THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

JOËL RIVAT

Autour d'un théorème de Piatetski-Shapiro (nombres premiers dans la suite partie entière de $[n^c]$ *)*, 1992

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.

63480

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le titre de Docteur ès Sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Joël RIVAT

Sujet : **Autour d'un théorème de *Piatetski-Shapiro***
(Nombres premiers dans la suite $[n^c]$)

soutenue le 13 février 1992 devant la Commission d'examen

M. Michel RAYNAUD, Président
M. Hedi DABOUSSI
M. Jean-Marc DESHOUILLERS
M. Etienne FOUVRY
M. Jean-Louis NICOLAS

Remerciements

Je tiens à exprimer ici mes plus vifs remerciements aux personnes sans lesquelles ce travail n'aurait pu voir le jour, et plus particulièrement à:

- *Étienne FOUVRY*, pour avoir gentiment accepté de diriger ce travail de recherche, pour les connaissances mathématiques précieuses qu'il m'a communiquées, pour sa patience et le temps qu'il a bien voulu fréquemment me consacrer, et pour les nombreuses corrections et suggestions qu'il proposa,

- *Michel RAYNAUD*, pour avoir accepté d'être président du jury,

- *Jean-Marc DESHOUILLERS*, pour s'être vivement intéressé à ce travail qui reprend certaines questions abordées dans sa thèse, sa gentillesse à mon égard et pour avoir accepté d'être rapporteur, ainsi que de faire partie du jury,

- *Gérald TENENBAUM*, pour avoir suivi de manière approfondie l'évolution de ce travail et lui avoir complaisamment consacré un temps précieux,

- *Hedi DABOUSSI*, qui a largement contribué à l'enrichissement de mon savoir mathématique, et a bien voulu être membre du jury,

- *Jean-Louis NICOLAS*, pour avoir bien voulu participer au jury,

- *Jie WU*, pour s'être beaucoup intéressé à ce travail, et en avoir abondamment discuté,

- *Roger BAKER* et *John FRIEDLANDER*, pour s'être intéressés à ce travail et avoir accepté d'en être rapporteurs,

- *Martin HUXLEY*, pour ses remarques et ses suggestions, nées de sa maîtrise absolue de la théorie des sommes d'exponentielles, qui m'ont aidé à progresser en même temps que ce travail,

- *Henryk IWANIEC*, pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et les connaissances que je lui dois,

- *François CLANCHÉ*, *Guillaume LE BLANC*, et *Claude MARCHÉ* (grand spécialiste de LaTeX), pour leur amitié,

- *Anne KASTNER*, pour sa présence et ses encouragements quotidiens durant toute l'élaboration de cette thèse, qui l'ont grandement facilitée.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes:

- $e(x) = \exp(2i\pi x)$,
- $n \sim N$ pour $N < n \leq 2N$ ou plus généralement $n \in \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un intervalle inclus dans $[N, 2N]$, les majorations étant alors uniformes pour tout $\mathcal{I}$ de ce type,
- $x \ll_\varepsilon y$ signifie qu'il existe une constante $K(\varepsilon) > 0$ dépendant de ε telle que: $|x| \leq K(\varepsilon)|y|$,
- $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des nombres premiers,
- $\mathcal{A}$ désignera un ensemble quelconque d'entiers naturels,
- $[\theta]$ désignera la partie entière de θ,
- $\{\theta\}$ désignera la partie fractionnaire de θ,
- Λ désignera la fonction de *von Mangoldt*,
- $d(n)$ désignera le nombre de diviseurs de n,
- $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$,
- $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Table des Matières

1 Introduction **7**

1.1 Généralités 7

1.2 Résultats 10

2 Théorèmes de sommes d'exponentielles **17**

2.1 La méthode des petits intervalles 17

2.2 Shift et paires d'exposants 20

2.3 Double grand crible 23

2.4 Shift et double grand crible 24

2.5 *Poisson*, shift et double grand crible 27

3 La partie fractionnaire de p^θ **28**

3.1 Introduction 28

3.2 Réduction du problème 30

3.3 Passage aux sommes d'exponentielles 33

3.4 Utilisation du double grand crible 34

3.5 Commentaires 35

4 Sur un théorème hybride de *Balog - Friedlander* **36**

4.1 Introduction 36

4.2 Réduction du problème 37

4.3 Traitement des sommes de type I 39

4.4 Conclusion 42

5 Le théorème de *Piatetski-Shapiro* 43

5.1 La suite de *Piatetski-Shapiro* 43

5.2 Sommes d'exponentielles 45

5.2.1 Sommes de type II 45

5.2.2 Sommes de type I 46

5.3 Conclusion 51

6 Minoration grâce au crible 53

6.1 Introduction 53

6.2 Estimation de $|\mathcal{A}_d|$ 53

6.3 Préparation au crible 54

6.4 Estimation directe 55

6.5 Utilisation du crible 57

6.6 Terme d'erreur 60

7 Problème binaire 63

7.1 Réduction du problème 64

7.2 Evaluation de $S_1(N)$ 64

7.3 Evaluation de $S_2(N)$ 65

7.4 Evaluation de $S_3(N)$ 65

7.5 Evaluation de $S_4(N)$ 66

8 Un résultat presque partout 74

8.1 Introduction et notations 74

8.2 Un théorème général 75

8.3 Itération 76

8.4 Propriétés élémentaires 81

8.5 Un peu de théorie de la mesure 81
8.6 Une majoration d'intégrale 84
8.6.1 Argument élémentaire 84
8.6.2 Séries de *Fourier* 84
8.6.3 Queue des séries de *Fourier* 84
8.6.4 Condition suffisante 85
8.6.5 L'inégalité de *Weyl - van der Corput* 85
8.6.6 La contribution du terme $q = 0$ 86
8.6.7 La contribution des termes $q \neq 0$ 86

A Transformations de sommes **89**
A.1 L'inégalité de *Weyl - van der Corput* 89
A.2 La formule de *Perron* 89

B La formule sommatoire de *Poisson* **90**

C Paires d'exposants **92**

D La fonction partie fractionnaire **94**

E Identités combinatoires **96**
E.1 L'identité de *Vaughan* 96
E.2 L'identité de *Heath-Brown* 97

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

Depuis 1955, la suite $[n^c]$ a suscité de nombreuses recherches. Le problème initial posé par *Piatetski-Shapiro* était d'étudier le nombre de nombres premiers de la forme $[n^c]$. Plus précisément, on pense que l'équivalence:

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty \tag{1.1}$$

où $\pi_c(x) = \#\{n \leq x \mid [n^c] \in \mathcal{P}\}$ est vraie pour tout $c > 0$, $c \neq 2, 3, 4, \ldots$

Le choix de la suite $[n^c]$ est motivé par plusieurs raisons. Tout d'abord, c'est une façon de s'approcher de l'étude de la représentation de nombres premiers par des polynômes, qui est résolue uniquement dans le cas des polynômes de degré 1. On ne connait en effet aucun polynôme de degré 2 dont on sache prouver qu'il prend une infinité de valeurs premières. Pour $1 < c < 2$, on peut donc s'imaginer $[n^c]$ comme un "polynôme de degré c", et voir la mesure de l'intervalle $]1, c_0[$ des valeurs de c pour lesquelles on sait prouver l'équivalence (1.1), comme une façon de jauger les progrès accomplis dans les méthodes de sommes d'exponentielles, qui constituent, pour l'instant, l'unique façon d'aborder (1.1).

D'autre part, la suite $[n^c]$, que nous appellerons suite de *Piatetski-Shapiro* d'ordre c (alors qu'un nombre de la forme $[n^c]$ sera dit nombre de *Piatetski-Shapiro* d'ordre c), est la seule suite raisonnable par sa définition dont le nombre de premiers qu'elle contient est

connu, et dont le cardinal est petit:

$$\#\{a \leq x \mid a = [n^c]\} = x^{\frac{1}{c}} + O(1)$$

Pour illustrer ce fait, rappelons que le théorème de *Siegel - Walfisz* (sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques) ne décrit que la répartition des p dans $\mathcal{A} = \{n \leq x \mid n \equiv a \pmod{q}\}$ avec $(a,q) = 1$ et $q \leq (\ln x)^A$, donc $\#\mathcal{A} = \frac{x}{q} + O(1)$, ce qui est beaucoup plus grand que $x^{\frac{1}{c}} + O(1)$ pour $c > 1$.

Le lien entre la suite $[n^c]$ et les méthodes de sommes d'exponentielles provient de l'équivalence pour $c > 1$:

$$[n^c] = m \Longleftrightarrow [-m^{\frac{1}{c}}] - [-(m+1)^{\frac{1}{c}}] = 1$$

qui nous donne une fonction caractéristique des nombres de *Piatetski-Shapiro*, et de l'écriture $[x] = x - \{x\}$, qui dans l'écriture précédente fera apparaître un terme régulier et une différence de fonctions parties fractionnaires. Le terme régulier engendrera le terme principal du nombre de représentations, tandis que les fonctions parties fractionnaires formeront un terme d'erreur, qui sera traité par développement en séries de *Fourier*, ce qui conduit naturellement à des estimations de sommes d'exponentielles.

Typiquement, on aura à étudier des sommes d'exponentielles de la forme:

$$\sum_h \varepsilon_h \sum_p e(hp^\gamma)$$

avec $\gamma = \frac{1}{c}$, où la variable h correspond au développement en série de *Fourier*, et la variable p appartient à l'ensemble sur lequel on étudie la suite de *Piatetski-Shapiro*, par exemple l'ensemble des nombres premiers.

Dans ce dernier cas, par l'intermédiaire d'une identité combinatoire (voir en annexe E), nous serons ramenés à l'étude de sommes de la forme:

$$\sum_h \varepsilon_h \sum_m \sum_n a_m b_n e(h(mn)^\gamma)$$

Ces sommes sont généralement appelées sommes de type II lorsque a_m et b_n sont des nombres complexes quelconques (de module ≤ 1), alors qu'elles sont appelées sommes de type I lorsque a_m ou b_n est une variable régulière.

Les sommes de type I sont en général considérées comme plus souples: on peut s'occuper en premier de la sommation sur la variable régulière et lui appliquer la méthode traditionnelle de *van der Corput* (voir par exemple les ouvrages récents [26] et [11], ou la référence classique [28]): formule de *Poisson* (voir annexe B) et paires d'exposants (voir annexe C). Remarquons d'autre part que les sommes de type I peuvent toujours être considérées comme étant de type II.

La méthode de *van der Corput* demeure pour l'instant incontournable lorsque l'on veut estimer une somme simple d'exponentielles. Par contre, pour majorer les sommes multiples d'exponentielles, on dispose depuis le célèbre travail de *Bombieri* et *Iwaniec* en 1986 sur l'ordre de grandeur de la fonction ζ de *Riemann* [4] d'un outil puissant: le double grand crible. Rappelons son énoncé sous la forme de la proposition 1 de [9]:

Proposition 1.1 *Soient ϕ_r, ψ_s des nombres complexes, et $\mathcal{X} = (x_r)$, $\mathcal{Y} = (y_s)$ des suites finies de nombres réels tels que $|x_r| \leq X$, $|y_s| \leq Y$. On a alors:*

$$|\mathcal{B}_{\phi,\psi}(\mathcal{X},\mathcal{Y})|^2 \leq 20(1+XY)\mathcal{B}_{\phi}(\mathcal{X},Y)\mathcal{B}_{\psi}(\mathcal{Y},X)$$

avec:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\phi,\psi}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &= \sum_r \sum_s \phi_r \psi_s e(x_r y_s) \\
\mathcal{B}_{\phi}(\mathcal{X},Y) &= \sum_{|x_{r_1}-x_{r_2}|\leq Y^{-1}} |\phi_{r_1}\phi_{r_2}| \\
\mathcal{B}_{\psi}(\mathcal{Y},X) &= \sum_{|y_{s_1}-y_{s_2}|\leq X^{-1}} |\psi_{s_1}\psi_{s_2}|
\end{aligned}$$

On voit que le double grand crible est d'un type très général, et qu'il permet de ramener l'estimation d'une somme multiple d'exponentielles à l'étude de deux problèmes d'espacement.

Dans ce travail, nous utiliserons plusieurs fois le double grand crible, après, bien entendu, une préparation adéquate.

1.2 Résultats

Piatetski-Shapiro a montré que l'équivalence (1.1) était vraie pour $0 < c < \frac{12}{11}$, puis cet intervalle a été étendu plusieurs fois:

- *Piatetski-Shapiro* [24] en 1953:

$$0 < c < \frac{12}{11} = 1.090909\ldots$$

- *Kolesnik* [19] en 1972:

$$0 < c < \frac{10}{9} = 1.111111\ldots$$

- *Graham* et *Leitmann*, indépendamment (non publié):

$$0 < c < \frac{69}{62} = 1.112903\ldots$$

- *Heath-Brown* [15] en 1983, en introduisant la méthode des petits intervalles et une identité combinatoire appropriée:

$$0 < c < \frac{755}{662} = 1.140483\ldots$$

- *Kolesnik* [20] en 1985 grâce à une meilleure paire d'exposants:

$$0 < c < \frac{39}{34} = 1.147058\ldots$$

- *Liu* et *Rivat* [16] (indépendamment) en 1990, en introduisant l'utilisation du double grand crible:

$$0 < c < \frac{15}{13} = 1.153846\ldots$$

Nous montrerons dans ce travail le

Théorème 1.2 *Pour* $c < \frac{6121}{5302} = 1.15447001\ldots$, *on a l'équivalence:*

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty$$

Ce théorème est dû à l'introduction d'une paire d'exposants dans le traitement des sommes de type II, et à l'utilisation des conséquences du double grand crible (par exemple théorème 3 de [9]) pour le traitement des sommes de type I. Ces dernières imposaient la restriction finale dans le travail de *Heath-Brown*, qui pourtant exploitait à fond l'existence d'une variable régulière dans leur traitement. Nous améliorons ce traitement en utilisant le double grand crible et en traitant ces sommes de type I comme des sommes de type II, c'est-à-dire sans même utiliser la régularité, au point "critique" qui bloquait *Heath-Brown*. Ceci illustre la supériorité du double grand crible qui est une méthode multidimentionnelle, sur une méthode unidimentionnelle même très sophistiquée. Remarquons de plus que l'on peut améliorer cette condition avec une paire d'exposants plus appropriée que l'on trouverait en appliquant l'algorithme de Graham à partir de la paire d'exposants $(\frac{9}{56} + \varepsilon, \frac{37}{56} + \varepsilon)$ pour ε assez petit, qui a été établie par *Huxley* et *Watt* [17], mais l'amélioration serait de toutes façons faible.

Devant la difficulté d'établir l'équivalence (1.1) sur un intervalle, on peut essayer de l'établir pour un ensemble de valeurs de c moins contraignant, et bien sûr plus "grand". *Deshouillers*, dans sa Thèse [5], et dans [8], propose de démontrer le résultat pour presque tout c au sens de la mesure de *Lebesgue*. Il démontre (remarque VI.3 de [5]) que l'ensemble des $c > 0$ tels que $\pi_c(x) = o(\frac{x}{\ln x})$ est de mesure nulle.

Pour établir l'équivalence, nous avons adopté une démarche plus classique: établir une majoration en moyenne quadratique, en déduire une sous-suite explicite vérifiant la propriété grâce au lemme de *Borel - Cantelli*, puis utiliser le théorème des accroissements finis pour conclure. Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant, sans savoir qu'il avait déjà été démontré dans l'article injustement peu cité de *Leitmann* et *Wolke* [22]:

Théorème 1.3 *Pour presque tout* c *de l'intervalle* $]1,2[$, *au sens de la mesure de* Le-

besgue, *on a l'équivalence:*

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty$$

Notons que cette borne en 2, bien qu'elle apparaisse naturellement dans les calculs, semble assez étrange. *Tenenbaum*, très intrigué, a donné une autre démonstration du résultat précédant utilisant la formule de *Plancherel*, mais il a été lui aussi bloqué par la borne au point 2.

Contrairement à la démonstration de *Leitmann* et *Wolke* qui traitait directement le cas des nombres premiers, notre approche montre que le théorème précédent résulte en fait d'un théorème plus général dans lequel l'ensemble des nombres premiers ne joue aucun rôle, et donne de plus explicitement un terme d'erreur exploitable.

Théorème 1.4 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de nombres entiers. a désigne un élément de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_c(x) = \#\{n \leq x \mid [n^c] \in \mathcal{A}\}$, et $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_1(x)$, α désigne un réel positif vérifiant $\mathcal{A}(x) \ll x^\alpha$, alors pour presque tout c de l'intervalle $]1,2[$, au sens de la mesure de* Lebesgue, *on a:*

$$\mathcal{A}_c(x) = c^{-1} \sum_{a \leq x^c} a^{-1+c^{-1}} + O_{c,\delta}(x^{1-\delta})$$

pour:

$$\delta \in]0, \frac{1}{4c} - \frac{\alpha}{8}[$$

En outre, ce théorème a pour conséquence intéressante de nous permettre d'étudier un problème de *Piatetski-Shapiro* multidimentionnel: pour quelles valeurs de $(c_1, \ldots, c_l)$ l'équation

$$p = [n_1^{c_1}] = [n_2^{c_2}] = \cdots = [n_l^{c_l}]$$

a-t-elle le bon nombre de solutions?

Nous démontrons le

Théorème 1.5 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour presque tout k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ satisfaisant pour $i = 1, \ldots, k$:*

$$\gamma_i = \frac{1}{c_i} \in]1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+9)!}), 1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+9)!})[$$

on a pour tout $\delta_k \in]0, \frac{\gamma_k}{4} - \frac{1+\gamma_1+\cdots+\gamma_{k-1}-(k-1)}{8}[$, l'égalité:

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p=[n_1^{c_1}]=\cdots=[n_k^{c_k}]}} 1 = \gamma_1 \cdots \gamma_k \sum_{p \leq x} p^{\gamma_1+\cdots+\gamma_k-k} + O_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\delta_k}(x^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

Remarquons que l'on peut, quitte à modifier $c_2, \ldots, c_n$, obtenir un résultat du même genre en appliquant comme premier pas de l'itération le théorème habituel de *Piatetski-Shapiro*, ce qui nous permet de *choisir* c_1 dans l'intervalle $0 < c < \frac{6121}{5302} = 1.15447001\ldots$.

Une autre possibilité pour améliorer l'intervalle $0 < c < \frac{6121}{5302} = 1.15447001\ldots$ est de réduire notre exigence, c'est-à-dire de prouver la minoration $\pi_c(x) \gg \frac{x}{\ln x}$, au lieu de (1.1). Nous avons obtenu, en utilisant le crible linéaire de *Rosser - Iwaniec*, le

Théorème 1.6 *Pour $c < \frac{7}{6} = 1.1666666\ldots$, on a la minoration:*

$$\pi_c(x) \gg_c \frac{x}{\ln x}$$

Le crible linéaire ne permettant jamais, seul de détecter des nombres premiers, nous avons dû recourir à l'identité de Buchstab, introduisant ainsi un autre terme, qui heureusement peut être traité sans recours au crible. D'autre part, bien entendu, le crible linéaire nous ramène à un problème de majoration de sommes multiples d'exponentielles. Pour démontrer ce théorème, nous avons dû revenir à la construction des coefficients bien factorisables pour gagner davantage de souplesse dans les formes multilinéaires. La borne $\frac{7}{6}$ apparaît comme une limite combinatoire imposée par la construction, au vu des intervalles sur lesquels on sait majorer les sommes d'exponentielles qui interviennent.

D'autres problèmes viennent se greffer au problème de *Piatetski-Shapiro* tout naturellement. Il en est ainsi de l'étude de la partie fractionnaire de p^θ, pour $\theta < 1$, car on a la caractérisation, pour $0 \leq \delta \leq 1$:

$$\{n^\theta\} < \delta \Longleftrightarrow [n^\theta] - [n^\theta - \delta] = 1$$

qui ressemble beaucoup à la caractérisation des nombres de *Piatetski-Shapiro* et qui de la même manière permet de se ramener à des techniques de sommes d'exponentielles. On peut démontrer ainsi le:

Théorème 1.7 *Soient* $0 < \theta < 1$ *et* $\varepsilon > 0$. *On a l'égalité:*

$$\#\{p \leq x \mid \{p^\theta\} < \delta\} = \delta\pi(x) + O_{\theta,\varepsilon}(x^{\max(1-\theta,\frac{1+\theta}{2},\frac{3}{4})+2\varepsilon} + \delta x^{1-\varepsilon})$$

uniformément pour $0 \leq \delta \leq 1$.

Ce théorème s'apparente au résultat de *Balog* [1]. De même que *Balog*, on en déduit le

Corollaire 1.8 *Soit* $0 < \theta < 1$. *Alors on a:*

$$\#\{p \leq x \mid \{p^\theta\} < \delta\} = \delta\pi(x)(1 + O(x^{-\varepsilon}))$$

uniformément pour

$$\delta \geq x^{-\min(\theta,\frac{1-\theta}{2},\frac{1}{4})+3\varepsilon}$$

La preuve de *Balog* utilisait des techniques d'analyse complexe, l'équation fonctionnelle approchée de ζ, des théorèmes de valeur moyenne...La démonstration ici est très simple puisqu'il suffit, après une transformation classique de l'étude en un problème de sommes d'exponentielles, d'appliquer le double grand crible. En particulier, nous n'utilisons pas du tout d'analyse complexe. Notons que dans un article paru très récemment, *Harman* donne une amélioration (théorèmes 3 et 4 de [13]) du théorème précédent pour les valeurs $0 < \theta \leq \frac{3}{8}$, grâce à des résultats sophistiqués sur la fonction ζ. Remarquons enfin que notre démarche élémentaire nous permet non seulement d'étudier $\{p^\theta\} < \delta$, mais également d'autres problèmes similaires, comme par exemple $\{(p_1p_2)^\theta\} < \delta$.

Deshouillers, dans sa Thèse [5], et dans [7] (voir aussi [6]), étudie le nombre de représentations $R_c(N)$ d'un entier naturel N sous la forme $N = [n_1^c] + [n_2^c]$. Il donne une minoration pour $c < \frac{4}{3}$ dans ce problème binaire. Nous donnerons l'équivalence:

Théorème 1.9 *Pour* $1 < c < \frac{6}{5}$, $\gamma = \frac{1}{c}$, *on a, pour* $N \to +\infty$, *et tout* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit:*

$$R_c(N) = \gamma^2 B(\gamma, \gamma) N^{2\gamma-1} + O_\varepsilon(N^{2\gamma-1-\varepsilon})$$

La difficulté de ce théorème provient du fait qu'après transformation de l'étude en un problème de majoration de sommes d'exponentielles, on doit être capable de majorer un produit de deux séries de *Fourier.* Un terme typique est:

$$\sum_{n \sim N_0} e(h_1 n^\gamma + h_2 (N-n)^\gamma)$$

où h_1 et h_2 proviennent chacun d'un développement en série de *Fourier*, et peuvent éventuellement être de signes différents, ce qui exclus de pouvoir utiliser directement la théorie des paires d'exposants (voir en annexe C), car si $h_1 h_2 < 0$, on n'est pas assuré que les dérivées de tous ordres de la fonction:

$$x \longrightarrow h_1 x^\gamma + h_2 (N-x)^\gamma$$

conserve un signe constant sur l'intervalle $[N_0, 2N_0]$, cela dépend de la parité de l'ordre de dérivation. Ceci nous oblige à un traitement spécifique de ces sommes d'exponentielles par le théorème suivant qui est la clé de la démonstration:

Théorème 1.10 *Soient* u *et* $v \in [0,1]$, h_1 *et* $h_2 \in \mathbb{Z}^\star$. *Soient* $1 \leq N_0 \leq \frac{N}{2}$. *On pose:*

$$F_{h_1,h_2}(n) = h_1 (n+u)^\gamma + h_2 (N-n+v)^\gamma$$

- *Si* $h_1 h_2 > 0$ *alors*

$$\sum_{n \sim N_0} e(F_{h_1,h_2}(n)) \ll (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-2} + |h_2| N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} + \ln N$$

- *Si* $h_1 h_2 < 0$ *alors*

$$\sum_{n \sim N_0} e(F_{h_1,h_2}(n)) \ll (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-3} + |h_2| N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}} + \ln N$$

Balog et *Friedlander* [3] ont démontré récemment un théorème hybride entre le théorème de *Vinogradov* et celui de *Piatetski-Shapiro*, dont nous donnons l'amélioration suivante:

Théorème 1.11 *Soit* $c < \frac{199}{188} = 1.05851\ldots$. *Tout entier naturel* N *impair assez grand s'écrit comme somme de trois nombres premiers de la forme* $[n^c]$.

