NATHALIE WACH

Représentations p-adiques cristallines du groupe de Galois d'un corps local, 1994

63902

ORSAY

N° D'ORDRE :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR

NATHALIE WACH

SUJET : Représentations p-adiques cristallines du groupe de Galois d'un corps local.

Soutenue le 22 septembre 1994 devant la Commission d'examen

MM. L. ILLUSIE Président
P. BERTHELOT
J-M FONTAINE
M. RAYNAUD
J-P WINTENBERGER

J'ai préparé cette thèse sous la direction de J-M Fontaine, que je remercie très sincèrement pour tous les conseils qu'il m'a prodigués, pour la patience dont il a fait preuve à mon égard, quatre années durant.

Je voudrais aussi le remercier de m'avoir permis d'assister à plusieurs congrès et rencontres, notamment à Cambridge en mai-juin 1994. A ce propos, ma gratitude va également à l'Institut Isaac Newton qui m'a financée pendant ces deux mois.

Mes remerciements s'adressent aussi à P. Berthelot et à J-P Wintenberger, qui ont accepté malgré de courts délais d'être mes rapporteurs, à L. Illusie et à M. Raynaud pour avoir consenti à faire partie de mon jury.

Je n'oublierai ni J. Tilouine, ni A. Mokrane, qui m'ont si gentiment proposé de m'intégrer à leur groupe de travail.

Introduction.

Dans tout ce travail, p est un nombre premier, K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, d'indice de ramification absolue e et de corps résiduel k parfait de caractéristique p. On note W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 son corps des fractions ; tous trois sont munis d'une action de Frobenius, notée σ (on a $\sigma(x) = x^p$ pour $x \in k$). On fixe $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Une représentation p-adique de G_K est la donnée d'un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une action continue de G_K ; on note $\mathbf{Rep_{Q_p}(G_K)}$ la catégorie des représentations p-adiques. De même une représentation de G_K de p-torsion (respectivement $\mathbf{Z}_p$-adique) est la donnée d'un $\mathbf{Z}_p$-module de longueur finie (respectivement de type fini) muni d'une action continue de G_K ; on note $\mathbf{Rep_{Z_p,tors}(G_K)}$ (respectivement $\mathbf{Rep_{Z_p}(G_K)}$)la catégorie des représentations de G_K de p-torsion (respectivement $\mathbf{Z}_p$-adiques).

Ce travail fait suite à l'article de Fontaine [F91] paru dans *The Grothendieck Festschrift* dans lequel est construite une équivalence entre la catégorie des représentations p-adiques (respectivement de p-torsion, respectivement $\mathbf{Z}_p$-adiques) et une catégorie convenable de (φ, Γ)-modules sur un corps $\mathcal{E}$ complet pour une valuation discrète (respectivement sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$). Comme il l'est annoncé dans l'introduction de cet article, le but est de pouvoir décrire les représentations qui interviennent en géométrie algébrique (de Hodge-Tate, de De Rham, semi-stables, cristallines) en termes de (φ, Γ)-modules ; dans ce texte, on s'intéresse plus particulièrement aux représentations cristallines. On obtient une condition suffisante pour qu'une représentation V soit cristalline ou potentiellement cristalline, condition qui se vérifie sur le (φ, Γ)-module associé à la représentation ; le théorème 2 montre que cette condition est nécessaire dans un cas particulier.

L'intérêt de cette description réside dans le fait que le module des différentielles $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/W}$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, ce qui permet d'introduire des techniques différentielles, en particulier les (φ, Γ)-modules sont munis d'une connexion (cf [F91]). L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un anneau de Cohen, de corps résiduel E, le corps des normes de l'extension $K.K_\infty/K$, qui est muni d'un Frobenius, relèvement du Frobenius sur E, et d'une action naturelle de Γ ; le Frobenius et Γ agissent également sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}$, une extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ contenue dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$, et sur son complété $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$. L'anneau qui joue ici un rôle important est $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$; il est muni d'un Frobenius ainsi que d'une clôture séparable de E. Par l'inclusion $W(R) \subset A_{cris}$, A_S^+ s'injecte dans A_{cris} mais ne contient pas de générateur du module de Tate $\mathbf{Z}_p(1)$. Toutefois, si t est un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$, $e^t - 1$ est un élément de A_S^+ et aussi de $S = W(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, ce qui semble suffisant.

De plus, les techniques différentielles restent possibles sur les (φ, Γ)-modules sur S.

Dans la partie A, on rappelle les résultats sur les représentations p-adiques et les (φ, Γ)-modules contenus dans [F91] et utilisés par la suite. On trouvera un énoncé précis des deux théorèmes à la fin de cette partie.

La partie B est entièrement consacrée aux représentations cristallines. On y rappelle les définitions et certains des résultats contenus dans [F79] et [F-L]. Le résultat de [F-L] sur les représentations de p-torsion est redémontré, d'une manière un peu différente, qui ne nécessite pas l'étude des objets simples de la catégorie des modules filtrés, contrairement à ce qui était le cas dans l'article en question.

La démonstration des deux résultats énoncés à la fin de la partie A forme la partie C, qui se divise en deux sous-parties : dans la première est démontré le théorème 1 sur les représentations p-adiques, tandis que dans la deuxième on démontre le théorème 2 concernant les représentations de p-torsion et $\mathbf{Z}_p$-adiques.

Plan.

A. Rappels sur les représentations p-adiques et énoncé des résultats principaux.

A.1. Soit $\mathbf{C}$ le complété de $\bar{K}$ et $v_{\mathbf{C}}$ la valuation de $\mathbf{C}$ normalisée par $v_{\mathbf{C}}(p) = 1$. On considère l'ensemble, noté $\mathrm{Fr}\, R$ (cf. [F82], p. 535), des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{C}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n, qu'on munit d'une addition et d'une multiplication en posant, pour $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$:

$$xy = (x^{(n)}.y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$$
$$x + y = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{avec} \quad z^{(n)} = \lim_{m\to+\infty}(x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^m}.$$

Alors, $\mathrm{Fr}\, R$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p, complet pour la valuation définie par $v(x) = v_{\mathbf{C}}(x^{(0)})$. On note R l'anneau de la valuation, dont le corps résiduel s'identifie au corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{K}$ (voir le paragraphe B.1.2.1. pour plus de détails).

Si A est une k-algèbre, $W(A)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A et $W_{K_0}(A) = K_0 \otimes_W W(A) = W(A)[1/p]$; si $a \in A$, on note $[a] = (a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ le représentant de Teichmüller de a dans $W(A)$. On note φ l'endomorphisme de Frobenius de $W(A)$ ainsi que son extension à $W_{K_0}(A)$; ainsi, si $\lambda \in W$, on a $\varphi(\lambda) = \sigma(\lambda)$. En particulier ceci s'applique à $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$.

D'autre part, le groupe G_K, qui opère par continuité sur $\mathbf{C}$, opère par fonctorialité sur $\mathrm{Fr}\, R$, R et $W(R)$ et les anneaux $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{K_0}(R)$ s'identifient à des sous-anneaux de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$ stables par G_K et φ.

On note $\mathbf{Z}_p(1) = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mu_{p^n}(\bar{K})$ le module de Tate du groupe multiplicatif et pour tout $i \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{Z}_p(i) = Sym^i_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p(1)$ et $\mathbf{Z}_p(-i)$ son dual. Pour tout $\mathbf{Z}_p$-module T et pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $T(i) = T \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(i)$.

A.2. Le module de Tate $\mathbf{Z}_p(1) = T_p(\mathbf{G}_m)$ s'identifie au sous-$\mathbf{Z}_p$-module du groupe multiplicatif des unités de R congrues à 1 modulo l'idéal maximal, formé des x tels que $x^{(0)} = 1$. Choisissons un générateur de ce module, c'est-à-dire un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et considérons les éléments $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, \cdots, 0, \cdots)$ et $\pi = [\varepsilon] - 1$ dans $W(R)$. Alors l'adhérence S de la sous W-algèbre de $W(R)$ engendrée par π s'identifie à l'algèbre $W[[\pi]]$ des séries formelles en π à coefficients dans W ; de plus S est stable par φ et G_K, avec les relations suivantes :

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$$
et
$$g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1$$

où χ est le caractère cyclotomique, décrivant l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. On note $S[1/p] = K_0 \otimes_W S$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit K_n le sous-corps de $\bar{K}$ engendré sur K_0 par les racines p^n-ièmes de l'unité. On pose $K_\infty = \cup_{n\geq 1} K_n$, $\Gamma_{K_0} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$ et H_{K_0} le noyau de la projection de G_{K_0} sur Γ_{K_0}. On dispose d'une suite exacte :

$$1 \to H_{K_0} \to G_{K_0} \to \Gamma_{K_0} \to 1 \quad .$$

Plus généralement, si L est une extension algébrique de K_0 contenue dans $\bar{K}$ et si $G_L = \mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$, on pose $H_L = G_L \cap G_{K_\infty}$ et $\Gamma_L = G_L/H_L$. On dispose alors d'une suite exacte similaire à la précédente :

$$1 \to H_L \to G_L \to \Gamma_L \to 1 \quad .$$

On note Γ_f le sous-groupe de torsion de Γ_{K_0} et on pose $S_0 = S^{\Gamma_f}$; on montre, si $p \neq 2$, (cf. [F91], p 268-273) que $S_0 = W[[\pi_0]]$, où $\pi_0 = -p + \sum_{a\in \mathbf{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$. De plus ,

$$\begin{aligned} &\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1} \quad \text{où } u \text{ est une unité de } S_0 \text{ et } q = \pi_0 + p \\ \text{et} \quad &\gamma(\pi_0) \equiv \chi(\gamma)^{p-1}\pi_0 \quad \text{modulo } \pi_0^2 \text{ pour } \gamma \in \Gamma_{K_0} \quad . \end{aligned}$$

Si $p = 2$, on a $S_0 = W[[\pi_0]]$ avec $\pi_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1}$ et

$$\begin{aligned} &\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^2 \quad \text{où } u \text{ est une unité de } S_0 \text{ et } q = \pi + p \\ &\gamma(\pi_0) \equiv \chi(\gamma)^2 \pi_0 \quad \text{modulo } \pi_0^2 \text{ pour } \gamma \in \Gamma_{K_0} \quad . \end{aligned}$$

Remarque : Ces notations ne sont pas exactement les mêmes que celles de [F91] ou [F93], où π était noté π_ε et de même S était noté S_ε. L'anneau qui s'appelle S_0 ici est l'anneau S de la deuxième partie de cet article.

On note $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ le complété pour la topologie p-adique de $S[1/q]$. C'est l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, noté $\mathcal{E}$. Comme q est inversible dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$, l'inclusion de S dans $W(R)$ se prolonge en un plongement de $S[1/q]$ dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ s'identifie à l'adhérence de $S[1/q]$ dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$, tandis que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_\mathcal{E}[1/p]$ s'identifie à un sous-corps de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$. Alors si $E = \mathcal{O}_\mathcal{E}/p\mathcal{O}_\mathcal{E}$, on a

$$E = \mathrm{Frac}(S/pS) = k((\bar{\pi})) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_E = S/pS = k[[\bar{\pi}]]$$

où $\bar{\pi}$ est la réduction modulo p de π. De plus, si $\hat{\mathcal{E}}_{nr}$ désigne l'adhérence dans $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$ de l'extension maximale non ramifiée $\mathcal{E}_{nr}$ de $\mathcal{E}$ contenue dans $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\, R)$, $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}/p\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est une clôture séparable $E^{sép}$ de E , avec une identification des groupes de Galois

$$H_{K_0} = \mathrm{Gal}(E^{sép}/E) = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr}/\mathcal{E}) \quad .$$

De même, pour toute extension finie L de K_0 contenue dans $\bar{K}$, $\mathcal{E}_L = (\mathcal{E}_{nr})^{H_L}$ est un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ et de corps résiduel $E_L = (E^{sép})^{H_L}$.

A.3. Soit A un anneau noethérien, muni d'une topologie, pour laquelle il est séparé et complet, d'un endomorphisme noté σ et d'une action d'un groupe profini Γ continue, compatible à la structure d'anneau et commutant à σ. On suppose en outre que le morphisme $\sigma : A \to A$ est plat. Un φ-module sur A est un A-module muni d'un endomorphisme φ, semi-linéaire par rapport à σ ; on note $\mathbf{\Phi M_A}$ la catégorie formée des φ-modules sur A. Si M est un tel module, on note M^σ le A-module déduit de M par l'extension des scalaires $\sigma : A \to A$ et on dit que M est *étale* s'il est de type fini sur A et si l'application linéaire $\Phi : M^\sigma \to M$, déduite de φ en posant $\Phi(\lambda \otimes x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda \in A$ et $x \in M$, est bijective.

Un (φ, Γ)-module sur A est un φ-module sur A muni en plus d'une action de Γ, semi-linéaire par rapport à l'action de Γ sur A, cette action commutant avec l'endomorphisme φ. On dit qu'un (φ, Γ)-module est étale si le φ-module sous-jacent l'est et si l'action de Γ est continue. Les (φ, Γ)-modules étales définissent une catégorie abélienne notée $\mathbf{\Gamma\Phi M_A^{\acute{e}t}}$. Dans la suite, on pose $\Gamma = \Gamma_K$.

J-M Fontaine a montré dans [F91] (p. 274) qu'il existait une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p}}(\mathbf{G_K})$ induite par les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ et $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$,

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p}}(\mathbf{G_K}) & \to & \mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} & \\ & T & \mapsto & \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T) & = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_K} \end{array}$$

et son quasi-inverse

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : & \mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} & \to & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p}}(\mathbf{G_K}) & \\ & \mathcal{N} & \mapsto & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}) & = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} \mathcal{N})^{\varphi=1} \quad . \end{array}$$

Dans la suite de ce texte, on va davantage utiliser la version contravariante de ces foncteurs. On pose

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty} = \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p^n\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} = \mathcal{E}_{nr}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} \quad .$$

Pour tout objet T de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p},\mathbf{tors}}(\mathbf{G_K})$, on note $T\check{}$ le $\mathbf{Z}_p$-module des applications linéaires de T dans $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ sur lequel G_K agit via $(g\eta)(t) = \eta(g^{-1}t)$ pour $g \in G_K$, $\eta \in T\check{}$ et $t \in T$. L'anti-équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p},\mathbf{tors}}(\mathbf{G_K})$ et $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathbf{tors}}$, sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ formée des objets de torsion, est alors obtenue en associant à T le module $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T\check{})$ ou bien également décrite par :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p},\mathbf{tors}}(\mathbf{G_K}) & \to & \mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathbf{tors}} & \\ & T & \mapsto & \mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T) & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) \end{array}$$

tandis qu'un quasi-inverse est donné par

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{V}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : & \mathbf{\Gamma\Phi M}^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathbf{tors}} & \to & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p},\mathbf{tors}}(\mathbf{G_K}) & \\ & \mathcal{N} & \mapsto & \mathbf{V}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}) & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) \quad . \end{array}$$

De même, si T est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p}}(\mathbf{G_K})$ sans p-torsion,

$$\mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}})$$

s'identifie à

$$\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T/p^nT)$$

et si $\mathcal{N}$ est un (φ,Γ)-module étale libre sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$,

$$\mathbf{V}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\mathbf{K}}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}})$$

s'identifie à

$$\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{V}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}/p^n\mathcal{N}) \quad .$$

Soit $\mathbf{\Gamma\Phi M}^0_{\mathcal{E}_\mathbf{K}}$ la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathcal{E}_K$ obtenus à partir de φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ en rendant p inversible. On sait (cf. [F91], p 274) que le foncteur $\mathbf{V}_\mathcal{E}$ défini par

$$\mathbf{V}_\mathcal{E}(\mathcal{M}) = (\hat{\mathcal{E}}_{nr} \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathcal{M})^{\varphi=1}$$

induit une équivalence entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}^0_{\mathcal{E}_\mathbf{K}}$ et la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q_p}}(\mathbf{G_K})$ des représentations p-adiques de G_K , avec pour quasi-inverse le foncteur

$$\mathbf{D}_\mathcal{E} : V \mapsto \mathbf{D}_\mathcal{E}(V) = (\hat{\mathcal{E}}_{nr} \otimes_{\mathbf{Q_p}} V)^{H_K}.$$

Comme précédemment, il existe une version contravariante de ces deux foncteurs, les foncteurs

$$\mathbf{V}^*_\mathcal{E} : \mathcal{M} \mapsto \mathbf{V}^*_\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{E}_\mathbf{K}}}(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{E}}_{nr})$$

et

$$\mathbf{D}^*_\mathcal{E} : V \mapsto \mathbf{D}^*_\mathcal{E}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, \hat{\mathcal{E}}_{nr}) \quad .$$

A.4. *Γ-modules sur $K_0((t))$ et connexion.*

Soit $\hat{S}_{K_0} = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} S[1/p]/\pi^n S[1/p]$; alors $t = \log(1+\pi)$ est un élément de $\hat{S}_{K_0}$ et $\hat{S}_{K_0} = K_0[[t]]$, de même $\hat{S}_{K_0}[1/t] = K_0((t))$. Pour $g \in \Gamma$, on a $g(t) = \chi(g)t$ où χ est le caractère cyclotomique.

Si N est un $K_0[[t]]$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ, pour g suffisamment petit dans Γ, la série

$$\log g = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(g-1)^n}{n} : N \to N$$

converge et $\nu = \log g / \log \chi(g)$ ne dépend pas du choix de g. On peut alors définir une connexion régulière

$$\nabla : N[1/t] \to N[1/t] \otimes_{K_0((t))} \Omega^1_{K_0((t))}$$

comme l'unique connexion telle que $\nabla(x) = \nu(x)\frac{dt}{t}$, pour tout $x \in N$.

Si M est un Γ-module sur $S[1/p]$, le module $\hat{M}[1/t] = (\varprojlim_{n \in \mathbf{N}} M/\pi^n M)[1/t]$ est un $K_0((t))$-module muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ, d'où une connexion qu'on note $\nabla_{\hat{M}}$.

A.5. *Représentations p-adiques de G_K.*

Soient V une représentation p-adique de G_K de dimension d sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{M} = \mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V)$. Rappelons (cf [F91], p. 282-285) que la réunion $j_*(\mathcal{M})$ des sous-S-modules de type fini de $\mathcal{M}$ stables par φ est un $S[1/p]$-module libre de rang fini $d' \leq d$ stable par φ et Γ ; c'est donc un (φ, Γ)-module sur $S[1/p]$. L'application naturelle

$$\mathcal{E}_K \otimes_{S[1/p]} j_*(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

est injective ; c'est un isomorphisme si et seulement si $d' = d$, auquel cas on dit que V est de hauteur finie.

On se propose de montrer le résultat suivant :

THEOREME 1 :

Supposons $K \subset K_\infty$; soit V une représentation p-adique de G_K de dimension d et de hauteur finie et soit $M = j_*(\mathcal{M})$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :
1) V est potentiellement cristalline,
2) il existe une extension finie L de K contenue dans K_∞ telle que la représentation de G_L déduite de V par restriction soit cristalline,
3) V est une représentation de De Rham,
4) il existe un entier r et un sous-S-module N libre de rang d de M stable par Γ et tel que l'action de Γ soit finie sur $(N/\pi N)(-r)$.
5) la connexion $\nabla_{\hat{M}}$ est triviale.

En outre, s'il en est ainsi, pour que V soit cristalline en tant que représentation de G_L, il faut et suffit que Γ_L opère trivialement sur $\operatorname{Ker} \nabla_{\hat{M}}$.

Remarques :

a) On verra au cours de la démonstration que, si l'action de Γ est triviale sur $(N/\pi N)(-r)$, alors V est cristalline,

b) 2) $\Rightarrow$ 1) est trivial,

c) 1) $\Rightarrow$ 3) est bien connu (cf par exemple [F-I]), *Remarques supplémentaires* :

a) En remplaçant K_0 par une extension finie non ramifiée convenable, on voit que le théorème s'étend au cas où l'extension KK_∞/K_∞ est non ramifiée (c'est-à-dire où KK_n/K_n est non ramifiée pour n assez grand).

b) Inversement, J-M Fontaine conjecture que si KK_∞/K_∞ est non ramifiée et si V est une représentation de G_K qui devient cristalline sur une extension finie de K contenue dans une extension non ramifiée de K_∞, alors elle est de hauteur finie. C'est le cas si $K = K_0$, si V est cristalline et s'il existe un entier a tel que les poids de Hodge-Tate de V sont dans l'intervalle $[a, a+p-1]$ (cf corollaire du théorème 2 ci-dessous et la remarque qui le suit).

c) En revanche, l'analogue de cette conjecture de J-M Fontaine est fausse lorsque l'on omet l'hypothèse KK_∞/K_∞ non ramifiée. On peut en effet montrer que si K' est le sous-corps de K_∞ fixe par l'image de Γ_K dans Γ_{K_0}, toute représentation de hauteur finie de G_K s'étend d'une manière et d'une seule en une représentation de hauteur finie de $G_{K'}$ et on peut montrer qu'il existe des représentations cristallines de G_K qui ne vérifient pas cette propriété.

A.6. *Représentations $\mathbf{Z}_p$-adiques de G_K, dans le cas où $e = 1$.*

Soit Γ_0 le groupe de Galois de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de K_0 contenue dans K_∞. On a une action de Γ_0 sur S_0. Si $h \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des (φ, Γ_0)-modules sur S_0 formée des objets N vérifiant :

1) le S_0-module sous-jacent est de type fini et sans p'-torsion (ie, pour tout élément irréductible λ de S_0 non associé à p, N est sans λ-torsion),

2) le S_0-module $N/\Phi(N^\sigma)$ est annulé par q^h,

3) le groupe Γ_0 agit trivialement sur $N/\pi_0 N$.

Pour $h < p-1$, la catégorie $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ est abélienne (cf [F91], p 301) ; pour $h = p-1$, il faut se restreindre à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{p-1}_{S_0}}$, qu'on note $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{p-1*}_{S_0}}$, formée des objets N n'admettant pas de sous-quotient non nul $\bar{N}$ tel que $\Phi(\bar{N}^\sigma) \subset q^{p-1}\bar{N}$.

On note $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^+_{S_0}}$ la réunion des $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ pour $h \in \mathbf{N}$. Pour tout objet M de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^+_{S_0}}$, on définit la *cr-hauteur* de M comme le plus petit entier h tel que M soit un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$.

Le foncteur $j^* : \mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}} \to \mathbf{\Gamma\Phi M^{ét}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}}$ (cf [F91], p. 301) qui à N associe

$$j^*(N) = \mathcal{N} = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_{S_0} N$$

est exact et fidèle ; si $h \leq p-2$ (si $h = p-1$, on se restreint à $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{p-1*}_{S_0}}$), il est pleinement fidèle et induit alors une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ ($\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{p-1*}_{S_0}}$ si $h = p-1$) et son image essentielle par j^* . On note $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0,tors}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ formée des objets de p-torsion. Si N est un objet de cette catégorie, on pose

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cr}}(N) = \mathbf{V}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(j^*(N)) \quad ;$$

c'est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action de G_K . On obtient ainsi un foncteur

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cr}} : \mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0,tors}} \to \mathbf{Rep_{Z_p,tors}(G_K)}$$

qui est exact et fidèle et on note $\mathbf{Rep^h_{Z_p,tors,cr}(G_K)}$ son image essentielle, appelée *catégorie des représentations de cr-hauteur finie* $\leq h$. Si $h \leq p-2$, $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cr}}$ est pleinement fidèle et induit donc une anti-équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0,tors}}$ et $\mathbf{Rep^h_{Z_p,tors,cr}(G_K)}$. Si $h = p-1$, on a une anti-équivalence entre $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{p-1*}_{S_0,tors}}$ et son image essentielle $\mathbf{Rep^{p-1*}_{Z_p,tors,cr}(G_K)}$.

On se propose de montrer que les représentations de cr-hauteur finie sont des sous-quotients de représentations cristallines.

THEOREME 2 :

Soit h un entier, $0 \leq h \leq p-1$.

1) Soit T une représentation de p-torsion de G_K. Alors T est de cr-hauteur finie $\leq h$ si et seulement si T est un sous-quotient de représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et h.

