ANNE DE BOUARD

Étude de quelques propriétés d'équations d'ondes non linéaires dispersives de type Schrödinger, 1992

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY 63620

THÈSE

présentée
pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Anne DE BOUARD

Sujet :

Etude de quelques propriétés d'équations d'ondes non linéaires dispersives de type Schrödinger

soutenue le 17janvier 1992 devant la Commission d'examen

MM. R. TEMAM, Président
M. BALABANE
J.-M. GHIDAGLIA
J. GINIBRE
G. LEBEAU
J.-C. SAUT

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Claude Saut, qui a su diriger ce travail avec beaucoup de présence, et qui n'a cessé de me prodiguer conseils et encouragements tout au long de sa réalisation .

Je remercie vivement Roger Temam d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Je suis très reconnaissante à Jean Ginibre, qui a lu ce manuscrit avec beaucoup d'attention et qui m'a permis, par ses remarques, de simplifier considérablement certaines preuves, ainsi qu'à Mikhaël Balabane, qui a également accepté de tenir le rôle de rapporteur.

Je remercie également Jean-Michel Ghidaglia et Gilles Lebeau, qui ont accepté de faire partie du jury.

Ma gratitude va également à Igor Barashenkov à qui je suis redevable du sujet de la troisième partie de cette thèse, ainsi que d'utiles discussions.

J'adresse bien sûr mes remerciements à toute l'équipe du laboratoire d'analyse numérique pour m'avoir accueillie, ainsi qu'à Khalil, dont l'aide m'a souvent été précieuse, et aux thésards, malheureuseument trop nombreux pour pouvoir tous les citer ici, qui ont contribué à créer une ambiance amicale.

Je remercie particulièrement Danièle Le Meur, à qui je dois la frappe d'une bonne partie de cette thèse, pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Enfin, merci à tous ceux qui m'ont soutenue et encouragée, à Renaud, à ma famille, à mes amis.

Abstract : This thesis is divided into three parts, each one featuring the study of some properties of nonlinear Schrödinger type dispersive wave equations arising in several fields of physics.

In the first part, we study the Cauchy problem associated with a nonlinear Schrödinger equation with an external magnetic field. Under some growth restrictions on the potentials and the nonlinear term in the equation, we prove the local existence and the uniqueness of solutions for the Cauchy problem for this equation in a weighted Sobolev space. We also prove the conservation of the associated energy.

In the second part, we study the existence of smooth analytic solutions for a general nonlinear Schrödinger type equation. This equation contains some physical models arising in the context of water waves. In these models, the linear term may be a differential operator of order larger than two, and the nonlinear term may be nonlocal.

The third part is devoted to the study of the existence and the instability of some localised stationary solutions of a nonlinear Schrödinger equation with a general nonlinearity. These localised solutions have a nonzero limit when the space variable goes to infinity, and for some particular nonlinear terms, they have a definite physical interpretation. We prove, by linearizing the equation, that when these solutions exist, they are always unstable solutions of the evolution equation.

Key words : Schrödinger equation, external magnetic fields, water waves, solitary waves, orbital stability.

A.M.S. subject classification : 35Q55, 35A07, 35B65, 35B35, 35Q51.

Table des Matières

Introduction

Cette thèse est composée de trois parties portant chacune sur l'étude de certaines propriétés d'équations d'ondes non linéaires dispersives de type Schrödinger intervenant dans différents domaines de la physique.

Dans les deux premières parties, on étudie l'existence locale et l'unicité des solutions du problème de Cauchy, et dans la troisième partie on s'intéresse à l'existence et l'instabilité de certaines ondes solitaires non classiques.

1 Equation de Schrödinger non linéaire avec champ magnétique

Dans cette partie, on étudie le problème de Cauchy associé à une équation de Schrödinger non linéaire avec un champ magnétique externe. L'équation considérée est la suivante :

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(x))^2 u + V(x)u + \epsilon|u|^{p-1}u, \qquad (1)$$

où $u(x,t)$ est une fonction de $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes, $\epsilon \in \mathbb{R}$, V est un potentiel à valeurs réelles et $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x))$ est un potentiel vectoriel modélisant l'action d' un champ magnétique externe B représenté par la matrice $(B_{jk}) = (\partial_j A_k - \partial_k A_j)$.

Sous certaines restrictions de croissance sur les fonctions V, A_j et (B_{jk}), $1 \leq j, k \leq n$, on montre, pour $1 < p < 1 + \frac{4}{n-2}$, l'existence locale en temps, et l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour cette équation dans l' espace de Sobolev avec poids:

$$\sum(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^n), |x|u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

et la conservation de l'énergie associée définie par:

$$E(u(t)) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u + iA(x)u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|u|^2 dx + \frac{\epsilon}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1} dx$$

pendant le temps durant lequel la solution $u(t)$ de l'équation reste dans l'espace $\sum(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, on montre également le caractère localement bien posé du problème de Cauchy dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$, ainsi que l'existence globale des solutions dans $\sum(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas où le potentiel magnétique A est nul, et où le potentiel scalaire $V(x)$ satisfait une condition supplémentaire, on montre un résultat d'explosion en temps fini, c'est à dire l'existence de données initiales dans $\sum(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles la solution correspondante n'est pas globale.

Tous ces résultats sont analogues aux résultats bien connus concernant le problème de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour l'équation de Schrödinger classique, c'est à dire sans champ magnétique ni potentiel V (voir par exemple [2], [3] et [6]). Leur démonstration repose sur le même type d'estimations, la principale difficulté résidant ici dans le fait que la dérivation par rapport à la variable d'espace x et la multiplication par x ne commutent pas avec le semi-groupe engendré par l'opérateur

$$i\partial_t - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(x))^2 \ + \ V(x)$$

i.e $\sum(\mathbb{R}^n)$ n'est pas exactement égal à l'espace d'énergie. Cette difficulté est surmontée en utilisant certaines propriétés du semi-groupe établies par Yajima (voir [7]).

Ce travail a donné lieu à un article paru dans *Differential and Integral Equations*.

2 Solutions analytiques pour des équations de Schrödinger non linéaires non elliptiques

Dans cette partie, on étudie l'existence de solutions analytiques très régulières pour les équations d'évolution de type Schrödinger suivantes:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} \ + \ Lu \ + \ F(u) \ = \ 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Ici encore, $u(t,x)$ est une fonction à valeurs complexes, L est un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants de symbole $p(\xi)$ réel. Le terme non linéaire $F(u)$ est composé d'un terme polynômial à coefficients complexes dépendants de $u, \overline{u}$ et de leurs dérivées d'ordre un en espace, et d'un terme non local de la forme $u\mathcal{H}(\partial_x^\alpha |u|^2)$ où α est un multi-indice de longueur au plus un, $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire de "type zéro", c'est à dire défini par la convolution avec une distribution tempérée homogène de degré -n.

Le résultat obtenu établit, lorsque la donnée initiale admet un prolongement analytique appartenant à un espace du type H^2 de Hardy, sur une "bande" de $\mathbb{C}^n$ de la forme : $\{z \in \mathbb{C}^n, \ |Imz_j| < r, \ j = 1,..,n\}$, l'existence locale et l'unicité d'une solution de l'équation admettant un prolongement analytique du même type sur une bande éventuellement moins large.

Ceci généralise un résultat déjà connu pour l'équation de Schrödinger non linéaire classique et pour l'équation de Korteweg-de Vries:

$$u_t \ + \ u_{xxx} \ + \ a(u)u_x \ = \ 0$$

où $a(\lambda)$ est un polynôme (voir [4] et [5]).Ce résultat s'applique également à des modèles physiques régissant le mouvement des ondes aquatiques de surface et faisant intervenir des dérivées en espace d'ordre supérieur de la fonction u, ainsi que des termes non linéaires non locaux.

Le plus célèbre de ces modèles est le système de Davey-Stewartson:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \delta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = \eta|u|^2 u + bu\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & = \dfrac{\partial |u|^2}{\partial x} \end{cases}$$

où δ, η, b sont des paramètres réels.

D'autres modèles sont également considérés, notamment un modèle dû à Dysthe donnant une équation dont le terme linéaire est un opérateur différentiel du troisième ordre.

De plus, lorsque l'opérateur L est un opérateur différentiel homogène d'ordre deux (non nécessairement elliptique) comme c'est le cas par exemple pour le système de Davey-Stewartson, la globalité de ces solutions très régulières pour des données initiales petites est également établie.

Ce travail a fait l'objet d'un article à paraître dans *Journal of Differential Equations*.

3 Instabilité des bulles stationnaires

L'équation de Schrödinger "$\psi^3 - \psi^5$" suivante:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \alpha_1\psi + \alpha_3|\psi|^2\psi - \alpha_5|\psi|^4\psi \ = \ 0$$

possède, pour certaines valeurs des paramètres α_i, des solutions localisées se propageant avec une vitesse v, pouvant être interprétées comme des bulles de raréfaction dans un condensat de Bose (voir [1]). Ces solutions localisées correspondent à la "condition aux limites":

$$\psi(x,t) \to \sqrt{\rho_0}e^{i(\mu(\frac{x}{|x|}))} \text{ quand } |x| \to +\infty$$

où ρ_0 est une constante strictement positive, μ dépend de la vitesse de propagation v et est égale à zéro dans le cas particulier de solutions stationnaires, i.e quand $v = 0$. De telles solutions ont été explicitées en dimension un, et trouvées numériquement en dimension supérieures (voir [1]).

Dans cette partie, on considère l'équation de Schrödinger suivante:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + F(|\psi|^2)\psi \ = \ 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \tag{3}$$

et on étudie l'existence et l'instabilité de solutions stationnaires localisées de cette équation ayant un comportement analogue à celui des solutions précédentes (avec $\mu = 0$) lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

On montre d'abord l'existence de telles solutions sous certaines hypothèses d'ailleurs quasi-optimales sur F. On s'aperçoit que l'émergence de ces solutions est liée à l'existence d'interactions compétitives dans le terme non linéaire: de telles solutions existent si le potentiel de l'énergie associée à cette équation admet deux minima relatifs distincts dont l'un en ρ_0, ce dernier n'étant pas un minimum absolu.

Ces solutions sont appelées des "bulles stationnaires", par analogie avec l'équation de Schrödinger "$\psi^3 - \psi^5$".

En linéarisant l'équation près d'une "bulle stationnaire" ϕ, on obtient le système suivant pour $U = (Reu, Imu)^t$:

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \mathcal{A}\mathrm{U}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ -L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

où:

$$\begin{cases} \mathrm{L}_1 v = -\Delta v - F(\phi^2)v \\ \mathrm{L}_2 v = -\Delta v - F(\phi^2)v - 2\phi^2 F'(\phi^2)v \end{cases}$$

L'étude du spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$ nous permet de démontrer que les "bulles stationnaires" sont toujours instables au sens suivant:

Théorème : *On suppose F régulière, $F(\rho_0) = 0$, $F'(\rho_0) < 0$, $m > \frac{n}{2}$. Alors pour toute bulle stationnaire ϕ, $\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists u_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$ avec $||u_0||_{H^m} < \delta$, tel que la solution $v(t)$ de l'équation (3) avec $v(0) = u_0 + \phi$ vérifie $||\phi - v(t_0)||_{H^m} > \epsilon$ pour un $t_0 > 0$.*

Il est à noter que le comportement des "bulles stationnaires" diffère de celui des ondes solitaires bien connues de l'équation de Schrödinger non linéaire que sont les états stationnaires, c'est à dire les solutions de la forme $\phi_\omega(x,t) = exp(i\omega t)u_\omega(x)$, avec $u_\omega \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Il est en effet connu que les états stationnaires peuvent avoir un comportement stable ou instable selon le terme non linéaire considéré.

Bibliographie

[1] I.V. Barashenkov, V.G. Makhankov: *Soliton like "bubbles " in a system of interacting bosons*, Phys. Lett. **A.128**, 52-56 (1988)

[2] J. Ginibre, G. Velo : *On a class of nonlinear Schrödinger equations I* , J. Funct. Anal. , **32**, 1-32 (1979)

[3] R. Glassey : *On the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations* , J. Math. Phys. **18** , 1794-1797, (1977)

[4] N. Hayashi : *Analyticity of solutions to the Korteweg - de Vries equation*, Preprint

[5] N. Hayashi, S. Saitoh : *Analyticity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations* , Comm. Math. Phys. **129**, 27-41 (1990)

[6] T. Kato : *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **46**, 113-129 (1987)

[7] K. Yajima : *Schrödinger evolution equations with magnetic field*, J. Anal. Math. **56**, 29-76 (1991)

Chapitre I :
Une Equation de Schrödinger Non-Linéaire avec Champ Magnétique

Differential and Integral Equations, Volume 4, Number 1, January 1991, pp. 73–88.

NONLINEAR SCHROEDINGER EQUATIONS WITH MAGNETIC FIELDS

ANNE DE BOUARD
Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS et Université Paris-Sud
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

(Submitted by: Roger Temam)

Abstract. We study the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with magnetic field. Under some growth conditions on the potentials, we show the existence of solutions in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and in a weighted Sobolev space Σ. We also establish the continuous dependence on the initial value, and the conservation of energy when the solution is in Σ.

1. Introduction. We consider the nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^n$:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-i\partial_j - A_j(x))^2 u + V(x)u + \epsilon|u|^{p-1}u, \tag{1.1}$$

where $u = u(t,x)$ is a complex-valued function defined on $[-T,T] \times \mathbb{R}^n$ for some $T > 0$. We show the local existence of solutions for the Cauchy problem in the function space

$$\Sigma = \left\{u \in S'(\mathbb{R}^n),\ (1+|x|^2)^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (I-\Delta)^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

if $1 \le p < 1 + \frac{4}{n-2}$, and in $L^2(\mathbb{R}^n)$ if $1 \le p \le 1 + \frac{4}{n}$, when the vector potential $A = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$ and the scalar potential V are smooth and satisfy the same growth conditions as in [15] (see below for a precise statement). We choose this power nonlinearity for simplicity, but we can allow more general terms, as in [7] or [10].

We denote by H the operator associated with the steady linear equation. Such operators have been studied for example in [4], [12] or [15].

In all the paper, our assumptions will be the following:

H1: We assume that for $j \in \{1,\ldots,n\}$, $A_j(x)$ is real valued, C^∞ on $\mathbb{R}^n$. If $B = (B_{jk})$ with $B_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$, then there exists $\epsilon > 0$ such that

$$|\partial^\alpha B(x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{-1-\epsilon}, \quad \forall|\alpha| \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|\partial^\alpha A(x)| \le C_\alpha, \forall|\alpha| \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

H2: V is real valued, C^∞ on $\mathbb{R}^n$, $|\partial^\alpha V(x)| \le C_\alpha$, $\forall|\alpha| \ge 2$; in addition we assume that V is bounded from below; i.e., we can assume that there exists $m > 0$ such that $V(x) \ge m$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Received for publication May 10, 1990.
AMS Subject Classifications: 35Q20, 35A07.

The initial value problem for (1.1) has been studied in the space of energy in the case $A = V = 0$ in particular by Ginibre and Velo [7, 8] or Kato [10], and in the case $A = 0$ by Oh [11]. All their methods are based on some L^p estimates for the propagator of the linear equation. When A and V satisfy H1 and H2, Yajima has proved (see [15]) that near $t = 0$, the propagator is an integral operator and its kernel has the asymptotic form

$$(2\pi it)^{-n/2}a(t,x,y)e^{i\tilde{S}(t,x,y)}$$

where $\tilde{S}$ and a are smooth functions, $\tilde{S}$ is real and a is bounded. This will allow us to obtain the same L^p estimates as in the usual case, and to solve the Cauchy problem in Σ by using an adaptation of Kato's method [9], since we have $D(H^{1/2}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \langle u, Hu\rangle \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \subset \Sigma$.

For that purpose, we will need some estimates on ∇u and xu. The fact that ∇ does not commute with H will be overcome by using an expression of $\nabla S(t)$ which was derived by Yajima (see [15], Proposition 2.7). However, this method does not seem to be applicable to obtain regular solutions of (1.1). Hence, in order to prove the conservation of the energy

$$E(u) = \frac{1}{2}\langle u, Hu\rangle + \frac{\epsilon}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx,$$

we will have to consider regularized equations, as in [7] or [11]. We introduce the following notation: we set for any integer k

$$\Sigma(k) = \left\{u \in S'(\mathbb{R}^n),\ (I-\Delta)^{k/2}u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (1+|x|^2)^{k/2}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

and for $q \geq 1$,

$$\Sigma^{1,q} = \{u \in L^q(\mathbb{R}^n),\ \nabla u \in L^q(\mathbb{R}^n),\ xu \in L^q(\mathbb{R}^n)\}.$$

$\Sigma(1)$ will be denoted as Σ and we will use L^q for $L^q(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ is the set of $\mathbb{R}$-valued $\mathcal{C}^\infty$ functions with compact support, and $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ is the set of $\mathcal{C}^\infty$ functions having bounded derivatives of any order. For an interval I, the norm in $L^r(I, L^q(\mathbb{R}^n))$ will be denoted as $\|\cdot\|_{r,q}$.

Throughout the paper we will assume that $1 \leq p < 1 + \frac{4}{n-2}$ except in Sections 6 and 7. We set $\frac{2}{r} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$; hence we have $r > 2$.

In Section 2, we collect some useful results and estimates. In Sections 3 and 4, we study the local existence of solutions in Σ and the continuity with respect to the initial data. In Section 5, we establish some conservation laws for this solution. In Section 6, we study the local existence in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and give some global existence results. In Section 7 we give a blow-up result for the nonlinear Schrödinger equation with potential, when there is no magnetic field.

After having completed this paper, we were told of the existence of the work [3] of Cazenave and Esteban where they proved some results which partially overlap with ours. However, they consider only the case of a constant magnetic field B, and they do not use the results of Yajima [15] which are basic for our paper.

2. Some preliminary results. In this section, we recall some properties of the propagator $S(t)$ for the linear equation. These results have been proved in a recent paper by K. Yajima (see [15]). We first have the

Proposition 2.1. *Under assumptions* H1 *and* H2, *there exists* $\gamma > 0$ *such that for every* t *with* $0 < |t| \le \gamma$, $S(t)$ *has the form*

$$S(t)v(x) = (2\pi i t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tilde{S}(t,x,y)} b(t,x,y) v(y)\, dy, \tag{2.1}$$

where $\tilde{S}(t,x,y)$ *is real valued,* C^1 *in* (t,x,y), C^∞ *in* (x,y) *for every fixed* t, *and* $b(t,x,y)$ *is* C^1 *in* (t,x,y), C^∞ *in* (x,y) *with* $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta b(t,x,y)| \le C_{\alpha\beta}$ *for any* α *and* β.

For the proof of this proposition, see Theorem 1 in [15].

We then introduce the following integral operator: for $a(t,x,y)$, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$-valued continuous function of $t \in I$, we set

$$I(t,a)v(x) = (2\pi i t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tilde{S}(t,x,y)} a(t,x,y) v(y)\, dy. \tag{2.2}$$

Lemma 2.2. *Let* $I_T = [-T,T] \subset I$; *then for any* q *with* $2 \le q \le +\infty$ *there exists a constant* C *depending on* a *but not on* $t \in I$ *such that for* $v \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, *with* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$,

$$\|I(t,a)v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C}{|t|^{n(1/2-1/q)}} \|v\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Moreover, if we set $\Lambda_a\phi(t) = \int_0^t I(t-\tau,a)\phi(\tau)\, d\tau$, *then for every pair* (q,s) *with* $q \in [2, \frac{2n}{n-2}[$ ($q \in [2,+\infty[$ *if* $n=2$ *and* $q \in [2,+\infty]$ *if* $n=1$) *and* $\frac{2}{s} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$, *the following estimates hold:*

$$\|\Lambda_a\phi\|_{L^s(I_T,L^q)} \le C_3 \|\phi\|_{L^{s'}(I_T,L^{q'})} \tag{2.3}$$

$$\|\Lambda_a\phi\|_{L^s(I_T,L^q)} \le C_4 \|\phi\|_{L^1(I_T,L^2)} \tag{2.4}$$

$$\|\Lambda_a\phi\|_{L^\infty(I_T,L^2)} \le C_5 \|\phi\|_{L^{s'}(I_T,L^{q'})} \tag{2.5}$$

$$\|I(\cdot,a)v\|_{L^s(I_T,L^q)} \le C_6 \|v\|_{L^2}, \tag{2.6}$$

where the constants C_3–C_6 *are independent of* T *with* $I_T \subset I$.

Proof: The first part of the lemma is proved in [15], Proposition 3.1, and comes from the L^2-boundedness theorem for $I(t,a)$ (see [1]) and the Riesz-Thorin interpolation theorem. The estimates (2.3)–(2.6) then follow in the same way as for the usual Schrödinger operator (see for example [14]).

Corollary. *If we set*

$$\Lambda\phi(t) = \int_0^t S(t-\tau)\phi(\tau)\, d\tau, \tag{2.7}$$

then for every $T \le \gamma$, (2.3)–(2.6) *hold, replacing* $I(\cdot,a)$ *by* $S(\cdot)$ *and* Λ_a *by* Λ.

We also have (see Proposition 2.7 in [15]):

Lemma 2.3. *Let $a(t,\cdot,\cdot)$ be a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$-valued continuous function of $t\in I$. Then there exist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$-valued continuous functions $a_{j,k}(t,x,y)$ and $a_{ij,km}(t,x,y)$ with $i,j=1,\dots,n$ and $k,m=1,2$ such that*

$$x_iI(t,a)=\sum_{j=1}^{n}[I(t,a_{ij,11})x_j+I(t,a_{ij,12})\partial_j]+I(t,a_{i1}) \tag{2.8}$$

$$\partial_iI(t,a)=\sum_{j=1}^{n}[I(t,a_{ij,21})x_j+I(t,a_{ij,22})\partial_j]+I(t,a_{i2}) \tag{2.9.}$$

3. Local existence of solutions in Σ. Our result in this section is the following:

Theorem 3.1. *Let $u_0\in\Sigma$. Then (1.1) has a unique maximal solution $u\in\mathcal{C}(]T_1^-,T_1^+[,\Sigma)\cap L^r_{\mathrm{loc}}(]T_1^-,T_1^+[,\Sigma^{1,p+1})$ such that $u(0)=u_0$.*

We consider the integral form of (1.1):

$$u(t)=S(t)u_0-i\epsilon\int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \tag{3.1}$$

with

$$F(u)=|u|^{p-1}u, \tag{3.2}$$

and we set

$$Tv(t)=S(t)u_0-i\epsilon\int_0^t S(t-\tau)F(v(\tau))\,d\tau. \tag{3.3}$$

We will use the method of Kato [10], and we introduce the following function spaces: For $I=[-T,T]$, $0<T\le\gamma$, we set

$$\begin{aligned}\overline{X}&=\mathcal{C}(I,L^2)\cap L^r(I,L^{p+1})\\ X&=L^\infty(I,L^2)\cap L^r(I,L^{p+1})\\ X'&=L^1(I,L^2)+L^{r'}(I,L^{1+1/p})\\ X_0&=L^\infty(I,L^2\cap L^{p+1}).\end{aligned}$$

The following lemma can be proved exactly in the same way as Lemma 1.3 and its corollary in [10], using estimates (2.3)–(2.5) for Λ:

Lemma 3.2. *ΛF is continuous and bounded from X_0 into X. For $v,w\in X_0$, we have*

$$\|\Lambda F(v)-\Lambda F(w)\|_X\le CT^{1-\alpha}(\|v\|_{X_0}^{p-1}+\|w\|_{X_0}^{p-1})\|v-w\|_X$$

with $\alpha=n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})$, $0\le\alpha<1$, and for each $R>0$, ΛF is a contraction map on $B_R(X_0)$ in the metric of X, provided T is sufficiently small.

We then introduce the spaces:

$$\begin{aligned}\overline{Y}&=\{v\in\overline{X},\ \nabla v\in\overline{X},\ xv\in\overline{X}\}\subset\mathcal{C}(I,\Sigma)\\ Y&=\{v\in X,\ \nabla v\in X,\ xv\in X\}\\ Y'&=\{v\in X',\ \nabla v\in X', xv\in X'\}\end{aligned}$$

with the norms

$$\|v\|_Y = \|v\|_X + \|\nabla v\|_X + \|xv\|_X$$
$$\|f\|_{Y'} = \|f\|_{X'} + \|\nabla f\|_{X'} + \|xf\|_{X'}.$$

Then we have by the Sobolev imbedding theorem: $Y \subset L^\infty(I, H^1) \subset X_0$ and the constant C appearing in $\|v\|_{X_0} \leq C\|v\|_Y$ is independent of T.

