ORSAY
n° d'ordre : 1696

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le titre de Docteur en Sciences

Spécialité : **Mathématique**

par

Jérôme BUZZI

Sujet : **Entropies et représentation markovienne des applications régulières sur l'intervalle**

soutenue le 4 juillet 1995 devant la Commission d'examen

MM. François LEDRAPPIER (Président)
Jean-Pierre CONZE
Sheldon NEWHOUSE
Bernard SCHMITT
Philippe THIEULLEN
Jean-Christophe YOCCOZ

À Thanh-Vân et Clémentine

Remerciements

J'ai découvert la théorie des systèmes dynamiques grâce à Pierre Lochak, à l'occasion d'un exposé. Mais c'est le cours de Jean-Christophe YOCCOZ qui m'a décidé, alors que j'avais achevé un D.E.A. de physique théorique, à entreprendre cette thèse dont il a bien voulu être le directeur en titre. Je l'en remercie vivement.

Je souhaite remercier Philippe THIEULLEN pour d'innombrables discussions. En particulier, je lui dois bien des questions qui se sont avérées à la fois intéressantes et abordables. Il a également porté à mon attention des articles qui se sont par la suite avérés fondamentaux. Je le remercie aussi pour ses encouragements.

D'autre part, je tiens à remercier Lai-Sang YOUNG et Sheldon NEWHOUSE qui ont bien voulu rapporter cette thèse.

Je voudrais remercier François LEDRAPPIER, Jean-Pierre CONZE et Bernard SCHMITT pour avoir bien voulu faire partie du Jury. Je les remercie également de m'avoir accueilli dans leurs laboratoires pour de très stimulantes discussions.

Enfin, j'ai une dette envers mes parents, que ce soit mon père, qui, dès mon plus jeune âge, m'a fait partager son enthousiasme pour la recherche scientifique ou ma mère dont le rôle n'a pas été moins important.

ABSTRACT

The central purpose of this thesis is to analyze smooth interval maps: we provide a precise description of the dynamics of the transitive components (whose disjoint union is the non-wandering set) and we bound their multiplicity. In particular, we show that, if the map is indefinitely derivable, the set of measures maximizing the entropy is a finite-dimensional simplex. Let us stress that the set of critical points is not assumed to be finite. This work therefore generalizes a result of F. Hofbauer about piecewise montonic maps. It may also be seen as a first preparation to the study of multi-dimensional cases. In another direction, we make more precise the above result of F. Hofbauer: we bound the number of transitive components of given entropy, by four times the number of monotonicity and continuity intervals.

First, we generalize the Markov extension and the related isomorphism result of F. Hofbauer to an arbitrary symbolic system. Then, assuming the connexity of certain sets, we bound the entropy of the part neglected by the previous isomorphism by the topological entropy of the border of the partition.

Second, we recall -with proofs- A.M. Blokh's Spectral Decomposition theorem for continuous interval maps and Y. Yomdin's theory about differentiable maps (in arbitrary dimension). In particular, we give a simple proof of S.E. Newhouse's result about the semi-continuity of the metric entropy for indefinitely differentiable maps. We deduce from these results the finite multiplicity of the transitive components with large entropy.

AMS Classification: 58F11, 58F03, 54H20, 28D20.

key-words: one-dimensional dynamics, ergodic theory, entropy, intrinsic ergodicity, symbolic dynamics, topological Markov chain, Markov extension, differentiable map.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier le problème de la représentation d'applications de l'intervalle sous la forme d'une chaîne de Markov topologique. Nous serons amenés à faire une double hypothèse de régularité (applications C^r avec r "assez" grand) et de "dilatation topologique" ($h_{\text{top}}(f) > 0$). Cette représentation nous permettra d'étudier la question de l'ergodicité intrinsèque (expliquée ci-dessous) pour ces applications. Nous examinerons comment l'approche de ce problème par F. Hofbauer dans le cas des applications de l'intervalle dites monotones par morceaux, peut être reproduite dans une situation plus générale. Le cas des applications de l'intervalle nous servira de test. Nous essaierons d'isoler dans chaque résultat la part susceptible d'être utilisée en dimension supérieure. Nous aurons besoin d'outils contrôlant diverses "entropies" du système: la théorie de Yomdin des applications différentiables, un résultat (nouveau) de théorie ergodique sur les systèmes symboliques "pistés". Nous serons également amenés à étudier certaines propriétés des chaînes de Markov topologiques et notamment les notions d'entropie pour ces systèmes non compacts.

Après avoir rappelé quelques faits et idées relatifs à différentes notions d'entropie pour les systèmes dynamique, nous rappelons ci-dessous la notion d'ergodicité intrinsèque ainsi que ce qui est déjà connu dans ce domaine. Puis nous introduisons une notion d'isomorphisme suffisamment souple pour relier des systèmes aussi différents qu'un système dynamique différentiable et une chaîne de Markov topologique tout en gardant une liaison étroite entre les propriétés ergodiques des deux systèmes. Ceci fait, nous présentons les résultats obtenus dans cette thèse et en expliquons brièvement le plan.

En conclusion, nous notons quelques questions en suspens concernant les applications régulières de l'intervalle et nous expliquons en quoi les résultats obtenus nous paraissent un premier pas vers la résolution de questions similaires en dimension supérieure.

0.1 L'entropie comme taille

Supposons donné un système dynamique topologique (X, f) défini par $f : X \to X$ une application continue sur un espace compact. On étudie les orbites:

$$x, f(x), f(f(x)), \ldots, f^k(x), \ldots \qquad \text{pour } x \in X$$

ou du moins leur "comportement asymptotique": on cherchera ici à donner une description probabiliste (ou "statistique") des orbites (qui sont elles "déterministes" dans le sens où l'application f est fixée) par l'intermédiaire d'une mesure de probabilité sur l'espace X (on munit les espaces topologiques de leur tribu borélienne):

(0.1) Définition. *On dit qu'une mesure μ sur X décrit l'orbite d'un point $x \in X$ si, pour toute fonction continue $h : X \to \mathbb{R}$ on a:*

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(f^k(x)) = \int_X h \, d\mu$$

On voit qu'une mesure satisfaisant (*) ci-dessus est nécessairement une *mesure de probabilité invariante par f*: $f_*\mu = \mu \circ f^{-1} = \mu$. D'après le théorème ergodique de Birkhoff [37, p. 30], chaque mesure ergodique et invariante μ décrit les orbites issues de presque tous les points *relativement à elle-même*. Le théorème ergodique ne fournit donc presqu'aucun renseignement sur la "taille" de l'ensemble décrit par une mesure invariante.

Pour les systèmes auxquels nous allons nous intéresser, s'il existe toujours au moins une mesure de probabilité invariante et ergodique (théorème de Bogoliubov-Krylov [8, chap. 1], X est compact et f continue), le problème est, au contraire, qu'il existe une infinité de telles mesures représentant une infinité de comportements distincts (même d'un point de vue probabiliste). On aimerait donc choisir parmi toutes ces mesures une mesure décrivant le comportement de "*la plupart*" des points.

Comment donner un sens précis à cette notion de "*la plupart des points*"? Plusieurs réponses (non-équivalentes) sont possibles. Du point de vue de la topologie, une partie négligeable est une partie de *première catégorie* (X est un espace de Baire). Cette notion n'est pas compatible avec la description probabiliste: d'après une remarque de Dowker [8, chap. 1], il arrive souvent que les points pour lesquels il existe une mesure μ vérifiant (*) forment eux-mêmes un ensemble de première catégorie. On peut se donner une *mesure de référence* (par exemple la mesure de Lebesgue sur une variété différentiable) et essayer de décrire le comportement des orbites issues de presque tous les points au sens de cette mesure. C'est sans doute la voie la plus étudiée (voir par ex. [45, chap. 5]).

Nous adopterons ici un autre point de vue, basé sur l'*entropie*, vue comme une façon de "compter" les orbites. Dans l'appendice à cette introduction, nous rappelons les définitions précises. Pour le moment, disons que l'entropie d'une partie $Y \subset X$ est h, si le nombre d'orbites de longueur n issues d'un point $x \in Y$,

$$x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$$

repérées avec une précision ϵ, croît comme e^{hn}.

L'**entropie topologique** $h_{\text{top}}(f)$ est alors l'entropie de X tout entier, et l'**entropie métrique** $h_\mu(f)$ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ ergodique est l'entropie de l'ensemble (défini modulo μ!) des points dont l'orbite est décrite par cette mesure. L'entropie d'une mesure de probabilité invariante quelconque étant définie par "linéarité". Clairement $h_\mu(f) \leq h_{\text{top}}(f)$ pour toute mesure μ. On a en fait le principe variationnel [8, chap. 18]:

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)} h_\mu(f).$$

Ceci suggère de généraliser la notion d'entropie topologique, en l'absence de toute "bonne" structure topologique de la façon suivante: on appelle **entropie absolue**

d'une application mesurable $f : X \to X$ la quantité:

$$h_{\text{abs}}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} h_\mu(f).$$

0.2 Ergodicité intrinsèque

Une fois adopté le point de vue exposé ci-dessus, l'entropie d'une mesure ergodique mesure le "nombre" d'orbites décrites. On distingue donc tout naturellement les mesures suivantes:

(0.2) Définition (B. Weiss [49]). *Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ est dite d'entropie maximale si elle satisfait la condition:*

$$(*) \qquad h_\mu(f) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f(X)} h_\nu(f)$$

On note $\text{Max}(f)$ *l'ensemble des mesures* ergodiques *satisfaisant (*). On appelle* **mesures maximales** *les éléments de* $\text{Max}(f)$.

Remarques. 1. Le principe variationnel [8, chap. 18] implique que ce supremum est simplement l'entropie topologique $h_{\text{top}}(f)$.

2. La restriction à des mesures ergodiques est purement technique: nous nous placerons dans des cas où $h_{\text{top}}(f) < \infty$; la fonction $\mu \mapsto h_\mu(f)$ étant affine, l'ensemble des mesures maximisant l'entropie est simplement la fermeture convexe de $\text{Max}(f)$. Cette réduction nous permettra de parler de "multiplicité finie" au lieu de "simplexe de dimension finie".

Cette notion est particulièrement intéressante dans le cas où "la plupart" des orbites (dans ce sens) ont un *même* comportement probabiliste:

(0.3) Définition (B. Weiss [49]). *On dit que (X, f) est* **intrinsèquement ergodique** *si* $\text{card}\,\text{Max}(f) = 1$.

La terminologie est inspirée par l'analogie avec l'ergodicité par rapport à une mesure de référence.

Quels sont les systèmes intrinsèquement ergodiques?
Quels sont les systèmes admettant un nombre de mesures maximales fini et non nul?

En effet, ni l'existence ni l'unicité de la mesure maximale ne sont automatiques.

0.2.1 Existence.

Un système dynamique topologique n'admet pas nécessairement de mesure d'entropie maximale.

Contre-exemples. B.M. Gurevič a remarqué qu'il suffisait de prendre une suite de sous-shifts Λ_n telle que $n \mapsto h_{\text{top}}(\Lambda_n)$ soit bornée et strictement croissante. Le système obtenu par l'union disjointe:

$$\Lambda_* = \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n \cup \{0\}$$

où 0 est un point fixe, peut être compactifié. Or une mesure ergodique est nécessairement concentré sur un Λ_n ou sur 0 et ne peut donc être d'entropie maximale.

On donnera (chap. 13) des exemples d'applications sur l'intervalle de classe C^k n'ayant pas de mesure maximale, pour tout k fini.

Conditions abstraites.

On fixe f une application continue d'un compact métrique X dans lui-même.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{M}_f(X)$ étant compact pour la topologie vague, il suffit de montrer que $\mu \mapsto h_\mu(f)$ est semi-continue supérieurement pour cette topologie: cette fonction atteint alors son maximum et il existe une mesure d'entropie maximale.

Remarque. Cette propriété n'est pas nécessaire pour l'existence [8, chap. 19].

La condition suffisante la plus simple assurant cette semi-continuité est la suivante:

(0.4) Définition. *On dit que f est* **expansive** *s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que:*

$$\sup_{k\geq 0} d(f^k x, f^k y) < \epsilon_0 \implies x = y.$$

Ce résultat classique, facile et fondamental est démontré dans la section 1 du chapitre 7. Cependant cette condition est le plus souvent trop forte pour être utilisable. Mais on peut l'affaiblir considérablement comme l'ont remarqué R. Bowen [3] et M. Misiurewicz [31]:

(0.5) Définition. *On dit que f est* **asymptotiquement h-expansif** *si:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{x\in X} h_{\text{top}}(B_\infty(x,\epsilon), f) = 0$$

(se reporter à l'appendice pour une définition de $B_\infty(x,\epsilon)$).

Même cette dernière condition n'est pas nécessaire pour la semi-continuité supérieure de l'entropie. [M. Denker [7] a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure d'entropie maximale: la h-expansivité locale, définie en termes d'entropie topologique conditionnelle.]

Mais cette condition de h-expansivité asymptotique est vérifiée par une large classe de système. En effet, la théorie de Y. Yomdin [51,52] permet de montrer qu'une application est asymptotiquement h-expansive dès qu'elle est de classe C^∞. Plus généralement S. Newhouse [32] a montré que l'ordre de différentiabilité fournit une majoration du défaut de semi-continuité supérieure. Nous présenterons ces résultats au chapitre 7.

Comme on a vu qu'il existe des applications de classe C^k avec k arbitrairement grand mais fini, dépourvues de mesure d'entropie maximale, l'existence est obtenue pour une classe naturelle de systèmes et l'on peut considérer que la question de l'existence d'une mesure d'entropie maximale est réglée par ces travaux, même si certaines questions subsistent (cf. section 5).

0.2.2 Unicité.

Le problème de l'unicité est beaucoup plus délicat. Il est clair qu'il est nécessaire d'imposer une condition comme la transitivité topologique, si l'on veut effectivement obtenir l'unicité. On peut toutefois espérer que pour certains systèmes, la compacité suffise à assurer la finitude du nombre de mesures maximales.

Notons d'abord qu'en toute généralité, même la minimalité n'entraîne pas l'unicité de la mesure maximale:

T.N.T. Goodman [10] a construit un système dynamique topologique expansif, minimal ayant deux mesures maximales. C. Grillenberger [8, remarque suivant (19.12)] affirme l'existence de systèmes minimaux avec une infinité dénombrable ou non-dénombrable de mesures invariantes et ergodiques qui sont toutes des mesures maximales.

Par ailleurs, la propriété d'unicité n'est pas préservée par passage à un facteur, une extension ou un produit. L'unicité (sous l'hypothèse de la transitivité topologique) a toutefois été démontrée pour quelques classes assez larges de systèmes:

(1) les sous-shifts de type fini (W. Parry [36]).
(2) les systèmes sofiques (B. Weiss [50]).
(3) les shifts (non nécessairement compacts) d'entropie finie définis par des graphes dénombrables (B.M. Gurevič [14]).
(4) les systèmes satisfaisant l'expansivité et la spécification (cf. chapitre 11, pour une définition) (R. Bowen [6]).
(5) les difféomorphismes axiome-A (R. Bowen [4]).
(6) certains produits semi-directs commutatifs (B. Marcus, S. Newhouse [29]) ou non (S. Newhouse, L.-S. Young [35]).
(7) les β-transformations $x \mapsto \beta x$ sur $[0,1]$ avec $\beta > 1$ (Y. Takahashi [44]).
(8) les applications $f : [0,1] \to [0,1]$ monotones par morceaux et d'entropie non-nulle (F. Hofbauer [15,16,17]).

Dans ce dernier cas, F. Hofbauer a montré non seulement que la transitivité topologique implique l'ergodicité intrinsèque mais que, même en l'absence de cette hypothèse, $\mathrm{Max}(f)$ est *toujours fini*. Ce résultat repose sur la construction d'une extension markovienne (cf. chapitre 2).

0.2.3 Généralisation — h-isomorphisme.

Plus généralement l'interprétation de l'entropie comme façon de "compter" les orbites amène à considérer comme négligeables les mesures de petite entropie et par conséquent les ensembles qui ne sont chargés que par ces mesures. On aboutit donc à la notion suivante d'isomorphisme:

(0.6) Définition. *On dit que ψ est un* **h-isomorphisme d'entropie critique** *h_* de (X,f) sur (Y,g) (deux applications sur des espaces mesurables) si $h_* < \max(h_{\mathrm{abs}}(f), h_{\mathrm{abs}}(g))$, si ψ est une application définie sur une partie X_1 de X à valeurs dans Y et s'il existe $X' \subset X_1$, $Y' \subset Y$ des parties invariantes telles que:*

(1) *$\psi : (X',f) \to (Y',g)$ est un isomorphisme mesurable, i.e. $\psi : X' \to Y'$ est une bijection bi-mesurable et $\psi \circ f = g \circ \psi$ sur X'.*
(2) *$X \setminus X'$ est négligeable dans le sens suivant: pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_f^{h_*}(X)$, i.e. de probabilité, invariante, ergodique et d'entropie strictement supérieure à h_*, $\mu(X') = 1$.*
(3) *$Y \setminus Y'$ est négligeable dans le même sens.*

Les mesures maximales de deux systèmes h-isomorphes sont évidemment en bijection.

Les résultats de F. Hofbauer peuvent être exprimés plus précisément grâce à cette notion. Soit une application de l'intervalle supposée monotone par morceaux

et d'entropie topologique non-nulle. Les résultats de F. Hofbauer établissent le h-isomorphisme de l'application (en fait de son extension naturelle cf. p. 5) avec une chaîne de Markov topologique (généralisation d'un sous-shift de type fini cf. (1.2)), c'est-à-dire un système dynamique combinatoire, plus facile à analyser. En particulier le problème de l'exitence et de l'unicité des mesures maximales y est complètement résolu par B.M. Gurevič (cf. ci-dessus).

0.3 Résultats nouveaux

On présente ici deux résultats "concrets" concernant l'ergodicité intrinsèque des applications de l'intervalle. Le premier précise le résultat de F. Hofbauer concernant les applications monotones par morceaux évoqué plus haut, en donnant une majoration explicite du nombre de mesures maximales. Il va dans le sens d'une conjecture de S. Newhouse [34].

(12.1) **Théorème.** *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *monotone par morceaux et d'entropie non-nulle:*

$$h_{\text{top}}(f) > 0.$$

Notons N *le nombre d'intervalles de monotonie et de continuité de* f.