2) Plus généralement, il existe un entier r tel que $T(r)$ soit de cr-hauteur finie $\leq h$ si et seulement s'il existe un entier r' tel que T soit sous-quotient de représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle $[r', r'+h]$.

Remarquons dès maintenant que la deuxième assertion résulte de la première.

On dit qu'une représentation p-adique de G_K est de *cr-hauteur* $\leq h$ s'il existe un objet N_0 de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ libre de rang fini sur S_0 et un isomorphisme de $\mathcal{E} \otimes_{S_0} N_0$ sur $\mathbf{D}^*{}_{\mathcal{E}}(V)$. Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE : **Soit V une représentation p-adique de G_K et h un entier compris entre 0 et $p-1$. Il y a équivalence entre :**

1) il existe un entier r tel que $V(r)$ soit une représentation de cr-hauteur finie $\leq h$,

et

2) il existe un entier r' tel que V soit une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle $[r', r'+h]$.

Alors, si les deux conditions équivalentes ci-dessus sont vérifiées, V est de hauteur finie.

Remarque : Une représentation p-adique V de G_K qui est de cr-hauteur finie est de hauteur finie. En effet, si N_0 est comme ci-dessus, comme S est un S_0-module libre et $S_0 = S^{\Gamma_f}$, on en déduit que

$$N = S \otimes_{S_0} N_0 \subset j_*(\mathbf{D}^*{}_{\mathcal{E}}(V))$$

et

$$N_0 \subset (j_*(\mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V)))^{\Gamma_f} \quad .$$

Puisque $j_*(\mathbf{D}^*{}_{\mathcal{E}}(V))$ est un $S[1/p]$-module libre de rang $\leq d = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et contient $N[1/p]$ qui est un $S[1/p]$-module libre de rang d, on obtient le fait que $j_*(\mathbf{D}^*{}_{\mathcal{E}}(V))$

est de rang d sur $S[1/p]$ et, par conséquent, que la représentation est de hauteur finie.

De plus, N est un S-module libre de rang d stable par Γ et tel que l'action de Γ soit triviale modulo π. On voit ainsi que 1) $\Rightarrow$ 2) du corollaire ci-dessus n'est qu'un cas particulier de l'implication 4) $\Rightarrow$ 1) du théorème 1.

B. Les représentations cristallines.

B.1. Construction des anneaux R, $W_n^{PD}(R)$, A_{cris} et B_{cris}^{+}.

B.1.1. Rappels sur les puissances divisées.(cf. [B-O], chapitre 3)

B.1.1.1. *Algèbres à puissances divisées.*

B.1.1.1.1. Soit A un anneau et I un idéal de A . Une *structure d'idéal à puissances divisées* sur I consiste en la donnée d'applications $\gamma_m : I \to A$, pour tout $m \in \mathbf{N}$, telles que $\forall\ x, y \in I$ et $\forall\ \lambda \in A$:

1) $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$ et $\gamma_m(x) \in I$ si $m \geq 1$
2) $\gamma_m(x+y) = \sum_{i+j=m} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$
3) $\gamma_m(\lambda x) = \lambda^m \gamma_m(x)$
4) $\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{m}\gamma_{m+n}(x)$
5) $\gamma_m(\gamma_n(x)) = (mn)!/(m!(n!)^m)\gamma_{mn}(x)$

On parle alors de *p-d-algèbre* (A, I, γ_I) .

Remarques :

– $(mn)!/(m!(n!)^m)$ est un entier : c'est le nombre de partitions d'un ensemble de mn éléments en m ensembles de n éléments .

– si A est un anneau de caractéristique 0, alors $\gamma_m(x) = x^m/m!$.

– $m!\gamma_m(x) = x^m$; en conséquence , si I admet des puissances divisées alors $x^m \in m!I$ pour tout $x \in I$.

Un morphisme f de p-d-algèbres de (A, I, γ_I) dans (B, J, γ_J) est un morphisme d'anneaux

$$f : A \to B \quad \text{tel que} \quad f(I) \subset J \quad \text{et} \quad f \circ \gamma_I = \gamma_J \circ f \quad .$$

Un *sous p-d-idéal* J de I est un idéal J contenu dans I et tel que $\gamma_m(x) \in J$ si $x \in J$ et $m \geq 1$.
P-d-quotient : soit J un idéal de A tel que $I \cap J$ soit un sous-p-d-idéal de I , il existe alors une unique structure $\gamma_{\bar{I}}$ d'idéal à puissances divisées sur l'image $\bar{I}$ de I dans A/J telle que la projection de A sur A/J soit un morphisme de p-d-algèbres de (A, I, γ_I) dans $(A/J, \bar{I}, \gamma_{\bar{I}})$.

B.1.1.1.2. *Exemple :*

Soit $\mathbf{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbf{Z}$ en p. Pour toute $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre A, il existe une structure naturelle d'idéal à puissances divisées sur l'idéal engendré par p : si $x = py \in pA$ et si $m \in \mathbf{N}$, alors $\frac{p^m}{m!} \in \mathbf{Z}_{(p)}$ et $\gamma_m(x) = \frac{p^m}{m!}y^m$ ne dépend pas du choix de y.

B.1.1.1.3. *Compatibilité :*

– Soient A un anneau, (I, γ_I) et (J, γ_J) deux structures de p-d-algèbres sur A telles que γ_I et γ_J coïncident sur $I \cap J$; alors il existe une structure unique de p-d-idéal sur $K = I + J$, coïncidant avec γ_I sur I et avec γ_J sur J.

– On considère (A, I, γ_I) et (B, J, γ_J) deux p-d-algèbres, où B est en plus une A-algèbre ; on dit que γ_I *s'étend à* B s'il existe une p-d-structure γ_B sur IB telles que le morphisme d'algèbres

$$(A, I, \gamma_I) \to (B, IB, \gamma_B)$$

soit un p-d-morphisme. Dans ces conditions et si, en plus, $\gamma_B = \gamma_J$ sur $IB \cap J$, on dit que γ_I et γ_J sont *compatibles.*
Ceci est équivalent au fait qu'il existe sur $K = IB + J$, idéal de B , une structure γ_K de p-d-algèbre nécessairement unique telle que les morphismes

$$(A, I, \gamma_I) \to (B, K, \gamma_K)$$
et
$$(B, J, \gamma_J) \to (B, K, \gamma_K)$$

soient des p-d-morphismes.

B.1.1.2. *Enveloppe à puissances divisées .*

B.1.1.2.1. On se donne (A, I, γ_I) une algèbre à puissances divisées, B une A-algèbre et J un idéal de B . Il existe une B-algèbre $B_{J,\gamma}$ et un idéal $\bar{J}$ à puissances divisées tels que $JB_{J,\gamma} \subset \bar{J}$, les puissances divisées γ_J sur $\bar{J}$ soient compatibles avec γ et possédant la propriété universelle suivante :

Pour toute A-algèbre C munie d'une p-d-structure (C, K, γ_K) , où C est également une B-algèbre , $JC \subset K$ et γ_K compatibles avec γ_I , il existe un p-d-morphisme $(B, \bar{J}, \gamma_J) \to (C, K, \gamma_K)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (B_{J,\gamma}, \bar{J}, \bar{\gamma}) \arrow[dr, "\text{p-d-morphisme}"] & \\
(B, J) \arrow[ur, "\text{morphisme de B-algèbre}"] \arrow[rr, "\text{morphisme de B-algèbre}"] & & (C, K, \gamma_K) \\
 & (A, I, \gamma_I) \arrow[ul, "\text{morphisme de A-algèbre}"] \arrow[ur, "\text{p-d-morphisme}"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors, $B_{J,\gamma}$ s'appelle *l'enveloppe à puissances divisées* de B relativement à l'idéal J.

B.1.1.2.2. *Cas où B est une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre :*

Il s'agit de faire une description de l'enveloppe à puissances divisées de B relativement à un idéal J, la structure de puissances divisées devant être compatible avec la structure de puissances divisées canoniques sur pB .

On remarque que se donner les applications $\gamma_m : J \to J$ revient à se donner une application $\delta : J \to J$ telle que $\forall\, x, y \in I$ et $\forall\, \lambda \in A$:

– $p\delta(x) = x^p$,
– $\delta(\lambda x) = \lambda^p \delta(x)$,
– $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y) + \sum_{1 \leq i \leq p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} x^i y^{p-i}$.

En effet, si les puissances divisées sont données, on prend $\delta(x) = (p-1)!\gamma_p(x)$.

Inversement, tout entier m s'écrit sous la forme $m = m_0 + pm_1 + \cdots + p^s m_s$, où les entiers m_i sont compris entre 0 et $p-1$. Alors, si B est une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre sans p-torsion,

$$\begin{aligned} x^{p^i} &= p^{1+p+\cdots+p^{i-1}} \delta^i(x) \\ x^m &= p^{m_1+\cdots+m_s(1+p+\cdots+p^{s-1})}\, x^{m_0}(\delta(x))^{m_1}\cdots(\delta^s(x))^{m_s} \end{aligned}$$

comme

$$v_p(m!) = m_1 + (1+p)m_2 + \cdots + (1+p+\cdots+p^{s-1})m_s$$

on obtient

$$\gamma_m(x) = \frac{p^{v_p(m!)}}{m!} x^{m_0}(\delta(x))^{m_1}\cdots(\delta^s(x))^{m_s} \quad .$$

Si B est de p-torsion, comme $\frac{p^{v_p(m!)}}{m!}$ est une unité de $\mathbf{Z}_{(p)}$, l'expression ci-dessus garde un sens dans B. On vérifie que les γ_m ainsi définis conviennent.

Exemple :

Si B est une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre et si λ n'est pas diviseur de zéro, l'enveloppe à puissances divisées de B compatibles avec les puissances divisées canoniques sur pB relativement à un idéal principal $J = (\lambda)$ est l'algèbre

$$\begin{aligned} B^{PD} &= B[(\gamma_m(\lambda))_{m\in\mathbf{N}}] \\ &= B[\delta^s(\lambda)] \ \text{ avec } p\delta^s(\lambda) = (\delta^{s-1}(\lambda))^p \\ &= B[Y_1,\cdots,Y_s,\cdots]/(pY_s - Y_{s-1}^p)_{s\geq 1} \quad \text{avec} \quad Y_0 = \lambda \quad . \end{aligned}$$

B.1.2. Les anneaux R et $\mathbf{W}_\mathbf{n}^{\mathbf{PD}}(\mathbf{R})$.

B.1.2.1. *L'anneau R.* (cf. [F82] ou [F93])

Posons $S' = \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On pose $R = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} S'$, où les applications de transition sont toutes identiques, à savoir l'application qui à $x \in S'$ associe $x^p \in S'$. L'anneau R ainsi défini est un anneau de caractéristique p , parfait.

Remarques :

$a)$ on peut obtenir une autre description de R en munissant la limite projective, indexée par $\mathbf{N}$, des anneaux $\mathcal{O}_\mathbf{C}$, avec toujours pour applications de transition les applications $x \mapsto x^p$, de la structure d'anneau suivante :

– la multiplication est définie par $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$

– l'addition par $(x+y)^{(n)} = \lim_{m\to+\infty}(x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^m}$

où $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ sont dans $\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{O}_\mathbf{C}$.

La projection $\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ permet d'identifier R et $\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Il est alors possible de définir une valuation sur R , en posant $v_R(x) = v_{\mathbf{C}}(x^{(0)})$ et R est complet pour cette valuation .

D'autre part $\bar{k}$ se plonge dans R : à $a \in \bar{k}$, on associe son représentant de Teichmüller $[a]$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, puis sa réduction modulo p dans S' . On obtient de cette façon une application de $\bar{k}$ dans R

$$a \in \bar{k} \to ([a^{1/p^n}])_{n\in\mathbf{N}} \in R \quad .$$

Le corps des fractions de R , noté $\operatorname{Fr} R$, est un corps valué complet d'anneau des entiers R et de corps résiduel $\bar{k}$; de plus $\operatorname{Fr} R$ est algébriquement clos .

b) Soit E le corps des normes (cf. [W]) de l'extension $K_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} K_n$, où

$$K_n = K_0[\varepsilon^{(n)}] = K_{n-1}[\varepsilon^{(n)}]$$

est le corps engendré par les racines p^n-ièmes de l'unité contenu dans $\bar{K}$. On rappelle que $\varepsilon^{(1)}$ est une racine primitive p-ième de l'unité dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et les $(\varepsilon^{(n)})$ forment un système compatible de racines de l'unité. On sait (cf. [W], chap. 2) que E est un corps local de caractéristique p, dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ est la limite projective des anneaux $\mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n}$, l'application de transition

$$\nu_n : \mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n} \to \mathcal{O}_{K_{n-1}}/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_{n-1}}$$

étant induite par la norme de K_n à K_{n-1}. En outre, si $x \in \mathcal{O}_{K_n}$ et $\bar{x}$ est son image dans $\mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n}$,

$$x^p - N_{K_n/K_{n-1}}(x) \in (\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n} \quad ,$$

ce qui fait que $\nu_n(\bar{x})$ est l'image de x^p dans

$$(\mathcal{O}_{K_{n-1}} + (\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n})/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_n} = \mathcal{O}_{K_{n-1}}/(\varepsilon^{(1)}-1)\mathcal{O}_{K_{n-1}} \quad .$$

En fait

$$\mathcal{O}_E = k[[\varepsilon - 1]] = k[[\bar{\pi}]] \quad .$$

Le groupe de Galois $\operatorname{Gal}(K_\infty/K_0) = \Gamma_{K_0} \simeq \mathbf{Z}_p^*$ agit sur E par $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(g)}$, où χ est le caractère cyclotomique, et $E_0 = E^{\Gamma_f}$ est le corps de normes de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de K_0 contenue dans K_∞. On peut voir (cf. [F91], p. 271) que $E_0 = k((\bar{\pi}_0))$ avec $\bar{\pi}_0 = \sum_{a\in\mathbf{F}_p} \varepsilon^{[a]}$ et $\mathcal{O}_{E_O} = k[[\bar{\pi}_0]]$, pour $p \neq 2$, et une égalité similaire pour $p = 2$.

On voit facilement que E et E_0 se plongent dans $\operatorname{Fr} R$; de même, $\mathcal{O}_{E_0}$ et $\mathcal{O}_E$ se plongent dans R. Plus généralement (cf. [W], chap. 3), si L est une extension galoisienne finie de K_∞, alors le corps des normes E_L de l'extension L/K est une extension galoisienne finie de E, on a

$$\operatorname{Gal}(L/K_\infty) = \operatorname{Gal}(E_L/E)$$

et E_L se plonge dans $\operatorname{Fr} R$. Ceci permet de définir

$$E_{\bar{K}} = \varinjlim_{\substack{K_\infty \subset L \subset \bar{K} \\ L/K_\infty \text{ finie galoisienne}}} E_L,$$

qui est une clôture séparable de E et

$$\operatorname{Gal}(E_{\bar{K}}/E) = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K_\infty) = H_{K_0} \quad .$$

Rappelons enfin (cf. [W], chap. 4) que $\operatorname{Fr} R$ s'identifie au complété de la clôture radicielle de $E_{\bar{K}} = E^{sép}$.

B.1.2.2. *Construction de* $\mathbf{W}_\mathbf{n}^{\mathbf{PD}}(\mathbf{R})$.

On considère $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R et $W_n(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n .

B.1.2.2.1. PROPOSITION : *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \theta : & W(R) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \\ & x = (x_n) & \mapsto & \sum_{n \in \mathbf{N}} p^n x_n^{(n)} \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux, qui est surjectif. Son noyau $\operatorname{Ker}\theta$ *est un idéal principal de* $W(R)$.

DEMONSTRATION : Soit $\lambda = (\beta, 1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ un élément de $W(R)$ où $\beta \in R$ est tel que $\beta^{(0)} = -p$.
On voit que $\lambda \in \operatorname{Ker}\theta$ et on va montrer que $\operatorname{Ker}\theta$ est l'idéal engendré par λ .

– On commence par montrer que

$$\operatorname{Ker}\theta \subset (\lambda) + (p) \quad .$$

Si $x \in \operatorname{Ker}\theta$, alors $x_0^{(0)}$ est divisible par p donc $v_R(x_0) \geq 1$. On peut écrire alors $x_0 = \alpha\beta$ où $\alpha \in R$.
Dans ces conditions $x - [\alpha]\lambda$ est divisible par p , c'est-à-dire

$$x - [\alpha]\lambda \in pW(R)$$

et

$$x \in (\lambda) + (p) \quad .$$

– D'autre part

$$W(R)/\operatorname{Ker}\theta \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

qui est sans p-torsion , donc $\operatorname{Ker}\theta \cap pW(R) = p\operatorname{Ker}\theta$ et $x - [\alpha]\lambda \in p\operatorname{Ker}\theta$. On peut ainsi écrire $x = [\alpha]\lambda + px_1$ où $x_1 \in \operatorname{Ker}\theta$ et montrer par récurrence qu'il existe $y \in W(R)$ tel que $x = y\lambda$.
◇

Remarque : plus précisément, un élément $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots) \in \operatorname{Ker}\theta$ en est un générateur, si et seulement si $v_R(\lambda_0) = 1$. En particulier, si $p \neq 2$ et si $q = \pi_0 + p$ est l'élément de $W(R)$ introduit dans la partie A., alors $q' = \varphi^{-1}(q)$ est un générateur de $\operatorname{Ker}\theta$. En effet, on voit facilement que $\theta(q\prime) = 0$ et il suffit de vérifier que $v(\tilde{\pi}_0) = p$. Mais,

$$v_R(\tilde{\pi}_0) = (p-1)v_R(\varepsilon - 1)$$

puisque $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}_0$ sont des uniformisantes de $\mathcal{O}_E$ et de $\mathcal{O}_{E_0}$ respectivement, l'extension E/E_0 est totalement ramifiée de degré $p-1$ et

$$\begin{aligned} v_R(\varepsilon - 1) &= v_{\mathbf{C}}((\varepsilon-1)^{(0)}) = v_{\mathbf{C}}\,(\lim_{m\to+\infty}(\varepsilon^{(m)}-1)^{p^m}) \\ &= \lim_{m\to+\infty} p^m v_{\mathbf{C}}(\varepsilon^{(m)}-1) = \frac{p}{p-1} \quad . \end{aligned}$$

Si $p = 2$, alors, on prend $q = \pi + p$ et $q' = \varphi^{-1}(q)$ est un générateur de $\operatorname{Ker}\theta$.

B.1.2.2.2. De même, pour n entier ≥ 1, on définit l'application

$$\theta_n : W_n(R) \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

par

$$\theta_n((x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})) = \sum_{0\leq m\leq n-1} p^m x_m^{(m)} \quad .$$

On pose

$$\operatorname{Ker}\theta_n = \operatorname{Im}\operatorname{Ker}\theta = (\lambda_{<n}) \quad ,$$

en notant $\lambda_{<n}$ l'image dans $W_n(R)$ du générateur choisi λ de $\operatorname{Ker}\theta$. On note $W_n^{PD}(R)$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(R)$ relativement à $\operatorname{Ker}\theta_n$, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(R)$. D'après ce qui a été vu dans le paragraphe précédent

$$\begin{aligned} W_n^{PD}(R) &= W_n(R)[\delta(\lambda_{<n}), \cdots, \delta^s(\lambda_{<n}), \cdots] \\ &= W_n(R)[Y_1, \cdots, Y_s \cdots]/(pY_s - Y_{s-1}^p)_{s\geq 1} \quad \text{et} \quad Y_0 = \lambda_{<n} \quad . \end{aligned}$$

On pose

$$A_{cris} = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} W_n^{PD}(R)$$

le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à $\operatorname{Ker}\theta$, compatibles avec les puissances canoniques sur $pW(R)$ et $B_{cris}^+ = K \otimes_W A_{cris} = A_{cris}[1/p]$.

Remarques :

a) pour $n = 1$, on a $\lambda_{<1} = \lambda_0$, $(\delta^s(\lambda_0))^p = 0$ et

$$W_1^{PD}(R) = R[Y_1, \cdots, Y_s, \cdots]/(Y_s^p)_{s\in\mathbf{N}} = R/\lambda_0[Y_1, \cdots, Y_s, \cdots]/(Y_s^p)_{s\geq 1} \quad .$$

b) La suite exacte courte

$$0 \to W_r(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}(R) \to W_s(R) \to 0$$

induit la suite exacte

$$0 \to W_r^{PD}(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}^{PD}(R) \to W_s^{PD}(R) \to 0 \quad .$$

Il s'agit en effet de voir que si

$$x \in W_{r+s}^{PD}(R)$$

est annulé par p^s , alors x est divisible par p^r ; par récurrence décroissante sur s, on se ramène à montrer que si $s < n$ et $x \in W_n^{PD}(R)$ est tel que $p^s x = 0$, alors x est divisible par p, ce qui revient à montrer que si

$$x \in W_n(R)[Y_1, \cdots, Y_m, \cdots]$$

est tel que

$$p^s x \in (pY_m - Y_{m-1}^p)_{m\geq 1}$$

alors

$$x \in (pY_m - Y_{m-1}^p)_{m\geq 1} \quad .$$

Il existe un entier q tel que $x \in W_n(R)[Y_1, \cdots, Y_q]$ et $p^s x$ est dans l'idéal de cet anneau engendré par les

$$(pY_m - Y_{m-1}^p)_{1\leq m\leq q} \quad .$$

Un calcul simple permet de voir qu'alors l'image de x dans

$$W_n(R)[Y_1, \cdots, Y_{q-1}][Y_q]/(pY_m - Y_{m-1}^p)_{1\leq m\leq q-1}$$

est dans $(pY_q - Y_{q-1}^p)$. Par récurrence, on montre ainsi que $x \in (pY_m - Y_{m-1}^p)_{1\leq m\leq q}$.

B.1.2.2.3. *Filtration sur* $W_n^{PD}(R)$.

Pour $r \in \mathbf{N}$, on pose

$$\mathrm{Fil}^r\, W_n(R) = (\mathrm{Ker}\,\theta_n)^r$$

et on note $\mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R)$ l'idéal de $W_n^{PD}(R)$ engendré par les $\gamma_m(\lambda_{<n})$ pour $m \geq r$. Le morphisme naturel de $W_n(R)$ dans $W_n^{PD}(R)$ envoie $\mathrm{Fil}^r\, W_n(R)$ dans $\mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R)$.

On a également un Frobenius sur $W_n^{PD}(R)$, qui provient du Frobenius sur $W_n(R)$ et $\varphi(\delta(x)) = \delta(\varphi(x))$. On vérifie que $\mathrm{Ker}\,\theta + pW(R)$ est stable par φ et que $\varphi(\lambda)$ est divisible par p dans $W_n^{PD}(R)$. En particulier pour $r \leq p-1$ et $n \geq r$, on dispose de l'inclusion suivante

$$\mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R) \subset \{x \in W_n^{PD}(R) \quad \text{tel que} \quad \varphi(x) \in p^r W_n^{PD}(R)\}$$

ainsi que de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R) \to \mathrm{Fil}^r\, W_{n+s}^{PD}(R) \to \mathrm{Fil}^r\, W_s^{PD}(R) \to 0 \quad .$$

Ceci permet de définir des applications

$$\varphi^r : \mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R) \to W_n^{PD}(R)$$

de la manière suivante :

soit x un élément de $\mathrm{Fil}^r\, W_n^{PD}(R)$; il se relève en un élément $\hat{x} \in \mathrm{Fil}^r\, W_{n+r}^{PD}(R)$ tel que $\varphi(\hat{x}) = p^r \hat{y}$, alors $\varphi^r(x) = \hat{y}$ modulo p^n ne dépend pas du choix du relèvement $\hat{x}$ de x, ni du choix de $\hat{y}$, et de plus, pour $r \leq p-2$,

$$\varphi^r_{|_{\mathrm{Fil}^{r+1}}} = p\varphi^{r+1} \quad .$$

La filtration et les applications φ^r ainsi définies passent à la limite projective.