Lemma 3.3. *$S(\cdot)$ is a bounded linear operator from Σ into $\overline{Y}$, Λ is bounded from Y' into $\overline{Y}$. In both cases the associated norms are independent of T; their supremum is denoted by M.*

Proof: For $v \in S(\mathbb{R}^n)$ (the Schwartz space), $S(\cdot)v \in \mathcal{C}(I, S(\mathbb{R}^n)) \subset \overline{Y}$ (see [15]). Hence we only have to show

$$\|S(\cdot)v\|_Y \leq M\|v\|_\Sigma \quad \text{and} \quad \|\Lambda f\|_Y \leq M\|f\|_{Y'}$$

with a constant M independent of T.

Using (2.6) we have $\|S(\cdot)v\|_X \leq C\|v\|_{L^2} \leq C\|v\|_\Sigma$ and using (2.3), (2.5) with $s = r$ and $q = p+1$,

$$\|\Lambda\phi\|_X \leq C\|\phi\|_{L^{r'}(I,L^{1+1/p})} \leq C\|\phi\|_{X'} \leq C\|\phi\|_{Y'},$$

where C does not depend on T. As stated in Lemma 2.3, there exists a_{ik} and $a_{ij,km}$ in $\mathcal{C}(I, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ such that

$$x_i S(\cdot)v = \sum_{j=1}^{n} [I(\cdot, a_{ij,11})x_j v + I(\cdot, a_{ij,12})\partial_j v] + I(\cdot, a_{i1})$$

and

$$x_i \Lambda\phi = \sum_{j=1}^{n} [\Lambda a_{ij,11}(x_j\phi) + \Lambda a_{ij,12}(\partial_j\phi)] + \Lambda a_{i1}\phi.$$

Then using estimates (2.6), (2.3) and (2.5) of Lemma 2.2 with $s = r$ and $q = p+1$, we obtain the following inequalities:

$$\|x_i S(\cdot)v\|_X \leq C\|v\|_\Sigma$$
$$\|x_i \Lambda\phi\|_X \leq C\|\phi\|_{Y'}.$$

The terms $\|\partial_j S(\cdot)v\|_X$ and $\|\partial_j \Lambda\phi\|_X$ are treated in the same way, using (2.9).

Lemma 3.4. *F is bounded from Y into Y' and*

$$\|F(v)\|_{Y'} \leq CT^{1-\alpha}\|v\|_Y^p, \quad \forall v \in Y, \textit{ with } \alpha = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}).$$

Proof: For the terms $\|F(v)\|_{X'}$ and $\|\nabla F(v)\|_{X'}$, the proof is as in [10], Lemma 2.2. Hence we consider the term $\|xF(v)\|_{X'}$: for $v \in Y$, we have $\|xF(v)\|_{r',1+(1/p)} \leq \|v\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|xv\|_{r',p+1}$. Hence, with $1 - \alpha = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned}\|xF(v)\|_{X'} &\leq \|xF(v)\|_{r',1+(1/p)} \leq CT^{1-\alpha}\|v\|_{\infty,p+1}^{p-1}\|xv\|_{r,p+1} \\ &\leq CT^{1-\alpha}\|v\|_{X_0}\|xv\|_X \leq CT^{1-\alpha}\|v\|_Y^p.\end{aligned}$$

Lemma 3.5. *Let $u_0 \in \Sigma$ and $\mathcal{T}$ be defined as in* (3.3). *Then for every $R > M\|u_0\|_\Sigma$, if T is sufficiently small, $\mathcal{T}$ maps $B_R(Y)$ into itself, and is a contraction in the metric of X.*

Proof: It follows that of Lemma 2.3 in [10]: For $u_0 \in \Sigma$, $S(\cdot)u_0 \in Y$ and for $v \in B_R(Y)$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}v\|_Y &\le \|S(\cdot)u_0\|_Y + \|\Lambda F(v)\|_Y \le M\|u_0\|_\Sigma + M\|F(v)\|_{Y'}\\ &\le M\|u_0\|_\Sigma + MCT^{1-\alpha}R^p.\end{aligned}$$

Then, if we choose T such that $MCT^{1-\alpha}R^p \le R - M\|u_0\|_\Sigma$, $\mathcal{T}$ maps $B_R(Y)$ into itself. Using Lemma 3.2, we have for $v, w \in B_R(Y)$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}v - \mathcal{T}w\|_X &\le CT^{1-\alpha}(\|v\|_Y^{p-1} + \|w\|_Y^{p-1})\|v-w\|_X\\ &\le 2CT^{1-\alpha}R^{p-1}\|v-w\|_X.\end{aligned}$$

Hence, if T is sufficiently small, $\mathcal{T}$ is a contraction in the X-norm.

Proof of Theorem 3.1: We take $R > M\|u_0\|_\Sigma$, and T small enough for $\mathcal{T}$ to be a contraction in $B_R(Y)$ (in the X-norm). Since $B_R(Y)$ endowed with the X-norm is complete, $\mathcal{T}$ has a unique fixed point $u \in Y$. Using Lemma 3.3, we have $u = \mathcal{T}u \in \overline{Y} \subset \mathcal{C}(I,\Sigma)$. By iteration, we can construct the maximal solution $u \in \mathcal{C}(]T_1^-, T_1^+[, \Sigma) \cap L^r_{\mathrm{loc}}(T_1^-, T_1^+, \Sigma^{1,p+1})$ of the integral equation (3.1).

Let $I = [-T, T] \subset]T_1^-, T_1^+[$; then $F(u) \in X' \subset L^{r'}(I, H^{-1}) + L^1(I, L^2) \subset L^1(I, H^{-1})$ and $\nabla F(u) \in X' \subset L^1(I, H^{-1})$. Hence, $F(u) \in L^1(I, L^2) \subset L^1(I, \Sigma(-1))$. Since H is bounded from Σ into $\Sigma(-1)$, u satisfies (1.1) in $\Sigma(-1)$ with $u(0) = u_0$.

4. Continuity with respect to the initial data. In this section, we show that the solutions $u \in \mathcal{C}(I,\Sigma)$ of (1.1) depend continuously on the initial data in the following sense:

Theorem 4.1. *Let $u_0 \in \mathcal{C}(I,\Sigma)$ be a solution of* (1.1) *with initial data u_0, and let $u_0^m \in \Sigma$ with $u_0^m \to u_0$ in Σ as $m \to +\infty$. Then, the solution u_m of* (1.1) *with $u_m(0) = u_0^m$ exists on I provided m is sufficiently large, and $u_m \to u$ in $\mathcal{C}(I,\Sigma)$ as $m \to +\infty$.*

We will use Kato's notation, so we refer to [10]. Here $F'(z)$ is the derivative of F considered as a differentiable map from $\mathbb{R}^2$ into itself; i.e.,

$$F'(z)\cdot\zeta = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(F(z+\epsilon z) - F(z)).$$

Proof of Theorem 4.1: It is sufficient to prove the theorem in the case of a small interval I; then it can be extended to the whole interval by iteration. Since (u_0^m) is bounded in Σ, we can take $I = [-T, T]$, with T small enough to be able to construct u^m (for sufficiently large m) and u in $B_R(Y)$ satisfying

$$\begin{aligned}u^m &= S(\cdot)u_0^m - i\epsilon\Lambda F(u^m)\\ u &= S(\cdot)u_0 - i\epsilon\Lambda F(u)\end{aligned}$$

with, for example, $R = 2M\|u_0\|_\Sigma$. Then we have:

$$u_m - u = S(\cdot)(u_0^m - u_0) - i\epsilon\Lambda(F(u_m) - F(u)) \tag{4.1}$$

and, for $j = 1, \dots, n$, $\partial_j(u_m - u) = \partial_j S(\cdot)(u_0^m - u_0) - i\epsilon\partial_j\Lambda(F(u_m) - F(u))$. So we can find $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$-valued continuous functions a_{ij}, b_{ij} and c_j such that

$$\begin{aligned}\partial_j(u_m - u) = &\sum_{i=1}^{n}[I(\cdot, a_{ij})(\partial_i u_0^m - \partial_i u_0) + I(\cdot, b_{ij})(x_i u_0^m - x_i u_0)] \\ &+ I(\cdot, c_j)(u_0^m - u_0) \\ &- i\epsilon\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(\Lambda a_{ij}(F'(u_m)\partial_i u_m - F'(u)\partial_i u \\ &+ \Lambda_{b_{ij}}(x_i F(u_m) - x_i F(u))\big) + \Lambda_{c_j}(F(u_m - F(u))\Big]\end{aligned}$$

and we have a similar equality for $x_j(u_m - u)$. Hence we obtain by using Lemma 3.3

$$\begin{aligned}\|u_m - u\|_Y \le C_1\|u_0^m - u_0\|_\Sigma &+ C_2\sum_{i=1}^{n}\|F'(u_m)\partial_i u_m - F'(u)\partial_i u\|_{X'} \\ &+ C_3\|xF(u_m) - xF(u)\|_{X'} + C_4\|F(u_m) - F(u)\|_{X'},\end{aligned}$$

where $C_1, \dots, C_4$ do not depend on T. But we have (see Section 3)

$$\begin{aligned}\|F(u_m) - F(u)\|_{X'} &\le CT^{1-\alpha}(\|u_m\|_Y^{p-1} + \|u\|_Y^{p-1})\|u_m - u\|_X \\ &\le 2CT^{1-\alpha}R^{p-1}\|u_m - u\|_Y,\end{aligned} \tag{4.2}$$

and similarly,

$$\|xF(u_m) - xF(u)\|_{X'} \le 2CT^{1-\alpha}R^{p-1}\|xu_m - xu\|_X \le 2CT^{1-\alpha}R^{p-1}\|u_m - u\|_Y,$$

while

$$\begin{aligned}\|F'(u_m)\partial_i u_m - F'(u)\partial_i u\|_{X'} \le &\|F'(u_m)(\partial_i u - \partial_i u_m)\|_{X'} \\ &+ \|F'(u_m)\partial_i u - F'(u)\partial_i u\|_{X'}.\end{aligned}$$

Using $|F'(u)| \le C|u|^{p-1}$ and $|F'(u)\cdot v| \le |F'(u)||v|$ (see the Appendix in [10]), we obtain in the same way as before:

$$\|F'(u_m)(\partial_i u_m - \partial_i u)\|_{X'} \le CT^{1-\alpha}R^{p-1}\|u_m - u\|_Y.$$

Thus, if we choose T such that $(nC_2 + 2C_3 + 2C_4)T^{1-\alpha}R^{p-1} \le \frac{1}{2}$, we have

$$\|u_m - u\|_Y \le 2C_1\|u_0^m - u_0\|_\Sigma + 2C_2\sum_{i=1}^{n}\|F'(u_m)\partial_i u - F'(u)\partial_i u\|_{X'},$$

and it remains to establish that $\|F'(u_m)\partial_i u - F'(u)\partial_i u\|_{X'} \to 0$ as $m \to +\infty$. But we have $F'(u_m)\cdot v \to F'(u)\cdot v$ in X' as $m \to +\infty$ if $u_m \to u$ in X, and $v \in X$ (see [10], Lemma 5.2), and one can easily show, using (4.1) and (4.2), that provided T is sufficiently small, $u_m \to u$ in X as $m \to +\infty$. This completes the proof of Theorem 4.1.

5. Conservation laws. In this section, we establish that if $u \in \mathcal{C}(I, \Sigma)$ is a solution of (1.1), then the energy

$$E(u) = \frac{1}{2}\langle u, Hu\rangle + \frac{\epsilon}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx,$$

and the L^2-norm of u are conserved during the time the solution is well defined.

For this purpose, we introduce as in [11] a regularized integral equation. Most of the results we need can be proved exactly in the same way as in [7] or [11], to which we will refer.

Let $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ be an even function such that $h \geq 0$, $\operatorname{supp} h \subset B(0,1)$ and $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Here $B(0,1)$ is the ball in $\mathbb{R}^n$ centered at 0, with radius 1. Let $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ be such that $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp} g \subset B(0,2)$ and $g \equiv 1$ on $B(0,1)$. Then we set for a positive integer m,

$$h_m(x) = m^n h(mx), \quad g_m(x) = g\Big(\frac{x}{m}\Big),$$

and we consider the following integral equation with $u_0 \in \Sigma$:

$$u(t) = S(t)(h_m * g_m u_0) - i\epsilon \int_0^t S(t-\tau)[h_m * g_m F(h_m * u(\tau))]\,d\tau. \tag{5.1}$$

We set $F_m(u) = h_m * g_m F(h_m * u)$. The following result can easily be deduced from the proof of Theorem 3.5 in [11], and Lemma 3.3, using

$$\|h_m * g_m u_0\|_{L^{p+1}} \leq \|h_m\|_{L^1}\|u_0\|_{L^{p+1}} \leq \|u_0\|_{L^{p+1}}.$$

Proposition 5.1. *For any $\rho > 0$, there exists a $T(\rho) > 0$ with $T(\rho) \leq \gamma$ independent of m, such that for any $u_0 \in \Sigma$ with $\|u_0\|_\Sigma < \rho$, equations* (5.1) *and* (3.1) *have unique solutions in the ball with radius ρ in $\mathcal{C}([-T(\rho), T(\rho)], L^{p+1})$.*

The following proposition is proved as in [7], Proposition 3.1.

Proposition 5.2. *Let $\rho > 0$ and $T(\rho)$ be defined as in Proposition* 5.1. *Let $u_0 \in \Sigma$ be such that $\|u_0\|_\Sigma < \rho$; let u_m be the solution of* (5.1) *in $\mathcal{C}([-T(\rho), T(\rho)], L^{p+1})$ and let u be the solution of* (3.1) *in the same space. Then u_m tends to u in $C([-T(\rho), T(\rho)], L^{p+1})$, as $m \to +\infty$.*

Lemma 5.3. *Let $u \in L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$; then for any integer m, $h_m * g_m u \in S$ and $F_m(u) \in S$ (S is the space of smooth rapidly decreasing functions). If $u(\tau)$ is an L^{p+1}-valued continuous function of $\tau \in I$, with I an interval of $\mathbb{R}$, then for any integers m, k, $F_m(u) \in \mathcal{C}(I, \Sigma(k))$.*

Proof: It follows exactly those of Lemmas 4.3 and 4.4 in [11], since to prove the second part of the lemma, it suffices to show that for any α and β, $x^\alpha \partial_x^\beta F_m(u)$ is $L^2(\mathbb{R}^n)$-valued and continuous on I.

Then we can prove the following proposition in the same way as Oh did in [11]:

Proposition 5.4. *Let I be an interval of $\mathbb{R}$, $u_0 \in \Sigma$ and $u_m \in \mathcal{C}(I, L^{p+1})$ be a solution of* (5.1). *Then, for any integer k, u_m is in $C^1(I, \Sigma(k))$ and satisfies*

$$i\frac{du_m}{dt}(t) = Hu_m(t) + \epsilon F_m(u_m(t)). \tag{5.2}$$

Furthermore, if we set

$$E_m(u) = \frac{1}{2}\langle u, Hu\rangle + \frac{\epsilon}{p+1}\langle g_m F(h_m * u), h_m * u\rangle\,,$$

then we have

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}E_m(u_m(t)) = 0 \quad \textit{for any } t \in I.$$

Proof: Since $S(\cdot)$ is $\mathcal{L}(\Sigma(k))$-valued for any k (see [15]), the preceding lemma and (5.1) yield: $u_m \in \mathcal{C}(I, \Sigma(k))$. Now, by differentiating the right-hand side of (5.1) with respect to t, and by using the fact that H is bounded from $\Sigma(k)$ into $\Sigma(k-2)$ for any k, we obtain $u_m \in \mathcal{C}^1(I, \Sigma(k))$ and (5.2). The last equalities then follow by very classical computations, using the fact that h is even (see [11] for example).

Lemma 5.5. *Let $u_m \in \mathcal{C}(I, L^{p+1})$ be a solution of* (5.1). *Then, for any $t \in I$, the sequence $u_m(t)$ is bounded in Σ.*

Proof: We will show, by using (5.1), that

$$\|u_m(t)\|_\Sigma \le C_1 + C_2 \int_0^t \|u_m(\tau)\|_\Sigma\, d\tau,$$

where C_1 and C_2 are independent of m and t (we will consider if necessary that t is in a compact subinterval of I). As stated in Lemma 5.2, u_m tends to u in $\mathcal{C}(I, L^{p+1})$, hence $u_m(t)$ is bounded in L^{p+1} for any $t \in I$. Now we have

$$\|h_m * g_m u_0\|_{L^2} \le \|h_m\|_{L^1}\|u_0\|_{L^2} \le \|u_0\|_\Sigma$$

and

$$\begin{aligned}
\|\partial_j(h_m * g_m u_0)\|_{L^2} &\le \|h_m * (\partial_j g_m) u_0\|_{L^2} + \|h_m * g_m \partial_j u_0\|_{L^2}\\
&\le \|\partial_j g\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^2} + \|\partial_j u_0\|_{L^2} \le C\|u_0\|_\Sigma\\
\|x_j(h_m * g_m u_0)\|_{L^2} &\le \|x_j h_m * g_m u_0\|_{L^2} + \|h_m * g_m x_j u_0\|_{L^2}\\
&\le C\|u_0\|_\Sigma,
\end{aligned}$$

since $x_j h_m$ is bounded in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Let us consider now the term $F_m(u_m)$:

$$\begin{aligned}
\|F_m(u_m)\|_{L^2} &= \|h_m * g_m F(h_m * u_m)\|_{L^2}\\
&\le C\|h_m\|_{L^q}\|F(h_m * u_m)\|_{L^{1+(1/p)}} \quad \text{with } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p+1}\\
&\le C\|h\|_{L^q}\|h_m * u_m\|_{L^{p+1}}^p \le C\|h\|_{L^q}\|u_m\|_{L^{p+1}}^p \le C'\|u_m\|_\Sigma,
\end{aligned}$$

since $\Sigma \subset L^{p+1}$ and u_m is bounded in L^{p+1} (see Proposition 5.2). Similarly,

$$\begin{aligned}\|\partial_j(h_m * g_m F(h_m * u_m))\|_{L^2} &\le \|h_m * \partial_j g_m F(h_m * u_m)\|_{L^2}\\ &\quad + \|h_m * g_m \partial_j F(h_m * u_m)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

The first term can be bounded like the preceding ones, since $\partial_j g_m$ is bounded in L^∞. For the second term, we have:

$$\begin{aligned}&\|h_m * g_m \partial_j F(h_m * u_m)\|_{L^2} \le C\|h_m\|_{L^q}\|\partial_j F(h_m * u_m)\|_{L^{1+(1/p)}}\\ &\quad\le C\|h_m * u_m\|_{L^{p+1}}^{p-1}\|\partial_j(h_m * u_m)\|_{L^{p+1}} \le C\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p-1}\|h_m * \partial_j u_m\|_{L^{p+1}}\\ &\quad\le C\|h_m\|_{L^q}\|\partial_j u_m\|_{L^2} \le C\|u_m\|_\Sigma.\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}&\|x_j(h_m * g_m F(h_m * u_m))\|_{L^2}\\ &\le \|(x_j h_m) * g_m F(h_m * u_m)\|_{L^2} + \|h_m * g_m x_j F(h_m * u_m)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

The first term can be bounded like the preceding ones, and

$$\begin{aligned}\|h_m * g_m x_j F(h_m * u_m)\|_{L^2} &\le C\|h_m\|_{L^q}\|x_j F(h_m * u_m)\|_{L^{1+(1/p)}}\\ &\le C\|h_m\|_{L^q}\|h_m * u_m\|_{L^{p+1}}^{p-1}\|x_j(h_m * u_m)\|_{L^{p+1}}\\ &\le C(\|(x_j h_m) * u_m\|_{L^{p+1}} + \|h_m * x_j u_m\|_{L^{p+1}})\\ &\le C + C'\|u_m\|_\Sigma.\end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\|u_m(t)\|_\Sigma \le C_1 + C_2\int_0^t \|u_m(\tau)\|_\Sigma \, d\tau,$$

and by Gronwall's Lemma, the sequence $(u_m(t))$ is bounded in Σ.

Theorem 5.6. *Let $u \in \mathcal{C}(I, \Sigma)$ be a solution of (3.1) with initial data $u_0 \in \Sigma$. Then for any $t \in I$,*

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

$$E(u(t)) = E(u_0),$$

with $E(u) = \frac{1}{2}\langle u, Hu\rangle + \frac{\epsilon}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx$.

Proof: It follows that of Ginibre and Velo [7], Proposition 3.4 and Lemma A.2.1, by setting $\mathcal{H} = \Sigma$, $\mathcal{V} = L^{p+1}$ and $q(u) = \frac{1}{2}\langle u, Hu\rangle$. Note however that we had to show that the sequence of regularized solutions was bounded in Σ since it does not come from the conservation of energy as was the case in [7].

6. Local existence of solutions in $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$. In this section, we assume $1 < p \leq 1 + \frac{4}{n}$. Then the following result holds:

Theorem 6.1. *Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Then (3.1) has a unique maximal solution $u \in \mathcal{C}(]T_2^-, T_2^+, L^2[\cap L^r_{\mathrm{loc}}(T_2^-, T_2^+, L^{p+1})$. Furthermore,*

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \quad \forall t \in (T_2^-, T_2^+).$$

If T_2^+ (respectively $-T_2^-$) $< +\infty$, then

$$\|u\|_{L^r(0,T_2^+,L^{p+1})} = +\infty \quad \textit{(respectively } \|u\|_{L^r(T_2^-,0,L^{p+1})} = +\infty).$$

We will use a fixed-point method. The following lemma establishes some useful inequalities:

Lemma 6.2. *Let $0 < T \leq \gamma$ and $I_T = [-T, T]$; then there exists a real q with $1 < q \leq +\infty$, such that for every $u, v \in L^r(I_T, L^{p+1})$,*

$$\|\Lambda F(u) - \Lambda F(v)\|_{r,p+1} \leq C_1 T^{p/q}(\|u\|^{p-1}_{r,p+1} + \|v\|^{p-1}_{r,p+1})\|u - v\|_{r,p+1} \tag{6.1}$$

$$\|\Lambda F(u) - \Lambda F(v)\|_{\infty,2} \leq C_2 T^{p/q}(\|u\|^{p-1}_{r,p+1} + \|v\|^{p-1}_{r,p+1})\|u - v\|_{r,p+1}. \tag{6.2}$$

Proof: We have $\|F(u) - F(v)\|_{L^{1+(1/p)}} \leq C(\|u\|^{p-1}_{L^{p+1}} + \|v\|^{p-1}_{L^{p+1}})\|u - v\|_{L^{p+1}}$; hence, using Hölder's inequality,

$$\|F(u) - F(v)\|_{r',1+(1/p)} \leq C(\|u\|^{p-1}_{L^{q_1}(I_T,L^{p+1})} + \|v\|^{p-1}_{L^{q_1}(I_T,L^{p+1})})\|u - v\|_{L^{q_1}(I_T,L^{p+1})},$$

with $q_1 = \frac{4p(p+1)}{n+4-(n-4)p}$, $q_1 \leq r$. Finally, with $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q_1}$; i.e., $q = \frac{4p}{n+4-np}$, we obtain

$$\|F(u) - F(v)\|_{r',1+(1/p)} \leq C\Big(\int_{-T}^{T} dt\Big)^{p/q}(\|u\|^{p-1}_{r,p+1} + \|v\|^{p-1}_{r,p+1})\|u - v\|_{r,p+1}.$$

We then deduce (6.1) and (6.2) by using (2.3) and (2.5) with $s = r$ and $q = p + 1$.