Le nombre n_{Max} *de mesures maximales vérifie:*

$$1 \leq n_{\text{Max}} \leq 4N - 5.$$

Si f *est de plus supposée continue alors:*

$$1 \leq n_{\text{Max}} \leq 3N - 4.$$

Enfin, si f *est unimodale alors elle est intrinsèquement ergodique.*

(l'ergodicité intrinsèque dans le cas unimodal est due à F. Hofbauer [18])

Ceci découle en fait d'un résultat de dénombrement des parties irréductibles d'entropie fixée dans le graphe correspondant à la chaîne de Markov topologique définie par l'application monotone par morceaux.

On traite ensuite le cas des applications de l'intervalle de classe C^∞, non-nécessairement monotones par morceaux: l'ensemble des points critiques est *quelconque*, en particulier il peut être infini. C'est une des principales motivations de cette étude: on verra en effet que, dans notre approche, l'analogue des points critiques est, en dimension supérieure, la frontière d'une partition et cet ensemble critique est alors nécessairement infini.

On obtient dans le cas C^∞ en fait le même énoncé que celui de F. Hofbauer pour les applications monotones par morceaux:

(13.2) **Théorème.** *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *de classe* C^∞ *et d'entropie non nulle:*

$$h_{\text{top}}(f) > 0.$$

Il existe alors un nombre fini, non nul, de mesures maximales. L'extension naturelle de chacune de ces mesures est une mesure markovienne.

On remarque que pour tout $r < \infty$, il existe une application C^r de l'intervalle ayant une infinité de mesures maximales ou au contraire n'en ayant aucune (chapitre 13).

Ce résultat sur les mesures maximales découle d'un théorème de "représentation markovienne" établissant, comme dans le cas monotone par morceaux, d'une part le h-isomorphisme d'entropie critique nulle de (l'extension naturelle) de l'application en question avec une chaîne de Markov topologique, d'autre part la correspondance entre les "composantes transitives" — c'est-à-dire les parties invariantes et topologiquement transitives, maximales pour l'inclusion— des deux systèmes. Plus précisément on verra le:

(13.3) **Théorème.** *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *de classe* C^∞. *Si* f *est d'entropie topologique non-nulle:*

$$h_{\text{top}}(f) > 0,$$

alors il existe une chaîne de Markov topologique $\Sigma(G)$ *telle que:*

1. (L'extension naturelle de) $([0,1], f)$ *est h-isomorphe à la chaîne* $\Sigma(G)$ *avec une entropie critique nulle.*

2. Ce h-isomorphisme fait correspondre bijectivement les composantes transitives d'entropie non-nulle de $([0,1], f)$ *et de* $\Sigma(G)$.

3. Soit $0 < H \leq h_{\text{top}}(f)$. *Le nombre de composantes transitives d'entropie au moins* H *est fini et non-nul.*

On remarquera que les résultats obtenus dans ce cas C^∞ sont les mêmes que les résultats de F. Hofbauer dans le cas monotone par morceaux. Dans le cas C^r, on obtient un résultat similaire, mais l'entropie critique n'est plus zéro.

4 Plan

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Nous commençons (chap. 1) par introduire la *dynamique symbolique* pour les systèmes partitionnés, i.e. des systèmes munis d'une partition naturelle peut-être infinie et qui n'est une partition qu'à condition de négliger un certain ensemble "critique". Ce cadre général englobe tous les systèmes que nous allons traiter. Nous donnons également quelques définitions relatives aux "sous-shifts avec alphabet infini" que nous appelons systèmes symboliques. Nous présentons ensuite (chap. 2) le *théorème d'isomorphisme* (2.7) qui permet de décomposer la dynamique symbolique en une *chaîne de Markov* et une partie non-markovienne "pistée" par les points de l'ensemble critique.

Dans la deuxième partie, nous examinons les propriétés des chaînes de Markov topologiques. Nous présentons d'abord différentes *notions d'entropie* pour ces systèmes non-compacts, ainsi qu'un critère (semble-t-il nouveau) pour leur égalité (chap. 3); puis nous rappelons les résultats de la théorie de Vere-Jones sur le comportement asymptotique de ces chaînes (chap. 4) —ainsi que certains résultats complémentaires qui semblent ne pas avoir été explicités précédemment. Nous donnons enfin (chap. 5) une démonstration du théorème de Gurevič concernant l'*ergodicité intrinsèque* de ces systèmes.

La troisième partie est consacrée à des résultats généraux de majoration d'entropies. Nous donnons d'abord (chap. 6) une majoration de l'entropie des mesures invariantes portées par la *partie non-markovienne* en fonction de l'entropie de l'ensemble critique. Nous rappelons ensuite (chap. 7) la *théorie de Yomdin* sur les applications différentiables et ses conséquences sur la semi-continuité supérieure

de différentes entropies topologiques (dues à Yomdin) et métriques (dues à Newhouse et dont nous proposons une démonstration simplifiée basée sur une notion simple d'*entropie locale*).

La quatrième partie analyse la structure des applications de l'intervalle. Nous donnons d'abord (chap. 8) une démonstration de la *décomposition spectrale* de A.M. Blokh, puis nous construisons le *diagramme de Hofbauer* (chap. 9). Nous concluons ensuite par certains résultats de F. Hofbauer particuliers au cas monotone par morceaux (chap. 10), puis par des résultats concernant la spécification (chap. 11, dus à A.M. Blokh dans le cas continu).

La cinquième partie tire les conséquences des résultats précédents pour obtenir les résultats annoncés pour les applications de l'intervalle montones par morceaux (chap. 12) ou régulières (chap. 13).

5 Perspectives

On a le problème suivant:

Conjecture 1. *Soit $f : M \to M$ une application de classe $C^{1+\alpha}$ sur une variété différentiable compacte.*

1a. *Si aucun exposant de Lyapunov de f n'est nul, alors* $\mathrm{Max}(f)$ *est (au plus) dénombrable.*

1b. *Si, de plus, f restreinte à son ensemble non-errant $\Omega(f)$ est topologiquement transitive alors* $\mathrm{Max}(f)$ *a au plus un élément.*

1c. *Si f est de classe C^∞ et $h_{\mathrm{top}}^{m-1}(f) < h_{\mathrm{top}}(f)$, alors* $\mathrm{Max}(f)$ *est fini.*

Notre résultat (13.2) est le cas particulier $\dim M = 1$ pour 1c; et $\dim M = 1$ et f de classe C^∞ pour 1b.

Le problème crucial pour mettre en oeuvre l'approche de Hofbauer telle que nous l'avons généralisée est de satisfaire la condition suivante:

> il faut trouver une partition P dont l'ensemble critique, i.e. le bord, soit d'entropie de Bowen strictement inférieure à l'entropie maximale, qui soit génératrice pour toute mesure maximale et qui induise un système symbolique ne contenant pas trop d'itinéraires "virtuels".

On a de plus la condition peu naturelle suivante. Les ensembles de la forme

$$A_0 \cap f^{-1}A_1 \cap \cdots \cap f^{-n}A_n \qquad (A_i \in P)$$

doivent être *connexes.*

Une classe simple où toutes ces conditions devraient se vérifier est celle des applications *affines par morceaux convexes*, i.e. des applications $f : M \to M$ avec M une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ admettant une partition finie en convexes sur chacun desquels f coïncide avec une application affine. La théorie développée ici devrait s'y généraliser sans trop de difficultés.

Dans ce cas, on cherchera à élargir cette classe, notamment à affaiblir la condition de connexité, qui n'est pas du tout naturelle. On pourra, dans ce cadre affine par morceaux, commencer par traiter le cas des morceaux non plus convexes, mais seulement à bord réguliers. Enfin, dans le cas général, on peut espérer que la

théorie de Yomdin fournisse des informations sur la façon dont les atomes de la partition se découpent et en particulier contrôle le nombre et la forme des "gros" morceaux. Mais ceci est une toute autre histoire.

D'autre part, on voit difficilement comment satisfaire à ces exigences pour des systèmes dynamiques ayant des "directions indifférentes ou contractantes". Peut-être y a-t-il moyen, dans le cas faiblement hyperbolique, de considérer une "projection oubliant" les directions contractantes.

Parmi les applications "faiblement dilatantes", un candidat intéressant, qui nous prouverait la conjecture ci-dessus sur un ouvert de l'ensemble des applications C^∞ d'un cube de dimension quelconque sur lui-même, est constitué par les petites perturbations de produits directs d'applications unidimensionnelles, C^∞ et d'entropies non-nulles. Il n'est pas difficile de voir qu'un tel produit est un point de semi-continuité inférieure pour l'entropie topologique. D'autre part l'entropie topologique de codimension 1 (7.14) est semi-continue supérieurement. On peut ainsi vérifier que la première partie du problème est réglée.

A défaut de résoudre cette difficulté dans ce cadre, on devrait y arriver en ne considérant que les perturbations qui sont des produits semi-directs:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, f_{x_1}(x_2), f_{x_1 x_2}(x_3), \ldots, f_{x_1 \ldots x_{n-1}} x_n)$$

où les applications $f_{x_1 \ldots x_s}(\cdot)$ sont à dérivée schwarzienne négative.

Remarque. Travaillant sur la construction d'une dynamique symbolique à partir de la structure hyperbolique faible de la théorie de Pesin, Krüger et Troubetzkoy ont annoncé le résultat suivant:

Théorème (T. Krüger, S. Troubetzkoy [27]). *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$ sur une variété différentiable compacte. Si Λ est l'ensemble de Pesin alors (Λ, f, μ) est conjugué à un système symbolique.*

En particulier, si $M \setminus \Lambda$ ne porte aucune mesure d'entropie maximale alors $\mathrm{Max}(f)$ *est dénombrable.*

On obtient alors, pour f un difféomorphisme, la conjecture 1a.

Dans l'intervalle, on a peut-être un résultat purement topologique:

Conjecture 2. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Si $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$ alors* $\mathrm{Max}(f)$ *est dénombrable.*

La décomposition spectrale de A.M. Blokh et son résultat sur la spécification (chap. 8, 11) entraîne que cette conjecture est équivalente à la suivante:

Conjecture 3. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue et permettant la spécification. Alors* $\mathrm{Max}(f)$ *est dénombrable.*

Rappelons que R. Bowen [6] a démontré que, pour une application continue sur un compact métrique, la spécification *et l'expansivité* entraînent $\mathrm{card}\,\mathrm{Max}(f) = 1$.

APPENDICE
Entropies

Nous rappelons quelques définitions.

Soit un système dynamique (X, f): un espace standard (métrique, séparable, complet) et une application mesurable (X, comme tous les espaces envisagés dans ce travail, est muni de la tribu des boréliens). On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures (sous-entendu: de probabilité) sur X, $\mathcal{M}_f(X)$ le sous-ensemble des mesures invariantes, $\mathcal{M}_f^{erg}(X)$ le sous-ensemble des mesures invariantes et ergodiques.

L'**entropie métrique** de $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ est définie [37, p. 232] de la manière suivante:

$$h_\mu(f) = \sup_P h_\mu(f, P) \text{ et } h_\mu(f, P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(P^{\vee n})$$

où P parcourt les partitions mesurables finies, $H_\mu(P) = -\sum_{A\in P} \mu(A) \log \mu(A)$ et $P^{\vee n} = \{A_0 \cap f^{-1}A_1 \cap \ldots f^{-n+1}A_{n-1} \neq \emptyset : A_0, \ldots, A_{n-1} \in P\}$.

Supposons maintenant que f est continue et X compact. Pour $n \geq 1$, on définit une nouvelle distance sur X:

$$d_n(x, y) = \max_{0\leq k<n} d(f^k x, f^k y)$$

On note $B_n(x, \epsilon)$ les boules correspondantes, dites (ϵ, n)-**boules**, et $B_\infty(x, \epsilon) = \bigcap_{n\geq 1} B_n(x, \epsilon)$.

L'**entropie topologique au sens de Bowen** d'une partie *compacte* $Y \subset X$ non nécessairement invariante par rapport à f se définit par

$$h_B(f, Y) = \lim_{\epsilon\to 0+} h_B(f, Y, \epsilon) \text{ avec } h_B(f, Y, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r(\epsilon, n, Y).$$

où $r(\epsilon, n, Y)$ est le nombre minimal de boules (ϵ, n) nécessaire pour couvrir Y [10]. L'entropie de Bowen d'une partie quelconque est le supremum des $h_B(f, K)$ où K parcourt les compacts inclus dans cette partie.

On appelle **entropie topologique**, sans plus de précision, $h_{\text{top}}(f) = h_B(f, X)$.

A. Katok [9] a montré qu'on peut exprimer d'une façon semblable l'entropie métrique d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ **ergodique**,

$$h_\mu(f) = \lim_{\epsilon\to 0+} h_\mu(f, \epsilon) \text{ avec } h_\mu(f, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r(\epsilon, n, \mu).$$

où $r(\epsilon, n, \mu)$ est le nombre minimal de (ϵ, n)-boules nécessaires pour couvrir une partie de μ-mesure au moins λ, avec $\lambda \in (0, 1)$ indépendant de n.

PREMIÈRE PARTIE

DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

Cette première partie se place dans un cadre très général. On considère des systèmes dynamiques partitionnés, c'est-à-dire munis d'une collection dénombrable partitionnant l'espace à un "ensemble critique" près. L'objectif est de construire des représentations symboliques, voire combinatoires, plus faciles à analyser.

Après avoir rappelé les définitions pertinentes, on construit d'abord un système symbolique d'alphabet dénombrable, puis une chaîne de Markov topologique. La première construction, basée sur la notion d'itinéraire par rapport à la partition, est plutôt standard, on insiste seulement sur les défauts de la représentation obtenue. On les relie à l'ensemble critique. La deuxième construction est une généralisation de l'extension markovienne introduite par F. Hofbauer dans le cas particulier de la dynamique symbolique des applications monotones par morceaux.

A la fin de cette première partie on sait comment représenter un système dynamique partitionné par une chaîne de Markov topologique et on sait que la correspondance est un isomorphisme si la partiton est génératrice et si on peut négliger les ensembles suivants: ensemble critique, itinéraires virtuels, partie non-markovienne.

CHAPITRE 1

CONSTRUCTION DE LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

Classiquement, si un système dynamique admet une partition génératrice et finie en compacts ouverts, alors ce système est homéomorphe à un sous-shift. La situation que nous considérons s'écarte de ce cadre idéal sur plusieurs points.

D'une part, la partition naturelle sera parfois infinie. On est donc amené à considérer des alphabets infinis et donc des systèmes symboliques à la place des sous-shifts, et des chaînes de Markov topologiques à la place des sous-shifts de type fini. Les deux premières sections rappellent les définitions pertinentes ainsi qu'un critère permettant de distinguer les chaînes de Markov topologiques parmi les systèmes symboliques. Ce critère est simple mais fondamental pour la suite —il introduit naturellement la notion de "futurs".

D'autre part, les systèmes que nous étudierons n'auront de partition naturelle qu'à condition de négliger un "ensemble critique". Cet ensemble critique est formé des points ambigus, situés sur le "bord" de la partition naturelle. On est ainsi amené à la notion de système partitionné introduite dans la troisième section. On donne enfin la définition de la dynamique symbolique, c'est-à-dire du système symbolique associé au système partitionné considéré. On constate la présence possible dans ce système symbolique d'itinéraires virtuels qui ne sont les itinéraires d'aucun point du système partitionné. On relie enfin ces itinéraires virtuels à l'ensemble critique.

Cette étude dégage les problèmes suivants:

Problème I. La partition est-elle génératrice?

Problème II. Peut-on négliger l'ensemble critique?

Problème III. Peut-on négliger les itinéraires virtuels?

1 Systèmes symboliques

1.1. Définitions.

(1.1) Définition. *On appelle* **alphabet** *un ensemble A, dénombrable (peut-être fini), muni de la* topologie discrète *et si nécessaire de la distance $\delta(a,b) = 0$ si $a = b$, $\delta(a,b) = 1$ sinon.*

On appelle **shift unilatéral complet** *sur l'alphabet A l'application:*

$$\sigma : \Sigma_+(A) \longrightarrow \Sigma_+(A)$$

avec $\Sigma_+(A) = A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies unilatérales muni de la topologie produit et $\sigma(a) = b$ tel que $b_i = a_{i+1}$ $(i \geq 0)$. On munit $\Sigma_+(A)$ de la distance dite discrète:

$$d_1(x,y) = \sum_{k\geq 0} 2^{-|k|}\delta(x_k, y_k).$$

Le **shift bilatéral complet** *est l'application:*

$$\sigma : \Sigma(A) \longrightarrow \Sigma(A)$$

définie par la même formule mais avec $\Sigma(A) = A^{\mathbb{Z}}$ *et* $i \in \mathbb{Z}$. *Les* **mots** *sur* A *sont les suites* $w = (w_i)_{0 \le i < n} \in A^n$ *de longueur* $0 \le n \le \infty$, *notée* $|w| = n$. *L'ensemble des mots finis est noté:*

$$\Sigma_*(A) = \bigcup_{n \ge 0} A^n$$

On appelle **concaténation** *de deux mots finis* u, v *ou d'un mot fini* u *et d'une suite infinie unilatérale* v *le mot fini ou infini:*

$$u * v = (w_n)_{0 \le n < |u|+|v|} \qquad \text{avec } w_n = \begin{cases} u_n & 0 \le n < |u| \\ v_{n-|u|} & |u| \le n < |u| + |v| \end{cases}$$

On note u^{*n} *la concaténation de* n *copies de* $u \in \Sigma_*(A)$. *On appelle ensemble des* **facteurs finis** *d'un mot fini ou infini* $w \in \Sigma_*(A) \cup \Sigma_+(A)$*:*

$$F_*(w) = \{w_i \dots w_j \ne w : 0 \le i \le j < |w|\}$$

Au besoin, on sous-entendra l'identification des suites qui ne diffèrent d'un mot que par une translation des indices: si $-\infty < n \le m \le \infty$, $(x_i)_{n \le i < m}$ s'identifie au mot $(x_{i+n})_{0 \le i < m-n}$.

On écrira $w_0 \dots w_{n-1}$ à la place de $w_0 * \cdots * w_{n-1} = (w_k)_{0 \le k < n}$.

Dans la suite de ce chapitre, A désigne un alphabet.

(1.2) Définition. *On appelle* **système symbolique** *(unilatéral) toute partie* S *de* $\Sigma_+(A)$ *telle que*

(1) S *est fermée (peut-être* non-compacte*).*

(2) S *est une* **partie invariante***:* $\sigma(S) \subset S$.

on munit S *de la restriction* $\sigma : S \to S$.

On réserve le terme de **sous-shift** aux systèmes symboliques *compacts*.

On ne considère que le cas unilatéral, les généralisations au cas bilatéral étant évidentes.