Remarques :

a) L'application

$$\theta : W(R) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

se prolonge en une application notée toujours θ de A_{cris} vers $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ ou de B_{cris}^+ vers $\mathbf{C}$. Pour tout entier $r \geq 0$, on note $\mathrm{Fil}^r\, B_{cris}^+$ l'adhérence de l'idéal engendré par les $q'^m/m!$ pour $m \geq r$. On remarque que

$$\mathrm{Fil}^r\, A_{cris} = \mathrm{Fil}^r\, B_{cris}^+ \cap A_{cris} \quad .$$

D'autre part, l'élément t défini par

$$t = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{([\varepsilon]-1)^n}{n}$$

appartient à B_{cris}^+ et l'idéal engendré par t est stable par l'action de G_K et par φ avec $\varphi(t) = pt$ et $g(t) = \chi(g)t$, pour $g \in G_K$. On pose $B_{cris} = B_{cris}^+[1/t]$; c'est un anneau muni d'une application φ, d'une action de G_K et d'une filtration décroissante par des sous K_0-espaces vectoriels, pour $r \in \mathbf{Z}$:

$$\mathrm{Fil}^r\, B_{cris} = \cup_{i \in \mathbf{Z}} t^{-i}\, \mathrm{Fil}^{r+i}\, B_{cris}^+$$

b) Les idéaux $\mathrm{Fil}^r W_n^{PD}(R)$ et $\mathrm{Fil}^r W_n(R)$ ne sont pas stables par φ ; on introduit alors les idéaux (cf. [F93])

$$I^{[r]} = \{x \in A_{cris} \text{ tel que } \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{i fois}}(x) \in \mathrm{Fil}^r A_{cris} \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}\}$$

et

$$I^{[r]}W(R) = \{x \in W(R) \text{ tel que } \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{i fois}}(x) \in \mathrm{Fil}^r W(R) \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}\}$$

On sait que $I^{[r]}$ est un idéal principal et qu'un élément

$$a = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots) \in I^{[r]}W(R)$$

en est un générateur si et seulement si $v_R(a_0) = rp/(p-1)$; on en déduit que $I^{[r]}W(R)$ est l'idéal de $W(R)$ engendré par π^r et $I^{[p-1]}W(R)$ peut être également vu comme l'idéal engendré par π_0, si $p \neq 2$ (cf calcul p. 15). Si $p = 2$, $I^{[p-1]}W(R) = I^{[1]}W(R)$ est l'idéal engendré par π et $[\pi_0]$ engendre $I^{[2]}W(R)$.

D'autre part $I^{[1]}$ est un p-d-idéal de A_{cris} et $I^{[r]}$ est la r-ième-puissance divisée de $I^{[1]}$; plus précisément $I^{[r]}$ est l'adhérence du $W(R)$-module engendré par les éléments $t^{\{s\}} = t^{r(s)}\gamma_{m(s)}(\frac{t^{p-1}}{p})$ où $m(s)$ et $r(s)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de s par $p-1$. Comme $\varphi(t) = pt$, on voit facilement que, pour $m \leq p-1$,

$$\varphi^m(\mathrm{Fil}^m A_{cris} \cap I^{[r]}) \subset I^{[r]}$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\varphi^m(\mathrm{Fil}^m W_n^{PD}(R) \cap I^{[r]}W_n^{PD}(R)) \subset I^{[r]}W_n^{PD}(R) \quad ;$$

en particulier, si $n = 1$ et $r = p-1$, on a

$$\varphi^m(\mathrm{Fil}^m W_1^{PD}(R) \cap I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) \subset I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \quad .$$

c) le cas $n = 1$. Choisissons $\beta = (\beta^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in R$ tel que $\beta^{(0)} = -p$.
- $\varphi^r_{|_{\mathrm{Fil}^{r+1}}} = 0 \quad$ pour $\quad 0 \leq r \leq p-2$.
-

$$\begin{aligned} W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) &= R/\beta^p R \\ &= R/\tilde{\pi}_0 R \text{ si } p \neq 2 \\ &= R/\pi R \text{ si } p = 2 \end{aligned}$$

alors l'application

$$u = \theta_1 \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} R & \to & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ x & \mapsto & x^{(1)} \bmod p \end{array} ,$$

induit un isomorphisme d'anneaux de $R/\beta^p R$ vers $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ (φ^{-1} désigne ici l'inverse de φ).

De plus, on rappelle que $R/\beta^p R$ est muni d'une filtration

$$\mathrm{Fil}^r(R/\beta^p R) = \beta^r(R/\beta^p R)$$

pour $r \leq p-1$ et $\mathrm{Fil}^r(R/\beta^p R) = 0$ pour $r \geq p$, et d'applications φ^r définies par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi^r : & \mathrm{Fil}^r(R/\beta^p R) & \to & R/\beta^p R \\ & \beta^r x & \mapsto & x^p \end{array} .$$

Si on définit sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ la filtration suivante

$$\mathrm{Fil}^r\, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} = (\beta^{(1)})^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

et les applications φ^r par

$$\begin{array}{rccc} \varphi^r : & \mathrm{Fil}^r\, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} & \to & \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ & (\beta^{(1)})^r x & \mapsto & x^p \end{array} ,$$

on constate que u respecte la filtration et commute aux applications φ^r. Alors, si on munit $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ de la structure de k-espace vectoriel déduite par l'extension des scalaires $\sigma^{-1} : k \to k$, on voit que u est *un isomorphisme de modules filtrés de* $W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ *sur* $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

B.1.3. Les modules filtrés sur W et K.

B.1.3.1. *Les modules filtrés sur K.*

B.1.3.1.1. Un *φ-module filtré* sur K est la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni :
- d'une application $\varphi : D \to D$ semi-linéaire par rapport à σ et injective,
- d'une filtration décroissante sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous-K-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^r\, D_K)_{r\in\mathbf{Z}}$ tels que

$$\cup_{r\in\mathbf{Z}}\, \mathrm{Fil}^r\, D_K = D_K$$

et

$$\cap_{r\in\mathbf{Z}}\, \mathrm{Fil}^r\, D_K = \{0\} \quad .$$

Les φ-modules filtrés forment une catégorie additive, notée $\mathbf{MF_K}$, qui possède des noyaux et des conoyaux. Les morphismes sont ceux qui commutent aux applications φ et qui, par extension des scalaires à K, respectent la filtration. On dit qu'un φ-module filtré D est *positif* s'il vérifie $\mathrm{Fil}^0\, D_K = 0$.

Remarque : les anneaux B_{cris} et B^+_{cris} sont des objets de $\mathbf{MF_K}$. En effet, ils possèdent tous les deux une action de Frobenius et $K \otimes_{K_0} B_{cris}$ ainsi que

$K \otimes_{K_0} B^+_{cris}$ sont munis de la filtration induite par leur inclusion naturelle dans B_{DR}.

Si D est un objet de $\mathbf{MF_K}$ et i un entier, on introduit l'objet $D\{i\}$ de $\mathbf{MF_K}$ ainsi défini :

– le K_0-espace vectoriel sous-jacent est D,

– on a $\mathrm{Fil}^r D_K\{i\} = \mathrm{Fil}^{r+i} K$ pour $r \in \mathbf{Z}$,

– (avec des conventions évidentes) $\varphi_{D\{i\}} = p^{-i}\varphi_D$.

Si D est un objet de $\mathbf{MF_K}$ qui est de dimension finie sur K_0, le Frobenius φ est bijectif et on peut munir le K_0-espace vectoriel dual D^* d'une structure d'objet de $\mathbf{MF_K}$ en posant $(\varphi\eta)(d) = \sigma(\eta(\varphi^{-1}(d)))$ pour $\eta \in D^*$ et $d \in D$; la filtration s'obtient en prenant pour $\mathrm{Fil}^r D^*_K$ l'orthogonal de $\mathrm{Fil}^{-r+1} D_K$.

B.1.3.1.2. On définit (cf [F79], chap. 4) la sous-catégorie pleine $\mathbf{MF^f_K}$ de $\mathbf{MF_K}$ des objets *faiblement admissibles* ; ceux-ci sont de dimension finie sur K_0. La catégorie $\mathbf{MF^f_K}$ est abélienne, stable par dualité et par les opérateurs $D \mapsto D\{i\}$. On note $\mathbf{MF^{[a,b]}_K}$, où a et b sont des entiers avec $a \leq b$, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF^f_K}$ dont les objets sont les φ-modules filtrés faiblement admissibles sur K et tels que $\mathrm{Fil}^a D_K = D_K$ et $\mathrm{Fil}^{b+1} D_K = 0$; comme sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF^f_K}$, elle est stable par sous-objets, sous-quotients, sommes directes et extensions. En outre, si $D \in \mathbf{MF^{[a,b]}_K}$, on a $D\{i\} \in \mathbf{MF^{[a-i,b-i]}_K}$.

Si D est un φ-module filtré de dimension finie et si $e = 1$, c'est-à-dire si $K = K_0$, alors il y a équivalence entre (cf [L], chap. 3) :

– D est faiblement admissible

et

– il existe un réseau Λ de D sur W tel que

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} p^{-r}\varphi(\Lambda \cap \mathrm{Fil}^r D) = \Lambda \ .$$

Un tel réseau est appelé *réseau adapté*; on remarque qu'il vérifie

$$\varphi(\mathrm{Fil}^r \Lambda) \subset p^r \Lambda \quad ,$$

pour tout $r \in \mathbf{Z}$.

B.1.3.2. *Les modules filtrés sur W.*

B.1.3.2.1. Un *module filtré* sur W est un W-module Λ muni :

– d'une filtration $(\mathrm{Fil}^r \Lambda)_{r\in\mathbf{Z}}$ décroissante par des sous-W-modules de Λ , séparée et exhaustive; c'est-à-dire telle que

$$\cap_{r\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^r \Lambda = 0 \quad \text{et} \quad \cup_{r\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^r \Lambda = \Lambda \quad ,$$

– d'applications $\varphi^r : \mathrm{Fil}^r \Lambda \longrightarrow \Lambda$ semi-linéaires par rapport au Frobenius σ de W et telles que

$$\varphi^r_{|_{\mathrm{Fil}^{r+1}\Lambda}} = p\varphi^{r+1} \quad .$$

On note $\mathbf{MF_W}$ la catégorie des modules filtrés sur W, dont les morphismes sont applications W-linéaires respectant la filtration et commutant aux applications φ^r, et $\mathbf{MF_k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_W}$ formée des objets tués par p. La catégorie $\mathbf{MF_W}$ est additive et $\mathbf{Z}_p$-linéaire, mais n'est pas abélienne.

Noyau et conoyau d'un morphisme dans $\mathbf{MF_W}$.

Soient Λ et Λ' des objets de $\mathbf{MF_W}$ et u un morphisme de Λ vers Λ'. On peut définir le noyau de u : en tant que W-module, $\operatorname{Ker} u$ est le noyau de u considéré comme un morphisme de W-modules, qu'on munit de la filtration

$$\operatorname{Fil}^r \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Fil}^r \Lambda \quad ,$$

et des applications φ^r

$$\varphi^r_{\operatorname{Ker} u} = \varphi^r_{|\operatorname{Ker} u} \quad .$$

De même, un sous-objet Λ_0 de Λ est un sous-W-module de Λ tel que

$$\varphi^r(\Lambda_0 \cap \operatorname{Fil}^r \Lambda) \subset \Lambda_0$$

et muni de la filtration induite par l'inclusion, c'est-à-dire $\operatorname{Fil}^r \Lambda_0 = \Lambda_0 \cap \operatorname{Fil}^r \Lambda$.

On dit que le morphisme $u : \Lambda \to \Lambda'$ est ***strict*** si

$$u(\operatorname{Fil}^r \Lambda) = \operatorname{Fil}^r \Lambda' \cap u(\Lambda) \quad ,$$

pour tout $r \in \mathbf{Z}$. Si u est strict, on peut définir son conoyau : en tant que W-module $\operatorname{Coker} u$ est le conoyau de u dans la catégorie des W-modules. On définit la filtration sur $\operatorname{Coker} u$ de la manière suivante : soient u_r la restriction de u à $\operatorname{Fil}^r \Lambda$ à valeurs dans $\operatorname{Fil}^r \Lambda'$ et $\operatorname{Coker} u_r$ le conoyau de u_r dans la catégorie des W-modules. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Fil}^r \Lambda & \to & \operatorname{Fil}^r \Lambda' & \to & \operatorname{Coker} u_r & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\Lambda & \to & \Lambda' & \to & \operatorname{Coker} u & \to & 0
\end{array}$$

qui fournit une flèche naturelle de $\operatorname{Coker} u_r$ vers $\operatorname{Coker} u$. Comme u est strict, cette flèche est injective et on définit $\operatorname{Fil}^r \operatorname{Coker} u$ comme l'image de $\operatorname{Coker} u_r$ dans $\operatorname{Coker} u$. Les applications φ^r se déduisent de celles sur Λ' par passage au quotient. En particulier, on déduit la notion d'objet quotient.

Si Λ et Λ' sont des objets de $\mathbf{MF_k}$, alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Coker} u$ également.

Exemples : *a*) Si Λ est un réseau adapté d'un module filtré sur K faiblement admissible, alors on peut poser $\varphi^r = (1/p^r)\varphi_{|\operatorname{Fil}^r \Lambda}$ et Λ devient un objet de $\mathbf{MF_W}$.

b) L'anneau A_{cris} tel qu'il a été décrit dans la partie précédente est muni d'une filtration $\operatorname{Fil}^r A_{cris}$ et d'endomorphismes $\varphi^r : \operatorname{Fil}^r A_{cris} \to A_{cris}$ pour $r \leq p-1$ et vérifiant $\varphi^r_{|\operatorname{Fil}^{r+1} A_{cris}} = p\varphi^{r+1}$, pour $r \leq p-2$. Il est nécessaire de modifier cette filtration pour que A_{cris} devienne un objet de $\mathbf{MF_W}$: pour cela, il suffit de poser $\operatorname{Fil}^r A_{cris} = 0$ pour $r \geq p$ et de conserver la définition des $\operatorname{Fil}^r A_{cris}$

pour $r \leq p-1$. (Dans les applications, on ne s'intéressera qu'aux objets dont la longueur de la filtration est plus petite que $p-1$ et le choix des $\mathrm{Fil}^r A_{cris}$, pour $r \geq p$, n'intervient pas ; on aurait également pu choisir

$$\mathrm{Fil}_p^r A_{cris} = \{x \in \mathrm{Fil}^r A_{cris} \quad \text{tel que } \varphi(x) \in p^r A_{cris}\} \quad ,$$

mais alors, la multiplication par p^n dans A_{cris} ne serait pas un morphisme strict, pour $n \geq 1$.)

c) De même, $W_n^{PD}(R)$ est muni d'une structure d'objets de $\mathbf{MF_W}$; pour $r \leq p-1$, $\mathrm{Fil}^r W_n^{PD}(R)$ est l'idéal de $W_n^{PD}(R)$ défini précédemment, avec l'application $\varphi^r : \mathrm{Fil}^r W_n^{PD}(R) \to W_n^{PD}(R)$ et pour $r \geq p$, on pose $\mathrm{Fil}^r W_n^{PD}(R) = 0$. On voit que $W_n^{PD}(R)$ s'identifie au conoyau de l'endomorphisme strict de A_{cris} qui est la multiplication par p^n.

Remarque : cas où Λ est tué par p.

L'application φ^r est nulle sur Fil^{r+1} ; en d'autres termes φ^r se factorise en une application notée toujours

$$\varphi^r : \mathrm{Fil}^r \Lambda / \mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda \to \Lambda \quad .$$

Puisque Λ est muni d'une filtration décroissante, on peut considérer le module gradué $\mathrm{gr}\,\Lambda$ associé à Λ , c'est-à-dire le module

$$\mathrm{gr}\,\Lambda = \oplus_{r \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^r \Lambda / \mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda \quad .$$

La donnée des applications $\varphi^r : \mathrm{Fil}^r \Lambda \to \Lambda$ nulles sur $\mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda$ équivaut à la donnée d'une application σ-semi-linéaire $\Phi : \mathrm{gr}\,\Lambda \to \Lambda$; en effet il suffit de poser

$$\Phi(\bar{x}) = \varphi^r(x) \quad \text{pour } \bar{x} \in \mathrm{gr}^r \Lambda = \mathrm{Fil}^r \Lambda / \mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda$$

où x est un relèvement quelconque de $\bar{x}$ dans $\mathrm{Fil}^r \Lambda$.

B.1.3.2.2. Pour a et b entiers, on considère à présent les sous-catégories pleines de $\mathbf{MF_W}$, qu'on notera $\mathbf{MF_W^{[a,b]}}$ (respectivement $\mathbf{MF_W^{+}}$) formée des objets M de type fini sur W, tels que $\mathrm{Fil}^a \Lambda = \Lambda$ et $\mathrm{Fil}^{b+1} \Lambda = \{0\}$ (respectivement des objets Λ de type fini tels que $\mathrm{Fil}^0 \Lambda = \Lambda$ et tels qu'il existe un entier h vérifiant $\mathrm{Fil}^{h+1} \Lambda = \{0\}$). On impose en plus que les $\mathrm{Fil}^r \Lambda$ soient des facteurs directs et que

$$\Lambda = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda) \quad .$$

Si Λ est tué par p, ceci revient à demander que Λ soit de dimension finie sur k et que l'application

$$\Phi : \oplus_{r \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^r \Lambda / \mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda \to \Lambda$$

soit bijective.

On note $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{+}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ formée des objets tués par p. On appelle alors *hauteur* de Λ le plus petit entier h tel que $\mathrm{Fil}^{h+1}\Lambda = \{0\}$ et on note $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$ (respectivement $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{h}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ (respectivement de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{+}$) formée des objets de hauteur $\leq h$. Tout morphisme de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ (donc de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{+}$) est strict et ces deux catégories sont abéliennes (cf [F-L], p.588).

Remarque : les sous-objets d'un objet Λ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ dans la catégorie $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}$ sont également des sous-objets dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$. De même, un quotient d'un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}$ a priori est en fait un quotient dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ (cf [F-L],p.588).

Les sous-objets et quotients d'un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{+}$ vérifient la même propriété.

Exemple : Si $e = 1$, un réseau adapté Λ d'un objet D de $\mathbf{MF}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{f}}$ tel que $\mathrm{Fil}^0 D = D$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$.

Si Λ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$ et i un entier, on introduit le module $\Lambda\{i\}$ défini par :

$$\mathrm{Fil}^r \Lambda\{i\} = \mathrm{Fil}^{r+i}\Lambda$$
$$\varphi^r_{\Lambda\{i\}} = \varphi^{r+i}_{\Lambda}.$$

Si $\Lambda \in \mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$, on a $\Lambda\{i\} \in \mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{[\mathbf{a}-\mathbf{i},\mathbf{b}-\mathbf{i}]}$.

Remarque : bases adaptées à la filtration.

Soit Λ un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{h}}$ de dimension d sur k et $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ une base de Λ. A chaque e_i, on associe le plus grand entier r_i tel que $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i}\Lambda$.

On voit que l'on peut choisir une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ telle que $(e_i)_{r_i\geq r}$ forme une base de $\mathrm{Fil}^r\Lambda$ pour tout r ; on dit alors que la base est *adaptée à la filtration.* Dans ces conditions $(\bar{e}_i)_{1\leq i\leq d}$ forme une base de $\mathrm{gr}\,\Lambda$, où $\bar{e}_i$ est l'image de e_i dans $\mathrm{gr}^{r_i}\Lambda = \mathrm{Fil}^{r_i}\Lambda/\mathrm{Fil}^{r_i+1}\Lambda$ et on a $\mathrm{gr}^r\Lambda = \oplus_{r_i=r} k\bar{e}_i$.

De plus si

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}e_i \quad ,$$

l'application $\Phi : \mathrm{gr}\,\Lambda \longrightarrow \Lambda$ est décrite dans la base $(\bar{e}_i)$ par

$$\Phi(\bar{e}_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}e_i \quad .$$

On constate qu'exiger que Φ soit bijective revient à demander que la matrice $A = ((a_{ij}))$ soit inversible .

B.1.4. Notion de suite exacte et de Ext^1 dans les catégories $\mathbf{MF_W}$ et $\mathbf{MF_k}$.

B.1.4.1. *Notion de suite exacte dans les catégories* $\mathbf{MF_W}$ *et* $\mathbf{MF_k}$.

Soient Λ, Λ' et Λ'' des objets de $\mathbf{MF_W}$. La suite

$$0 \to \Lambda' \to \Lambda \to \Lambda'' \to 0 \quad ,$$

où les morphismes sont des morphismes dans $\mathbf{MF_W}$, est dite exacte si elle est exacte en tant que suite de W-modules et si les suites de W-modules suivantes

$$0 \to \mathrm{Fil}^r \Lambda' \to \mathrm{Fil}^r \Lambda \to \mathrm{Fil}^r \Lambda'' \to 0 \quad ,$$

pour $r \in \mathbf{Z}$, sont exactes. Elle identifie alors Λ' au noyau de $\Lambda \to \Lambda''$ et Λ'' au conoyau du morphisme strict $\Lambda' \to \Lambda$.

Exemples :

a) La suite

$$0 \to W_r^{PD}(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}^{PD}(R) \to W_s^{PD}(R) \to 0$$

(rappelons que $\mathrm{Fil}^p W_n^{PD}(R) = 0$ pour $n = r, s$ et $r+s$), est une suite exacte dans $\mathbf{MF_W}$.

b) On a vu (cf. B.1.2.2.3.) que

$$\varphi^r(I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \cap \mathrm{Fil}^r W_1^{PD}(R)) \subset I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \quad ,$$

ce qui permet de considérer $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ comme un sous-objet de $W_1^{PD}(R)$ dans $\mathbf{MF_k}$; d'autre part

$$W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \quad .$$

La suite suivante est donc une suite exacte dans $\mathbf{MF_k}$:

$$0 \to I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \to W_1^{PD}(R) \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \to 0 \quad .$$

B.1.4.2. *Notion de* Ext^1.

On dit que deux extensions E_1 et E_2 de Λ par Λ' dans la catégorie $\mathbf{MF_W}$ sont isomorphes s'il existe un morphisme de modules filtrés de E_1 vers E_2 qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda' & \to & E_1 & \to & \Lambda & \to 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & \\ 0 & \to & \Lambda' & \to & E_2 & \to & \Lambda & \to 0 \end{array} \quad ,$$

et on note $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, \Lambda')$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions de Λ par Λ'. On munit cet ensemble de la structure de groupe suivante : soient

E_1 et E_2 deux extensions de Λ par Λ' et $[E_1]$ (respectivement $[E_2]$) la classe d'isomorphismes de E_1 (respectivement E_2). On veut définir $[E_1]+[E_2]$; les deux extensions permettent d'écrire la suite exacte

$$0 \to \Lambda' \oplus \Lambda' \to E_1 \oplus E_2 \to \Lambda \oplus \Lambda \to 0 \quad ,$$

d'où

$$0 \to \Lambda' \oplus \Lambda' \to E_1 \times_\Lambda E_2 \to \Lambda \to 0$$

où $E_1 \times_\Lambda E_2$ est le produit fibré de E_1 et E_2 au-dessus de Λ. Alors le conoyau E_3 de l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda' & \to & \Lambda' \oplus \Lambda' & \to E_1 \times_\Lambda E_2 \\ x & \mapsto & (x, -x) & \end{array}$$

est une extension de Λ par Λ' et $[E_3] = [E_1] + [E_2]$.
Remarques : a) Une extension est dans la classe nulle si et seulement si elle est scindée.

b) De la même manière, on définit $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \Lambda')$ pour Λ et Λ' objets de $\mathbf{MF_k}$ et on munit cet ensemble d'une structure de groupe.