L'intervalle correspondant dans la preuve de *Balog* et *Friedlander* était $c < \frac{21}{20} = 1.05$.

Notre approche est identique pour ramener le problème à l'étude de sommes de type I et de sommes de type II:

$$S(\alpha,\gamma;H,M,N) = \sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim\frac{MN}{m}} \varepsilon_h a_m b_n e(\alpha mn + h(mn)^\gamma)$$

mais le traitement des sommes de type I est différent: nous ne choisissons pas la même variable pour appliquer la formule sommatoire de *Poisson*, ce qui nous permet ensuite d'utiliser une paire d'exposants, ce qui n'était pas possible par la méthode utilisée par *Balog* et *Friedlander*.

Chapitre 2

Théorèmes de sommes d'exponentielles

Dans ce chapitre nous regroupons différentes majorations de sommes d'exponentielles d'une forme particulière qui sont la clé de plusieurs questions traitées dans cette thèse, et qui apparaissent naturellement dans la plupart des problèmes liés à l'étude de la suite de *Piatetski-Shapiro.*

Soient $\alpha \in [0,1]$,$\gamma \in]0,1[$, H,M,$N \geq 1$ et ε_h,a_m,b_n des nombres complexes de module au plus égal à 1.

On pose:

$$S(\alpha,\gamma;H,M,N) = \sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim \frac{MN}{m}} \varepsilon_h a_m b_n e(\alpha mn + h(mn)^\gamma) \qquad (2.1)$$

Les premiers résultats relèvent de méthodes traditionnelles de sommes d'exponentielles. Les trois derniers résultats sont des conséquences du double grand crible en dimension 1: seul, combiné avec le shift de *Weyl - van der Corput*, et combiné avec la formule sommatoire de *Poisson* et le shift de *Weyl - van der Corput.*

2.1 La méthode des petits intervalles

Nous allons donner une légère amélioration du traitement par la méthode des petits intervalles des sommes de type II fourni par *Heath-Brown* [15], grâce à l'utilisation d'une paire d'exposants.

Nous supposerons ici que $\alpha = 0$.

Définissons pour $1 \leq q_1 \leq Q$:

$$\mathcal{S}_{q_1} = \#\{(n,h) \in \mathbb{N}^2 \mid 4HN^\gamma(q_1-1)Q^{-1} < hn^\gamma \leq 4HN^\gamma q_1 Q^{-1}\}$$

Grâce à l'introduction de l'ensemble $\mathcal{S}_{q_1}$, avant d'appliquer Cauchy-Schwarz, nous avons un bon contrôle de l'ordre de grandeur de $h_1{n_1}^\gamma - h_2{n_2}^\gamma$, ce qui augmente l'efficacité de la théorie des paires d'exposants.

$$S(0,\gamma;H,M,N)^2 \ll QM \sum_{1\leq q_1\leq Q} \sum_{(n_1,h_1)\in\mathcal{S}_{q_1}} \sum_{(n_2,h_2)\in\mathcal{S}_{q_1}} |\sum_{m\in I} e((h_1{n_1}^\gamma - h_2{n_2}^\gamma)m^\gamma)|$$

où I est un intervalle dépendant de n_1, n_2.

Soit (p,q) une paire d'exposants. On applique maintenant le lemme D.1 à la sommation en m, et on regroupe tous les $\mathcal{S}_{q_1}$, d'où l'estimation:

$$S(0,\gamma;H,M,N)^2 \ll QM \sum_{1\leq q_1\leq Q} \sum_{h_1,h_2\sim H} \sum_{n_1,n_2\sim N} \min(M, |\lambda|^{-1}M^{1-\gamma} + |\lambda|^p M^{(\gamma-1)p+q}) \quad (2.2)$$

où $\lambda = (h_1{n_1}^\gamma - h_2{n_2}^\gamma)$ vérifie $|\lambda| < 4HN^\gamma Q^{-1}$.

Pour évaluer le nombre de solutions de l'inégalité précédente, nous utilisons le résultat classique suivant (lemme 1 de [9] par exemple), qui évalue le nombre de solutions de cette dernière inégalité:

Lemme 2.1 *Soient $\alpha\beta \neq 0$, $\Delta > 0$, $M \geq 1$ et $N \geq 1$. Soit $\mathcal{A}(M,N;\Delta)$ le nombre de quadruplets (m_1,m_2,n_1,n_2) tels que:*

$$\left|(\frac{m_1}{m_2})^\alpha - (\frac{n_1}{n_2})^\beta\right| < \Delta$$

avec $M \leq m_1, m_2 < 2M$ et $N \leq n_1, n_2 < 2N$. On a alors:

$$\mathcal{A}(M,N;\Delta) \ll_{\alpha,\beta} MN\ln 2MN + \Delta M^2N^2$$

Suivant les valeurs de λ, la valeur du minimum apparaissant dans (2.2) prend une expression différente, ce qui nous conduit à distinguer $|\lambda| \leq M^{-\gamma}$ et $|\lambda| > M^{-\gamma}$.

Dans ce dernier cas nous effectuons un découpage dyadique de l'intervalle:

$$]M^{-\gamma}, 4QHN^{-\gamma}[$$

Nous en déduisons l'estimation:

$$S(0,\gamma;H,M,N)^2 \ll (T_1+T_2+T_3)\ln 2HMN$$

où T_1 représente les termes $|\lambda| \leq M^{-\gamma}$, T_2 la contribution de $|\lambda|^{-1}M^{1-\gamma}$ et T_3 la contribution de $|\lambda|^p M^{(\gamma-1)p+q}$ dans le cas où $|\lambda| > M^{-\gamma}$:

$$\begin{aligned} T_1 &= QM^2(HN + HM^{-\gamma}N^{2-\gamma})\ln 2HN \\ T_2 &= QM^{2-\gamma} \max_{\Delta \geq M^{-\gamma}} (\Delta^{-1}(HN + \Delta HN^{2-\gamma})\ln 2HN) \\ T_3 &= QM(\frac{HN^\gamma}{Q})^p M^{(\gamma-1)p+q}(HN + \frac{H^2N^2}{Q})\ln 2HN \end{aligned}$$

Remarquons que $T_1 = T_2$.

D'autre part, en supposant $N \ll (MN)^\gamma$ et $Q \ll HN$, les expressions de T_1 et T_3 se simplifient:

$$\begin{aligned} T_1 &\ll HQ(MN)^2N^{-1}\ln 2HN \\ T_3 &\ll Q^{-p}H^{2+p}(MN)^{1+\gamma p+q-p}N^{1+p-q}\ln 2HN \end{aligned}$$

On choisit:

$$Q = 1 + H(MN)^{\frac{-1+\gamma p+q-p}{1+p}}N^{\frac{2+p-q}{1+p}}$$

le 1 servant à assurer $Q \geq 1$, et l'autre terme permettant d'égaliser les contributions de T_1 et T_3.

La condition $Q \ll HN$ équivaut à:

$$N^{1-q} \ll (MN)^{1-q+p(1-\gamma)}$$

ce qui est toujours vrai.

On en déduit le:

Théorème 2.2 *Sous la condition $N \ll (MN)^\gamma$, on a l'estimation:*

$$S(0,\gamma;H,M,N) \ll (H^{\frac{1}{2}}(MN)N^{-\frac{1}{2}} + H(MN)^{\frac{1+\gamma p+q+p}{2(1+p)}}N^{\frac{1-q}{2(1+p)}})\ln 2HMN$$

valable pour toute paire d'exposants (p,q).

2.2 Shift et paires d'exposants

Nous allons ici donner une estimation de $S(\alpha,\gamma;H,M,N)$ en nous inspirant de la méthode de *Heath-Brown* pour traiter les sommes de type I.

Nous supposons $b_n = 1$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$S(\alpha,\gamma;H,M,N)^2 \leq HM\sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}|\sum_{n\sim\frac{MN}{m}} e(\alpha mn + h(mn)^\gamma)|^2$$

Nous appliquons maintenant l'inégalité de *Weyl - van der Corput* sous la forme du lemme A.1.

Soit $1 \leq Q_0 \leq \frac{N}{2}$.

On note $t(n,q) = (n+q)^\gamma - (n-q)^\gamma$.

On a l'estimation:

$$S(\alpha,\gamma;H,M,N)^2 \leq \frac{HMN}{Q_0}\sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{|q|<Q_0}\sum_{\frac{MN}{m}<n-q,n+q\leq 2\frac{MN}{m}} e(2\alpha qm + hm^\gamma t(n,q))$$

En effectuant un découpage dyadique de l'intervalle de sommation sur q, on obtient:

$$S(\alpha,\gamma;H,M,N) \leq \frac{HMN}{Q_0{}^{\frac{1}{2}}} + (\frac{HMN\ln 2N}{Q_0})^{\frac{1}{2}}(\max_{1\leq Q\leq Q_0} T(Q))^{\frac{1}{2}}$$

où:

$$T(Q) = \sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{q\sim Q}\sum_{\frac{MN}{m}<n-q,n+q\leq 2\frac{MN}{m}} e(2\alpha qm + hm^\gamma t(n,q))$$

Soient $M \leq M_1(n,q) < M_2(n,q) \leq 2M$.

Par la formule sommatoire de *Poisson* (voir en Annexe l'égalité B.2):

$$\sum_{M_1(n,q)<m\leq M_2(n,q)} e(2\alpha qm + hm^\gamma t(n,q)) =$$
$$e(-\frac{1}{8})\sum_{v\in I} c_1(\gamma)(ht(n,q))^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}|v-2\alpha q|^{\frac{\gamma-2}{2(1-\gamma)}} e(c_2(\gamma)(ht(n,q))^{\frac{1}{1-\gamma}}(v-2\alpha q)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})$$
$$+ O(\ln 2HMN + (ht(n,q)M^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}})$$

où:

$$I = [2\alpha q + \gamma ht(n,q)M_1(n,q)^{\gamma-1}, 2\alpha q + \gamma ht(n,q)M_2(n,q)^{\gamma-1}]$$

Remarquons que:

$$v - 2\alpha q \asymp QH(MN)^{\gamma-1}$$

Par conséquent les ordres de grandeur de tous les termes de l'expression précédente sont bien déterminés, en particulier celui à l'intérieur de l'exponentielle complexe. Pour chaque q, v, les conditions de sommation sur n et v définissent un intervalle en n, ce qui nous autorise à intervertir les sommations. Cela nous permet d'appliquer une paire d'exposants à la sommation en n, dans le cas où la dérivée en n est > 1 sur tout l'intervalle de sommation en n. Dans l'autre cas, on applique la formule sommatoire de *Poisson*, ce qui nous donne O(1) intégrales trigonométriques que l'on peut majorer par l'inverse de la dérivée.

On a:

$$\frac{\partial}{\partial n}((ht(n,q))^{\frac{1}{(1-\gamma)}}(v-2\alpha q)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}) \asymp QH(MN)^\gamma N^{-2}$$

Donc:

$$\begin{aligned} T(Q) \ll\ & QH(QH(MN)^{\gamma-1})(QHN^{\gamma-1})^{\frac{1}{2(1-\gamma)}}(QH(MN)^{\gamma-1})^{\frac{\gamma-2}{2(1-\gamma)}} \\ & \left((QH(MN)^\gamma N^{-2})^p N^q + (QH(MN)^\gamma N^{-2})^{-1}\right) \\ & + QHN\ln 2HMN \\ & + QHN(QHN^{\gamma-1}M^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} \\ \ll\ & (QH)^{\frac{3}{2}+p}(MN)^{\gamma(p+\frac{1}{2})}N^{q-2p-\frac{1}{2}} + (QH)^{\frac{1}{2}}(MN)^{-\frac{\gamma}{2}}N^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$+ QHN \ln 2HMN + (QH)^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{2}}N^{\frac{1}{2}}$$

On constate dans cette expression que le quatrième terme domine le deuxième, d'où l'estimation:

$$\begin{aligned} S(\alpha,\gamma;H,M,N) \ll \frac{HMN}{Q_0{}^{\frac{1}{2}}} + (\frac{HMN\ln 2N}{Q_0})^{\frac{1}{2}}((QH)^{\frac{3}{2}+p}(MN)^{\gamma(p+\frac{1}{2})}N^{q-2p-\frac{1}{2}} \\ + (QH)^{\frac{1}{2}}(MN)^{-\frac{\gamma}{2}}N^{\frac{3}{2}} \\ + QHN\ln 2HMN \\ + (QH)^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{2}}N^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

ce qui revient à:

$$\begin{aligned} S(\alpha,\gamma;H,M,N) \ll \frac{HMN}{Q_0{}^{\frac{1}{2}}} + (Q_0^{\frac{1+2p}{4}}H^{\frac{5+2p}{4}}(MN)^{\frac{2+\gamma(2p+1)}{4}}N^{\frac{2q-4p-1}{4}} \\ + H(MN)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}\ln 2HMN \\ + Q_0^{-\frac{1}{4}}H^{\frac{3}{4}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{4}}N^{\frac{1}{4}})\ln 2N \end{aligned}$$

On introduit une variable $H' \geq H$ dont l'utilité sera expliquée plus loin.

Pour $H' \geq H$, on peut remplacer H par H' dans les expressions précédentes.

Les deux termes principaux de la dernière estimation de $S(\alpha,\gamma;H,M,N)$ sont les deux premiers termes. Nous allons donc choisir Q_0 de manière à rendre égaux ces deux termes.

$$Q_0 = 1 + H'^{-\frac{2p+1}{2p+3}}(MN)^{\frac{2-\gamma(2p+1)}{2p+3}}N^{\frac{4p+1-2q}{2p+3}}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer la présence de H': dans les applications, on risque d'être gêné par les petites valeurs de H (que nous aurons à considérer au début d'un développement en série de *Fourier*), pour lesquelles la condition:

$$H^{-\frac{2p+1}{2p+3}}(MN)^{\frac{2-\gamma(2p+1)}{2p+3}}N^{\frac{4p+1-2q}{2p+3}} \leq \frac{N}{2}$$

pourrait ne pas être vérifiée.

On peut donc énoncer le:

Théorème 2.3 *Soit (p,q) une paire d'exposants telle que $4p+1-2q>0$, et $H' \geq H$ tel que:*

$$H'^{-\frac{2p+1}{2p+3}}(MN)^{\frac{2-\gamma(2p+1)}{2p+3}}N^{\frac{4p+1-2q}{2p+3}} \ll N$$

on a alors, pour tout $\eta>0$ suffisamment petit, l'estimation:

$$\begin{aligned}(MN)^{-\eta}S(\alpha,\gamma;H,M,N) \ll_\eta\ & H'^{\frac{6p+7}{4p+6}}(MN)^{\frac{\gamma(2p+1)+4p+4}{4p+6}}N^{-\frac{4p+1-2q}{4p+6}} \\ & + H'^{\frac{5+2p}{4}}(MN)^{\frac{2+\gamma(2p+1)}{4}}N^{\frac{2q-4p-1}{4}} \\ & + H'(MN)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} \\ & + H'^{\frac{4p+5}{4p+6}}(MN)^{\frac{4p+5-\gamma}{4p+6}}N^{-\frac{1+q-p}{4p+6}}\end{aligned}$$

2.3 Double grand crible

On suppose dans ce paragraphe que $\alpha=0$.

La formule de *Perron* (voir le lemme A.2 en annexe) nous permet immédiatement de séparer les variables m et n de leur condition multiplicative.

Le double grand crible en dimension 1 peut s'exprimer sous la forme de la proposition 1 de [9]:

Proposition 2.4 *Soient ϕ_r, ψ_s des nombres complexes, et $\mathcal{X}=(x_r)$, $\mathcal{Y}=(y_s)$ des suites finies de nombres réels tels que $|x_r|\leq X$, $|y_s|\leq Y$. On a alors:*

$$|\mathcal{B}_{\phi,\psi}(\mathcal{X},\mathcal{Y})|^2 \leq 20(1+XY)\mathcal{B}_\phi(\mathcal{X},Y)\mathcal{B}_\psi(\mathcal{Y},X)$$

avec:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\phi,\psi}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &= \sum_r\sum_s \phi_r\psi_s e(x_r y_s) \\ \mathcal{B}_\phi(\mathcal{X},Y) &= \sum_{|x_{r_1}-x_{r_2}|\leq Y^{-1}} |\phi_{r_1}\phi_{r_2}| \\ \mathcal{B}_\psi(\mathcal{Y},X) &= \sum_{|y_{s_1}-y_{s_2}|\leq X^{-1}} |\psi_{s_1}\psi_{s_2}|\end{aligned}$$

Cette proposition permet de démontrer le théorème 2 de [9]:

Théorème 2.5 *Soient $\alpha_j \neq 0$, $M_j \geq 1$ pour $j = 1,2,3,4$, $x > 0$, et $\phi_{m_1m_2}$,$\psi_{m_3m_4}$ des nombres complexes tels que $|\phi_{m_1m_2}| \leq 1$, $|\psi_{m_3m_4}| \leq 1$. On a alors:*

$$\begin{aligned} S_{\phi,\psi}(M_1,M_2,M_3,M_4) &= \sum_{m_j \sim M_j} \phi_{m_1m_2}\psi_{m_3m_4} e\Big(x\frac{m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}m_3^{\alpha_3}m_4^{\alpha_4}}{M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}M_3^{\alpha_3}M_4^{\alpha_4}}\Big) \\ &\ll ((xM_1M_2M_3M_4)^{\frac{1}{2}} + M_1M_2(M_3M_4)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (M_1M_2)^{\frac{1}{2}}M_3M_4 + x^{-\frac{1}{2}}M_1M_2M_3M_4)\ln 2M_1M_2M_3M_4 \end{aligned}$$

On majore $S(0,\gamma;H,M,N)$ en utilisant ce théorème avec le choix de paramètres $M_1 = H$, $M_2 = M$, $M_3 = N$, $M_4 = 1$ et $x = HM^\gamma N^\gamma$, on obtient le:

Théorème 2.6 *On a l'estimation:*

$$\begin{aligned} S(0,\gamma;H,M,N) &\ll (H(MN)^{\frac{1+\gamma}{2}} + (HMN)N^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (HMN)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{2}})\ln 2HMN \end{aligned}$$

2.4 Shift et double grand crible

On suppose dans ce paragraphe que $\alpha = 0$.

La formule de *Perron* (voir le lemme A.2 en annexe) nous permet immédiatement de séparer les variables m et n de leur condition multiplicative.

Nous allons maintenant énoncer le théorème 3 de [9] dont la preuve consiste à effectuer un shift de *Weyl - van der Corput* en n puis à majorer la somme obtenue grâce à la formule du double grand crible en dimension 1, donnée par la proposition 2.4.

Théorème 2.7 *Soient α,α_1,α_2 des constantes réelles telles que $\alpha \neq 1$ et $\alpha\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. Soient $M, M_1, M_2, x \geq 1$, et ϕ_m,$\psi_{m_1m_2}$ des nombres complexes tels que $|\phi_m| \leq 1$, $|\psi_{m_1m_2}| \leq 1$. On a alors:*

$$\begin{aligned} S_{\phi,\psi}(M,M_1,M_2) &= \sum_{m\sim M}\sum_{m_1\sim M_1}\sum_{m_2\sim M_2} \phi_m\psi_{m_1m_2} e\Big(x\frac{m^\alpha m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}}{M^\alpha M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}}\Big) \\ &\ll (x^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{2}}(M_1M_2)^{\frac{3}{4}} + M^{\frac{7}{10}}M_1M_2 \\ &\quad + M(M_1M_2)^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}M^{\frac{11}{10}}M_1M_2)(\ln 2MM_1M_2)^2 \end{aligned}$$

Rappelons la preuve de *Fouvry* et *Iwaniec.*

D'après le lemme A.1, on a:

$$|S_{\phi,\psi}| \ll Q^{-1}MM_1M_2(MM_1M_2 + |S(Q_0)|\ln 2Q)$$

pour tout $Q \leq \frac{1}{3}$ et un certain $Q_0 \leq Q$, avec

$$S(Q_0) = \sum_{q\sim Q_0}(1-\frac{q}{Q})\sum_m\sum_{m_1}\sum_{m_2}\phi_{m+q}\bar{\phi}_{m-q}e\Big(x\frac{t(m,q)m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}}{M^\alpha M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}}\Big)$$

et

$$t(m,q) = (m+q)^\alpha - (m-q)^\alpha \sim Q_0M^{\alpha-1}$$

On applique le lemme 2.4 et on obtient:

$$S(Q_0) \ll (\mathcal{A}\mathcal{B}xQ_0M^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

où $\mathcal{A}$ est le nombre de quadruplets $(m_1, m_2, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ tels que:

$$\Big|\Big(\frac{\tilde{m}_1}{m_1}\Big)^{\alpha_1} - \Big(\frac{\tilde{m}_2}{m_2}\Big)^{\alpha_2}\Big|$$

et $\mathcal{B}$ le nombre de quadruplets $(m, \tilde{m}, q, \tilde{q})$ tels que:

$$|t(m,q) - t(\tilde{m},\tilde{q})| \ll x^{-1}M^\alpha$$

Le lemme d'espacement permettant de majorer $\mathcal{A}$ est le lemme 2.1, tandis que le difficile problème d'espacement permettant de majorer $\mathcal{B}$ est donné par la proposition 2 de [9]:

Proposition 2.8 *Soit $\mathcal{B}(M,Q,\Delta)$ le nombre de quadruplets $(m,\tilde{m},q,\tilde{q})$, avec $M \leq m < 2M$, $Q \leq q < 2Q$ et $3Q < M$, tels que:*

$$|t(m,q) - t(\tilde{m},\tilde{q})| \ll \Delta QM^{\alpha-1}$$

alors si $Q \leq M^{\frac{2}{3}}$ on a:

$$\mathcal{B}(M,Q,\Delta) \ll_\alpha (MQ + \Delta M^2Q^2 + M^{-2}Q^6)(\ln 2M)^2$$

On obtient ainsi l'estimation:

$$S(Q_0) \ll Q_0(xM_1M_2)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{MM_1M_2}{xQ_0})^{\frac{1}{2}}(1+\frac{M^2}{x})^{\frac{1}{2}}(\ln 2MM_1M_2)^{\frac{5}{2}}$$

On observe que la plus "mauvaise" valeur pour Q_0 est $Q_0 = Q$. En prenant $Q = \frac{1}{3}M^{\frac{3}{5}}$, on obtient le théorème précédent.