1.2. Description par les mots finis.

Soit S un système symbolique. Les mots finis **admissibles sur** S sont les éléments de:

$$\Sigma_*(S) = \bigcup_{u \in S} F_*(u) \subset \Sigma_*(A)$$

On note $\Sigma_n(S) = \Sigma_*(S) \cap A^n$ le sous-ensembles des mots admissibles de longueur n.

C'est parce que S est *fermé et invariant* dans $A^{\mathbb{N}}$ que l'**ensemble exclu** (dénombrable par nature):

$$X(S) = \{w \in \Sigma_*(A) : w \notin \Sigma_*(S) \text{ et } F_*(w) \subset \Sigma_*(S)\}$$

détermine S —l'hypothèse d'invariance pourrait être supprimée par l'introduction d'un symbole spécial, marquant la position zéro. Plus précisément, on a:

$$S = \{u \in A^{\mathbb{N}} : F_*(u) \cap X(S) = \emptyset\}$$

Remarquons que $X(S)$ est le plus petit ensemble cette propriété. Distinguons un cas (relativement) simple et fondamental (pour la suite):

(1.3) Définition. *On dit qu'un système symbolique S est un* **système markovien**, *si la longueur des mots de l'ensemble exclu $X(S)$ est* bornée. *La longueur maximale est appelée* **ordre** *du système markovien.*

Soulignons que, l'alphabet pouvant être infini, le fait que S soit markovien n'implique pas que $X(S)$ soit fini.

La valeur exacte de l'ordre n'a pas grande importance:

(1.4) Lemme (W. Parry [36]). *Quitte à prendre l'image de S par l'homéomorphisme:*

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & (A^r)^{\mathbb{N}} \\ (u_i)_{i\geq 0} & \longmapsto & (u_i u_{i+1} \dots u_{i+r-1})_{i\geq 0} \end{array}$$

(avec $r+1$ l'ordre de S), on peut supposer que S est d'ordre 2 (peut-être 0 ou 1).

1.3. Facteurs, extensions et extensions naturelles.

Rappelons la définition suivante:

(1.5) Définition. *Si (X,f) et (Y,g) sont deux espaces topologiques munis chacun d'une application continue et si on a une application $\pi : X \to Y$ alors on dit que (X,f) est une* **extension topologique** *de (Y,g) ou que (Y,g) est un* **facteur topologique** *de (X,f) ou encore que π est une semi-conjugaison topologique (ce que l'on note: $\pi : (X,f) \to (Y,g)$) ssi:*

1) on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

2) π est une surjection continue.

Si, de plus, π est un homéomorphisme, on dit que (X,f) et (Y,g) sont **topologiquement conjugués**.

On définit les notions équivalentes dans la catégorie des systèmes mesurables de façon évidente.

Remarque. Si S_1 et S_2 sont des systèmes symboliques munis de la distance discrète d_1 introduite plus haut et si l'application $\pi : S_1 \to S_2$ est *uniformément continue*, alors π est nécessairement du type suivant:

(1.6) Définition. *Soit S_1 et S_2 deux systèmes symboliques unilatéraux d'alphabet respectifs $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$.*

On dit qu'une application d'un système symbolique sur un autre $\pi : S_1 \to S_2$ est une **application par bloc** *s'il existe $r \geq 1$ et une application $\pi_r : \mathcal{A}_1^r \to \mathcal{A}_2$ tels que:*

$$\pi(a) = (\pi(a_n \dots a_{n+r-1}))_{n\geq 0} \qquad (a = (a_n)_{n\geq 0})$$

*r est appelé l'***ordre** *de π; $\pi_r : \mathcal{A}_1^r \to \mathcal{A}_2$ est l'application d'alphabets induisant π.*

Dans le cas bilatéral l'application d'alphabet est de la forme $\pi_r : \mathcal{A}_1^{2r-1} \to \mathcal{A}_2$ *et* $\pi(a) = (\pi(a_{n-r+1} \cdots a_{n+r-1}))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Remarque. Si on considère des systèmes symboliques non compacts, il existe des conjugaisons topologiques qui ne sont *pas* des applications par bloc. Considérons S_1 formé des suites:

$$\cdots n_p \overbrace{0\cdots 0}^{n_p} n_{p+1} \overbrace{0\cdots 0}^{n_{p+1}} \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$$

(où $(n_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une suite (bilatérale) d'entiers strictement positifs tels que $|n_p - n_{p+1}| \leq 1$) et S_2 formé des suites:

$$\cdots \overbrace{0\cdots 0}^{n_p} n_p \overbrace{0\cdots 0}^{n_{p+1}} n_{p+1} \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$$

S_1 et S_2 sont clairement conjugués par l'involution définie par les "substitutions":

$$n\overbrace{0\cdots 0}^{n} \mapsto \overbrace{0\cdots 0}^{n} n$$

La condition sur la suite $(n_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ assure la continuité de cette conjugaison. Mais cette application n'est pas par bloc.

La notion d'**extension naturelle** permet de définir une bijection entre systèmes symboliques unilatéraux et systèmes symboliques bilatéraux. Soit S_+ un système symbolique unilatéral. On lui associe son extension naturelle, le système symbolique bilatéral:

$$S = \{u \in A^{\mathbb{Z}} : \forall p \in \mathbb{Z}\ u_p u_{p+1} \cdots \in S_+\}$$

On a une semi-conjugaison topologique $p : S \to S_+$ définie par $p(u) = u_0 u_1 \ldots$. p est en général non-injective. Mais $p(u) = p(v)$ implique $\lim_{n\to\infty} d_1(\sigma^n(u), \sigma^n(v)) = 0$.

Il est bien connu que p induit une bijection entre les mesures de probabilité invariantes par respectivement $\sigma|S$ et $\sigma|S_+$ et que cette bijection préserve en particulier l'ergodicité et l'entropie [37, p. 13].

2 Chaînes de Markov topologiques

On commence par donner une caractérisation alternative des systèmes markoviens, permettant d'introduire naturellement la notion de futur, puis on rappelle le vocabulaire de base relatif aux chaînes de Markov topologiques ou systèmes markoviens d'ordre 2.

2.1. Futurs.

Par rapport à l'ensemble exclu, notion globale, la notion suivante offre une description locale et plus "dynamique" de la structure d'un système symbolique:

(1.7) Définition. *Soit S un système symbolique unilatéral.*

On appelle **futur** *(dans S) d'un mot fini $w \in \Sigma_*(S)$ l'ensemble noté* $\mathrm{fut}_S(w)$ *des suites infinies $u \in \Sigma_+(A)$ qui peuvent survenir après ce mot, c'est-à-dire telles que $w * u \in S$.*

On omet le plus souvent l'indice S.

Du point de vue du système dynamique, si on note:

$$<w>_S = \{u \in S : u_i = w_i\,(0 \leq i \leq n-1)\}$$

le **cylindre** (dans S) défini par le mot w de longueur n, le futur est simplement:

$$\mathrm{fut}(w) = f^{n-1}<w_0 \dots w_{n-1}>_S \subset <w_{n-1}>_S$$

La caractérisation suivante est évidente, mais sera à la base de la construction du diagramme d'Hofbauer au chapitre 2.

(1.8) Lemme. *Un système symbolique S est markovien d'ordre r ssi:*

$$\mathrm{fut}(v_{-n}v_{-n+1}\dots v_0) = \mathrm{fut}(w_{-m}w_{-m+1}\dots w_0)$$

dès que $v_{-n}\dots v_0, w_{-m}\dots w_0 \in \Sigma_*(S)$, $n, m \geq r-1$ et $v_{-i} = w_{-i}$ pour $0 \leq i \leq r-1$.

Autrement dit, un système est markovien d'ordre r si le futur d'un mot est déterminé par ses r derniers symboles.

2.2. Vocabulaire.

On va utiliser la généralisation suivante des sous-shifts de type fini (ils correspondent au cas où l'alphabet A est fini):

(1.9) Définition. *Soit A un alphabet et T un graphe orienté défini sur cet alphabet. On suppose le graphe T* **simple** *dans le sens où si $a, b \in A$, il existe au plus une flèche de a vers b. On peut donc voir le graphe comme une matrice (dont l'ensemble des indices peut être infini dénombrable):*

$$T : A \times A \longrightarrow \{0,1\}$$

avec $T(a,b) = 1$ ssi la flèche $a \to b$ est une flèche de T.

Le graphe simple T définit un système symbolique unilatéral:

$$\Sigma_+(T) = \{u \in A^{\mathbb{N}} : \forall i \geq 0 \;\; T(u_i, u_{i+1}) = 1\}.$$

On a également un système symbolique bilatéral $\Sigma(T)$ avec une définition évidente. Ces systèmes sont appelés **chaînes de Markov**, *on précise parfois "dénombrables et topologiques", par opposition aux chaînes de Markov classiques (probabilistes)).*

L'intérêt de la forme matricielle provient de la valeur des éléments de la matrice itérée n fois:

$$(*) \qquad T^n(a,b) = \sum_{a_1,\dots,a_{n-1}} T(a,a_1)T(a_1,a_2)\dots T(a_{n-1},b)$$

est le nombre de chemins de longueur n joignant a à b.

Le lien avec les systèmes symboliques markoviens est clair:

(1.10) Lemme. *Tout graphe simple T définit un système symbolique markovien d'ordre 2. Réciproquement, tout système symbolique markovien d'ordre 2, S, se laisse définir par le graphe simple:*

$$a \to b \iff <ab>_S \neq \emptyset$$

pour tous $a, b \in A$.

On appelle **successeurs** de $a \in A$ les $b \in A$ tels que $a \to b$. On note $\mathrm{succ}_T(a)$ (ou simplement $\mathrm{succ}(a)$) l'ensemble des successeurs de A.

On appelle **alphabet effectif** de T l'ensemble des éléments de l'alphabet A qui apparaissent dans S, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A desquels est issu au moins un chemin infini.

Si $B \subset A$, on note $T|B : B \times B \to \{0,1\}$ la restriction du graphe T au sous-alphabet B. Le plus souvent on écrira simplement B à la place de $T|B$. En particulier, si $B \subset A$ avec A un alphabet support d'un graphe, alors $\Sigma_+(B)$ est toujours une abréviation pour $\Sigma_+(T|B)$ et non pas le shift unilatéral complet sur B.

Le graphe T définit un *pré-ordre* sur A: $a \preceq b$ (a **précède** b) ssi $a = b$ ou s'il existe un **chemin** de longueur $n \geq 0$ sur T joignant a à b c'est-à-dire un mot fini (de longueur $n+1$) $w_0 \dots w_n \in \Sigma_*(S)$ tel que $w_0 = a$ et $w_n = b$. On muni A de la relation d'équivalence associée au pré-ordre ($a \sim b$ ssi $a \preceq b$ et $b \preceq a$).

On appelle partie **fortement connexe** toute partie $B \subset A$ tels que si $a, b \in A$ alors a peut être joint à b et b peut être joint à a.

On appelle **partie irréductible** toute partie fortement connexe maximale pour l'inclusion. Toute partie irréductible est une classe d'équivalence pour $\sim$. L'inverse n'est pas toujours vrai. Une classe d'équivalence B qui n'est pas une partie irréductible est dite **complètement triviale**. C'est le cas exactement quand $\Sigma_+(B) = \emptyset$: $B = \{b\}$ et $T(b,b) = 0$. Une classe d'équivalence (ou une partie irréductible) est dite **triviale** si elle est réduite à une boucle (i.e. $\Sigma_+(B)$ est finie).

T est dit **irréductible** si A est une partie irréductible (et donc la seule partie irréductible). Remarquons que $(\Sigma_+(T), \sigma)$ est topologiquement transitif ssi le graphe T est irréductible.

On note $\delta_T(a,b)$ la longueur minimale d'un chemin joignant a à b. Un chemin joignant a à b de longueur $\delta_T(a,b)$ est dit **chemin minimal**. On définit une distance (si T est irréductible) en posant $d_T(a,b) = \delta_T(a,b) + \delta_T(b,a)$.

On appelle **période d'un graphe** irréductible T le nombre:

$$p(T) = \mathrm{pgcd}\{n \geq 1 : T^n(a,a) \neq 0\} < \infty$$

Comme dans le cas d'un graphe fini on montre que $p(T)$ ne dépend pas de a et qu'il existe une partition $\{A_0, \dots, A_{p(T)-1}\}$ de A telle que, si $a \in A_i$, $b \in A_j$, il existe un chemin de a à b de longueur n seulement si $n \equiv j - i \mod p(T)$ et il en existe de longueur $kp(T) + j - i$ dès que k est assez grand ($k \geq k(a,b)$).

La classe des systèmes symboliques markoviens a le "défaut" suivant:

Un facteur d'un système symbolique markovien (même compact) n'est pas nécessairement markovien. C'est pour cette raison qu'a été introduite la notion suivante:

(1.11) Définition (B. Weiss [50]). *Un système symbolique S sur un alphabet fini A est* **sofique** *si l'ensemble exclu se laisse décrire de la façon suivante:*

$$X(S) = \{w_0 \dots w_n \in \Sigma_*(A) : g(w_0)g(w_1)\dots g(w_n) = 0\}$$

avec G un semi-groupe fini, $g : A \to G \setminus \{0\}$ et $\{0, g(a) : a \in A\}$ engendre G.

En effet,

(1.12) Proposition (B. Weiss [50]). *Un système symbolique compact est sofique ssi c'est un facteur d'un système symbolique compact markovien d'ordre 2 (i.e. un sous-shift de type fini).*

On verra (section 4) une méthode pour construire l'extension markovienne d'un système sofique.

2.3. Remarque sur la topologie.

$\Sigma_+(T)$ n'est pas en général compact. Plus précisément:

(1.13) Définition. *On dit que le graphe T sur l'alphabet A est* **localement fini** *si, pour tout $a \in A$, $\mathrm{succ}_T(a)$ est un ensemble fini (on peut avoir une infinité de b tels que $b \to a$).*

Dire que T est localement fini n'implique pas que le nombre d'antécédents de tout symbole $a \in A$ est fini.

(1.14) Lemme. *Soit T un graphe simple, irréductible non-trivial, d'alphabet effectif A. On munit $\Sigma_+(T)$ de la distance discrète:*

$$d_1(x, y) = \sum_{k \geq 0} 2^{-|k|}\delta(x_k, y_k)$$

avec $\delta(a, b) = 0$ si $a = b$, 1 sinon.

$\Sigma_+(T)$ est un **espace standard** *(espace métrique, complet, séparable).*

$\Sigma_+(T)$ est compact ssi A est fini.

$\Sigma_+(T)$ est σ-compact ssi T est localement fini.

Preuve. $\Sigma_+(T)$ est fermé dans $A^{\mathbb{N}}$. La première assertion est donc claire. Si A est fini alors $A^{\mathbb{N}}$ est compact et donc $\Sigma_+(T)$ aussi. Supposons l'alphabet A infini. $(<a>)_{a \in A}$ est un recouvrement infini par des ouverts deux-à-deux disjoints: $\Sigma_+(T)$ n'est pas compact.

Notons $\pi_n : (u_i)_{i \geq 0} \mapsto u_n$. Une partie $K \subset A^{\mathbb{N}}$ est compacte ssi, pour tout $n \geq 0$, $\pi_n(K)$ est fini. Mais tout ouvert non-vide de $\Sigma_+(T)$ contient un cylindre $<w_0 \dots w_{r-1}>$ donc son image par π_n contient tous les points extrémités d'un chemin issu de w_{r-1} et de longueur $n - r + 1$. L'irréductibilité de T implique, pour tout ouvert non-vide U, que:

$$\mathrm{card}\, \pi_n(U) < \infty \ (\forall n \geq 0) \iff T \text{ localement fini.}$$

Si T est localement fini, alors $(<a>)_{a \in A}$ est une collection dénombrable de compacts recouvrant $\Sigma_+(T)$ qui est bien σ-compact. Plaçons-nous dans le cas contraire:

Tout compact est alors d'intérieur vide. $\Sigma_+(T)$, espace métrique complet, est un espace de Baire. Donc une union dénombrable de compacts est d'intérieur vide et ne peut être égale à $\Sigma_+(T)$, qui n'est donc pas σ-compact. □

3 Systèmes partitionnés

3.1. Définitions.

Les systèmes dynamiques pour lesquels on introduit le plus facilement une dynamique symbolique sont les systèmes du type suivant:

(1.15) Définition. *On appelle* **système inversible par morceaux** *un triplet (Y, g, Q) formé d'une application g d'un espace standard (métrique, complet, séparable) Y dans lui-même, cet espace étant muni d'une partition au sens ensembliste, notée Q et supposée dénombrable (peut-être finie) et formée de fermés ouverts non-vides.*

On suppose que Q est compatible avec g dans le sens suivant: pour tout $A \in Q$, la restriction $g : A \to g(A)$ est un homéomorphisme et $g(A)$ est fermé.

(Y, g, Q) est dit **système inversible par morceaux compact** *si, de plus, Q est fini et si ses éléments sont compacts.*

Mais le plus souvent on se trouve dans le cadre suivant:

(1.16) Définition. *On appelle* **système partitionné** *un triplet (X, f, P) formé d'une application f d'un espace standard X dans lui-même, cet espace étant muni d'une collection P dénombrable (peut-être finie) d'ouverts non-vides A avec les propriétés suivantes:*

(1) *$\bar{A}$ est compact et ne rencontre pas d'élément de P autre que A.*
(2) *$A = \operatorname{int} \bar{A}$*
(3) *P est compatible avec f dans le sens suivant:*
pour tout $A \in P$, $f(A)$ est ouvert et il existe un homéomorphisme:

$$f_A : \bar{A} \longrightarrow \overline{f(A)}$$

tel que f et f_A coïncident sur A.

On munit la collection P de la topologie discrète. On appelle **ensemble critique** *l'ensemble:*

$$C(f) = X \setminus \bigcup_{A \in P} A.$$

L'hypothèse (1) de compacité relative pour les éléments de P est destinée à faciliter l'analyse des "itinéraires virtuels" (cf. (1.19), (9.3)).

Le sens de la condition (3) est de "préserver" les *frontières* (au sens de la topologie de X):

$$\partial f_A(S) \subset f_A(\partial S) \cup \partial f(A), \quad \partial f_A^{-1}(S) \subset \partial A \cup f_A^{-1}(\partial S),$$

S étant un ensemble quelconque.

Remarquons que P collection dénombrable d'ouverts non-vides disjoints n'est pas une partition au sens ensembliste mais seulement modulo $C(f)$. Aussi le problème suivant est-il posé:

Problème I. Peut-on négliger l'ensemble suivant?

$$C^-(f) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k} C(f)$$

Un point de $X \setminus C^-(f)$ est dit **régulier**. Rappelons que $P^{\vee n} = \{A_0 \cap \cdots \cap f^{-n+1}A_{n-1} \neq \emptyset : A_0, \ldots, A_{n-1} \in P\}$.