Remark 6.3. In the same was as in this lemma, we can easily show, by using the proof of Lemmas 3.4 and 2.3, that

$$\|\partial_j(\Lambda F(u))\|_{q,s} \leq C T^{p/q}\|u\|^{p-1}_{r,p+1}\|u\|_{L^r(I_T,\Sigma^{1,p+1})}$$
$$\|x_j(\Lambda F(u))\|_{q,s} \leq C T^{p/q}\|u\|^{p-1}_{r,p+1}\|u\|_{L^r(I_T,\Sigma^{1,p+1})},$$

with $(q, s) = (r, p + 1)$ and $(\infty, 2)$. Hence we have

$$\|\Lambda F(u)\|_{L^r(I_T,\Sigma^{1,p+1})} \leq C_3 T^{p/q}\|u\|^{p-1}_{r,p+1}\|u\|_{L^r(I_T,\Sigma^{1,p+1})} \tag{6.3}$$

$$\|\Lambda F(u)\|_{L^\infty(I_T,\Sigma)} \leq C_4 T^{p/q}\|u\|^{p-1}_{r,p+1}\|u\|_{L^r(I_T,\Sigma^{1,p+1})}. \tag{6.4}$$

Proposition 6.4. *There exists a $\delta > 0$ such that if $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and $0 < T \le \gamma$ are such that $\|S(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T, L^{p+1})} \le \delta$, with $I_T = [-T, T]$, then (3.1) has a unique solution $u \in \mathcal{C}(I_T, L^2) \cap L^r(I_T, L^{p+1})$. In addition, for all $t \in I$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ and u depends continuously on $u_0 \in \mathcal{C}(I_T, L^2) \cap L^r(I_T, L^{p+1})$.*

Proof: Let $\delta > 0$, and let $u_0 \in \Sigma$ and $T \le \gamma$ satisfy $\|S(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T, L^{p+1})} \le \delta$. We set

$$E = \{u \in L^r(I_T, L^{p+1}),\ \|u\|_{r,p+1} \le 2\delta\}.$$

For $u \in E$, we still consider

$$\mathcal{T}u(t) = S(t)u_0 - i\epsilon \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau.$$

Then, using (6.1), we have for any u and v in E:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\|_{L^r(I_T, L^{p+1})} &\le 2C_1(2\delta)^{p-1}T^{p/q}\|u - v\|_{r,p+1} \\ &\le 2C_1(2\delta)^{p-1}\gamma^{p/q}\|u - v\|_{r,p+1}.\end{aligned}$$

Hence, if we choose δ such that $2C_1(2\delta)^{p-1}\gamma^{p/q_2} \le \frac{1}{2}$, $\mathcal{T}$ is a contraction from E into itself and by the fixed-point theorem, we obtain a unique solution $u \in E$ of (3.1). Applying (6.2) we have $u \in L^\infty(I_T, L^2)$.

If u_0^m tends to u_0 in L^2, with $u_0^m \in L^2$, then from (2.6), we have for sufficiently large m $\|S(\cdot)u_0^m\|_{r,p+1} \le \delta$; we can then construct the solution $u_m \in E$ with $u_m(0) = u_0^m$. Then

$$\|u_m - u\|_{r,p+1} \le \|S(\cdot)(u_0 - u_0^m)\|_{r,p+1} + \|\Lambda F(u_m) - \Lambda F(u)\|_{r,p+1},$$

and applying (2.6) and (6.1) with $2C_1(2\delta)^{p-1}\gamma^{p/q} \le \frac{1}{2}$, we obtain

$$\|u_m - u\|_{r,p+1} \le 2C_5\|u_0 - u_0^m\|_{L^2}.$$

Hence $u_m \to u$ in $L^r(I_T, L^{p+1})$ as $m \to \infty$. Applying (6.2), we see that $u_m \to u$ in $L^\infty(I_T, L^2)$.

If $u_0 \in \Sigma$, then from Theorem 3.1, there exists $\tau \ge 0$, with $\tau \le T$, such that $u \in \mathcal{C}([-\tau, \tau], \Sigma) \cap L^r(-\tau, \tau, \Sigma^{1,p+1})$. Let us show that we can take $\tau = T$; otherwise we would have $\|u(t)\|_\Sigma \to +\infty$ when $t \nearrow \tau$ or $t \searrow -\tau$; but from (6.3) we have

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(I_\tau, \Sigma^{1,p+1})} &\le C\|u_0\|_\Sigma + C_3\tau^{p/q}\|u\|_{r,p+1}^{p-1}\|u\|_{L^r(I_\tau, \Sigma^{1,p+1})} \\ &\le C\|u_0\|_\Sigma + C_3\gamma^{p/q}(2\delta)^{p-1}\|u\|_{L^r(I_\tau, \Sigma^{1,p+1})};\end{aligned}$$

hence, for δ sufficiently small, we have

$$\|u\|_{L^r(I_\tau, \Sigma^{1,p+1})} \le C\|u_0\|_\Sigma;$$

then, applying (6.4), we see that $\|u\|_{L^\infty(I_\tau, \Sigma)} \le C\|u_0\|_\Sigma$ which is a contradiction. Hence $\tau = T$. Then we have $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, $\forall t \in I_T$.

For $u_0 \in L^2$, let $u_0^m \in \Sigma$ with $u_0^m \to u_0$ in L^2 as $m \to +\infty$; then the corresponding solution u^m tends to u in $L^\infty(I_T, L^2)$, hence $u \in \mathcal{C}([-T,T], L^2)$ and $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ $\forall t \in I_T$.

Proof of Theorem 6.1: Let $u_0 \in \Sigma$. Since $\|S(\cdot)u_0\|_{L^r(I_T, L^{p+1})} \to 0$ as $T \to 0$, we can apply Proposition 6.4 for sufficiently small T. Then, by iteration, we obtain a unique maximal solution $u \in \mathcal{C}(]T_2^-, T_2^+[, L^2) \cap L^r_{\mathrm{loc}}(T_2^-, T_2^+, L^{p+1})$. It remains to show the last point of Theorem 6.1, but the proof follows exactly that of [2], Theorem 1, by writing $L^r(0, T_2^+, L^{p+1})$ instead of $L^\sigma(0, T^*, L^\sigma)$.

Remark 6.5. In the case $A(x) \equiv 0$; i.e., if we consider the following equation:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta u + Vu + \epsilon |u|^{p-1}u, \quad 1 < p < 1 + \frac{4}{n}$$

where V satisfies assumption H2, then in [11], Y.G. Oh has proved the global existence of solutions in $\mathcal{C}(\mathbb{R}, D(H^{1/2})) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^{p+1})$. Then using Theorem 6.1 we can deduce from this result that if $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, there exists a unique global solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2)$ for this equation.

Remark 6.6. Since A is real valued, we have $|\nabla u| \le |(-i\nabla - A)u|$ and $D(H^{1/2}) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ if $1 \le p \le 1 + \frac{4}{n-2}$ (see [5]). In the case $1 \le p < 1 + \frac{4}{n}$, it then follows from the conservation laws and the Gagliardo-Nirenberg inequalities for $|u|$ that the solutions of (1.1) with $u(0) = u_0 \in \Sigma$ are global in $D(H^{1/2})$ (see for example [11]). In fact, one can easily see from the proof of Theorem 6.1 that since the solutions are global in $L^2(\mathbb{R}^n)$, they are global in Σ.

7. A blow-up result for Schrödinger equation with potential. In this section we consider the following equation:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\Delta u + Vu - |u|^{p-1}u \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

where V satisfies H2 with, in addition, $\frac{\partial V}{\partial r} \ge 0$ in $\mathbb{R}^n$, $r = |x|$. Y.G. Oh has proved the global existence of solution in $D(H^{1/2}) \subset H^1$, with $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$, for $1 \le p < 1 + \frac{4}{n}$ (see [11]). Here, we will show that if $p > 1 + \frac{4}{n}$ and under some assumptions on the initial data u_0, the H^1 norm of the solution blows up in finite time.

We will follow Glassey (see [9]). In all of this section, we assume that $1 + \frac{4}{n} < p < 1 + \frac{4}{n-2}$. We first establish some conservation laws:

Lemma 7.1. *Let $u_0 \in \Sigma$ and $u(t)$ be a solution of (7.1) in $\mathcal{C}(I, \Sigma)$ with $I = [0, T[$. Then for any $t \in [0, T[$, we have*

i) $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$

ii) $\frac{1}{4}\int |\nabla u|^2\,dx + \int V(x)|u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx = E_0$

iii) $\frac{d}{dt}\int |x|^2|u|^2\,dx = 2\,\mathrm{Im}\int r u_r \overline{u}\,dx$

iv) $\frac{d}{dt}\int \mathrm{Im}(r u_r \overline{u})\,dx = \int |\nabla u|^2\,dx - \int r V_r |u|^2\,dx - n\left(1 - \frac{2}{p+1}\right)\int |u|^{p+1}\,dx.$

Proof: i) and ii) were proved in Section 5.

Multiplying (7.1) by $2\overline{u}$ and taking the real part, we obtain $\frac{\partial}{\partial t}|u|^2 = -\nabla(\operatorname{Im}\overline{u}\nabla u)$. Then if we multiply this inequality by $|x|^2$ and integrate by parts over $\mathbb{R}^n$, we obtain iii).

In order to obtain iv), we multiply (7.1) by $2r\overline{u}_r$, and take the real part, then integrate each term by parts; we obtain (see [9])

$$-\operatorname{Re}\int r\overline{u}_r\Delta u\,dx = \left(1-\frac{n}{2}\right)\int |\nabla u|^2\,dx$$

$$2\operatorname{Re}\int r\overline{u}_r V(x)u\,dx = -n\int V(x)|u|^2\,dx - \int rV_r|u|^2\,dx$$

$$-2\operatorname{Re}\int r\overline{u}_r|u|^{p-1}u\,dx = \frac{2n}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx$$

and

$$\operatorname{Re}\left[2i\int r\overline{u}_r u_t\,dx\right] = \frac{d}{dt}\operatorname{Re}\left[i\int ru\overline{u}_r\,dx\right] + n\operatorname{Re}\left[i\int u\overline{u}_t\,dx\right].$$

Then, using (7.1),

$$\operatorname{Re}\left[2i\int r\overline{u}_r u_t\,dx\right] = \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\int r\overline{u}u_r\,dx - \frac{n}{2}\int |\nabla u|^2\,dx$$
$$- n\int V(x)|u|^2\,dx + n\int |u|^{p+1}\,dx$$

and we obtain iv).

Theorem 7.2. *Let $u(t)$ be a solution of (7.1) in Σ. We assume that*

1) $E_0 \le 0$
2) $\operatorname{Im}\int r\overline{u}_0 u_{0_r}\,dx < 0$;

then there exists $T < +\infty$ such that $\lim_{t\nearrow T}\|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty$.

Proof: We set when u is well defined:

$$y(t) = -\operatorname{Im}\int r\overline{u}u_r\,dx;$$

then $y(0) > 0$ and from iv) we have

$$y'(t) \ge -\int |\nabla u|^2\,dx + \int rV_r|u|^2\,dx + n\Big[1-\frac{2}{p+1}\Big]\int |u|^{p+1}\,dx$$
$$\ge -\int |\nabla u|^2\,dx + \frac{n(p-1)}{p+1}\int |u|^{p+1}\,dx.$$

Using ii) we have

$$y'(t) \ge -\int |\nabla u|^2\,dx + (n(p-1))\Big[\frac{1}{4}\int |\nabla u|^2\,dx + \int V|u|^2\,dx - E_0\Big]$$
$$\ge \Big[1-\frac{n(p-1)}{4}\Big]\int |\nabla u|^2\,dx, \quad \text{since } E_0 \le 0.$$

Let $C_n = 1 - \frac{n(p-1)}{4} > 0$; then

$$y'(t) \geq C_n \int |\nabla u|^2 \, dx.$$

Hence, since $y(0) > 0$ we have $y(t) > 0$ as long as u is well defined. Using 3) we have

$$\frac{d}{dt} \int r^2 |u|^2 \, dx = -2y(t) < 0,$$

hence

$$\int r^2 |u|^2 \, dx \leq \int r^2 |u_0|^2 \, dx = d_0^2.$$

Then by Schwarz' inequality:

$$y'(t) \leq \Big(\int r^2 |u|^2 \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int |u_r|^2 \, dx \Big)^{1/2} \leq d_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Using (7.2) we have $y'(t) \geq (C_n/d_0^2) y^2(t)$, $y(0) > 0$. Then if $0 \leq t < d_0^2/(C_n y(0))$ we have

$$y(t) \geq \frac{y(0) d_0^2}{d_0^2 - C_n y(0) t}$$

and

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq \frac{y(t)}{d_0} \geq \frac{y(0) d_0}{d_0^2 - C_n y(0) t}.$$

Hence there exists $T \leq d_0^2/(C_n y(0))$ such that $\lim_{t \nearrow T} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty$.

REFERENCES

[1] K. Asada and D. Fujiwara, *On some oscillatory integral transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$*, Japan Jour. Math., 4 (1978), 299–361.

[2] T. Cazenave and F.B. Weissler, *Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case*, to appear.

[3] T. Cazenave and M.J. Esteban, *On the evolution problem for nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field*, preprint (1988).

[4] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Hirsch, and B. Simon, "Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry," Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[5] M.J. Esteban and P.L. Lions, *Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field*, to appear.

[6] J.M. Ghidaglia and J.C. Saut, *On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems*, Nonlinearity, 3 (1990), 475–506.

[7] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equation; I: The Cauchy problem*, J. Funct. Anal., 32 (1979), 1–32.

[8] J. Ginibre and G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non Linéaire, 2 (1985), 309–327.

[9] R. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys., 18 (1977), 1794–1797.

[10] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., 46 (1987), 113–129.

[11] Y.G. Oh, *Cauchy problem and Ehrenfest's Law for nonlinear Schrödinger equations with potentials*, J. Diff. Eqns., 81 (1989), 255–274.

[12] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics; Vol. II: Fourier Analysis and Selfadjointness," Academic Press, New York, 1975.

[13] Y. Tsutsumi, *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funk. Ekva, 30 (1987), 115–125.
[14] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., 110 (1987), 415–426.
[15] K. Yajima, *Schrödinger evolution equations with magnetic field*, preprint (1989).

Chapitre II :
Solutions Analytiques pour une Equation de Schrödinger Non-Linéaire Non-Elliptique

Analytic Solutions to Nonelliptic Nonlinear Schrödinger Equations

Anne DE BOUARD
Laboratoire d'Analyse Numérique, Bâtiment 425
Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Abstract. We prove local existence of analytic solutions for nonlinear Schrödinger-type equations. The class we consider includes number of equations derived from the physical context of water waves.

Résumé. On étudie l'existence de solutions analytiques pour des équations de type Schrödinger. La classe d'équations considérée contient un certain nombre de modèles provenant de la physique des ondes aquatiques de surface.

Codes AMS. 35 Q 20, 35 A 07, 35 B 65.

Mots clés. Equations de Schrödinger, ondes de surface.

1. Introduction.

In this work, we study the local existence of analytic solutions for a general class of equations which includes a large number of models arising in the context of water waves ; this equation is :

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = F(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{1.1}$$

where L is a pseudo-differential, not necessarily elliptic operator with constant coefficients defined in Fourier variables by

$$\widehat{Lu}(\xi) = p(\xi)\hat{u}(\xi),$$

the symbol $p(\xi)$ is real and $p \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $|p(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{k_0}$ for some $k_0 \in \mathbb{N}$, and for any $\xi \in \mathbb{R}^n$.

The nonlinear term $F(u)$ is a nonlocal complex-valued function of u and its derivatives, and is of the form :

$$F(u) = G(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + u\mathcal{H}(\partial_x^\alpha |u|^2), \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq 1,$$

where G is a polynomial with complex coefficients, $G(0,0,0,0) = 0$, and the operator $\mathcal{H}$ in the nonlocal term is a linear operator of type zero (see Folland [4]), which is defined by

$\mathcal{H}v = K * v$, with K a tempered distribution of class C^∞ outside the origin, homogeneous of degree $-n$, so that $\mathcal{H}$ commutes with derivation with respect to x_j and is bounded as an operator from $L^p(\mathbb{R}^n)$ to itself, for each p such that $1 < p < +\infty$.

This includes the classical nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries equations for which the existence of analytic solutions is known (see the works of Hayashi [7], [8], Hayashi and Saitoh [9] and Kato and Masuda [11]) but also other modeling equations such as the elliptic-elliptic and hyperbolic-elliptic Davey-Stewartson systems :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \delta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \chi|u|^2 u + bu\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + m\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(|u|^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

where the parameters δ, χ, b, m are real and m is positive. The Cauchy problem for these systems has been studied in the usual Sobolev spaces by Ghidaglia and Saut (see [5]). Setting $\varphi_x = E(|u|^2)$ with E the nonlocal operator defined in Fourier variables by

$$\widehat{E(f)}(\xi,\eta) = \frac{\xi^2}{\xi^2 + m\eta^2}\hat{f}(\xi,\eta),$$

one can easily see that the system (1.2) reduces to an equation of type (1.1).

These are in fact a particular case of more general systems occuring in the theory of long waves on the fluid surface of a layer of finite depth which are of the form :

$$(1.3) \qquad \begin{cases} i\psi_t + L_1\psi + u\psi = 0 \\ L_2 u = L_3|\psi|^2 \end{cases}$$

where $u(x,t)$ is real, ψ is a complex-valued function, $\psi_t = \partial\psi/\partial t$, and L_1, L_2, L_3 are differential operators with constant coefficients, having the form $L_j = \sum_{i,k=1}^n C_{ik}^j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ (see the works of Zakharov and Schulman [15] and [13] ; see also the works of Ghidaglia and Saut [6] for a study of the Cauchy problem for these systems, and of Constantin [2] for some decay estimates on the solutions). These examples are also of type (1.1), provided L_2 is an elliptic operator (but L_1 and L_3 are not necessarily elliptic).

A higher order model, which is a generalization of the NLS model was proposed by Dysthe in the context of deep water waves. He obtained a system with a third order linear differential operator and a nonlinearity involving derivatives of the amplitude, which leads to the following equation, in the case of purely gravity waves (no surface tension) :

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} &2i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - A|A|^2 \\ &= \frac{i}{8}\left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - 6\frac{\partial^3 A}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{3}{2}iA\left(A\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - \bar{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}i|A|^2\frac{\partial A}{\partial x} + A\mathcal{H}\frac{\partial}{\partial x}|A|^2 \end{aligned}$$

where $\mathcal{H}$ is a two dimensional version of the Hilbert transform, defined by

$$\mathcal{H}\psi = K * \psi, \qquad K(x,y) = -\frac{x}{2\pi r^3}, \quad r = (x^2+y^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

A similar system (with "general" coefficients depending on the surface tension parameter) was derived by Hogan in the case of deep-water gravity-capillary waves. It writes

$$\begin{aligned} &2i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + C_g\frac{\partial A}{\partial x}\right) + p\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + q\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \gamma|A|^2 A \\ &= -is\frac{\partial^3 A}{\partial x \partial y^2} - ir\frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - iuA^2\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \\ &+iv|A|^2\frac{\partial A}{\partial x} + A\mathcal{H}\frac{\partial}{\partial x}|A|^2 \end{aligned} \tag{1.4'}$$

where $C_g, p, q, \gamma, r, s, u, v$ are real coefficients.

Our existence result applies to both systems (1.4) and (1.4)' since they are also of type (1.1). Note that the usual methods for solving the Cauchy problem for Schrödinger-type equations, involving "$L^p - L^q$ estimates" on the semi-group are not straightforward here, due to the nonhomogeneity of the symbol $p(\xi)$ of the linear operator and to the $x-$derivatives in the nonlinear terms.

We now state our notations which are essentially those of [7] :

We denote by $(\mathcal{F}f)(\xi)$ or $\hat{f}(\xi)$ the Fourier transform of f. For $r > 0$ we define $S(r) = \{z \in \mathbf{C}^n, \ |\text{Im } z_j| < r, \ j = 1,...,n\}$ where Im z_j is the imaginary part of the complex z_j. We also define the following function spaces :

Let L_r be the analytic Hardy space :

$$\begin{aligned} L_r = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n), \ &f \text{ is analytic on } S(r), \\ \|f\|_{L_r} = \sup_{y \in (-r,r)^n} &\|f(\cdot + iy)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}. \end{aligned}$$

If m is a nonnegative integer then

$$X_m(r) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \|f\|^2_{X_m(r)} = \sum_{|\alpha| \le m} (\xi^{2\alpha} q(r,\xi)\hat{f}, \hat{f}) < +\infty \right\}$$

where

$$q(r,\xi) = \prod_{j=1}^{n} \cosh(2r\xi_j) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sinh(2r\xi_k) \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \cosh(2r\xi_j)$$

and $(\cdot,\cdot)$ denote the inner product in $L^2(\mathbb{R}^n)$. We also set

$$Y_m(r) = \left\{ f \in L_r,\ \|f\|^2_{Y_m(r)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_z^\alpha f\|^2_{L_r} < +\infty \right\}$$

and if $m \ge 1$,

$$\dot{Y}_m(r) = \left\{ f, \nabla f \in L_r,\ \|f\|^2_{\dot{Y}_m(r)} = \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|\partial_z^\alpha f\|^2_{L_r} < +\infty \right\}$$

The following lemma will show that $Y_{m+1}(r) \subset X_m(r) \subset Y_m(r)$ (see [7] or [1] for a proof of this lemma).

LEMMA 1.1. *Let $f \in L_r$, then if $f(x)$ is the trace of $f(z)$ on the real axis,*

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \prod_{j=1}^n \cosh(2r\xi_j) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \le 2^n \|f\|^2_{L_r}$$

Conversely, if the left hand side of this inequality is finite, then f has an analytic extension $f(z) \in L_r$ and

$$\|f\|^2_{L_r} \le 2^n \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \prod_{j=1}^n \cosh(2r\xi_j) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

We can now state our result :

THEOREM 1.

Let $m = 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3$. Suppose that for some $r_0 > 0$, ϕ has an analytic extension $\phi(z) \in X_m(r_0)$. Then there exist $T > 0$ and $A > 0$ depending only on $\|\phi\|_{X_m(r_0)}$ and a positive, decreasing function $r(s)$ on $[0,T]$ with $r(0) = r_0$ such that (1.1) has an analytic solution

$$u(t) \in C([-T,T], X_m(r(T))) \cap L^2(-T,T,\dot{Y}_{m+1}(r(T)))$$

satisfying $u(t) \in X_m(r(|t|))$, $\forall t \in [-T,T]$, which is unique in the class

$$B(T) = \{v \in C([-T,T], X_m(r(T)),$$
$$\|v\|^2_{B(T)} = \sup_{|t|\le T} \|v(t)\|^2_{X_m(r(|t|))} + A\int_{-T}^{T} \|v(t)\|^2_{\dot{Y}_{m+1}(r(|t|))} dt < +\infty \right\}$$

Moreover, $u \in C^\infty([-T,T], Y_k(r'))$ for each $k \in \mathbb{N}$ and each $r' < r(T)$.

Before proving the theorem, which will be done in section 3 using a fixed point method as in [8], we need to collect some estimates on the nonlinear term. This is the object of the following section. In section 4 we give a local existence result concerning the case of systems, and in section 5 we state a global existence result when L is a second order homogeneous differential operator.

2. Preliminary results

First we explain how we can get an analytic extension of $\mathcal{H}(v)$ when v is analytic and $v \in L_r$:

LEMMA 2.1.

Let $v \in L_r$, and $v_y = v(\cdot + iy)$. We set $\tilde{\mathcal{H}}v(z) = K * v_y(x) = \mathcal{H}v_y(x)$, with $z = x + iy$. Then $\tilde{\mathcal{H}}v$ is an analytic continuation of $\mathcal{H}v$ and belongs to L_r. Furthermore, $\tilde{\mathcal{H}}$ is bounded as an operator from L_r into itself and commutes with derivations with respect to z.

Proof. Let f be such that $\sup_{y\in(-r,r)^n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-2y\cdot\xi}|f(\xi)|^2 d\xi < +\infty$ then $\left|e^{iz\cdot\xi}f(\xi)\right| = e^{-y\cdot\xi}|f(\xi)|$ is bounded from above by an integrable function of ξ when y is in a compact subset of $(-r,r)^n$ (see [14] p. 92) ; hence $F(z) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{iz\cdot\xi}f(\xi)d\xi$ is well defined and analytic in $S(r)$. Now let $v \in L_r$, then $\hat{v}_y(\xi) = e^{-y\cdot\xi}\hat{v}(\xi)$ (see [14] p. 99) hence by Plancherel's theorem

$$\sup_{y\in(-r,r)^n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-2y\cdot\xi} \left|\hat{v}(\xi)\right|^2 d\xi < +\infty$$

and we can apply the preceding result with $f(\xi) = \hat{K}(\xi)\hat{v}(\xi)$. This shows that $\tilde{\mathcal{H}}v$ is analytic on $S(r)$. Since $\mathcal{H}$ is bounded from $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ into itself, it follows that $\tilde{\mathcal{H}}v$ is in L_r and that $\tilde{\mathcal{H}}$ is bounded from L_r to itself. The last point of the lemma is clear since we have

$$\tilde{\mathcal{H}}v(z) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{iz\cdot\xi}\hat{K}(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi. \qquad \square$$

The following lemma, and its corollary, which give estimates on $F(u)$ will be proved using the same method as Hayashi in [7] and [8], although in [8] the definitions of the spaces are more complicated, and we refer to these papers for more details.