En choisissant optimalement Q_0, grâce au lemme 2 de [25]:

Lemme 2.9 *Soient $M > 0$, $N > 0$, $u_m > 0$, $v_n > 0$, $A_m > 0$, $B_n > 0$ pour $1 \leq m \leq M$, $1 \leq n \leq N$.*

Pour $0 < Q_1 < Q_2$, il existe un q tel que $Q_1 \leq q \leq Q_2$ et:

$$\sum_{m=1}^{M} A_m q^{u_m} + \sum_{n=1}^{N} B_n q^{-v_n} \ll \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} (A_m^{v_n} B_n^{u_m})^{\frac{1}{(u_m+v_n)}} + \sum_{m=1}^{M} A_m Q_1^{u_m} + \sum_{n=1}^{N} B_n Q_2^{-v_n}$$

Liu a obtenu le:

Théorème 2.10 *Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que le théorème précédent, on a pour $M \ll x$ l'estimation:*

$$\begin{aligned} S_{\phi,\psi}(M, M_1, M_2) \ll\ & (M_1M_2)^{\frac{13}{14}} M^{\frac{9}{14}} x^{\frac{1}{14}} + M_1M_2M^{\frac{2}{3}}(1+M^5x^{-3})^{\frac{1}{12}} \\ & + M(M_1M_2)^{\frac{23}{24}} x^{-\frac{4}{24}} + (M_1M_2)^{\frac{23}{24}} M^{\frac{14}{24}} x^{\frac{1}{24}} \\ & + M(M_1M_2)^{\frac{3}{4}} + (M_1M_2)^{\frac{3}{4}} M^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

En appliquant ce théorème, on obtient le:

Théorème 2.11 *On suppose $H(MN)^{\gamma} \gg N$. On a l'estimation:*

$$\begin{aligned} S(0,\gamma;H,M,N) \ll\ & (H(MN)^{\frac{13+\gamma}{14}} N^{-\frac{4}{14}} + H(MN)N^{-\frac{1}{3}} \\ & + H^{\frac{3}{4}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{4}} N^{\frac{1}{12}} + H^{\frac{19}{24}}(MN)^{\frac{23-4\gamma}{24}} N^{\frac{1}{24}} \\ & + H(MN)^{\frac{23+\gamma}{24}} N^{-\frac{9}{24}} + H^{\frac{3}{4}}(MN)^{\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{4}} \\ & + H(MN)^{\frac{3+\gamma}{4}} N^{-\frac{1}{4}})(\ln 2HMN)^3 \end{aligned}$$

2.5 *Poisson*, shift et double grand crible

On suppose dans ce paragraphe que $\alpha = 0$ et $b_n = 1$.

Ceci nous permet d'utiliser sur la variable n la formule sommatoire de *Poisson* (B.2), et après une sommation par parties on obtient:

$$\sum_n e(h(mn)^\gamma) \ll \frac{N}{(H(MN)^\gamma)^{\frac{1}{2}}} \Big| \sum_{v \in I(h,m)} e(c(\gamma)(hm^\gamma v^{-\gamma})^{\frac{1}{1-\gamma}}) \Big| + \ln 2N + \frac{N}{(H(MN)^\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

où $I(h,m)$ est un certain intervalle inclus dans $[\gamma H M^\gamma (2N)^{\gamma-1}, 2\gamma H (2M)^\gamma N^{\gamma-1}]$

La somme d'exponentielles obtenue est ensuite traitée par la méthode expliquée au paragraphe précédent, avec cette différence que la formule de *Perron* (lemme A.2) servira à s'affranchir de la condition $v \in I(h,m)$.

L'estimation donnée par le théorème 2.10 s'appliquera donc à cette somme, avec le choix de paramètres $M_1 \rightsquigarrow H$, $M_2 \rightsquigarrow M$, $M \rightsquigarrow H(MN)^\gamma N^{-1}$, $x \rightsquigarrow H(MN)^\gamma$.

On obtient ainsi l'estimation:

Théorème 2.12 *On suppose $H(MN)^\gamma \gg N$ et $b_n = 1$. On a l'estimation:*

$$\begin{aligned} S(0,\gamma;H,M,N) \ll_\eta\ & (H^{\frac{16}{14}}(MN)^{\frac{13+3\gamma}{14}} N^{-\frac{8}{14}} + H^{\frac{7}{6}}(MN)^{1+\frac{\gamma}{6}} N^{-\frac{2}{3}} \\ & + H^{\frac{4}{3}}(MN)^{1+\frac{\gamma}{3}} N^{-\frac{13}{12}} + H^{\frac{31}{24}}(MN)^{\frac{23+8\gamma}{24}} N^{-\frac{23}{24}} \\ & + H^{\frac{26}{24}}(MN)^{\frac{23+3\gamma}{24}} N^{-\frac{13}{24}} + H^{\frac{5}{4}}(MN)^{\frac{3+2\gamma}{4}} N^{-\frac{3}{4}} \\ & + H(MN)^{\frac{3+\gamma}{4}} N^{-\frac{1}{4}} + H(MN)N^{-1} \\ & + H^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{2}})(HMN)^\eta \end{aligned}$$

Chapitre 3

La partie fractionnaire de p^θ

3.1 Introduction

Soient $x > 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \delta \leq 1$.

On s'intéresse au nombre de premiers $p \leq x$ tels que $\{p^\theta\} < \delta$.

On voudrait, pour des valeurs de θ et δ convenables, montrer que l'on a l'égalité:

$$\#\{p \leq x \mid \{p^\theta\} < \delta\} = \delta\pi(x)(1 + o(1))$$

Balog [1] et [2] a démontré par des méthodes d'analyse complexe le:

Théorème 3.1 *Pour θ arbitrairement fixé dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$, le nombre de premiers $p \leq x$ satisfaisant $\{p^\theta\} < \delta$ est*

$$\delta\pi(x) + O(x^{\frac{1+\theta}{2}}\omega^2(\ln x)^8 + \frac{\delta x}{\omega \ln x})$$

uniformément pour $0 \leq \delta \leq 1$ et $1 \leq \omega \leq x^{\frac{1}{25}}$.

En utilisant des méthodes de sommes d'exponentielles, et en particulier le double grand crible, nous allons prouver très simplement les théorèmes suivants:

Théorème 3.2 *Soient $0 < \theta < 1$ et $\varepsilon > 0$. On a l'égalité:*

$$\#\{p \leq x \mid \{p^\theta\} < \delta\} = \delta\pi(x) + O_{\theta,\varepsilon}(x^{\max(1-\theta,\frac{1+\theta}{2},\frac{3}{4})+4\varepsilon} + \delta x^{1-\varepsilon})$$

uniformément pour $0 \leq \delta \leq 1$.

Théorème 3.3 *Soient* $0 < \theta < 1$ *et* $\varepsilon > 0$. *On a l'égalité:*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \{n^\theta\} < \delta}} \Lambda(n) = \delta\psi(x) + O_{\theta,\varepsilon}(x^{\max(1-\theta, \frac{1+\theta}{2}, \frac{3}{4})+4\varepsilon} + \delta x^{1-\varepsilon})$$

uniformément pour $0 \leq \delta \leq 1$.

Théorème 3.4 *Soient* $(\alpha_m)_{m \sim M}$, $(\beta_n)_{n \sim N}$, *avec* $MN = x$, $|\alpha_m|, |\beta_n| \leq 1$. *Soit* $\eta > 0$.

On a les égalités:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x < mn \leq 2x \\ \{(mn)^\theta\} < \delta}} \alpha_m \beta_n &= \delta \sum_{x < mn \leq 2x} \alpha_m \beta_n \\
&\quad + O_{\theta,\eta}((MN)^{\max(1-\theta, \frac{1+\theta}{2}, \frac{3}{4})+\eta} + \delta(MN)^{1-\frac{\eta}{2}} + (MN)^{1+\eta} N^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}} N^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\theta}{2}+\frac{\eta}{2}}) \\
\sum_{\substack{x < mn \leq 2x \\ \{(mn)^\theta\} < \delta}} \alpha_m &= \delta \sum_{x < mn \leq 2x} \alpha_m \\
&\quad + O_{\theta,\eta}((MN)^{\max(1-\theta, \frac{1+\theta}{2}, \frac{3}{4})+\eta} + \delta(MN)^{1-\frac{\eta}{2}} + \delta^{-\frac{1}{2}}(MN)^{1+\frac{\theta}{2}+\frac{3\eta}{2}} N^{-1})
\end{aligned}$$

uniformément pour $0 < \delta \leq 1$.

La conséquence la plus importante du théorème 3.2 est le

Corollaire 3.5 *Soit* $0 < \theta < 1$. *Alors on a:*

$$\#\{p \leq x \mid \{p^\theta\} < \delta\} = \delta\pi(x)(1 + O(x^{-\varepsilon}))$$

uniformément pour

$$\delta \geq x^{-\min(\theta, \frac{1-\theta}{2}, \frac{1}{4})+5\varepsilon}$$

Balog [1] a montré un corollaire similaire, obtenu à partir du théorème 3.1 en prenant $\omega = x^\varepsilon$.

On voit donc que l'intervalle $]0,1[$ est découpé en trois:

- sur $]0, \frac{1}{4}]$, la condition précédente devient $\delta \geq x^{-\theta+3\varepsilon}$,

- sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, la condition précédente devient $\delta \geq x^{-\frac{1}{4}+3\varepsilon}$,
- sur $[\frac{1}{2}, 1[$, la condition précédente devient $\delta \geq x^{-\frac{1-\theta}{2}+3\varepsilon}$.

D'autre part, pour θ au voisinage de 1, ce résultat pourrait être amélioré en employant d'autre techniques que celles employées dans ce chapitre: l'identité de *Heath-Brown* (voir en annexe E.2), et les théorèmes 2.11 et 2.12, et l'étude, qui ressemblerait beaucoup au chapitre 5, ne sera donc pas répétée ici.

3.2 Réduction du problème

Par une sommation par parties, il est clair que le théorème 3.3 implique le théorème 3.2.

Nous allons maintenant montrer que la preuve du théorème 3.3 se réduit à prouver le théorème 3.4.

Pour $0 < \theta < 1$, définissons:

$$f(\theta) = \max(1-\theta, \frac{1+\theta}{2}, \frac{3}{4})$$

Pour prouver le théorème 3.3, il suffit d'établir le:

Lemme 3.6 *Soient* $0 < \theta < 1$ *et* $\varepsilon > 0$. *On a l'égalité:*

$$\sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ \{n^\theta\}<\delta}} \Lambda(n) = \delta(\psi(2x) - \psi(x)) + O_{\theta,\varepsilon}(x^{f(\theta)+\varepsilon} + \delta x^{1-\frac{\varepsilon}{4}})$$

uniformément pour $0 \leq \delta \leq 1$.

En effectuant un découpage dyadique de l'intervalle $[1, x]$, et en appliquant le lemme précédent pour chaque intervalle obtenu, on est amené à sommer les termes d'erreur, ce qui revient à sommer une progression géométrique, d'où le théorème 3.3.

Remarquons ensuite qu'il suffit de montrer le lemme précédent pour:

$$\delta \geq x^{f(\theta)-1+\varepsilon}$$

En effet, pour $\delta < x^{f(\theta)-1+\varepsilon}$, on doit montrer l'estimation:

$$\sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ \{n^\theta\}<\delta}} \Lambda(n) \ll_{\theta,\varepsilon} x^{f(\theta)+\varepsilon}$$

Cette estimation découle de l'inégalité:

$$\sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ \{n^\theta\}<\delta}} \Lambda(n) \leq \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ \{n^\theta\}<\delta_0}} \Lambda(n)$$

pour $\delta_0 = x^{f(\theta)-1+\varepsilon}$, et de l'étude du cas $\delta = \delta_0$, que nous allons traiter: nous supposons maintenant $\delta \geq \delta_0$.

On utilise à présent l'identité de *Vaughan* (voir en Annexe E.1), ce qui montre que la démonstration du lemme 3.6 se réduit à prouver le:

Lemme 3.7 *Soient* $(\alpha_m)_{m\sim M}$, $(\beta_n)_{n\sim N}$, *avec* $MN = x$, $|\alpha_m|, |\beta_n| \leq 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$.

- *On a l'égalité:*

$$\sum_{\substack{x<mn\leq 2x \\ \{(mn)^\theta\}<\delta}} \alpha_m\beta_n = \delta \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m\beta_n + O_{\theta,\varepsilon}((MN)^{f(\theta)+\varepsilon} + \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}})$$

uniformément pour $\delta \geq \delta_0$ *et* $(MN)^{\frac{1}{2}} \ll N \ll (MN)^{\frac{2}{3}}$.

- *On a l'égalité:*

$$\sum_{\substack{x<mn\leq 2x \\ \{(mn)^\theta\}<\delta}} \alpha_m = \delta \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m + O_{\theta,\varepsilon}((MN)^{f(\theta)+\varepsilon} + \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}})$$

uniformément pour $\delta \geq \delta_0$ *et* $N \gg (MN)^{\frac{2}{3}}$.

Ce lemme découle directement du Theorème 3.4, en utilisant l'inégalité $\delta \geq \delta_0$.

En effet, pour les sommes de type II, on a, pour η convenable, et $(MN)^{\frac{1}{2}} \ll N \ll (MN)^{\frac{2}{3}}$:

- trivialement:

$$(MN)^{f(\theta)+\eta} \leq (MN)^{f(\theta)+\varepsilon}$$

- trivialement:

$$\delta(MN)^{1-\frac{\eta}{2}} \leq \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}}$$

- tout d'abord puisque $N \gg (MN)^{\frac{1}{2}}$:

$$(MN)^{1+\eta}N^{-\frac{1}{2}} \ll (MN)^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$$

donc:

$$(MN)^{1+\eta}N^{-\frac{1}{2}} \ll (MN)^{f(\theta)+\varepsilon}$$

- tout d'abord puisque $N \ll (MN)^{\frac{2}{3}}$:

$$\delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}}N^{\frac{1}{2}} \ll \delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{5}{6}+\frac{\eta}{2}}$$

et donc puisque $\delta \geq \delta_0 \gg (MN)^{-\frac{1}{3}+2\varepsilon+\eta}$:

$$\delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}}N^{\frac{1}{2}} \ll \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}}$$

- puisque $\delta \geq \delta_0 \gg (MN)^{-\theta+\varepsilon}$ on a:

$$\delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\theta}{2}+\frac{\eta}{2}} \ll \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}}$$

Pour les sommes de type I, on a, pour η convenable, et $N \gg (MN)^{\frac{2}{3}}$:

- trivialement:

$$(MN)^{f(\theta)+\eta} \leq (MN)^{f(\theta)+\varepsilon}$$

- trivialement:

$$\delta(MN)^{1-\frac{\eta}{2}} \leq \delta(MN)^{1-\frac{\varepsilon}{4}}$$

- puisque $N \gg (MN)^{\frac{2}{3}}$ on a:

$$\delta^{-\frac{1}{2}}(MN)^{1+\frac{\theta}{2}+\frac{3\eta}{2}}N^{-1} \ll \delta^{-\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{1}{3}+\frac{\theta}{2}+\frac{3\eta}{2}}$$

si bien que:

$$\delta^{-\frac{1}{2}}(MN)^{1+\frac{\theta}{2}+\frac{3\eta}{2}}N^{-1} \ll \delta(MN)^{1-\frac{\epsilon}{4}}$$

pourvu que:

$$\delta \gg (MN)^{\frac{\theta}{3}-\frac{4}{9}+\eta+\frac{\epsilon}{6}}$$

ce qui est assuré par la condition $\delta \geq \delta_0$.

Il nous reste donc à prouver le théorème 3.4.

3.3 Passage aux sommes d'exponentielles

Pour x réel, $0 < \delta < 1$, on a la caractérisation:

$$\{x\} < \delta \Longleftrightarrow [x] - [x-\delta] = 1$$

On a:

$$\sum_{\substack{x<mn\leq 2x \\ \{(mn)^\theta\}<\delta}} \alpha_m\beta_n = \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m\beta_n([(mn)^\theta] - [(mn)^\theta - \delta])$$

d'où l'égalité:

$$\sum_{\substack{x<mn\leq 2x \\ \{(mn)^\theta\}<\delta}} \alpha_m\beta_n = \delta \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m\beta_n - \mathcal{E}$$

où:

$$\mathcal{E} = \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m\beta_n(\{(mn)^\theta\} - \{(mn)^\theta - \delta\})$$

On utilise à présent le développement en série de *Fourier* de la fonction partie fractionnaire donné par D.1. On a donc:

$$\mathcal{E} = \sum_{x<mn\leq 2x} \alpha_m\beta_n\Big(\sum_{0<|h|<H} \frac{e(h(mn)^\theta) - e(h((mn)^\theta - \delta))}{2i\pi h} + E(mn,\theta,\delta)\Big)$$

où

$$E(mn,\theta,\delta) \ll \min(1, \frac{1}{H\| (mn)^\theta \|}) + \min(1, \frac{1}{H\| (mn)^\theta - \delta \|})$$

En regroupant les variables mn en une seule et en utilisant l'estimation D.5, avec le choix $H = \delta^{-1}x^\eta$, la contribution des termes $E(mn,\theta,\delta)$ est majorée par

$$\delta(MN)^{1-\frac{\eta}{2}} + (MN)^{1-\theta} + \delta^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{\theta}{2}+\frac{\eta}{2}}$$

Les deux derniers termes sont absorbé par les autres termes d'erreur des sommes de type I et II. On retrouve par contre le premier terme dans le terme d'erreur des sommes de type II comme dans celui des sommes de type I.

Par une sommation par parties, on se ramène ensuite à estimer:

$$\delta \sum_{x<mn\leq 2x} \sum_{0<|h|<H} \alpha_m \beta_n e(h(mn)^\theta)$$

c'est-à-dire à majorer des sommes de type II si β_n est quelconque, et des sommes de type I si $\beta_n = 1$.

3.4 Utilisation du double grand crible

Sommes de type II

On utilise le théorème 2.6. On est ramené à évaluer les expressions suivantes:

$$\delta H(MN)^{\frac{1+\theta}{2}}$$

$$\delta(HMN)N^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta(HMN)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta H^{\frac{1}{2}}(MN)^{1-\frac{\theta}{2}}$$

En remplaçant H par sa valeur, on retrouve immédiatement le terme d'erreur des sommes de type II du théorème 3.4.

Sommes de type I

On applique une majoration élémentaire sous la forme du lemme D.1 avec $(p,q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\lambda = N$, $\gamma = \theta$. On est ramené à estimer:

$$\delta HM((HM^\theta)^{-1}N^{1-\theta} + (HM^\theta N^\theta)^{\frac{1}{2}})$$

En remplaçant H par sa valeur, on retrouve immédiatement le terme d'erreur des sommes de type I du théorème 3.4.

3.5 Commentaires

Insistons une fois de plus sur la simplicité extrême de cette démonstration: après une préparation tout à fait classique, il suffit d'appliquer le double grand crible.

De plus, la forme du théorème 3.4 nous assure que nous sommes en mesure d'établir, dans le même ordre d'idées, l'équirépartition de beaucoup de suites définies par des contraites conduisant à des sommes de type I ou II, par exemple:

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \{(n)^\theta\}<\delta}} d(n), \sum_{\substack{n\leq x\\ \{(n)^\theta\}<\delta}} d_3(n), \ldots, \sum_{\substack{n\leq x\\ \{(n)^\theta\}<\delta}} d_k(n)$$

ou bien:

$$\sum_{\{(p_1p_2)^\theta\}<\delta} = \delta(\pi(2P_1) - \pi(P_1))(\pi(2P_2) - \pi(P_2))$$

où la sommation est faite pour $P_1 < p_1 \leq 2P_1$ et $P_2 < p_2 \leq 2P_2$ avec P_1 et P_2 convenablement choisis.

Chapitre 4

Sur un théorème hybride de Balog - Friedlander

4.1 Introduction

Le théorème de Vinogradov [32] donne une formule asymptotique pour le nombre de représentations de tout entier impair N suffisamment grand comme somme de trois nombres premiers.

Ceci peut s'exprimer (voir [31]) sous la forme:

$$R(N) = \sum_{p_1+p_2+p_3=N} (\ln p_1)(\ln p_2)(\ln p_3) = \frac{1}{2}\sigma(N)N^2 + O_A(\frac{N^2}{(\ln N)^A})$$

avec $A > 0$ arbitraire et $\sigma(N)$ la série singulière:

$$\sigma(N) = \prod_{p/N} (1 - \frac{1}{(p-1)^2}) \prod_{p\not/N} (1 + \frac{1}{(p-1)^3})$$

Balog et *Friedlander* [3] ont démontré que l'on pouvait se restreindre à des nombres premiers de *Piatetski-Shapiro*. Plus précisément, ils ont démontré le théorème:

Théorème 4.1 *Soient* γ_1, γ_2, γ_3 *tels que* $0 < \gamma_i \leq 1$ *et:*

$$\begin{aligned} 9(1-\gamma_3) &< 1 \\ 9(1-\gamma_2) + 6(1-\gamma_3) &< 1 \\ 9(1-\gamma_1) + 6(1-\gamma_2) + 6(1-\gamma_3) &< 1 \end{aligned}$$

alors pour tout $A > 0$ on a:

$$\begin{aligned} T(N) &= \frac{1}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ p_i=[n_i^{\frac{1}{\gamma_i}}]}} p_1^{1-\gamma_1}(\ln p_1)p_2^{1-\gamma_2}(\ln p_2)p_3^{1-\gamma_3}(\ln p_3) \\ &= \frac{1}{2}\sigma(N)N^2 + O_A(\frac{N^2}{(\ln N)^A}) \end{aligned}$$

Ils en déduisent le corollaire:

Corollaire 4.2 *Pour tout $1 \leq c < \frac{21}{20} = 1.05\ldots$, les nombres premiers de la forme $[n^c]$ ont la propriété que tout entier impair suffisamment grand peut s'écrire comme somme de trois d'entre eux.*

Nous montrerons dans ce chapitre que l'on peut améliorer les conditions du théorème précédent, avec comme conséquence une extension à l'intervalle $1 \leq c < \frac{199}{188} = 1.05851\ldots$ du corollaire.

4.2 Réduction du problème

La démonstration de *Balog* et *Friedlander* consiste à se ramener au résultat de *Vinogradov*. En fait, ils montrent que pour ε assez petit, on a $T(N) = R(N) + O(N^{2-\varepsilon})$.

En écrivant pour $g(\alpha) = \sum_{p<N} e(\alpha p)\ln p$, on a:

$$R(N) = \int_0^1 g^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

D'autre part pour:

$$f_i(\alpha) = \frac{1}{\gamma_i}\sum_{p<N} e(\alpha p)p^{1-\gamma_i}\ln p([-p^{\gamma_i}] - [-(p+1)^{\gamma_i}])$$

on a:

$$T(N) = \int_0^1 f_1(\alpha)f_2(\alpha)f_3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

si bien que:

$$T(N)-R(N) \ll (\sup_\alpha |f_1-g|)\int_0^1 |f_2f_3|d\alpha + (\sup_\alpha |f_2-g|)\int_0^1 |gf_3|d\alpha + (\sup_\alpha |f_3-g|)\int_0^1 |g|^2 d\alpha$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'identité de *Parseval* ainsi que l'estimation de *Deshouillers* [8] (conséquence directe d'une majoration de crible):

Proposition 4.3 *Pour tout* $0 < \gamma \leq 1$, *on a l'estimation:*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p=[n^{\frac{1}{\gamma}}]}} 1 \ll \frac{x^{\gamma}}{\ln x}$$

ils en déduisent que le théorème 4.1 découle du:

Théorème 4.4 *Soient* γ, δ *tels que* $0 < \gamma \leq 1$, $0 < \delta$ *et:*

$$9(1-\gamma) + 12\delta < 1$$

Alors, uniformément en α, *on a:*

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{\substack{p<N \\ p=[n^{\frac{1}{\gamma}}]}} e(\alpha p) p^{1-\gamma} \ln p = \sum_{p<N} e(\alpha p) \ln p + O(N^{1-\delta})$$

où la constante implicite dépend au plus de γ *et de* δ.