(1.17) Définition. *On note, pour $A_0 \ldots A_n \in P^{n+1}$ (mot fini sur l'alphabet P),*

$$[A_0 \ldots A_n] = A_0 \cap f^{-1}A_1 \cap \cdots \cap f^{-n}A_n.$$

Si $x \in [A_0 \ldots A_n]$ alors on note $P^{\vee n}(x) = [A_0 \ldots A_{n-1}]$. Si $x \notin C^-(f)$, on appelle **atome** *de P contenant x l'ensemble:*

$$P^{\vee\infty}(x) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{P^{\vee n}(x)}.$$

Si, pour tout $x \in X \setminus C^-(f)$, l'atome contenant x est réduit à x, on dit que la partition P est **topologiquement génératrice.**

On dira simplement que P est (simplement) **génératrice** *si $\bigcap_{n\geq 1} P^{\vee n}(x) = \{x\}$ pour tout $x \in X \setminus C^-(f)$.*

Si l'une des ces deux situations se produit pour μ-presque tout x avec μ une mesure telle que $\mu(C^-(f)) = 0$, on dira que P est topologiquement ou simplement génératrice **par rapport à** *μ.*

Les points réguliers peuvent être repérés par les éléments de P traversés par leur orbite:

(1.18) Définition. *Soit (X, f, P) un système partitionné.*
*Si $x \in [A_0 \ldots A_{n-1}]$ $(n \geq 1)$ on appelle n-***itinéraire** *de x la suite finie:*

$$\Gamma_n(x) = A_0 \ldots A_{n-1} \in P^n$$

Si $x \in \bigcap_{n\geq 0}[A_0 \ldots A_n]$ on appelle **itinéraire (infini)** *de x, la suite infinie:*

$$\Gamma(x) = A_0A_1 \cdots \in P^{\mathbb{N}}.$$

Pour $n \geq 1$, Γ_n est définie sur $X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}C(f)$, Γ sur $X \setminus C^-(f)$.

Voyons comment ce codage faisant correspondre aux points réguliers leur itinéraire permet de définir une dynamique symbolique pour (X, f, P). On a tout d'abord:

(1.19) Définition. *On note $\Sigma'_+(f, P)$ l'ensemble des itinéraires infinis (nécessairement de points réguliers):*

$$\Sigma'_+(f, P) = \{\Gamma(x) \in P^{\mathbb{N}} : x \in X \setminus C^-(f)\}$$

et on note $\Sigma_*(f, P)$ l'ensemble des mots finis apparaissant dans ces suites infinies:

$$\Sigma_*(f, P) = \{\Gamma_n(x) : n \geq 1 \text{ et } x \in X \setminus C^-(f)\}$$

Remarquons que, pour un système inversible par morceaux, ces définitions s'appliquent en convenant que l'ensemble critique est alors vide.

On peut maintenant donner la:

(1.20) Définition. *Le* **système symbolique associé à** (X, f, P) *est défini comme le plus petit système symbolique contenant l'ensemble des itinéraires infinis de ce système, i.e.:*

$$\Sigma_+(f,P) = \overline{\Sigma'_+(f,P)} \subset P^{\mathbb{N}}$$

la fermeture étant prise par rapport à la topologie discrète sur P.

Rappelons que $A^k \in P^{\mathbb{N}}$ tend vers $A \in P^{\mathbb{N}}$ ssi, pour tout $n \geq 0$, il existe $k_0 < \infty$, tel que pour $k \geq k_0$, $A_i^k = A_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

On est ainsi ramené à un système *fermé* donc déterminé par ses mots finis. Par définition de la topologie discrète, les mots finis de $\Sigma_+(f,P)$ sont exactement ceux de $\Sigma'_+(f,P)$ et on a:

$$\Sigma_+(f,P) = \{A_0A_1\cdots \in P^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0\ A_0\dots A_n \in \Sigma_*(f,P)\}.$$

Remarque. Cette fermeture topologique a un coût: l'apparition de suites ne correspondant (du moins par l'intermédiaire de Γ) à aucune orbite du système initial. En choisissant la topologie discrète on a minimisé ce "coût".

3.2. Itinéraires virtuels.

On appelle les éléments de $\Sigma_+(f,P) \setminus \Sigma'_+(f,P)$ les **itinéraires virtuels**. Les (vrais) itinéraires, i.e. les éléments de $\Sigma'_+(f,P)$, seront parfois qualifiés de **réels** si nécessaire.

Le lemme suivant montre qu'en un certain sens, les itinéraires virtuels "correspondent" aux points de $\Delta C(f)$, le bord de la partition (défini ci-dessous), sans que cette correspondance ne soit, en général, bijective.

(1.21) Lemme. *Si* $(A_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_+(f,P) \setminus \Sigma'_+(f,P)$ *est un* **itinéraire virtuel** *alors:*

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\dots A_n] \setminus C^-(f)} \subset \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}\Delta C(f) \tag{2}$$

avec $\Delta C(f) = \bigcup_{A\in P} \partial A \subset C(f)$.

Dans chaque classe de systèmes il faudra préciser la correspondance ci-dessus pour voir si la question suivante peut être résolue positivement:

> **Problème II.** Les itinéraires virtuels $\Sigma_+(f,P) \setminus \Sigma'_+(f,P)$ sont-ils négligeables ?

Preuve (du lemme). Si $A_0A_1\cdots \in \Sigma_+(f,P)$ alors $A_0\dots A_n \in \Sigma_*(f,P)$ pour tout $n \geq 0$, en particulier $[A_0\dots A_n] \setminus C^-(f) \neq \emptyset$. Mais ce dernier ensemble est une partie de A_0 et A_0 est relativement compacte. Les $\overline{[A_0\dots A_n] \setminus C^-(f)}$ forment donc une famille de compacts non-vides emboîtés. On a donc:

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\dots A_n] \setminus C^-(f)}$$

Si, de plus, $A_0A_1\cdots \notin \Sigma'_+(f,P)$, c'est que $\bigcap_{n\geq 0}[A_0\dots A_n] = \emptyset$: pour tout point x de l'intersection ci-dessus, il existe $k \geq 0$ tel que $f^k(x) \notin A_k$. Fixons x et

prenons k minimal: $x \in [A_0 \dots A_{k-1}] \cap \overline{[A_0 \dots A_k]}$. Or $f^k | [A_0 \dots A_{k-1}]$ est un homéomorphisme donc $f^k(x) \in \overline{A_k} \setminus A_k = \partial A_k$. On a montré que $x \in f^{-k}(\partial A_k)$. □

Remarquons que les suites de $\Sigma_+(f,P)$ peuvent toujours être réalisées par un système (qui n'est pas celui de départ en général, sauf si celui-ci était inversible par morceaux):

(1.22) Remarque. *Il existe un système inversible par morceaux (Y,g,Q) et une surjection continue $s : Y \to X$ telle que*

(1) $s \circ g = f \circ s$ *sur* $Y \setminus s^{-1}C^-(f)$.
(2) $q : B \in Q \mapsto A \in P$ *définie par* $s(B) = A$ *modulo* $C^-(f)$ *est une surjection de* Q *sur* P.
(3) $\Sigma_+(f,P) = q(\Sigma'_+(g,Q))$.

On construit (Y,g,Q) de la façon suivante:

$$Y = \mathrm{adh}_{X \times P^{\mathbb{N}}}\{(x, A_0A_1 \dots) \in X \times P^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0\ f^n x \in A_n\}$$
$$g(x, A_0A_1 \dots) = (f_{A_0}x, A_1A_2 \dots)$$
$$Q = \{Q(A) : A \in P\} \qquad \text{avec } Q(A) = \{(x, A_0A_1 \dots) \in Y : A_0 = A\}$$

s est simplement la projection sur la première coordonnée: $(x, A_0 \dots) \mapsto x$.

On dit que (Y,g,Q) est la **régularisation** *du système partitionné (X,f,P).*

Preuve de la remarque. L'application g est bien définie: s'il existe une suite de $(x^n, A_0^n A_1^n \dots)$, tels que $f^k x^n \in A_k^n$ et tendant vers $(x, A_0A_1 \dots)$ alors $x \in \overline{A_0}$, donc f_{A_0} est bien définie et continue au voisinage de x: $(fx^n, A_1^n A_2^n \dots)$ tend vers $g(x)$ et comme $f^{k+1}x^n \in A_{k+1}^n$ on a bien montré que $g(x) \in Y$.

Chaque élément $Q(A)$ $(A \in P)$ de Q est un fermé ouvert comme image réciproque du fermé ouvert $\{A\}$ de P (ce n'est pas nécessairement un compact). $g(Q(A))$ est fermé: soit $(y^n, B^n) \in g(Q(A))$ convergeant vers $(y,B) \in Y$. Posons $x^n = f_A^{-1} y^n$. Nécessairement $(x^n, A * B^n) \in Q(A)$ converge vers $(x, A * B)$ (f_A est un homéomorphisme; $P^{\mathbb{N}}$ est muni du produit des topologies discrètes). $Q(A)$ est fermé donc $(x, A*B) \in Q(A)$ et $(y,B) = g(x, A*B) \in g(Q(A))$ qui est donc fermé. Enfin $g : Q(A) \to g(Q(A))$ est un homéomorphisme comme $f_A : \bar{A} \to \overline{f(A)}$. (Y,g,Q) est bien un système inversible par morceaux.

$A_0A_1 \cdots \in \Sigma_+(f,P)$ est équivalent à l'existence d'une suite de points $x^n \in X \setminus C^-(f)$ déterminant chacun un itinéraire $A_0^n A_1^n \cdots \in \Sigma'_+(f,P)$ avec la propriété $A_0^n \dots A_n^n = A_0 \dots A_n$, pour tout $n \geq 0$. A_0 étant relativement compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que x^n tend vers un $x \in X$: $(x, A_0A_1 \dots) \in Y$ et a pour itinéraire $Q(A_0)Q(A_1) \dots$. La réciproque est claire: $\Sigma_+(g,Q) = \Sigma_+(f,P)$. □

CHAPITRE 2

EXTENSIONS MARKOVIENNES

Ce chapitre présente la technique d'*extension markovienne* introduite par F. Hofbauer dans le cas particulier des applications monotones par morceaux [15,16] à partir du résultat de Y. Takahashi [44] spécifique aux applications $x \mapsto \beta x \mod 1$ ($\beta > 1$). On construit d'abord une chaîne de Markov topologique qui est une extension de la dynamique symbolique $\Sigma_+(f,P)$ du système étudié, puis on étudie le lien avec le système initial.

Remarquons qu'on traitera le plus souvent dans ce chapitre d'un système symbolique unilatéral S_+ *quelconque*: à ce niveau de généralité il est inutile de se restreindre à $S_+ = \Sigma_+(f,P)$.

On commence par construire des chaînes de Markov se projetant avec de "bonnes propriétés" sur le système symbolique considéré. On utilise pour cela simplement le critère en termes de futurs donné au chapitre précédent. On obtient notamment l'extension markovienne définie par F. Hofbauer.

En général les chaînes de Markov obtenues précédemment sont beaucoup plus grosses que le système initial. Il est d'ailleurs facile de voir que, dans bien des cas, leur dynamique est triviale dans le sens où tous leurs points sont errants. C'est F. Hofbauer qui a démontré que, dans le cas de la dynamique symbolique des applications monotones par morceaux, on avait un *isomorphisme mesurable* entre la chaîne de Markov et le système symbolique initial à condition de passer aux extensions naturelles et de mettre de côté une partie (dite non-markovienne) de ce système symbolique initial.

On montre ici qu'à condition de considérer une bonne extension markovienne, dite *spéciale*, (qui n'est pas l'extension de Hofbauer), ce résultat d'isomorphisme est valable abstraitement, i.e. pour *tout système symbolique*. De plus la démonstration en est clarifiée.

Bien évidemment ceci n'a de sens que si l'on peut contrôler cette partie non-markovienne. On est donc amené à poser le problème suivant:

Problème IV. Peut-on négliger la partie non-markovienne?

Ce problème sera traité ultérieurement dans le cas de la dynamique symbolique d'un système partitionné vérifiant une hypothèse de connexité (chapitre 6).

En appendice on donne quelques faits illustrant les notions et résultats obtenus dans ce chapitre, mais qui ne seront pas utilisés par la suite.

D'abord (section 2.A), on caractérise l'extension markovienne de F. Hofbauer comme l'extension markovienne "la plus petite" telle que la projection jouisse de "bonnes propriétés combinatoires".

Ensuite (section 2.B), on illustre la différence entre l'extension markovienne de F. Hofbauer et celle que nous avons été amenés à introduire. Pour cela, on traite le cas des systèmes sofiques et on donne des exemples. On constate en particulier

que l'extension markovienne de Hofbauer ne vérifie pas, en général, le théorème d'isomorphisme.

Puis (section 2.C), on donne une condition suffisante pour que l'extension markovienne de Hofbauer jouisse de la propriété de relèvement des mesures concentrées en dehors de la partie non-markoienne. Ceci repose sur l'utilisation d'une propriété dite d'"injectivité éventuelle" de la projection définie par l'extension et constitue en fait la partie "unicité" d'un théorème de G. Keller.

On fournit enfin (section 2.D) un élément de réponse au problème IV ci-dessus dans le cadre des systèmes symboliques généraux: on donne une réponse négative dès qu'il existe un facteur topologique non-trivial d'entropie nulle.

1 Extensions markoviennes d'un système symbolique

Notre présentation est inspirée de l'article de S. Newhouse [34] sur la théorie de F. Hofbauer dans le cas monotone par morceaux. On considère un système symbolique unilatéral S_+ d'alphabet $\mathcal{A}$ (en pratique ce sera la dynamique symbolique $\Sigma_+(f,P)$ d'un système partitionné). Pour étudier S_+ on cherche à le représenter par une chaîne de Markov $\Sigma_+(G)$ qui soit une extension uniforme, i.e. telle qu'il existe une application $G \to \mathcal{A}$ induisant une semi-conjugaison:

$$(\Sigma_+(G),\sigma) \to (S_+,\sigma).$$

Dans les bons cas, le graphe G "au-dessus" de S_+ contient beaucoup d'informations aisément exploitables sur S_+. On appelle un tel graphe un **diagramme de Hofbauer** de S_+.

Pour ce faire, on commence par construire une extension, l'**extension markovienne formelle**. On remarque que sa dynamique est triviale. Pour retrouver des propriétés de récurrence il est naturel de procéder à des identifications. On examine celles qu'il est possible d'effectuer sans perdre le caractère markovien. On aboutit ainsi naturellement à l'extension markovienne introduite par F. Hofbauer comme extension markovienne "minimale" .

1.1. Extension markovienne formelle. Il existe un procédé trivial pour obtenir une extension markovienne d'un système symbolique quelconque S_+. On considère, sur l'alphabet constitué des mots finis $\Sigma_*(S_+)$, le système symbolique S_+^* formé par les suites:

$$(v_0 \dots v_{n_0})(v_0 \dots v_{n_0+1})(v_0 \dots v_{n_0+2}) \cdots \in \left(\Sigma_*(S_+)\right)^{\mathbb{N}}$$

pour v décrivant S_+ et $n_0 \geq 0$. La suite ci-dessus se projette naturellement sur $v_{n_0}v_{n_0+1}\cdots \in S_+$.

On a bien obtenu une chaîne de Markov est une extension topologique de S_+. On l'appelle l'**extension markovienne formelle**. Mais ce système est *trivial* d'un point de vue dynamique: par exemple, tous ses points sont errants: le graphe correspondant à S_+^* est un arbre. Pour retrouver des propriétés de récurrence il faut procéder à des identifications.

Remarque. L'extension naturelle de S_+^* est *vide*!

1.2. Identifications. Toute relation d'équivalence $\approx$ sur $\Sigma_*(S_+)$ définit un alphabet réduit $\mathcal{A}^{\approx} = \Sigma_*(S_+)/_{\approx}$, ensemble quotient de $\Sigma_*(S_+)$ par $\approx$. On note $\mathrm{cl}^{\approx}$ la surjection canonique $\Sigma_*(S_+) \to \mathcal{A}^{\approx}$. On obtient un système symbolique $S_+^{\approx}$ sur l'alphabet réduit en prenant simplement l'image de S_+^* par l'application $S_+^* \to (\Sigma_*(S_+)/_{\approx})^{\mathbb{N}}$ induite par $\mathrm{cl}^{\approx}$ (et encore notée $\mathrm{cl}^{\approx}$).

On ne considère ici que les relations compatibles avec π, la projection sur le système symbolique initial $\pi : S_+^* \to S_+$, i.e. telles que $v \approx w \implies \pi(v) = \pi(w)$. On est en effet à la recherche d'*extensions* de S_+.

Remarque. La projection π sur S_+ induit une injection entre les mots de longueur et d'origines fixés: $\Sigma_n(S_+^*, v) \to \Sigma_n(S_+, \pi(v))$. Si v, en tant que mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de S, est de longueur 1, alors cette application est même une bijection.

Si $\approx$ est compatible avec π, ces propriétés subsistent par factorisation: elles sont partagées par $\Sigma_n(S_+^{\approx}, \mathrm{cl}^{\approx}(v)) \to \Sigma_n(S_+, \pi(v))$. On dit qu'on a la **propriété de relèvement faible** (3.12).

Il convient de préciser les identifications qui conservent le caractère markovien.

(2.1) Définition. *Soit $\Sigma_+(G)$ une chaîne de Markov topologique.*

On dit qu'une relation d'équivalence $\approx$ sur G est **Markov-admissible** *si, pour tous $v, w \in G$:*

$$v \approx w \implies \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{succ}(v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{succ}(w))$$

Rappelons que, si S est un système symbolique, on note $\Sigma_n(S, a)$ l'ensemble des mots de longueur n apparaissant dans S qui commencent par v. Si $S = \Sigma_+(G)$ on le note simplement $\Sigma_n(G, a)$, les mots se confondant ici avec les chemins sur le graphe.

(2.2) Lemme. *Soit $\Sigma_+(G)$ une chaîne de Markov topologique et $\approx$ une relation d'équivalence sur G. On note $S_+^{\approx}$ le système symbolique obtenu par identification comme ci-dessus.*

La relation $\approx$ est Markov-admissible ssi pour tous $v, w \in G$ tels que $v \approx w$, on a:

$$(*) \qquad \mathrm{cl}^{\approx}(\Sigma_n(G, v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\Sigma_n(G, w))$$

pour tout $n \geq 0$.