LEMMA 2.2.

Let $w_1, ..., w_k \in Y_m(r)$; then

$$\left\|w_1\tilde{\mathcal{H}}(w_2w_3)\right\|_{Y_m(r)} \le C\sum_{\ell=1}^{3}\left(\prod_{j\neq\ell,j=1}^{3}\|w_j\|_{Y_{m-1}(r)}\right)\|w_\ell\|_{Y_m(r)} \tag{2.1}$$

$$\left\|\prod_{j=1}^{k} w_j\right\|_{Y_m(r)} \le C\sum_{\ell=1}^{k}\left(\prod_{j\neq\ell,j=1}^{k}\|w_j\|_{Y_{m-1}(r)}\right)\|w_\ell\|_{Y_m(r)} \tag{2.2}$$

COROLLARY 2.3.

For $v \in L_r$, let $\tilde F(v) = G(v,\nabla v, v^*, \nabla v^*) + v\tilde{\mathcal{H}}(\partial_z^\alpha(vv^*))$ be an analytic continuation of $F(v)$ obtained by setting $v^*(z) = \bar v(\bar z)$, then there exist three polynomials Q_1, Q_2, Q_3 with nonnegative coefficients such that if $v, v_1, v_2 \in Y_m(r)$ we have

$$\begin{aligned}(2.3)\quad \left\|\tilde F(v_1) - \tilde F(v_2)\right\|_{Y_m(r)} &\le Q_1(\|v_1\|_{Y_m}, \|v_2\|_{Y_m})\, \|v_1 - v_2\|_{Y_{m+1}} \\ &+ Q_2(\|v_1\|_{Y_m}, \|v_2\|_{Y_m})\, \|v_1 - v_2\|_{Y_m} (\|v_1\|_{Y_{m+1}} + \|v_2\|_{Y_{m+1}})\end{aligned}$$

$$(2.4)\qquad \left\|\tilde F(v)\right\|_{Y_m(r)} \le Q_3(\|v\|_{Y_m(r)})\|v\|_{Y_{m+1}(r)}$$

where we have written Y_m and Y_{m+1} for $Y_m(r)$ and $Y_{m+1}(r)$.

We first prove Corollary 2.3, after what we give the ideas for the proof of Lemma 2.2.

Proof of Corollary 2.3

We only prove (2.3) since (2.4) is an immediate consequence of (2.3). The estimate for the nonlocal term $\left\|v_1\tilde{\mathcal{H}}(\partial_z^\alpha(v_1v_1^*)) - v_2\tilde{\mathcal{H}}(\partial_z^\alpha(v_2v_2^*))\right\|_{Y_m(r)}$ is obtained using (2.2), since $\mathcal{H}$ is a linear operator. For the other terms, we write :

$$G(v_1,\nabla v_1,\bar v_1,\nabla\bar v_1) - G(v_2,\nabla v_2,\bar v_2,\nabla\bar v_2) =$$

$$\sum_{|\beta|\le 1}\left[G_\beta(v_1,v_2)\partial_z^\beta(v_1 - v_2) + G_\beta^*(v_1,v_2)\partial_z^\beta(v_1^* - v_2^*)\right]$$

where G_β and G_β^* are polynomial functions of v_1, v_2, v_1^*, v_2^* and their first order derivatives; we then apply (2.1) to each term ; since $\left\|v_j^*\right\|_{Y_m(r)} = \|v_j\|_{Y_m(r)}$, this leads to (2.3). □

Proof of Lemma 2.2

Let $\beta \in \mathbb{N}^n$ with $|\beta| \le m$, then

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_z^\beta(w_1\tilde{\mathcal{H}}(w_2w_3))(\cdot + iy)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\left\|\partial_z^{\beta_1}w_1\partial_z^{\beta_2}(\tilde{\mathcal{H}}(w_2w_3))(\cdot + iy)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

If $|\beta_1| + |\beta_2| \le m$, then at least one of them is less than or equal to $[n/2]+1$, so it follows from the above inequality that

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_z^\beta(w_1\tilde{\mathcal{H}}(w_2w_3))(\cdot + iy)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\sum_{|\beta_1|\le[n/2]+1}\left\|\partial_z^{\beta_1}w_1(\cdot + iy)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\sum_{|\beta_2|\le m}\left\|\partial_z^{\beta_2}(w_2w_3)\right\|_{L_r} \\ &+C\sum_{|\beta_1|\le m}\left\|\partial_z^{\beta_1}w_1\right\|_{L_r}\sum_{|\beta_2|\le[n/2]+1}\left\|\partial_z^{\beta_2}\mathcal{H}(w_2w_3)(\cdot + iy)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

where we have used the fact that $\tilde{\mathcal{H}}$ is a bounded operator on L_r which commutes with derivations.

Now, by Sobolev's inequalities, $H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ and using the properties of $\tilde{\mathcal{H}}$ once more, we deduce that

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_z^\beta(w_1\tilde{\mathcal{H}}(w_2w_3))(\cdot + iy)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sum_{|\beta_1|\leq m-1} \left\|\partial_z^{\beta_1} w_1\right\|_{L_r} \sum_{|\beta_2|\leq m} \left\|\partial_z^{\beta_2}(w_2w_3)\right\|_{L_r} \\
&+C \sum_{|\beta_1|\leq m} \left\|\partial_z^{\beta_1} w_1\right\|_{L_r} \sum_{|\beta_2|\leq m-1} \left\|\partial_z^{\beta_2}(w_2w_3)\right\|_{L_r}
\end{aligned}$$

since $[n/2]+1+[n/2]+1 \leq m-1$. (see [8] for more details).

The conclusion is then obtained by applying the same argument as before to the term $\left\|\partial_z^{\beta_2}(w_2w_3)\right\|_{L_r}$; the proof of (2.2) is derived in the same way, noting that if $\beta_1+...+\beta_k \leq m$ then at most one of them is greater than $[n/2]+1$, and we refer to [8] again for a more detailed proof in the case $k=3$. $\square$

3. Proof of Theorem 1.

Again, we use an adaptation of the methods in [7] and [8]. We let $T>0$ and $A>0$ to be chosen later. Let

$$r(|t|) = r_0 e^{-|t|A/r_0}. \tag{3.1}$$

We set

$$\begin{aligned}
&B(T) = \{v \in C([-T,T],\ X_m(r(T))) \text{ such that} \\
&\|v\|^2_{B(T)} = \sup_{|t|\leq T} \|v(t)\|^2_{X_m(r(|t|))} + A\int_{-T}^{T} \|v(t)\|^2_{\dot{Y}_{m+1}(r(|t|))} dt < +\infty\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Let B_ρ be the ball with radius ρ in $B(T)$, with $\rho = 2\|\phi\|_{X_m(r_0)}$. For $v \in B_\rho$ we consider the following equation :

$$\begin{cases} i\partial_t u + Lu = F(v) \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{3.3}$$

Let $w = \partial_x^\beta u$, with $|\beta| \leq m$; then the Fourier transform $\hat{w}$ of w satisfies

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{w} + p(\xi)\hat{w} = \widehat{\partial_x^\beta F(v)} \\ \hat{w}(0) = \partial_x^\beta \phi. \end{cases} \tag{3.4}$$

This shows, using the associated integral equation

$$\hat{w}(t) = e^{itp(\xi)}\hat{w}(0) - i\int_0^t e^{i(t-\tau)p(\xi)}\partial_x^\beta \widehat{F(v(\tau))}(\xi)d\tau, \tag{3.5}$$

the equivalent norm in Lemma 1.1, and Corollary 2.3, that $w(t)$ has an analytic continuation in $L_{r(|t|)}$ for all $t \in [-T,T]$; the following computations are made rigorous in the appendix, where we show that in fact, $w(t)$ belongs to $Y_1(r(|t|))$ for a.e. $t \in [-T,T]$, and that

$$\int_{-T}^{T} \|w(t)\|_{Y_1(r(|t|))}dt < +\infty.$$

Let $t \in [0,T]$. As in [8] we take the inner product of equation (3.2) with $q(r(t),\xi)$ in $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$, then its imaginary part, and noting that

$$\partial_t q(r(t),\xi) = \sum_{k=1}^{n} 2r'(t)\xi_k^2 \prod_{j=1}^{n} \cosh(2r(t)\xi_j) + h(\xi, r(t)) \tag{3.6}$$

with $h(\xi,r(t)) \leq 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, we obtain

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(q(r(t),\cdot)\hat{w}(t),\hat{w}(t)) - 2r'(t)\left(|\xi|^2 \prod_{j=1}^{n} \cosh(2r(t)\xi_j)\hat{w}(t),\hat{w}(t)\right) \\ &\leq 2\ \mathrm{Im}\ \left(\partial_x^\beta \widehat{F(v(t))}, q(r(t),\cdot)\hat{w}(t)\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Using then Schwarz inequality, Lemma 1.1 and the inequality $|\sinh\eta| \leq \cosh\eta$, the right hand side can be bounded above by $2\left\|\partial_x^\beta \tilde{F}(v(t))\right\|_{L_r(t)} \|w(t)\|_{Y_1(r(t))}$. Integrating in t and assuming that $e^{-TA/r_0} \geq 1/2$, we have

$$\begin{aligned} &\|w(t)\|^2_{X_0(r(t))} + A\int_0^t \|w(s)\|^2_{Y_1(r(s))}ds \\ &\leq \|\phi\|^2_{X_m(r_0)} + 2\int_0^t \left\|\partial_x^\beta \tilde{F}(v(s))\right\| \|w(s)\|_{Y_1(r(s))}ds \end{aligned}$$

and a similar estimate for $t \in [-T,0]$, hence

$$\|u\|^2_{B(T)} \leq \frac{\rho^2}{4} + 2\left(\int_{-T}^{T}\left\|\tilde{F}(v(s))\right\|^2_{Y_m(r(|s|))}ds\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\|u(s)\|^2_{Y_{m+1}(r(|s|))}ds\right)^{1/2}$$

and by (2.4)

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{B(T)} &\leq \frac{\rho^2}{4} + 2Q_3(\rho)\left(\int_{-T}^{T}\|v(s)\|^2_{Y_{m+1}(r(|s|))}ds\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\|u(s)\|^2_{Y_{m+1}(r(|s|))}ds\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\rho^2}{4} + 2\rho Q_3(\rho)\left(2T + \frac{1}{A}\right)\|u\|_{B(T)} \end{aligned}$$

from which it follows that

$$\|u\|_{B(T)} \le \frac{\rho}{\sqrt{2}} + 2\rho Q_3(\rho)\left(2T + \frac{1}{A}\right). \tag{3.8}$$

Now, if u_1 and u_2 are two solutions of (3.1) corresponding to v_1 and $v_2 \in B_\rho$, with the same initial data ϕ, then we easily obtain, with $u = u_1 - u_2$, using (2.3) :

$$\begin{aligned}\|u\|_{B(T)} \le\ & 2Q_1(\rho,\rho)\left(\int_{-T}^{T} \|v_1 - v_2\|^2_{Y_{m+1}(r(|s|))}\, ds\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T} \|u(s)\|^2_{Y_{m+1}}\, ds\right)^{1/2} \\ & + 2Q_2(\rho,\rho)\, \|v_1 - v_2\|_{Y_m(r(|s|))}\left(\int_{-T}^{T} \left(\|v_1\|_{Y_{m+1}} + \|v_2\|_{Y_{m+1}}\right)^2 ds\right)^{1/2} \\ & \times \left(\int_{-T}^{T} \|u\|^2_{Y_{m+1}}\, ds\right)^{1/2}\end{aligned}$$

hence

$$\|u\|_{B(T)} \le 2[Q_1(\rho,\rho) + 2\sqrt{\rho}Q_2(\rho,\rho)]\left(2T + \frac{1}{A}\right)\|v_1 - v_2\|_{B(T)}\,. \tag{3.9}$$

Inequalities (3.8) and (3.9), in addition with $e^{-TA/r_0} \ge 1/2$, show that T and A can be chosen such that there exists a unique fixed point in B_ρ and this yields the conclusion.

Since for $r' < r$ we have $Y_1(r') \subset L_r$ as it can be shown using the equivalent norm given in Lemma 1.1 (see the Appendix), we obtain $u \in C([-T,T], Y_\ell(r'))$ for each $r' < r(T)$ and each $\ell \in \mathbb{N}$. But then if k_0 is the order of the pseudo-differential operator L, i.e. if $|p(\xi)| \le C(1 + |\xi|)^{k_0}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, the equation $iu_t + Lu = F(u)$ gives $u_t \in C([-T,T], Y_{\ell-k_0}(r'))$ for each $r' < r(T)$ and each $\ell \in \mathbb{N}$. Hence, by a bootstrap argument we obtain $u \in C([-T,T], Y_\ell(r'))$, $\forall r' < r(T)$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, and this completes the proof of Theorem 1. □

4. The case of systems.

Consider now the following system :

$$\begin{cases} i\mathbf{u}_t + \mathbf{P}(D)\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \phi \end{cases} \tag{4.1}$$

where $\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}$ is a $\mathbf{C}^2$−valued function of $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{R}$, the linear operator $\mathbf{P}(D)$ is defined by $\widehat{\mathbf{P}(D)\mathbf{u}} = \mathbf{P}(\xi)\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{P}(\xi)$ being a 2×2 symmetric matrix symbol with real entries satisfying

$$\mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} P_1(\xi) & P_2(\xi) \\ P_2(\xi) & P_3(\xi) \end{pmatrix},\ P_i(\xi) \text{ real and } P_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ i = 1,2,3.$$

The nonlinear term $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ is equal to

$$\begin{pmatrix} F_1(u_1,u_2)+G_1(u_1,u_2) \\ F_2(u_1,u_2)+G_2(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

each of F_1 and F_2 being polynomials with complex coefficients with variables $u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ and their x-derivatives at first order, G_1 and G_2 being nonlocal terms of the same type as in the scalar case.

We denote by $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{L}_r$, $\mathcal{X}_m$, $\mathcal{Y}_m$ respectively the spaces $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$, $L_r\times L_r$, $X_m\times X_m$ and $Y_m\times Y_m$, and denote by $((\cdot,\cdot))$ the inner product in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. We then have a result similar to Theorem 1 :

THEOREM 2. *Assume that* $\mathbf{P}(\xi)$ *and* $\mathbf{F}$ *are as above,* m *is the positive integer defined in Theorem 1. Let* $\phi(z) = \begin{pmatrix}\phi_1(z)\\ \phi_2(z)\end{pmatrix} \in \mathcal{X}_m(r_0)$ *for some* $r_0>0$. *Then there exist* r *and* T *as in Theorem 1 such that (4.1) has an analytic solution* $\mathbf{u}(t)\in\mathcal{X}_m(r(|t|))$ *with* $\mathbf{u}\in\mathcal{C}^\infty([-T,T],\mathcal{Y}_\infty(r'))$ *for each* $r'<r(T)$, *and* $\mathbf{u}$ *is unique in the class* $B(T)\times B(T)$ *(see Theorem 1).*

Proof. The proof is essentially the same as that of Theorem 1. Estimates similar to (2.3) and (2.4) for the nonlinear term $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ are obtained exactly in the same way. Here again we only expose formal computations which can be justified as those in Theorem 1 (see the appendix). Consider the following equation

$$\begin{cases} i\mathbf{u}_t+\mathbf{P}(D)\mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(0)=\phi \end{cases} \tag{4.2}$$

with $\mathbf{v}\in\mathcal{B}(T)=B(T)\times B(T)$ (see (3.2)) and $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}(T)}\le\rho$, $\rho=2\|\phi\|_{\mathcal{X}_m(r_0)}$. Let $t\ge0$ and $r(|t|)$ defined by (3.1) ; as in the proof of Theorem 1, we set $\mathbf{w}=\partial_x^\beta\mathbf{u}$ with $|\beta|\le m$. Then its Fourier transform $\hat{\mathbf{w}}(t)$ satisfies the following equation :

$$\begin{cases} i\partial_t\hat{\mathbf{w}}(t,\xi)+\mathbf{P}(\xi)\hat{\mathbf{w}}(t,\xi)=\widehat{\partial_x^\beta\mathbf{F}(\mathbf{v})}(t,\xi) \\ \hat{\mathbf{w}}(0,\xi)=\widehat{\partial_x^\beta\phi}(\xi) \end{cases} \tag{4.3}$$

or equivalently its integral form :

$$\hat{\mathbf{w}}(t,\xi)=e^{it\mathbf{P}(\xi)}\widehat{\partial_x^\beta\phi}(\xi)-i\int_0^t e^{i(t-\tau)\mathbf{P}(\xi)}\widehat{\partial_x^\beta\mathbf{F}(\mathbf{v})}(\tau,\xi)d\tau \tag{4.4}$$

Now, since $\mathbf{P}(\xi)$ is a real symmetric matrix, $e^{i(t-\tau)\mathbf{P}(\xi)}$ is a unitary matrix ; hence using the norm in Lemma 1.2 and the fact that $0\le r(t)\le r(\tau)$ if $0\le\tau\le t$, we deduce from equation (4.4) that if $\phi\in\mathcal{Y}_m(r_0)$ and $\mathbf{F}(\mathbf{v}(t))\in\mathcal{Y}_m(r(t))$ then $\mathbf{w}(t)\in\mathbb{L}_{r(t)}$. We then take the inner product in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ of (4.3) with $q(r(t),\xi)\hat{\mathbf{w}}(\xi)$, since $\mathbf{P}(\xi)$ is real symmetric, it follows that $((\mathbf{P}(\xi)\hat{\mathbf{w}}(t), q(r(t),\xi)\hat{\mathbf{w}}(t)))$ is real and we can conclude the proof exactly as we did for Theorem 1. □

We now give two examples of systems to which Theorem 2 can apply :

Example 1. The following coupling system between Korteweg-de Vries and Schrödinger equations also arise in the physical context of water waves (see the work of Kawahara et al. [12] for a derivation of this system) :

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + u_{xxx} + (u^2 + |\varphi|^2)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+ \\ i\varphi_t + \varphi_{xx} + u\varphi = 0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

where $u(x,t) \in \mathbb{R}$ and $\varphi(x,t) \in \mathbf{C}$.

Example 2. The Boussinesq equation

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} - u_{xx}^2 = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ u(x,t) \in \mathbb{R} \\ u(0) = \phi,\ u_t(0) = \psi \end{array}\right. \tag{4.6}$$

can be written in the following form :

$$\left\{\begin{array}{l} iu_t - v_{xx} + v = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ iv_t - u_{xx} + (I - \partial_x^2)^{-1} u_{xx}^2 = 0 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Although the nonlinear term has not exactly the form assumed in Theorem 2, it is not difficult to see that

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u})(z) = \begin{pmatrix} v(z) \\ (I - \partial_x^2)^{-1}(u_{zz}^2) \end{pmatrix}$$

with $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, satisfies the following estimates :

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u})\right\|_{\mathcal{Y}_3(r)} &\leq C\left(\|v\|_{Y_3(r)} + \|u_{zz}^2\|_{Y_1(r)}\right) \\ &\leq C\left(\|v\|_{Y_3(r)} + \|u\|_{Y_3(r)}^2\right) \leq C\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{Y}_3(r)}(1 + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{Y}_3(r)}) \end{aligned}$$

(we use the fact that $Y_1(r)$ is an algebra for $n = 1$). Hence the conclusion of Theorem 2 holds and by uniqueness this yields an analytic solution to (4.6) satisfying $u(x) \in \mathbb{R}$ if $x \in \mathbb{R}$, provided ϕ and ψ are real valued and have analytic extensions in $X_3(r_0)$ for some $r_0 > 0$.

5. A global result.

In [8], Hayashi, working in slightly different spaces proved in fact a global existence result concerning the nonlinear Schrödinger equation i.e. when $Lu = -\frac{1}{2}\Delta u$ and $F(u)$ is an homogeneous polynomial of degree three with respect to u, $\bar{u}$, ∇u and $\nabla \bar{u}$.

Here we state more general conditions under which the result is still valid, and which apply to equations (1.2) and (1.3) (with L_2 elliptic).

Consider equation (1.1) in $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 2$ and assume that

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

with $A = (a_{ij})$ a regular symmetric $n \times n$ matrix, $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

and that $F(u) = G(u, \nabla u, \bar{u}, \overline{\nabla u}) + u\mathcal{H}(\partial_x^\alpha |u|^2)$ as before, but with in addition :

$$G(\omega u, \omega \nabla u, \overline{\omega u}, \overline{\omega \nabla u}) = \omega G(u, \nabla u, \bar{u}, \overline{\nabla u})$$

for any $\omega \in \mathbf{C}$ with $|\omega| = 1$,

$$\left| G(u, \nabla u, \bar{u}, \overline{\nabla u}) \right| \leq C(|u| + |\nabla u|)^3.$$

Let $B = (b_{ij}) = A^{-1}$, and $\lambda(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$. Let

$$\begin{aligned} J_{x_k}(t)u &= 2ite^{i\lambda(x)/4t} \frac{\partial}{\partial x_k}(e^{-i\lambda(x)/4t}u) \\ &= 2it\frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} x_\ell u \end{aligned}$$

then $i\partial_t + L$ commutes with $J_{x_k}(t)$, $k = 1, ..., n$. Let $J_x(t) = (J_{x_1}(t), ..., J_{x_n}(t))$. We set as in [8] :

$$\begin{aligned} B_m(t,r) = \{ f(z) \in L_r, \ &\|f\|^2_{B_m(t,r)} \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \left\| \partial_z^\alpha J_z^\beta(t) f \right\|^2_{X_0(r)} < +\infty \} \end{aligned}$$

then, with the same proof as in [8], the following result holds :

THEOREM 3. *Assume that for some $r_0 > 0$, ϕ has an analytic extension in $B_m(0, r_0)$ with $m = 2[n/2] + 3$ and that*

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2[n/2]+3} \left\| \partial_z^\alpha z^\beta \phi \right\|^2_{X_0(r_0)}$$

is sufficiently small. Then (1.1) has a global solution $u(t, x)$ which has an analytic continuation in $\bigcap_{k \geq 0} C^\infty(\mathbb{R}, Y_k(r'))$ for any $r' < r_0$. This solution is unique in a sense similar to that in Theorem 1.

APPENDIX.

Here we show that if $\hat{w}$ is a solution of (3.4) on $[0,T]$ with $v \in B(T)$ and $\phi \in X_m(r_0)$, then $w(t) \in Y_1(r(t))$ for a.e. $t \in [0,T]$ and $\int_0^T \|w(t)\|^2_{Y_1(r(t))} dt < \infty$. First, note that if $r > 0$, $f \in L_r$ and $0 < r' < r$, then

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \prod_{j=1}^n \cosh(2r'\xi_j) \left|\widehat{\partial_{x_k} f}\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \xi_k^2 \prod_{j=1}^n \cosh(2r'\xi_j) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \prod_{j=1}^n \cosh(2r\xi_j) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

which proves that $L_r \subset Y_1(r')$ for any $r' < r$; therefore

$$(A.1) \qquad L_r \subset \cap_{m \geq 0} Y_m(r'), \quad \forall r' < r.$$

Let $\hat{w}(t)$ be a solution of (3.4) for $t \in [0,T]$, with $v \in B(T)$ and $\phi \in X_m(r_0)$. Then $\hat{w}(t)$ also satisfies the integral equation (3.5) and, as we noted in the proof of Theorem 1, it follows easily that $w(t) \in L_{r(t)}$ for all $t \in [0,T]$, and that $\sup_{t \in [0,T]} \|w(t)\|_{L_{r(t)}} < +\infty$.