B.1.4.3. *Suite exacte longue.*

Proposition : *Si* $0 \to \Lambda' \xrightarrow{i} \Lambda \to \Lambda'' \to 0$ *est une suite exacte courte dans* $\mathbf{MF_W}$ *et* Λ_0 *est un objet de* $\mathbf{MF_W}$, *alors les foncteurs* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, .)$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(., \Lambda_0)$ *donnent lieu à deux suites exactes longues, à savoir :*

a)
$$\begin{array}{c} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda'', \Lambda_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, \Lambda_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda', \Lambda_0) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda'', \Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, \Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda', \Lambda_0) \end{array}$$

et

b)
$$\begin{array}{c} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda'') \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda'') \quad . \end{array}$$

Demonstration : *a*) il s'agit tout d'abord de définir le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda', \Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda'', \Lambda_0) \quad .$$

Si $u : \Lambda' \to \Lambda_0$ est un morphisme dans $\mathbf{MF_W}$, alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda' & \to & \Lambda_0 \oplus \Lambda \\ \lambda & \mapsto & (u(\lambda), -i(\lambda)) \end{array}$$

est un morphisme strict, qui permet de définir $\mathrm{Coker}\, u = \Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda$ et on obtient une suite exacte

$$0 \to \Lambda_0 \to \Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda \to \Lambda'' \to 0 \quad .$$

Le morphisme cherché est donc l'application qui à $\Lambda' \to \Lambda_0$ associe

$$[\Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda'', \Lambda_0) \quad .$$

b) La flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda'') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda_0, \Lambda')$$

est donné par l'application qui à un morphisme $\Lambda_0 \to \Lambda''$ associe la classe de l'extension $\Lambda \times_{\Lambda''} \Lambda_0$.

La preuve de l'exactitude des deux suites longues *a*) et *b*) se fait alors de la même manière que dans le cadre d'une catégorie abélienne.

◇

Remarque : de la même manière on obtient deux suites exactes longues en considérant la catégorie $\mathbf{MF_k}$.

B.2. Les représentations cristallines.

B.2.1. Représentations cristallines : définition.

B.2.1.1. *Représentations p-adiques cristallines.*

Ce paragraphe est un rappel des résultats de [F79] (chap. 3).

B.2.1.1.1. Pour toute représentation p-adique V de G_K,

$$\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B_{cris})$$

est un K_0-espace vectoriel, muni d'une application φ semi-linéaire par rapport à σ (déduite de l'action de φ sur B_{cris}) et

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, K \otimes_{K_0} B_{cris})$$

est muni d'une filtration, déduite de celle sur $K \otimes_{K_0} B_{cris}$. On dispose ainsi d'un foncteur de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G_K})$ vers $\mathbf{MF_K}$ et on montre que $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V)$ est de dimension finie sur K_0, inférieure ou égale à $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$; on dit qu'une représentation est *cristalline* si ces deux dimensions sont égales. On note $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p,\mathbf{cris}}(\mathbf{G_K})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G_K})$ dont les objets sont les représentations V qui sont cristallines. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p,\mathbf{cris}}(\mathbf{G_K})$ est une catégorie stable par sous-objet, somme directe, quotient, produit tensoriel et dualité. La restriction du foncteur $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}$ à $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p,\mathbf{cris}}(\mathbf{G_K})$, notée toujours $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}$ est exacte, pleinement fidèle et induit une anti-équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p,\mathbf{cris}}(\mathbf{G_K})$ et son image essentielle. On dit qu'un module filtré sur K est *admissible* s'il est dans l'image essentielle de $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}$ et on note $\mathbf{MF}^{\mathbf{adm}}_{\mathbf{K}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_K}$ formée des objets admissibles.

On sait qu'un module admissible est faiblement admissible ; le foncteur

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}} : & \mathbf{MF}^{\mathbf{adm}}_{\mathbf{K}} & \rightarrow & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G_K}) & \\ & D & \mapsto & \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(D) & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_K}}(D, B_{cris}) \end{array}$$

est un quasi-inverse de $\mathbf{D}^*_{cris}$.

Remarque : Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $V(i) = V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(i)$. Alors si V est une représentation cristalline, $V(i)$ est également cristalline et

$$\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V(i)) = (\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V))\{-i\} \quad .$$

B.2.1.1.2. Une représentation cristalline V est dite *cristalline positive* si le module filtré qui lui est associé est positif ; ceci revient à dire que

$$\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B_{cris}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B^+_{cris}) \quad .$$

(en effet, si on note $B\hat{}_{cris} = \{x \in \mathrm{Fil}^0 B_{cris}$ tel que $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{i fois}}(x) \in \mathrm{Fil}^0 B_{cris}$ pour tout $i \in \mathbf{N}\}$, on voit facilement que $B^+_{cris} \subset B\hat{}_{cris}$; d'autre part $\varphi(B\hat{}_{cris}) \subset B^+_{cris}$, si $p \neq 2$. Si $p = 2$, on a $\varphi^2(B\hat{}_{cris}) \subset B^+_{cris}$,cf. [F93].)

On note $\mathbf{Rep}^{+}_{\mathbf{Q_p,cris}}(\mathbf{G_K})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q_p,cris}}(\mathbf{G_K})$ formée des représentations cristallines positives. De même, on note $\mathbf{Rep}^{[\mathbf{a,b}]}_{\mathbf{Q_p,cris}}(\mathbf{G_K})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q_p,cris}}(\mathbf{G_K})$ dont les objets sont les représentations cristallines dont le module filtré associé par $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}$ est dans $\mathbf{MF}^{[\mathbf{a,b}]}_{\mathbf{K}}$. Si $e=1$, le foncteur $\mathbf{D}^*_{\mathbf{cris}}$ induit une anti-équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}^{[\mathbf{a,b}]}_{\mathbf{Q_p,cris}}(\mathbf{G_K})$ et $\mathbf{MF}^{[\mathbf{a,b}]}_{\mathbf{K}}$ pour $b-a\le p-1$. En d'autres termes, tout module filtré faiblement admissible dont la longueur de la filtration est inférieure à $p-1$ est admissible. Ce dernier résultat provient d'un résultat sur les représentations $\mathbf{Z}_p$-adiques.

B.2.1.2. *Représentations $\mathbf{Z}_p$-adiques qui sont des sous-quotients de représentations cristallines ; cas $e=1$.*

Posons

$$A_{cris,\infty} = \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} W_n^{PD}(R) \quad ;$$

c' est un objet de $\mathbf{MF_W}$ avec $\mathrm{Fil}^p A_{cris,\infty}=0$; alors, si Λ est un objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1}}_{\mathbf{W}}$ de torsion, on peut considérer le $\mathbf{Z}_p$-module défini par

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) \quad .$$

Si Λ est un objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1}}_{\mathbf{W}}$ sans p-torsion, on pose

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda/p^n\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris}) \quad .$$

On se propose alors de montrer le théorème suivant où $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathbf{W}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1}}_{\mathbf{W}}$ dont les objets Λ vérifient la propriété :

si Λ' est un quotient de Λ tel que $\Lambda'=\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda'$ alors $\Lambda'=0$.

THEOREME :

Le foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$ restreint à $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W,tors}}$ pour $h\le p-1$ est exact et fidèle. Si Λ est un objet de longueur finie, alors

$$\mathrm{long}_W \Lambda = \mathrm{long}_{\mathbf{Z_p}} \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda)$$

De plus, la restriction de $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$ à $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W,tors}}$, pour $h\le p-2$, ou bien à $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathbf{W}}$ est pleinement fidèle.

Si Λ est libre sur W , alors $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda)$ est libre sur $\mathbf{Z}_p$ et on a

$$\mathrm{rang}_W \Lambda = \mathrm{rang}_{\mathbf{Z_p}} \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda).$$

Remarque : Ce résultat a essentiellement déjà été démontré dans [F-L] ; la démonstration de l'exactitude et de la fidélité de $\mathbf{V}^*_{cris}$ proposée ici est un peu différente de celle contenue dans cet article. D'une part, elle est plus directe, car elle ne repose pas sur la classification des objets simples de la catégorie $\mathbf{MF_W}$, ce qui était le cas dans l'article cité ; d'autre part, l'anneau utilisé n'est pas le même. En effet, un anneau $S \subset W_K(R)$ y est introduit

$$(S = \{x \in W_K(R) \text{ tel que } v_R(x^{(0)}_{-n}) \geq np \text{ pour } n \in \mathbf{N}\} \quad ,$$

où $x = \sum_{n>>\infty} p^n[x_n]$), qui est également inclus dans A_{cris} ; cette inclusion induit une application de S/p^nS vers $A_{cris}/p^n A_{cris}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On peut vérifier que cette application induit un isomorphisme entre les représentations construites avec le premier anneau et celles construites avec le second.

B.2.2. Démonstration de l'exactitude et la fidélité de $\mathbf{V}^*_{cris}$.

Proposition :*Soit h un entier vérifiant $0 \leq h \leq p-1$. Si Λ est un objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ de torsion, donc un W-module de longueur finie d, alors*

$$\operatorname{long}_{\mathbf{Z_p}} \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = d$$

et

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) = 0 \quad .$$

Par dévissage, il suffit de considérer le cas où Λ est tué par p.

B.2.2.1. On commence par remarquer que si Λ est un objet de $\mathbf{MF}^{+}_{\mathbf{W}}$ tué par p, alors, comme $W_1^{PD}(R)$ s'identifie au noyau de la multiplication par p dans $A_{cris,\infty}$,

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \quad .$$

Par ailleurs,

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) = \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) \quad .$$

En effet, si E est une extension de Λ par $W_1^{PD}(R)$, le diagramme suivant est commutatif, où les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & W_1^{PD}(R) & \to & \operatorname{Ker} p & \to & \Lambda & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & A_{cris,\infty} & \to & E & \to & \Lambda & \to & 0 \\
 & & \times p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A_{cris,\infty} & \to & \operatorname{Im} p & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

ce qui permet de définir une flèche de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty})$ vers $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R))$; on vérifie facilement que cette flèche est l'inverse de la flèche naturelle

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) \quad ;$$

elle est donc bijective.

B.2.2.2. On s'est ainsi ramené à montrer la proposition :
PROPOSITION : *Si* Λ *est un objet de* $\mathbf{MF_k^{p-1}}$, *alors*

$$\dim_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) = \dim_k \Lambda$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) = 0 \quad .$$

Cette proposition se démontre en distinguant deux cas : le cas où Λ est un objet de $\mathbf{MF_k^{p-1*}}$ (c'est-à-dire qui n'admet pas de sous-quotient $\bar{\Lambda}$ tel que $\mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$) ou bien le cas où Λ vérifie $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$. Ces deux cas sont clairement disjoints et les objets simples de la catégorie $\mathbf{MF_k^{p-1}}$ soit sont dans $\mathbf{MF_k^{p-1*}}$, soit vérifient $\Lambda = \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda$. Ainsi, par dévissage, on voit qu'il suffit de démontrer la proposition ci-dessous.

PROPOSITION : 1) *Si* Λ *est un objet de* $\mathbf{MF_k^{p-1*}}$, *alors, pour* $i = 0, 1$, *l'application naturelle*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

induite par la suite exacte

$$0 \to I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \to W_1^{PD}(R) \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \to 0$$

est injective et c'est un isomorphisme pour $i = 0$.

2) *Si* Λ *est un objet de* $\mathbf{MF_k^{p-1}}$ *tel que* $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$, *alors, pour* $i = 0, 1$, *l'application naturelle*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, W_1^{PD}(R))$$

est un isomorphisme.

B.2.2.2.1. DEMONSTRATION de 1) : La suite exacte

$$0 \to I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \to W_1^{PD}(R) \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \to 0$$

permet de se ramener à montrer :

$$a) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0$$

et

$$b) \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0 \quad .$$

a) Soient $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R))$ et $\Lambda' = \mathrm{Ker}\, u$. Puisque

$$\Lambda = \sum_{0 \leq r \leq p-1} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda) \quad ,$$

on obtient l'égalité suivante, en utilisant le fait que u commute avec les applications φ^r :

$$u(\Lambda) = \sum_{0 \leq r \leq p-1} \varphi^r(u(\mathrm{Fil}^r \Lambda)) \quad .$$

Comme u a son image dans $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \subset \mathrm{Fil}^{p-1} W_1^{PD}(R)$, on déduit que

$$\varphi^r(u(\mathrm{Fil}^r \Lambda)) = 0 \quad \text{pour} \quad r < p-1$$

et, par conséquent,

$$\Lambda = \Lambda' + \varphi^{p-1}(\mathrm{Fil}^{p-1} \Lambda) \quad .$$

Si $\bar{\Lambda} = \Lambda/\Lambda'$, on a $\bar{\Lambda} = \varphi^{p-1}(\mathrm{Fil}^{p-1} \bar{\Lambda})$, donc $\dim_k \bar{\Lambda} \leq \dim_k \mathrm{Fil}^{p-1} \bar{\Lambda}$, d'où $\bar{\Lambda} = \mathrm{Fil}^{p-1} \bar{\Lambda}$; comme Λ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1}*}$, on obtient $\bar{\Lambda} = 0$.

b) Pour montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0$, il s'agit de vérifier qu'une suite exacte

$$0 \to I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \to E \to \Lambda \to 0$$

est scindée.

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de Λ adaptée à la filtration et, pour tout i, r_i le plus grand entier tel que $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i} \Lambda$. Choisissons un relèvement $\hat{e}_i$ de e_i dans $\mathrm{Fil}^{r_i} E$; alors si $((a_{ij}))$ est la matrice représentant les φ^r dans la base (e_i), c'est-à-dire si

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i \quad ,$$

il existe des éléments $b_j \in I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i + b_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d \quad .$$

On cherche à montrer l'existence d'une section $\Lambda \to E$ respectant la filtration et commutant aux φ^r, ce qui revient à montrer l'existence d'éléments α_j de $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j + \alpha_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + \alpha_i) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d \quad .$$

Comme $\mathrm{Fil}^{p-1} I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) = I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ et puisque $\varphi^r(x) = 0$, pour tout $x \in \mathrm{Fil}^r I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ et pour tout $r \leq p-2$, on est ramené à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}\alpha_i = b_j \quad \text{pour } j \text{ tel que} \quad r_j \neq p-1 \\ \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}\alpha_i = \varphi^{p-1}(\alpha_j) + b_j \quad \text{pour } j \text{ tel que } r_j = p-1 \end{cases} ,$$

qui est équivalent au système suivant, où la matrice $((a'_{ij}))$ est la matrice inverse de $((a_{ij}))$,

$$\begin{cases} \rho_j = b_j \quad \text{pour } j \text{ tel que} \quad r_j \neq p-1 \\ \rho_j - \sum_{1\leq i\leq d} (a'_{ij})^p\varphi^{p-1}(\rho_i) = b_j \quad \text{pour } j \text{ tel que } r_j = p-1 \end{cases} .$$

Comme le montre le lemme suivant, la condition $*$ implique que ce système a une unique solution.
◇

B.2.2.2.2. LEMME : *Soit Λ un objet de $\mathbf{MF_k^{p-1}}$ n'admettant pas de quotient $\bar\Lambda$ tel que $\mathrm{Fil}^{p-1}\bar\Lambda = \bar\Lambda$; on se place dans une base $(e_1,\cdots,e_d)$ adaptée à la filtration, ordonnée de telle sorte que $(e_1,\cdots,e_m)$ soit une base de $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda$, on note r_j le plus grand entier tel que $e_j \in \mathrm{Fil}^{r_j}\Lambda$, $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq d}^{1\leq i\leq d}$ la matrice telle que*

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}e_i$$

et $A' = A^{-1}$. Alors la matrice $B = (a'_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq m}$ extraite de la matrice A' est nilpotente.

DEMONSTRATION : Si la matrice n'est pas nilpotente, alors on peut trouver une base de $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda$ telle que dans cette base, la matrice A' soit de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice carrée inversible d'ordre $d' \geq 1$.

On définit un objet $\bar\Lambda$ de $\mathbf{MF_k^{p-1}}$ tel que $\mathrm{Fil}^{p-1}\bar\Lambda = \bar\Lambda$, de base $(\bar e_1\cdots,\bar e_{d'})$ vérifiant $\bar e_j = \sum_{1\leq i\leq d'} a'_{ij}\varphi^{p-1}(\bar e_i)$ et on va construire un morphisme surjectif de Λ vers $\bar\Lambda$ ce qui contredira l'hypothèse faite sur Λ. Soit u l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} u: & \Lambda & \rightarrow & \bar\Lambda \\ & e_j & \mapsto & \sum_{1\leq i\leq d'} a'_{ij}\varphi^{p-1}(\bar e_i) \end{array} ;$$

u respecte la filtration et il reste à vérifier que u commute bien aux applications φ^{r_j}, c'est-à-dire

$$u(\varphi^{r_j}(e_j)) = \varphi^{r_j}(u(e_j)) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d \quad .$$

Puisque A' est inversible, il est équivalent de vérifier que

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} u(\varphi^{r_i}(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d \quad .$$

Comme u est linéaire,

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} u(\varphi^{r_i}(e_i)) = u\,\Big(\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(e_i)\Big) = u(e_i) \quad ,$$

d'autre part, puisque $\varphi^{r_i}(x) = 0$ pour $r_i \leq p-2$ et $x \in \bar{\Lambda}$,

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq m} a'_{ij} \varphi^{p-1}(u(e_i))$$

et, par choix de la base, pour j tel que $d' + 1 \leq j \leq m$,

$$u(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i) = 0 \quad ,$$

d'où

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(u(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i) = u(e_i) \quad .$$

◇

B.2.2.2.3. Demonstration de 2) : La même suite exacte que précédemment permet de se ramener à montrer que, pour $i = 0, 1$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K) = 0 \quad .$$

a) Pour montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0$ on montre que

$$\{x \in \mathrm{Fil}^{p-1}\, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \cdots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}} \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}\} = 0 \quad .$$

En effet, $\mathrm{Fil}^{p-1}\, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est l'image de

$$\{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq (p-1)/p\}$$

et on voit que, pour $i \in \mathbf{N}$,

$$\{x \in \mathrm{Fil}^{p-1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \cdots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}}(x) \in \mathrm{Fil}^{p-1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}\}$$

est l'image de

$$\{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq (p-1)(1/p + \cdots + 1/p^i)\} \quad .$$

On en déduit que

$$\{x \in \mathrm{Fil}^{p-1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \cdots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}} \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}\}$$

est l'image de

$$\{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq 1\}$$

c'est-à-dire $p\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

b) Soit E une extension de Λ par $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$; on se place dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de Λ et on note $\varphi^{p-1}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$, où la matrice (a_{ij}) est inversible. On choisit $\hat{e}_i$ un relèvement de e_i dans $\mathrm{Fil}^{p-1} E$, alors

$$\varphi^{p-1}(\hat{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i + b_j \quad ,$$

où $b_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$; dire que l'extension est triviale revient à dire qu'il existe des éléments $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ de $\mathrm{Fil}^{p-1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ tels que

$$\varphi^{p-1}(\hat{e}_j + x_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + x_i) \quad ,$$

c'est-à-dire qui vérifient

$$(\varphi^{p-1}(x_j) - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} x_i = b_j)_{1 \leq j \leq d} \quad .$$

Soient $\hat{a}_{ij}$ un relèvement de a_{ij} dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et $\hat{b}_i$, pour $1 \leq i \leq d$, des éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$; alors le système

$$(\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{p-1}} - \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \hat{x}_i = \hat{b}_j)_{1 \leq j \leq d}$$

admet toujours des solutions dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ (la démonstration repose sur le fait que l'algèbre

$$\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_d]/(X_j - p^{p-1} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} X_i - p^{p-1} \hat{b}_j)_{1 \leq i \leq d}$$

est étale,cf. un peu plus loin, p. 37.), d'où le fait que le système modulo p admet toujours des solutions.

◇

On est alors ramené à montrer les deux propositions suivantes :
PROPOSITION 1 :*Si* Λ *est un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1*}}$, *alors*

$$\begin{aligned}&\dim_k \Lambda = \dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})\\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0 \quad .\end{aligned}$$

PROPOSITION 2 :*Si* Λ *est un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1}}$ *tel que* $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$ *alors,*

$$\begin{aligned}&\dim_k \Lambda = \dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R))\\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0 \quad .\end{aligned}$$

B.2.2.3. *Démonstration de la proposition* 1 *dans le cas où* $h \leq p-2$.

On se place dans une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ de Λ adaptée à la filtration ; pour chaque i, soit r_i l'entier tel que $\bar{e}_i$ appartienne à une base de $\mathrm{gr}^{r_i} M$, alors

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}e_i \quad ,$$

où la matrice $A = ((a_{ij}))$ est inversible à coefficients dans k.
B.2.2.3.1. Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$; on pose $u(e_i) = x_i \in \mathrm{Fil}^{r_i}\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$.
On doit alors avoir :

$$\forall j \quad 1\leq j\leq d \quad u(\varphi^{r_j}(e_j)) = \varphi^{r_j}(x_j) \quad .$$

En d'autres termes $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ vérifie le système suivant :

$$\Big(\sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}x_i \equiv \frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} \mod p\Big)_{1\leq j\leq d}$$

où $\hat{x}_j$ est un relèvement de x_j dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.
On voit de cette façon que, si l'on choisit des relèvements $\hat{a}_{ij} \in W(k)$ des a_{ij}, $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda)$ est l'ensemble des solutions $(\hat{x}_i)_{1\leq i\leq d} \in (\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})^d$ du système de congruence :

$$\Big(\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} \equiv \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\hat{x}_i \mod p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}\Big)_{1\leq j\leq d}$$

où $\hat{x}_i$ est un relèvement de x_i dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et vérifie donc $v_{\mathbf{C}}(\hat{x}_i) \geq r_i/p$.

B.2.2.3.2. Soit E une extension de Λ par $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Pour tout i, notons $\hat{e}_i$ un relèvement de e_i dans $\mathrm{Fil}^{r_i} E$ et, pour tout j, soit b_j l'élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ tel que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}\hat{e}_i + b_j \quad .$$

Pour montrer que cette suite est scindée, il s'agit de montrer qu'il existe pour tout i, $1 \leq i \leq d$, des éléments x_i dans $\mathrm{Fil}^{r_i}\, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j + x_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + x_i) \quad ,$$

c'est-à-dire, si $\hat{b}_j$ désigne un relèvement de b_j dans $W(k)$, de résoudre le système suivant :

$$\left(\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} \equiv \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}\hat{x}_i - \hat{b}_j \mod p\mathcal{O}_{\mathbf{C}}\right)_{1 \leq j \leq d}$$

où $\hat{x}_i$ est un relèvement de x_i dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et vérifie donc $v_{\mathbf{C}}(\hat{x}_i) \geq r_i/p$.
B.2.2.3.3. Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme : *Si $(x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$ est un d-uplet vérifiant le système (1) modulo β_1^n, pour $n \geq p$, alors il existe $(\mu_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$, où μ_i est unique modulo β_1, tel que $(x_i + \beta_1^n \mu_i)_{1 \leq i \leq d}$ vérifie le même système de congruence modulo β_1^{n+1} .*

Demonstration :

– Soit $n \geq p$; pour $0 \leq r \leq p-2$, calculons $\dfrac{(x + \beta_1^n \mu)^p}{(-p)^r}$, où $v(x) \geq \dfrac{r}{p}$ et $x = \beta_1^r x'$ avec $x' \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.

$$\begin{aligned} \frac{(x+\beta_1^n\mu)^p}{(-p)^r} &= (x' + \beta_1^{n-r}\mu)^p \\ &= x'^p + px'^{p-1}\beta_1^{n-r}\mu + \cdots + px'(\beta_1^{n-r}\mu)^{p-1} + \beta_1^{p(n-r)}\mu^p \end{aligned}$$

or
$$\begin{cases} v\left(px'^{p-1}\beta_1^{n-r}\mu + \cdots + px'(\beta_1^{n-r}\mu)^{p-1}\right) \geq 1 + \dfrac{n-r}{p} \geq \dfrac{n+1}{p} \\ v(\beta_1^{p(n-r)}\mu^p) \geq n - r \geq \dfrac{n+1}{p} \end{cases} .$$

Dans ce cas, où $h \leq p-2$ et par conséquent $r_j \leq p-2$ pour tout j , les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}(x_i + \beta_1^n \mu_i) \equiv \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} + \hat{b}_j \mod \beta_1^{n+1} \quad .$$

Puisque

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}x_i - \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} - \hat{b}_j \in \beta_1^n \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

pour tout j par hypothèse , on peut écrire

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}x_i - \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} - \hat{b}_j = \beta_1^n \nu_j$$

avec $\nu_j \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.