$S_+^{\approx}$ est alors une chaîne de Markov. Elle se laisse définir par $G^{\approx}$ muni de la structure de graphe suivante. Les successeurs de $a \in G^{\approx}$ sont, $v \in G$ étant un représentant arbitraire *de la classe de a:*

$$\mathrm{succ}_{G^{\approx}}(a) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{succ}_G(v)).$$

Remarques. L'égalité (*) pour tout $n \geq 0$ est équivalente à:

$$\mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_G(v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_G(w)),$$

les futurs étant des parties fermées de l'espace complet $\Sigma_*(S_+)^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas particulier $\Sigma_+(G) = S_+^*$, si $\approx$ est Markov-admissible alors $v \approx w \implies \mathrm{fut}_{S_+}(v) = \mathrm{fut}_{S_+}(w)$ (les symboles v, w de l'alphabet de S_+^* sont des mots finis de S_+).

Preuve du lemme. La Markov-admissibilité peut s'écrire:

$$\mathrm{cl}^{\approx}(\Sigma_2(G,v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\Sigma_2(G,w))$$

dès que $v \approx w$. (*) implique donc la Markov-admissibilité. La réciproque s'obtient par une simple récurrence:

Supposons la Markov-admissibilité et (*) pour un $n \geq 2$.

Soit $v^0 \dots v^n \in \Sigma_{n+1}(G,v)$. Il existe, par hypothèse de récurrence, $w^0 \dots w^{n-1} \in \Sigma_n(G,w)$ tel que $\mathrm{cl}^{\approx}(w^i) = \mathrm{cl}^{\approx}(v^i)$ pour $0 \leq i < n$. v^n est un successeur de v^{n-1} dans G. La Markov-admissibilité implique donc qu'il existe un successeur w^n de w^{n-1} tel que $\mathrm{cl}^{\approx}(w^n) = \mathrm{cl}^{\approx}(v^n)$. Mais alors $w^0 \dots w^n \in \Sigma_{n+1}(G,w)$ et $\mathrm{cl}^{\approx}(w^0 \dots w^n) = \mathrm{cl}^{\approx}(v^0 \dots v^n)$ (l'application induite entre les mots de longueur $n+1$). On a montré l'inclusion dans un sens. Par symétrie, l'égalité (*) est établie au rang $n+1$. Mais elle est claire pour $n = 0, 1, 2$ donc elle est établie pour tout $n \geq 0$. La Markov-admissibilité implique donc bien (*).

(*) implique que l'ensemble des mots finis de $S_+^{\approx}$ de longueur n et commençant par $\mathrm{cl}^{\approx}(w)$ est simplement:

$$\Sigma_n(S_+^{\approx}, \mathrm{cl}^{\approx}(w)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\Sigma_n(G,w)),$$

i.e. il est inutile de prendre l'union sur les $v \approx w$. Mais c'est dire que $S_+^{\approx} = \Sigma_+(G \approx)$ avec $G^{\approx}$ muni de la structure de graphe annoncée. □

On montre en appendice 2.A que dans le cas où $G = S_+^*$, la réciproque est vraie.

2. Extensions markoviennes remarquables

2.1. Cas abstraits.

Le principe général de construction présenté ci-dessus permet en particulier de retrouver la construction due à F. Hofbauer: on appelle **extension markovienne de Hofbauer** la chaîne de Markov obtenue à partir de la relation pratiquant *toutes* les identifications possibles:

$$v \stackrel{\wedge}{=} w \iff \mathrm{fut}(v) = \mathrm{fut}(w)$$

On la note $S_+^{\wedge}$. Remarquons que l'alphabet $\mathcal{A}^{\wedge}$ ainsi obtenu s'identifie à $\mathrm{Fut}(S_+)$ l'ensemble des futurs de S_+.

On verra en appendice (section 2.A) que cette extension markovienne minimale n'est "canonique" que si l'on se restreint à des projections "respectant la combinatoire".

La démonstration du théorème d'isomorphisme ci-dessous imposera d'écarter certaines identifications pour obtenir l'isomorphisme. Plus précisément, on considère la relation suivante sur $\Sigma_*(f,P)$:

$$v_{-m} \dots v_0 \stackrel{\simeq}{=} w_{-n} \dots w_0 \iff \exists k \geq 0 \begin{cases} v_{-k} \dots v_0 = w_{-k} \dots w_0 \\ \mathrm{fut}(v_{-m} \dots v_0) = \mathrm{fut}(v_{-k} \dots v_0) \\ \mathrm{fut}(w_{-n} \dots w_0) = \mathrm{fut}(w_{-k} \dots w_0) \end{cases}$$

Si k est choisi minimal, on dit que $v_{-k} \dots v_0$ est la **partie significative** de $v_{-m} \dots v_0$. C'est le plus petit suffixe de v permettant de calculer le futur. Remarquons toutefois que k dépend en général des symboles situés à gauche de la partie significative, i.e. des v_{-i}, $i > k$: la connaissance d'un suffixe ne permet pas, en général, de déterminer si ce suffixe contient la partie significative et donc ne permet pas le calcul du futur.

$\widetilde{=}$ identifie les mots finis ayant même partie significative. On peut donc dire que la relation $\widetilde{\widetilde{=}}$ identifie les mots finis ayant le même futur "parce qu'ils coïncident depuis suffisamment longtemps" et ignore les identifications "fortuites".

On note $S_+^{\widetilde{}}$ l'extension markovienne correspondante, dite **extension markovienne spéciale.**

2.2. Cas de la dynamique symbolique d'un système partitionné.

Dans le cas où $S_+ = \Sigma_+(f,P)$, la dynamique symbolique d'un système partitionné, il est commode de conserver la liaison la plus étroite possible avec le système initial. Aussi, on modifie les constructions précédentes en considérant, au lieu des futurs relatifs aux systèmes symboliques, les futurs relatifs à ce système de départ, qu'on appelle **futurs dans** X ou encore **futurs géométriques** par opposition aux futurs symboliques définis plus haut. Le futur géométrique d'un mot fini $w \in \Sigma_*(f,P)$ est:

$$\mathrm{fut}_X(w) = f^n[w_0 \dots w_n] = f^n(w_0 \cap f^{-1}w_1 \cap \dots \cap f^{-n}w_n) \qquad (w = w_0 \dots w_n).$$

(rappelons que les w_i sont des éléments de P et donc des parties de X).

On note encore $\hat{=}, \widetilde{=}$ les relations correspondant aux extensions respectivement de Hofbauer et spéciale définies cette fois avec le futur géométrique en lieu et place du futur symbolique. On note $\hat{\Sigma}_+(f,P)$, $\tilde{\Sigma}_+(f,P)$ les extensions markoviennes de $\Sigma_+(f,P)$, resp. de Hofbauer et spéciale, obtenues par ces procédés modifiés. On note enfin

$$\mathrm{Fut}_X(f,P) = \{\mathrm{fut}_X(w) : w \in \Sigma_*(f,P)\}.$$

et $\hat{\pi}$, $\tilde{\pi}$ les projections sur $\Sigma_+(f,P)$. On note enfin $\tilde{P}$ et $\hat{P}$ les diagrammes de Hofbauer associés à chacune de ces chaînes de Markov.

G. Keller a introduit une variante de la construction de Hofbauer, variante destinée à sauvegarder les aspects non symboliques du système partitionné initial, notamment la structure différentiable. Elle pourrait sans doute être utile également dans des cas où la partition n'est pas génératrice.

Soit donc (X,f,P) un système partitionné et $\Sigma_+^{\approx}(f,P)$ une extension markovienne de la dynamique symbolique $\Sigma_+(f,P)$. Du fait de la nature essentiellement symbolique de la construction, on ne doit considérer que les points réguliers, i.e. ayant un itinéraire bien défini. L'**extension markovienne complète** définie par $\approx$ est $(X^{\approx}, f^{\approx})$ avec

$$X^{\approx} = \{(x,\alpha) \in (X \setminus C^-(f)) \times \Sigma_+^{\approx}(f,P) : \hat{\pi}(\alpha) = \Gamma(x)\}$$

et la dynamique

$$f^{\approx} : (x,\alpha) \mapsto (f(x), \sigma(\alpha)).$$

Dans le cas où l'extension markovienne symbolique envisagée est l'extension de Hofbauer (relation $\hat{=}$), on peut également adopter une formulation d'apparence moins symbolique, en recourant aux futurs géométriques:

$$X^{\approx} = \{(x, A) \in (X \setminus C^-(f)) \times \mathrm{Fut}_P(f, P) : x \in A\}$$
$$f^{\approx} : (x, A) \mapsto (f(x), f(A) \cap P(x))$$

$P(x)$ étant l'unique élément de P contenant x.

Remarque. On peut aussi prendre d'abord la régularisation (1.22) du système partitionné, de façon à se ramener à un système dont chaque point possède un itinéraire.

Dans la suite on ne se servira pas de cette extension de Keller.

3. Lien entre extension markovienne et système initial

Cette section est consacrée à la généralisation ((2.7) ci-dessous) du résultat fondamental de F. Hofbauer [15] ci-dessous (mis en évidence par S. Newhouse [34]) montrant l'*isomorphisme* de l'extension naturelle du système symbolique avec l'extension markovienne construite dans la section précédente. F. Hofbauer a obtenu ce résultat dans le cas des applications monotones par morceaux. On donne ici une démonstration abstraite, valable de façon beaucoup plus générale. L'élément clé est la considération de la *bonne extension markovienne*, $\tilde{\Sigma}(f, P)$, l'extension markovienne spéciale introduite ci-dessus. On examine, dans l'appendice 2.C, la situation relativement à l'extension markovienne de Hofbauer $\hat{\Sigma}(f, P)$.

Remarque. On traite le cas de la dynamique symbolique d'un système partitionné. Mais on a les mêmes résultats, avec les mêmes démonstrations, dans le cas général.

3.1. Contre-exemple.

Il existe bien des systèmes pour lesquels ces extensions sont triviales: donnons tout de suite un contre-exemple, une situation où le futur, fut_X, est une application injective: l'ensemble des points non-errants de $\hat{\Sigma}_+(f, P)$ est alors vide. On prend:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^1 \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \times [0,1] \\ (x, y) & \longmapsto & (2x, t_x(y)) \end{array} \qquad \text{avec } t_x(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & \text{si } x \leq 1/2 \\ \sqrt[3]{y}/e, & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$$

avec $P = \{(0, 1/2) \times [0,1], (1/2, 1) \times [0,1]\}$.

3.2. Injectivité éventuelle. Donnons une première forme "d'injectivité" de ces extensions:

(2.3) Lemme. *Soit $\alpha, \beta \in \tilde{\Sigma}_+(f, P)$. On note suppose que α, β ont la même projection A sur $\Sigma_+(f, P)$. Si $n \geq 0$ est tel que*

$$[A_0 \dots A_n] \subset \mathrm{fut}_X(\alpha_0) \cap \mathrm{fut}_X(\beta_0)$$

alors $\sigma^n(\alpha) = \sigma^n(\beta)$.

Remarquons que ceci entraîne immédiatement le même résultat pour l'extension de Hofbauer (par projection), cf. (2.11) ci-dessous.

Preuve. Vu la définition de $\tilde{\Sigma}_+(f,P)$, il existe un mot $A_{-l}\dots A_{-1}$ tel que, pour tout $k \geq 0$,

$$\alpha_k = \mathrm{cl}^\sim(A_{-l}\dots A_{-1}A_0\dots A_k).$$

Une récurrence facile donne

$$\alpha_k = f^{k+l}([A_{-l}\dots A_k]) = f^k(\mathrm{fut}_X(\alpha_0)\cap[A_0\dots A_k])$$

($\mathrm{fut}_X(\alpha_0) = f^l([A_{-l}\dots A_0])$). Pour $k=n$, l'hypothèse donne

$$\alpha_n = f^n([A_0\dots A_n])$$

On a donc montré que $\mathrm{fut}_X(A_{-l}\dots A_n) = \mathrm{fut}_X(A_0\dots A_n)$. La deuxième condition requise par $\tilde{=}$ est naturellement satisfaite: $\alpha_n = \mathrm{cl}^\sim(A_0\dots A_n)$.

Le même raisonnement s'applique à β_n. On conclut donc à l'égalité $\alpha_k = \beta_k$ pour $k=n$ donc $k \geq n$. □

Ce lemme joue un rôle assez important pour qu'on distingue les suites auxquelles il ne peut s'appliquer:

(2.4) Définition. *On appelle* **bord symbolique** *de $F \subset X$ l'ensemble $\Delta_P F$ des suites $A \in \Sigma_+(f,P)$ telles que, pour tout $n \geq 0$,*

$$[A_0\dots A_n]\cap F \neq \emptyset \text{ et } [A_0\dots A_n] \not\subset F$$

On note $\Delta_P \mathrm{Fut}_X(f,P)$ l'union des bords symboliques des éléments $F \in \mathrm{Fut}_X(f,P)$.

On remarque que, si la partition est génératrice, ou bien si les $[A_0\dots A_n]$ sont connexes, alors le bord symbolique de F est relié de façon simple au vrai bord (topologique) de F:

$$\Delta_P F \subset \{A \in \Sigma_+(f,P) : \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\dots A_n]} \cap \partial F \neq \emptyset\}$$

3.3. Théorème d'Isomorphisme.

L'idée de base de la démonstration, due à F. Hofbauer, est la suivante. Soit $\alpha \in \tilde{\Sigma}(f,P)$ et supposons que $\tilde{\pi}(\alpha) = A$. On va voir, qu'en dehors d'un mauvais ensemble, on peut retrouver α à partir de A comme $\alpha_p = \mathrm{cl}^\sim(A_{p-n}\dots A_p)$, pour $p \in \mathbb{Z}$ et n "assez grand". Ceci explique pourquoi il est naturel de considérer les extensions naturelles, c'est-à-dire les systèmes "rendus inversibles":

$$\Sigma(f,P) = \{A \in P^{\mathbb{Z}} : \forall n \geq 0\ A_{-n}A_{-n+1}\cdots \in \Sigma_+(f,P)\}$$

et de même pour $\tilde{\Sigma}(f,P)$.

La formule annoncée pour α_p entraîne immédiatement qu'il faut exclure l'ensemble suivant:

(2.5) Définition. *Soit (X, f, P) un système partitionné.*

On appelle **partie non-markovienne** *du système symbolique, notée $\Sigma_0(f,P)$, la partie invariante de $\Sigma(f,P)$ définie par $\Sigma_0(f,P) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma^k \Sigma_1(f,P)$ avec*

$$\Sigma_1(f,P) = \Big\{ A \in \Sigma(f,P) : \\ n \mapsto \mathrm{fut}_X(A_{-n}\dots A_0) \text{ n'est pas éventuellement stationnaire} \Big\}$$

$$= \Big\{ A \in \Sigma(f,P) : \forall n \geq 0 \\ \mathrm{fut}_X(A_{-n}\dots A_0) \supsetneq \bigcap_{n\geq 0} \mathrm{fut}_X(A_{-n}\dots A_0) \Big\}$$

Remarquons que la suite des futurs envisagée ci-dessus est nécessairement décroissante. La partie non-markovienne est liée, elle aussi, au bord symbolique de la partition:

(2.6) Lemme. *On a:*

$$\Sigma_1(f,P) = \Big\{ A \in \Sigma(f,P) : \text{il existe une infinité de } n \geq 0 \text{ t.q.} \\ A_{-n}\dots A_0 \in \Delta_P^{n+1} f(A_{-n-1}) \Big\}$$

avec $\Delta_P^{n+1} F = \{w_0 \dots w_n : w \in \Delta_P F\}$.

Preuve. D'après la bijectivité de $f : A \to f(A)$ pour $A \in P$,

$$f^{n+1}[A_{-n-1}\dots A_0] = f^n\big(f(A_{-n-1}) \cap [A_{-n}\dots A_0]\big)$$

Donc $\mathrm{fut}_X(A_{-n-1}\dots A_0) \neq \mathrm{fut}_X(A_{-n}\dots A_0)$ implique que $[A_{-n}\dots A_0]$ rencontre, sans être inclus dans, $f(A_{-n-1})$. Autrement dit, $A_{-n}\dots A_0 \in \Delta_P^{n+1} f(A_{-n-1})$. □

Ce lien est utilisé dans la partie "concrète" du théorème de relèvement de G. Keller, esquissé dans l'appendice du chapitre 6.

Remarque. Pour pouvoir réellement exploiter ce lien avec le bord de P, il faudra supposer la partition génératrice et les $[A_0 \dots A_n]$ connexes de façon à retrouver le vrai bord (cf. ci-dessus).

On peut maintenant énoncer le résultat essentiel de ce chapitre:

(2.7) Théorème (F. Hofbauer [15]**).** *Soit (X, f, P) un système partitionné.*

Notons $\tilde{\Sigma}_+(X,f)$ l'extension markovienne spéciale de $\Sigma_+(f,P)$; $\tilde{\pi}$ la projection associée; $p : \Sigma(f,P) \to \Sigma_+(f,P)$, $\tilde{p} : \tilde{\Sigma}(f,P) \to \tilde{\Sigma}_+(f,P)$ les extensions naturelles.

On a alors l'isomorphisme mesurable:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma}(f,P) & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{\Sigma}(f,P) \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P) \end{array}$$

On peut formuler ce résultat de la façon suivante. Si $A \in \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$, la variété instable locale définie par $W^u_{loc}(A) = \{B \in \Sigma(f,P) : \forall n \geq 0\ B_{-n} = A_{-n}\}$ est donnée par l'extension markovienne:

$$p(W^u_{loc}(\tilde{\pi}(\alpha)) = \alpha_0$$

($p : \Sigma(f,p) \to \Sigma_+(f,P)$ est l'extension naturelle). Il lui correspond une partie de X obtenue par un nombre fini d'intersections:

$$\mathrm{fut}_X(\alpha_0) = f^n(A_{-n} \cap f^{-1}A_{-n+1} \cap \cdots \cap f^{-n}A_0)$$

n est arbitrairement grand, mais fini.

Preuve du théorème. Montrons d'abord que $\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}(f,P)) \subset \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$. On obtiendra comme "sous-produit" que $\tilde{\pi}$ est injective avec la formule:

$$\alpha_p = \mathrm{cl}^\sim(A_{p-n} \ldots A_p) \qquad n \text{ assez grand}$$

pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}(f,P)$ arbitraire, en posant $A = \tilde{\pi}(\alpha)$. $A \in \Sigma(f,P)$ est clair. $\tilde{\Sigma}(f,P)$ étant invariant, il suffit de montrer que $A \notin \Sigma_1(f,P)$. Choisissons un mot fini $B = B_{-m} \ldots B_0 \in \Sigma_*(f,P)$ tel que:

$$\alpha_0 = \mathrm{cl}^\sim(B_{-m} \ldots B_0)$$

On suppose de plus m minimal: $B_{-m} \ldots B_0$ est tout entier sa propre partie significative.