Now, from this and (A.1), it follows that $w(t) \in L^\infty(0,T, \cap_{m \geq 0} Y_m\left(\frac{r(T)}{2}\right))$ and this implies

$$(A.2) \qquad \partial^\alpha w \in L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{R}^n)) \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

We then set for $b \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$:

$$q_b(r,\xi) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| \leq b}} \frac{(2r\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} + \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \\ |\gamma| \leq b}} \frac{(2r\xi_k)^{2\gamma_k+1}}{(2\gamma_k+1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{(2r\xi_j)^{2\gamma_j}}{(2\gamma_j)!}$$

and take the imaginary part of the inner product of equation (3.4) with $q_b(r(t),\xi)\hat{w}(t,\xi)$ in $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$. This gives

$$(A.3) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\hat{w}(t), q_b(r(t),\cdot)\hat{w}(t)) - \frac{1}{2}(\hat{w}(t), \partial_t q_b(r(t),\cdot)\hat{w}(t)) \\ &\qquad = Im(G(\widehat{v(t)}), q_b(r(t),\cdot)\hat{w}(t)) \end{aligned}$$

where we have set $G(v) = \partial_x^\beta F(v)$. But we have

$$\partial_t q_b(r(t),\xi) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| \le b-1}} 2r'(t)\xi_k \frac{(2r(t)\xi_k)^{2\gamma_k+1}}{(2\gamma_k+1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(2r(t)\xi_j)^{2\gamma_j}}{(2\gamma_j)!}$$

$$+ 2r'(t)|\xi|^2 \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| \le b}} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}$$

$$+ 2r'(t) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} \sum_{|\gamma| \le b-1} \xi_k \frac{(2r(t)\xi_k)^{2\gamma_k+1}}{(2\gamma_k+1)!} \xi_\ell \frac{(2r(t)\xi_\ell)^{2\gamma_\ell+1}}{(2\gamma_\ell+1)!}$$

$$\times \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq \ell}}^{n} \frac{(2r(t)\xi_j)^{2\gamma_j}}{(2\gamma_j)!}$$

Hence

$$\partial_t q_b(r(t),\xi) = 2r'(t)|\xi|^2 \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| \le b}} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} + r'(t) h_b(r(t),\xi)$$

with $h_b(r(t),\xi) \ge 0$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Then, if we assume that $e^{-TA/r_0} \ge \frac{1}{2}$, if follows from (A.3) that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\hat{w}(t), q_b(r(t),\cdot)\hat{w}(t))$$

$$+A \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\gamma| \le b}} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} |\xi|^2 \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} |\hat{w}(t,\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\le Im \int_{\mathbb{R}^n_\xi} q_b(r(t),\xi)\hat{w}(t) G(\widehat{v(t)}) \, d\xi$$

Since, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{0}^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \le \sum_{0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(this follows for example from the Taylor-Lagrange formula applied to e^{-x} at the order $2n+1$), the right hand side can be bounded above by

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left\{ \sum_{|\gamma| \le b} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \sum_{|\gamma| \le b+1} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} \right\} |\hat{w}(t,\xi)| \left| G(\widehat{v(t)}) \right| d\xi$$

and using Schwarz inequality, by

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}(1+|\xi|^2)\sum_{|\gamma|\le b}\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\sum_{|\gamma|\le b}\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}\left|G\widehat{(v(t))}\right|^2d\xi\right)^{1/2}$$
$$+\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\sum_{|\gamma|=b+1}|\xi|^2\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\sum_{|\gamma|\le b+1}\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}\left|G\widehat{(v(t))}\right|^2d\xi\right)^{1/2}$$

Since from (A.2) and Corollary 2.3, $\xi^\alpha\hat{w}(t)$ and $\xi^\alpha G\widehat{(v(t))}$ are in $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ for all $\alpha\in\mathbb{N}^n$, the right hand side is finite. The last term is bounded again by

$$\frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\sum_{|\gamma|\le b}\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|\,d\xi+\frac{1}{2}\|w(t,\xi)\|^2_{L_r(t)}$$
$$+C\|G(v(t))\|^2_{L_r(t)}+\sum_{|\gamma|=b+1}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi$$

We then integrate this inequality between 0 and t for $t\in[0,T]$; it yields

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi}q_b(r(t),\xi)\,|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi+A\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\le b}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi dt$$
$$\le\left(1+\frac{A}{2}\right)\int_0^T\|G(v(t))\|^2_{L_{r(t)}}dt+T\sup_{0\le t\le T}\|\hat{w}(t,\xi)\|^2_{L_{r(t)}}$$
$$+\sum_{|\gamma|=b+1}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi dt$$

We will show that this relation implies $w(t)\in\dot{Y}_1(r(t))$ for a.e. $t\in[0,T]$ and more precisely that

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\prod_{j=1}^n\cosh(2r(t)\xi_j)\,|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi dt<+\infty.$$

For that purpose we set for $b\in\mathbb{N}$:

$$u_b=u_b(T,\hat{w})=\sum_{|\gamma|=b}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n_\xi}|\xi|^2\frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!}|\hat{w}(t,\xi)|^2\,d\xi dt$$

and we will show that $\sum_0^\infty u_b < +\infty$. The preceding inequality implies

$$A \sum_{k=0}^{b} u_k \leq C + u_{b+1}$$

where C is a constant. Since $u_b \geq 0$ for all $b \in \mathbb{N}$, it is easily seen that such a series either is convergent, or tends to infinity faster than any power of b i.e. $\underset{b \to +\infty}{\mathrm{b^k}} = 0(u_b)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Now here

$$u_b \leq \sum_{|\gamma|=b} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\gamma_k+1)(2\gamma_k+2)}{2r(T)} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma_k+2}}{(2\gamma_k+2)!}$$

$$\prod_{j \neq k} \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma_j}}{(2\gamma_j)!} |\hat{w}(t,\xi)|^2 \, d\xi dt$$

$$\leq \frac{1}{2r(T)} \sum_{|\gamma|=b+1} \sum_{k=1}^{n} (2\gamma_k+1)(2\gamma_k+2)$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \prod_{j=1}^{n} \cosh(2r(t)\xi_j) \, |\hat{w}(t,\xi)|^2 \, d\xi dt$$

$$\leq Cb^2 \int_0^T \|w(t)\|^2_{L_{r(t)}} dt$$

therefore the series is necessarily convergent ; this shows that

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{N}^n} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_\xi} |\xi|^2 \frac{(2r(t)\xi)^{2\gamma}}{(2\gamma)!} |\hat{w}(t,\xi)|^2 \, d\xi dt < +\infty$$

and by Fatou's lemma that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_\xi} |\xi|^2 \prod_{j=1}^{n} \cosh(2r(t)\xi_j) \, |\hat{w}(t,\xi)|^2 \, d\xi dt < +\infty$$

Hence $w(t) \in Y_1(r(t))$ for a.e. $t \in [0,T]$ and

$$\int_0^T \|w(t)\|^2_{Y_1(r(t))} dt < +\infty.$$

In the same way we can show that $w(t) \in Y_1(r(-t))$ $\forall t \in [-T, 0]$ and that

$$\int_{-T}^0 \|w(t)\|^2_{Y_1(r(-t))} dt < +\infty;$$

this ends to bear out the arguments in the proof of Theorem 1. ∎

Acknowledgement. I would like to thank Professor Jean-Claude Saut for his helpful and challenging remarks.

References

[1] H. Aikawa, N. Hayashi, S. Saitoh, Analyticity of solutions for semi-linear heat equations in one space dimension II, preprint.
[2] P. Constantin, Decay estimates for Schrödinger equations, *Com. Math. Phys. 127* (1990) 101-108.
[3] K.B. Dysthe, Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for applications to deep water waves, *Proc. Royal Soc. London A369* (1979) 105-114.
[4] G.B. Folland, Lectures on partial differential equations, (Tata Institute), Berlin, Springer, 1983.
[5] J.M. Ghidaglia and J.C. Saut, On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Nonlinearity 3* (1990) 475-506.
[6] J.M. Ghidaglia and J.C. Saut, Nonelliptic Schrödinger equations, to appear.
[7] N. Hayashi, Analyticity of solutions to the Korteweg-de Vries equation, preprint.
[8] N. Hayashi, Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations, *Duke Math. J. 60* (1990) 717-727.
[9] N. Hayashi and S. Saitoh, Analyticity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations, *Com. Math. Phys. 129* (1990) 27-41.
[10] S.J. Hogan, The fourth order evolution equation for deep water gravity capillary waves, *Proc. Royal Soc. London A402* (1985) 359-372.
[11] T. Kato and K. Masuda, Nonlinear evolution equations and analyticity I, *Annales Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire 3* (1986) 455-467.
[12] T. Kawahara, N. Sugimoto and T. Kakutani, Nonlinear interaction between short and long capillary-gravity waves, *J. Phys. Soc. Japan 39* (1975) 1379-1386.
[13] E.I. Shulman, On the integrability of equations of Davey-Stewartson type, *Theor. Math. Phys. 56* (1983) 131-136.
[14] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, *Princeton Univ. Press*, 1971.
[15] V.E. Zakharov and E.I. Shulman, On additionnal motion invariants of classical hamiltonian wave systems, *Physica 29D* (1988) 283-320.

Chapitre III : Instabilité des Bulles Stationnaires

1 - Introduction.

Le but de ce travail est d'étudier l'instabilité de certaines solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\partial_t \varphi + \Delta\varphi + F\left(|\varphi|^2\right)\varphi = 0 \tag{1.1}$$

Sous des hypothèses relativement générales sur F, ces solutions étant soumises à la "condition aux limites"

$$\lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = r_0 \tag{1.2}$$

où r_0 est un réel strictement positif, et $F\left(r_0^2\right) = 0$.

De telles solutions particulières interviennent principalement dans le contexte des gaz de Bose, et plus précisément dans le cas d'un système de Bosons avec interactions à 2 et 3 corps, décrit par l'équation de Schrödinger non linéaire de degré 5 :

$$i\partial_t \psi + \Delta\psi - \alpha_1\psi + \alpha_3|\psi|^2\psi - \alpha_5|\psi|^4\psi = 0 \tag{1.3}$$

où $\psi(x,t) \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}+, n = 1, 2$ ou 3, et $\alpha_3, \alpha_5 > 0$.

Ces solutions stationnaires peuvent être interprétées comme des "bulles de raréfaction", c'est-à-dire des noyaux d'une phase stable, représentée par la solution particulière $\psi = 0$, dans une phase métastable, correspondant à la solution $\psi = r_0$ où 0 et r_0^2 sont deux minima du potentiel V correspondant à l'équation (1.3), i.e.

$$V\left(|\psi|^2\right) = \alpha_1|\psi|^2 - \frac{1}{2}\alpha_3|\psi|^4 + \frac{1}{3}\alpha_5|\psi|^6$$

et vérifient $V(0) < V\left(r_0^2\right)$ (cf [1] et [2]).

En dimension un, toujours dans le cadre de l'équation (1.3), des solutions localisées, se déplaçant avec une vitesse v non nulle, i.e. des solutions de la forme $\psi(x,t) = \varphi(x - vt)$

et correspondant à des bulles non stationnaires ont également été explicitées (cf [1]). La "condition aux limites" correspondante est alors de la forme :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \psi(x,t) = r_0 e^{\mp i\mu}$$

où μ est un réel dépendant de la vitesse de propagation v, avec $\mu = 0$ lorsque $v = 0$.

Ces solutions semblent également avoir une interprétation dans chacun des nombreux domaines de la physique dans lesquels l'équation (1.3) intervient (voir [2] et les références incluses).

On se place dans le cadre général de l'équation (1.1), notre but étant de dégager les hypothèses sur F sous lesquelles des solutions stationnaires analogues à celles décrites pour l'équation (1.3) apparaissent, et de montrer que sous ces hypothèses, quelle que soit F, et quelle que soit la dimension n de l'espace, de telles solutions φ sont toujours instables, au sens où il existe des données initiales arbitrairement proches de φ telles que la solution correspondante de (1.1) s'en éloigne en un temps $t_0 < +\infty$.

Du point de vue mathématique, les solutions localisées le plus étudiées de l'équation (1.1) sont les "états stationnaires", c'est-à-dire de solutions de la forme

$$\varphi(x,t) = e^{i\omega t} u_\omega(x) \quad , \quad u_\omega \in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{1.4}$$

(voir par exemple [4], [7], [9], [11], [15], [16]).

L'étude de la stabilité de telles solutions est relativement complète, tout au moins dans le cas où le terme non linéaire F prend la forme d'une puissance pure, i.e. :

$$F\left(|\varphi|^2\right)\varphi = \lambda |\varphi|^{p-1}\varphi, \quad 1 < p < \frac{n+2}{n-2}, \quad \lambda > 0$$

On sait par exemple que si $\varphi_\omega = e^{i\omega t} u_\omega$ est un état fondamental, c'est à dire minimise l'action

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} G\left(|\psi|^2\right) dx$$

où $G(s) = \int_0^S F(\tau)d\tau$

parmi toutes les solutions de (1.1) de la forme (1.4), alors

- Pour $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, φ_ω est stable au sens suivant :

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$, tel que si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|u_0 - u_\omega\|_{H^1} < \delta$, alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left\|u(t) - e^{i\theta}u_\omega(\cdot - y)\right\|_{H^1} < \varepsilon$$

où $u(t)$ est la solution de (1.1) avec $u(0) = u_0$ (cf [7]). φ_ω est alors dite orbitalement stable.

- Pour $p > 1 + \frac{4}{n}$, φ_ω est instable au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\|u_0 - u_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ et telle que la solution correspondante $u(t)$ de (1.1) explose en temps fini, i.e. $\exists\ T* < \infty$ tel que

$$\lim_{t\to T*} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$$

(cf [4]).

Une étude générale de la stabilité des ondes solitaires dans les systèmes Hamiltoniens, dûe à Grillakis, Shatah et Strauss ([11]) permet également d'obtenir des critères de stabilité et d'instabilité de certains états stationnaires de l'équation (1.1) pour des termes non linéaires plus généraux.

Cette étude ne s'applique pas aux solutions considérées dans ce travail, d'une part à cause du fait qu'on ne bénéficie pas de la conservation de la "norme L^2" (les solutions considérées n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$), et d'autre part à cause de la "mauvaise structure spectrale" de l'opérateur Hamiltonien.

Mentionnons enfin deux articles de Grillakis ([9] et [10]) concernant l'étude de l'opérateur linéarisé autour d'une telle solution, et l'analyse du mécanisme menant à l'instabilité de certains états stationnaires.

Ici, on utilise également la linéarisation de l'équation (1.1) autour des solutions stationnaires considérées, appelées "bulles stationnaires", pour obtenir notre principal résultat (cf théorème 4), à savoir l'instabilité de ces solutions dans l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ où m est un entier strictement supérieur à $\frac{n}{2}$.

On considère donc l'équation (1.1) ou φ est une fonction à valeurs complexes de $x \in \mathbb{R}^n$ et de $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2_{x_j}}$

Dans toute la suite, on supposera que la fonction F est définie et continûment différentiable sur $\mathbb{R}_+$, sauf à la fin de la seconde partie et dans la partie 4, où F sera supposée plus régulière.

On suppose également qu'il existe un réel $\rho_0 > 0$ tel que $F(\rho_0) = 0$. On pose alors $r_0 = \sqrt{\rho_0}$.

On définit, pour m entier positif, les espaces :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$= \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n), u(x) \in \mathbb{R} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m\right\}$$

et

$$\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

$$= \{u \text{ a valeurs complexes}, u = u_1 + iu_2, u_j \in H^m(\mathbb{R}^n) \text{ pour } j = 1, 2\}$$

On identifiera parfois $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ à $H^m(\mathbb{R}^n) \times H^m(\mathbb{R}^n)$

Le travail est organisé de la façon suivante : Dans la seconde partie, on définit ce qu'on appellera les "bulles stationnaires" et on montre sous des hypothèses adéquates sur F, l'existence de telles solutions en traitant séparément les cas $n \geq 2$ et $n = 1$. On achève cette partie en donnant un résultat de régularité pour la solution φ lorsque F est supposée plus régulière.

La troisième partie est consacrée à l'étude du spectre de l'opérateur associé à l'équation linéarisée et à la démonstration du fait que cet opérateur possède une valeur propre réelle, strictement positive, et de partie réelle maximale.

Enfin, dans la quatrième partie, on utilise le résultat précédent pour montrer que les bulles stationnaires sont instables (cf. théorème 4).

On termine ce travail par un appendice regroupant les démonstrations d'un certain nombre de lemmes et de résultats relativement techniques.

2 - Existence des solutions stationnaires "bulles"

Dans cette partie, on étudie l'existence de solutions stationnaires, à symétrie radiale de (1.1) ayant un comportement de la forme (1.2) lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

Plus précisément, en adoptant la définition donnée par Barashenkov *et al* [2], on appellera "bulle stationnaire" toute fonction φ définie pour $x \in \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, et vérifiant :

i) $\varphi(x) = \varphi(r), r = |x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$ i.e. φ est à symétrie radiale.

ii) $\Delta\varphi + F(\varphi^2)\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}^n$

iii) $0 < \varphi(r) < \sqrt{\rho_0}, \quad \forall r \in [0, +\infty)$
$\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = \sqrt{\rho_0}$

iv) $\varphi_r(0) = 0; \quad \varphi_r(r) > 0, \forall r \in (0, +\infty)$

Etant donné la condition iii), il est naturel de chercher des solutions φ telles que $u = r_0 - \varphi$ soit dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, si φ vérifie ii), u est solution de l'équation :

$$\Delta u - F\left((r_0 - u)^2\right)(r_0 - u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \quad u \not\equiv 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

On obtient des solutions de (2.1) en appliquant une méthode dûe à Berestycki et Lions pour l'existence de solutions d'équations de champs scalaires Euclidiens non linéaires [6].

On définit

$$V(s) = -\int_{\rho_0}^{s} F(r)dr \tag{2.2}$$

L'énergie associée à l'équation (1.1) s'écrit alors, en termes de $u = r_0 - \varphi$:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V\left(|r_0 - u|^2\right) dx \tag{2.3}$$

E est également "l'action" associée à l'équation (2.1) (voir [6]).

Il est à noter que contrairement à la situation "classique" des états stationnaires, où l'on cherche des solutions de l'équation

$$\Delta u - \omega u + F(|u|^2)u = 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

l'équation (2.1) n'est pas "compatible" avec la transformation $u \to e^{i\theta}u, \theta \in \mathbb{R}$; en d'autres termes, la fonction $g(s) = -F\left((r_0 - s)^2\right)(r_0 - s)$ n'est pas une fonction impaire. Cette difficulté serait aisément surmontable pour l'existence d'une solution "bulle" puisque l'on cherche en fait une solution positive de (2.1) ; par contre, on ne pourra plus montrer que la solution obtenue minimise l'action $E(u)$ parmi toutes les solutions de (2.1), le seul résultat obtenu étant que cette solution minimise E parmi toutes les solutions positives de (2.1) (voir remarque 2.3).

On commencera par traiter le cas $n \geq 2$, car si le problème de minimisation avec contrainte utilisé pour résoudre (2.1) est différent dans le cas $n \geq 3$ et $n = 2$, les hypothèses concernant F et les résultats sont de même nature, contrairement au cas $n = 1$ (qui sera étudié ensuite) où l'on obtient l'unicité de la solution dès que l'on a l'existence.

On achèvera cette partie en donnant un résulat de régularité sur la solution φ obtenue lorsque F est supposée plus régulière, résultat qui sera nécessaire dans la partie 4 pour établir l'instabilité "non linéaire" de cette solution.

2.a - Le cas $n \geq 2$

Dans tout ce paragraphe, on fera les hypothèses suivantes sur F.

(2.4) $$F'(\rho_0) < 0$$

(2.5) $\exists\ \rho_1$ tel que $0 \leq \rho_1 < \rho_0$ et $V(\rho_1) < 0$ où Vest défini par (2.2).

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1.

Si F vérifie les hypothèses (2.4)-(2.5) alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, à valeurs réelles, qui est une bulle stationnaire, c'est-à-dire vérifiant les propriétés i) à iv).

De plus, sous les hypothèses (2.4) et (2.5), toute bulle stationnaire φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie la propriété supplémentaire suivante :

v) $\exists\, C > 0, \exists\, \delta > 0$ tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq 2$, on a

$$|\partial_x^\alpha (\varphi(x) - r_0)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Remarque 2.1.

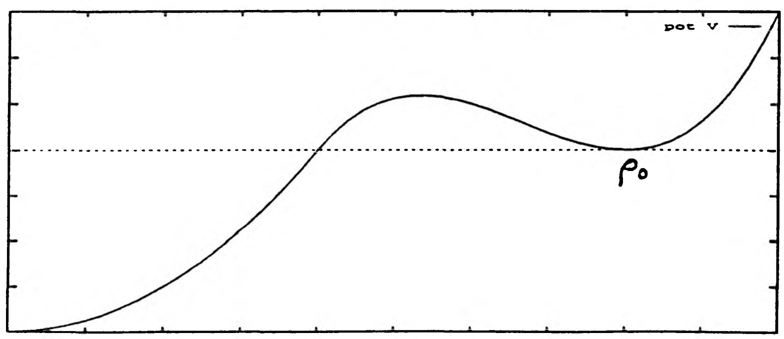
L'hypothèse F continûment différentiable sur $\mathbb{R}_+$ n'est en fait pas nécessaire pour obtenir l'existence d'une bulle stationnaire. On peut supposer seulement F continue sur $\mathbb{R}_+$ et remplacer l'hypothèse (2.4) par :

$$(2.4)' \qquad 0 < \underline{\lim}_{\rho \to \rho_0^-} \frac{F(\rho)}{\rho_0 - \rho} \leq \overline{\lim}_{\rho \to \rho_0^-} \frac{F(\rho)}{\rho_0 - \rho} < +\infty$$

On obtiendra alors le même résultat d'existence et la même régularité pour la solution φ (cf [6]). Cependant, l'hypothèse $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ est nécessaire pour pouvoir linéariser l'équation (1.1) ce que l'on fera dans la troisième partie en vue d'étudier la stabilité des bulles stationnaires.

Remarque 2.2.

Les hypothèses (2.4) et (2.5) seront vérifiées si l'on suppose que V admet un minimum relatif en ρ_0 avec $V''(\rho_0) > 0$ et que V admet un autre minimum en ρ_1, avec $0 \leq \rho_1 < \rho_0$ et $V(\rho_1) < V(\rho_0)$, i.e. V a la forme suivante :



Il était présumé dans [2] qu'un tel potentiel V devait faire apparaitre des bulles stationnaires.

Preuve du théorème 2.1.

On cherche donc une solution de l'équation (2.1) radiale, vérifiant $0 < u(r) < r_0$, et $u(r)$ strictement décroissante sur $(0, +\infty)$.

Posons

$$g(s) = -F\left((r_0 - s)^2\right)(r_0 - s)$$

Alors (2.1) s'écrit :

$$-\Delta u = g(u), u \in H^1(\mathbb{R}^n), u \not\equiv 0$$

De plus, sous les hypothèses (2.4) et (2.5), g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) = 2r_0 F'(\rho_0) < 0$$

Enfin, si on pose

$$G(\xi) = \int_0^\xi g(s)ds = -\frac{1}{2}V\left((r_0 - \xi)^2\right)$$

et $\xi_0 = \sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho_1} > 0$, alors on a $G(\xi_0) > 0$. On pose alors

$$g^*(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si} \quad s \geq 0 \\ -g(-s) & \text{si} \quad s \leq 0. \end{cases}$$

et on applique g^* le théorème 1 de Berestycki et Lions [6] si $n \geq 3$, et le théorème 1 de Berestycki, Gallouët et Kavian [5] si $n = 2$. On peut donc trouver une solution u radiale et strictement positive du problème

$$-\Delta u = g^*(u), u \in H^1(\mathbb{R}^n), u \not\equiv 0.$$

Puisque $u > 0$, u est également solution de $-\Delta u = g(u)$.

Pour plus de précision, on rappelle les différentes étapes de la démonstration de ces deux théorèmes.

On considère en fait la fonction : $\widetilde{g}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{g}(s) = g(s) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq r_0 \\ \widetilde{g}(s) = 0 & \text{si} \quad s \geq r_0, \end{cases}$$

et

$$\widetilde{g}(s) = -\widetilde{g}(-s) \quad \text{si} \quad s \leq 0$$

$\widetilde{g}$ vérifie alors :

(2.6)
$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{|g(s)|}{s^{\ell}} = 0, \quad \ell = \frac{n+2}{n-2}$$

De plus, par principe du maximun, toute solution positive u de $-\Delta u = \widetilde{g}(u)$ vérifiera $u < r_0$ et sera donc solution de $-\Delta u = g(u)$.

On introduit alors le problème de minimisation avec contrainte suivant :

pour $n \geq 3$:

(2.7)
$$\operatorname{Inf}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx, v \in H^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(v) dx = 1\right\}$$

et pour $n = 2$

(2.7)′
$$\operatorname{Inf}\left\{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx, v \in H^1(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{G}(v) dx = 0, v \neq 0\right\}$$

où $\widetilde{G}(\xi) = \displaystyle\int_0^{\xi} \widetilde{g}(s) ds$

Il y a trois raisons pour lesquelles on considère la fonction tronquée $\widetilde{g}$ au lieu de g^* :

La première est que la propriété (2.6) permet d'affirmer que la fonctionnelle

$$H^1(\mathbb{R}^n) \ni v \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(v)dx \in \mathbb{R}$$

est de classe C^1 sur $H^1(\mathbb{R}^n)$ (voir [6] théorème A-V).