Pour démontrer le théorème 4.1, *Balog* et *Friedlander* ont prouvé qu'il suffisait d'appliquer le théorème précédent aux couples (γ_i, δ_i), avec $\delta_3 = 0$, $\delta_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma_3)$ et $\delta_1 = \frac{1}{2}(1-\gamma_2) + \frac{1}{2}(1-\gamma_3)$, γ_1,γ_2 et γ_3 étant fixés.

Il reste donc à établir le théorème 4.4. On se ramène à un problème de sommes d'exponentielles: il faut montrer pour tout $1 \leq x \leq N$, $\varepsilon > 0$ assez petit, $H_0 = x^{1-\gamma+\delta+\varepsilon}$, $H_1 = x^{1-\gamma}$, $0 \leq u \leq 1$, $H \leq H_0$:

$$\min(1, \frac{H_1}{H}) \sum_{h \sim H} |\sum_{k \sim x} \Lambda(k) e(\alpha k + h(k+u)^{\gamma})| \ll x^{1-\delta-\varepsilon}$$

Par une identité combinatoire inspirée de celle de *Heath-Brown* (voir en Annexe), *Balog* et *Friedlander* ont prouvé qu'on est ramené à l'estimation de sommes de type I et de sommes de type II:

$$S(\alpha, \gamma; H, M, N) = \sum_{h \sim H} \sum_{m \sim M} \sum_{n \sim \frac{MN}{m}} \varepsilon_h a_m b_n e(\alpha mn + h(mn)^{\gamma})$$

avec $b_n = 1$ et $M \leq x^a$ pour les sommes de type I, b_n quelconque et $x^b \leq M \leq x^c$ pour les sommes de type II, avec les conditions combinatoires: $b < \frac{2}{3}$, $1 - c < c - b$, $1 - a < \frac{c}{2}$.

Dans ce problème, ce sont les sommes de type I qui imposent les restrictions finales. Nous allons donc améliorer le traitement des sommes de type I, ce qui aura pour conséquence une amélioration du théorème 4.4 et du théorème 4.1, ce qui entraînera un élargissement de l'intervalle de validité du corollaire.

4.3 Traitement des sommes de type I

Pour $H_0 = (MN)^{1-\gamma+\delta+\epsilon}$, $H_1 = (MN)^{1-\gamma}$, $1 \leq H \leq H_0$, nous voulons montrer l'estimation:

$$\min(1, \frac{H_1}{H}) S(\alpha, \gamma; H, M, N) \ll (MN)^{1-\delta-\epsilon}$$

où $S(\alpha, \gamma; H, M, N)$ est la somme étudiée au chapitre 2 avec: $b_n = 1$.

D'après le théorème 2.3, avec une paire d'exposants (p, q) telle que $4p + 1 - 2q > 0$ et $H' \geq H$, il suffit d'avoir les estimations:

$$\begin{aligned}
H'^{-\frac{2p+1}{2p+3}} (MN)^{\frac{2-\gamma(2p+1)}{2p+3}} N^{\frac{4p+1-2q}{2p+3}} &\leq \frac{N}{2} \\
\min(1, \frac{H_1}{H}) H'^{\frac{6p+7}{4p+6}} (MN)^{\frac{\gamma(2p+1)+4p+4}{4p+6}} N^{-\frac{4p+1-2q}{4p+6}} &\ll (MN)^{1-\delta-\epsilon-\eta} \\
\min(1, \frac{H_1}{H}) H'^{\frac{5+2p}{4}} (MN)^{\frac{2+\gamma(2p+1)}{4}} N^{\frac{2q-4p-1}{4}} &\ll (MN)^{1-\delta-\epsilon-\eta} \\
\min(1, \frac{H_1}{H}) H' (MN)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} &\ll (MN)^{1-\delta-\epsilon-\eta} \\
\min(1, \frac{H_1}{H}) H'^{\frac{4\xi+5}{4p+6}} (MN)^{\frac{4p+5-\gamma}{4p+6}} N^{-\frac{1+q-p}{4p+6}} &\ll (MN)^{1-\delta-\epsilon-\eta}
\end{aligned}$$

Choisissons pour $H' = \frac{H_1}{\min(1, \frac{H_1}{H})}$. On a donc $H' \geq H_1$.

Pour tout $\beta \in]0, 1]$, on a l'inégalité:

$$\min(1, \frac{H_1}{H}) H'^{\beta} \leq {H_1}^{\beta}$$

et pour tout $\beta > 1$, on a l'inégalité:

$$\min(1, \frac{H_1}{H}) H'^{\beta} \leq H_1 {H_0}^{\beta-1}$$

Il suffit d'avoir les estimations:

$$\begin{aligned}
H_1{}^{-\frac{2p+1}{2p+3}}(MN)^{\frac{2-\gamma(2p+1)}{2p+3}}N^{\frac{4p+1-2q}{2p+3}} &\leq \frac{N}{2}\\
H_1H_0{}^{\frac{2p+1}{4p+6}}(MN)^{\frac{\gamma(2p+1)+4p+4}{4p+6}}N^{-\frac{4p+1-2q}{4p+6}} &\ll (MN)^{1-\delta-\varepsilon-\eta}\\
H_1H_0{}^{\frac{2p+1}{4}}(MN)^{\frac{2+\gamma(2p+1)}{4}}N^{\frac{2q-4p-1}{4}} &\ll (MN)^{1-\delta-\varepsilon-\eta}\\
H_1(MN)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} &\ll (MN)^{1-\delta-\varepsilon-\eta}\\
H_1{}^{\frac{4p+5}{4p+6}}(MN)^{\frac{4p+5-\gamma}{4p+6}}N^{-\frac{1+q-p}{4p+6}} &\ll (MN)^{1-\delta-\varepsilon-\eta}
\end{aligned}$$

On remplace H_0 et H_1 par leurs valeurs et l'on obtient:

$$\begin{aligned}
N &\gg (MN)^{\frac{1-2p}{2+2q-2p}}\\
N &\gg (MN)^{\frac{6p+5-\gamma(4p+6)+\delta(6p+7)+10(\varepsilon+\eta)}{4p+1-2q}}\\
N &\gg (MN)^{\frac{2p+3-4\gamma+\delta(2p+5)+6(\varepsilon+\eta)}{4p+1-2q}}\\
N &\ll (MN)^{2\gamma-1-2\delta-2(\varepsilon+\eta)}\\
N &\ll (MN)^{\frac{-4p-4+\gamma(4p+6)-\delta(4p+6)-8(\varepsilon+\eta)}{4p+1-2q}}
\end{aligned}$$

La première condition est satisfaite pourvu que $N > (MN)^{\frac{1}{3}}$.

La deuxième condition implique la troisième.

Pour nous affranchir des deux dernières conditions, nous utiliserons une majoration élémentaire par le théorème 5.9 de [28]:

Lemme 4.5 *Si f est de classe C^2 avec $0 < \lambda_2 \leq f''(x) \leq h\lambda_2$ (ou $0 < \lambda_2 \leq -f''(x) \leq h\lambda_2$) sur $[a,b]$, alors on a:*

$$\sum_{a<n\leq b} \ll h(b-a+1)\lambda_2^{\frac{1}{2}} + \lambda_2^{-\frac{1}{2}}$$

L'estimation cherchée est vraie dès que:

$$(MN)^{1+\frac{\gamma}{2}}H_1H_0^{\frac{1}{2}}N^{-1} + (MN)^{1-\frac{\gamma}{2}}H_1^{\frac{1}{2}} \ll (MN)^{1-\delta-\varepsilon}$$

donc dès que:

$$2(1-\gamma) + 2\delta < 1$$

et:

$$N \gg (MN)^{\frac{3-2\gamma+3\delta+3\epsilon}{2}}$$

Ceci nous libère de la quatrième condition pourvu que:

$$6(1-\gamma)+7\delta < 1$$

et de la cinquième condition pourvu que:

$$(6p+2q+14)(1-\gamma)+(5p+3q+15)\delta < p-q+3$$

Il nous reste à traiter la deuxième condition, qui correspond au terme principal et devrait donc être la plus contraignante. Nous devons vérifier la condition résultant de l'étude combinatoire:

$$1-a < \frac{c}{2}$$

Ici, cela nous donne:

$$\frac{6p+5-\gamma(4p+6)+\delta(6p+7)}{4p+1-2q} < \frac{\gamma-2\delta}{2}$$

ce qui revient à:

$$(12p-2q+13)(1-\gamma)+(10p-2q+8)\delta < 3-2q$$

En résumé, nous avons établi le

Théorème 4.6 *Soient γ, δ tels que $0 < \gamma \leq 1$, $0 < \delta$. Soit (p,q) une paire d'exposants. On suppose:*

$$\begin{aligned} 6(1-\gamma)+7\delta &< 1 \\ (6p+2q+14)(1-\gamma)+(5p+3q+15)\delta &< 3+p-q \\ (12p-2q+13)(1-\gamma)+(10p-2q+8)\delta &< 3-2q \\ 4p+1-2q &> 0 \end{aligned}$$

Alors, uniformément en α, on a:

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{\substack{p<N \\ p=[n^{\frac{1}{\gamma}}]}} e(\alpha p) p^{1-\gamma} \ln p = \sum_{p<N} e(\alpha p) \ln p + O(N^{1-\delta})$$

où la constante implicite dépend au plus de γ et de δ.

γ_1,γ_2 et γ_3 étant fixés, il suffit de vérifier les conditions précédentes pour les couples (γ_i, δ_i), avec $\delta_3 = 0$, $\delta_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma_3)$ et $\delta_1 = \frac{1}{2}(1-\gamma_2) + \frac{1}{2}(1-\gamma_3)$.

Par exemple si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$, on a $\delta_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma)$ et $\delta_1 = 1-\gamma$, donc il suffit de vérifier les conditions pour $(\gamma, \delta) = (\gamma, 1-\gamma)$, et on obtient les conditions:

$$\begin{aligned} c &< \frac{13}{12} \\ c &< \frac{11p+5q+29}{10p+6q+26} \\ c &< \frac{32p-6q+29}{32p-4q+26} \\ 0 &< 4p+1-2q \end{aligned}$$

4.4 Conclusion

Avec la paire d'exposants $(\frac{11}{82}, \frac{57}{82})$, on obtient les conditions:

$$\begin{aligned} c &< \frac{13}{12} = 1.083333\ldots \\ c &< \frac{348}{323} = 1.077399\ldots \\ c &< \frac{199}{188} = 1.05851\ldots \\ 0 &< 4p+1-2q = \frac{6}{41} \end{aligned}$$

Nous améliorons ainsi le résultat de Balog-Friedlander: $c < \frac{21}{20} = 1.05$, qui devient $c < \frac{199}{188} = 1.05851\ldots$.

Il ne fait aucun doute que l'on peut encore améliorer ce résultat en utilisant une paire d'exposants plus sophistiquée.

Chapitre 5

Le théorème de Piatetski-Shapiro

5.1 La suite de *Piatetski-Shapiro*

Nous allons rassembler ici quelques propriétés élémentaires de la suite de *Piatetski-Shapiro.*

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Soit $c > 1, \gamma = \frac{1}{c}$ et $x > 1$.

On note: $\pi_c(x) = \#\{n \leq x \mid [n^c] \in \mathcal{P}\}$.

On pense que l'équivalence:

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty$$

est vraie pour tout $c > 0$, $c \neq 2, 3, 4, \ldots$.

Théorème 5.1 *Pour* $c < \frac{6121}{5302} = 1.15447001\ldots$, *on a l'équivalence:*

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty$$

Donnons une caractérisation plus exploitable de $\pi_c(x)$.

On a $p = [n^c]$ si et seulement si $p^\gamma \leq n < (p+1)^\gamma$, c'est-à-dire si et seulement si $[-p^\gamma] - [-(p+1)^\gamma] = 1$.

Ceci nous permet d'affirmer:

$$\pi_c(x) = \sum_{p \leq x^c} ([-p^\gamma] - [-(p+1)^\gamma]) + O(1)$$

où le terme en $O(1)$ correspond à un effet de bord éventuel de l'intervalle de sommation.

Nous pouvons alors faire intervenir la fonction partie fractionnaire:

$$\pi_c(x) = \sum_{p \leq x^c} ((p+1)^\gamma - p^\gamma) - \sum_{p \leq x^c} (\{-p^\gamma\} - \{-(p+1)^\gamma\}) + O(1)$$

D'autre part, le théorème des nombres premiers implique:

$$\sum_{p \leq x^c} ((p+1)^\gamma - p^\gamma) = \frac{x}{c \ln x} + O(\frac{x}{(\ln x)^2})$$

Il reste donc à montrer l'estimation:

$$\sum_{p \leq x^c} (\{-p^\gamma\} - \{-(p+1)^\gamma\}) \ll \frac{x}{(\ln x)^2}$$

L'équivalent recherché découlera donc, pour $c < 2$, de la preuve de l'estimation:

$$\sum_{a \sim A} \Lambda(a)(\{-a^\gamma\} - \{-(a+1)^\gamma\}) \ll \frac{A^\gamma}{\ln A}$$

On utilise maintenant le développement en séries de *Fourier* donné par l'estimation D.1 qui nous ramène à montrer les estimations:

$$\sum_{0<|h|<H} \sum_{a \sim A} \Lambda(a) \frac{e(h(a+1)^\gamma) - e(ha^\gamma)}{h} \ll \frac{A^\gamma}{\ln A}$$

$$\sum_{a \sim A} \min(1, \frac{1}{H \| a^\gamma \|}) \ll \frac{A^\gamma}{(\ln A)^2}$$

Cette dernière estimation découle immédiatement de l'estimation D.5 pour $H = A^{1-\gamma+\eta}$.

Quant à l'autre estimation, une sommation par parties permet de la ramener à montrer:

$$\sum_{a \sim A} \Lambda(a) F(a) \ll \frac{A^\gamma}{\ln A}$$

où:

$$F(a) = \sum_{0<h \leq H} \varepsilon_h e(ha^\gamma)$$

avec $|\varepsilon_h| \leq 1$.

Il ne reste alors plus qu'à utiliser une identité combinatoire pour se ramener à la majoration de sommes de type I et de sommes de type II. Nous choisirons l'identité de *Heath-Brown* (voir en Annexe le paragraphe E.2) qui donne le meilleur résultat ici.

Nous devons établir les estimations suivantes:

- pour les sommes de type II:

$$\sum_h \varepsilon_h \sum_m \sum_n a_m b_n e(h(mn)^\gamma) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$

- pour les sommes de type I:

$$\sum_h \varepsilon_h \sum_m \sum_n a_m e(h(mn)^\gamma) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$

ce qui va nous permettre d'utiliser les estimations de $S(0,\gamma;H,M,N)$ établies au chapitre 2.

5.2 Sommes d'exponentielles

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ deux réels que l'on choisira suffisamment petits.

Nous devons estimer $S(0,\gamma;H,M,N)$ définie au chapitre 2 pour $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$, dans le but d'obtenir $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ pour $(MN)^{a_1} \ll N \ll (MN)^{a_2}$, ce qui correspond à la majoration des sommes de type II.

D'autre part lorsque $b_n = 1$, nous devons prouver $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ pour $(MN)^{a_3} \ll N$.

Ensuite le théorème sera acquis pourvu que les restrictions combinatoires de l'identité de *Heath-Brown* soient satisfaites:$a_3 \geq 2a_1$, $2a_3 + a_1 \geq 1$, $3a_2 \geq 1$

5.2.1 Sommes de type II

Nous appliquons le théorème 2.2, et nous obtenons les conditions:

$$N \ll (MN)^\gamma$$

$$H^{\frac{1}{2}}(MN)N^{-\frac{1}{2}} \ll (MN)^{1-\varepsilon-\eta}$$
$$H(MN)^{\frac{1+\gamma p+q+p}{2(1+p)}}N^{\frac{1-q}{2(1+p)}} \ll (MN)^{1-\varepsilon-\eta}$$

ce qui nous ramène à:

$$(MN)^{1-\gamma+2\varepsilon+\eta} \ll N \ll (MN)^{\frac{\gamma(2+p)-(1+p+q)-3\varepsilon-6\eta}{1-q}}$$

On a donc le:

Théorème 5.2 *L'estimation* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *est vraie dès que:*

$$H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$$

et:

$$(MN)^{1-\gamma+3\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{\frac{\gamma(2+p)-(1+p+q)-4\varepsilon}{1-q}}$$

5.2.2 Sommes de type I

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que $(MN)^{1-\gamma+\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{\gamma-\varepsilon}$. Comme $H \geq 1$, la condition $N \ll H(MN)^{\gamma}$ sera toujours vérifiée, ainsi que la condition symétrique $M \ll H(MN)^{\gamma}$.

Toute somme de type I peut clairement être considérée comme une somme de type II. Nous allons commencer par établir des résultats ne nécessitant pas que $b_n = 1$, et nous préciserons plus loin le moment où cette condition devient nécessaire.

En appliquant le théorème 2.11, nous voyons que l'estimation $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ est satisfaite dès qu'on a les conditions:

$$H(MN)^{\frac{13+\gamma}{14}}N^{-\frac{4}{14}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$
$$H(MN)N^{-\frac{1}{3}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$
$$H^{\frac{3}{4}}(MN)^{1-\frac{\gamma}{4}}N^{\frac{1}{12}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$
$$H^{\frac{19}{24}}(MN)^{\frac{23-4\gamma}{24}}N^{\frac{1}{24}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$
$$H(MN)^{\frac{23+\gamma}{24}}N^{-\frac{9}{24}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$

$$H^{\frac{3}{4}}(MN)^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{4}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$
$$H(MN)^{\frac{3+\gamma}{4}}N^{-\frac{1}{4}} \ll (MN)^{1-\varepsilon}$$

le cas le pire étant $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$, d'où les conditions:

$$N \gg (MN)^{\frac{13}{4}(1-\gamma)+\frac{14}{4}(\varepsilon+\eta)}$$
$$N \gg (MN)^{3(1-\gamma)+3(\varepsilon+\eta)}$$
$$N \ll (MN)^{12\gamma-9-12\varepsilon-9\eta}$$
$$N \ll (MN)^{23\gamma-18-24\varepsilon-19\eta}$$
$$N \gg (MN)^{\frac{23}{9}(1-\gamma)+\frac{24}{9}(\varepsilon+\eta)}$$
$$N \ll (MN)^{3\gamma-2-4\varepsilon-3\eta}$$
$$N \gg (MN)^{3(1-\gamma)+\varepsilon+\eta}$$

Il nous reste à éliminer les conditions inutiles.

Les inégalités $\frac{23}{9} < 3 < \frac{13}{4}$ indiquent que la première condition implique la deuxième, la cinquième et la septième.

D'autre part pour $\gamma > \frac{4}{5}$, on a les inégalités:

$$3\gamma - 2 < 12\gamma - 9$$
$$3\gamma - 2 < 23\gamma - 18$$

si bien que la sixième condition implique la troisième et la quatrième.

Enfin, pour que le résultat soit intéressant, il faut que:

$$\frac{13}{4}(1-\gamma) < 3\gamma - 2$$

ce qui est vrai pour $\gamma > \frac{21}{25}$.

Nous pouvons donc énoncer le:

Théorème 5.3 *Pour $\gamma > \frac{21}{25} = 0.84$, on a $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ dès que $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ et:*

$$(MN)^{\frac{13}{4}(1-\gamma)+4\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{3\gamma-2-5\varepsilon}$$

En intervertissant les rôles de M et N, nous obtenons le:

Théorème 5.4 *Pour* $\gamma > \frac{21}{25} = 0.84$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$(MN)^{3-3\gamma+5\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{1-\frac{13}{4}(1-\gamma)-4\varepsilon}$$

Pour $\gamma > \frac{11}{13}$, les domaines d'application de ces deux théorèmes se recoupent, ce qui permet d'en déduire:

Théorème 5.5 *Pour* $\gamma > \frac{11}{13} = 0.846\ldots$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$(MN)^{3-3\gamma+5\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{3\gamma-2-5\varepsilon}$$

Précisons bien que ces trois théorèmes ne supposent nullement que $b_n = 1$.

A partir de maintenant, nous supposons que $b_n = 1$.

Nous utilisons le théorème 2.12, qui donne l'estimation $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ dès qu'on a les conditions:

$$\begin{aligned}
H^{\frac{16}{14}}(MN)^{\frac{13+3\gamma}{14}}N^{-\frac{8}{14}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{7}{6}}(MN)^{\frac{6+\gamma}{6}}N^{-\frac{2}{3}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{4}{3}}(MN)^{\frac{3+\gamma}{3}}N^{-\frac{13}{12}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{31}{24}}(MN)^{\frac{23+8\gamma}{24}}N^{-\frac{23}{24}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{26}{24}}(MN)^{\frac{23+3\gamma}{24}}N^{-\frac{13}{24}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{5}{4}}(MN)^{\frac{3+2\gamma}{4}}N^{-\frac{3}{4}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H(MN)^{\frac{3+\gamma}{4}}N^{-\frac{1}{4}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H(MN)N^{-1} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}\\
H^{\frac{1}{2}}(MN)^{\frac{2-\gamma}{2}} &\ll (MN)^{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

le cas le pire étant $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$, d'où les conditions:

$$N \gg (MN)^{\frac{15-13\gamma}{8}+\frac{14\varepsilon+16\eta}{8}}$$

$$
\begin{aligned}
N &\gg (MN)^{\frac{7-6\gamma}{4}+\frac{6\varepsilon+7\eta}{4}} \\
N &\gg (MN)^{\frac{16-12\gamma}{13}+\frac{12\varepsilon+16\eta}{13}} \\
N &\gg (MN)^{\frac{30-23\gamma}{23}+\frac{24\varepsilon+31\eta}{23}} \\
N &\gg (MN)^{\frac{25-23\gamma}{13}+\frac{24\varepsilon+26\eta}{13}} \\
N &\gg (MN)^{\frac{4-3\gamma}{3}+\frac{4\varepsilon+5\eta}{3}} \\
N &\gg (MN)^{3-3\gamma+4\varepsilon+4\eta} \\
N &\gg (MN)^{1-\gamma+\varepsilon+\eta} \\
\gamma &> \frac{1}{2}+\varepsilon+\frac{\eta}{2}
\end{aligned}
$$

Si la première condition ainsi que la sixième sont vérifiées, alors les autres le sont également. Suivant la position de γ par rapport à $\frac{13}{15}$, c'est l'une où l'autre de ces deux conditions qui est la plus forte. Nous en déduisons les théorèmes suivants:

Théorème 5.6 *On suppose* $b_n = 1$. *Pour* $\gamma \geq \frac{13}{15} = 0.8666\ldots$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$(MN)^{\frac{4}{3}-\gamma+2\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{\gamma-\varepsilon}$$

Théorème 5.7 *On suppose* $b_n = 1$.