Fixons $N > m$. Il existe de même un mot fini $C_{-N-l} \ldots C_{-N}$ tel que

$$\alpha_{-N} = \mathrm{cl}^\sim(C_{-N-l} \ldots C_{-N})$$

D'après la propriété de relèvement faible (section 1.2 ci-dessus), on al'unicité du relèvement sur $\tilde{P}$ (une fois l'origine fixée), et donc, pour $0 \leq i \leq N$,

$$\alpha_{-i} = \mathrm{cl}^\sim(C_{-N-1} \cdots C_{-N}A_{-N+1} \ldots A_{-i})$$

En posant $i = 0$, on obtient: $B_{-m} \ldots B_0 \cong C_{-N-1} \cdots C_{-N}A_{-N+1} \ldots A_0$: les parties significatives coïncident et $B_{-m} \ldots B_0 = A_{-m} \ldots A_0$:

$$\alpha_0 = \mathrm{cl}^\sim(A_{-m} \ldots A_0) = \mathrm{cl}^\sim(C_{-N-l} \ldots C_{-N}A_{-N+1} \ldots A_0)$$

Ceci montre que:

$$\alpha_0 = \mathrm{cl}^\sim(A_{-N+1} \ldots A_0)$$

mais $N > m$ était arbitraire: on a bien la formule annoncée et donc π est injective. D'autre part, on a bien montré que la suite $n \mapsto \mathrm{cl}^\sim(A_{-n} \ldots A_0)$ est stationnaire pour n assez grand, c'est le cas *a fortiori* de $n \mapsto \mathrm{fut}_X(A_{-n} \ldots A_0)$: $A \notin \Sigma_1(f,P)$.

Montrons réciproquement que tout $A \in \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$ admet un antécédent dans $\tilde{\Sigma}(f,P)$. Posons, pour chaque $p \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha_p = \lim_{n \to \infty} \mathrm{cl}^\sim(A_{p-n} \ldots A_p)$$

Comme $A \notin \Sigma_0(f,P)$, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang et la limite ci-dessus est bien un élément de $\tilde{P}$. Clairement $\tilde{\pi}(\alpha) = A$. Vérifions que $\alpha \in \tilde{\Sigma}(f,P)$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 0$ assez grand:

$$\alpha_p = \mathrm{cl}^{\sim}(A_{p-n} \dots A_p)$$
$$\alpha_{p+1} = \mathrm{cl}^{\sim}(A_{p-n} \dots A_{p+1})$$

donc

$$\alpha_p \to \alpha_{p+1}$$

est bien une flèche de $\tilde{P}$: $\alpha \in \tilde{\Sigma}(f,P)$. L'application $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma}(f,P) \to \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$ est donc une bijection. Elle est continue. Sa réciproque est mesurable. □

Appendices

A. Caractérisation de l'extension de F. Hofbauer

On va prouver que l'extension markovienne introduite par F. Hofbauer est bien minimale, non pas parmi toutes les extensions markoviennes, mais parmi celles "respectant la combinatoire locale".

A.1. Identifications conservant le caractère markovien de S_+^*.

(2.8) Lemme. *Considérons une relation d'équivalence $\approx$ sur l'alphabet de l'extension markovienne formelle S_+^*. On suppose $\approx$ compatible avec la projection $\pi : \Sigma_*(S_+) \to \mathcal{A}$:*

$$v \approx w \implies \pi(v) = \pi(w)$$

Alors $S_+^{\approx}$ est une chaîne de Markov ssi $\approx$ est Markov-admissible.

Preuve. L'implication directe a été démontrée au lemme (2.2). Supposons donc que $\approx$ définit une chaîne de Markov $S_+^{\approx}$.

Pour montrer que $\approx$ est Markov-admissible il suffit de montrer que:

$$\mathrm{fut}_{S_+^{\approx}}(\mathrm{cl}^{\approx}(w)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_{S_+^*}(w))$$

pour tout $w \in \Sigma_*(S_+)$, i.e. tout élément de l'alphabet de S_+^*. En effet, on aura alors, pour $v \approx w$,

$$\mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_{S_+^*}(v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_{S_+^*}(w))$$

ce qui implique $\mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{succ}(v)) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{succ}(w))$.

w est un mot fini sur $\mathcal{A}$: $w = w_0 \dots w_n$. Soit $W = (w_0)(w_0 w_1) \dots (w_0 \dots w_n)$, mot fini de S_+^*. Posons

$$W^{\approx} = \mathrm{cl}^{\approx}(w_0) \dots \mathrm{cl}^{\approx}(w_0 \dots w_n),$$

mot fini de $S_+^{\approx}$ correspondant. $S_+^{\approx}$ étant une chaîne de Markov, $\mathrm{fut}_{S_+^{\approx}}(\mathrm{cl}^{\approx}(w)) = \mathrm{fut}_{S_+^{\approx}}(W^{\approx}) = \sigma^n <W^{\approx}>$. La semi-conjugaison implique $\mathrm{cl}^{\approx}(<W>) \subset <W^{\approx}>$.

Réciproquement, soit $\alpha \in <W^{\approx}>$. Notons $A = (\pi(\alpha_0))(\pi(\alpha_0)\pi(\alpha_1))\ldots$ C'est un relèvement de α sur $\Sigma_*(S_+)$: $\mathrm{cl}^{\approx}(A) = \alpha$. Mais $A \in <W>$. Donc $<W^{\approx}> = \mathrm{cl}^{\approx}(<W>)$ et, par conséquent, $\mathrm{fut}_{S_+^{\approx}}(w) = \mathrm{fut}_{S_+^{\approx}}(W^{\approx}) = \mathrm{cl}^{\approx}(\mathrm{fut}_{S_+^*}(W))$, or S_+^* est également une chaîne de Markov: $\mathrm{fut}_{S_+^*}(W) = \mathrm{fut}_{S_+^*}(w)$. □

A.2. Contre-exemple à la minimalité de l'extension de Hofbauer.

Considérons le sous-shift (système symbolique compact) $S_+ \subset \Sigma_+(2)$ défini par son ensemble exclu:

$$X(S_+) = \{00, 02, 20, 22, 010, 012\} \cup \{21^{*(2k+1)}0, 21^{*(2k+1)}2 : k \geq 0\}.$$

Autrement dit S_+ est constitué des suites de $\Sigma_+(3)$, le shift complet à trois symboles 0, 1 et 2, telles que:

(1) tout symbole 0 est suivi de deux symboles 1.
(2) tout symbole 2 est suivi d'une suite de longueur paire et non-nulle (ou bien infinie) de symboles 1, suivie elle-même (si elle n'est pas de longueur infinie) par un symbole 0 ou 2.

Considérons l'extension markovienne minimale $S_+^{\wedge}$ dont le graphe $\mathcal{A}^{\wedge}$ est représenté ci-dessous, figure 2.A.1, et une extension markovienne $\Sigma_+(G)$ définie par son graphe G représenté ci-dessous, figure 2.A.2.:

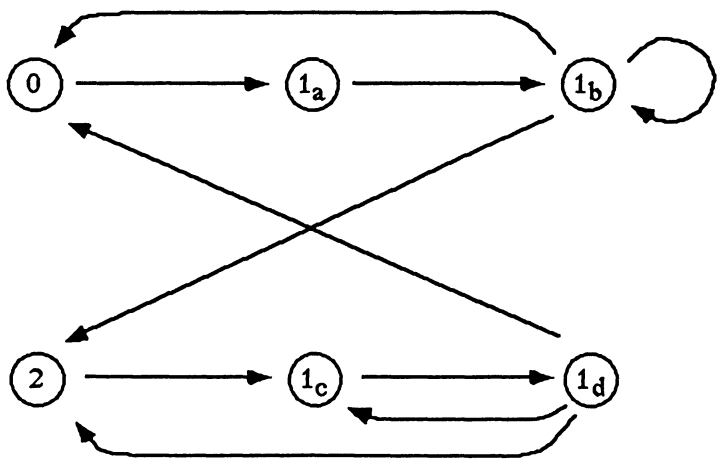

FIGURE 2.A.1.

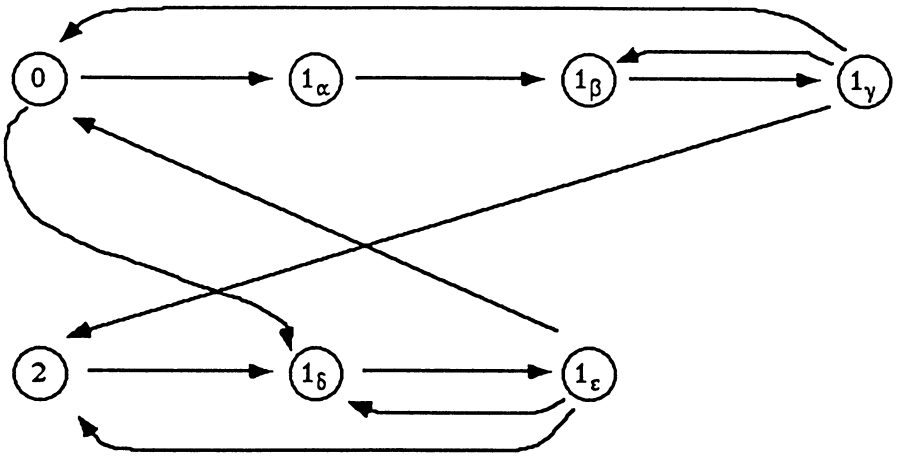

FIGURE 2.A.2.

On a étiqueté chaque sommet avec le symbole de S_+ sur lequel il se projette et rajouté un indice afin de faciliter la discussion ci-dessous.

Vérifions que $(S^\wedge, \sigma)$ n'est pas un facteur topologique de $(\Sigma(G), \sigma)$.

Soit $r \geq 1$. Soit $A \in \Sigma(G)$ tel que $A_{-2r} \dots A_1 = 01_\delta(1_\epsilon 1_\delta)^{*r-1}1_\epsilon 0$. Posons $B = \pi(A)$. Nécessairement $B_{-2r} = 0$ et donc $B_0 = 1_2$. Maintenant prenons A' coïncidant avec A à l'exception de $A'_{-2r} = 2$. Notons $B' = \pi(A')$. On voit qu'alors $B'_0 = 1_4$. Mais r est arbitrairement grand donc A et A' arbitrairement proches. $\pi(A)$ ne dépend pas continument de A!

Remarques. 1. On voit que $(S^\wedge, \sigma)$ et $(\Sigma(G), \sigma)$ sont ici *mesurablement isomorphes*, une fois exclues les images réciproques de $\cdots 1111 * u \in S$, $u \in S_+$.

2. Le même argument s'applique au cas unilatéral en décalant les indices de $+2r$ puis en appliquant σ^{2r}. On trouve qu'il n'y a pas de projection ne serait-ce qu'ensembliste!

Comme annoncé, l'extension markovienne de F. Hofbauer n'est donc pas minimale parmi les extensions markoviennes d'un système symbolique.

A.3. Caractérisation. Pour obtenir cette propriété de minimalité, il faut se restreindre à une sous-classe d'extensions préservant localement la combinatoire au sens de la définition suivante:

(2.9) Définition. *Soit S_1, S_2 deux systèmes symboliques d'alphabets respectifs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. On note $\Sigma_n(S_i, a_i)$ l'ensemble des mots de longueur n commençant par $a_i \in \mathcal{A}_i$ sur S_i. Soit $\pi : S_1 \to S_2$ une application par bloc d'ordre 1.*

On dit que π **préserve (localement) la combinatoire** *en $a_1 \in \mathcal{A}_1$ si, pour tout $n \geq 0$, l'application induite par π*

$$\Sigma_n(S_1, a_1) \to \Sigma_n(S_2, \pi(a_1))$$

est surjective et finie-sur-1.

On dit que π **préserve (globablement) la combinatoire** *si pour tout $a \in \mathcal{A}_1$, il existe $a' \in \mathcal{A}_1$, précédant a ($a' \preceq a$) tel que π préserve la combinatoire en a'.*

Rappelons que quitte à modifier l'alphabet on peut toujours supposer π d'ordre 1 (lemme (1.4)).

(2.10) Proposition. *Soit S_+ un système symbolique unilatéral d'alphabet $\mathcal{A}$. Notons $S_+^\wedge$ son extension markovienne de Hofbauer d'alphabet $\mathcal{A}^\wedge$, identifié à l'ensemble des futurs de S_+.*

Soit $\Sigma_+(G)$ une chaîne de Markov topologique qui soit une extension:

$$\pi : (\Sigma_+(G), \sigma) \to (S_+, \sigma).$$

Supposons que π préserve globalement la combinatoire.

Alors l'extension markovienne $\Sigma_+(G)$ est, en fait, une extension d'une partie invariante $T_+^\wedge$ de $S_+^\wedge$ telle que $\hat{\pi}(T_+^\wedge) = S_+$. Plus précisément, on a une surjection continue, semi-conjuguant les shifts, $p : (\Sigma_+(G), \sigma) \to (S_+^\wedge, \sigma)$ avec p une application par bloc définie par:

$$g \mapsto \pi(\mathrm{fut}(g))$$

(on a identifié $\mathcal{A}^\wedge$ à l'ensemble des futurs de S_+).

Preuve. Montrons d'abord que si $g_0 g_1 \dots g_n$ est un chemin sur G tel que π préserve la combinatoire en g_0 alors $\pi(\mathrm{fut}(g_0 \dots g_n)) = \mathrm{fut}(\pi(g_1) \dots \pi(g_n))$. Remarquons tout d'abord que l'inclusion $\subset$ est une conséquence immédiate de la semi-conjugaison.

Réciproquement soit $u \in \mathrm{fut}(\pi(g_0) \dots \pi(g_n))$ et $j \geq 0$. Par définition si on pose, pour $0 \leq i < n$, $u_{-n+i} = \pi(g_i)$ alors $u_{-n} u_{-n+1} \dots u_{-n+j} \in \Sigma_{j+1}(S_+, \pi(g_0))$. Donc il existe $v_{-n} v_{-n+1} \dots v_{-n+j} \in \Sigma_{j+1}(S_+^\wedge, g_0)$ tel que $\pi(v_i) = u_i$, $i \geq -n$, d'après l'hypothèse de préservation de la combinatoire. Mais c'est dire qu'il existe $v^j \in S_+^\wedge$ tel que $\pi(v^j)$ tend vers u quand $j \to \infty$. D'après la condition de *quasi-injectivité* incluse dans la préservation de la combinatoire, les v^j sont à valeurs dans un compact. On peut donc supposer qu'ils convergent dans $G^{\mathbb{N}}$, mais $\Sigma_+(G)$ y est fermé. On a montré que $u \in \pi(\mathrm{fut}(g_0 \dots g_n))$ et donc l'égalité annoncée.

Comme $\Sigma_+(G)$ est une chaîne de Markov $\mathrm{fut}(g_0 \dots g_n) = \mathrm{fut}(g_n)$ pour tout chemin sur G. D'après l'hypothèse, il y a assez de points en lesquels π préserve la combinatoire pour que le résultat précédent permette d'affirmer: pour tout $g \in G$,

$$\pi(\mathrm{fut}(g)) = \mathrm{fut}(\pi(g_0) \dots \pi(g_n)) \in \mathcal{A}^\wedge$$

D'autre part, si $g \to g'$ sur G et si $g_0 \dots g_n$ est un chemin sur G tel que g_0 est un point de préservation de la combinatoire et $g_n = g$ alors:

$$\mathrm{fut}(\pi(g_0) \dots \pi(g_n)\pi(g')) = \pi\,\mathrm{fut}(g') \neq \emptyset$$

et donc $\mathrm{fut}(\pi(g_0) \dots \pi(g_n)) \to \mathrm{fut}(\pi(g_0) \dots \pi(g'))$, i.e. $\pi(\mathrm{fut}(g)) \to \pi(\mathrm{fut}(g))$ sur $\mathcal{A}^\wedge$. L'application $p = \mathrm{cl}^\wedge \circ \pi \circ \mathrm{fut} : G \to \mathcal{A}^\wedge$ est donc bien définie et envoie les chemins sur les chemins: c'est bien une application de $\Sigma_+(G)$ dans $S_+^\wedge$. p semi-conjugue évidemment les shifts.

Soit $T_+^\wedge = p(\Sigma_+(G))$. D'après la semi-conjugaison, $T_+^\wedge$ est invariante. D'autre part $\hat{\pi}(T_+^\wedge) = \pi(\Sigma_+(G)) = S_+$. □

B Application aux systèmes sofiques

Construisons les extensions markoviennes d'un système sofique (S, σ, P) avec P la partition de temps zéro. Soit (T, σ, Q) une chaîne de Markov sur un alphabet fini B telle que $p : (T, \sigma) \to (S, \sigma)$. On a:

$$\mathrm{fut}_S(w_{-n} \dots w_0) = p\left(\bigcup_{b_{-n}\dots b_0 \in p^{-1}(w_{-n}\dots w_0)} \mathrm{fut}_T(b_{-n} \dots b_0)\right)$$

$$= p\left(\bigcup_{b \in B(w_{-n}\dots w_0)} <b>_T\right)$$

avec $B(w_{-n} \dots w_0)$ une partie de B. Mais B est fini donc l'ensemble des futurs $\mathrm{Fut}(P)$ est fini. Conséquences:

1. l'extension $\hat{\Sigma}_+(f, P)$ est compacte donc toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ y admet un relèvement.

D'autre part, les successeurs d'un symbole donné de $\mathrm{Fut}(P)$ sont chacun inclus dans un élément différent de P: le relèvement d'un $x \in S$ est donc déterminé par le relevèment du premier symbole. Le nombre de relèvement d'un $x \in S$ est fini, borné par la constante $\mathrm{card}\,\mathrm{Fut}(P) < \infty$.

Remarquons en passant qu'un système symbolique est sofique ssi $\mathrm{Fut}(P)$, l'extension $\hat{P}$ de son alphabet, est finie.

2. toute suite décroissante à valeurs dans l'ensemble des futurs est éventuellement constante donc $\Sigma_0(\sigma, P) = \emptyset$. L'application $\tilde{\pi} : (\tilde{\Sigma}(\sigma, P), \sigma) \to (S, \sigma)$ est continue, bijective et commute avec les actions dans le sens où: $\tilde{\pi} \circ \sigma = \sigma \circ \tilde{\pi}$.