La seconde est que l'on veut une bulle stationnaire φ strictement positive ; $u = r_0 - \varphi$ doit donc vérifier $u < r_0$, ce qui n'est à priori pas satisfait pour une solution u strictement positive de $-\Delta u = g(u)$ mais l'est pour une solution strictement positive de $-\Delta u = \widetilde{g}(u)$.

De plus, l'utilisation de cette troncature permet d'éviter d'avoir à faire à priori une hypothèse sur la croissance de F à l'infini.

On montre alors que $\left\{v \in H^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(v)dx = 1\right\}$, pour $n \geq 3$ et $\left\{v \in H^1(\mathbb{R}^2), v \neq 0, \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{G}(v)dx = 0\right\}$, pour $n = 2$, sont non vides (cf [5] et [6]). Puis on considère une suite minimisante u_n pour (2.7) ou (2.7)' et on se ramène au cas où u_n est positive, radiale et fonction décroissante de $r = |x|$ en considérant la symétrisée de Schwarz u_n^* de $|u_n|$.

On note ici que l'hypothèse $\widetilde{g}$ impaire est nécessaire pour pouvoir affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(u_n)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(|u_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(u_n^*)dx$$

C'est en fait l'unique raison pour laquelle on doit se ramener à une fonction impaire.

La suite de la preuve consiste à montrer que, quitte à extraire une sous-suite, u_n tend faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction radiale, non nulle, positive et décroissante $\underline{u}$ réalisant le minimum de (2.7) ou (2.7)' (voir [5] et [6]).

Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta \underline{u} = \theta \widetilde{g}(\underline{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n$$

On montre alors que $\theta > 0$, et on conclut en remarquant que $u = \underline{u}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\theta}}\right) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est une solution strictement positive, décroissante et radiale de $-\Delta u = \widetilde{g}(u)$ (avec $u(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$ car $u \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$).

Ainsi, $\varphi = r_0 - u$ vérifie les propriétés i), ii) et iii).

Pour montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, on applique à u le lemme 1, section 4 de [6], et la proposition 2-3 1°) de [5], basés sur un argument de bootstrap.

Enfin, pour la décroissance exponentielle de $r_0 - \varphi = u$, et de ses dérivées à l'ordre 2, on applique le lemme 2, section 4 de [6] et la propostion 2-3 2°) de [5], basés sur un argument d'équation différentielle, u étant radiale.

On obtient ainsi la conclusion du théorème 2.1. ∎

Remarque 2.3.

Toute solution $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ du problème $-\Delta u = \widetilde{g}(u)$ vérifie l'identité de Pohozaev (voir [6]).

$$\frac{n-2}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx = n\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(v)dx \tag{2.8}$$

Pour une telle solution, on peut donc réécrire "l'action" $\widetilde{E}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{G}(v)dx$ sous la forme $\widetilde{E}(v) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx$.

En utilisant ceci et le fait que la solution $u = r_0 - \varphi$ obtenue au théorème 2.1 est, à un changement d'échelle près, solution du problème de minimisation (2.7) ou (2.7)', il est possible de montrer que u minimise $\widetilde{E}$ parmi toutes les solutions de $-\Delta v = \widetilde{g}(v)$ (voir [6] théorème 3). Mais on ne sait pas si u minimise

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} G(v)dx$$

parmi toutes les solutions de $-\Delta v = g(v)$.

Remarque 2.4.

Cette même identité de Pohozaev permet de montrer que l'hypothèse (2.5) du théorème 2.1, i.e. l'existence de deux minima distincts du potentiel V est une hypothèse nécessaire à l'existence d'une bulle stationnaire. On montre en effet facilement, en utilisant (2.8) qu'une telle solution ne peut exister si $V(\rho) \geq 0$ pour $0 \leq \rho \leq \rho_0$.

En particulier, l'équation de Schrödinger non linéaire, connue sous le nom d'équation de Gross-Pitaevskii suivante :

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi + \left(1 - |\psi|^2\right)\psi = 0$$

ne possède pas de telles solutions.

2.b - Le cas $n = 1$

Le cas $n = 1$ est un cas à part, essentiellement pour deux raisons :

La première, concernant la méthode est qu'il s'agit d'une équation différentielle, on n'a pas besoin ici d'utiliser de problème de minimisation.

La seconde concerne la nature du résultat : en effet, comme le montre le théorème suivant, dès qu'une bulle stationnaire existe, elle est unique.

Théorème 2.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une bulle stationnaire $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ (i.e. φ satisfaisant i)_iv)) est que

$$\eta_0 = \sup\{\eta, 0 < \eta < \rho_0, v(\eta) = 0\} \text{ existe,} \tag{2.9}$$

$$0 < \eta_0 < \rho_0 \quad \text{et} \quad F(\eta_0) < 0$$

Lorsque (2.9) est vérifiée, une telle solution est unique. Si de plus $F'(\rho_0) < 0$ alors φ vérifie la propriété v) (i.e. $\partial^\alpha(\varphi - r_0)$ décroit exponentiellement pour $|\alpha| \leq 2$).

Preuve.

On applique le théorème 5 de Berestycki et Lions [6] au problème :

$$-u'' = -F\left((r_0 - u)^2\right)(r_0 - u) = g(u) \tag{2.10}$$

En effet, en remarquant que $G(2r_0) = 0$, où $G(\xi) = \int_0^\xi g(s)ds$, on montre facilement que la condition (2.9) équivaut à $\xi_0 = \inf\{\xi > 0, G(\xi) = 0\}$ existe, $\xi_0 > 0$ et $g(\xi_0) > 0$, ce qui, d'après ce théorème, est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, non identiquement nulle, et vérifiant $\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = 0$, du problème (2.10).

En d'autres termes, si (2.9) est vérifiée, on considère la solution φ définie sur $(-x_{\max}, x_{\max})$ de

$$\begin{cases} \varphi'' + F(\varphi^2)\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \sqrt{\eta_0} \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

On montre que cette solution est majorée par r_0 sur $(-x_{\max}, x_{\max})$ et donc qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle vérifie les propriétés i) à v).

Réciproquement, si une bulle stationnaire φ existe, on montre que (2.9) est vérifiée avec $\eta_0 = \varphi(0)$ (voir [6] pour les détails). ∎

Remarque 2.4.

Considérons l'équation de Schrödinger $\psi^3 - \psi^5$ (1.3). Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante, par changement de fonction et de paramètres (voir [2]) :

$$i\partial_t \varphi + \Delta\varphi + \left(|\varphi|^2 - \rho_0\right)\left(2A + \rho_0 - 3|\varphi|^2\right)\varphi = 0$$

On a ici : $V(\varphi) = (\rho - \rho_0)^2 (\rho - A)$, et la condition (2.9) est vérifiée si et seulement si $0 < A < \rho_0$.

L'unique bulle stationnaire est alors donnée par (cf [1] ou [2]) :

$$\varphi(x) = \sqrt{\rho_0}\, \frac{ch(\kappa x)}{\left(\frac{\rho_0}{A} + sh^2(\kappa x)\right)^{1/2}}$$

où

$$\kappa = \sqrt{\rho_0 (\rho_0 - A)}$$

2.c - Régularité des bulles stationnaires

Dans ce paragraphe, on donne un résultat de régularité pour les solutions φ de $\Delta\varphi + F(\varphi^2)\varphi = 0$ lorsque F est supposée plus régulière. Ce résultat sera utilisé dans la quatrième partie pour montrer l'instabilité des bulles stationnaires. En effet, du fait qu'on utilise la linéarisation du terme $F\left(\varphi^2\right)\varphi$, on est amené à se placer dans un espace sur lequel ce terme opère correctement et où la linéarisation a un sens. Cet espace sera du type $H^m\left(\mathbb{R}^n\right)$ pour m assez grand.

Dans ce paragraphe, on suppose que les hypothèses (2.4) et (2.5) sont vérifiées, de sorte que toute bulle stationnaire vérifie la propriété v) du théorème 2.1.

Proposition 2.3.

On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^m$ où m est un entier positif.

Soit φ une bulle stationnaire. Alors $r_0 - \varphi \in H^{m+2}\left(\mathbb{R}^n\right)$

Preuve.

Soit $u = r_0 - \varphi$. Puisque φ vérifie les propriétés i) à v) du paragraphe 1, on a $u \in H^2\left(\mathbb{R}^n\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$. De plus, u est solution de

$$-\Delta u = g(u)$$

où $g(s) = -F\left((r_0 - s)^2\right)(r_0 - s)$, i.e. g est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}^n$, et $g(0) = 0$.

Procédons par récurrence : Supposons $u \in H^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ avec $2 \leq k \leq m$, et soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $1 \leq |\alpha| \leq k$.

Alors, en utilisant la formule de Fraenkel (cf. [8]), on a

$$-\partial^\alpha(\Delta u) = \partial^\alpha(g(u))(x)$$
$$= \alpha! \sum_{1 \leq r \leq |\alpha|} g^{(r)}(u(x)) \sum_{\rho \in R(\alpha, r)} C_{\alpha,\rho} \left(\partial^{\gamma(1)} u(x)\right)^{\rho_1} \cdots \left(\partial^{\gamma(s)} u(x)\right)^{\rho_s}$$

où $\gamma(1), \cdots, \gamma(s)$ est une énumération des éléments de $\{\gamma \in \mathbb{N}^n, 0 < \gamma \leq \alpha\}$ et

$$R(\alpha, r) = \left\{ \rho \in \mathbb{N}^s, \sum_1^s \rho_j \gamma(j) = \alpha, \sum_{j=1}^s \rho_j = r \right\}.$$

Soit $\rho \in R(\alpha, r)$, posons

$$\theta_j = \frac{|\gamma(j)|}{|\alpha|}, p_j = \frac{2}{\theta_j} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq s$$

alors, par Hölder, on a

$$\left\| \left(\partial^{\gamma(1)} u\right)^{\rho_1} \cdots \left(\partial^{\gamma(s)} u\right)^{\rho_s} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \partial^{\gamma(1)} u \right\|_{L^{p_1}}^{\rho_1} \cdots \left\| \partial^{\gamma(s)} u \right\|_{L^{p_s}}^{\rho_s}$$

puis, en utilisant les inégalités de Gagliardo-Nirenberg :

$$\left\| \partial^{\gamma(j)} u \right\|_{L^{p_j}} \leq C \left(\sum_{|\gamma|=|\alpha|} \| \partial^{\gamma} u \|_{L^2}^{\theta_j} \right) \| u \|_{L^\infty}^{1-\theta_j}$$

d'où

$$\left\| \left(\partial^{\gamma(1)} u\right)^{\rho_1} \cdots \left(\partial^{\gamma(s)} u\right)^{\rho_s} \right\|_{L^2} \leq C \| u \|_{H^k} \| u \|_{L^\infty}^{r-1}$$

On en déduit que

$$\| \Delta u \|_{H^k} \leq C\left(\| u \|_{L^\infty} \right) \| u \|_{H^k} \left(1 + \| u \|_{L^\infty}\right)^{k-1}$$

donc $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^n)$, ce qui prouve la proposition . ∎

3 - Etude de l'opérateur linéarisé

Dans cette partie, on linéarise l'équation (1.1) au voisinage d'une bulle stationnaire et on étudie le spectre de l'opérateur linéarisé dans le but de montrer l'instabilité de cette solution stationnaire de (1.1).

Dans toute la suite, φ désigne une bulle stationnaire (à valeur réelles) vérifiant les propriétés i) à v) de la partie 2.

Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : z \mapsto F\left(|z|^2\right) z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que h' est définie par :

$$h'(z)\omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[h(z + \varepsilon\omega) - h(z)\right]$$

Si $\varphi + u$ est une solution de (1.1) avec $u(x,t) \in \mathbb{C}$, alors u vérifie :

$$i\partial_t u + \Delta u + h(\varphi + u) - h(\varphi) = 0$$

L'équation linéarisée pour u s'écrit :

$$i\partial_t u + \Delta u + h'(\varphi) \cdot u = 0$$

Soit :

$$i\partial_t u + \Delta u + F(\varphi^2)u + 2\varphi F'(\varphi^2)\,\mathrm{Re}(\varphi u) = 0$$

Il donc naturel de poser :

$$\mathcal{U}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} = \left(\mathrm{Re}\, u(x,t), \mathrm{Im}\, u(x,t)\right)^t \in \mathbb{R}$$

où $\mathrm{Re}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de u.

On obtient alors

$$\begin{cases} \partial_t u_1 & = -\Delta u_2 - F(\varphi^2)u_2 \\ -\partial_t u_2 & = -\Delta u_1 - F(\varphi^2)u_1 - 2\varphi^2 F'(\varphi^2)u_1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut écrire cette équation linéarisée sour la forme

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = A\mathcal{U} \tag{3.1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ -L_2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{array}{l} L_1 v = -\Delta v + q_1 v \\ L_2 v = -\Delta v + (q_1 + q_2) v \end{array}$$

et

$$\begin{cases} q_1(x) = q_1(r) = -F\left(\varphi^2(r)\right) \\ q_2(x) = q_2(r) = -2\varphi^2(r) F'\left(\varphi^2(r)\right), \quad r = |x| \end{cases}$$

On considère alors l'espace $\mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n) = \left(L_r^2(\mathbb{R}^n)\right)^2$ où $L_r^2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions radiales (à valeurs réelles) de $L^2(\mathbb{R}^n)$, et on considère A comme un opérateur non borné sur $\mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n)$.

Alors A est fermé de domaine maximal :

$$D(A) = \mathbb{H}_r^2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n)$$

car q_1 et q_2 sont dans $L^2(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (voir [14] tome II).

Puisque le but de cette partie est d'étudier le spectre de A, on est amené à complexifier cet espace.

On considère donc

$$\widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n) + i\mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n)$$

et de même

$$\widetilde{\mathbb{H}}_r^2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{H}_r^2(\mathbb{R}^n) + i\mathbb{H}_r^2(\mathbb{R}^n)$$

On munit $\widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire naturel

$$((\mathcal{U}, \mathcal{V})) = \mathrm{Re}\left[\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle\right]$$

où

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t, \mathcal{V} = (v_1, v_2)^t \in \widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\langle u, v\rangle = \left(\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad u, v \in \mathbb{L}_r^2(\mathbb{R}^n).$$

Muni de ce produit scalaire, $\widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace Hilbertien réel.

On pose de plus :

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle\rangle = \langle u_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_2\rangle$$

On cherche maintenant à montrer que A, défini sur cet espace complexifié, possède une valeur propre à partie réelle maximale, strictement positive. Il est donc naturel de commencer par isoler le"spectre essentiel" de A, bien que celui-ci ne soit pas défini à priori puisque A n'est pas un opérateur auto-adjoint. En fait, il est possible de définir le spectre discret d'un opérateur fermé à domaine dense, comme l'ensemble des "valeurs propres de multiplicité finie" (cf [14] tome IV). Ce résultat est rappelé dans la partie A-I de l'appendice.

On peut donc maintenant définir le spectre essentiel $\sigma_e(A)$ de A comme le complémentaire dans $\sigma(A)$ (le spectre de A) du spectre discret.

Dans le paragraphe suivant, on étudie cette partie du spectre de A, pour passer ensuite à l'existence d'une valeur propre positive de A.

3.a - Le spectre essentiel de A.

On renvoie donc à l'appendice A-1 pour la définition du spectre essentiel d'un opérateur fermé à domaine dense.

Notons que $\lim_{|x|\to+\infty} q_1(x) = 0$ et que $\lim_{|x|\to+\infty} q_2(x) = -2\rho_0 F'(\rho_0)$, $q_1 et q_1$ tendant exponentiellement vers leur limite respective.

On suppose dans toute la suite que $F'(\rho_0) < 0$, de sorte que l'on a :

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} \lim q_1(x) = 0 \\ \lim q_2(x) = C_0 > 0 \end{cases} \quad \text{quand} \quad |x| \to +\infty
$$

A ressemble donc à une perturbation compacte de

$$
A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta - C_0 & 0 \end{pmatrix}
$$

On commence par localiser le spectre de A_0, puis on en déduit que le spectre essentiel de A est imaginaire pur en utilisant une adaptation du théorème de Weyl.

Lemme 3.1.

Le spectre de A_0 est entièrement imaginaire pur.

Preuve.

Soit $\lambda \notin i\mathbb{R}$. Montrons d'abord que $\ker(A_0 - \lambda) = \{0\}$: On remarque que

$$
\begin{aligned}
(A_0 + \lambda)(A_0 - \lambda) &= (A_0 - \lambda)(A_0 + \lambda) = A_0^2 - \lambda^2 \\
&= \begin{pmatrix} \Delta(-\Delta + C_0) - \lambda^2 & 0 \\ 0 & \Delta(-\Delta + C_0) - \lambda^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Or le spectre de l'opérateur différentiel à coefficient constants $\Delta(-\Delta + C_0)$ est inclus dans l'ensemble des valeurs prises par son symbole

$$
P(\xi) = -|\xi|^2 \left(|\xi|^2 + C_0\right), \xi \in \mathbb{R}^n.
$$

On a donc

$$
\sigma(\Delta(-\Delta + c_0)) \subset]-\infty, 0]
$$

Mais $\lambda \notin i\mathbb{R} \Rightarrow \lambda^2 \notin \mathbb{R}^-$ et on en déduit que $A_0^2 - \lambda^2$ est inversible. Ceci prouve donc que

$$
\ker(A_0 - \lambda) = \operatorname{Ker}(A_0 + \lambda) = \{0\}
$$

D'autre part, puisque $\lambda^2 \notin]-\infty, 0]$, on a :

$$\frac{\left||\xi|^2\left(|\xi|^2+C_0\right)+\lambda^2\right|}{\left(1+|\xi|^2\right)^2} \geq \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

où α dépend évidemment de λ. On a donc pour $v \in H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

$$\left|\left\langle\left(-\Delta\left(-\Delta+C_0\right)+\lambda^2\right) v, v\right\rangle\right| \geq \alpha \|v\|_{H^2}^2$$

et donc pour $\mathcal{U} \in \widetilde{\mathbb{H}}_r^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\left\langle\left\langle\left(A_0^2-\lambda^2\right)\mathcal{U}, \mathcal{U}\right\rangle\right\rangle\right| \geq \alpha \|\mathcal{U}\|_{\widetilde{\mathbb{H}}_r^2}^2 \tag{3.3}$$

Montrons alors que $R(A_0-\lambda) = \widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$:

Pour cela on résoud :

$$(A_0-\lambda)\mathcal{U} = \mathcal{F}$$

Supposons d'abord que $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathbb{H}}_r^2(\mathbb{R}^n) = D(A_0)$. Alors si $(A_0-\lambda)\mathcal{U} = \mathcal{F}$ on a nécessairement

$$(A_0+\lambda)\mathcal{F} = \left(A_0^2-\lambda^2\right)\mathcal{U},$$

i.e.

$$\mathcal{U} = \left(A_0^2-\lambda^2\right)^{-1}(A_0+\lambda)\mathcal{F}$$

Réciproquement, si $\mathcal{U} = \left(A_0^2-\lambda^2\right)^{-1}(A_0+\lambda)\mathcal{F}$ alors $\mathcal{U} \in D\left(A_0^2\right)$ et on a

$$(A_0+\lambda)(A_0-\lambda)\mathcal{U} = (A_0+\lambda)\mathcal{F}$$

et puisque $\operatorname{Ker}(A_0+\lambda) = \{0\}$, on en déduit que

$$(A_0-\lambda)\mathcal{U} = \mathcal{F}$$

Supposons maintenant simplement $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{F}_n$ une suite de fonctions de $\widetilde{H}_r^2(\mathbb{R}^n)$ tendant vers $\mathcal{F}$ dans $\widetilde{\mathbb{L}}_r^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\mathcal{U}_n$ tel que $(A_0 - \lambda)\mathcal{U}_n = \mathcal{F}_n$, avec $\mathcal{U}_n \in \widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$.

Alors d'après (3.3) on a :

$$\begin{aligned}
\alpha \|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m\|^2_{\mathbb{H}^2} &\leq |\langle\langle (A_0^2 - \lambda^2)(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m), \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m\rangle\rangle| \\
&\leq |\langle\langle (A_0 + \lambda)(\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_m), \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m\rangle\rangle| \\
&\leq |\langle\langle \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_m, (A_0^* + \lambda)(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m),\rangle\rangle| \\
&\leq C\,\|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_m\|_{\mathbb{L}^2}\,\|\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_m\|_{\mathbb{H}^2}
\end{aligned}$$

puisque, clairement : $A_0^* = \begin{pmatrix} 0 & \Delta - C_0 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$ est borné de $\widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ dans $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$.

On en déduit donc que $\mathcal{U}_n$ est de Cauchy dans $\widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$, donc que $\mathcal{U}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U}$ dans $\widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ et que $(A_0 - \lambda)\ \mathcal{U}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (A_0 - \lambda)\mathcal{U} = \mathcal{F}$ dans $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$

On a ainsi montré que $A_0 - \lambda$ était inversible dans $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ et donc que $\lambda \notin \sigma(A_0)$.

On a donc bien $\sigma(A_0) \subset i\mathbb{R}$. ∎

On utilise maintenant ce résultat pour montrer, à l'aide d'une adaptation du théorème de Weyl (voir théorème A-3), que le spectre essentiel de A est également inclus dans l'axe imaginaire pur :

Proposition 3.2.

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A_0) \subset i\mathbb{R}$$

Preuve.

On ne peut bien sûr pas appliquer directement le théorème de Weyl ici, puisque A_0 n'est pas auto-adjoint.

Cependant, un théorème semblable est valable pour des opérateurs non autoadjoints, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur leur spectre (cf théorème A-3).

Puisque $\sigma(A_0) \subset i\mathbb{R}$, il suffit, pour pouvoir appliquer le théorème A-3 de montrer que:

i) Il existe des points de $\rho(A) \cap \rho(A_0)$ de chaque côté de l'axe imaginaire pur (où $\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ est l'ensemble résolvant de A) et

ii) $\exists\ \lambda_0 \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$ tel que $(A_0 - \lambda_0)^{-1} - (A - \lambda_0)^{-1}$ est compact.

i) Montrons que $\rho(A)$ contient des points de chaque côté de l'axe imaginaire pur :
Soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t \in D(A)$
Soit $\beta = \sup\limits_{0 \le r < +\infty} q_2(r)$

Alors on a

$$\begin{aligned} ((A\mathcal{U},\mathcal{U})) &= \mathrm{Re}\,\langle L_1 u_2, u_1\rangle - \mathrm{Re}\,\langle L_2 u_1, u_2\rangle \\ &= \mathrm{Re}\,\langle (L_1 - L_2)\, u_1, u_2\rangle = -\,\mathrm{Re}\,\langle q_2 u_1, u_2\rangle \\ &\ge -\beta\, \|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

On a donc pour λ réel tel que $\lambda > \beta$:

$$(((A + \lambda)\mathcal{U},\mathcal{U})) \ge (\lambda - \beta)\, \|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

et $A + \lambda$ est donc injectif.

D'autre part, on a $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -L_2 \\ L_1 & 0 \end{pmatrix}$ car L_1 et L_2 sont autoadjoints puisque q_1 et q_2 sont dans $L^2(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (cf [14] tome II). Il est facile de voir que A^* vérifie également:

$$(((A^* + \lambda)\mathcal{U},\mathcal{U})) \ge (\lambda - \beta)\, \|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $\mathcal{U} \in D(A^*) = D(A) = \widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$.