Pour $\frac{5}{7} \leq \gamma \leq \frac{13}{15}$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$(MN)^{\frac{15-13\gamma}{8}+2\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{\gamma-\varepsilon}$$

En combinant les trois derniers théorèmes, lorsque leurs domaines d'application se recoupent, on obtient le:

Théorème 5.8 *On suppose* $b_n = 1$.

Pour $\gamma > \frac{11}{13} = 0.846\ldots$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$(MN)^{3(1-\gamma)+5\varepsilon} \ll N \ll (MN)^{\gamma-\varepsilon}$$

Discussion

Il nous faut fournir encore une estimation pour nous affranchir de la condition $N \ll (MN)^{\gamma-\varepsilon}$. Pour cela nous appliquons directement le lemme D.1 avec $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et nous obtenons le:

Lemme 5.9 *On suppose* $b_n = 1$.

On a $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que:*

$$N \gg (MN)^{\frac{3}{2}-\gamma+2\varepsilon}$$

En combinant ce lemme avec le théorème précédent, nous en déduisons finalement:

Théorème 5.10 *On suppose* $b_n = 1$.

Pour $\gamma > \frac{11}{13} = 0.846\ldots$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$N \gg (MN)^{3(1-\gamma)+5\varepsilon}$$

On peut aussi utiliser ce lemme lorsque $\gamma \leq \frac{11}{13}$, ce qui permet d'établir:

Théorème 5.11 *On suppose* $b_n = 1$.

Pour $\frac{3}{4} < \gamma \leq \frac{11}{13}$, *on a* $S(0,\gamma;H,M,N) \ll (MN)^{1-\varepsilon}$ *dès que* $H \ll (MN)^{1-\gamma+\eta}$ *et:*

$$N \gg (MN)^{\frac{15-13\gamma}{8}+2\varepsilon}$$

On notera que la constante $\frac{3}{4}$ peut être légèrement améliorée. Pour cela, il suffit d'utiliser une autre paire d'exposants dans le lemme. On peut prendre par exemple $(p,q) = (\frac{11}{30}, \frac{16}{30})$. Mais ces valeurs sont de toutes façons très éloignées du domaine d'application actuel.

D'autre part, bien que nous ayons utilisé les théorèmes 2.11 et 2.12, il nous faut souligner que c'est le théorème 3 de [9] qui est l'ingrédient déterminant pour améliorer le théorème de *Piatetski-Shapiro.*

5.3 Conclusion

En prenant:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1-\gamma+2\varepsilon+\eta \\ a_2 &= \frac{\gamma(2+p)-(1+p+q)-3\varepsilon-6\eta}{1-q} \\ a_3 &= 3(1-\gamma)+5\varepsilon \end{aligned}$$

les conditions combinatoires de l'identité de *Heath-Brown* $a_3 \geq 2a_1$, $2a_3+a_1 \geq 1$, $3a_2 \geq 1$, nous conduisent à vérifier:

- premièrement que

$$\frac{\gamma(2+p)-(1+p+q)}{1-q} > \frac{1}{3}$$

ce qui est vrai pourvu que:

$$\gamma > \frac{4+3p+2q}{3(2+p)}$$

Si l'on prend $(p,q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, on retrouve la condition $\gamma > \frac{13}{15} = 0.866666\ldots$, qui apparaissait déjà dans l'article de *Heath-Brown* [15], mais qui n'était pas la plus restrictive pour lui.

Par contre on peut prendre $(p,q) = (\frac{57}{126},\frac{64}{126}) = BA^5B(0,1)$, ce qui nous amène la condition:$\gamma > \frac{803}{927} = 0.866235\ldots$, qui est très légèrement meilleure. Bien sûr cette condition n'est pas optimale, et on peut certainement l'améliorer en prenant une paire d'exposants plus sophistiquée. On peut néanmoins s'imposer raisonnablement pour le traitement des autres conditions que $\gamma > \frac{11}{13} = 0.84615\ldots$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème 5.10 pour les sommes de type I.

- que:

$$3(1-\gamma) < \frac{\gamma}{2}$$

si bien que:

$$\gamma > \frac{6}{7} = 0.85714\ldots$$

- que:

$$2(1-\gamma) < 3(1-\gamma)$$

ce qui est toujours vrai.

En définitive, le résultat est acquis dès que:

$$\gamma > \max\left(\frac{4+3p+2q}{3(2+p)}, \frac{6}{7}\right)$$

Par exemple pour:

$$\gamma > \frac{803}{927} = 0.866235\ldots$$

c'est-à-dire:

$$c < \frac{927}{803} = 1.15442\ldots$$

Notons qu'en appliquant l'algorithme de Graham (voir [10] ou [11] pages 55 à 69), on obtient la condition:

$$c < \frac{6121}{5302} = 1.15447001\ldots$$

en utilisant la paire d'exposants: $BA^5BA^2BA^2BABA^2B(0,1) = (\frac{6880}{14923}, \frac{7552}{14923})$.

On peut améliorer cette condition avec une paire d'exposants plus appropriée que l'on trouverait en appliquant l'algorithme de Graham à partir de la paire d'exposants $(\frac{9}{56} + \varepsilon, \frac{37}{56} + \varepsilon)$ pour ε assez petit, qui a été établie par *Huxley* et *Watt* [17], mais l'amélioration serait de toutes façons faible.

Chapitre 6

Minoration grâce au crible

6.1 Introduction

Grâce au crible de Rosser-Iwaniec, nous allons pouvoir légèrement augmenter la constante correspondant au problème de *Piatetski-Shapiro*, mais cette méthode ne donne qu'une minoration de $\pi_c(x)$. Plus précisément, nous démontrons le:

Théorème 6.1 *Pour $c < \frac{7}{6}$, on a la minoration:*

$$\pi_c(x) \gg \frac{x}{c \ln x}$$

Définissons:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{[n^c] \mid N < n \leq 2N\} \\ \mathcal{A}_d &= \{a \in \mathcal{A} \mid d/a\} \\ S(\mathcal{A}, z) &= \#\{a \in \mathcal{A} \mid (a, \prod_{p<z} p) = 1\} \end{aligned}$$

Pour minorer $\pi_c(x)$, il suffit de minorer non trivialement $S(\mathcal{A}, (2N)^{\frac{c}{2}})$.

6.2 Estimation de $|\mathcal{A}_d|$

Avant d'appliquer la formule de crible, on étudie $|\mathcal{A}_d|$:

$$|\mathcal{A}_d| = \#\{k \in \mathbb{N} \mid \exists n, N < n \leq 2N, [n^c] = kd\}$$

En utilisant la caractérisation classique des nombres de *Piatetski-Shapiro* (voir le début du chapitre 5), on obtient:

$$|\mathcal{A}_d| = T(d) + E(d) + O(1)$$

où:

$$\begin{aligned} T(d) &= \sum_{\frac{N^c}{d} < k \leq \frac{(2N)^c}{d}} ((kd+1)^\gamma - (kd)^\gamma) \\ E(d) &= \sum_{\frac{N^c}{d} < k \leq \frac{(2N)^c}{d}} (\{-(kd+1)^\gamma\} - \{-(kd)^\gamma\}) \end{aligned}$$

On montre aisément que:

$$T(d) = \frac{N}{d} + O_c(N^{1-c})$$

On a donc le:

Lemme 6.2 *On a l'égalité:*

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{N}{d} + r(\mathcal{A}, d)$$

où:

$$r(\mathcal{A}, d) = E(d) + O_c(N^{1-c})$$

6.3 Préparation au crible

Le crible linéaire seul ne pourra jamais détecter les nombres premiers (phénomène de parité), si bien qu'une transformation préliminaire s'avère indispensable.

Soit $\frac{c}{3} < \beta < \frac{c}{2}$, et $D = N^{c(1-\varepsilon)}$.

On applique l'identité de Buchstab:

$$S(\mathcal{A}, (2N)^{\frac{c}{2}}) = S(\mathcal{A}, (2N)^\beta) - \sum_{(2N)^\beta < p < (2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p) \tag{6.1}$$

$S(\mathcal{A}, (2N)^\beta)$ sera minoré grâce au crible, tandis que $\sum_{(2N)^\beta < p < (2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p)$ sera estimé par une méthode directe, ce qui permet de sortir du cadre du crible.

6.4 Estimation directe

Comme $\beta > \frac{c}{3}$, on a l'égalité:

$$\sum_{(2N)^\beta<p<(2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p)$$
$$= \#\{[n^c], N < n \leq 2N \mid \exists p_1, p_2, p_1 < p_2; (2N)^\beta < p_1 < (2N)^{\frac{c}{2}}, [n^c] = p_1 p_2\}$$

Notre but étant de donner une majoration explicite de $\sum_{(2N)^\beta<p<(2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p)$, nous supprimons dans la relation précédente la condition: $p_1 < p_2$.

Ainsi on a:

$$\sum_{(2N)^\beta<p<(2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p)$$
$$\leq \#\{[n^c], N < n \leq 2N \mid \exists p_1, p_2; (2N)^\beta < p_1 < (2N)^{\frac{c}{2}}, [n^c] = p_1 p_2\}$$

Notons que la perte entrainée par cette majoration n'a pas d'incidence sur le résultat final, car la contribution des termes tels que $p_1 \geq p_2$ est négligeable.

Par la transformation classique sur le nombres de *Piatetski-Shapiro*, on a:

$$\sum_{(2N)^\beta<p<(2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p) \leq T_1(N) + R_1(N) + O(1)$$

où:

$$T_1(N) = \sum_{(2N)^\beta<p_1<(2N)^{\frac{c}{2}}} \sum_{\frac{N^c}{p_1}<p_2\leq\frac{(2N)^c}{p_1}} ((p_1p_2+1)^\gamma - (p_1p_2)^\gamma)$$
$$R_1(N) = \sum_{(2N)^\beta<p_1<(2N)^{\frac{c}{2}}} \sum_{\frac{N^c}{p_1}<p_2\leq\frac{(2N)^c}{p_1}} (\{-(p_1p_2+1)^\gamma\} - \{-(p_1p_2)^\gamma\})$$

Pour estimer $T_1(N)$, on écrit, par un développement à l'ordre 2:

$$T_1(N) = \gamma \sum_{(2N)^\beta<p_1<(2N)^{\frac{c}{2}}} \sum_{\frac{N^c}{p_1}<p_2\leq\frac{(2N)^c}{p_1}} (p_1p_2)^{\gamma-1} + O(N^{1-c})$$

puis grâce au théorème des nombres premiers, on a:

$$T_1(N) \sim \gamma \int_{(2N)^\beta}^{(2N)^{\frac{c}{2}}} t_1^{\gamma-1} \frac{dt_1}{\ln t_1} \int_{\frac{N^c}{t_1}}^{\frac{(2N)^c}{t_1}} t_2^{\gamma-1} \frac{dt_2}{\ln t_2} \qquad N \to +\infty$$

Il ne reste plus qu'à donner un équivalent de cette expression. On peut par exemple faire le changement de variables: $t_2 = v\frac{N^c}{t_1}$, puis le changement: $t_1 = (2N)^u$, et en intervertissant les sommations, on est capable de calculer explicitement l'intégale en u, et il ne reste plus qu'à trouver un équivalent à l'intégrale en v.

Plus précisément:

$$\begin{aligned} T_1(N) &\sim \gamma N \int_{v=1}^{2^c} v^{\gamma-1} dv \int_{u=\beta}^{\frac{c}{2}} \frac{du}{u(\ln v + c\ln N) - u^2 \ln 2N} \\ &\sim \gamma N \int_{v=1}^{2^c} \frac{v^{\gamma-1} dv}{\ln v + c\ln N} \ln\left(\frac{c - \beta + \frac{\ln v}{\ln N}}{\beta + \frac{2\beta \ln v}{c \ln N}}\right) \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalent:

$$T_1(N) \sim \frac{N}{c\ln N} \ln\left(\frac{c-\beta}{\beta}\right) \qquad N \to +\infty$$

$R_1(N)$ est un terme d'erreur conduisant à des sommes d'exponentielles faciles à estimer, en raison de la position des intervalles de sommation. Par le développement en série de *Fourier* donné par D.1, nous avons:

$$R_1(N) \ll \sum_{(2N)^\beta < p_1 < (2N)^{\frac{c}{2}}} \sum_{\frac{N^c}{p_1} < p_2 \leq \frac{(2N)^c}{p_1}} \Big(\sum_{0<|h|\leq H} \frac{e(h(p_1p_2+1)^\gamma) - e(h(p_1p_2)^\gamma)}{h} + E(p_1p_2, \gamma)\Big)$$

où:

$$E(p_1p_2, \gamma) \ll \min(1, \frac{1}{H\| (p_1p_2)^\gamma \|}) + \min(1, \frac{1}{H\| (1+p_1p_2)^\gamma \|})$$

On se débarrasse immédiatement des termes d'erreur $\sum\sum E(p_1p_2, \gamma)$, en regroupant les variables p_1p_2 en une seule et en utilisant l'estimation D.5, avec le choix $H = (N^c)^{1-\gamma+\delta}$. On a donc:

$$\sum\sum E(p_1p_2, \gamma) \ll \frac{N}{(\ln N)^2}$$

Nous sommes donc ramenés, après une sommation par parties, à montrer l'estimation:

$$\sum_{0<|h|\leq H} \varepsilon_h \sum_{(2N)^\beta < p_1 < (2N)^{\frac{c}{2}}} \sum_{\frac{N^c}{p_1} < p_2 \leq \frac{(2N)^c}{p_1}} e(h(p_1p_2)^\gamma) \ll (N^c)^{1-\varepsilon}$$

et cette estimation découle, pour β assez proche de $\frac{c}{2}$, du théorème 5.5, si bien que:

$$R_1(N) \ll \frac{N}{(\ln N)^2}$$

On peut donc en déduire la:

Proposition 6.3 *Pour β_0 assez proche de $\frac{c}{2}$, et $\beta_0 < \beta < \frac{c}{2}$, on a la majoration:*

$$\sum_{(2N)^\beta < p < (2N)^{\frac{c}{2}}} S(\mathcal{A}_p, p) \leq \frac{N}{c \ln N} \ln(\frac{c-\beta}{\beta})(1+o(1)) \qquad N \to +\infty$$

6.5 Utilisation du crible

On utilise le crible linéaire sous la forme du théorème 4 de [18], dont nous donnons l'énoncé uniquement pour la minoration:

Proposition 6.4 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers, et $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers. Notons:*

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p \\ S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &= \#\{a \in \mathcal{A} \mid (a, P(z)) = 1\} \\ |\mathcal{A}_d| &= \#\{a \in \mathcal{A} \mid a \equiv 0 \pmod d\} \end{aligned}$$

On suppose que chaque $|\mathcal{A}_d|$ peut être écrit:

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r(\mathcal{A}, d)$$

avec $\omega(d)$ multiplicative et $0 \leq \omega(p) < p$ pour $p \in \mathcal{P}$, $X \geq 2$ un nombre indépendant de d.

Soient $R \geq 1$, $0 < \eta < 3^{-R}$ et $D \geq 2$. Supposons que les deux inégalités suivantes soient vérifiées:

$$\begin{aligned} \prod_{w \leq p < z} (1 - \frac{\omega(p)}{p})^{-1} &\leq (\frac{\ln z}{\ln w})(1 + \frac{K}{\ln w}) \\ \sum_{w \leq p < z} \sum_{\alpha \geq 2} \frac{\omega(p^\alpha)}{p^\alpha} &\leq \frac{L}{\ln 3w} \end{aligned}$$

pour tous $z > w \geq 2$, et des constantes $K, L > 1$ convenablement choisies. Posons:

$$V(z) = \prod_{p/P(z)} (1 - \frac{\omega(p)}{p})$$

Définissons les ensembles:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \{D^{\eta^2(1+\eta^9)^n} \mid n \geq 0\} \\
\mathcal{H} &= \{(D_1, \ldots, D_r) \mid r \geq 1, D_1, \ldots, D_r \in \mathcal{G}, D_r \leq \cdots \leq D_1 < D^{\frac{1}{2}}\} \\
\mathcal{D}^- &= \{(D_1, \ldots, D_r) \in \mathcal{H} \mid \forall l, 1 \leq l \leq \frac{r}{2}, D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 < D\}
\end{aligned}$$

Notons que $|\mathcal{D}^-| < \exp(8\eta^{-3})$.

Soit f l'habituelle fonction du crible linéaire.

Si $z \leq D^{\frac{1}{2}}$, on a la minoration:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \geq V(z) X (f(s) - E) - R_1^- - R^-$$

avec:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{\ln D}{\ln z} \\
E = E(\eta, D, K, L) &\ll \eta + \eta^{-8} e^{K+L} (\ln D)^{-\frac{1}{3}} \\
R_1^- &= \sum_{\substack{d < D^\eta \\ d/P(D^{\eta^2})}} \varphi_d^-(D^\eta) r(\mathcal{A}, d) \\
R^- &= \sum_{(D_1, \ldots, D_r) \in \mathcal{D}^-} \sum_{\substack{d < D^\eta \\ d/P(D^{\eta^2})}} \lambda_d^-(\eta, D_1, \ldots, D_r) H_d(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z; \eta, D_1, \ldots, D_r)
\end{aligned}$$

avec les coefficients $\lambda_d^-(\eta, D_1, \ldots, D_r)$, et $\varphi_d^-(D^\eta)$ majorés en module par 1, et

$$H_d(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z; \eta, D_1, \ldots, D_r) = \sum_{\substack{D_1 \leq p_1 < D_1^{1+\eta^9} \\ p_1/P(z)}} \cdots \sum_{\substack{D_r \leq p_r < D_r^{1+\eta^9} \\ p_r/P(z)}} r(\mathcal{A}, d p_1 \cdots p_r)$$

où la sommation est restreinte par la condition $p_i \neq p_j$ pour $(i,j) \in I(D_1, \ldots, D_r)$, avec $I(D_1, \ldots, D_r)$ un ensemble arbitrairement choisi (qui peut être vide) de paires d'indices (i,j) telles que $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq r$.

On prend $z = (2N)^\beta$, $\omega(n) = 1$, $X = N$, η assez petit, $s = \frac{\ln D}{\beta \ln N} = \frac{c}{\beta}(1-\varepsilon)$, $I(D_1, \ldots, D_r) = \emptyset$.

L'existence de K se déduit aisément de la formule (voir les expressions (22.7.3) et (22.7.4) de [12]):

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + C + O(\frac{1}{\ln x})$$

L'existence de L est triviale. Rappelons que $D = N^{c(1-\varepsilon)}$.

Nous en déduisons la minoration:

$$S(\mathcal{A}, (2N)^\beta) \geq N \prod_{p<(2N)^\beta} (1 - \frac{1}{p})(f(\frac{c}{\beta}(1-\varepsilon)) - E) + \mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta)$$

où $\mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta)$ est un terme d'erreur délicat qui sera défini et traité plus loin.

Appelons γ_E la constante d'Euler, et appliquons la formule de Mertens.

On obtient:

$$S(\mathcal{A}, (2N)^\beta) \geq N \frac{e^{-\gamma_E}}{\ln(2N)^\beta}(f(\frac{c}{\beta}(1-\varepsilon)) - E) + \mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta)$$

Mais comme pour $2 < s < 4$:

$$f(s) = 2e^{\gamma_E} \frac{\ln(s-1)}{s}$$

on a donc, en utilisant l'égalité 6.1 et la proposition 6.3:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, (2N)^{\frac{c}{2}}) \geq \frac{N}{c \ln N} \Big(& \frac{2}{1-\varepsilon} \ln(\frac{c}{\beta} - 1) + \frac{2}{1-\varepsilon} \ln(1 - \varepsilon \frac{c}{c-\beta}) - \ln(\frac{c}{\beta} - 1) \\ & - \frac{c}{\beta} e^{-\gamma_E} (\eta + \frac{\eta^{-8} e^{K+L}}{(c(1-\varepsilon)\ln N)^{\frac{1}{3}}}) + o(1) \Big) + \mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta) \end{aligned}$$

d'où, pour ε et η assez petits, finalement:

$$S(\mathcal{A}, (2N)^{\frac{c}{2}}) \geq \frac{N}{c \ln N} \ln(\frac{c}{\beta} - 1)(1 + o(1)) + \mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta)$$

Le théorème 6.1 se ramène donc à montrer l'inégalité:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, (2N)^\beta) \ll \frac{N}{(\ln N)^2}$$

ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

6.6 Terme d'erreur

$\mathcal{E}(\mathcal{A},(2N)^\beta)$ représente les deux termes du théorème d'Iwaniec R^- et R_1^-. La sommation sur les $(D_1,\dots,D_r)$ comportant moins de $\exp(8\eta^{-3})$ termes, on effectue cette somme trivialement, en conservant un seul $(D_1,\dots,D_r)$ qui réalise le maximum.

On a:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A},(2N)^\beta) \ll_\eta \sum_{d<D^\eta} \psi_d \sum_{d_1}\cdots\sum_{d_r}\sum_{k}(\{-(kdd_1\cdots d_r+1)^\gamma\}-\{-(kdd_1\cdots d_r)^\gamma\})$$

où $|\psi_d|\le 1$, la sommation sur les d_i se fait sur des intervalles de la forme $[D_i, D_i^{1+\eta^9}]$ avec $(D_1,\dots,D_r)\in\mathcal{D}^-$ et la restriction $N^c < dd_1\cdots d_r k \le (2N)^c$.

En effectuant un découpage dyadique des intervalles $[D_i, D_i^{1+\eta^9}]$, on voit que l'on est ramené à estimer des sommes $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\eta_1,(\alpha_i),(D_i))$

$$\sum_{d\sim D^{\eta_1}}\sum_{d_1\sim D_1^{\alpha_1}}\cdots\sum_{d_r\sim D_r^{\alpha_r}}\sum_{k\sim K}(\{-(kdd_1\cdots d_r+1)^\gamma\}-\{-(kdd_1\cdots d_r)^\gamma\})$$

où les variables de cette somme sont restreintes à vérifier les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
kdd_1\cdots d_r &\sim N^c\\
0\le\eta_1 &< \eta\\
\alpha_1,\dots,\alpha_r &\in [1,1+\eta^9]\\
D>D_1 &> D_2>\cdots\\
{D_1}^2 &< D\\
D_1{D_2}^3 &< D\\
D_1D_2D_3{D_4}^3 &< D\\
&\cdots\\
D_1D_2D_3\cdots{D_{2l}}^3 &< D\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Signalons qu'il y a $O((\ln N)^{\eta'})$ (où η' ne dépend que de η) telles sommes $\mathcal{S}$ et qu'il suffit de montrer $\mathcal{S}\ll (N^c)^{1-\epsilon}$ pour conclure.

On utilise le développement en série de *Fourier* de la fonction partie fractionnaire donné par D.1. On a donc:

$$\mathcal{S} \ll \sum_{d\sim D^{\eta_1}} \psi_d \sum_{d_1\sim D_1^{\alpha_1}} \cdots \sum_{d_r\sim D_r^{\alpha_r}} \sum_{k\sim K} \Big(\sum_{0<|h|\leq H} \frac{e(h(1+kdd_1\cdots d_r)^\gamma) - e(h(kdd_1\cdots d_r)^\gamma)}{h} + E(kdd_1\cdots d_r,\gamma)\Big)$$

où les sommations sur $k,d,d_1,\ldots,d_r$ sont liées par la relation $N^c \leq kdd_1\cdots d_r < N'^c$, avec $N \leq N' \leq 2N$, et:

$$E(kdd_1\cdots d_r,\gamma) \ll \min(1, \frac{1}{H\| (kdd_1\cdots d_r)^\gamma \|}) + \min(1, \frac{1}{H\| (1+kdd_1\cdots d_r)^\gamma \|})$$

On se débarrasse des termes d'erreur $E(kdd_1\cdots d_r,\gamma)$ en regroupant tout d'abord $kdd_1\cdots d_r$ en une seule variable n avec un nombre de représentations en $O(N^{\frac{\epsilon}{1000}})$, puis en appliquant l'estimation D.5, ce qui sous l'hypothèse $H = (N^c)^{1-\gamma+\delta}$, nous ramène à l'estimation du terme principal.