– Il s'agit maintenant de résoudre :

$$(\sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\mu_i \equiv -\nu_j)_{1\leq j\leq d} \quad \operatorname{mod}\beta_1 \quad .$$

Comme la matrice $((a_{ij}))$ est inversible, la matrice $((\hat{a}_{ij}))$ l'est également, d'où l'existence et l'unicité modulo β_1 des μ_i .
$\diamond$

B.2.2.3.3. Comme $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est séparé et complet pour la topologique p-adique, donc β_1-adique, le lemme précédent montre que :

– prouver la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ revient à prouver que le système

$$(1) \qquad (\frac{\hat{x}_j^p}{(-p^{r_j}}) = \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\hat{x}_i - \hat{b}_j)_{1\leq j\leq d}$$

a toujours au moins une solution dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$,

– prouver que

$$\dim_k \Lambda = \dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

revient à montrer que le système ci-dessus a exactement p^d solutions lorsque les $\hat{b}_j$ sont tous nuls.
Il suffit donc de vérifier que le système a toujours p^d solutions.

Tout d'abord, on constate que toute solution du système

$$(x_j^p = p^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}x_i - p^{r_j}\hat{b}_j)_{1\leq i\leq d}$$

dans $\mathbf{C}^d$ est solution dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$ du même système , car $\hat{a}_{ij} \in W$ et

$$W[X_1, \cdots, X_d]/(X_j^p - p^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}X_i - p^{r_j}\hat{b}_j)_{1\leq i\leq d}$$

est une W-algèbre finie .

On note $E = \{(x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbf{C}^d$ tel que $x_j^p = p^{r_j}\sum_{1\leq i\leq d}\hat{a}_{ij}x_i - p^{r_j}\hat{b}_j\}$. Cet ensemble est en bijection avec les morphismes de $C-$algèbres de Σ dans $\mathbf{C}$, où

$$\Sigma = \mathbf{C}[X_1, \cdots, X_d]/(X_j^p - p^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}X_i - p^{r_j}\hat{b}_j)_{1\leq j\leq d}$$

est une algèbre finie sur $\mathbf{C}$ de dimension p^d, de base les images de $\prod_{1\leq i\leq d} X_i^{\alpha_i}$ pour $0 \leq \alpha_i \leq p-1$. Il suffit donc de montrer que Σ est étale, c'est-à-dire que $\Omega^1_{\Sigma/\mathbf{C}} = 0$. Soient $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ tel que $\gamma^p = p$ et posons $X_j = \gamma^{r_j}Y_j$; alors

$$\Sigma = \mathbf{C}[Y_1, \cdots, Y_d]/(Y_j^p - \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\gamma^{r_i}Y_i - \hat{b}_j)_{1\leq j\leq d} \quad .$$

On note y_i l'image de Y_i dans Σ, alors $\Omega^1_{\Sigma/\mathbf{C}}$ est engendré par les dy_i avec pour relations :

$$py_j^{p-1}dy_j - \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\gamma^{r_i}dy_i = 0 \quad .$$

Le déterminant de la matrice, dont les coefficients sont $\gamma^{r_i}(\gamma^{p-r_j}y_j^{p-1}\delta_{ij} - \hat{a}_{ij})$, est inversible dans $\mathbf{C}[x_1,\cdots,x_d]$ puisque la matrice $(\hat{a}_{ij})$ est inversible ; donc $\Omega^1_{\Sigma/\mathbf{C}} = 0$. L'algèbre Σ est non ramifiée sur le corps $\mathbf{C}$, donc étale.

L'exactitude et la fidélité du foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}} : \mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-2}} \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{F_p}}(\mathbf{G_K})$ se déduisent directement de ce résultat .

B.2.2.4. *Démonstration de la proposition* 1 *dans le cas où* $h = p-1$.

B.2.2.4.1. On a défini $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1*}}$ de la manière suivante : ses objets sont les modules filtrés Λ sur k de hauteur $\leq p-1$ et tels que si Λ' est un quotient de Λ vérifiant $\Lambda' = \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda'$, alors $\Lambda' = 0$.

Le théorème se démontre de la même manière que dans le cas précédent en passant par le lemme suivant, dont la démonstration est un peu plus pénible.

Lemme : *Si* $(\hat{x}_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$ *est un* d*-uplet vérifiant le système* (1) *modulo* β_1^n, *pour* $n \geq p$, *alors il existe* $(\mu_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^d$, *où* μ_i *est unique modulo* β_1, *tel que* $(\hat{x}_i + \beta_1^n\mu_i)_{1\leq i\leq d}$ *vérifie le système de congruence modulo* β_1^{n+1} .

B.2.2.4.2. Demonstration :

Le système à résoudre, compte-tenu des remarques du paragraphe précédent, s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i + \beta_1^n\mu_i) \equiv \frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} - \hat{b}_j \bmod \beta_1^{n+1} \qquad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \\ \displaystyle\sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i + \beta_1^n\mu_i) \equiv \frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{p-1}} + (-p)^{n-(p-1)}\mu_j^p - \hat{b}_j \bmod \beta_1^{n+1} \\ \qquad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \end{cases}$$

ce qui s'écrit modulo β_1 :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\mu_i \equiv -\nu_j \qquad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \\ \displaystyle\sum_{1\leq j\leq d} \hat{a}_{ij}\mu_i - \beta_1^{(n-p)(p-1)}\mu_j^p \equiv -\nu_j \qquad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \end{cases}$$

– Si $n > p$, on conclut immédiatement à l'existence et à l'unicité des μ_i modulo β_1 .

– Si $n = p$, il reste à résoudre le système suivant modulo β_1 :

$$\begin{cases} \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\mu_i \equiv -\nu_j \text{ pour } j \text{ tel que } e_j \notin \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \\ \sum_{1\leq i\leq d} \hat{a}_{ij}\mu_i - \mu_j^p \equiv -\nu_j \text{ pour } j \text{ tel que } e_j \in \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \end{cases}$$

Puisque la matrice $((\hat{a}_{ij}))$ est inversible, on peut transformer le système à résoudre en le système suivant, où $((\hat{a}'_{ij})) = ((\hat{a}_{ij}))^{-1}$:

$$\begin{cases} \rho_j \equiv -\nu_j \mod \beta_1 \quad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \\ \rho_j - \sum_{1\leq i\leq d} (\hat{a}'_{ij})^p\rho_i^p \equiv -\nu_j \mod \beta_1 \quad \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda \end{cases}$$

On conclut en utilisant à nouveau le lemme B.2.2.2.2. : d'après ce lemme, la matrice $((a'_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}}$ est nilpotente. On en déduit l'existence et l'unicité des ρ_i modulo β_1 et, par conséquent celle des μ_i .
diamond

B.2.2.5. *Démonstration de la proposition* 2.

Il s'agit de voir à présent que si Λ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1}}$ tel que $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$ alors

$$\dim_k \Lambda = \dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R))$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0 \quad .$$

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ une base de Λ et $\varphi^{p-1}(e_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}e_i$ où la matrice $((a_{ij}))$ est inversible à coefficients dans k ; comme précédemment et comme $\mathrm{Fil}^{[p-1]}(I^{p-1}W_1^{PD}(R)) = I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$, on se ramène à vérifier que l'ensemble des solutions dans $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ du système

$$\big(\varphi^{p-1}(x_j) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}x_i - b_j\big)_{1\leq j\leq d} \quad ,$$

où $a_{ij} \in k$ et $b_j \in I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$, est de cardinal p^d.
Un élément x de $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{n\geq p-1} x^{(n)}\tilde{t}^{\{n\}} \quad \text{avec} \quad x^{(n)} \in R/\tilde{\pi}_0 R$$

où $\tilde{t}^{\{n\}}$ est l'image dans $W_1^{PD}(R)$ de $t^{\{n\}} = t^{r(n)}\gamma_{m(n)}(t^{p-1}/p)$ et $r(n)$ et $m(n)$ sont respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de n par $p-1$ (cf. [F93]). On remarque que $\varphi^{p-1}(\tilde{t}^{\{n\}}) = 0$, si $n > p-1$, et $\varphi^{p-1}(\tilde{t}^{\{p-1\}}) = \tilde{t}^{\{p-1\}}$.

A la suite de ces remarques, le système à résoudre s'écrit pour tout j, $1 \leq j \leq d$,

$$\varphi^{p-1}\Big(\sum_{n\geq p-1} x_j^{(n)}\tilde{t}^{\{n\}}\Big) = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}\Big(\sum_{n\geq p-1} x_i^{(n)}\tilde{t}^{\{n\}}\Big) - \sum_{n\geq p-1} b_j^{(n)}\tilde{t}^{\{n\}} \quad ,$$

ce qui revient à résoudre dans $R/\tilde{\pi}_0 R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ le système :

$$(1) \quad (x_j^{(p-1)})^p = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij} x_i^{(p-1)} - b_j^{(p-1)}$$

$$(2) \quad 0 = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij} x_i^{(n)} - b_j^{(n)} \quad \text{pour } n \geq p \quad .$$

On montre comme précédemment que (1) a exactement p^d solutions, tandis que (2), comme la matrice (a_{ij}) est inversible, a une et une seule solution, d'où le résultat souhaité.

B.2.3. Démonstration de la pleine fidélité de $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$ restreint à $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{p-1}*}$.

Pour démontrer la pleine fidélité, on se ramène par dévissage au cas où Λ est tué par p.

Soit, en effet, $0 \to \Lambda' \to \Lambda \to \Lambda'' \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{p-1}}$ et N un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{p-1}}$. Si on suppose

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(N, \Lambda') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda'), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(N, \Lambda'') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda''), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N)) \quad ,$$

il suffit de montrer que l'application naturelle de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(N, \Lambda') \text{ dans } \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda'), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N))$$

est injective, pour en déduire l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(N, \Lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N)) \quad .$$

On se ramène ainsi à montrer que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_W}}(N, \Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N))$$

est injective lorsque Λ et N sont tués par p. En fait, il suffit de vérifier l'injectivité de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(N, \Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{F}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N)) \quad .$$

En effet, si on a une suite exacte d'objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{p-1}}$

$$0 \to \Lambda \to E \to N \to 0 \quad ,$$

où Λ et N sont tués par p et E n'est pas tué par p, alors $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(E)$ n'est pas tué par p et la suite

$$0 \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N) \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(E) \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) \to 0$$

n'est pas scindée.

La démonstration de la pleine fidélité du foncteur

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}} : \mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p-1*}} \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{F_p},\mathbf{cris}}(\mathbf{G_K})$$

et de l'injectivité de la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF_k}}(N, \Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{F}_p[G_K]}(\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda), \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(N))$$

va reposer sur la construction d'un quasi-inverse.

B.2.3.1. Soit T une représentation modulo p de G_K de dimension finie d sur $\mathbf{F}_p$; on note $\mathcal{F}_{G_K}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ l'ensemble des fonctions de T à valeurs dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ qui commutent à l'action de G_K. C'est une algèbre finie de rang p^d sur $\mathcal{O}_K$. A l'intérieur de cette algèbre, on considère le sous-ensemble noté $\Lambda'(T)$ formé des fonctions qui modulo p sont des morphismes. Un élément f de $\Lambda'(T)$ est donc une fonction

$$f : T \to \mathcal{O}_{\bar{K}}$$

qui vérifie : $f(g(v)) = g(f(v))$ si $v \in T$ et $g \in G_K$,
$f(v + v') - f(v) - f(v') \in p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ pour tout v et v' dans T.

Alors

$$\Lambda(T) = \Lambda'/p\mathcal{F}_{G_K}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}})$$

est un k-espace vectoriel de dimension finie ; on peut le voir comme un sous-k-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p[G_K]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et ainsi le munir d'une filtration et d'applications φ^r, qui proviennent de la filtration et des applications φ^r définies sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On a :

$$\mathrm{Fil}^r \Lambda = \{f \in \Lambda \text{ telle que } f(v) \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ pour tout } v \in T\} \quad .$$

On rappelle que

$$\mathrm{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} = \beta_1^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

où $\beta_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est l'image d'un élément $\hat{\beta}_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifiant $\hat{\beta}_1^p + p = 0$ et que $\varphi^r : \mathrm{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est l'application qui à $\beta_1^r x$ associe x^p.

Le module $\Lambda(T)$ ainsi construit est donc un module filtré sur k de dimension finie, dont on ne sait pas s'il vérifie la condition

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda(T)) = \Lambda(T) \quad .$$

B.2.3.2. On construit une suite décroissante de sous-modules filtrés de $\Lambda(T)$ en posant pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \Lambda(T) \\ \Lambda_{n+1} &= \sum_{r\in\mathbf{Z}} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda_n) \quad . \end{aligned}$$

Alors $\Lambda_\infty = \cap \Lambda_n$ est un k-espace vectoriel de dimension finie qui vérifie

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^0 \Lambda_\infty &= \Lambda_\infty \\ \mathrm{Fil}^p \Lambda_\infty &= 0 \\ \Lambda_\infty &= \sum_{r\in\mathbf{Z}} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda_\infty) \quad . \end{aligned}$$

C'est donc un objet de $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\mathbf{p-1}}$.

PROPOSITION : Λ_∞ *est un objet de* $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\mathbf{p-1*}}$ *et le foncteur*

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}} : & \mathbf{Rep}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{F_p,cris}}(\mathbf{G_K}) & \to & \mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\mathbf{p-1*}} \\ & T & \mapsto & \Lambda_\infty \end{array}$$

est un quasi-inverse du foncteur $\mathbf{V}^*_{cris}$.

DEMONSTRATION : on vérifie facilement que si Λ est un module filtré sur k, objet de $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\mathbf{p-1*}}$ et si $\mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T)$ est le module filtré associé à $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda)$ par la recette précédente, alors $\Lambda \subset \Lambda_\infty$. On dispose ainsi d'une suite exacte

$$0 \to \Lambda \to \Lambda_\infty \to \Lambda' \to 0$$

d'objets de $\mathbf{MF}_\mathbf{k}^{\mathbf{p-1}}$, à laquelle on peut appliquer le foncteur exact $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$. On obtient ainsi une suite exacte de représentations de G_K, où $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = T$,

$$0 \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda') \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda_\infty) \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) \to 0 \quad .$$

Montrons que cette suite exacte est scindée : par construction

$$\mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p[G_K]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \quad ,$$

qui peut être considéré comme un objet de $\mathbf{MF_k}$, d'où une flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p[G_K]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}), \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T)) \quad .$$

D'autre part,

$$T \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_k}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p[G_K]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}), \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

d'où une application $T \to \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T))$. On en déduit que

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T)) = \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda)$$

et, par la fidélité du foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$, que $\Lambda' = 0$, c'est-à-dire que $\Lambda \simeq \mathbf{\Lambda}^*_{\mathbf{cris}}(T)$.

◇

B.2.3.3. *Remarque.*

Il existe également une version covariante du foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$ et de son quasi-inverse ; pour $0 \leq h \leq p-2$, le foncteur

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}: & \mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}} & \rightarrow & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z_p}}\mathbf{G_K} & \\ & \Lambda & \mapsto & \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(\Lambda) & = (A_{cris} \otimes_W \Lambda)^{\varphi=1} \end{array}$$

est exact et fidèle et induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ et son image essentielle. Le foncteur

$$T \mapsto \bigcup_{\substack{\Lambda \in \mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}} \\ \Lambda \subset (A_{cris} \otimes_{\mathbf{Z_p}} V)^{G_K}}} \Lambda$$

est un quasi-inverse (cf. [N]). Ceci se voit sur les objets tués par p en remarquant que

$$\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda^*)$$

où Λ^* est le dual de Λ, c'est-à-dire $\Lambda^* = \mathrm{Hom}_k(\Lambda, k)$; dans ce cas le foncteur ci-dessus n'est autre que le foncteur

$$T \mapsto (\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{cris}}(T^*))^*.$$

C. Lien entre les représentations cristallines et les (φ,Γ)-modules de hauteur finie.

C.1. Représentations p-adiques $\mathbf{G_K}$; démonstration du théorème 1.

Dans cette partie, on suppose désormais $K \subset K_\infty$. L'équivalence entre les cinq assertions sera démontrée en suivant les implications suivantes :

$$2) \Rightarrow 1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 4) \Rightarrow 2) \quad .$$

En conséquence des remarques déjà faites, il reste à démontrer

$$4) \Rightarrow 2) \quad , \quad 3) \Rightarrow 5) \quad \text{et} \quad 5) \Rightarrow 4) \quad .$$

C.1.1. Démonstration de 4) $\Rightarrow$ 2).

C.1.1.1. Soient s un entier ≥ 1 (voire ≥ 2 si $p=2$) et S_s le sous-W-module libre de $S[1/p]$ de base les éléments $\gamma_m(\pi/p^s)$ pour $m \in \mathbf{N}$ où $\gamma_m(\pi/p^s) = \dfrac{\pi^m}{m!p^{sm}}$. C'est une sous-$W$-algèbre de $S[1/p]$ et le W-module I engendré par les $\gamma_m(\pi/p^s)$ avec $m \geq 1$ est un p-d-idéal. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $n^{\text{ième}}$-puissance divisée $I^{[n]}$ de I est l'idéal engendré par les $\gamma_m(\pi/p^s)$ pour $m \geq n$ et on pose

$$S_s^{PD} = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} S_s/I^{[n]}$$

le complété de S_s pour la topologie définie par les idéaux $I^{[n]}$. Alors tout $x \in S_s^{PD}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$x = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \gamma_n(\frac{\pi}{p^s}) \quad \text{avec} \quad x_n \in W \quad .$$

Soient N un S-module libre de rang d et Λ_0 un sous-W-module libre de N tel que $N = \Lambda_0 \oplus \pi N$; alors tout élément $x \in N$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \pi^n$ avec $x_n \in \Lambda_0$. De même, si on pose

$$N_s^{PD} = S_s^{PD} \hat{\otimes}_S N = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} ((S_s/I^{[n]}) \otimes_S N) \quad ,$$

tout élément x' de N_s^{PD} s'écrit de façon unique sous la forme $x' = \sum_{n\in\mathbf{N}} x'_n \gamma_n(\pi/p^s)$ avec $x'_n \in \Lambda_0$.

On note Γ_s le sous-groupe fermé de Γ_{K_0} topologiquement engendré par l'élément g de Γ tel que $\chi(g) = 1 + p^s$. Si s est suffisamment grand, $\Gamma_s \subset \Gamma = \Gamma_K$.

C.1.1.2. Commençons par établir le lemme suivant :

LEMME : *Soit N un S-module libre de rang d muni d'une action de Γ_s semi-linéaire et triviale modulo π. On note $N_s^{PD} = S_s^{PD}\hat{\otimes}_S N$ et i^* la projection de N vers $N/\pi N = \Lambda$. On a aussi $\Lambda = N_s^{PD}/I^{[1]}N_s^{PD}$ et on note ρ la projection de N_s^{PD} sur Λ ; on est donc en présence du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[dr, "i^*"'] & N_s^{PD} \arrow[d, "\rho"] \\ & \Lambda \end{tikzcd}$$

alors pour tout $x \in N$, il existe un unique $x' \in (N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ tel que $i^*(x) = \rho(x')$.

DEMONSTRATION :

Soit g le générateur topologique de Γ_s fixé ci-dessus. On rappelle (cf. [F93], chap. 5) que $g(\pi) \equiv \chi(g)\pi$ modulo $\pi^2 S$, ce qui s'écrit également $g(\pi) = \alpha\pi$ où α est une unité de S vérifiant $\alpha \equiv 1 + p^s \bmod \pi S$.

Comme S_s^{PD} est complet pour la topologie définie par les idéaux $I^{[n]}$ et N_s^{PD} est libre , il suffit de montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $x'_n \in N_s^{PD}$ canonique modulo $I^{[n]}N_s^{PD}$ tel que $g(x'_n) \equiv x'_n \bmod I^{[n]}N_s^{PD}$ et $\rho(x'_n) = i^*(x)$. Plus précisément :

SOUS-LEMME : *S'il existe $x'_n \in N_s^{PD}$ vérifiant $g(x'_n) \equiv x'_n \bmod \pi I^{[n]}N_s^{PD}$, il existe $x'_{n+1} \in N_s^{PD}$ unique modulo $I^{[n+1]}N_s^{PD}$ tel que*

$$x'_{n+1} \equiv x'_n \bmod I^{[n+1]}N_s^{PD}$$

et

$$g(x'_{n+1}) \equiv x'_{n+1} \bmod \pi I^{[n+1]}N_s^{PD} \quad .$$

DEMONSTRATION : – On peut écrire

$$g(x'_n) \equiv x'_n + \pi\gamma_n(\frac{\pi}{p^s})y_n \quad \bmod \quad \pi I^{[n+1]}N_s^{PD} \quad ,$$

avec $y_n \in N$, et on cherche x'_{n+1} sous la forme

$$x'_{n+1} = x'_n + \gamma_{n+1}(\frac{\pi}{p^s})x_n \quad ,$$

avec $x_n \in N$. On a alors, modulo $\pi I^{[n+1]}N_s^{PD}$

$$\begin{aligned} g(x'_{n+1}) &\equiv x'_n + \pi\gamma_n(\frac{\pi}{p^s})y_n + \gamma_{n+1}(\alpha\frac{\pi}{p^s})g(x_n) \\ &\equiv x'_n + \gamma_{n+1}(\frac{\pi}{p^s})\big((n+1)p^s y_n + \alpha^{n+1}g(x_n)\big) \quad . \end{aligned}$$

Comme $g(x_n) \equiv x_n \bmod \pi N$ et $\alpha \equiv 1 + p^s \bmod \pi S$:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1}g(x_n) &\equiv (1+p^s)^{n+1}x_n \bmod \pi N \\ &\equiv (1+(n+1)p^s v')x_n \bmod \pi N \quad , \end{aligned}$$

où v' est une unité de S, on en déduit que

$$g(x'_{n+1}) \equiv x'_{n+1} \mod \pi I^{[n+1]} N_s^{PD}$$

équivaut à $x_n = -(v')^{-1} y_n$.

– Il reste à remarquer que pour $n = 0$, $x'_0 = x$.

◇

Remarques :

a) On voit que, si N est libre de rang d sur S $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ est un W-module libre de rang d et $N_s^{PD} = (N_s^{PD})^{\Gamma_s} \oplus I^{[1]} N_s^{PD}$; par conséquent, tout $x' \in N_s^{PD}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x' = \sum_{n \in \mathbf{N}} \gamma_n(\frac{\pi}{p^s}) x'_n \quad \text{où } g(x'_n) = x'_n \quad .$$

b) Le lemme définit une section $\Lambda \to N_s^{PD}$ qui induit un isomorphisme de W-modules entre Λ et $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$. Si en plus N est muni d'une action de Γ et si $\Gamma_s \subset \Gamma$, alors l'action de Γ sur N induit une action de Γ sur Λ et cette section commute à l'action de Γ. De même, si on a un Frobenius φ sur N, celui-ci passe au quotient, d'où un Frobenius sur Λ et la section respecte aussi l'action du Frobenius.

C.1.1.3. Rappelons que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\gamma_m(\pi_0/p) \in A_{cris}$, si $p \neq 2$ (respectivement si $p = 2$, $\gamma_m(\pi_0/8) \in A_{cris}$). Si $S < \pi_0/p >$ (resp. $S < \pi_0/8 >$) désigne le sous-S-module, qui est aussi la sous-S-algèbre, de $S[1/p]$ engendré par les $(\gamma_m(\pi_0/p))_{m \in \mathbf{N}}$ (resp. $(\gamma_m(\pi_0/8))_{m \in \mathbf{N}}$), on en déduit un morphisme de $W(R)$-algèbres de $W(R) \otimes_S S < \pi_0/p >$ (resp. $W(R) \otimes_S S < \pi_0/8 >$) dans A_{cris} qui induit un isomorphisme du séparé complété $W(R) \hat{\otimes}_S S < \pi_0/p >$ (resp. $W(R) \hat{\otimes}_S S < \pi_0/8 >$) de $W(R) \otimes_S S < \pi_0/p >$ (resp. $W(R) \otimes_S S < \pi_0/8 >$) pour la topologie p-adique sur A_{cris} (cf. [F93], chap. 5).