$A^* + \lambda$ est donc également injectif, et on a

$$[\mathrm{Ker}(A^* + \lambda)]^\perp = \overline{R(A + \lambda)} = \widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$$

De plus, grâce à (3.4) et au fait que A est fermé, $R(A + \lambda)$ est fermé dans $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ et donc $R(A + \lambda) = \widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$. On a donc $\lambda > \beta \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. On peut montrer le même résultat pour $-A$; il y a donc des points de $\rho(A)$ de chaque côté de l'axe imaginaire pur.

ii) On a $A = A_0 + C$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ -q_1 - q_2 + C_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit λ_0 un réel assez grand pour que $\lambda_0 \in \rho(A)$. On a alors :

$$(A_0 - \lambda_0)^{-1} - (A - \lambda_0)^{-1} = \left[I - (A - \lambda_0)^{-1} (A_0 - \lambda_0)\right] (A_0 - \lambda_0)^{-1}$$

$$= (A - \lambda_0)^{-1} [A - A_0] (A_0 - \lambda_0)^{-1} = (A - \lambda_0)^{-1} C (A_0 - \lambda_0)^{-1}$$

Il suffit donc de prouver que $C(A_0 - \lambda_0)^{-1}$ est compact. Or, on a vu dans la démonstration du lemme 3.1 que $(A_0 - \lambda_0)^{-1}$ était continu de $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ dans $\widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$. De plus, la multiplication par un potentiel radial $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tendant vers 0 exponentiellement pour $|x|$ tendant vers $+\infty$ est une application compacte de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que C est compact de $\widetilde{\mathbb{H}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ dans $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ et donc que $C(A_0 - \lambda_0)^{-1}$ est compact sur $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$.

Ceci achève de prouver que les hypothèses du théorème A-3 sont satisfaites. Donc A et A_0 ont le même spectre essentiel. ∎

3.b - Etude des valeurs propres de A.

Dans ce paragraphe, on étudie l'existence d'une valeur propre de A à partie réelle strictement positive. Une telle valeur propre, si elle existe, sera nécessairement un point isolé du spectre à cause du résultat précédent.

Remarquons tout d'abord que les valeurs propres discrètes de A sont nécessairement symétriques par rapport aux deux réels et imaginaires purs du plan complexe :

En effet, si $\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t$ est une fonction propre de A pour la valeur propre λ, alors $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)^t$ et $(u_1, -u_2)^t$ sont fonctions propres de A, respectivement pour $\overline{\lambda}$ et $-\lambda$.

Il suffit donc en fait de prouver l'existence d'une valeur propre réelle pour A.

On commence par établir quelques propriétés des opérateurs L_1 et L_2.

Lemme 3.3.

L_1 est un opérateur positif. Plus précisement, pour tout $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle L_1 u, u\rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad (\langle L_1 u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0)$$

Preuve.

Puisque $L_1 = -\Delta + q_1(r)$ avec $\lim\limits_{r\to+\infty} q_1(r) = 0$, on a $\sigma_e(L_1) = \sigma_e(-\Delta) = [0, +\infty[$, grâce au théorème de Weyl. Puisque $L_1\varphi = 0$ et $0 < \varphi(r) < r_0$ pour tout $r \geq 0$, on a $q_1(r) = \frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ et donc si $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle L_1 u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\varphi}{\varphi}|u|^2 dx$$

$$= \sigma_n \int_0^{+\infty} |u_r|^2 r^{n-1} dr + \sigma_n \int_0^{+\infty} \left(r^{n-1}\varphi_r\right)_r \frac{|u|^2}{\varphi} dr$$

où $\sigma_n = \mathrm{vol}(B^n), B^n$ étant la boule unité de $\mathbb{R}^n$; donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\langle L_1 u, u\rangle &= \sigma_n \int_0^{+\infty} |u_r|^2 r^{n-1} dr - 2\sigma_n \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_r}{\varphi} \mathrm{Re}(u_r\overline{u}) r^{n-1} dr \\
&+ \sigma_n \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_r^2}{\varphi^2}|u|^2 r^{n-1} dr \\
&= \sigma_n \int_0^{+\infty} \varphi^2 \left[\frac{|u_r|^2}{\varphi^2} - \frac{2\varphi_r}{\varphi^3} Re(u_r\overline{u}) + \frac{|u|^2\varphi_r^2}{\varphi^4}\right] r^{n-1} dr \\
&= \sigma_n \int_0^{+\infty} \varphi^2 \left|\frac{u_r}{\varphi} - \frac{u\varphi_r}{\varphi^2}\right|^2 r^{n-1} dr \\
&= \sigma_n \int_0^{+\infty} \varphi^2 \left|\left(\frac{u}{\varphi}\right)_r\right|^2 r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

donc

$$\langle L_1 u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 \left|\left(\frac{u}{\varphi}\right)_r\right|^2 dx = \left\|\varphi\left(\frac{u}{\varphi}\right)_r\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ce qui prouve le lemme. ∎

Lemme 3.4.

$\sigma_e(L_2) = [C_0, +\infty[$; L_2 a au moins une valeur propre strictement négative, et une seule si $n = 1$.

Preuve

$L_2 = -\Delta + q_2(r)$ et $\lim_{n \to +\infty} q_2(r) = C_0$, donc $\sigma_e(L_2) = [C_0, +\infty[$, toujours grâce au théorème de Weyl.

Supposons tout d'abord que $n \geq 2$: On a

$$L_1\varphi = 0 = -\varphi_{rr} - \frac{n-1}{r}\varphi_r + q_1(r)\varphi$$

donc, en dérivant par rapport à r on obtient :

$$-\varphi_{rr} - \frac{n-1}{r}\varphi_{rr} + (q_1(r) + q_2(r))\,\varphi_r + \frac{n-1}{r^2}\varphi_r = 0$$

soit :

$$L_2\varphi_r = -\frac{n-1}{r^2}\varphi_r$$

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et φ_r décroit exponentiellement en $+\infty$, donc $\varphi_r \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\varphi_r}{r} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On a de plus $\langle L_2\varphi_r, \varphi_r \rangle < 0$, donc par principe du min-max L_2 a au moins une valeur propre strictement négative.

Si $n = 1$, il suffit de remarquer qu'on a $L_2\varphi_r = 0$ et que φ_r engendre le noyau de L_2 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$: en effet, toute solution u de l'équation différentielle $L_2 u = 0$ sur $[0, +\infty[$, indépendante de φ_r, vérifie : $u(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_0 e^{C_0 x}$ où $u_0 \in \mathbb{C}$ et ne peut donc appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Puisque φ_r s'annule une fois est une seule sur $\mathbb{R}$ en $r = 0$, on en déduit par Sturm-Liouville que L_2 a une unique valeur propre strictement négative, correspondant à une fonction propre strictement positive sur $\mathbb{R}$. ∎

Remarque 3.1.

Puisque $0 \in \sigma_e(L_1)$ et 0 n'est pas valeur propre de L_1 (cf. lemme 3.3), $R(L_1)$ est dense dans $L^2_r(\mathbb{R}_n)$ et donc on peut définir l'opérateur L_1^{-1} comme un opérateur non borné à domaine dense dans $L^2_r(\mathbb{R}_n)$.

Maintenant, supposons que $\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t$ soit une fonction propre de A correspondant à une valeur propre λ réelle, i.e.

$$\begin{cases} L_1 u_2 & = \lambda u_1 \\ -L_2 u_1 & = \lambda u_2 \end{cases}$$

Alors $u_1 \in R(L_1) = D\left(L_1^{-1}\right), u_2 = \lambda L_1^{-1} u_1$ et on a donc $\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) u_1 = 0$, i.e. $u_1 \in \operatorname{Ker}\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right)$. Réciproquement, si on montre qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}$ a un noyau non trivial, et que $D\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = D(L_2) \cap \left(L_1^{-1}\right)$, alors en prenant $u_1 \in \operatorname{Ker}\left(L_2 + \gamma L_1^{-1}\right)$ et $u_2 = \sqrt{\gamma}\, L_1^{-1} u_1$, on obtient un vecteur-propre $(u_1, u_2)^t$ de A pour la valeur propre $\sqrt{\gamma}$ strictement positive.

On est donc ramené à étudier l'opérateur $L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Lemme 3.5.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'opérateur $L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $D\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = D(L_2) \cap D\left(L_1^{-1}\right) = H_r^2(\mathbb{R}_n) \cap R(L_1)$ (ici le domaine est entendu au sens du domaine maximal, i.e. $L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}$, défini sur $D(L_2) \cap \left(L_1^{-1}\right)$ est un opérateur fermé).

ii) $L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}$ est autoadjoint

iii) $\sigma_e\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) \subset [C_0, +\infty[$

Preuve.

i) et ii) $L_2 + \lambda^2 L_1^1 = L_1 + \lambda^2 L_1^{-1} + q_2$ et $u \mapsto q_2 u$ est un un opérateur autoadjoint borné sur $L_r^2(\mathbb{R}^n)$. Il suffit donc de prouver que $D\left(L_1 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = D(L_1) \cap D\left(L_1^{-1}\right)$ et que $L_1 + \lambda^2 L_1^{-1}$ est autoadjoint sur $D(L_1) \cap D\left(L_1^{-1}\right)$, puis d'appliquer le théorème de Kato-Rellich (cf [14] tome II).

Or, puisque L_1 est autoadjoint positif, et 0 n'est pas valeur propre de L_1, on a d'après le théoème spectral

$$L_1 + \lambda^2 L_1^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu + \frac{\lambda^2}{\mu}\right) dP_\mu$$

donc $L_1 + \lambda^2 L_1^{-1}$ est autoadjoint sur

$$D\left(L_1 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu + \frac{\lambda^2}{\mu}\right)^2 d(P_\mu u, u) < +\infty\right\}.$$

De plus, si $u \in D\left(L_1 + \lambda^2 L_1^{-1}\right)$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 d(P_\mu u, u) < +\infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu^2} d(P_\mu u, u) < +\infty$$

donc $u \in (L_1) \cap D\left(L_1^{-1}\right)$. Ceci prouve i) et ii).

iii) Montrons d'abord que

$$\sigma_e\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = \sigma_e\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right).$$

Pour cela, il suffit, grâce au théorème de Weyl, de montrer que $u \mapsto (q_1 + q_2 - C_0)\,u$ est relativement compacte par rapport à $-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}$:

On munit donc $D\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = H_r^2(\mathbb{R}^n) \cap D\left(L_1^{-1}\right)$ de la norme du graphe, qui et équivalente à la norme

$$|||u|||^2 = \left\|\left(-\Delta + \lambda^2 L_1^{-1}\right) u\right\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$$

Alors $\left(D\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right), |||\ \cdot\ |||\right)$ s'injecte continûment dans $H_r^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $u \in D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^2(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$|||u|||^2 = \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \lambda^4 \left\|L_1^{-1} u\right\|_{L^2}^2 + 2\lambda^2 \operatorname{Re}\left\langle -\Delta u, L_1^{-1} u\right\rangle + \|u\|_{L^2}^2$$

$$= \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \lambda^4 \left\|L_1^{-1} u\right\|_{L^2}^2 + 2\lambda^2 \operatorname{Re}\left\langle L_1 u, L_1^{-1} u\right\rangle - 2\lambda^2 \operatorname{Re}\left\langle q_1 u, L_1^{-1} u\right\rangle + \|u\|_{L^2}^2$$

$$\geq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \lambda^4 \left\|L_1^{-1} u\right\|_{L^2}^2 + 2\lambda^2 \|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 - \lambda^4 \left\|L_1^{-1} u\right\|_{L^2}^2 - \alpha^2 \|u\|_{L^2}^2$$

où $\alpha = \sup_{r \geq 0} q_1(r)$.

Donc, pour $u \in D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^2$

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \left(2\lambda^2 + 1\right) \|u\|_{L^2}^2 \leq |||u|||^2 + \alpha^2 \|u\|_{L^2}^2$$

et l'injection de $D\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right)$ dans $H_r^2(\mathbb{R}^n)$ est continue.

De plus, $u \mapsto (q_1 + q_2 - C_0)\, u$ est compacte de $H^2_r(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_r(\mathbb{R}^n)$, donc en appliquant le théorème de Weyl,

$$\sigma_e\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) = \sigma_e\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right)$$

Maintenant, on a

$$\inf_{\substack{u \in D\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) \\ \|u\|_{L^2} = 1}} \left\langle \left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) u, u \right\rangle \geq C_0$$

et donc

$$\sigma_e\left(L_2 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) \subset \sigma_e\left(-\Delta + C_0 + \lambda^2 L_1^{-1}\right) \subset [C_0, +\infty[,$$

ce qui donne iii). ∎

Théorème 3
L'opérateur $A = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ -L_2 & 0 \end{pmatrix}$ définie sur $\widetilde{\mathbb{L}}^2_r(\mathbb{R}^n)$ possède une valeur propre réelle, strictement positive, maximale, donnée par

$$\lambda_{\max} = \left[-\inf \left\{ \frac{\langle L_2 u, u \rangle}{\langle L_1^{-1} u, u \rangle}, u \in H^1_r(\mathbb{R}^n) \cap D\left(L_1^{-1}\right) \right\} \right]^{1/2}$$

Preuve.
D'après le lemme 3.4, L_2 a une valeur propre strictement négative. De plus, $D\left(L_1^{-1}\right) = R(L_1)$ est dense dans $L^2_r(\mathbb{R}^n)$. En fait, on a plus que cela : $D\left(L_1^{-1}\right) \cap H^1_r(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1_r(\mathbb{R}^n)$ (cf lemme A.5). Il existe donc $u_0 \in D\left(L_1^{-1}\right) \cap H^1_r(\mathbb{R}^n)$ tel que $\langle u_0, L_2 u_0 \rangle < 0$.

On en déduit, puisque L_1^{-1} est un opérateur positif, que

$$-\infty \leq \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in D\left(L_1^{-1}\right) \cap H^1_r(\mathbb{R}^n)}} \frac{\langle u, L_2 u \rangle}{\langle u, L_1^{-1} u \rangle} < 0$$

Montrons que cette quantité est finie : pour $u \in H^1_r(\mathbb{R}^n) \cap D\left(L_1^{-1}\right)$, on a

$$
\begin{aligned}
\langle L_2 u, u\rangle &= \langle L_1 u, u\rangle + \langle q_2 u, u\rangle \\
&\geq \langle L_1 u, u\rangle - \beta \left\|u\right\|_{L^2}^2, \quad \beta = \sup_{r\geq 0} q_2(r) \\
&\geq \langle L_1 u, u\rangle - \beta \left\langle L_1^{1/2} u, L_1^{-1/2} u\right\rangle
\end{aligned}
$$

car L_1 et L_1^{-1} étant autoadjoints positifs on peut définir $L_1^{1/2}$ et $L_1^{-1/2}$ à l'aide du théorème spectral.

D'où :

$$
\begin{aligned}
\langle L_2 u, u\rangle &\geq \langle L_1 u, u\rangle - \beta \langle L_1 u, u\rangle^{1/2} \left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle^{1/2} \\
&\geq \langle L_1 u, u\rangle - \langle L_1 u, u\rangle - \frac{\beta^2}{4} \left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle
\end{aligned}
$$

et donc :

$$
\inf_{\substack{u\in H_r^1\cap D\left(L_1^{-1}\right) \\ u\neq 0}} \frac{\langle L_2 u, u\rangle}{\left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle} \geq -\frac{\beta^2}{4} > -\infty.
$$

Soit $u_n \in D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^1, \|u_n\|_{L^2}^2 = 1$ et

$$
\frac{\langle L_2 u_n, u_n\rangle}{\left\langle L_1^{-1} u_n, u_n\right\rangle} \underset{n\infty}{\to} -\gamma = \inf_{H_r^1\cap D\left(L_1^{-1}\right)} \frac{\langle L_2 u, u\rangle}{\left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle}
$$

Alors

$$
\left\langle L_2 u_n + \gamma L_1^{-1} u_n, u_n\right\rangle \to 0
$$

en effet : $\left\langle u_n, L_1^{-1} u_n\right\rangle$ est nécessairement bornée, sinon $\langle u_n, L_2 u_n\rangle$ ne le serait pas non plus. Or $\langle u_n, L_2 u_n\rangle$ est négatif à partir d'un certain rang et

$$
\langle u_n, L_2 u_n\rangle = \langle u_n, L_1 u_n\rangle + \langle u_n, q_2 u_n\rangle \geq -\beta \left\|u_n\right\|_{L^2}^2 = -\beta
$$

donc $\langle u_n, L_2, u_n\rangle$ est bornée.

Comme de plus, il est clair que tout pout u dans $H_r^1 \cap D\left(L_1^{-1}\right)$, on a $\left\langle\left(L_2+\gamma L_1^{-1}\right) u, u\right\rangle \geq 0$, ceci prouve que 0 est exactement la borne inférieure du spectre de $L_2+\gamma L_1^{-1}$. Puisque d'après le lemme 3.5, $\sigma_e\left(L_2+\gamma L_1^{-1}\right) \subset\left[C_0,+\infty\right[$, 0 est valeur propre de $L_2+\gamma L_1^{-1}$, i.e. $\operatorname{Ker}\left(L_2+\gamma L_1^{-1}\right) \neq\{0\}$ et d'après la remarque 3.1, $\sqrt{\gamma}$ est une valeur propre de A. De plus, $\lambda^2>\gamma$ et $u \in H_r^2 \cap D\left(L_1^{-1}\right)$ entraîne :

$$\begin{aligned}
\left\langle\left(L_2+\lambda^2 L_1^{-1}\right) u, u\right\rangle & \geq\left\langle\left(L_2+\gamma L_1^{-1}\right) u, u\right\rangle+\left(\lambda^2-\gamma\right)\left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle \\
& \geq\left(\lambda^2-\gamma\right)\left\langle L_1^{-1} u, u\right\rangle>0 \quad \text{si} \quad u \neq 0
\end{aligned}$$

donc $\ker\left(L_2+\gamma L_1^{-1}\right)=\{0\}, \forall \lambda>\sqrt{\gamma}$, et donc $\sqrt{\gamma}$ est une valeur propre maximale de A.
∎

Remarque 3.2.

Si z est une valeur propre (non nécessairement réelle) de A, et si $\left(u_1, u_2\right)^t$ est un vecteur propre associé, alors

$$z^2=\frac{\left\langle u_1, L_2 u_1\right\rangle}{\left\langle u_1, L_1^{-1} u_1\right\rangle} \quad \text{donc} \quad z^2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\sqrt{\gamma}$ est de partie réelle maximale parmi toutes les valeurs propres de A, et $\sqrt{\gamma}$ est maximale parmi toutes les valeurs propres non imaginaires pures de A.

Remarque 3.3.

Dans le cas des états stationnaires, c'est-à-dire des solutions de (1.1) de la forme (1.4), où u_ω satisfait donc l'équation

$$\Delta u_\omega-\omega u_\omega+F\left(\left|u_\omega\right|^2\right) u_\omega=0,$$

une étude de la stabilité utilisant la linéarisation a eté faite par Grillakis [9].

On aboutit à une équation linéarisée de la forme (3.1), où

$$A=A_\omega=\begin{pmatrix} 0 & L_1^\omega \\ -L_2^\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} L_1^\omega=-\Delta-F\left(u_\omega^2\right)+\omega \\ L_2^\omega=-\Delta-F\left(u_\omega^2\right)-2 u_\omega^2 F^{\prime}\left(u_\omega^2\right)+\omega \end{cases}$$

Ici, 0 est valeur propre de L_1^ω puisque $u_\omega \in \operatorname{Ker} L_1^\omega$. Ainsi, pour pouvoir définir $(L_1^\omega)^{-1}$, on utilise d'abord la projection P sur l'orthogonal du noyau de L_1^ω. On peut alors montrer (cf [9]), que l'étude des valeurs propres réelles λ de A_ω revient à l'étude du noyau de l'opérateur $PL_2^\omega P + \lambda^2 (L_1^\omega)^{-1}$ défini sur $(\operatorname{Ker} L_1^\omega)^\perp$.

Un point important de la démonstration du théorème 3, dans le cas des bulles stationnaires, était que L_2 admet au moins une valeur propre strictement négative. Or ici, il se peut, même si L_2^ω admet des valeurs propres négatives, que $PL_2^\omega P$ soit un opérateur positif, impliquant ainsi que $\operatorname{Ker}\left(PL_2^\omega P + \lambda^2 (L_1^\omega)^{-1}\right) = \{0\}$ pour tout λ réel. Ceci explique pourquoi il peut apparaître que des états stationnaires soient stables, alors que les bulles stationnaires sont toujours instables.

4 - Instabilité des bulles stationnaires

Dans cette partie, on établit le principal résultat de ce travail (théorème 4.), c'est-à-dire l'instabilité des bulles stationnaires à partir de l'étude faite sur l'opérateur linéarisé dans la partie précédente. Pour cela on a besoin de régularité sur F.

On suppose F de classe $\mathcal{C}^{m+2}$, où m est un entier strictement supérieur à $\frac{n}{2}$.

Dans la suite, on se place sur l'espace des fonctions $u \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ défini dans l'introduction. qui sera identifié à $H^m(\mathbb{R}^n) \times H^m(\mathbb{R}^n)$.

La proposition suivante est un résultat classique et établit l'existence de solutions ψ pour l'équation d'évolution (1.1), telles que $r_0 - \psi \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.1

Soit $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe $T_+(u_0), T_-(u_0) \in]0, +\infty]$ tels que l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u - F\left(|r_0 - u|^2\right)(r_0 - u) = 0 \tag{4.1}$$

possède une unique solution $u \in \mathcal{C}([T_-(u_0), T_+(u_0)], H^m) \cap \mathcal{C}^1([T_-(u_0), T_+(u_0)], H^{m-2}(\mathbb{R}^n))$ vérifiant $u(0) = u_0$.

Preuve.

La preuve immédiate, compte tenu du fait que $i\Delta$ engendre un groupe unitaire dans $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ et du fait que $v \mapsto F\left(|r_0 - v|^2\right)(r_0 - v)$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ pour $m > \frac{n}{2}$ (cf preuve de la proposition A-6 avec $g(v) = F\left(|r_0 - v|^2\right)(r_0 - v)$.

∎

On peut maintenant énoncer notre principal résultat :

Théorème 4.

Soit φ une bulle stationnaire (vérifiant les propriétés i) à v) de la partie 2.a) ; alors φ est instable au sens suivant :

$\exists\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, u_0 \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|u_0\|_{H^m} < \delta$ et tel que si $u(t) \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ et $v(t) = u(t) + \varphi$ est la solution de l'équation (1.1) avec $v(0) = u_0 + \varphi$, alors $\exists\, t_0 > 0$ tel que $\|u(t_0)\|_{H^m} > \varepsilon$.

Preuve.

Soit φ une bulle stationnaire ; si $v = \varphi + u$ est solution de l'équation (1.1), alors u est solution de

$$i\partial_t u + \Delta u + h'(\varphi)u + [h(\varphi + u) - h(\varphi) - h'(\varphi)u] = 0$$

où $h(z) = F\left(|z|^2\right) z$.

D'après la proposition A-6,

$$\|h(\varphi + u) - h(\varphi) - h'(\varphi)u\|_{\mathbb{H}^m} = O\,\|u\|^2_{\mathbb{H}^m}$$

lorsque $\|u\|_{\mathbb{H}^m} \to 0$.
(On applique la proposition avec $g(u) = h\,(r_0 - u)$ et $v = \varphi - r_0$).

On peut donc réécrire l'équation satisfaitė par u sous la forme :

(4.1)
$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = A\mathcal{U} + f(\mathcal{U}),$$

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u)^t$$

où A est l'opérateur défini dans la troisième partie, et

$$\|f(\mathcal{U})\|_{\mathbb{H}^m} = O\left(\|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{H}^m}\right) \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{H}^m} \to 0$$

D'après la proposition 2.3, $r_0 - \varphi \in H^m(\mathbb{R}^n)$; on en déduit que $q_1 = F\left(\varphi^2\right)$ et $q_2 - C_0 = 2\varphi^2 F'\left(\varphi^2\right) - C_0$ sont dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi, tout vecteur propre de A dans $\mathbb{L}^2$ est fait dans $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$, et de plus, si on note encore $((\ \cdot\ ))$ le produit scalaire sur l'espace Hilbertien réel $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ et $(\cdot,\cdot)_m$ celui sur $H^m(\mathbb{R}^n)$, alors pour $\mathcal{U} = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{H}^m$, on a

$$((A\mathcal{U}, \mathcal{U})) = (L_1 u_2, u_1)_m - (L_2 u_1, u_2)_m$$

$$= (q_1 u_2, u_1)_m - ((q_1 + q_2)\, u_1, u_2)_m$$

$$\leq \left(2\left\|q_1\right\|_{H^m} + \left\|q_2\right\|_{L^\infty} + \left\|q_2 - c_0\right\|_{H^m}\right)\|\mathcal{U}\|^2_{\mathbb{H}^m};$$

donc, pour $\lambda > \sup\left(\sqrt{\gamma}, \left(2\left\|q_1\right\|_{H^m} + \left\|q_2\right\|_{L^\infty} + \left\|q_2 - c_0\right\|_{H^m}\right)\right)$, $\lambda\, I - A$ est maximal monotone, i.e. A engendre un C^0-semi-groupe $S(t)$ sur $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^m)} \leq M e^{\omega t}$$

où $e^{\omega t}$ est le rayon spectral de $S(t)$ et

$$\omega = \inf\left\{\frac{\operatorname{Log}\|S(t)\|}{t}, t > 0\right\} \geq \sqrt{\gamma} > 0$$

On peut donc appliquer la proposition A-7 avec $X = \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$; on en déduit l'instabilité du point fixe 0 de l'équation (4.1), i.e $\exists\ \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, $\exists\ \mathcal{U}_0 \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ avec $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathbb{H}^m} < \delta$ tel que si $\mathcal{U}(t)$ est solution de (4.1) avec $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$, alors $\exists\ t_0 > 0$ $\|\mathcal{U}(t_0)\|_{\mathbb{H}^m} > \varepsilon$, ce qui prouve le théorème 4.2 ▮.