Par une sommation par parties, on est ramené à montrer l'estimation:

$$\sum_{0<|h|\leq H} \varepsilon_h \sum_{d\sim D^{\eta_1}} \psi_d \sum_{d_1\sim D_1^{\alpha_1}} \cdots \sum_{d_r\sim D_r^{\alpha_r}} \sum_{k\sim K} e(h(kdd_1\cdots d_r)^\gamma) \ll (N^c)^{1-\varepsilon}$$

où les sommations sur $k,d,d_1,\ldots,d_r$ sont liées par la relation $N^c \leq kdd_1\cdots d_r < N'^c$, avec $N \leq N' \leq 2N$.

Pour majorer cette somme, nous allons utiliser les estimations que nous avons démontrées pour le théorème de *Piatetski-Shapiro*. Il nous faut donc regrouper les variables de sommation judicieusement de manière à "fabriquer" des variables se trouvant dans des intervalles pour lesquels on sait estimer la somme.

D'après le théorème 5.2, avec $(p,q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, l'estimation recherchée est vraie dès que du produit $KD^{\eta_1}D_1^{\alpha_1}\cdots D_r^{\alpha_r}$, on peut en extraire un qui se trouve dans l'intervalle:

$$](N^c)^{1-\gamma+3\varepsilon}, (N^c)^{5\gamma-4-8\varepsilon}[$$

Par le théorème 5.5, il en est de même si $\gamma > \frac{11}{13}$ et si l'on a un produit dans:

$$](N^c)^{3-3\gamma+5\varepsilon}, (N^c)^{3\gamma-2-5\varepsilon}[$$

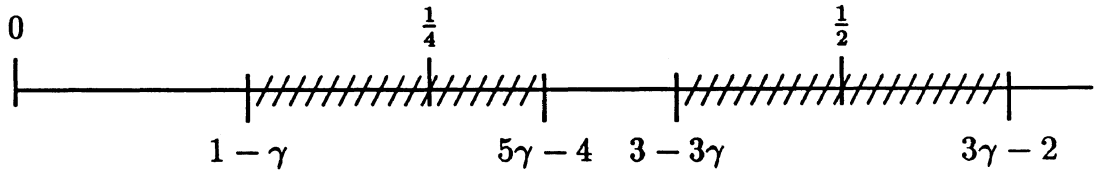

Figure 6.1: Contrôle des sommes de type II

La condition $D_1^2 < D$ implique pour η suffisamment petit que $D_1^{1+\eta^9} \ll (N^c)^{3\gamma-2-5\varepsilon}$, ce qui nous permet donc de supposer: $D_1^{\alpha_1} \ll (N^c)^{3-3\gamma+5\varepsilon}$.

D'autre part, $D_1 D_2^3 < D$ implique $D_2^4 < D$, or avec $\gamma > \frac{11}{13}$ on a $5\gamma - 4 \geq \frac{1}{4}$ donc pour η suffisamment petit on a $D_2^{1+\eta^9} \ll (N^c)^{5\gamma-4-8\varepsilon}$ si bien que l'on peut supposer $D_2^{\alpha_2} \ll (N^c)^{1-\gamma+3\varepsilon}$ (voir figure 6.1). Cette dernière condition va nous permettre de conclure pourvu que $\gamma > \frac{6}{7}$, comme nous allons le voir immédiatement.

Il nous reste en effet maintenant deux cas à étudier:

- si $D_1^{\alpha_1} \cdots D_r^{\alpha_r} \gg (N^c)^{3\gamma-2-5\varepsilon}$, pour $\gamma > \frac{6}{7}$, on a:

$$(3\gamma - 2) - (3 - 3\gamma) > 1 - \gamma$$

  et donc il est impossible qu'il n'y ait pas un produit de $D_i^{\alpha_i}$ qui se trouve dans:

$$](N^c)^{3-3\gamma+5\varepsilon}, (N^c)^{3\gamma-2-5\varepsilon}[$$

  car aucun des $D_i^{\alpha_i}$, $i \geq 2$ n'a une taille suffisante pour faire "sauter" d'un seul bond le produit d'une borne à l'autre de l'intervalle précédent.

- si $D_1^{\alpha_1} \cdots D_r^{\alpha_r} \ll (N^c)^{3-3\gamma+5\varepsilon}$, alors $K \gg (N^c)^{3\gamma-2-5\varepsilon}$, et nous sommes alors en présence d'une somme de type I, à laquelle nous pouvons appliquer le théorème 5.10, qui nous donne l'estimation souhaitée avec le choix de variables $N = K$, $M = D_1^{\alpha_1} \cdots D_r^{\alpha_r}$.

Il nous a semblé que le théorème 1 de [18] n'était pas assez fort pour conclure. Nous avons dû revenir à la construction des coefficients bien factorisables pour gagner davantage de souplesse dans les formes multilinéaires.

Chapitre 7

Problème binaire

Nous allons nous intéresser à un problème binaire déjà étudié par *Deshouillers* dans sa thèse [5] au chapitre II. Il s'agit d'écrire tout entier comme somme de deux nombres de *Piatetski-Shapiro.*

Nous allons chercher un équivalent de:

$$R_c(N) = \#\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^{*2} \mid N = [n_1{}^c] + [n_2{}^c]\}$$

et en fait nous montrerons le:

Théorème 7.1 *Pour* $1 < c < \frac{6}{5}$, $\gamma = \frac{1}{c}$, *on a, pour* $N \to +\infty$, *et tout* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit:*

$$R_c(N) = A(\gamma) N^{2\gamma-1} + O_{\varepsilon,\gamma}(N^{2\gamma-1-\varepsilon})$$

où:

$$A(\gamma) = \gamma^2 \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\gamma-1} dx = \gamma^2 B(\gamma,\gamma) = \gamma^2 \frac{(\Gamma(\gamma))^2}{\Gamma(2\gamma)}$$

(voir par exemple [34] pages 253-254 pour ces égalités classiques sur les fonctions eulériennes)

7.1 Réduction du problème

Soit $\chi(n) = [-n^\gamma] - [-(n+1)^\gamma]$ la fonction caractéristique des nombres de la forme $[m^c]$ On a alors l'égalité:

$$R_c(N) = 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} \chi(n)\chi(N-n) + O(1)$$

Cette transformation nous permet de ramener l'étude de $R_c(N)$ à un problème de sommes d'exponentielles. En utilisant l'écriture habituelle de χ, on en déduit:

$$R_c(N) = S_1(N) + O(S_2(N) + S_3(N) + S_4(N))$$

où:

$$\begin{aligned}
S_1(N) &= 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} ((n+1)^\gamma - n^\gamma)((N-n+1)^\gamma - (N-n)^\gamma) \\
S_2(N) &= 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} (\{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\})((N-n+1)^\gamma - (N-n)^\gamma) \\
S_3(N) &= 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} ((n+1)^\gamma - n^\gamma)(\{-(N-n+1)^\gamma\} - \{-(N-n)^\gamma\}) \\
S_4(N) &= 2 \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} (\{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\})(\{-(N-n+1)^\gamma\} - \{-(N-n)^\gamma\})
\end{aligned}$$

$S_1(N)$ donnera donc le terme principal, tandis que $S_2(N)$ et $S_3(N)$ seront des termes d'erreur relativement faciles, et $S_4(N)$ un terme d'erreur plus délicat.

7.2 Evaluation de $S_1(N)$

Par un simple développement limité à l'ordre 1, il est facile de voir que:

$$S_1(N) = 2\gamma^2 N^{2\gamma-2} \sum_{1 \leq n \leq \frac{N}{2}} (\frac{n}{N})^{\gamma-1}(1 - \frac{n}{N})^{\gamma-1} + O(1)$$

Ensuite, constatant que $x \to f(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\gamma-1}$ est décroissante pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$, une comparaison avec une intégrale nous amène à la conclusion que:

$$S_1(N) = \gamma^2 N^{2\gamma-1} \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\gamma-1} dx + O(1)$$

car l'inconvénient d'avoir une intégrale impropre est pallié par les estimations:

$$\int_0^a f(x)dx \ll a^\gamma$$

pour $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ et:

$$\int_a^{\frac{1}{2}} f(x)dx \ll f(\frac{1}{4})(a - \frac{1}{2})$$

pour $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$.

7.3 Evaluation de $S_2(N)$

Par une sommation par parties, on voit que l'estimation de $S_2(N)$ se réduit à montrer:

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{N}{2}} |\sum_{\frac{1}{2} < n \leq t} (\{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\})| \ll_\varepsilon N^{\gamma-\varepsilon}$$

On remarque la présence d'une somme "télescopique":

$$|\sum_{\frac{1}{2} < n \leq t} (\{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\})| \leq 2$$

On a donc l'estimation:

$$S_2(N) \ll_\varepsilon N^{2\gamma-1-\varepsilon}$$

7.4 Evaluation de $S_3(N)$

Par une sommation par parties, on voit que l'estimation de $S_3(N)$ se réduit à montrer:

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{N}{2}} |\sum_{\frac{1}{2} < n \leq t} (\{-(N-n+1)^\gamma\} - \{-(N-n)^\gamma\})| \ll_\varepsilon N^{\gamma-\varepsilon}$$

On remarque la présence d'une somme "télescopique":

$$|\sum_{\frac{1}{2} < n \leq t} (\{-(N-n+1)^\gamma\} - \{-(N-n)^\gamma\})| \leq 2$$

On a donc l'estimation:

$$S_3(N) \ll_\varepsilon N^{2\gamma-1-\varepsilon}$$

7.5 Evaluation de $S_4(N)$

Par un découpage dyadique, on a pour un certain $N_0 \leq \frac{N}{4}$:

$$S_4(N) \ll (\ln N) \sum_{n \sim N_0} (\{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\})(\{-(N-n+1)^\gamma\} - \{-(N-n)^\gamma\})$$

où l'intervalle de sommation $n \sim N_0$ nous permet d'avoir l'inégalité: $N - n \geq \frac{N}{2}$, ce qui nous donne une très bonne connaissance du comportement de $(N-n)^\gamma$.

Notons:

$$T_H(n) = \sum_{0<|h|\leq H} \frac{e(h(n+1)^\gamma) - e(hn^\gamma)}{2i\pi h}$$

et:

$$R_H(n) = \{-(n+1)^\gamma\} - \{-n^\gamma\} - T_H(n)$$

on prend: $H_1 = N_0^{1-\gamma+\eta_1}$ et $H_2 = N^{1-\gamma+\eta_2}$, où η_1 et η_2 seront fixés ultérieurement en fonction de ε.

Posons:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(N) &= \sum_{n \sim N_0} T_{H_1}(n) T_{H_2}(N-n) \\
\sigma_2(N) &= \sum_{n \sim N_0} T_{H_1}(n) R_{H_2}(N-n) \\
\sigma_3(N) &= \sum_{n \sim N_0} R_{H_1}(n) T_{H_2}(N-n) \\
\sigma_4(N) &= \sum_{n \sim N_0} R_{H_1}(n) R_{H_2}(N-n)
\end{aligned}$$

On a:

$$S_4(N) \ll (\ln N)(\sigma_1(N) + \sigma_2(N) + \sigma_3(N) + \sigma_4(N))$$

Pour montrer l'estimation précédente, nous devrons estimer des sommes d'exponentielles sur lesquelles on ne peut apparemment pas appliquer directement la théorie des paires d'exposants, car en dérivant n fois la fonction à l'intérieur de l'exponentielle complexe, on obtient une fonction qui suivant la parité de n, peut ne pas conserver un signe constant sur l'intervalle de sommation.

Un théorème de sommes d'exponentielles

Nous allons montrer le:

Théorème 7.2 *Soient u et $v \in [0,1]$, h_1 et $h_2 \in \mathbb{Z}^*$, on pose:*

$$F_{h_1,h_2}(n) = h_1(n+u)^\gamma + h_2(N-n+v)^\gamma$$

- *Si $h_1 h_2 > 0$ alors*

$$\sum_{n\sim N_0} e(F_{h_1,h_2}(n)) \ll (|h_1|N_0^{\gamma-1} + |h_2|N^{\gamma-1} + 1)(|h_1|N_0^{\gamma-2} + |h_2|N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} + \ln N$$

- *Si $h_1 h_2 < 0$ alors*

$$\sum_{n\sim N_0} e(F_{h_1,h_2}(n)) \ll (|h_1|N_0^{\gamma-1} + |h_2|N^{\gamma-1} + 1)(|h_1|N_0^{\gamma-3} + |h_2|N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}} + \ln N$$

Pour établir ce théorème, nous allons utiliser le fait que selon le signe de $h_1 h_2$, soit les dérivées d'ordre pair, soit les dérivées d'ordre impair de F_{h_1,h_2} gardent un signe constant sur l'intervalle de sommation.

En particulier F'' est au moins monotone ou de signe constant:

$$F''(n) = \gamma(\gamma-1)h_1(n+u)^{\gamma-2} + \gamma(\gamma-1)h_2(N-n+v)^{\gamma-2}$$

Ainsi, en excluant éventuellement un point, on peut découper l'intervalle $[N_0, 2N_0]$ en (au plus) deux intervalles I_1 et I_2, sur lesquels F'' est de signe constant.

$$\sum_{n\sim N_0} e(F_{h_1,h_2}(n)) \ll \max_{j=1,2} |\sum_{n\in I_j} e(F_{h_1,h_2}(n))|$$

Posons $I_j =]a_j, b_j[$, $\alpha_j = \min(F'(a_j), F'(b_j))$ et $\beta_j = \max(F'(a_j), F'(b_j))$

Par la formule sommatoire de *Poisson* donnée par B.1, on a:

$$\sum_{n\in I_j} e(F_{h_1,h_2}(n)) = \sum_{\alpha_j - 1 < v < \beta_j + 1} \int_{a_j}^{b_j} e(F_{h_1,h_2}(x) - vx)dx + O(\ln N)$$

on a:

$$(\beta_j + 1) - (\alpha_j - 1) \ll |h_1|N_0^{\gamma-1} + |h_2|N^{\gamma-1} + 1$$

D'autre part, d'après le lemme B.3, on a les majorations d'intégrales:

- Si $h_1 h_2 > 0$ alors avec $n = 2$:

$$\int_{a_j}^{b_j} e(F_{h_1,h_2}(x) - vx)dx \ll (|h_1|N_0^{\gamma-2} + |h_2|N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}}$$

- Si $h_1 h_2 < 0$ alors avec $n = 3$:

$$\int_{a_j}^{b_j} e(F_{h_1,h_2}(x) - vx)dx \ll (|h_1|N_0^{\gamma-3} + |h_2|N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}}$$

ce qui achève de prouver le théorème 7.2.

Estimation de σ_1

On veut montrer l'estimation:

$$\sigma_1(N) \ll N^{2\gamma-1-\epsilon}$$

En écrivant:

$$\frac{e(h_1(n+1)^\gamma) - e(h_1 n^\gamma)}{2i\pi h_1} = \int_0^1 \gamma(n+u)^{\gamma-1} e(h_1(n+u)^\gamma)du$$

et:

$$\frac{e(h_2(N-n+1)^\gamma) - e(h_2(N-n)^\gamma)}{2i\pi h_2} = \int_0^1 \gamma(N-n+v)^{\gamma-1} e(h_2(N-n+v)^\gamma)dv$$

on a l'estimation:

$$\sigma_1(N) \ll N_0^{\gamma-1} N^{\gamma-1} \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 \sum_{0<|h_1|\leq H_1} \sum_{0<|h_2|\leq H_2} |\sum_{n\sim N_0} e(h_1(n+u)^\gamma + h_2(N-n+v)^\gamma)|dudv$$

On applique le théorème 7.2, pour lequel on a:

$$|h_1|N_0^{\gamma-1} + |h_2|N^{\gamma-1} + 1 \ll N^\eta$$

où $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$.

- Pour $h_1h_2 > 0$, on doit établir:

$$N_0^{\gamma-1}N^{\gamma-1}\sum_{0<|h_1|\leq H_1}\sum_{0<|h_2|\leq H_2}(|h_1|N_0^{\gamma-2}+|h_2|N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} \ll N^{2\gamma-1-\varepsilon-\eta}$$

ce qui revient à:

$$N_0^{\gamma-1}H_1^{\frac{1}{2}}H_2N_0^{1-\frac{\gamma}{2}}+N_0^{\gamma-1}H_1H_2^{\frac{1}{2}}N^{1-\frac{\gamma}{2}} \ll N^{\gamma-\varepsilon-\eta}$$

et, en remplaçant H_1 et H_2 par leurs valeurs,conduit à:

$$N^{\frac{3}{2}-\gamma+\eta} \ll N^{\gamma-\varepsilon-\eta}$$

et cette dernière estimation est vraie pourvu que $\gamma > \frac{3}{4}$

- Pour $h_1h_2 < 0$, on doit établir:

$$N_0^{\gamma-1}N^{\gamma-1}\sum_{0<|h_1|\leq H_1}\sum_{0<|h_2|\leq H_2}(|h_1|N_0^{\gamma-3}+|h_2|N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}} \ll N^{2\gamma-1-\varepsilon}$$

ce qui revient à:

$$N_0^{\gamma-1}H_1^{\frac{2}{3}}H_2N_0^{1-\frac{\gamma}{3}}+N_0^{\gamma-1}H_1H_2^{\frac{2}{3}}N^{1-\frac{\gamma}{3}} \ll N^{\gamma-\varepsilon-\eta}$$

et, en remplaçant H_1 et H_2 par leurs valeurs, on obtient la condition:

$$\frac{2}{3}(1-\gamma)+1-\frac{\gamma}{3} < \gamma$$

et cette dernière estimation est vraie pourvu que $\gamma > \frac{5}{6}$

Estimation de σ_2

On veut montrer l'estimation:

$$\sigma_1(N) \ll N^{2\gamma-1-\varepsilon}$$

En écrivant:

$$\frac{e(h_1(n+1)^\gamma)-e(h_1n^\gamma)}{2i\pi h_1} = \int_0^1 \gamma(n+u)^{\gamma-1}e(h_1(n+u)^\gamma)du$$

On obtient l'estimation:

$$\sigma_2(N) \ll N_0^{\gamma-1} \int_0^1 \sum_{n\sim N_0} \min(1, \frac{1}{H_2 \| (N-n)^\gamma \|}) | \sum_{0<|h_1|\leq H_1} e(h_1(n+u)^\gamma) | du$$

On utilise la majoration d'une progression géométrique:

$$\sum_{0<|h_1|\leq H_1} e(h_1(n+u)^\gamma) \ll H_1 \min(1, \frac{1}{H_1 \| (n+u)^\gamma \|})$$

On a donc l'estimation:

$$\sigma_2(N) \ll N_0^{\eta_1} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} S(u,v)$$

où:

$$S(u,v) = \sum_{n\sim N_0} \min(1, \frac{1}{H_1 \| (n+u)^\gamma \|}) \min(1, \frac{1}{H_2 \| (N-n+v)^\gamma \|})$$

Il nous suffira donc de montrer l'estimation:

$$\sup_{(u,v)\in[0,1]^2} S(u,v) \ll N^{2\gamma-1-\epsilon-\eta} \tag{7.1}$$

où $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$.

Estimation de σ_3

Par le même raisonnement que pour $\sigma_2(N)$, on voit qu'en fait il suffit de montrer l'estimation 7.1, car on a:

$$\sigma_3(N) \ll N^\eta \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} S(u,v)$$

Estimation de σ_4

Il est immédiat de voir qu'en fait il suffit de montrer l'estimation 7.1 pour estimer $\sigma_4(N)$.

Fin de l'estimation de σ_2,σ_3,σ_4

D'après l'égalité D.2, on a:

$$\min(1, \frac{1}{H \| n^\gamma \|}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h e(hn^\gamma)$$

où pour tout $\beta \in [-1, 1[$

$$\sum_{h \neq 0} |a_h||h|^\beta \ll_\beta H^\beta (\ln 2H)^2$$

On a donc:

$$S(u,v) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{h_2=-\infty}^{+\infty} a_{h_1} a_{h_2} \sum_{n \sim N_0} e(h_1(n+u)^\gamma + h_2(N-n+v)^\gamma)$$

- Pour $h_1 = h_2 = 0$, la contribution à $S(u,v)$ est:

$$N_0 \frac{\ln 2H_1}{H_1} \frac{\ln 2H_2}{H_2}$$

ce qui est:

$$\begin{aligned} &\ll (\ln N)^2 N^{2\gamma-1-\eta_1-\eta_2} \\ &\ll N^{2\gamma-1-\eta-\varepsilon} \end{aligned}$$

pour un choix convenable de η_1 et η_2 en fonction de ε, vérifiant la condition $\eta_1 + \eta_2 > \eta + \varepsilon$, où $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$.

- Pour $h_1 = 0$ et $h_2 \neq 0$, la contribution à $S(u,v)$ est:

$$\begin{aligned} &\ll \frac{\ln 2H_1}{H_1} \sum_{h_2 \neq 0} |a_{h_2}| | \sum_{n \sim N_0} e(h_2(N-n+v)^\gamma)| \\ &\ll \frac{\ln 2H_1}{H_1} \sum_{h_2 \neq 0} |a_{h_2}| (|h_2|^{-1} N^{1-\gamma} + |h_2|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma-1}{2}} N_0^{\frac{1}{2}}) \\ &\ll \frac{\ln 2H_1}{H_1} (\ln 2H_2)^2 (H_2^{-1} N^{1-\gamma} + H_2^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma-1}{2}} N_0^{\frac{1}{2}}) \\ &\ll (\ln N)^3 N^{\gamma - \frac{1}{2} + \eta} \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à la condition:

$$2\gamma - 1 > \gamma - \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire $\gamma > \frac{1}{2}$.

- Pour $h_1 \neq 0$ et $h_2 = 0$, la contribution à $S(u,v)$ est:

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{\ln 2H_2}{H_2} \sum_{h_1 \neq 0} |a_{h_1}| | \sum_{n \sim N_0} e(h_1(n+u)^\gamma)| \\
&\ll \frac{\ln 2H_2}{H_2} \sum_{h_1 \neq 0} |a_{h_1}| (|h_1|^{-1} N_0^{1-\gamma} + |h_1|^{\frac{1}{2}} N_0^{\frac{\gamma-1}{2}} N_0^{\frac{1}{2}}) \\
&\ll \frac{\ln 2H_2}{H_2} (\ln 2H_1)^2 (H_1^{-1} N_0^{1-\gamma} + H_1^{\frac{1}{2}} N_0^{\frac{\gamma}{2}}) \\
&\ll (\ln N)^3 (N^{\gamma - \frac{1}{2} + \eta})
\end{aligned}$$

ce qui nous conduit à la condition:

$$2\gamma - 1 > \gamma - \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire $\gamma > \frac{1}{2}$.