Toutefois:

1. sur $\hat{\Sigma}_+(\sigma, P)$ il n'y a pas nécessairement unicité du relèvement d'une mesure même en supposant l'ergodicité. Donnons un exemple. On considère le système symbolique S sur l'alphabet $\{0, 1\}$ défini par l'exclusion des blocs de 1 de longueur impaire:

$$X(S) = \{01^{*2n+1}0 : n \geq 0\}$$

Les futurs de S sont exactement:

$$\mathrm{fut}(w * 0) =< 0 >_S$$

$$\mathrm{fut}(1^k) =< 1 >_S$$

$$\mathrm{fut}(w * 0 * 1^{*2k}) = \bigcup_{n \geq 0} < 1^{*2n+1}0 >_S \cup < 1^{*\infty} >_S$$

$$\mathrm{fut}(w * 0 * 1^{*2k-1}) = \bigcup_{n \geq 0} < 1^{*2n}0 >_S \cup < 1^{*\infty} >_S$$

avec $k \geq 1$ et $w \in \Sigma_*(S) \cup \{\emptyset\}$ une suite finie (peut-être vide) arbitraire. On note ces futurs respectivement: $0^K, 1^K, 1_a^K, 1_b^K$. La structure de graphe de $\mathrm{Fut}(P)$ est constituée des flèches:

$$1^K \to 1^K,\ 1^K \to 0^K,\ 0^K \to 0^K,\ 0^K \to 1_a^K,\ 1_a^K \to 1_b^K,\ 1_b^K \to 1_a^K,\ 1_b^K \to 0^K$$

On constate que la mesure concentrée en $1^{*\infty} \in S$ admet deux relèvements ergodiques définis respectivement par le point fixe $(1^K)^{*\infty}$ et l'orbite 2-périodique du point $(1_a^K 1_b^K)^{*\infty}$.

2. Pour le même système symbolique S, le diagramme de Hofbauer $\tilde{P}$ est infini: on vérifie facilement que chacune des classes suivantes est distincte pour la relation $\tilde{=}$ et que leur réunion épuise $\tilde{P}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cl}^{\sim}(1^k)\\
&\mathrm{cl}^{\sim}(w*0)\\
&\mathrm{cl}^{\sim}(w*01)\\
&\mathrm{cl}^{\sim}(w*011)\\
&\mathrm{cl}^{\sim}(w*0111)\\
&\dots
\end{aligned}$$

avec $k \geq 1$, $w \in \Sigma_*(S) \cup \{\emptyset\}$. La projection $\tilde{\pi}$ est une bijection mais n'est pas un homéomorphisme.

C Théorème de relèvement de G. Keller

On se propose de retrouver, comme corollaire du théorème d'isomorphisme (2.7), la partie abstraite du théorème de relèvement des mesures sur l'extension de Hofbauer complète $(\hat{X}, \hat{f})$. Ce théorème a été établi par G. Keller [24] pour généraliser le résultat d'isomorphisme de F. Hofbauer, particulier au cas monotone par morceaux.

Le résultat d'injectivité éventuelle (2.3), démontré pour l'extension spéciale, s'applique clairement à $\hat{X}$:

(2.11) Lemme. *Soit $X_1 = \Gamma^{-1}(\Delta_P \operatorname{Fut}_X(f,P))$, les points que la partition ne sépare pas du bord d'un futur.*

Si $\hat{x}, \hat{y}$ sont deux points de l'extension de Hofbauer complète $\hat{X}$ tels que

$$\hat{\pi}(\hat{x}) = \hat{\pi}(\hat{y}) \notin X_1$$

alors il existe $n \geq 0$ tel que $\hat{f}^n(\hat{x}) = \hat{f}^n(\hat{y})$.

Définissons la partie non-markovienne de X comme

$$X_0 = \Gamma^{-1}(p(\Sigma_0(f,P)))$$

où $p : \Sigma(f,P) \to \Sigma_+(f,P)$ est l'extension naturelle.

(2.12) Théorème. *Soit (X,f,P) un système partitionné.*

Alors, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ telle que

$$\mu(C^-(f) \cup X_0 \cup X_1) = 0$$

se relève en une unique mesure $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\hat{f}}(\hat{X})$.

Enfin, μ et $\hat{\mu}$ sont d'entropie métrique égale et sont simultanément ergodiques.

Remarque. On expliquera dans un appendice au chapitre 6 comment on montre que la condition donnée par G. Keller implique que X_0 est négligeable.

La démonstration donnée ci-dessous de l'unicité du relèvement ainsi que de l'égalité des entropies métriques est inspirée par celle de G. Keller: on a juste remarqué qu'on obtenait ainsi l'égalité des entropies même si la partition n'est pas génératrice et on a éclairci un point obscur (la partition $\hat{P}$ peut être *a priori* d'entropie infinie, on ne voit donc pas comment lui appliquer directement le théorème de Shannon-McMillan-Breiman, cf. ci-dessous).

Preuve. Soit μ comme dans l'énoncé. L'existence d'un relèvement $\hat{\mu}$ est triviale, quoique fastidieuse, par application du théorème d'isomorphisme (2.7):

L'isomorphisme $\tilde{\Sigma}(f,P) \to \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$ induit un isomorphisme entre $(\tilde{X}^-, \tilde{f}^-)$ et $(X^- \setminus (X_0 \cup C(f))^-, f^-)$ avec

(1) $(\tilde{X}^-, \tilde{f}^-)$ l'extension naturelle de $(\tilde{X}, \tilde{f})$ définie par

$$\tilde{X}^- = \{x^- \in \tilde{X}^{\mathbb{Z}} : f(x_p^-) = x_{p+1}^- \ (p \in \mathbb{Z})\}$$
$$\tilde{f}^-((x_p^-)_{p\in\mathbb{Z}} = (\tilde{f}(x_p^-))_{p\in\mathbb{Z}}$$

(2) (X^-, f^-) l'extension naturelle de (X, f) définie similairement.

(3) $(X_0 \cup C(f))^- = \{x^- \in X^- : \exists p \in \mathbb{Z}\ x_p^- \in X_0 \cup C(f)\}$.

Soit $\mu^- \in \mathcal{M}_{f^-}(X^-)$ l'extension naturelle de μ. Par hypothèse $\mu^-((X_0 \cup C(f))^-) = 0$. Donc l'isomorphisme ci-dessus permet de remonter μ^- en une mesure $\tilde{\mu}^- \in \mathcal{M}_{\tilde{f}^-}(\tilde{X}^-)$. $\tilde{\mu}^-$ définit une mesure $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_{\tilde{f}}(\tilde{X})$. La projection $(\tilde{X}, \tilde{f}) \to (\hat{X}, \hat{f})$ permet de projeter $\tilde{\mu}$ sur $\hat{\mu}$ telle que $\hat{\pi}_*(\hat{\mu}) = \mu$. On a donc bien relevé la mesure μ en une mesure $\hat{\mu}$.

Supposons maintenant μ de plus ergodique. Notons $X_* = C^-(f) \cup X_0 \cup X_1$. Rappelons que $\hat{\mu}(\hat{\pi}^{-1}(X_*)) = \mu(X_*) = 0$ par hypothèse. Soit $\hat{A}$ un borélien $\hat{f}^{-1}$-invariant de $\hat{X}$. Posons $A = \hat{\pi}(A)$. Le résultat d'injectivité éventuelle (2.3) va nous permettre de conclure que

$$(*) \qquad \hat{A} = \hat{\pi}^{-1}(A) \text{ modulo } \hat{\pi}^{-1}(X_*),$$

ce qui entraînera que A est également invariant, donc A est trivial ($\mu(A) = 0$ ou 1), donc $\hat{A}$ aussi: mais c'est dire que $\hat{\mu}$ est ergodique. Montrons donc (*):

Clairement $\hat{\pi}^{-1}(A) \supset \hat{A}$. Examinons l'inclusion réciproque. Soit $\hat{x} \in \hat{\pi}^{-1}(A \setminus X_*)$. $\hat{x}$ n'est pas *a priori* dans $\hat{A}$, mais il existe $\hat{y} \in \hat{A}$ tel que $\hat{\pi}(\hat{x}) = \hat{\pi}(\hat{y}) \notin X_*$. L'injectivité éventuelle implique qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\hat{f}^n(\hat{x}) = \hat{f}^n(\hat{y})$: $\hat{x} \in \hat{f}^{-n}(\hat{A})$. Mais $\hat{A}$ est invariant: $\hat{x} \in \hat{A}$. On a montré (*), donc l'ergodicité de $\hat{\mu}$.

S'il existait deux relèvements $\hat{\mu}$ et $\hat{\mu}'$, $\frac{1}{2}(\hat{\mu} + \hat{\mu}')$ serait un relèvement non-ergodique de μ: c'est impossible. On a donc unicité du relèvement dans le cas ergodique. L'unicité dans le cas général s'en déduit facilement en "désintégrant" la mesure μ.

Il ne reste plus qu'à montrer $h_\mu(f) = h_{\hat{\mu}}(\hat{f})$.

L'alphabet $\mathrm{Fut}_X(f,P)$ de $\hat{\Sigma}_+(f,P)$ définit une partition mesurable et dénombrable $\hat{P}$ de $\hat{X}$ telle que, pour tout élément $\hat{A} \in \hat{P}$, la projection $\hat{\pi} : \hat{X} \to X$ restreinte à $\hat{A}$ est une injection.

$\hat{P}$ étant dénombrable, il existe $\hat{A} \in \hat{P}$ tel que $\hat{\mu}(\hat{A}) > 0$. Fixons-en un.

Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ des partitions de X, finies, de plus en plus fines, et dont l'union engendre les boréliens de X. En particulier:

$$h_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(f, Q_n)$$

On suppose de plus que $\hat{\pi}(\hat{A})$ est Q_n-mesurable pour tout $n \geq 0$.

On pose $\hat{Q}_n = \hat{\pi}^{-1}Q_n \vee \{\hat{A}, \hat{X} \setminus \hat{A}\}$. Comme $\hat{\mu}(\hat{A}) > 0$, que $\hat{\pi} : \hat{A} \to \hat{\pi}(\hat{A})$ est injective et que $\hat{\mu}$ est ergodique, l'union des $\hat{Q}_n$, $n \geq 0$, engendre, modulo $\hat{\mu}$, les boréliens de $\hat{X}$. Donc:

$$h_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = \lim_{n\to\infty} h_\mu\left(\hat{f}, \hat{Q}_n\right)$$

Montrons, en appliquant le théorème de Shannon-McMillan-Breiman simultanément à $(\hat{f}, \hat{\mu}, \hat{Q}_n)$ et (f, μ, Q_n) l'égalité $h_{\hat{\mu}}(\hat{f}, \hat{Q}_n) = h_\mu(f, Q_n)$. Pour $\hat{\mu}$-presque tout $\hat{y} \in \hat{X}$:

$$h_{\hat{\mu}}(\hat{f}, \hat{Q}_n) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} \log \hat{\mu}(\hat{Q}_n^{\vee k}(\hat{y}))$$

$$h_\mu(f, Q_n) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} \log \mu(Q_n^{\vee k}(\hat{\pi}\hat{y}))$$

$\hat{\mu}(\hat{A}) > 0$: les égalités précédentes ont donc lieu pour des points ($\hat{\mu}$-presque tous les points) de $\hat{A}$. Mais si $\hat{y}$ est un point de $\hat{A}$, on a, si on note $y = \hat{\pi}(\hat{y})$,

$$\hat{Q}_n^{\vee k}(\hat{y}) = \hat{A} \cap \hat{\pi}^{-1}(Q_n^{\vee k}(y)).$$

Donc:

$$h_{\hat{\mu}}(\hat{f}, \hat{Q}_n) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} \log \hat{\mu}(\hat{A} \cap \hat{\pi}^{-1} Q_n^{\vee k}(y))$$

Or $\mu(B) = 0 \implies \hat{\mu}(\hat{\pi}^{-1}B) = 0 \implies \hat{\mu}(\hat{A} \cap \hat{\pi}^{-1}B) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym donne donc $h \in L^1(\mu)$ telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$\hat{\mu}(\hat{A} \cap \hat{\pi}^{-1} Q_n^{\vee k}(y)) = \int_{Q_n^{\vee k}(y)} h \, d\mu$$

Donc:

$$(**)\quad h_{\hat{\mu}}(\hat{f}, \hat{Q}_n) = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} \log \mu(Q_n^{\vee k}(y)) - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \left(\frac{1}{\mu(Q_n^{\vee k}(y)} \int_{Q_n^{\vee k}(y)} h \, d\mu \right)$$

Pour $\hat{\mu}$-presque tout $\hat{y} \in \hat{A}$, donc pour un ensemble de y de μ-mesure positive. Or le théorème de convergence des martingales (les Q_n sont de plus en plus fines et "tendent vers" les boréliens modulo μ) implique:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu(Q_n^{\vee k}(y)} \int_{Q_n^{\vee k}(y)} h \, d\mu \to h(y)$$

et $0 < h(y) < \infty$ pour $\hat{\mu}$-presque tout $\hat{y} \in \hat{A}$. On en déduit que le second terme de (**) est nul. Le premier terme n'est autre que $h_\mu(f, Q_n)$. L'égalité des entropies est démontrée. □

D Obstacles à la construction d'une extension markovienne

On donne ci-dessous deux propriétés des facteurs topologiques des chaînes de Markov. On peut les voir *a contrario* comme des exemples d'obstacles empêchant la construction d'une extension markovienne pour certains systèmes symboliques.

(2.13) Proposition. *Soit $\Sigma_+(G)$ une chaîne de Markov irréductible se projetant par une application par bloc π surjectivement sur un système symbolique, non nécessairement markovien, S_+ d'alphabet noté $\mathcal{A}$. On a l'alternative suivante:*

(1) *ou bien S_+ est réduit à une orbite périodique.*
(2) *ou bien S_+ porte une mesure d'entropie strictement positive.*

Preuve. On sait qu'on peut supposer que π est une application par bloc d'ordre 1. D'autre part, quitte à considérer un itéré de σ, on peut se ramener à G irréductible et apériodique. Si $\pi : G \to \mathcal{A}$ est constante, valant par exemple 0, alors $S_+ = \pi(\Sigma_+(G)) = \{0^{*\infty}\}$. Sinon soit $g_1, g_2 \in G$ tels que $\pi(g_1) \neq \pi(g_2)$. Il existe $N < \infty$ tel qu'il existe un chemin sur G et de longueur N joignant g_i à g_j pour $(i,j) \in \{1,2\}^2$. On en déduit facilement que le shift sur 2 symboles est inclus dans (S_+, σ^N): d'où l'existence de la mesure annoncée avec entropie $\frac{1}{N}\log 2 > 0$. □

D'autre part, en anticipant sur les notions d'entropie étudiées au chapitre 3, on observe que le système symbolique doit avoir suffisamment d'orbites périodiques:

(2.14) Proposition. *Soit S_+ un système symbolique et $S_+^{\sim}$ son extension markovienne spéciale. Notons $\mathrm{Per}_n(S_+)$ le nombre d'orbites de période n. On a:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Per}_n(S_+) \geq h_{\mathrm{abs}}(S_+^{\sim})$$

Preuve. C'est clair d'après la propriété de relèvement unique et d'après l'égalité (cf. chap. 3) $h_{\mathrm{abs}}(S_+^{\sim}) = h_G(S_+^{\sim})$.

DEUXIÈME PARTIE

CHAÎNES DE MARKOV TOPOLOGIQUES

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude des chaînes de Markov topologiques du point de vue combinatoire et ergodique.

On commence par donner les notions d'entropies pertinentes pour ces systèmes non-compacts. On rappelle ensuite les principaux résultats de la théorie de Vere-Jones étudiant cette combinatoire. On donne enfin une démonstration du théorème de Gurevič sur les mesures maximales.

Il s'agit essentiellement de rappels de résultats bien connus. On ne fait qu'y ajouter quelques remarques comme un critère d'égalité des différentes entropies, une majoration du nombre de chemins issus d'un point donné (et d'extrémité quelconque) et une condition suffisante pour l'existence d'une mesure maximale. Ces trois résultats sont reliés à la notion d'entropie à l'infini que nous introduisons ici.

On n'utilise dans la suite de la thèse que les définitions du chapitre 3 et le théorème du chapitre 5.

CHAPITRE 3

NOTIONS D'ENTROPIE POUR LES CHAÎNES

Dans ce chapitre on introduit différentes notions d'entropies pertinentes pour ces systèmes en général *non-compacts* que sont les chaînes de Markov topologiques. On s'appuie notamment sur une revue de B. Kitchens [26].

On commence par constater que l'entropie topologique classique est infinie pour ces systèmes. Une première possibilité, c'est de maintenir la liaison, *via* le principe variationnel, avec les entropies métriques. On aboutit ainsi à l'entropie de B.M. Gurevič. Cependant, celle-ci n'est pas définie par les systèmes symboliques généraux et n'a pas de bonnes propriétés vis-à-vis des extensions topologiques. Ces deux points motivent l'introduction de l'entropie de Salama qui, de plus, nous sera plus facilement accessible.

Enfin on donne une condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de ces entropies.

On considère, dans tout ce chapitre, un graphe simple T, irréductible et non-trivial et d'alphabet effectif A infini. A cause de la non-compacité (1.14), l'entropie topologique n'est pas intéressante:

(3.1) Lemme. *Si T est irréductible et d'alphabet effectif A infini, l'entropie topologique de $\Sigma_+(T)$ est infinie.*

Preuve. On considère la distance d_T définie par la longueur des chemins sur A p. 7. Pour $a \in A$ et $0 \leq n < \infty$, on note $B(a,n)$ la boule de centre a et de rayon n. S'il existe une boule (de rayon fini) de cardinal infini alors le résultat est clair. Plaçons-nous dans le cas contraire.

On va montrer qu'il existe une suite infinie de mots sur T, $(w^n)_{n\geq 1}$, tels que

$$(*) \qquad \begin{aligned} &|w^n| = n \\ &w_i^n = w_j^m \implies n = m \text{ et } i = j \end{aligned}$$

la dernière condition dit simplement qu'une même lettre n'apparaît jamais deux fois.