Remarque 4.1.

On pourrait être tenté, pour montrer l'instabilité non linéaire de φ, de prendre pour donnée initiale un vecteur propre u_0 de l'opérateur linéarisé A, de norme suffisamment petite, et correspondant à la valeur propre maximale $\lambda_{\max}$ de A, que l'on sait être strictement positive.

Cependant, rien ne permet d'affirmer que le semi groupe $S(t)$ engendré par A vérifie une estimation de la forme

$$\|S(t)\| \leq M e^{\lambda_{\max} t}$$

Il se peut que le rayon spectral de $S(t)$ soit égal à $e^{\omega t}$ avec $\omega > \lambda_{\max}$, à priori.

Le fait d'avoir prouvé l'existence d'une valeur propre strictement positive nous permet uniquement d'affirmer que ω est strictement positif.

Appendice A-I

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats connus pour les opérateurs autoadjoints, mais vrais également pour des opérateurs fermés à domaine dense.

Le théorème suivant permet de généraliser la définition du spectre essentiel au cas d'un opérateur fermé à domaine dense (cf [14] théorème XII-5) :

Théorème A-1

Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur un espae de Banach, et soit λ un point isolé de $\sigma(A)$ tel que $\{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - \lambda| < \varepsilon\} \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. On définit pour $0 < r < \varepsilon$:

$$P_\lambda(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\mu-\lambda|=r}(A-\mu)^{-1}d\mu$$

Alors $P_\lambda(A)$ est un projecteur indépendant de r, de plus :

- Si $R(P_\lambda(A))$ est de dimension finie, et si $\psi \in R(P_\lambda(A))$, alors $\exists\, n \in \mathbb{N}, (P_\lambda(A))^n\,\psi =$ 0.

- Si $B = A_{|\,\ker(P_\lambda(A))}$ alors $\lambda \notin \sigma(B)$.

Definition A.2

Soit $\lambda \in \sigma(A)$. Alors $\lambda \in \sigma_c(A)$ si λ est isolée dans $\sigma(A)$ et P_λ défini par le théorème A.1 est de rang fini.

Le spectre essentiel de A est défini par $\sigma_e(A) = \sigma(A)\backslash\sigma_c(A)$

Le théorème suivant généralise le théorème de Weyl au cas d'opérateurs non nécessairement autoadjoints :

Théorème A.3

Soient A et B deux opérateurs fermés à domaine dense sur un espace de Banach. On suppos que :

i) $\sigma(A)$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$

ii) chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ contient un point de $\rho(B)$ (où $\rho(B) = \mathbb{C}\backslash\sigma(B)$).

iii) $\exists\, \lambda_0 \in \rho(B) \cap \rho(A)$ tel que $(A-\lambda_0)^{-1} - (B-\lambda_0)^{-1}$ est compact.

Alors $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$.

Preuve.

Soit $\lambda_0 \in \rho(B) \cap \rho(A)$ vérifiant iii). Soient $D = (A - \lambda_0)^{-1}$ et $E = (B - \lambda_0)^{-1}$. Il suffit alors de montrer que $\sigma_e(D) = \sigma_e(E)$: en effet, si A est un opérateur fermé à domaine dense et si $\lambda_0 \in \rho(A)$ alors pour $\lambda \neq 0, \lambda \in \sigma_e\left((A - \lambda_0)^{-1}\right)$ si et seulement si $\lambda_0 + \frac{1}{\lambda} \in \sigma_e(A)$ (cf [14] lemme 2, section XIII-4).

Puisque $\sigma(A)$ est d'intérieur vide, et

$$\sigma_e(D) \subset \left\{\lambda, \lambda_0 + \frac{1}{\lambda} \in \sigma_e(A)\right\} \cup \{0\}, \sigma_e(D)$$

est d'intérieur vide.

De plus, d'après ii), chaque composante connexe de $\rho(D)$ contient un point de $\rho(E)$.

En effet, si C_D est une composante connexe de $\rho(D)$, puisque C_D est ouverte, $C_D \backslash \{0\}$ est encore connexe. Soit C_A la composante connexe de $\rho(A)$ contenant $\{\lambda_0 + \frac{1}{\lambda}, \lambda \in C_D \backslash \{\lambda_0\}\}$, alors $C_A \backslash \{\lambda_0\}$ est également connexe, et il facile de voir que

$$C_D \backslash \{0\} = \left\{\frac{1}{\mu - \lambda_0}, \mu \in C_A \backslash \{\lambda_0\}\right\}$$

Soit $\mu_0 \in C_A$ un point de $\rho(B)$. Puisqque $C_A \cap \rho(B)$ est ouvert, on peut choisir $\mu_0 \neq \lambda_0$; on a alors $\frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \in C_D \cap \rho(E)$.

On conclut alors que $\sigma_e(D) = \sigma_e(E)$ en utilisant le lemme 3 de [14] section XIII-4. ∎

Appendice A-II

Dans ce paragraphe, on montre deux résultats techniques concernant les opérateurs L_1 et L_1^{-1}.

Lemma A-4.

L'opérateur $L_1^2 + L_1 - \Delta^2$ est relativement borné par rapport à Δ^2, de borne relative strictement inférieure à 1, i.e. $\exists\ a$ et $b > 0$, avec $a < 1$ tels que

$$\left\|\left(L_1^2 + L_1 - \Delta^2\right) u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq a \left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b \left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.

La preuve de ce lemme est immédiate : en effet on a $L_1^2 + L_1 - \Delta^2 = -a(x)\Delta - 2\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$ où

$$\begin{cases} a(x) & = 1 + 2q_1(x) \\ b_i(x) & = \partial_{x_i} q_1(x), 1 \le i \le n \\ c(x) & = q_1(x)(1+q_1(x)) - \Delta q_1(x) \end{cases}$$

donc $a, b_i, c \in L^\infty(\mathbb{R}^n), 1 \le i \le n$.On en déduit que $L_1^2 + L_1 - \Delta^2$ est borné de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\exists C > 0$ telle que

$$\left\|\left(L_1^2 + L_1 - \Delta^2\right) u\right\|_{L^2} \le C\left(\|\Delta u\|_{L^2} + b\,\|u\|_{L^2}\right),$$
$$\forall u \in H^4(\mathbb{R}^n)$$

Le résultat découle alors du fait bien connu que pour tout $\varepsilon > 0, \exists\ C(\varepsilon)$ telle que

$$\|\Delta u\|_{L^2} \le \varepsilon \left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} + C(\varepsilon)\,\|u\|_{L^2}$$
$$\forall u \in H^4(\mathbb{R}^n)$$

∎

Lemme A-5.

$D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H_r^1(\mathbb{R}^n)$ où

$$H_r^1(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n), u \text{ est radiale }\}.$$

Preuve. On définit l'opérateur $\widetilde{L}_1$ sur $H_r^1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$D\left(\widetilde{L}_1\right) = \left\{u \in H_r^1, L_1 \in H_r^1(\mathbb{R}^n)\right\}$$

et pour $u \in D\left(\widetilde{L}_1\right), \widetilde{L}_1 u = L_1 u$

On a alors $D\left(\widetilde{L}_1\right) = H_r^3(\mathbb{R}^n)$: en effet, si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ alors $q_1 u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, car q_1 et ∇q_1 sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; ainsi , si $u \in D\left(\widetilde{L}_1\right)$ alors $u \in H^1$ et $-\Delta u \in H^1$, donc $u \in H^3(\mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Ker}\left(\widetilde{L}_1^*\right) = \{0\}$ (où on identifie le dual de H^1 à H^{-1}) :

Soit $u \in Ker\left(\widetilde{L}_1^*\right)$; alors $u \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ et u vérifie :

$$\langle L_1 v, u\rangle = 0, \forall v \in H_r^3(\mathbb{R}^n)$$

i.e.

$$\langle -\Delta v, u\rangle + \langle q_1 v, u\rangle = 0, \quad \forall v \in H_r^3(\mathbb{R}^n)$$

d'où

$$|\langle -\Delta v, u\rangle| \leq \|u\|_{H^{-1}} \|q_1 v\|_{H^1} \leq c\|u\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H_r^3(\mathbb{R}^n)$$

On a donc $u \in D(-\Delta^*)$ où $-\Delta$ est considéré comme un opérateur non borné sur $H_r^1(\mathbb{R}^n)$, et donc $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, on a facilement

$$\langle L_1 v, u\rangle = 0, \ \forall v \in H_r^2(\mathbb{R}^n).$$

En effet, si $u \in H_r^2(\mathbb{R}^n)$, $\exists\, v_n \in H_r^3(\mathbb{R}^n)$ avec $v_n \underset{n\infty}{\rightarrow} v$ dans $H^2(\mathbb{R}^n)$; alors $\langle L_1 v_n, u\rangle = 0, \forall n \geq 0$ et $L_1 v_n \underset{n\infty}{\rightarrow} L_1 v$ dans L^2. On a donc $u \in D(L_1^*) = D(L_1) = H_r^2(\mathbb{R}^n)$ et $L_1^* u = L_1 u = 0$, donc $u = 0$.

On a donc

$$\overline{R\left(\widetilde{L}_1\right)} = \left[\mathrm{Ker}\,\widetilde{L}_1^*\right]^{\perp} = H_r^1(\mathbb{R}^n)$$

D'autre part, il est clair que

$$R\left(\widetilde{L}_1\right) \subset R(L_1) \cap H_r^1(\mathbb{R}^n) = D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^1(\mathbb{R}^n)$$

On a donc montré que $D\left(L_1^{-1}\right) \cap H_r^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H_r^1(\mathbb{R}^n)$. ∎

Appendice A-III

Dans ce paragraphe, on montre que la linéarisation a un sens dans $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m > \frac{n}{2}$, si F est régulière.

Proposition A-6

Soit $m > \frac{n}{2}$ un entier, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $v \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n) = (H^m(\mathbb{R}^m))^2$, $\exists a > 0$, $b > 0$, dépendant de $\|v\|_{\mathbb{H}^m}$ tels que pour tout $u \in \mathbb{H}^m$ avec $\|u\|_{\mathbb{H}^m} \leq a$, on a

$$\|g(u+v) - g(v) - g'(v)u\|_{\mathbb{H}^m} \leq b\,\|u\|^2_{\mathbb{H}^m}$$

Preuve.

Soient $u = (u_1, u_2)^t$ et $v = (v_1, v_2)^t$ dans $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^m)$. Alors

$$\begin{aligned} g(v+u) - g(v) - g'(v)u &= \int_0^1 (1-t) g''(v+tu)(u,u)dt \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} u_i u_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(v+tu)dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\|g(v+u) - g(v) - g'(v)u\|_{\mathbb{H}^m} \\ \leq \|u\|^2_{\mathbb{H}^m} &\left(C + C' \int_0^1 (1-t) \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(v+tu) - \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(0) \right\|_{\mathbb{H}^m} dt \right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i \partial y_j}$ est de classe $\mathcal{C}^m$ pour $i, j, k \in \{1, 2\}$, on montre exactement comme dans la preuve de la proposition 2.3, que

$$\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(v) - \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(0) \right\|_{\mathbb{H}^m} \leq C\left(\|v\|_{\mathbb{L}^\infty}\right)\left(1 + \|v\|_{\mathbb{H}^m}\right)$$

Ceci est donc borné lorsque $\|v\|_{\mathbb{H}^m}$ l'est, cela prouve la proposition. ∎

Appendice A-IV

La proposition suivante est tirée d'un théorème dû à Henry, Fernando Perez et Wreszinski ([12]) ; on en donne ici une version contenant des hypothèses un peut plus fortes et une preuve légèrement simplifiée.

Proposition A-7

On considère l'équation

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{A}\mathcal{U} + f(\mathcal{U}) \tag{A.1}$$

où A est l'opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach X, et où f vérifie :
$$f\left(\|\mathcal{U}\|_X\right) = O\left(\|\mathcal{U}\|_X^2\right) \text{ quand } \|\mathcal{U}\|_X \to 0$$

On suppose que A engendre un $\mathcal{C}^0$ semi-groupe $S(t)$ sur X vérifiant $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ avec
$$\omega = \inf\left\{\frac{\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}, t > 0\right\} > 0$$

alors 0 est un point fixe instable de l'équation (A-1), i.e. $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, $\exists\, \mathcal{U}_0 \in X$ avec $\|\mathcal{U}_0\|_X < \delta$ et $\exists t_0 > 0 : \|\mathcal{U}(t_0)\|_X > \varepsilon$ où $\mathcal{U}(t)$ est la solution de (A-1) avec $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$.

Preuve. Notons $T(t)$ le semi-groupe non linéaire associé à l'équation (A-1), i.e. $T(t)\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}$ est la solution de (A-1) avec $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$.

Notons $\|\quad\|$ la norme sur X.

Puisque $f(\mathcal{U}) = O\left(\|\mathcal{U}\|^2\right)$ quand $\|\mathcal{U}\| \to 0$ il existe $a_1 > 0$ et $c > 0$ tels que

$$\|\mathcal{U}\| < a_1 \Rightarrow \|f(\mathcal{U})\| \leq c\,\|\mathcal{U}\|^2$$

Supposons que 0 est un point fixe stable de $T(t)$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|\mathcal{U}_0\| < \alpha \Rightarrow \|T(t)\mathcal{U}_0\| < \varepsilon$ pour tout $t > 0$.

Prenons d'abord $\varepsilon = a_1$; alors $\exists a_0 > 0 / \|\mathcal{U}_0\| < a_0 \Rightarrow \|\mathcal{U}(t)\| < a_1, \forall t \geq 0$, où $\mathcal{U}(t) = T(t)\mathcal{U}_0$.

Mais on a

$$(A.2) \qquad T(t)\mathcal{U}_0 = S(t)\mathcal{U}_0 + \int_0^t S(t-r) f(\mathcal{U}(r))dr$$

On a donc, pour $t \in [0, t_0]$ et $\|\mathcal{U}_0\| < a_0$:

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leq Me^{\omega t}\,\|\mathcal{U}_0\| + \int_0^t \|S(t-r)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\|f(\mathcal{U}(r))\|\,dr$$

$$\leq Me^{\omega t}\,\|\mathcal{U}_0\| + a_1 MC \int_0^t e^{\omega(t-r)}\,\|\mathcal{U}(r)\|\,dr$$

d'où par Gronwall :

$$(A.3)\qquad \|\mathcal{U}(t)\| \leq e^{\omega t_0}\left(M + e^{a_1 MCt_0}\right)\|\mathcal{U}_0\|$$

dès que $t \in [0, t_0]$ et $\|\mathcal{U}_0\| < a_0$.

En reprenant l'équation intégrale (A-2), on obtient pour tout $t_0 > 0$ et $\|\mathcal{U}_0\| < a_0$:

$$\|T(t_0)\mathcal{U}_0 - S(t_0)\mathcal{U}_0\| \leq \int_0^{t_0} \|S(t_0 - r)\|\, \|f(\mathcal{U}(r))\|\, dr$$

$$\leq MC \int_0^{t_0} e^{\omega(t_0 - r)}\, \|\mathcal{U}(r)\|\, dr$$

d'où en utilisant (A-3)

$$(A.4)\qquad \|T(t_0)\mathcal{U}_0 - S(t_0)\mathcal{U}_0\| \leq b(t_0)\, \|\mathcal{U}_0\|^2,$$

$$\forall t_0 > 0 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{U}_0\| < a_0.$$

On fixe maintenant définitivement $t_0 > 0$, et on suppose, quitte à augmenter b que

$$(A.5)\qquad b = b(t_0) \geq \frac{e^{\omega t_0} - 1}{8a_0 M^2}.$$

Soit alors

$$\varepsilon < \inf\left\{a_1, \frac{e^{\omega t_0} - 1}{32M^3 b}\right\}$$

et soit $\alpha > 0$ tel que $\|\mathcal{U}_0\| < \alpha \Rightarrow \|\mathcal{U}(t)\| \leq \varepsilon$, pour tout $t \geq 0$. Prenons $\lambda \in \sigma(S(t_0))$ avec $|\lambda| = e^{\omega t_0}$ (notons que $e^{\omega t_0}$ est égal au rayon spectral de $S(t_0)$), i.e. $\lambda = e^{i\theta}e^{\omega t_0}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit N un entier assez grand pour que

$$(A.6)\qquad e^{\omega N t_0} \leq \frac{e^{\omega t_0} - 1}{16M^3 b\alpha}$$

et

$$(A.7) \qquad \left|e^{iN\theta}-1\right| \leq \frac{1}{12}$$

Alors, puisque $\lambda \in \sigma(S(t_0))$, on peut trouver ξ et η dans X tels que $\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \geq 1$ et $\|S(t_0)(\xi + i\eta) - \lambda(\xi + i\eta)\|_{X+iX}$ soit arbirairement petit.

Choisissons donc ξ et η dans X, avec $\|\eta\| \leq \|\xi\| = 1$ (ce qui est possible, quitte à multiplier $\xi + i\eta$ par un complexe convenable) et vérifiant

$$\left\|S(Nt_0)(\xi + i\eta) - \lambda^N(\xi + i\eta)\right\|_{X+iX} \leq \frac{1}{12}e^{\omega NT_0}$$

On a alors

$$\begin{aligned} &\left\|S(Nt_0)\xi - \operatorname{Re}\left(\lambda^N(\xi + i\eta)\right)\right\| \\ = &\left\|S(Nt_0)\xi - e^{\omega Nt_0}(cos(N\theta)\xi - \sin(N\theta)\eta)\right\| \leq \frac{e^{\omega Nt_0}}{12} \end{aligned}$$

Puisque, d'après (A-7) :

$$|\cos N\theta| \geq 1 - \frac{1}{12}$$

et

$$|\sin N\theta| \leq \frac{1}{12}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|S(Nt_0)\xi\| &\geq e^{\omega Nt_0}\left(\left(1-\frac{1}{12}\right)\|\xi\| - \frac{1}{12}\|\xi\| - \frac{1}{12}\right) \\ &\geq \frac{3}{4}e^{\omega Nt_0} \end{aligned}$$

Soit maintenant :

$$\delta = \frac{e^{\omega t_0} - 1}{16M^3 b e^{\omega Nt_0}}$$

D'après (A-6), on a $\delta \leq \alpha$, donc si on prend $\mathcal{U}_0 = \delta\xi$, on doit avoir $\|T(t)\mathcal{U}_0\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

On va montrer que ceci n'est pas vérifié, et plus précisément, que $\|\mathcal{U}(Nt_0)\| = \|T(Nt_0)\mathcal{U}_0\| > \varepsilon$.

Pour $0 \leq n \leq N$, on a

$$\mathcal{U}(nt_0) = T(nt_0)\mathcal{U}_0$$

$$= S(nt_0)\mathcal{U}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} S((n-1-k)t_0)\left[\mathcal{U}((k+1)t_0) - S(t_0)\mathcal{U}(kt_0)\right]$$

$$= S(nt_0)\mathcal{U}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} S((n-1-k)t_0)\left[T(t_0)\mathcal{U}(kt_0) - S(t_0)\mathcal{U}(kt_0)\right]$$

On montre alors par récurrence que

$$\|\mathcal{U}(nt_0) - S(nt_0)\mathcal{U}_0\| \leq \frac{\delta}{4}e^{\omega n t_0} \quad , \quad 0 \leq n \leq N$$

en effet, c'est evidemment vrai pour $n = 0$. Supposons cela vrai pour $k \leq n-1$, avec $n \geq 1$. Alors

$$\|\mathcal{U}(nt_0) - S(nt_0)\mathcal{U}_0\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} Me^{\omega(n-1-k)t_0}\,\|T(t_0)\mathcal{U}(kt_0) - S(t_0)\mathcal{U}(kt_0)\|$$

et par hypothèse de récurrence, on a

$$\|\mathcal{U}(kt_0)\| \leq \|S(kt_0)\| + \frac{\delta}{4}e^{\omega k t_0} \leq 2M\delta e^{\omega k t_0}$$

$$\leq 2M\delta e^{\omega N t_0} \leq \frac{e^{\omega t_0} - 1}{8M^2 b} \leq a_0$$

d'après (A-5)

Donc, par (A-4)

$$\|T(t_0)\mathcal{U}(kt_0) - S(t_0)\mathcal{U}(kt_0)\| \leq b\,\|\mathcal{U}(kt_0)\|^2 \leq 4M^2 b\delta^2 e^{2\omega k t_0}$$

donc

$$\|\mathcal{U}(nt_0) - S(nt_0)\mathcal{U}_0\| \leq 4M^3 b\delta^2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{\omega(n-1)t_0} e^{\omega k t_0}$$

$$\leq 4M^3 b\delta^2 \frac{e^{\omega N t_0}}{e^{\omega t_0} - 1} e^{\omega n t_0}$$

On a donc

$$(A.8). \qquad \|\mathcal{U}(nt_0) - S(nt_0)\mathcal{U}_0\| \leq \frac{\delta}{4} e^{\omega n t_0}$$

On déduit de cela que

$$\|\mathcal{U}(Nt_0)\| \geq \|S(Nt_0)\mathcal{U}_0\| - \frac{\delta}{4} e^{\omega N t_0}$$

$$\geq \left(\frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{4}\right) e^{\omega N t_0} \geq \frac{\delta}{2} e^{\omega N t_0}$$

$$\geq \frac{e^{\omega t_0} - 1}{32M^3 b} > \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat. ∎

REFERENCES

[1] I.V. Barashenkov, V.G. Makhankov : Soliton-like "Bubbles" in a System of Interating Bosons, Phys. Lett. A 128 (1988) 52-56.

[2] I.V. Barashenkov, A.D. Gocheva, V.G. Makhankov, I.V. Puzynin, Stability of the Soliton-like "Bubbles" Phys. D 34 (1989) 240-254.

[3] I.V. Barashenkov, I.V. Puzynin, T. Zhanlav, T.L. Boyadjiev : Stability of the Moving "Bubbles" in a Bose Condensate, Proc. Workshop on Solitons and Applications, V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev, World Scientific 1990, 281-297.

[4] H. Berestycki, T. Cazenave : Instabilité des Etats Stationnaires dans les Equations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C.R. Acad Sc. Paris, Série I, 293 (1981) 489-492.

[5] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian : Equations de champs scalaires Euclidiens non linéaires dans le Plan. C.R. Acad Sc. Paris, Série I, 297 (1983) et Gallouët Thesis (1984), Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, France.

[6] H. Berestycki, P.L. Lions : Nonlinear Scalar Field Equation I : Existence of a ground state, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983) 313-376.

[7] T. Cazenave, P.L. Lions : Orbital Stability of Standing Waves for some Nonlinear Schrödinger Equations, Comm. Math. Phys. 85 (1982) 549-561.

[8] L.E. Fraenkel : Formulae for High Derivatives of Composite Functions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1978) 83, 159-165.

[9] M. Grillakis : Linearized Instability for Nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon Equations, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 747-774.

[10] M. Grillakis : Analysis of the Linearization around a Critical Point of an Infinite Dimensional Hamiltonian System, Comm. Pure Appl. Math 43 (1990) 299-333.

[11] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss : Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I, J. Funct. Anal. 74 (1987) 160-197.

[12] D.B. Henry, J. Fernando Perez, W.F. Wreszinski : Stability Theory for Solitary Waves solutions of Scalar Field Equations, Comm.Math. Phys. 85 (1982) 351-361.

[13] A. Pazy : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, New-York, 1983.

[14] M. Reed, B. Simon : Method of Modern Mathematical Physics, Vol II, IV, Academic Press, New-York, 1979.

[15] M. Weinstein : Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations, Siam J. Math. Anal. 16 (1985) 472-491.

[16] M. Weinstein : Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Equations, Comm. Pure. Appl. Math. 39 (1986) 51-68.