Pour $s \geq 1$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $\gamma_m(\pi_0/p) \in S_s^{PD}$ (resp. $\gamma_m(\pi_0/8) \in S_s^{PD}$), d'où un morphisme de $W(R)$-algèbres de $W(R) \otimes_S S < \pi_0/p >$ (resp. de $W(R) \otimes_S S < \pi_0/8 >$) dans $W(R) \otimes_S S_s^{PD}$ qui s'étend par continuité en un morphisme ν_s de A_{cris} vers $W(R) \hat{\otimes}_S S_s^{PD}$.

A partir de maintenant, $\varphi^n(x)$ désigne $\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}(x)$.

LEMME : *Il existe un et un seul morphisme continu*

$$\psi_s : W(R) \hat{\otimes}_S S_s^{PD} \to A_{cris}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD} \arrow[rr, "\varphi^s"] \arrow[dr, "\psi_s"'] & & W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD} \\ & A_{cris} \arrow[ur, "\nu_s"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DEMONSTRATION : on constate que, si $p \neq 2$, puisque $\varphi(\pi) = u\pi q$, où u est une unité de S (cf. [F93], chap. 5), alors

$$\varphi(\gamma_m(\frac{\pi}{p^s})) = u^m q^m \gamma_m(\frac{\pi}{p^s}) = u^m p^m (1+\frac{\pi_0}{p})^m \gamma_m(\frac{\pi}{p^s})$$

donc

$$\varphi(\gamma_m(\frac{\pi}{p^s})) = u^m (1+\frac{\pi_0}{p})^m \gamma_m(\frac{\pi}{p^{s-1}}).$$

Si $s \geq 2$, on en déduit que $\varphi(S_s^{PD}) \subset S_{s-1}^{PD}$. Finalement, $\varphi^s(S_s^{PD})$ est contenu dans le séparé complété pour la topologie p-adique de $S[\pi_0/p]$. Comme π_0 est divisible par p dans A_{cris}, on en déduit que l'anneau $\varphi^s(S_s^{PD})$ peut être vu comme une une sous-S-algèbre de A_{cris}. Si $x \in W(R)$ et $y \in S_s^{PD}$, on voit qu'on doit avoir

$$\psi_s(x\hat{\otimes}y) = \varphi^s(x)\varphi^s(y) \quad .$$

Comme $W(R) \otimes_S S_s^{PD}$ est dense dans $W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD}$, cela montre l'unicité et l'existence s'en déduit immédiatement.

Pour $p = 2$, on calcule $\varphi(\gamma_m(\frac{\pi}{2^s}))$ et on montre de manière similaire que $\varphi(\gamma_m(\frac{\pi}{2^s})) \in S_{s-1}^{PD}$.

◇

C.1.1.4. *Application aux représentations p-adiques.*

Rappelons l'énoncé de la proposition à démontrer.

PROPOSITION : *Si V est une représentation p-adique de G_K de hauteur finie et de dimension d telle qu'il existe un entier r et un sous-S-module N libre de rang d de $M = j_*(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M} = \mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V)$, stable par Γ et tel que l'action de Γ soit finie sur $N/\pi N(-r)$, alors il existe une extension finie L de K contenue dans K_∞ telle que la représentation de G_L déduite de celle de G_K sur V par restriction soit cristalline.*

Rappels : Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel (respectivement un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module libre), muni d'une action de Γ et d'un Frobenius φ injectif et tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, on note $j_*(\mathcal{M})$ la réunion des sous-$S[1/p]$-modules de type fini (respectivement des sous-S-modules de type fini), stables par φ ; si $\mathcal{M}$ est de dimension finie (respectivement de type fini) alors (cf. [F93], p.282) $j_*(\mathcal{M})$ est un $S[1/p]$-(respectivement S-)module libre de type fini et

$$\operatorname{rang}_{S[1/p]} j_*(\mathcal{M}) \leq \dim_{\mathcal{E}} \mathcal{M}$$

(respectivement

$$\operatorname{rang}_S j_*(\mathcal{M}) \leq \operatorname{rang}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{M}) \quad .$$

On sait également (cf. [F93], p.293) que $j_*(W(\operatorname{Fr} R))$ est dense dans $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et si on pose $B_S^+ = A_S^+[1/p] = W_{K_0}(R) \cap \hat{\mathcal{E}}_{nr}$, on a pour toute représentation p-adique V de G_K

$$j_*(\mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}(V)) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+) \quad .$$

Si T est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par G_K, on a

$$j_*(\mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, A_S^+)$$

et c'est un réseau de $j_*(\mathbf{D}^*_\mathcal{E}(V))$. On voit que V est de hauteur finie si et seulement si

$$\mathrm{rang}_{S[1/p]} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+) = d \quad .$$

De plus, on a $(A_S^+)^\Gamma = W(R) \cap \mathcal{O}_\mathcal{E} = S$.

DEMONSTRATION :

Quitte à remplacer V par $V(r)$, on se ramène au cas où l'action de Γ est finie sur $N/\pi N$. On commence par montrer que l'on peut supposer que N et stable par φ.

Choisissons s suffisamment grand pour que $\Gamma_s \subset \Gamma$ et pour que Γ_s opère trivialement sur $N/\pi N$. Posons $L = (K_\infty)^{\Gamma_s}$ qui est une extension finie de K contenue dans K_∞. On a $H_L = H_K$ et on dispose de la suite exacte :

$$0 \to H_K \to G_L \to \Gamma_s \to 0 \quad .$$

Fixons T un réseau de V stable par G_K et soit

$$N_T = j_*(\mathbf{D}^*_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, A_S^+) \quad .$$

Quitte à remplacer N par $p^a N$ pour a assez grand, on peut supposer $N \subset N_T$.

Soit N' le sous-S-module de N_T engendré par les $\varphi^m(x)$ pour $m \in \mathbf{N}$ et $x \in N$. Par construction N' est stable par φ ; il est également stable par Γ, puisque Γ commute à φ et N est muni d'une action de Γ. De plus, si $x = \sum_{m \in I} a_m \varphi^m(x_m) \in N'$, où I est un ensemble fini d'entiers, $a_m \in S$ et $x_m \in N$, on a, pour $g \in \Gamma_s$

$$g(x) \equiv x \mod \pi N' \quad .$$

En effet $g(x_m) = x_m + \pi y_m$, avec $y_m \in N$, $g(a_m) = a_m + \pi b_m$ et $\varphi^m(\pi) = \pi \nu_m$ avec b_m et $\nu_m \in S$, d'où, en utilisant le fait que Γ et φ commutent entre eux :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{m \in I} g(a_m) g(\varphi^m(x_m)) \\
&= \sum_{m \in I} g(a_m)\varphi^m(x_m) + \sum_{m \in I} g(a_m)\pi\nu_m\varphi^m(y_m)) \\
&= \sum_{m \in I} a_m\varphi^m(x_m) + \pi(\sum_{m \in I} b_m\varphi^m(x_m) + \sum_{m \in I} \nu_m g(a_m)\varphi^m(y_m)) \\
&\equiv x \mod \pi N' \quad .
\end{aligned}$$

LEMME : *Soit* $(N')^* = /calL_S(N', S)$ *le dual de* N' *dans la catégorie des* S*-modules. Alors, le bidual* $(N')^{**}$ *de* N' *est un* S*-module libre de rang* d*, stable par* φ *et par* Γ *et l'action de* Γ_s *est triviale sur* $N^{**}/\pi N^{**}$.

DEMONSTRATION : puisque S estun anneau local régulier de dimension 2 et N' est sans torsion, on sait (cf. [S54]) que $(N')^{**}$ est libre. Des inclusions

$$N \subset N' \subset N_T$$

on déduit les inclusions suivantes

$$N^{**} \subset (N')^{**} \subset (N_T)^{**} \quad .$$

Comme N et N_T sont libres, on a $N = N^{**}$ et $N_T = N_T^{**}$ (cf. [S54]) ; d'autre part, ils sont tous deux des S-modules libres de rang d et on obtient le fait que $(N')^{**}$ est de rang d .

Comme $S \subset W(R)$ et que φ est bijectif sur $W(R)$, on peut poser $\varphi^{-1}(S) = S' \subset W(R)$. Ceci permet de définir une application S-lin'eaire :

$$\psi : (N')^* \to \mathcal{L}_S(N, S')$$

en posant $\psi(u) = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$. Puisque S' est un S-module libre de rang fini, l'application naturelle

$$S' \otimes_S \mathcal{L}_S(N', S) \to \mathcal{L}(N, S \leq prime)$$

est un isomorphisme. Ceci permet de munir le bidual $(N')^{**}$ d'une action de φ, en posant, pour $v \in (N')^{**}$, $\varphi(v) = \varphi \circ v \circ \psi$.

Comme l'action de Γ est bijective sur N', $(N')^*$ est naturellement muni d'une action de Γ. Montrons que l'action de Γ_s est triviale sur $(N')^*/\pi(N')^*$. Sur $(N')^*$, l'action de Γ est donnée par :

$$g(u)(x) = g(u(g^{-1}(x)))$$

si $g \in \Gamma_s$, $x \in N'$ et $u \in (N')^*$. Comme $g^{-1}(x) \equiv x \mod \pi N'$ et u est linéaire, on a $u(g^{-1}(x)) \equiv u(x) \mod \pi S$; de plus, l'action de Γ, a fortiori celle de Γ, sur S est triviale modulo π et on obtient le résultat souhaité, c'est-à-dire $g(u)(x) \equiv u(x) \mod \pi S$ pour tout $x \in N'$, d'où $g(u) \equiv u \mod \pi(N')^*$. On en déduit que l'action de Γ sur $(N')^{**}$ est triviale modulo π

$\diamond$

A présent, quitte à remplacer N par $(N')^{**}$, on peut supposer $N \subset N_T$, N stable par φ et libre de rang d sur S.

LEMME : φ *est injectif sur* $N/\pi N$.

DEMONSTRATION : Puisque N est un S-module libre de rang d, $\Lambda^d N$ est un S-module libre de rang 1, muni des actions de φ et de Γ qui se déduisent naturellement de celles sur N ; dire que φ est injectif sur $N/\pi N$ est équivalent à dire que φ est injectif sur $\Lambda^d N/\pi\Lambda^d N$.

Quitte à remplacer V par $\Lambda^d_{\mathbf{Q}_p} V$ et N par $\Lambda^d_S N$, on peut supposer que N est un S-module libre de rang 1, soit $N = S.e$. On pose $\varphi(e) = ae$ et $g(e) = be$, où a et b sont dans S et b est inversible. Alors, en utilisant le fait que φ et Γ commutent, on obtient la relation

$$\varphi(b)a = bg(a) \quad .$$

Comme b et $\varphi(b)$ sont des unités, l'idéal engendré par a doit être stable par Γ et donc a fortiori par Γ_s. Le groupe Γ doit donc permuter les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent a. Il existe un multiple non nul s' de s tel que $\Gamma_{s'}$ laisse stable les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent a. Comme $g(e) \equiv e \mod \pi$, on a $b \equiv 1 \mod \pi$ et la relation précédente devient modulo π

$$\frac{g(a)}{a} \equiv \frac{\varphi(b)}{b} \equiv 1 \quad .$$

et la fin de la démonstration repose sur le lemme suivant :

Sous-lemme : *Les seuls idéaux premiers de hauteur* 1 *de* S *stables par* Γ_s *sont les idéaux engendrés par* p, π *et* $\varphi^m(q)$ *pour* $m \in \mathbf{N}$.

Demonstration : La démonstration du fait que l'idéal engendré par q est stable par Γ_s est faite un peu plus loin (cf. C.2.1.) ; en acceptant ce fait, on vérifie facilement que ces idéaux sont bien des idéaux stables par Γ_s.

On voit facilement que les idéaux premiers de $S = W[[\pi]]$ de hauteur 1 sont tous principaux et, en-dehors de l'idéal engendré par p, sont en bijection avec les polynômes en π, irréductibles, unitaires, à coefficients dans W, dont tous les coefficients, sauf le coefficient dominant, sont divisibles par p ; comme $\pi = [\varepsilon] - 1$, il est équivalent de considérer les polynômes en π ou en $[\varepsilon]$. Si a est un générateur d'un tel idéal, on peut écrire $a = P([\varepsilon])$ où P est un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans W et dire que l'idéal engendré par a est stable par Γ_s revient à dire que a divise $g(a)$. Mais $g(a) = P([\varepsilon]^{1+p^{s'}})$, donc le polynôme $P(X)$ doit diviser le polynôme $P(X^{1+p^{s'}})$. Alors pour toute racine α de P dans une clôture algébrique de K_0, $\alpha^{1+p^{s'}}$ est encore une racine de P et il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\alpha^{(1+p^{s})^r} = \alpha$, donc α est soit 0 soit une racine de l'unité. Les conditions sur les coefficients du polynôme impliquent alors que ses racines sont des racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Les différentes possibilités sont :

1) $P = X - 1$, d'où $a = [\varepsilon] - 1 = \pi$,
2) $P = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$, d'où $a = [\varepsilon]^{p-1} + [\varepsilon]^{p-2} + \cdots + [\varepsilon] + 1 = q$,
3) il existe un entier $1 \leq n \leq s$ tel que

$$P = (X^{p^{n-1}})^{p-1} + (X^{p^{n-1}})^{p-2} + \cdots + (X^{p^{n-1}}) + 1 \quad ,$$

d'où

$$a = ([\varepsilon]^{p^{n-1}})^{p-1} + ([\varepsilon]^{p^{n-1}})^{p-2} + \cdots + ([\varepsilon]^{p^{n-1}}) + 1 = \varphi^{n-1}(q) \quad .$$

◇

Fin de la demonstration de l'injectivité de φ sur $N/\pi N$.

On peut alors écrire a sous la forme $a = up^m\pi^n \prod_{i\in\mathbf{N}}(\varphi^i(q))^{r_i}$ où les r_i sont presque tous nuls et u est une unité de S. Puisque $\mathcal{O}_\mathcal{E}.\varphi(\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N) = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$, nécessairement $m = 0$ et il reste à montrer que $n = 0$. Or

$$\frac{g(q)}{q} \equiv 1 \mod \pi$$

et, par conséquent, pour tout $s \in \mathbf{N}$

$$\frac{g(\varphi^s(q))}{\varphi^s(q)} \equiv 1 \mod \pi \quad ;$$

de même , si u est une unité de S, $\dfrac{g(u)}{u} \equiv 1 \mod \pi$. On en déduit, si l'on pose $a = \pi^n x$, que $\dfrac{g(x)}{x} \equiv 1 \mod \pi$; d'autre part, puisque

$$\frac{g(\pi^n)}{\pi^n} \equiv \chi(g)^n \mod \pi \quad ,$$

on obtient

$$\frac{g(a)}{a} \equiv \chi(g)^n \mod \pi$$

et comme $\chi(g)$ n'est pas une racine de l'unité, on doit avoir $n = 0$.

◇

Fin de la demonstration de la proposition :

L'inclusion

$$N \subset N_T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, A_S^+) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, W(R)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T, W(R))$$

induit une application injective de $S_s^{PD}\hat{\otimes}_S N = N_s^{PD}$ vers

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T, W(R))\hat{\otimes}_S S_s^{PD} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD})$$

qui commute à l'action de G_K et de φ. Comme H_K opère trivialement sur S_s^{PD}, l'image est contenue dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD})$. En prenant la partie fixe par Γ_s, on obtient une application injective, commutant à l'action de φ de $(N_s^{PD})^{\Gamma_s}$ dans

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[H_K]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD})^{\Gamma_s} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD}) \quad ,$$

d'où (cf. remarque b) de C.1.1.2.) une application injective, commutant à l'action de φ,

$$N/\pi N \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD}) \quad .$$

En composant avec l'application Ψ_s définie en C.1.1.3., on obtient une application

$$\nu_s : N/\pi N \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, A_{cris}) \quad .$$

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N/\pi N & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD}) \\ & \nu_s \searrow & \downarrow \\ \varphi^s \downarrow & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, A_{cris}) \\ & & \downarrow \\ N/\pi N & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, W(R)\hat{\otimes}_S S_s^{PD}) \end{array} \quad .$$

D'après le lemme précédent, φ^s est injectif sur $N/\pi N$ et ν_s l'est donc aussi ; on en déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_L]}(T, A_{cris})$ contient un W-module libre de rang d, donc que $\dim_{K_0} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_L]}(V, B_{cris}^+) = d$, ce qui implique que V est cristalline.
◇

Remarque : si on ne suppose plus K contenu dans K_∞, on est tenté de généraliser la définition de $S = W(R) \cap \mathcal{O}_\mathcal{E}$ en posant

$$S_K = (A_S^+)^{H_K} = (W(R) \cap \hat{\mathcal{E}}_{nr})^{H_K} = W(R)^{H_K} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \quad .$$

En fait, on peut montrer que $S_K = S$, ce qui éclaire la dernière remarque de la partie A, à savoir que toute représentation de hauteur finie de G_K s'étend en une représentation de hauteur finie de $G_{K'}$, où K' est le sous-corps de K_∞ fixe par l'image de Γ_K dans Γ_{K_0}.

C.1.2. Démonstration de 3) $\Rightarrow$ 5) .

C.1.2.1. Dans cette section, il s'agit de montrer le résultat suivant :
Proposition : *Si V est une représentation de G_K de hauteur finie de dimension d sur $\mathbf{Q}_p$ et de De Rham, alors la connexion $\nabla_{\hat{M}}$ définie sur $\hat{M}[1/t]$, où $M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B_S^+)$ et $\hat{M} = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} M/\pi^n M$, est triviale.*

On rappelle qu'une représentation p-adique V de G_K de dimension finie est dite de De Rham si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B_{DR})$ est un espace vectoriel sur K de dimension finie égale à la dimension de V sur $\mathbf{Q}_p$.

C.1.2.2. *Résultats sur B_{dR}^+.*

Si D est un K_0-espace vectoriel muni d'une action de Γ, on note D_{fini} la réunion des sous-K_0-espaces vectoriels de dimension finie de D stables par Γ.

Proposition :

$$(B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)_{fini}^{H_{K_0}} = K_\infty[t]/t^n \quad .$$

Demonstration : la démonstration se fait par récurrence sur l'entier n.

– le cas $n = 1$ est un résultat de S. Sen (cf. [Se]) : en effet, $B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^1 B_{dR}^+ = \mathbf{C}$ et S. Sen montre que $\mathbf{C}_{fini}^{H_K} = K_\infty$.

Si $n \geq 1$, $\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ = \mathbf{C}t^n$ et on en déduit que

$$(\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)_{fini}^{H_K} = K_\infty t^n \quad .$$

– soit $n \geq 1$; de la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ \to B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+ \to B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+ \to 0$$

on déduit l'exactitude de

$$\begin{aligned} &0 \to (\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)^{H_{K_0}} \to (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)^{H_{K_0}} \\ &\to (B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{H_{K_0}} \quad . \end{aligned}$$

On suppose donc que $(B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)_{fini}^{H_{K_0}} = K_\infty[t]/t^n$; si $v \in D$, sous-K-espace vectoriel de dimension finie stable par Γ de $(B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)^{H_{K_0}}$, son image $\bar{v}$ modulo $\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+$ est un élément de $K_\infty[t]/t^n$; par la surjectivité de la projection

$$K_\infty[t]/t^{n+1} \to K_\infty[t]/t^n$$

on peut relever v en un élément v_1 de $K_\infty[t]/t^{n+1}$. Alors

$$v - v_1 \in (\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^{n+1} B_{dR}^+)_{fini}^{H_{K_0}} = K_\infty t^n$$

et par conséquent $v \in K_\infty[t]/t^{n+1}$.

◇

C.1.2.3. *Application aux représentations de De Rham.*

Proposition : *Soient V une représentation de De Rham de dimension d et $n \in \mathbf{N}$; alors*

$$\Delta_n(V) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)_{fini}$$

est un $K_\infty[t]/t^n$-module libre de rang d et il existe une base $(e_1, \cdots, e_d)$ de $\Delta_n(V)$ et des entiers r_i, pour $1 \leq i \leq d$, tels que $g(e_i) = \chi^{-r_i}(g)e_i$.

Demonstration : $D = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G_K]}(V, B_{DR})$ est un K-espace vectoriel de dimension finie d muni d'une filtration décroissante et l'application naturelle

$$B_{DR} \otimes_K D \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, B_{DR})$$

est un isomorphisme de B_{DR}-modules filtrés. Soit $(u_1, \cdots, u_d)$ une base de D adaptée à la filtration, c'est-à-dire telle que, si on note r_i le plus grand entier tel que $u_i \in \operatorname{Fil}^{r_i} D$, alors

$$\operatorname{Fil}^r D = \oplus_{r_i \geq r} K u_i \quad .$$

On voit que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, B_{dR}^+)$ est le B_{dR}^+-module libre de base les $t^{-r_i}u_i$; si

$$e_i : V \to B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+$$

désigne le composé de $t^{-r_i}u_i$ avec la projection de B_{dR}^+ sur $B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+$, alors $(e_1, \cdots, e_d)$ est une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)$ qui vérifie

$$g(e_i) = \chi^{-r_i}(g)e_i \quad ,$$

pour $1 \leq i \leq d$.
Le sous-$(B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)$-module libre de rang 1 de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)$ de base e_i pour chaque i est stable par G_K et l'assertion résulte de la proposition précédente.
◇

Remarque : Il est facile de voir que si V est une représentation p-adique de G_K de dimension finie d, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)_{fini}$ est un $K_\infty[t]/t^n$-module libre de rang d, même si V n'est pas de De Rham. Pour $n = 1$, c'est un résultat de S. Sen (cf. [Se]) et le cas général s'en déduit par la même technique que celle utilisée dans la proposition C.1.2.2.

C.1.2.4. L'inclusion $W_{K_0}(R) \subset B_{dR}^+$ et l'existence du Frobenius sur $W_{K_0}(R)$ permettent de définir des applications I_n, pour n entier, de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccccc} I_n : & W_{K_0}(R) & \to & (W_{K_0}(R))^{\mathbf{N}} & \to & (B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)^{\mathbf{N}} \\ & a & \mapsto & (a, \varphi(a), \cdots, \varphi^m(a), \cdots) & & \\ & & & (a_0, a_1, \cdots, a_m, \cdots) & \mapsto & (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m, \cdots) \end{array}$$

où $\bar{a}$ désigne l'image de a dans $B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+$.
LEMME : *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le noyau de l'application*

$$I_n : W_{K_0}(R) \to (B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)^{\mathbf{N}}$$

définie ci-dessus est l'idéal engendré par π^n. La restriction de I_n à B_S^+ définit une application injective, toujours notée I_n,

$$B_S^+/\pi^n B_S^+ \to (B_{dR}^+/\,\mathrm{Fil}^n\, B_{dR}^+)^{\mathbf{N}} \quad .$$

DEMONSTRATION : Le noyau de I_n dans $W_{K_0}(R)$ est connu (cf. p. 18) ; en effet

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, I_n &= \{x \in W_{K_0}(R) \text{ tel que } \varphi^m(x) \in \mathrm{Fil}^n\, W_{K_0}(R) \text{ pour tout } m \in N\} \\ &= \pi^n W_{K_0}(R) \quad . \end{aligned}$$

Le noyau de la restriction à B_S^+ est donc

$$\mathrm{Ker}\, I_n = (\pi^n W_{K_0}(R)) \cap B_S^+ = (\pi^n W_{K_0}(R)) \cap \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}} = \pi^n B_S^+$$

puisque π est inversible dans $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$, d'où l'injectivité de I_n.
◇

C.1.2.5. Reprenons les hypothèses de C.1.2.1.