- Pour $h_1 \neq 0$ et $h_2 \neq 0$, on applique le théorème 7.2. La contribution à $S(u,v)$ est:

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{h_1>0} \sum_{h_2>0} |a_{h_1}||a_{h_2}| (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-2} + |h_2| N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{h_1<0} \sum_{h_2<0} |a_{h_1}||a_{h_2}| (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-2} + |h_2| N^{\gamma-2})^{-\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{h_1<0} \sum_{h_2>0} |a_{h_1}||a_{h_2}| (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-3} + |h_2| N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}} \\
&+ \sum_{h_1>0} \sum_{h_2<0} |a_{h_1}||a_{h_2}| (|h_1| N_0^{\gamma-1} + |h_2| N^{\gamma-1} + 1)(|h_1| N_0^{\gamma-3} + |h_2| N^{\gamma-3})^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Prenons $\alpha = 2$ lorsque $h_1 h_2 > 0$ et $\alpha = 3$ lorsque $h_1 h_2 < 0$. En utilisant pour $X > 0, Y > 0$ l'estimation:

$$(X+Y)^{-\frac{1}{\alpha}} \ll (XY)^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

on est ramené à majorer les trois expressions suivantes:

$$(\ln N)^4 H_1^{1-\frac{1}{2\alpha}} H_2^{-\frac{1}{2\alpha}} N_0^{\gamma-1+\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}} N^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}}$$

$$(\ln N)^4 H_1^{-\frac{1}{2\alpha}} H_2^{1-\frac{1}{2\alpha}} N_0^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}} N^{\gamma-1+\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}}$$

$$(\ln N)^4 H_1^{-\frac{1}{2\alpha}} H_2^{-\frac{1}{2\alpha}} N_0^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}} N^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}}$$

En remplaçant H_1 et H_2 par leurs valeurs, on montre que ces trois expressions sont $\ll_\eta N^{1-\frac{1}{\alpha}+\eta}$, ce qui amène la condition:

$$2\gamma - 1 > 1 - \frac{1}{\alpha}$$

c'est-à-dire: $\gamma > \frac{2\alpha-1}{2\alpha}$.

Pour $\alpha = 2$ cela donne $\gamma > \frac{3}{4}$, et pour $\alpha = 3$ cela donne $\gamma > \frac{5}{6}$, condition déjà rencontrée auparavant.

Chapitre 8

Un résultat presque partout

8.1 Introduction et notations

Soient c et x deux réels positifs.

Posons par commodité: $\gamma = \frac{1}{c}$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'entiers naturels.

a désigne un élément de $\mathcal{A}$.

On note: $\mathcal{A}_c(x) = \#\{n \leq x \mid [n^c] \in \mathcal{A}\}$, et $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_1(x)$

α désigne un réel positif vérifiant $\mathcal{A}(x) \ll x^\alpha$, et l'on s'appliquera à le prendre le plus petit possible pour que x^α représente au mieux $\mathcal{A}(x)$, bien qu'il soit toujours possible de prendre simplement $\alpha = 1$.

Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des nombres premiers, on notè: $\pi_c(x) = \mathcal{A}_c(x)$.

Nous allons prouver le théorème suivant:

Théorème 8.1 *Pour presque tout c de l'intervalle* $]1,2[$, *au sens de la mesure de* Lebesgue, *on a l'équivalence:*

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \ln x} \qquad x \to +\infty \tag{8.1}$$

Ce théorème a déjà été démontré par *Leitmann* et *Wolke* [22], par une démonstration directe. Notre approche va nous conduire à démontrer un résultat plus général, car le fait que $\mathcal{A}$ soit l'ensemble des nombres premiers n'a aucune importance dans notre démontration, et plus précis, en ce sens que nous donnerons explicitement un terme d'erreur exploitable.

8.2 Un théorème général

Nous allons émontrer le

Théorème 8.2 *Pour presque tout c de l'intervalle* $]1,2[$, *au sens de la mesure de* Lebesgue, *on a:*

$$\mathcal{A}_c(x) = c^{-1} \sum_{a \leq x^c} a^{-1+c^{-1}} + O_{c,\delta}(x^{1-\delta}) \tag{8.2}$$

pour:

$$\delta \in]0, \frac{1}{4c} - \frac{\alpha}{8}[\tag{8.3}$$

Notons que ce théorème est trivial si la fonction de comptage de $\mathcal{A}$ est $O_{c,\delta}(x^{1-\delta})$. Plus précisément, par une sommation par parties, on a:

$$\sum_{a \leq x^c} a^{-1+c^{-1}} = \mathcal{A}(x^c)x^{1-c} + (1 - \frac{1}{c}) \int_{\frac{1}{2}}^{x^c} \mathcal{A}(t)t^{\frac{1}{c}-2}dt$$

on voit donc facilement que si

$$x^\beta \ll_\beta \mathcal{A}(x) \ll_\alpha x^\alpha$$

alors on a:

$$x^{1-c(1-\beta)} \ll_{c,\beta} \sum_{a \leq x^c} a^{-1+c^{-1}} \ll_{c,\alpha} x^{1-c(1-\alpha)}$$

si bien que le théorème 8.2 est intéressant, si on a l'inégalité:

$$1 - c(1-\beta) > 1 - (\frac{1}{4c} - \frac{\alpha}{8})$$

Cette condition devient si l'on peut choisir α suffisamment proche de β:

$$1 - c(1-\beta) > 1 - (\frac{1}{4c} - \frac{\beta}{8})$$

c'est-à-dire:

$$\beta > \frac{8c^2 - 2}{8c^2 - c} = \frac{8 - 2\gamma^2}{8 - \gamma}$$

Ceci nous permet d'illustrer notre théorème pour les valeurs extrêmes de c dans l'intervalle de validité $]1,2[$:

- lorsque c est très proche de 1, disons $c = 1 + \varepsilon$ avec ε assez petit, alors le théorème est intéressant pour $\beta > \frac{6}{7} + 3\varepsilon$.

- lorsque c est très proche de 2, disons $c = 2 - \varepsilon$ avec ε assez petit, alors le théorème est intéressant pour $\beta > 1 - \frac{\varepsilon}{30}$.

α et β réalisant $x^\beta \ll \mathcal{A}(x) \ll x^\alpha$, et $\alpha - \beta$ étant supposé choisi suffisamment petit pour bien approcher l'ordre de grandeur de $\mathcal{A}(x)$.

On en déduit que dans le cas où $\alpha = 1$, et où β peut être choisi aussi proche de 1 que nécessaire, le théorème donne un résultat intéressant pour presque tout $c \in]1, 2[$. C'est le cas en particulier si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des nombres premiers: le théorème 8.2 implique le théorème 8.1.

8.3 Itération

Nous allons, par itération du théorème 8.2, donner une application attrayante de ce théorème.

Notre but est d'exhiber des suites finies de réels c_k, de longueur arbitrairement grande, telles que l'équation:

$$p = [n_1^{c_1}] = [n_2^{c_2}] = \cdots = [n_l^{c_l}]$$

ait le "bon nombre" de solutions.

Notons que *Leitmann* [21] s'est intéressé à cette question et a démontré le:

Théorème 8.3 *Pour* $1 < c_1 < c_2 < 2$, $\gamma_i = \frac{1}{c_i}$, $\gamma_1 + \gamma_2 > \frac{55}{28}$, *on a:*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p=[n_1^{c_1}]=[n_2^{c_2}]}} 1 = \gamma_1\gamma_2 \int_2^x \frac{t^{\gamma_1+\gamma_2-1}}{\ln t} dt + O(x^{\gamma_1+\gamma_2-1} e^{-c\sqrt{\ln x}})$$

avec une certaine constante absolue $c > 0$.

Introduisons tout d'abord quelques notations utiles. Soit c_k une suite d'éléments de $]1, 2[$. Soit $\mathcal{A}^0$ un ensemble d'entiers naturels, et par récurrence sur $k \geq 0$:

$$\mathcal{A}^{k+1} = \{a \in \mathcal{A}^k \mid a = [{n_{k+1}}^{c_{k+1}}]\}$$

ainsi:

$$\mathcal{A}^k = \{a \in \mathcal{A}^0 \mid a = [{n_1}^{c_1}] = \cdots = [{n_k}^{c_k}]\}$$

On suppose:

$$\inf\{\alpha \mid \mathcal{A}^0(x) \ll x^\alpha\} = \sup\{\beta \mid \mathcal{A}^0(x) \gg x^\beta\}$$

Il existe ainsi α_0 et β_0 tels que:

$$x^{\beta_0} \ll \mathcal{A}^0(x) \ll x^{\alpha_0}$$

avec $\alpha_0 - \beta_0$ aussi petit qu'on le souhaite.

On définit ensuite:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k \\ \beta_k &= \beta_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k \end{aligned}$$

Nous allons montrer le:

Théorème 8.4 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose:*

$$\inf\{\alpha \mid \mathcal{A}^0(x) \ll x^\alpha\} = \sup\{\beta \mid \mathcal{A}^0(x) \gg x^\beta\}$$

Pour presque tout k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ satisfaisant les conditions:

- $\gamma_i = \frac{1}{c_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, k$,
- $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_k < 1$,
- $\beta_i > \frac{8-2\gamma_{i+1}^2}{8-\gamma_{i+1}}$, *pour* $i = 1, \ldots, k-1$.

on a pour tout $\delta_k \in]0, \frac{\gamma_k}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{8}[$, l'égalité:

$$\mathcal{A}^k(x) = \gamma_1 \cdots \gamma_k \sum_{\substack{a \leq x \\ a \in \mathcal{A}^0}} a^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k} + O_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_k}(x^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

et d'autre part on a les estimations:

$$x^{\beta_k} \ll \mathcal{A}^k(x) \ll x^{\alpha_k}$$

Par exemple en prenant pour $\mathcal{A}^0 = \mathcal{P}$, et

$$\gamma_i \in]1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+9)!}), 1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+9)!})[$$

les hypothèses du théorème précédent sont assurées:

- les intervalles sont disjoints, ce qui assure la croissance des γ_i.
- la suite α_i vérifie les inégalités:

$$\alpha_i > \alpha_0 - \frac{1}{100}\sum_{j>0}\frac{1}{j^2} - \frac{1}{100}\sum_{j>0}\frac{1}{(j+9)!} > \frac{8-2\gamma_1^2}{8-\gamma_1} > \frac{8-2\gamma_{i+1}^2}{8-\gamma_{i+1}}$$

On en déduit le:

Théorème 8.5 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose:*

$$\inf\{\alpha \mid \mathcal{A}^0(x) \ll x^\alpha\} = \sup\{\beta \mid \mathcal{A}^0(x) \gg x^\beta\}$$

Pour presque tout k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ satisfaisant pour $i = 1, \ldots, k$:

$$\gamma_i = \frac{1}{c_i} \in]1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+9)!}), 1 - \frac{1}{100}(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+9)!})[$$

on a pour tout $\delta_k \in]0, \frac{\gamma_k}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{8}[$, l'égalité:

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p=[n_1^{c_1}]=\cdots=[n_k^{c_k}]}} 1 = \gamma_1 \cdots \gamma_k \sum_{p \leq x} p^{\gamma_1+\cdots+\gamma_k-k} + O_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\delta_k}(x^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

Insistons sur le fait que ce théorème est un exemple d'utilisation du théorème précédent, et que les intervalles auraient pu être choisis autrement.

La démonstration du théorème 8.4 se fait par récurrence sur k, en itérant le théorème 8.2.

- pour $k = 1$, c'est exactement le théorème 8.2.
- Supposons que pour presque tout k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$ satisfaisant les conditions:
  - $\gamma_i = \frac{1}{c_i}$ pour $i = 1, \ldots, k$,

- $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_k < 1$,
- $\beta_i > \frac{8-2\gamma_{i+1}^2}{8-\gamma_{i+1}}$, pour $i = 1, \ldots, k-1$.

on a pour tout $\delta_k \in]0, \frac{\gamma_k}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{8}[$, l'égalité:

$$\mathcal{A}^k(x) = \gamma_1 \cdots \gamma_k \sum_{\substack{a \leq x \\ a \in \mathcal{A}^0}} a^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k} + O_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_k}(x^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

et d'autre part on a les estimations:

$$x^{\beta_k} \ll \mathcal{A}^k(x) \ll x^{\alpha_k}$$

- D'après cette hypothèse de récurrence, pour presque tout $k+1$-uplet $(c_1, \ldots, c_{k+1})$ satisfaisant les conditions:
  - $\gamma_i = \frac{1}{c_i}$ pour $i = 1, \ldots, k+1$,
  - $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{k+1} < 1$,
  - $\beta_i > \frac{8-2\gamma_{i+1}^2}{8-\gamma_{i+1}}$, pour $i = 1, \ldots, k$.

  on a pour tout $\delta_k \in]0, \frac{\gamma_k}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{8}[$, l'égalité:

$$\mathcal{A}^k(t) = \gamma_1 \cdots \gamma_k \sum_{\substack{a \leq t \\ a \in \mathcal{A}^0}} a^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k} + O_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_k}(t^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

  et d'autre part on a les estimations:

$$t^{\beta_k} \ll \mathcal{A}^k(t) \ll t^{\alpha_k}$$

  De plus, d'après le théorème 8.2, pour presque tout c_{k+1} on a les égalités:

$$\mathcal{A}^{k+1}(x) = \mathcal{A}^k_{c_{k+1}}(x^{\gamma_{k+1}}) = \gamma_{k+1} \sum_{\substack{a \leq x \\ a \in \mathcal{A}^k}} a^{\gamma_{k+1}-1} + O_{\gamma_{k+1}, \delta_{k+1}}(x^{\gamma_{k+1}(1-\delta_{k+1})})$$

  avec $\delta_{k+1} \in]0, \frac{\gamma_{k+1}}{4} - \frac{\alpha_k}{8}[$. L'hypothèse $\alpha_k > \frac{8-2\gamma_{k+1}^2}{8-\gamma_{k+1}}$ nous assure que ce théorème donne un résultat non trivial, si bien que l'on peut a

$$t^{\beta_{k+1}} \ll \mathcal{A}^{k+1}(t) \ll t^{\alpha_{k+1}}$$

Par une sommation par parties:

$$\sum_{\substack{a\leq x\\ a\in\mathcal{A}^k}} a^{\gamma_{k+1}-1} = \mathcal{A}^k(x)x^{\gamma_{k+1}-1} + (1-\gamma_{k+1})\int_{\frac{1}{2}}^{x} \mathcal{A}^k(t)t^{\gamma_{k+1}-2}dt$$

or pour presque tout k-uplet $(c_1,\ldots,c_k)$ on a l'égalité:

$$\mathcal{A}^k(t) = \gamma_1\cdots\gamma_k \sum_{\substack{a\leq t\\ a\in\mathcal{A}^0}} a^{\gamma_1+\cdots+\gamma_k-k} + O_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\delta_k}(t^{\gamma_k(1-\delta_k)})$$

En effectuant le remplacement de $\mathcal{A}^k(t)$, on obtient d'une part un terme principal qui est exactement celui qu'on cherchait (en faisant la sommation par parties dans l'autre sens), d'autre part un terme d'erreur qu'il nous faut estimer. En définitive, il reste à montrer:

$$\gamma_k(1-\delta_k)+\gamma_{k+1}-1 < \gamma_{k+1}(1-\delta_{k+1})$$

donc il suffit de vérifier l'inégalité:

$$\gamma_{k+1}\delta_{k+1}-\gamma_k\delta_k < 1-\gamma_k$$

On écrit:

$$\begin{aligned}\delta_{k+1} &= \frac{\gamma_{k+1}}{4} - \frac{\alpha_k}{4} - \varepsilon_{k+1}\\ \delta_k &= \frac{\gamma_k}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{4} - \varepsilon_k\end{aligned}$$

avec ε_{k+1}, ε_k suffisamment petits. On a l'égalité:

$$\gamma_{k+1}\delta_{k+1}-\gamma_k\delta_k = \frac{\gamma_{k+1}-\gamma_k}{2}\frac{\gamma_{k+1}+\gamma_k}{2} - \frac{\alpha_{k-1}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)}{8} + \frac{\gamma_{k+1}(1-\gamma_k)}{8} + \gamma_k\varepsilon_k - \gamma_k\varepsilon_{k+1}$$

d'où:

$$\gamma_{k+1}\delta_{k+1}-\gamma_k\delta_k < \frac{1-\gamma_k}{2} + \frac{1-\gamma_k}{8} + \frac{1-\gamma_k}{8} + \gamma_k\varepsilon_k - \gamma_k\varepsilon_{k+1}$$

ce qui assure l'inégalité recherchée.

8.4 Propriétés élémentaires

Posons par commodité: $\gamma = \frac{1}{c}$.

Donnons une expression exploitable de $\mathcal{A}_c(x)$, en utilisant la caractérisation classique de nombres de *Piatetski-Shapiro.*

On a:

$$\mathcal{A}_c(x) = \sum_{a \leq x^c} ([-a^\gamma] - [-(a+1)^\gamma]) + O(1)$$

si bien que:

$$\mathcal{A}_c(x) = \sum_{a \leq x^c} ((a+1)^\gamma - a^\gamma) + \sum_{a \leq x^c} (\{-(a+1)^\gamma\} - \{-a^\gamma\}) + O(1) \tag{8.4}$$

Il est clair que la première somme donne le terme principal. C'est donc de la deuxième somme dont il faut s'occuper.

On notera dans la suite:

$$f_\gamma(a) = \{-(a+1)^\gamma\} - \{-a^\gamma\}$$

Pour $A < B$, on a l'estimation:

$$\mathcal{A}_c(B^\gamma) - \mathcal{A}_c(A^\gamma) \ll B^\gamma - A^\gamma + 1$$

ainsi que l'estimation:

$$\sum_{A \leq a \leq B} ((a+1)^\gamma - a^\gamma) \ll B^\gamma - A^\gamma + 1$$

si bien que grâce à (8.4):

$$\sum_{A \leq a \leq B} f_\gamma(a) \ll B^\gamma - A^\gamma + 1 \tag{8.5}$$

8.5 Un peu de théorie de la mesure

Dans cette section, nous allons montrer que la preuve du théorème 8.2 se déduit du lemme suivant:

Lemme 8.6 *On a l'inégalité:*

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2} x^{-2\gamma} \left| \sum_{a \leq x} f_\gamma(a) \right|^2 d\gamma \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon} \tag{8.6}$$

pour

$$\gamma_1 < \gamma_2, \tag{8.7}$$

$$\gamma_1 > \frac{\alpha}{2} + \gamma_2 - \gamma_1 + \varepsilon. \tag{8.8}$$

Comme on veut montrer:

$$x^{-(\gamma-\varepsilon)} \left| \sum_{a \leq x} f_\gamma(a) \right| \to 0 \qquad x \to +\infty$$

on doit supposer $\gamma_1 > \frac{\alpha}{2} + \gamma_2 - \gamma_1 + 4\varepsilon$, pour avoir l'existence d'un $K(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2) > 0$ tel que:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2} x^{-2(\gamma-\varepsilon)} \left| \sum_{a \leq x} f_\gamma(a) \right|^2 d\gamma \leq K x^{-2\varepsilon}$$

d'où la condition 8.3, qui provient de l'inégalité $4\varepsilon < \gamma_1 - \frac{\alpha}{2} - (\gamma_2 - \gamma_1)$, en prenant γ_1 et γ_2 suffisamment proches l'un de l'autre.

Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$E_k(x) = \{\gamma \in]\gamma_1, \gamma_2[\mid \ x^{-(\gamma-\varepsilon)} \left| \sum_{a \leq x} f_\gamma(a) \right| \geq \frac{1}{k}\}$$

On a les inégalités:

$$\int_{E_k(x)} \frac{\gamma^{-2} d\gamma}{k^2} \leq \int_{E_k(x)} \gamma^{-2} x^{-2(\gamma-\varepsilon)} \left| \sum_{a \leq x} f_\gamma(a) \right|^2 d\gamma \leq K x^{-2\varepsilon}$$

donc si μ désigne la mesure de *Lebesgue*, on a:

$$\mu(E_k(x)) \leq \gamma_2^2 k^2 K x^{-2\varepsilon}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\varepsilon < 1 < (m+1)\varepsilon \leq 2m\varepsilon$.

On a alors:

$$\sum_{n>0} \mu(E_k(n^m)) < +\infty$$

Donc d'après le lemme de *Borel-Cantelli*, presque tout γ n'est élément que d'un nombre fini de $\{E_k(n^m) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, c'est-à-dire que pour presque tout γ,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|(n^m)^{-(\gamma-\varepsilon)} \sum_{a\le n^m} f_\gamma(a)\right| \le \frac{1}{k}$$

et par intersection (dénombrable) sur k, que pour presque tout γ:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(n^m)^{-(\gamma-\varepsilon)} \sum_{a\le n^m} f_\gamma(a)\right| = 0$$

Pour un tel γ, on va maintenant en déduire:

$$\lim_{x\to+\infty} \left|x^{-(1-c\varepsilon)} \sum_{a\le x^c} f_\gamma(a)\right| = 0$$

On note: $n(x) = [(x^c)^{m^{-1}}]$

(ainsi $n(x)$ est l'unique entier vérifiant: $n(x)^m \le x^c < (n(x)+1)^m$)

On écrit:

$$\begin{aligned}
&\left|\Big(x^{-(1-c\varepsilon)} \sum_{a\le x^c} f_\gamma(a)\Big) - \Big((n(x)^m)^{-(\gamma-\varepsilon)} \sum_{a\le n(x)^m} f_\gamma(a)\Big)\right| \\
&\qquad \le \left|x^{-(1-c\varepsilon)}\Big(\sum_{a\le x^c} f_\gamma(a) - \sum_{a\le n(x)^m} f_\gamma(a)\Big)\right| \\
&\qquad\quad + \left|\Big(x^{-(1-c\varepsilon)} - (n(x)^m)^{-(\gamma-\varepsilon)}\Big) \sum_{a\le n(x)^m} f_\gamma(a)\right|
\end{aligned}$$

(grâce à l'inégalité (8.5))

$$\begin{aligned}
&\le x^{-(1-c\varepsilon)}|x^{c\gamma} - n(x)^{m\gamma} + 1| + |x^{-(1-c\varepsilon)} - (n(x)^m)^{-(\gamma-\varepsilon)}|(n(x)^m)^\gamma \\
&\le |x^c - n(x)^m|\Big(x^{-(1-c\varepsilon)} n(x)^{m(\gamma-1)} + x(n(x)^m)^{-1-\gamma+\varepsilon}\Big) \\
&\ll |x^c - n(x)^m| x^{-c(1-\varepsilon)} \\
&\ll m(x^c)^{\frac{m-1}{m}} (x^c)^{-(1-\varepsilon)} \\
&\le m(x^c)^{-\frac{1}{m}+\varepsilon}
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro puisque: $m\varepsilon < 1$.

8.6 Une majoration d'intégrale

Il reste donc à prouver la majoration du lemme 8.6.

8.6.1 Argument élémentaire

Soit $\eta > 0$. On se servira systématiquement de x^η pour éliminer des puissances de $\ln(x)$, et η sera choisi suffisamment petit en fonction de γ_1,γ_2 et ε.

Grâce à l'estimation(8.5) et à un découpage dyadique, notre preuve se réduit à montrer:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2}x^{-2\gamma}\left|\sum_{a\sim z} f_\gamma(a)\right|^2 d\gamma \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta}$$

pour:

$$z \in [x^{1-\varepsilon}, x] \tag{8.9}$$

et les conditions (8.7) et (8.8) satisfaites.

8.6.2 Séries de *Fourier*

Supposons les conditions (8.7), (8.8) et (8.9) satisfaites.

Posons $H = z^{1-\gamma_1+\frac{\varepsilon}{2}+\eta}$.

