), 63-164.
- [MR89] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Théorie de Galois différentielle et resommation*, Computer algebra and differential equations, E. Tournier éd., Academic Press, 1989.
- [MR90] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Elementary acceleration and multisummability*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, série A, Physique théorique, à paraître.
- [MR*] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Théorie de Cauchy sauvage*, en préparation.
- [Ra80] J.-P. RAMIS, *Les séries k-sommables et leurs applications*, Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory, Proceedings "Les Houches" 1979; D. Iagolnitzer ed., Springer Lecture Notes in Physics n° 126 (1980), 178-199.

Bibliographie

- [Ra p85] J.-P. RAMIS, *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, Preprint n°45 Instituto de Matematica Pura e Aplicada, IMPA, Rio-de-Janeiro (1985), 1-38.
- [Ra85] J.-P. RAMIS, *Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot*, CRAS Paris, t.301 (1985), 165-167; *Phénomène de Stokes et resommation*, CRAS Paris, t.301 (1985), 99-102.
- [Ra88] J.-P. RAMIS, *Irregular connections, savage π_1 and confluence*, Proceedings of a Conference at Katata, Japan 1987, Taniguchi Foundation (1988).
- [RS89] J.-P. RAMIS, Y. SIBUYA *Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type*, Asymptotic Analysis 2 (1989), 39-94.
- [R-J88] F. RICHARD-JUNG, *Représentations graphiques de solutions d'équations différentielles dans le champ complexe*, Thèse, Université Louis-Pasteur à Strasbourg (1988).
- [Sib76] Y. SIBUYA, *Linear differential equations in the complex domain; problems of analytic continuation*, Kinokuniya, Tokyo (1976), en japonais.
- [Sib77] Y. SIBUYA, *Stokes phenomena*, Bull. Am. Math. Soc., vol.83, n° 5 (1977), 1075-1077.
- [Sib90] Y. SIBUYA, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Translations of Mathematical Monographs, vol.82, AMS, 1990.
- [Sto1857] G.G. STOKES, *On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., vol.X (1857), 106-128.
- [Tho90] J. THOMANN, *Problèmes algorithmiques posés par la resommation numérique des séries multisommables*, Actes des Journées du PRC "Mathématiques et Informatique" des 21 et 22 mai 1990; Publication interne de l'Université Paris 6, à paraître.
- [Tho91] J. THOMANN, *Resummation of formal series. Solutions of second order linear complex ordinary differential equations near irregular singularities*, Numerische Mathematik, à paraître.
- [T87] E. TOURNIER, *Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR*, Thèse d'Etat, U.S.T.M. de Grenoble (1987).
- [Wa65] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New-York, 1965; reprint R.E. Krieger Publishing Co, inc., 1976.