PROPOSITION : *Il existe $s \in \mathbf{N}$, des entiers r'_i dans $\mathbf{Z}$, pour $1 \leq i \leq d$, et une base $(\hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_d)$ du $K_\infty[[t]]$-module libre $\hat{M}$ tels que $\Gamma_s \subset \Gamma$ et $g(\hat{c}_i) = \chi^{-r_i}(g)\hat{c}_i$, pour $g \in \Gamma_s$ et $1 \leq i \leq d$.*

DEMONSTRATION : Soient r_i, $1 \leq i \leq d$ des entiers et $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de $\Delta_n(V)$ comme dans la proposition C.1.2.3. ; choisissons un entier $n > r_i - r_j$, pour i et $j = 1, \cdots, d$. On a $M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+)$ et on voit que $M/\pi^n M$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+/\pi^n B_S^+)$. Comme M est un $S[1/p]$-module libre de rang d, $M/\pi^n M$ est un module libre de rang d sur

$$S[1/p]/\pi^n S[1/p] = K_0[t]/t^n \quad ;$$

en particulier, c'est un K_0-espace vectoriel de dimension finie. L'injection de $B_S^+/\pi^n B_S^+$ dans $(B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+)^{\mathbf{N}}$ définie au numéro précédent induit une injection de $M/\pi^n M$ dans

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+))^{\mathbf{N}} = \varinjlim_{\alpha \in \mathbf{N}} (\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+))^{\alpha} \quad .$$

Comme $\dim_{K_0} M/\pi^n M$ est finie, si l'on choisit α suffisamment grand, on dispose d'une application injective

$$\rho : M/\pi^n M \to (\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+))^{\alpha}$$

qui est $K_0[t]/t^n$-linéaire et commute à l'action de Γ. Encore grâce à la finitude de $\dim_{K_0} M/\pi^n M$, l'image de ρ est contenue dans

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_{dR}^+/\operatorname{Fil}^n B_{dR}^+))^{\alpha}_{fini} = (\oplus K_\infty[t]/t^n e_i)^{\alpha} \quad .$$

Toujours en raison de la finitude de $\dim_{K_0} M/\pi^n M$, il existe un entier s tel que l'image de ρ soit contenue dans $(\oplus K_s[t]/t^n e_i)^{\alpha}$ et on peut choisir s suffisamment grand pour que $K \subset K_s$ et $\Gamma_s \subset \Gamma$. Si $m = [K_s : K]$, on voit que $M/\pi^n M$ s'identifie à un sous-$(K_0[t]/t^n)$-module libre de rang d stable par Γ_s de

$$(\oplus K_s[t]/t^n e_i)^{\alpha} \simeq (\oplus K_0[t]/t^n e_i)^{\alpha m}$$

et on en déduit facilement qu'il existe des entiers r'_i, pour $1 \leq i \leq d$, appartenant à l'ensemble des valeurs prises par les r_i, et une base $(c_1, \cdots, c_d)$ de $M/\pi^n M$ sur $K_0[t]/t^n$ tels que, pour $1 \leq i \leq d$, $g(c_i) = \chi^{-r'_i}(g)c_i$ si $g \in \Gamma_s$. La proposition se déduit alors immédiatement du lemme suivant :

LEMME : *Soient m un entier $\geq n$ et $(c'_1, \cdots, c'_d)$ une base de $M/\pi^m M$ sur $K_0[t]/t^m$ telle que $g(c'_i) = \chi^{-r'_i}(g)c'_i$ pour $g \in \Gamma_s$; alors il existe une base $(c''_1, \cdots, c''_d)$ de $M/\pi^{m+1}M$ sur $K_0[t]/t^{m+1}$ relevant la base $(c'_1, \cdots, c'_d)$ telle que pour $1 \leq i \leq d$, $g(c''_i) = \chi^{-r'_i}(g)c''_i$ pour $g \in \Gamma_s$.*

DEMONSTRATION : Choisissons $(f_1, \cdots, f_d)$ une base de $M/\pi^{m+1}M$ relevant la base $(c''_1, \cdots, c''_d)$; alors, pour $1 \leq j \leq d$,

$$g(f_j) = \chi^{-r'_j}(g) f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} f_i$$

où les a_{ij} sont dans K_0. On recherche c''_j sous la forme

$$c''_j = f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} f_i \quad ,$$

où les x_{ij} sont dans K_0. Calculons $g(c''_j)$ pour $1 \leq j \leq d$:

$$\begin{aligned} g(c''_j) &= g(f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} f_i) \\ &= \chi^{-r'_j}(g) f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} f_i + \chi(g)^m t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} \chi^{-r'_i}(g) f_i \end{aligned}$$

et on cherche à avoir

$$\begin{aligned} g(c''_j) &= \chi^{-r'_j}(g) c''_j \\ &= \chi^{-r'_j}(g)(f_j + t^m \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij}(g) f_i) \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1 \leq i \leq d} (a_{ij} + x_{ij} \chi^{m-r'_i}(g)) f_i = \sum_{1 \leq i \leq d} x_{ij} \chi^{-r'_j}(g) f_i \quad ,$$

autrement dit, pour $i, j = 1, \cdots, d$:

$$(\chi^{m-r'_i}(g) - \chi^{-r'_j}(g)) x_{ij} = a_{ij} \quad .$$

Comme $m > r'_i - r'_j$ pour i et j tels que $1 \leq \cdots i, j \cdots \leq d$, on a $\chi^{m-r'_i}(g) - \chi^{-r'_j}(g) \neq 0$ et c'est un élément inversible de K_0, d'où le lemme.

◇

FIN DE LA DEMONSTRATION : La connexion $\nabla_{\hat{M}}$ est triviale, car les $t^{r'_i} \hat{c}_i$ forment une base de $\hat{M}[1/t]$ qui est dans $\operatorname{Ker} \nabla_{\hat{M}}$.

◇

Remarque : on voit que $\operatorname{Ker} \nabla_{\hat{M}}$ engendre $\hat{N}$ et on a un isomorphisme $\operatorname{Ker} \nabla_{\hat{M}} = \hat{N}/t\hat{N}$, d'où le fait que la représentation est cristalline si et seulement si l'action de Γ est triviale sur $\operatorname{Ker} \nabla_{\hat{M}}$.

C.1.3. Démonstration de 5) $\Rightarrow$ 4).

Les notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

PROPOSITION : *Si V est une représentation de hauteur finie et si la connexion $\nabla_{\hat{M}}$ est triviale, alors il existe un entier r et un S-module N libre de rang d inclus dans $M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[H_K]}(V, B_S^+)$ stable par Γ tel que l'action de Γ soit finie sur $N/\pi N(-r)$.*

DEMONSTRATION : comme la connexion est triviale, $\mathrm{Ker}\,\nabla_{\hat{M}}$ est un K_0-espace vectoriel de dimension d, muni d'une action de Γ finie et

$$K_0((t)) \otimes_{K_0} \mathrm{Ker}\,\nabla_{\hat{M}} = \hat{M}[1/t] \quad .$$

Soit Λ un W-réseau de $\mathrm{Ker}\,\nabla_{\hat{M}}$, stable par Γ ; alors

$$K_0((t)) \otimes_W \Lambda = \hat{M}[1/t]$$

et il existe un entier r tel que l'image $\hat{N}$ de $t^r W[[t]] \otimes_W \Lambda$ soit contenue dans $\hat{M}$; de plus, comme l'action de Γ est finie sur $\mathrm{Ker}\,\nabla_{\hat{M}}$ et donc sur Λ, on voit que l'action de Γ est également finie sur $(\hat{N}/t\hat{N})(-r)$ et sur $(\hat{N}[1/p]/t\hat{N}[1/p])(-r)$. Il reste à montrer qu'il existe un S-module N libre de rang d contenu dans M tel que $N/\pi N = \hat{N}/t\hat{N}$.

Considérons $N = \hat{N} \cap M$; comme M est libre sur $S[1/p]$ et $S[1/p]$ est un anneau principal, $N[1/p]$ est un module libre. Le rang de $N[1/p]$ est d et $N/\pi N = \hat{N}/t\hat{N}$; en effet, il existe un entier m tel que

$$t^m \hat{M} \subset \widehat{N[1/p]} \subset \hat{M}$$

et t et π sont congrus modulo une unité de $K_0[[t]] = K_0[[\pi]]$. On en déduit $\pi^m M = t^m \hat{M} \cap M$, d'où

$$\pi^m M \subset N[1/p] \subset M \quad .$$

Comme $\pi N[1/p] = t\hat{N} \cap N$, l'application

$$N[1/p]/\pi N[1/p] \to \hat{N}[1/p]/t\hat{N}[1/p]$$

est un morphisme injectif de K_0-espaces vectoriels ; or ces deux espaces vectoriels ont la même dimension d, cette application est donc un isomorphisme et on obtient le fait que

$$N/\pi N \simeq \hat{N}/t\hat{N} \quad .$$

$\diamond$

C.2. Représentations de G_K sur $\mathbf{Z}_p$; cas $e = 1$.

Dans cette partie, on suppose $e = 1$, c'est-à-dire $K = K_0$. On se propose de montrer le résultat annoncé à la fin de la partie A., à savoir qu'une représentation de G_K sur $\mathbf{Z}_p$ de cr-hauteur finie est cristalline.

C.2.1. Filtration sur $N \in \Gamma_0\Phi\mathrm{M}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{S}_0}$, où $h \leq p-1$ et structure d'objet de $\mathrm{MF}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{W}}$ sur $N/\pi_0 N$.

C.2.1.1. *Rappels sur S et S_0.*
C.2.1.1.1. On rappelle que $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et on pose

$$\Gamma_0 = \begin{cases} \Gamma_K/(\Gamma_K)_f & \text{si } p \neq 2 \\ \Gamma_K & \text{si } p = 2 \end{cases} .$$

D'autre part, $S = W[[\pi]]$ où $\pi = [\varepsilon] - 1$ et, si $p \neq 2$,

$$S_0 = S^{(\Gamma_K)_f} = W[[\pi_0]] = W[[q]] \quad ,$$

où $\pi_0 = \sum_{a \in \mathbf{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$ et $q = \pi_0 + p$; si $p = 2$, on prend $q = [\varepsilon] + 1$ et $\pi_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1}$. Les anneaux S et S_0 sont tous deux munis d'un Frobenius φ et d'une action de Γ, qui agit à travers Γ_0 sur S_0. L'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & S & \rightarrow & W \\ & [\varepsilon] & \mapsto & 1 \end{array}$$

est surjective, commute à φ et à Γ ; son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\theta = \pi S \quad .$$

La restriction θ_0 de θ à S_0 est également surjective, elle commute à φ et à Γ_0 ; son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\theta_0 = \pi_0 S_0 \quad .$$

Soit $K_1 = K(\sqrt[p]{1})$ et $\mathcal{O}_{K_1}$ l'anneau des entiers de K_1 ; alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta' : & S & \rightarrow & \mathcal{O}_{K_1} \\ & [\varepsilon] & \mapsto & \varepsilon^{(1)} \end{array}$$

est surjective, commute à l'action de Γ et son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\theta' = qS \quad .$$

En effet, $S \subset W(R)$ et rappelons que

$$\mathrm{Fil}^1 W(R) = q' W(R) \quad ,$$

où $q' = \varphi^{-1}(q)$ (le Frobenius φ est bijectif sur $W(R)$) ; d'autre part

$$\mathrm{Fil}^1 W(R) \cap S = \mathrm{Ker}\,\theta$$

et

$$\mathrm{Ker}\,\theta' = \varphi(\mathrm{Fil}^1 W(R)) \cap S = qW(R) \cap S = qS \quad .$$

La restriction θ'_0 de θ' à S_0 est surjective sur W, commute à l'action de Γ_0 et son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\theta'_0 = qS_0 \quad .$$

C.2.1.1.2. LEMME : *Supposons $p \neq 2$ et soit $g \in \Gamma_0$; alors :*

1) $g(q) - q = g(\pi_0) - \pi_0 \in q\pi_0 S_0$,

2) *si g est un générateur topologique de Γ_0,*

$$\frac{g(q) - q}{q\pi_0}$$

est une unité de S_0,

3) *il existe un et un seul générateur topologique g_0 de Γ_0 tel que*

$$\frac{g_0(q) - q}{q\pi_0} \equiv 1 \mod qS_0 \quad .$$

DEMONSTRATION : on peut supposer $K = \mathbf{Q}_p$; on a alors $S = \mathbf{Z}_p[[\pi]]$ et $S_0 = \mathbf{Z}_p[[\pi_0]] = \mathbf{Z}_p[[q]]$). L'application $\alpha : S_0 \to \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$, définie par $\alpha(x) = (\theta_0(x), \theta'_0(x))$, commute à l'action de Γ_0, qui opère trivialement sur $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$; son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\theta_0 \cap \mathrm{Ker}\,\theta'_0 = q\pi_0 S_0 \quad .$$

Par conséquent, Γ_0 opère trivialement sur $S_0/q\pi_0 S_0$.

2) Rappelons que $K_2 = \mathbf{Q}_p(\sqrt[p^2]{1})$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \theta'' : & S & \to & \mathcal{O}_{K_2} \\ & [\varepsilon] & \mapsto & \varepsilon^{(2)} \end{array}$$

commute à l'action de Γ ; sa restriction θ''_0 à S_0 a pour image l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ de l'unique extension cyclique L de $\mathbf{Q}_p$ de degré p contenue dans K_2 et $\theta''(q) = \omega$ est une uniformisante de L. Alors,

$$g(\omega) = \omega + \lambda\omega^2$$

où $\lambda \in \mathcal{O}_L$; comme l'unique nombre de ramification de l'extension $L/\mathbf{Q}_p$ est 1 (cf. [S68], chap. IV.4), λ est une unité de $\mathcal{O}_L$ si g est un générateur topologique de Γ_0. D'après 1), $g(q) = q + \mu q\pi_0$, où $\mu \in S_0$, alors

$$\begin{aligned} \theta''(g(q)) &= \theta''(q) + \theta''(\mu q\pi_0) \\ &= \omega + \theta''(\mu)\omega(\omega - p) \\ &= \omega + \frac{\omega - p}{\omega}\theta''(\mu)\omega^2 \\ &= g(\omega) \quad . \end{aligned}$$

Comme $(\omega - p)/\omega$ est une unité de $\mathcal{O}_L$, $\theta''(\mu)$ est aussi une unité et μ ne peut être qu'une unité de S_0.

3) Soit g_1 un générateur topologique de Γ_0 ; alors, d'après ce qui vient d'être vu, on peut écrire

$$g_1(q) = q + \mu q \pi_0$$

avec μ une unité de S_0, ou bien, de manière équivalente il existe $c \in \mathbf{Z}_p^*$ tel que

$$g_1(q) \equiv q + cq\pi_0 \mod q^2\pi_0$$

Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on voit que

$$g_1^n(q) \equiv q(1 + \pi_0 c_n) \mod q^2\pi_0$$

avec

$$c_n = \frac{(1+pc)^n - 1}{p} \equiv nc \mod p\mathbf{Z}_p \quad .$$

Cette formule est vraie par continuité pour tout $n \in \mathbf{Z}_p$. Puisque c est inversible dans $\mathbf{Z}_p$, on voit qu'on peut trouver $m \in \mathbf{Z}_p$ tel que $c_m \equiv 1 \mod qS_O$; on prend alors $g_0 = g_1^m$.

$\diamond$

C.2.1.2. *Filtration sur N objet de* $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$.

Rappelons que, pour tout $h \in \mathbf{N}$, $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$ désigne la catégorie des (φ, Γ_0)-modules N de type fini sur S_0, qui sont sans p'-torsion, tels que Γ_0 opère trivialement sur $N/\pi_0 N$ et que $q^h N \subset S_0\varphi(N)$. Pour tout N objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$, on pose $\mathrm{Fil}_q^r N = \{x \in N \text{ tel que } \varphi(x) \in q^r N\}$;

alors $\mathrm{Fil}_q^r N$ est un sous-S-module de N,

$\mathrm{Fil}_q^r N = N$ si $r \leq 0$,

$(\mathrm{Fil}_q^r N)_{r\in\mathbf{Z}}$ est une filtration décroissante de N, exhaustive ($\cup_{r\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}_q^r N = N$) et séparée ($\cap_{r\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}_q^r N = 0$) .

On peut alors définir les applications $\varphi^r : \mathrm{Fil}_q^r N \to N$ par

$$\varphi^r(x) = \frac{\varphi(x)}{q^r} \text{ pour } x \in \mathrm{Fil}^r N$$

On remarque que ces applications sont σ-linéaires et que $\varphi^r_{|_{\mathrm{Fil}^{r+1} N}} = q\varphi^{r+1}$.

Proposition :

Soit h un entier vérifiant $1 \leq h \leq p-1$ *et soit N un objet de* $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$, *alors*

1)
$$N = \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\mathrm{Fil}_q^r N) + \pi_0 N \quad ;$$

2)
$$N = S_0 . \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\mathrm{Fil}_q^r N) \quad .$$

Remarquons d'abord que $1 \Rightarrow 2$.

Commençons par établir le lemme suivant :
LEMME : *Soit N un (φ, Γ_0)-module, qui soit un S_0-module de type fini, sans p'-torsion tel que l'action de Γ_0 soit triviale sur $N/\pi_0 N$; soit r un entier vérifiant $1 \leq r \leq p-1$ et $x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}$ des éléments de N tels que*

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} q^i \varphi(x_i) \equiv 0 \mod q^r N$$

alors $\varphi(x_i) \equiv 0 \mod q^{r-i} N$ *pour* i, $0 \leq i \leq r-1$.
DEMONSTRATION : La démonstration se fait par récurrence sur r, le cas $r = 1$ étant trivial.

On suppose $r \geq 2$; par conséquent $p \neq 2$. Soit g_0 un générateur topologique de Γ_0 comme dans le lemme C.2.1.1.2., alors

$$g_0(q) = q(1 + \pi_0 \lambda_1)$$

où $\lambda_1 \in S_0$ et $\lambda_1 \equiv 1 \mod q S_0$ et, plus généralement

$$g_0(q^i) = q^i(1 + \pi_0 \lambda_i)$$

où $\lambda_i \in S_0$ et, si l'on écrit

$$\lambda_i = \sum_{j \in \mathbf{N}} c_{ij} q^j \quad ,$$

on voit que $c_{i0} \equiv i \mod p$ et que $c_{ij} \in \mathbf{Z}_p$.

D'autre part, pour tout $x \in N$, il existe $y \in N$ tel que $g_0(x) = x + \pi_0 y$. On a donc

$$g_0(\varphi(x)) = \varphi(g_0(x)) = \varphi(x) + \varphi(\pi_0)\varphi(y) \equiv \varphi(x) \mod \pi_0 q^{p-1} N$$

puisque $\varphi(\pi_0) S_0 = \pi_0 q^{p-1} S_0$ (cf. [F91] p. 268-273) . Alors, si

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} q^i \varphi(x_i) = q^r z$$

avec $z \in N$,

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} g_0(q^i) g_0(\varphi(x_i)) = g_0(q^r) g_0(z) \quad .$$

Or

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} g_0(q^i) g_0(\varphi(x_i)) \equiv \varphi(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq r-1} q^i (1 + \pi_0 \lambda_i) \varphi(x_i) \mod \pi_0 q^{p-1} N$$

et

$$g_0(q^r) g_0(z) \equiv q^r z \mod \pi_0 q^r N \quad ;$$

en faisant la différence, puis en divisant par π_0, on obtient la congruence

$$\sum_{1\le i\le r-1} q^i\lambda_i\varphi(x_i) \equiv 0 \bmod q^r N \quad ,$$

ou encore,

$$\sum_{0\le i\le r-2} q^i(\sum_{j\in\mathbf{N}} c_{i+1,j}q^j)\varphi(x_{i+1}) \equiv 0 \bmod q^{r-1}N \quad ,$$

c'est-à-dire, si l'on pose $c'_{ij} = \varphi^{-1}(c_{ij})$ (rappelons que φ est bijectif sur W),

$$\begin{aligned}\sum_{0\le i\le r-2} q^i(\sum_{0\le j\le i} c_{i+1,i-j}\varphi(x_{j+1})) &= \sum_{0\le i\le r-2} q^i\varphi(\sum_{0\le j\le i} c'_{i+1,i-j}x_{j+1})\\ &\equiv 0 \bmod q^{r-1} \quad .\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\varphi(\sum_{0\le j\le i} c'_{i+1 i-j}x_{j+1})$ est divisible par q^{r-1-i} et $\varphi(x_i)$ également, puisque $c_{i0} \equiv i \bmod p$, on voit que c_{i0} est inversible dans $\mathbf{Z}_p$ pour $1 \le i \le p-1$.
$\diamond$

Demonstration de la proposition :
Il s'agit de montrer que

$$N = \sum_{0\le r\le h-1} \varphi^r(\mathrm{Fil}_q^r N) + \pi_0 N$$

autrement dit

$$q^h N = \sum_{0\le r\le h-1} q^{h-r}\varphi(\mathrm{Fil}_q^r N) + q^h\pi_0 N \quad .$$

Puisque N est de cr-hauteur $\le h$, on a l'inclusion suivante :

$$q^h N \subset S_0.\varphi(N)$$

donc, si $x \in N$, il existe des éléments b_j de S_0 et y_j de N en nombre fini, soit s, tels que

$$q^h x = \sum_{1\le j\le s} b_j\varphi(y_j) \quad .$$

On écrit b_j sous la forme

$$b_j = \sum_{0\le i\le h-1} b_{ij}q^i + q^h c_j$$

avec les $b_{ij} \in W$ et $c_j \in S_0$. Si l'on pose $c_j = b_{ih} + \pi_0 b'_{ij}$ avec $b_{ih} \in W$ et $b'_j \in S_0$, on a

$$b_j = \sum_{O\le i\le h} b_{ij}q^i + q^h\pi_0 b'_j \quad .$$

L'égalité ci-dessus devient

$$q^h x = \sum_{1\leq i\leq p-1} q^i \sum_{1\leq j\leq s} b_{ij}\varphi(y_j) + q^h \pi_0 y \quad ,$$

où y est un élément de N. En posant $x_i = \sum_{1\leq j\leq s} \sigma^{-1}(b_{ij})y_j$ rappelons que σ^{-1} est l'inverse de $\sigma = \varphi_{|W}$ qui est bijectif, puisque k est parfait), on a donc

$$\begin{aligned} q^h x &= \sum_{0\leq i\leq h} q^i\varphi(x_i) + q^h\pi_0 y \\ &= \sum_{0\leq r\leq h} q^{h-r}\varphi(x_{h-r}) + q^h\pi_0 y \\ &= \sum_{1\leq i\leq p-1} q^i\varphi(x_i) + q^h\pi_0 y \quad . \end{aligned}$$

En appliquant le lemme, on voit que $\varphi(x_{h-r}) \in q^r N$, autrement dit $x_{h-r} \in \mathrm{Fil}_q^r N$.
$\diamond$

C.2.1.3. *Bases adaptées à la filtration : cas où N est tué par p.*

Soit N un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ tué par p ; le $\mathcal{O}_{E_0}$-module N est libre, car c'est un module sans torsion et de type fini sur l'anneau $\mathcal{O}_{E_0} = S_0/pS_0$ qui est principal ; on peut donc considérer une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ de N . Pour chaque i , on note r_i le plus grand entier tel que $e_i \in \mathrm{Fil}_q^{r_i} N$ (c'est-à-dire $e_i \in \mathrm{Fil}_q^{r_i} N$ mais $e_i \notin \mathrm{Fil}_q^{r_i+1} N$). L'action de φ sur N est donnée par une matrice $((a_{ij}))$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{E_0}$ telle que

$$\varphi(e_j) = \pi_0^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij}e_i$$

(on rappelle que $q = \pi_0 + p$, donc $q \equiv \pi_0$ modulo p).
Une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ est dite *adaptée à la filtration* si la matrice $((a_{ij}))$ est inversible. On remarque que l'existence d'une telle base est équivalente à $\sum_r \varphi^r(\mathrm{Fil}_q^r N)$ engendre N. En particulier, la proposition précédente montre que si $h \leq p-1$, il existe une base de N adaptée à la filtration et les r_i sont des entiers compris entre 0 et h. Ceci entraîne, en particulier que $\mathrm{Fil}_q^{h+1} N \subset \pi_0 N$.