Par le développement en série de *Fourier* des parties fractionnaires donné par D.1, on est ramené à majorer les trois intégrales:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x^{-2\gamma}\left|\sum_{0<|h|\leq H}\sum_{a\sim z}\int_{u=0}^{1}(a+u)^{\gamma-1}e(h(a+u)^\gamma)du\right|^2 d\gamma \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta} \tag{8.10}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2}x^{-2\gamma}\left|\sum_{a\sim z}\min(1,\frac{1}{H\parallel a^\gamma\parallel})\right|^2 d\gamma \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta} \tag{8.11}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2}x^{-2\gamma}\left|\sum_{a\sim z}\min(1,\frac{1}{H\parallel (a+1)^\gamma\parallel})\right|^2 d\gamma \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta} \tag{8.12}$$

8.6.3 Queue des séries de *Fourier*

Grâce à l'estimation D.5, on a pour $\gamma > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{a\sim z}\min(1,\frac{1}{H\parallel a^\gamma\parallel}) \ll_\varepsilon z^{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$$

ainsi que:

$$\sum_{a\sim z} \min(1, \frac{1}{H\| (a+1)^\gamma \|}) \ll_\varepsilon z^{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Sous les conditions (8.7), (8.8), on a les estimations précédentes, ce qui nous permet de disposer des inégalités (8.11) et (8.12).

Il reste donc à prouver l'estimation (8.10).

8.6.4 Condition suffisante

Appliquons successivement les deux formes suivantes de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_0^1 f(u)du\right|^2 \leq \int_0^1 |f(u)|^2\, du$$

$$\left|\sum_{0<h\leq H} f(h)\right|^2 \leq H \sum_{0<h\leq H} |f(h)|^2$$

On est ainsi ramené à prouver pour tout $u \in [0,1]$:

$$K(u) \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta}$$

où:

$$K(u) = H \sum_{0<|h|\leq H} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x^{-2\gamma} \left|\sum_{n\sim z} \chi(n)(n+u)^{\gamma-1} e(h(n+u)^\gamma)\right|^2 d\gamma$$

avec: $\chi(n) = 1$ si $n \in \mathcal{A}$ et 0 sinon.

Le reste de la preuve consiste à intervertir les sommations (après avoir développé le carré), de façon à avoir à majorer une intégrale, les sommations sur h et n étant faites ensuite.

8.6.5 L'inégalité de *Weyl - van der Corput*

En appliquant le lemme A.1, on obtient:

$$K(u) \ll \frac{Hz}{Q} \sum_{0<|h|\leq H} \sum_{|q|<Q} \sum_{z<n-q,n+q\leq 2z} \chi(n+q)\chi(n-q) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e(h((n+q+u)^\gamma - (n-q+u)^\gamma))}{x^{2\gamma}(n+q+u)^{1-\gamma}(n-q+u)^{1-\gamma}} d\gamma \qquad (8.13)$$

avec $Q = z^{1-\eta}$

8.6.6 La contribution du terme $q = 0$

On doit avoir l'estimation:

$$\frac{Hz}{Q} H\mathcal{A}(2z) x^{-2\gamma_1} z^{2\gamma_2-2}(\gamma_2 - \gamma_1) \ll x^{-\varepsilon-\eta}$$

c'est-à-dire:

$$x^{-2\gamma_1} z^{\alpha+2(\gamma_2-\gamma_1)+\varepsilon+3\eta} \ll x^{-\varepsilon-\eta}$$

Cette estimation est vraie pourvu que:

$$\gamma_1 \geq \frac{\alpha}{2} + \gamma_2 - \gamma_1 + \varepsilon + 2\eta$$

Or cette inégalité est claire sous la condition(8.8), pour un choix convenable de η.

8.6.7 La contribution des termes $q \neq 0$

Par symétrie on peut supposer $q > 0$.

On va majorer l'intégrale qui apparaît dans l'expression(8.13) en utilisant la seconde formule de la moyenne dont nous suivons la variante suivante (voir [27] paragraphe 12.3):

Lemme 8.7 *Soit f réelle intégrable sur $[a, b]$. Soit ϕ positive, bornée, monotone sur $[a, b]$.*

- *Si ϕ est décroissante alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx$$

- *Si ϕ est croissante alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx$$

On sépare la partie réelle et la partie imaginaire de(8.13). Les deux expressions réelles que l'on obtient seront majorées de la même façon.

Traitons le terme en cosinus.

Remarquons que la partie réelle de l'intégrale de l'expression(8.13) contient les termes suivants:

$$\begin{aligned}
\gamma &\rightarrow x^{-2\gamma} \\
\gamma &\rightarrow (n+q+u)^{\gamma-1} \\
\gamma &\rightarrow (n-q+u)^{\gamma-1} \\
\gamma &\rightarrow \frac{1}{\frac{\partial}{\partial\gamma}(h((n+q+u)^{\gamma}-(n-q+u)^{\gamma}))} \\
\gamma &\rightarrow \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\cos(2\pi h((n+q+u)^{\gamma}-(n-q+u)^{\gamma}))}{2\pi}\right)
\end{aligned}$$

Les quatre premières expressions sont des fonctions monotones de γ, donc en appliquant quatre fois le second théorème de la moyenne et en utilisant la monotonie de ces fonctions on obtient l'estimation pour l'intégrale de l'expression(8.13):

$$\frac{x^{-2\gamma_1}(n+q+u)^{\gamma_2-1}(n-q+u)^{\gamma_2-1}}{h((n+q+u)^{\gamma_1}\ln(n+q+u)-(n-q+u)^{\gamma_1}\ln(n-q+u))}$$

Pour $n \sim z$, $0 < q \leq Q$ et $0 \leq u \leq 1$, on sait bien estimer l'expression précédente. En particulier, on a la minoration:

$$(n+q+u)^{\gamma_1}\ln(n+q+u)-(n-q+u)^{\gamma_1}\ln(n-q+u) \gg_{\varepsilon,\gamma_1} qz^{\gamma_1-1}$$

on en déduit la condition suffisante:

$$\frac{Hz}{Q}\sum_{0<|h|\leq H}\sum_{0<|q|<Q}\sum_{z<n-q,n+q\leq 2z}\frac{x^{-2\gamma_1}z^{2\gamma_2-2}}{hqz^{\gamma_1-1}} \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta}$$

ce qui nous ramène à:

$$z^{1-\gamma_1+\frac{\varepsilon}{2}+\eta}z^{\eta}\ln(H)\ln(Q)\mathcal{A}(2z)x^{-2\gamma_1}z^{2\gamma_2-2}z^{1-\gamma_1} \ll_{\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2} x^{-\varepsilon-\eta}$$

et cette dernière relation est vraie pourvu que:

$$\gamma_1 \geq \frac{\alpha}{2}+\gamma_2-\gamma_1+\frac{3\varepsilon}{4}+2\eta$$

ce qui se déduit aisément de la condition(8.8) pour un choix convenable de η.

La preuve est ainsi complète.

Au lieu d'appliquer le shift, remarquons qu'il était possible d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On aurait ensuite pu faire un découpage suivant les valeurs de $|n_1^\gamma - n_2^\gamma|$ et traiter un problème très simple d'espacement. Le résultat aurait été le même puisque la condition la plus restrictive provient de la diagonale (la contribution de $q = 0$).

Annexe A

Transformations de sommes

A.1 L'inégalité de *Weyl - van der Corput*

Nous la donnons sous la forme symétrique du lemme 2 de [9].

Lemme A.1 *Soit $L > K$, $Q > 0$, et z_k des nombres complexes. On a alors:*

$$|\sum_{K\leq k<L} z_k|^2 \leq (2+\frac{L-K}{Q})\sum_{|q|<Q}(1-\frac{|q|}{Q})\sum_{K\leq k-q,k+q<L} z_{k+q}\bar{z}_{k-q}$$

A.2 La formule de *Perron*

Cette formule classique permet de libérer des doubles sommes d'une condition multiplicative, ce qui permet de rendre les variables de sommations indépendantes.

Lemme A.2 *Soient $0 < L \leq \mu N \leq \nu N < \lambda L$, et soit c_n une suite de nombres complexes ($|c_n| \leq 1$). On a l'égalité:*

$$\sum_{\mu N<n\leq \nu N} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\Big(\sum_{L<l<\lambda L} c_l l^{-it}\Big)N^{it}\frac{(\nu^{it}-\mu^{it})}{t}dt + O_\lambda(\ln(2+L))$$

Annexe B

La formule sommatoire de Poisson

La formule sommatoire de *Poisson* s'écrit, pour une fonction f convenable, de transformée de *Fourier* $\hat{f}$:

$$\sum_n f(n) = \sum_l \hat{f}(l)$$

Elle permet donc de transformer une somme sur des entiers en une autre, que l'on espère pouvoir traiter plus efficacement. En effet, d'après le lemme 4.7 de [28], on a le:

Lemme B.1 *Soit $f(x)$ une fonction réelle ayant une dérivée $f'(x)$ continue et strictement décroissante sur $[a,b]$, et soit $f'(b) = \alpha$, $f'(a) = \beta$. Alors:*

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha-\eta<\nu<\beta+\eta} \int_a^b e(f(x-\nu x))dx + O(\ln(\beta-\alpha+2))$$

où η est une constante positive quelconque plus petite que 1.

Dans cette formule, il reste encore à évaluer l'intégrale, ce qui en général s'accomplit par la méthode dite de la phase stationnaire.

Pour avoir un terme d'erreur précis, on fait souvent une petite hypothèse supplémentaire sur f (voir par exemple [33] page 89).

Une forme particulièrement utile est donnée par le lemme 6 de [15] que nous énoncerons de la façon suivante:

Lemme B.2 *Soient $0 < a \leq b < 2a$. Soit R un ouvert convexe contenant le segment réel $[1, b/a]$. Soit f une fonction holomorphe sur $aR = \{az \mid z \in R\}$ et vérifiant*

$|f''(z)| \leq M$ pour $z \in aR$. Supposons de plus que $f(x)$ est réel lorsque $x \in aR$ est réel et que $f''(x) \leq -\kappa M$ avec $\kappa > 0$. Soit $f'(b) = \alpha$, $f'(a) = \beta$, et définissons x_ν pour chaque entier ν de l'intervalle $\alpha < \nu \leq \beta$ par $f'(x_\nu) = \nu$. Alors:

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) = e(-\frac{1}{8}) \sum_{\alpha<\nu<\beta} |f''(x_\nu)|^{-\frac{1}{2}} e(f(x_\nu - \nu x_\nu)) + O(M^{-\frac{1}{2}}) + O(\ln(M(b-a)+2))$$

où les constantes implicites dépendent uniquement de κ et R.

Dans le cas où l'on ne désire pas une estimation si précise, on peut se contenter de la majoration suivante (voir par exemple [28] section 4.19):

Lemme B.3 *Soit f une fonction n fois dérivable telle que $|f^{(n)}(x)| \geq \lambda_n > 0$. Alors on a l'estimation:*

$$\int_a^b e(f(t))dt \ll_n \lambda_n^{-\frac{1}{n}}$$

Annexe C

Paires d'exposants

La méthode des paires d'exposants est due à *van der Corput* [29] et [30] et *Phillips* [23].

Nous reprenons la définition du paragraphe 5.20 de [28].

Définition C.1 *Soient s,c des constantes positives, et soit $\mathcal{F}(s,c)$ l'ensemble des quadruplets (N,I,f,y) tels que:*

- *N et y sont positifs et satisfont $yN^{-s} \geq 1$,*
- *I est un sous intervalle de $]N,2N]$,*
- *f est une fonction réelle sur I, indéfiniment dérivable, telle que pour tout $n \geq 0$:*

$$\left| f^{(n+1)}(x) - \frac{d^n}{dx^n}(yx^{-s}) \right| \leq c \left| \frac{d^n}{dx^n}(yx^{-s}) \right|$$

On dit que (p,q) est une paire d'exposants si $0 \leq p \leq \frac{1}{2} \leq q \leq 1$ et si pour tout $s > 0$ il existe $c = c(p,q,s) > 0$ suffisamment petit tel que l'on ait l'estimation:

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll_{p,q,s} (yN^{-s})^p N^q$$

uniformément pour $(N,I,f,y) \in \mathcal{F}(s,c)$

Observons que yN^{-s} est l'ordre de grandeur de $f'(x)$.

Il est immédiat que $(0,1)$ est une paire d'exposants. Pour en fabriquer d'autres plus intéressantes, on dispose des méthodes suivantes:

Lemme C.2 (Processus A) *Supposons que (p,q) soit une paire d'exposants. Alors on fabrique une nouvelle paire d'exposants $A(p,q)$ par:*

$$A(p,q) = \left(\frac{p}{2p+2}, \frac{p+q+1}{2p+2}\right)$$

Lemme C.3 (Processus B) *Supposons que (p,q) soit une paire d'exposants telle que $p+2q \geq \frac{3}{2}$. Alors on fabrique une nouvelle paire d'exposants $B(p,q)$ par:*

$$B(p,q) = (q - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2})$$

On obtient ainsi les paires d'exposants:

$$\begin{aligned} B(0,1) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ AB(0,1) &= (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}) \\ ABA^3B(0,1) &= (\frac{11}{82}, \frac{57}{82}) \\ BA^5BA^2BA^2BABA^2B(0,1) &= (\frac{6880}{14923}, \frac{7552}{14923}) \end{aligned}$$

Annexe D

La fonction partie fractionnaire

Nous allons résumer ici quelques résultats classiques.

Soit $H \geq 1$.

Un développement en série de *Fourier* de $\{\theta\}$ est:

$$\{\theta\} = \frac{1}{2} - \sum_{0<|h|\leq H} \frac{e(\theta h)}{2i\pi h} + O(\min(1, \frac{1}{H\| \theta \|})) \tag{D.1}$$

On développe aussi le terme d'erreur en série de *Fourier*:

$$\min(1, \frac{1}{H\| \theta \|}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h e(\theta h) \tag{D.2}$$

avec:

$$a_h \ll \min(\frac{\ln H}{H}, \frac{1}{|h|}, \frac{H}{h^2}) \tag{D.3}$$

si bien que pour tout $\beta \in [-1, 1[$:

$$\sum_{h\neq 0} |a_h||h|^\beta \ll_\beta H^\beta (\ln 2H)^2 \tag{D.4}$$

D'autre part on a le lemme élémentaire:

Lemme D.1 *Soient $N < N_1 \leq 2N$, $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1$, alors uniformément pour $0 \leq u \leq 1$ on a l'estimation:*

$$\sum_{N<n\leq N_1} e(\lambda(n+u)^\gamma) \ll \min(N, |\lambda|^{-1} N^{1-\gamma} + |\lambda|^p N^{p(\gamma-1)+q})$$

où (p, q) est une paire d'exposants.

On en déduit, en prenant $(p,q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, l'estimation:

$$\sum_{N<n\leq 2N} \min(1, \frac{1}{H\| n^\gamma - \theta \|}) \ll NH^{-1}(\ln 2H) + N^{1-\gamma} + (HN^\gamma)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(D.5)}$$

uniformément pour $0 \leq \theta \leq 1$.

Annexe E

Identités combinatoires

Ces identités permettent de transformer des sommes sur les nombres premiers en sommes sur des intervalles particuliers vérifiant certaines conditions.

E.1 L'identité de *Vaughan*

On peut lui donner la forme suivante:

Lemme E.1 *Il existe six fonctions arithmétiques $\alpha_i(n)$ $(1 \leq i \leq 6)$ vérifiant l'inégalité:*

$$|\alpha_i(n)| \leq d(n) \ln n$$

telles que, pour tous les nombres K et K' $(100 \leq K' < K \leq 2K')$ et toute fonction arithmétique g, on ait l'égalité:

$$\sum_{K' < k \leq K} \Lambda(k) g(k) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

où:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{m \leq K^{\frac{1}{3}}} \alpha_1(m) \sum_{K' < mn \leq K} g(mn) \\
S_2 &= \sum_{m \leq K^{\frac{1}{3}}} \alpha_2(m) \sum_{K' < mn \leq K} (\ln n) g(mn) \\
S_3 &= \sum_{K^{\frac{1}{3}} \leq m < K^{\frac{2}{3}}} \sum_{\substack{K^{\frac{1}{3}} \leq n < K^{\frac{2}{3}} \\ K' < mn \leq K}} \alpha_3(m) \alpha_4(n) g(mn) \\
S_4 &= \sum_{K^{\frac{1}{3}} \leq m < K^{\frac{2}{3}}} \sum_{\substack{K^{\frac{1}{3}} \leq n < K^{\frac{2}{3}} \\ K' < mn \leq K}} \alpha_5(m) \alpha_6(n) g(mn)
\end{aligned}$$

On a l'habitude de dire que S_1 et S_2 sont des sommes de type I, c'est-à-dire que l'une au moins des sommations se fait sur une variable régulière, alors que S_3 et S_4 sont des sommes de type II, c'est-à-dire qu'aucune des sommations n'est a priori sur une variable régulière, mais chacune des sommations est longue.

Pour les sommes de type II, on a la possibilité d'utiliser la majoration symétrique, en échangeant les rôles de m et de n, ce qui réduit l'étude à l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ au lieu de l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

E.2 L'identité de *Heath-Brown*

Essayons tout d'abord d'exposer l'intérêt pratique de cette identité.

Comme dans l'identité de *Vaughan*, on se ramène à un problème d'estimation de sommes de type I et de type II, mais ici les intervalles de sommation ne sont pas les mêmes:

- pour les sommes de type II, on doit savoir les majorer lorsque l'on a une variable de sommation dans l'intervalle $[K^{a_1}, K^{a_2}]$,
- pour les sommes de type I, on doit savoir les majorer lorsque la variable de sommation régulière est dans l'intervalle $[K^{a_3}, K]$

où K désigne la même chose que pour l'identité de *Vaughan*, et a_1,a_2,a_3 vérifient les conditions $a_3 \geq 2a_1$, $2a_3 + a_1 \geq 1$, $3a_2 \geq 1$.

Cette identité est apparue dans le lemme 3 de [15]:

Lemme E.2 *Soient* $3 \leq u < v < z < x$ *et supposons que* $z - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, *et que* $z \geq 4u^2$, $x \geq 64z^2u$, $v^3 \geq 32x$. *On suppose de plus que* $f(n) = 0$ *lorsque* $n \leq \frac{x}{2}$ *ou* $n > x$ *et que* $|f(n)| \leq f_0$ *ailleurs. Alors:*

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_n \Lambda(n) f(n) \\ &= \Sigma_1 + \Sigma'_1 - \Sigma_2 - \Sigma'_2 - \Sigma_3 - \Sigma'_3 \end{aligned}$$

avec:

$$\Sigma_1, \Sigma'_1, \Sigma_2, \Sigma'_2 \ll (\ln x) \max_N \sum_{m=1}^{\infty} d_3(n) \Big| \sum_{z<n\leq N} f(mn) \Big|$$

$$\Sigma_3, \Sigma'_3 \ll f_0 + (\ln x)^8 \sup \sum_{m=1}^{\infty} d_4(n) \Big| \sum_{u<n\leq v} g(n) f(mn) \Big|$$

où le sup *est pris sur toutes les fonctions arithmétiques* $g(n)$ *telles que* $|g(n)| \leq d_3(n)$

Dans ce lemme, $\Sigma_1, \Sigma'_1, \Sigma_2, \Sigma'_2$ peuvent être cataloguées comme sommes de type I, tandis que Σ_3, Σ'_3 seront de type II.

Pour une autre approche, on pourra se reporter à [14].

Bibliographie

[1] A. Balog. On the fractional part of p^θ. *Arch. Math.*, 40:434–440, 1983.

[2] A. Balog. On the distribution of p^θ mod 1. *Acta Mathematica Hungarica*, 35:179–199, 1985.

[3] A. Balog and J. Friedlander. A Hybrid of Theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro. *to appear*, 1990.

[4] E. Bombieri and H. Iwaniec. On the Order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. *Annali Scuola Norm.Sup.Pisa*, 13(3):449–472, 1986.

[5] J.-M. Deshouillers. *Propriétés additives et arithmétiques de suites à croissance polynômiale.* Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 1972.

[6] J.-M. Deshouillers. Problème de Waring avec exposants non entiers. *Bulletin Société mathématique de France*, 101:285–295, 1973.

[7] J.-M. Deshouillers. Un problème binaire en théorie additive. *Acta Arithmetica*, 25:393–403, 1974.

[8] J.-M. Deshouillers. Nombres premiers de la forme $[n^c]$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Séries A-B*, 282(3):A131–A133, 1976.

[9] E. Fouvry and H. Iwaniec. Exponential Sums with Monomials. *Journal of Number Theory*, 33(3):311–333, Nov. 1989.

[10] S. Graham. An algorithm for computing optimal exponent pairs. *J. London Math. Soc.*, 33(2):203–218, Apr. 1986.

[11] S. Graham and G.Kolesnik. *Van der corput's Method of Exponential Sums*, volume 126. Cambridge University Press, Lecture Note Series, 1991.

[12] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, 1938.

[13] G. Harman. Fractional and integral parts of p^λ. *Acta Arithmetica*, 58(2):141–152, 1991.

[14] D. R. Heath-Brown. Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity. *Can.J.Math.*, 34(6):1365–1377, Dec. 1982.

[15] D. R. Heath-Brown. The Piatetski-Shapiro Prime Number Theorem. *Journal of Number Theory*, 16:242–266, Apr. 1983.

[16] L. Hong-Quan and J. Rivat. On the Piatetski-Shapiro Prime Number Theorem. *preprint*, 1990.

[17] M. Huxley and N. Watt. Exponential Sums and the Riemann zeta function. *Proceedings London Math. Soc.*, 53(1):1–24, July 1988.

[18] H. Iwaniec. A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arithmetica*, 37(1):307–320, 1980.

[19] G. Kolesnik. The distribution of primes in sequences of the form $[n^c]$. *Mat. Zametki*, 2(2):117–128, 1972.

[20] G. Kolesnik. Primes of the form $[n^c]$. *Pacific J. Math.*, 118(2):437–447, 1985.

[21] D. Leitmann. Durchschnitte von Piatetski-Shapiro Folgen. *Monatshefte für Mathematik*, 94:33–44, 1982.

[22] D. Leitmann and D. Wolke. Primzahlen de Gestalt $[f(n)]$. *Math. Z.*, 145:81–92, 1975.

[23] E. Phillips. The zeta-function of Riemann; Further developments of van der Corput's method. *Quart. J. Math. Oxford*, 4(1):209–225, 1933.

[24] I. Piatetski-Shapiro. On the distribution of prime numbers in sequences of the form [f(n)]. *Math. Sbornik*, 33(1):559–566, 1933.

[25] G. Srinivasan. On the number of Abelian groups of a given order. *Acta Arithmetica*, 23:195–205, 1973.

[26] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Institut Elie Cartan, Université de Nancy I, 1990.

[27] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* Oxford University Press, 1932.

[28] E. C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-function, revised by D.R. Heath-Brown.* Oxford Science Publications, second edition, 1986.

[29] J. van der Corput. Zahlentheoretische Abschäzungen. *M.A.*, 84:53–79, 1921.

[30] J. van der Corput. Verschärfung der Abschäzung beim Teilerproblem. *M.A.*, 87:39–65, 1922.

[31] R. Vaughan. *The Hardy-Littlewood Method.* Cambridge University Press, 1981.

[32] I. Vinogradov. Representation of an odd number as the sum of three primes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 15:291–294, 1937.

[33] I. Vinogradov. *Selected Works.* Springer Verlag, 1985.

[34] E. Whittaker and G. Watson. *A course of modern analysis.* Cambridge University Press, 1962.