C.2.1.4. *Structure d'objet de $\mathbf{MF^h_W}$ sur $\Lambda = N/\pi_0 N$.*

Supposons $h \leq p-1$ et soit N un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$. La réduction Λ modulo π_0 de N est un W-module de longueur finie, muni de la filtration image de celle de N :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^r \Lambda &= \{x \in N/\pi_0 N \text{ tels qu'il existe un relèvement } \hat{x} \text{ de } x \text{ dans } N \text{ avec } \hat{x} \in \mathrm{Fil}_q^r N\} \\ &= \{x \in \Lambda \text{ tels qu'il existe un relèvement } \hat{x} \text{ de } x \text{ dans } N \text{ avec } \varphi(\hat{x}) \in q^r N\} \end{aligned}$$

On voit donc que $\mathrm{Fil}^0 \Lambda = \Lambda$ et $\mathrm{Fil}^{h+1} \Lambda = 0$.

Comme, dans S_0, $\varphi(\pi_0)$ est divisible par $\pi_0 q^{p-1}$, si $r \leq h$ et si $x \in \mathrm{Fil}^r_q \Lambda$, n'importe quel relèvement $\hat{x}$ de x dans N appartient à $\mathrm{Fil}^r_q N$ et l'image $\varphi^r(x)$ de $\varphi^r(\hat{x})$ dans Λ ne dépend pas du choix du relèvement. On a ainsi défini une application σ-semi-linéaire

$$\varphi^r : \mathrm{Fil}^r \Lambda \to \Lambda \quad .$$

Ces applications satisfont à

$$\varphi^r_{|_{\mathrm{Fil}^{r+1}\Lambda}} = p\varphi^{r+1}$$

puisque $q \equiv p$ modulo π_0. On a donc muni Λ d'une structure de φ-module filtré sur W.

THEOREME : 1) *Soit h un entier $\leq p-1$. Pour tout objet N de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$, le φ-module filtré $\Lambda = N/\pi_0 N$ est un objet de $\mathbf{MF^h_W}$.*

2) *Le foncteur additif*

$$\mathbf{i}^* : \mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}} \to \mathbf{MF^h_W}$$

ainsi défini est exact. Il est fidèle pour $h \leq p-2$; si $h = p-1$, il faut se restreindre à la catégorie $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^{p-1*}_{S_0}}$, sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^{p-1}_{S_0}}$, dont les objets vérifient la condition suivante :

si $\bar{N}$ est un quotient de N tel que $\varphi(\bar{N}) \subset q^{p-1}\bar{N}$ alors $\bar{N} = 0$.

3) $\mathbf{i}^*$ *admet un quasi-inverse et induit donc une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ et $\mathbf{MF^h_W}$.*

DEMONSTRATION : 1) Le fait que

$$N = \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r_q N) + \pi_0 N$$

implique que

$$\Lambda = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda) \quad .$$

Si Λ est de p-torsion, ceci implique (cf. [F-L]) que Λ est bien un objet de $\mathbf{MF^h_W}$. Dans le cas général $N = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} N/p^n N$, $\Lambda = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \Lambda/p^n \Lambda$ et Λ est dans $\mathbf{MF^h_W}$, puisque c'est un W-module de type fini, limite projective d'objets de $\mathbf{MF^h_W}$.

2) Une suite

$$0 \to \Lambda' \to \Lambda \to \Lambda'' \to 0$$

de morphismes dans $\mathbf{MF^h_W}$ est exacte si et seulement si la suite de morphismes de W-modules sous-jacente l'est et l'exactitude de i^* provient de ce que tout objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^{p-1}_{S_0}}$ est sans π_0-torsion.

Quant à la fidélité, il suffit de la vérifier sur les objets tués par p ; soit $u : N \to N'$ un morphisme dans la catégorie $\mathbf{\Gamma \Phi M^h_{\mathcal{O}_{E_0}}}$ tel que le morphisme

$$\bar{u} : N/\pi_0 N = \Lambda \to N'/\pi_0 N' = \Lambda'$$

soit l'application nulle . Ceci signifie :

$$u(N) \subset \pi_0 N' \tag{1}$$

alors, puisque $N = S_0 . \sum_{r \in \mathbf{N}} \varphi^r(\mathrm{Fil}_q^r N)$, on a l'inclusion suivante, pour $h \leq p-2$,

$$u(N) = S_0 . \sum_{r \in \mathbf{N}} \varphi^r(u(\mathrm{Fil}_q^r N)) \subset \pi_0^2 N'$$

Sinon (si $h = p-1$), l'inclusion (1) ci-dessus implique la suivante :

$$\varphi(u(N)) \subset \pi_0^p N' = \pi_0^{p-1} . \pi_0 N' \quad .$$

On se place dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de N adaptée à la filtration et on note $((a_{ij}))$ la matrice inversible représentant les $\varphi^{r_j}(e_j)$ dans la base (e_i) ; chercher l'image de u revient à chercher des solutions $(y_i)_{1 \leq i \leq d}$ dans N' , où $u(e_i) = \pi_0 y_i$, au système

$$\pi_0^{p-1-r_j} \varphi(y_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} y_i$$

ou bien au système équivalent, en notant $((a'_{ij}))$ la matrice inverse de $((a_{ij}))$

$$y_j = \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \pi_0^{p-1-r_i} \varphi(y_i) \quad .$$

Si $h = p-1$, par l'argument habituel, en utilisant le fait qu'il n'existe pas de quotient $\bar{N}$ de N tel que $\mathrm{Fil}^{p-1} \bar{N} = \bar{N}$, on conclut que $y_i \in \pi_0 N'$.
Par récurrence, on peut montrer que $u(N) \subset \pi_0^n N'$ pour tout n et , par conséquent $u = 0$, puisque N' est libre sur $\mathcal{O}_{E_0}$ et $\mathcal{O}_{E_0}$ est séparé pour la topologie π_0−adique.

C.2.1.5. Demonstration de 3) :

Il suffit de considérer le cas où Λ est libre sur W et il s'agit alors de montrer que si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base de Λ adaptée à la filtration et si $((a_{ij}))$ est la matrice des applications φ^r dans cette base, alors le S_0-module $N = S_0 \otimes_W \Lambda$, muni de l'action de φ suivante

$$\varphi(e_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$$

peut être muni d'une action et d'une seule de Γ_0 commutant à φ et triviale modulo π_0. Remarquons que si ρ désigne l'unique endomorphisme de N, semi-linéaire par rapport à l'action de g_0 sur $S_0 = W[[\pi_0]]$ tel que $\rho(e_j) = e_j$, on a

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) &= \rho(q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i) - q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i \\
&= (g_0(q)^{r_j} - q^{r_j}) \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \\
&= q^{r_j} \pi_0 \alpha_j \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i
\end{aligned}$$

si α_j est l'unique élément de S_0 telle que

$$g_0(q^{r_j}) = q^{r_j}(1 + \pi_0\alpha_j) \quad .$$

Comme S_0 est complet pour la topologie π_0-adique, il suffit de vérifier le lemme suivant :

C.2.1.6. LEMME :*Soient $n \in \mathbf{N}$ et ρ un endomorphisme de N, semi-linéaire par rapport à l'action de g_0 sur S_0 tel que $\rho(e_j) \equiv e_j \mod \pi_0$ et*

$$\rho(\varphi(e_j)) \equiv \varphi(\rho(e_j)) \mod \pi_0^n q^{r_j} N$$

pour tout j ; alors, il existe un endomorphisme ρ' de N, uniquement déterminé modulo π^{n+1}, semi-linéaire par rapport à l'action de g_0 sur S_0 tel que, pour tout j :

$$\rho'(e_j) \equiv \rho(e_j) \mod \pi_0^n N$$

et

$$\rho'(\varphi(e_j)) \equiv (\rho'(e_j)) \mod \pi_0^{n+1} q^{r_j} N \quad .$$

DEMONSTRATION : On pose, pour tout j, $1 \leq j \leq d$:

(1) $$\rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) = \pi_0^n q^{r_j} b_j$$

où b_j est un élément de N et on cherche ρ' à l'aide des équations

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) + \pi_0^n \sum_{1\leq i\leq d} g'_{ij} e_i \quad ,$$

avec $g'_{ij} \in W$. Rappelons que $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$ avec u une unité de S_0 ; alors,

$$\begin{aligned}\rho'(\varphi(e_j)) &= \rho'(q^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij} e_i) \\ &= g_0(q^{r_j}) \sum_{1\leq i\leq d} a_{ij} \rho'(e_i) \\ &= \rho(\varphi(e_j)) + g_0(q^{r_j})\pi_0^n \sum_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq k\leq d}} a_{kj} g'_{ik} e_i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(\rho'(e_j)) &= \varphi(\rho(e_j) + \pi_0^n \sum_{1\leq i\leq d} g'_{ij} e_i) \\ &= \varphi(\rho(e_j) + \varphi(\pi_0^n) \sum_{1\leq i\leq d} \varphi(g'_{ij})\varphi(e_i) \\ &= \varphi(\rho(e_j)) + \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq k\leq d}} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i \quad .\end{aligned}$$

En comparant avec l'équation (1), on obtient les équations à résoudre pour tout $j, 1 \leq j \leq d$:

$$\pi_0^n q^{r_j} b_j + \pi_0^n g_0(q^{r_j}) \sum_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq k\leq d}} a_{kj} g'_{ik} e_i - \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq k\leq d}} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i \equiv 0 \bmod \pi_0^{n+1} q^{r_j}$$

ou bien

$$b_j + (1+\pi_0\alpha_j) \sum_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq k\leq d}} a_{kj} g'_{ik} e_i - q^{n(p-1)-r_j} u^n \sum_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq k\leq d}} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i \equiv 0 \bmod \pi_0 \quad .$$

Comme W est complet pour la topologie p-adique, on commence par résoudre ce système modulo p.

On voit que pour $n \geq 2$ ou bien pour $n = 1$ et $r_j < p-1$ (c'est-à-dire Λ de hauteur $h \leq p-2$), les équations deviennent :

$$b_j \equiv (1+\pi_0\alpha_j) \sum_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq k\leq d}} a_{kj} g'_{ik} e_i \bmod p$$

et on conclut en utilisant le fait que la matrice (a_{ij}) est inversible.

Pour $n = 1$ et si l'un au moins des $r_j = p-1$, on conclut en utilisant le lemme B.2.2.2.2 (p. 32).

De la même manière, on montre qu'on peut relever une solution de ce système modulo p^n en une solution modulo p^{n+1}.

$\diamond$

C.2.2. Lien avec les représentations cristallines.

C.2.2.1. Soit h un entier $\leq p-1$; à un objet N de p-torsion de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ (de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^{p-1*}_{S_0}}$ si $h = p-1$), il est maintenant possible d'associer deux représentations de G_K , à savoir :

– celle qui est associée à N par le foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cr}}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cr}}(N) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0}}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0}}}(N, A^+_{S,\infty})$$

– celle qui est associée à $\mathbf{i}^*(N) = \Lambda$ par le foncteur $\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}}(\Lambda) = \mathbf{V}^*_{\mathbf{cris}} \circ \mathbf{i}^*(N) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) \quad .$$

On se propose de comparer ces deux représentations ; plus précisément, lorsque N est de p-torsion, on va construire un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0}}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) \quad .$$

THEOREME :

Toute représentation de p-torsion de G_K de cr-hauteur finie inférieure ou égale à h, pour $h \leq p-1$ est un sous-quotient de représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et h. Plus précisément , si $N \in \Gamma_0\Phi\mathbf{M}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{S}_0,\mathbf{tors}}$ (respectivement $\Gamma_0\Phi\mathbf{M}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathbf{S}_0,\mathbf{tors}}$ si $h = p-1$), alors $\mathbf{i}^*(N) = N/\pi N$ est objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tors}}$ (respectivement $\mathbf{MF}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathbf{W},\mathbf{tors}}$) et les représentations associées à chacun des deux modules sont naturellement isomorphes, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_\mathbf{W}}(\mathbf{i}^*(N), A_{cris,\infty}) \quad .$$

DEMONSTRATION :

Soit N un objet de $\Gamma_0\Phi\mathbf{M}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{S}_0}$ tué par p^n ; alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr},\infty}) &= \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, A^+_{S,\infty}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, A^+_S/p^n A^+_S) \quad .\end{aligned}$$

L'inclusion $A^+_S \subset W(R)$ fournit une flèche encore injective

$$A^+_S/p^n A^+_S \to W(R)/p^n W(R) = W_n(R)$$

que nous utilisons pour identifier $A^+_S/p^n A^+_S$ à un sous-anneau de $W_n(R)$.

Considérons la catégorie $\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0,\mathrm{Fil}}$, dont les objets sont les objets de $\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}$ munis d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^r_q N)_{r\in\mathbf{N}}$ par des sous-S_0-modules, et dont les morphismes sont les morphismes de $\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}$ respectant la filtration. Tout objet de $\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}$ sans q-torsion est muni d'une structure naturelle d'objet de $\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0,\mathrm{Fil}}$, si l'on définit :

$$\mathrm{Fil}^r_q N = \{x \in N \text{ tel que } \varphi(x) \in q^r N\} \quad .$$

Ceci s'applique en particulier à $A^+_S/p^n A^+_S$ et à $W_n(R)$. On munit le quotient $W_n(R)/\pi_0 W_n(R)$ de la filtration induite.

Comme $A^+_S/p^n A^+_S$ et $W_n(R)$ sont sans q-torsion, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, A^+_S/p^n A^+_S) & \to & \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0}}(N, W_n(R)) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0},\mathrm{Fil}}(N, A^+_S/p^n A^+_S) & \to & \mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0},\mathrm{Fil}}(N, W_n(R))\end{array} \quad .$$

On dispose ainsi d'une flèche naturelle de

$$\mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0},\mathrm{Fil}}(N, W_n(R))$$

dans

$$\mathrm{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathbf{S}_0},\mathrm{Fil}}(N, W_n(R)/\pi_0 W_n(R))$$

et on constate que ce dernier groupe s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\mathbf{i}^*(N), W_n(R)/\pi_0 W_n(R))$.

D'autre part, on a vu que si Λ est un objet de $\mathbf{MF_W^{p-1*}}$ tué par p^n, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, A_{cris,\infty}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, W_n^{PD}(R)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, W_n^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_n^{PD}(R)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, W_n(R)/I^{[p-1]}W_n(R)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\Lambda, W_n(R)/\pi_0 W_n(R)) \quad .\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème, on est donc ramené à montrer que la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0,Fil}}}(N, A_S^+/p^n A_S^+) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(\mathbf{i}^*(N), W_n(R)/\pi_0 W_n(R))$$

est un isomorphisme.

Par dévissage, on se ramène au cas où N est tué par p; dans ce cas $A_S^+/pA_S^+ = \mathcal{O}_{E^{sep}}$ et $S_0/pS_0 = \mathcal{O}_{E_0} = k[[\pi_0]]$; on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0,Fil}}}(N, \mathcal{O}_{E^{sep}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{E_0,Fil}}}(N, \mathcal{O}_{E^{sep}})$$

et il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{E_0,Fil}}}(N, \mathcal{O}_{E^{sep}}) = \mathrm{Hom}_{MF_W}(\mathbf{i}^*(N), R/\pi_0 R) \quad .$$

L'inclusion $\mathcal{O}_{E^{sep}} \subset R$ induit une inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{E_0,Fil}}}(N, \mathcal{O}_{E^{sep}}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{E_0,Fil}}}(N, R)$$

qui est une égalité puisque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{E_0,Fil}}}(N, \mathcal{O}_{E^{sep}})$ est de dimension d sur $\mathbf{F}_p$.

Il ne reste plus qu'à montrer la proposition suivante :

C.2.2.2. Proposition : *L'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}}}}(N, R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, R/\pi_0 R)$$

est un isomorphisme.

Demonstration :

La catégorie additive $\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}$ n'est pas abélienne, mais dispose de propriétés analogues à celles considérées dans le paragraphe B.1.4 (on peut définir des Ext^i pour $i = 0, 1$ et on a des suites exactes longues).

La suite exacte

$$0 \to \pi_0 R \to R \to R/\pi_0 R \to 0$$

induit la suite exacte longue

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, \pi_0 R) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, R) \to \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, R/\pi_0 R) &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E_0}},\mathbf{Fil}}}(N, \pi_0 R) \to \cdots \quad .\end{aligned}$$

On est ramené à montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}}(N, \pi_0 R) = 0$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}}(N, \pi_0 R) = 0 \quad .$$

– Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}}(N, \pi_0 R)$, où N est un objet de $\Gamma\Phi\mathrm{M}^{\mathrm{h}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}}$. On se place dans une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ de N adaptée à la filtration, on note $((a_{ij}))$ la matrice de Φ dans cette base et on écrit u sous la forme $u(e_i) = \pi_0\alpha_i$ où $\alpha_i \in R$. Alors les α_i doivent vérifier le système suivant :

$$\Big(\varphi^{r_i}(\pi_0\alpha_i) = \pi_0^{p-r_i}\alpha_i^p = \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}\pi_0\alpha_j\Big)_{1\leq i\leq d}$$

c'est-à-dire

$$\Big(\pi_0^{p-1-r_i}\alpha_i^p - \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}\alpha_j = 0\Big)_{1\leq i\leq d}$$

et $\mathrm{Hom}_{\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}}(N, \pi_0 R) = 0$ si et seulement si la seule solution à ce système est la solution nulle.

– De même soit une extension $\mathcal{E}$ de N par $\pi_0 R$ dans la catégorie $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}},\mathrm{Fil}}$ définie par une suite exacte

$$0 \to \pi_0 R \to \mathcal{E} \to N \to 0$$

alors $\mathrm{Ext}^1_{\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}}(N, \pi_0 R)$ est trivial si et seulement si cette suite est scindée. En d'autres termes, si on note $\hat{e}_i$ un relèvement de e_i dans $\mathrm{Fil}^{r_i}\,\mathcal{E}$, on a

$$\varphi^{r_i}(\hat{e}_i) - \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}\hat{e}_j \in \pi_0 R$$

et on pose

$$\varphi^{r_i}(\hat{e}_i) - \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}\hat{e}_j = \pi_0 b_i$$

où $b_i \in R$.

Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $N \to \mathcal{E}$ dans $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}},\mathrm{Fil}$ induisant l'identité sur N par composition avec la projection $\mathcal{E} \to N$; on cherche des éléments α_i de R tels que :

$$\Big(\varphi^{r_i}(\hat{e}_i + \pi_0\alpha_i) = \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}(\hat{e}_j + \pi_0\alpha_j)\Big)_{1\leq i\leq d}$$

Il faut donc montrer l'existence de solutions dans R au système suivant :

$$\Big(\pi_0^{p-1-r_i}\alpha_i^p - \sum_{1\leq j\leq d} a_{ij}\alpha_j = -b_i\Big)_{1\leq i\leq d} \quad .$$

– Finalement, il suffit de montrer que le système ci-dessus, où $b_i \in R$ et la matrice $((a_{ij}))$ est inversible à coefficients dans $\mathcal{O}_{E_0}$ admet un unique d-uplet $(\alpha_i)_{1\leq i\leq d}$ solution dans R .
Puisque la matrice $A = ((a_{ij}))$ est inversible, il est équivalent de montrer l'existence et l'unicité des solutions dans R^d au système :

$$(1) \qquad \Big(\beta_i - \pi_0^{p-1-r_i} \sum_{1\leq j\leq d} a'^p_{ij}\beta_j^p = b_i\Big)_{1\leq i\leq d}$$

où $((a'_{ij})) = A^{-1}$.

C.2.2.3. Lemme :

Si $(\beta_{i,n})_{1\leq i\leq d}$ est une solution du système (1) modulo π_0^n , alors $\beta_{i,n}$ se relève de manière unique modulo π_0^{n+1} en $\beta_{i,n+1}$, de telle sorte que $(\beta_{i,n+1})_{1\leq i\leq d}$ soit solution du système modulo π_0^{n+1}.

Demonstration :

On cherche $(\beta_{i,n+1})_{1\leq i\leq d}$ sous la forme $\beta_{i,n+1} = \beta_{i,n} + \pi_0^n\beta'_{i,n}$. Alors, $(\beta'_{i,n})_{1\leq i\leq d}$ doit être solution du système

$$\Big(\pi_0^n\beta'_{i,n} \equiv \pi_0^{p-1-r_i} \sum_{1\leq j\leq d} a'^p_{ij}\beta_{j,n}^p - \beta_{i,n} + b_i \text{ modulo } \pi_0^{n+1}\Big)_{1\leq i\leq d} \quad .$$

Puisque $(\beta_{i,n})_{1\leq i\leq d}$ est solution du système modulo π_0^n , on peut écrire

$$\pi_0^{p-1-r_i} \sum_{1\leq j\leq d} a'^p_{ij}\beta_{j,n}^p - \beta_{i,n} + b_i = \pi_0^n A_{i,n}$$

où $A_{i,n} \in R$, d'où $\beta'_{i,n} \equiv A_{i,n}$ modulo π_0 et le lemme est démontré .
◇

Il reste à voir l'existence et l'unicité de solutions $(\beta_i)_{1\leq i\leq d}$ modulo π_0 au système :

$$\Big(\beta_i - \pi_0^{p-1-r_i} \sum_{1\leq j\leq d} a'^p_{ij}\beta_j^p = b_i\Big)_{1\leq i\leq d} \quad .$$

Si $h \leq p-2$, pour tout i, on a $r_i \leq p-2$ et par conséquent le système se simplifie en

$$(\beta_i \equiv b_i \bmod \pi_0)_{1\leq i\leq d} \quad ,$$

d'où le théorème pour $h \leq p-2$.
◇

C.2.2.4. *Cas où* $h = p - 1$.

Dans ce cas, le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \beta_i \equiv b_i \bmod \pi_0 \text{ pour } i \text{ tel que } r_i < p-1 \\ \beta_i - \sum_{r_j = p-1} a'^p_{ij} \beta_j^p \equiv b'_i \bmod \pi_0 \text{ pour } i \text{ tel que } r_i = p-1 \end{cases} .$$

On suppose que N n'admet pas de quotient $\bar{N} \in \mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{h}}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_0}}$ tel que $\varphi(\bar{N}) \subset \pi^{p-1}\bar{N}$; alors $\mathbf{i}^*(N)$ n'admet pas de quotient $\bar{\Lambda}$ tel que $\mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$, c'est-à-dire $i^*(N) \in \mathbf{MF}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathbf{k}}$. On note $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{p-1*}}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_0}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\mathbf{p-1}}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}}}$ formée des objets qui vérifient cette condition . Par le même argument que dans le chapitre précédent , on montre l'existence et l'unicité des $(\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$ modulo π_0.

Bibliographie

[B-O] P. Berthelot and A. Ogus. — *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[F79] J.-M. Fontaine. — Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, **in** *Journées arithmétiques de Rennes III, Astérisque* **65**, (1979) 3-80.

[F82] J.-M. Fontaine. — Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of maths* **115**, (1982) 529-577.

[F91] J.-M. Fontaine. — Représentations p-adiques des corps locaux, **in** *The Grothendieck Festschrift, vol II*, Birkhäuser, Boston, (1991) 249-309.

[F93] J.M. Fontaine. — Le corps des périodes p-adiques, exposé séminaire I.H.E.S. 1988, *Prépublication Univ. Paris-Sud*, (1993) .

[F-I] J-M Fontaine et L. Illusie. — p-adic periods : a survey, exposé Bombay 1989, *Prépublication Univ. Paris-Sud*, (1990) .

[F-L] J-M Fontaine et G. Laffaille. — Construction de représentations p-adiques, *Ann. Scient. E.N.S.* 4° *série* **15**, (1982) 547-608.

[L] G. Laffaille. — Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, *Bull. Soc. Math. France* **108**, (1980) .

[N] W. Niziol. — Cohomology of crystalline representations, *Duke Math. Journal* **71**, (1993) .

[Se] S. Sen. — Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Inv. Math.* **62**, (1980) 89-116.

[S54] J-P Serre. — *Classes des corps cyclotomiques, d'après Iwasawa*, Séminaire Bourbaki, 1958.

[S68] J-P Serre. — *Corps locaux*, 2° éd., Hermann, Paris, 1968.

[W] J.-P. Wintenberger. — Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Scient. E.N.S.* 4° *série* **16**, (1983) 59-89.