Voyons tout de suite que cela donne le résultat. Soit $(v^n)_{n\geq 1}$ une énumération des suites finies d'entiers ≥ 0 avec $|v^n| \leq n$. Soit $k \geq 1$. Posons, pour $0 \leq l \leq k-1$,

$$U_l = \bigcup_{v_i^n = l} <w_i^n>_T$$

et U_k le complémentaire de leur union. U_k est une union de cylindres donc est ouvert. Vu (*), $P_k = \{U_0, \ldots, U_{k-1}, U_k\}$ est une partition en ouverts. Pour chaque $n \geq 1$, la partition P_k définit une application de $\Sigma_+(T)$ dans $\{0, \ldots, k\}^n$ par: $x \mapsto l_0 \ldots l_{n-1}$ tel que $f^i(x) \in U_{l_i}$.

Cette application est surjective: si $s \in \{0,\dots,k\}^n$, il existe $m \geq 1$ tel que $v^m = s$ et $x \in \Sigma_+(T)$ tel que $x_i = w_i^m$ $(0 \leq i < n)$: x est bien associé au mot s.

Donc $\operatorname{card} \bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i} P_k = (k+1)^n$ et $h_{\text{top}}(\Sigma_+(T), P_k) = \log(k+1)$:

$$h_{\text{top}}(\Sigma_+(T)) = \infty.$$

Il n'y a plus qu'à démontrer l'existence d'une suite w vérifiant (*). On procède par récurrence. Soit $w^1 = a$ un élément arbitraire de A. Supposons $w^1, \dots, w^n$ définis pour un $n \geq 1$. Construisons w^{n+1} évitant A_n, les symboles déjà utilisés, i.e. les w_i^k pour $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq i < |w^k| \leq n$.

Soit $A' = \bigcup_{a \in A_n} B(a, 2(n+2) + \operatorname{diam}(A_n))$ (toujours avec la distance d_T). $A \setminus A'$ est non-vide car A_n est fini et, par hypothèse, toute boule est un ensemble fini. Prenons $a \notin A'$. Soit $b \in A_n$ tel que $d_T(a,b)$ soit minimal. Soit $a_0 \dots a_r$ un chemin minimal de a vers b et $b_{-s} \dots b_0$ un chemin minimal de b vers a.

Soit $i, j \geq 0$ minimaux tels que $a_i \in A_n$ et $b_{-j} \in A_n$. Il existe un chemin de a_i vers b_i de longueur inférieure à $\operatorname{diam}(A_n)$. Donc $d_T(a_i, a) \leq i + \operatorname{diam}(A_n) + j$ et on a donc $i + j \geq 2(n+2)$. Donc $a_0 \dots a_{i-1}$ ou $b_{-j+1} \dots b_0$ est un chemin de longueur au moins $n+1$, et ce chemin ne rencontre pas A_n. Les chemins ayant été choisis minimaux, ils ne contiennent pas deux fois le même symbole. On prend w^{n+1} comme les $n+1$ premiers symboles du chemin obtenu. □

Rappelons la définition de l'entropie de Bowen:

(3.2) Définition (R. Bowen [2]). *Soit $f : X \to X$ une application uniformément continue sur un espace métrique non-nécessairement compact. Pour tout compact $K \subset X$, on pose*

$$h_B(f,K) = \lim_{\epsilon \to 0+} h_B(f,K,\epsilon) \text{ et } h_B(f,K,\epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(\epsilon, n, K)$$

*où $r(\epsilon, n, K)$ est le nombre minimal de (ϵ, n)-**boules***

$$B_n(x,\epsilon) = \{y \in X : d_n(y,x) := \max_{0 \leq k < n} d(f^k y, f^k x) < \epsilon\}$$

*nécessaires pour recouvrir K. L'**entropie de Bowen** de f est alors*

$$h_B(f) = \sup_K h_B(f,K)$$

K parcourant les compacts.

Mais $\Sigma_+(T)$ n'étant pas compact, le choix de la métrique n'est pas indifférent. En fait, si on prend le supremum sur les métriques, on obtient à nouveau une quantité infinie (B. Kitchens [26]).

Il convient donc de trouver une "bonne" définition pour l'entropie dans ce contexte. Plusieurs définitions en général non-équivalentes sont possibles. On présente ici l'entropie de Gurevič (section 1), l'entropie de Salama (section 2) et sa variante dite "combinatoire". On donne enfin une condition nécessaire et suffisante d'égalité.

1 Entropie de Gurevič

Rappelons le principe variationnel: pour un système dynamique (X, f), continu et compact, l'entropie topologique vérifie

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} h_\mu(f)$$

Remarquons que l'expression dans le membre de droite ne dépend pas de la structure topologique de X. On l'appelle donc **entropie absolue** et on la note $h_{\text{abs}}(f)$. Elle a un sens pour tout système mesurable, en particulier symbolique. Il reste à voir s'il est possible de la calculer sans recourir aux mesures invariantes, de façon combinatoire.

B.M. Gurevič a résolu ce problème dans le cas des chaînes de Markov:

(3.3) Définition. *Soit $B \subset A$. On appelle* **entropie de Gurevič** *("loop entropy") la quantité*

$$h_G(B) = \sup_{a,b \in B} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_B(a, b, n)$$

avec $N_B(a, b, n)$ le nombre de chemins sur le graphe $T|B$ joignant a à b et de longueur n.

Si B est irréductible alors on peut fixer $a, b \in B$ arbitrairement au lieu de prendre le supremum. En particulier, l'entropie de Gurevič se calcule bien dans ce cas à l'aide du nombre de boucles de longueur n de point de base fixé (on fixe $a = b$), c'est-à-dire le nombre de points périodiques de période n dans $<a>_T$.

L'égalité annoncée de l'entropie de Gurevič avec l'entropie absolue découle du résultat suivant:

(3.4) Théorème (B.M. Gurevič [13]). *Soit $\overline{A} = A \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de A et $\overline{\Sigma_+(T)}$ la fermeture topologique de $\Sigma_+(T)$ dans le compact $\overline{A}^{\mathbb{N}}$. $(\overline{\Sigma_+(T)}, \sigma)$ est un système dynamique continu et compact, dont les mesures invariantes sont de la forme:*

$$\mu = t\mu' + (1 - t)\delta_\infty$$

avec $\mu' \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(T))$, $0 \leq t \leq 1$ et δ_∞ est la masse de Dirac sur le point fixe correspondant à ∞. On a

$$h_G(T) = h_{\text{abs}}(\Sigma_+(T)) = h_{\text{top}}(\overline{\Sigma_+(T)})$$

(3.5) Corollaire 1. *L'entropie de Gurevič est invariante par conjugaison mesurable, a fortiori topologique:*

Toutefois si on suppose seulement que $\Sigma_+(T_2)$ est un facteur topologique de $\Sigma_+(T_1)$ alors **on n'a pas nécessairement** $h_G(\Sigma_+(T_2)) \leq h_G(\Sigma_+(T_1))$. D'après un exemple de K. Petersen [38], ce n'est pas vrai même si i une application par bloc (cf. ci-dessous (3.10)).

(3.6) Corollaire 2. *L'entropie de Gurevič peut se calculer comme l'entropie de Bowen si on munit $\Sigma_+(T)$ de la métrique*

$$d_*(x,y) = \sum_{k\geq 0} 2^{-k}\delta_*(x_k, y_k)$$

avec $\delta_*(a,b) = |a^{-1} - b^{-1}|$ une identification de l'alphabet avec $\mathbb{N}$ étant fixée.

Preuve. La distance d_* sur $\Sigma_+(T)$ s'étend à une distance sur le compact $\overline{\Sigma_+(T)}$. □

Remarques.

1. I. Salama [42, 3.7] a montré que $h_G(T)$ pouvait prendre toute valeur positive ou infinie par opposition au cas compact (sous-shift de type fini) qui, comme logarithme d'un nombre de Pisot (en particulier algébrique), ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs.

2. L'entropie de Gurevič ne se laisse pas définir sur un système symbolique quelconque même compact: par exemple, il existe des sous-shifts (systèmes symboliques compacts) d'entropie positive et dépourvus d'orbites périodiques. C'est une conséquence du théorème de représentation de Krieger: tout système dynamique mesuré ergodique, d'entropie finie, est isomorphe à un sous-shift minimal uniquement ergodique muni de son unique mesure invariante.

Donnons un exemple élémentaire (inspiré des flots de Toeplitz). On utilise le

(3.7) Lemme. *Si $u \in \Sigma_+(2)$ est tel que, pour toute période $p \geq 1$, il existe $m(p) < \infty$ tel que:*

$$\forall n \geq 0 \ \ \exists 0 \leq k_1, k_2 \leq m(p) \ \ p|(k_2 - k_1) \text{ et } u_{n+k_1} \neq u_{n+k_2}$$

($m(p)$ est indépendant de n), alors le sous-shift $S = \overline{\{\sigma^k u : k \geq 0\}}$ est dépourvu d'orbites périodiques.

Admettons provisoirement ce lemme pour construire l'exemple. Soit $q_r = 50(r!)$ pour $r \geq 2$, i.e. une suite avec les propriétés: i) $q_2 = 100$; ii) $r|q_r$; iii) $2q_r < q_{r+1}$ et $q_r|q_{r+1}$. A chaque $n \geq 1$ multiple de 100, on associe les entiers r et k tels que $n = q_r k, r \geq 2$ et $q_{r+1} \nmid n$. On pose:

$$(*) \qquad u_n \equiv k \mod 2$$

on note $r = r(n)$.

Cela définit u_n pour $n > 0$ multiple de 100. On va remplir les autres positions de façon à ce que pour tous $a_0 \dots a_{n-1} \in \{0,1\}^n$, $n \geq 1$, il existe $k \geq 1$ tels que $u_{k+i} = a_i$ si $100 \nmid i$. Cela entraînera que l'entropie topologique de S est minorée par $(1 - \frac{1}{100})\log 2 > 0$.

Soit v_n une suite contenant toutes les suites finies sur $\{0,1\}$ ($F_*(v) = \Sigma_*(2)$) on pose

$$u_n = v_n \qquad 100 \nmid n \text{ ou } n = 0.$$

(*) assure que l'hypothèse du lemme est satisfaite avec $m(p) = q_{p+1}$: soit $p \geq 1$; si $k_i \equiv iq_p \mod q_{p+1}$ pour $i = 1,2$ alors $r(k_i) = p$ ($2q_p < q_{p+1}$) donc $u_{k_1} = 1$,

$u_{k_2} = 0$ et $k_2 - k_1$ est un multiple de q_p, en particulier de p. Donc S est sans orbites périodiques.

Preuve du lemme. Soit $x \in S$. Si x était p-périodique ($p \geq 1$) alors $x_i = x_{i+p}$ pour tout $i \geq 0$. Vu la définition de S il existe $n \geq 0$ tel que $x_i = u_{i+n}$ pour $0 \leq i \leq m(p)$. Par hypothèse il existe $0 \leq k_1, k_2 \leq m(p)$ $u_{k_1+n} \neq u_{k_2+n}$ et $k_2 - k_1$ multiple de p. Mais $u_{k_i+n} = x_{k_i+n}$ contredisant la p-périodicité de x. □

2 Entropie de Salama

I. Salama a introduit la quantité suivante naturellement définie pour tout système symbolique (et pas seulement les chaînes de Markov).

(3.8) Définition. *Soit $R \subset \Sigma_+(A)$ un système symbolique sur un alphabet A. On appelle* **entropie de Salama** *("block entropy") en $a \in A$ de R la quantité*

$$h_S(R|a) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log B_R(a,n)$$

avec $B_R(a,n) = \operatorname{card} \Sigma_n(R,a)$ le nombre de mots ("blocks") commençant par a. On appelle entropie de Salama de R la quantité

$$h_S(R) = \sup_{a\in A} h_S(R|a)$$

Dans le cas où le système symbolique est markovien, l'hypothèse de transitivité topologique (i.e. le graphe correspondant est irréductible) rend le supremum sur A inutile. Remarquons à ce propos que c'est faux pour un système symbolique seulement supposé transitif (contrairement à l'affirmation [42, 1.9]): $h(S|a)$ peut dépendre de a (même si le système symbolique est compact).

Exemple. Considérons l'ensemble S_0 des suites finies de la forme:

$$0\underbrace{1\ldots1}_{n}s_1\ldots s_n$$

avec $s_i \in \{2,3\}$ et $n \geq 6$ (les emplacements des s_i sont appelés positions libres). Soit S_1 l'ensemble des suites infinies unilatérales obtenues par concaténation de suites de S_0. On prend $S = \overline{\bigcup_{k\geq 0} \sigma^k S_1}$. On a:

$$S = \bigcup_{k\geq 0} \sigma^k \Big(S_1 \cup \{w^1 * w^2 * \cdots * w^r 01^{*\infty} : r \geq 0 \text{ et } w^i \in S_0\} \cup \{1^{*r}u : r \geq 0 \text{ et } u \in \{2,3\}^{\mathbb{N}}\} \Big)$$

S est compact et transitif.

On décrit un mot de longueur n de $\Sigma_*(S)$ en précisant

(1) la position des 0: le nombre de choix est majoré par

$$\sum_{k=0}^{E(n/12)+1} C_n^k \leq \frac{n}{10} C_n^{n/10} \quad (\text{pour } n \geq 60).$$

(2) le début des positions libres suivant le dernier zéro: $E(\frac{n}{2}+1)$.

(3) les symboles occupant les positions libres.

Si le mot commence par 0 alors ses n premiers symboles comportent au plus $n/2$ positions libres, donc

$$h_S(S|0) \leq (1/10)\log 10 + (9/10)\log(10/9) + (1/2)\log 2 < \log 2.$$

Mais $h_S(S|2) \geq \log 2$. □

L'entropie de Salama peut s'exprimer comme une entropie de Bowen (3.2):

$$h_S(S) = h_B((S, d_1))$$

où S est muni de la distance $d_1(x,y) = \sum_{i\geq 0} 2^{-i}\delta(x_i, y_i)$ avec $\delta(a,a') = 0$ si $a = a'$ et 1 sinon.

Nous serons également amené à considérer la variante suivante:

(3.9) Définition. *On appelle* **entropie combinatoire** *la quantité*

$$h_C(S) = \lim_{n\to\infty} \sup_{a\in A} \frac{1}{n} \log B_S(a,n)$$

Si le système symbolique S est compact, alors $h_S(S) = h_C(S) = h_{\text{top}}(S)$. Dans le cas général,

$$h_S(S) \leq h_C(S)$$

Contrairement à l'entropie de Gurevič, ces entropies se comportent bien dans les projections par blocs:

(3.10) Définition. *Soit $S_i \subset \Sigma_+(A_i)$ $(i = 1,2)$. On dit qu'une application $\pi : S_1 \to S_2$ est une* **application par blocs** *d'ordre r $(1 \leq r < \infty)$ s'il existe une application $\pi_r : A_1^r \to A_2$ telle que*

$$\pi : (x_i)_{i\geq 0} \longmapsto (\pi_r(x_i x_{i+1} \dots x_{i+r-1}))_{i\geq 0}$$

Remarquons que quitte à changer d'alphabet comme dans (1.4), on peut supposer que $r = 1$. On se restreint désormais à ce cas: sauf mention contraire, le terme "application par blocs" désignera une application par **bloc d'ordre 1.**

(3.11) Proposition (d'après I. Salama [42,1.13]). *Soit A_1, A_2 deux alphabets, S_1 resp. S_2 un système symbolique sur A_1 resp. A_2 et $\pi : S_1 \to S_2$ une application par blocs.*

(1) *Si, pour tout $a \in A_1$, l'application $\pi^n : u \mapsto v$ qui à u un mot de longueur n de S_1 commençant par $u_0 = a$ associe un mot v de S_2 $(v_i = \pi(u_i))$ est* injective *alors*

$$h_S(S_2) \geq h_S(S_1).$$

(2) *Si $\pi : S_1 \to S_2$ est* localement surjective *dans le sens où, pour tout $b \in A_2$, il existe une collection* finie *$a_1, \dots, a_k \in A_1$ telle que*

$$\pi(<a_1>_{S_1} \cup \dots \cup <a_k>_{S_1}) = <b>_{S_2}$$

alors

$$h_S(S_2) \leq h_S(S_1).$$

Ces énoncés subsistent si on remplace h_S par h_C.

Preuve. La propriété (1) implique que $h_S(S_2|\pi(a)) \geq h_S(S_1|a)$. Ce qui entraîne, quand a décrit A_1, $h_S(S_2) \geq h_S(S_1)$.

De même la surjectivité de $\pi : \pi(<a_1>_{S_1} \cup \cdots \cup <a_k>_{S_1}) \to <b>_{S_2}$ implique que, pour tout $n \geq 0$,

$$B_{S_1}(a_1, n) + \cdots + B_{S_1}(a_k, n) \geq B_{S_2}(b, n)$$

Donc il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $h_S(S_1|a_i) \geq h_S(S_2|b)$. La surjectivité de $\pi : S_1 \to S_2$ entraîne $h_S(S_1) \geq h_S(S_2)$. □

I. Salama [42,1.13] donne un exemple de projection par bloc avec $h_S(S_1) < h_S(S_2)$ (S_2 n'est pas une chaîne de Markov).

(3.12) Définition. *Si $\pi : S_1 \to S_2$ est une application par blocs vérifiant simultanément les deux conditions (1) et (2) ci-dessus, et si, pour tout $b \in S_2$, les collections $a_1, \ldots, a_k \in A_1$ peuvent être choisies réduites à un seul élément a, on dit que $\pi : S_1 \to S_2$ vérifie la* **propriété de relèvement faible**.

On a vu (cf. chapitre 2) que l'extension markovienne de Hofbauer ou bien spéciale, d'un système symbolique jouit de cette propriété: l'entropie de Salama et l'entropie combinatoire sont donc prérvées par cette construction.

Notons toutefois que les entropies h_S, h_C ne sont pas topologiquement invariantes: B. Kitchens [26, 2.25] donne un contre-exemple. L'homéomorphisme conjugant n'est pas une application par bloc, ce qui est en soi intéressant: les homéomorphismes conjugant deux systèmes symboliques compacts sont toujours des applications par blocs.

3 Comparaison entre l'entropie de Gurevič et l'entropie de Salama

Trivialement $h_G(B) \leq h_S(B)$. Donnons un exemple avec inégalité stricte. Soit $(m_i)_{i\geq 0}$ et $(d_i)_{i\geq 0}$ deux suites d'entiers strictement positifs. Posons $M_i = 1 + \sum_{j<i}(m_j - 1)$ pour $i \geq 0$ et prenons:

(1) comme alphabet: $A = \{(i,j) : i \geq 0 \text{ et } -d_i \leq j < M_i\}$.

(2) comme flèches: pour $i \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&(i,j) \to (i+1, j') \qquad \text{si } 0 \leq j \leq j' < j + m_i \leq M_{i+1} \\
&(i,j) \to (i,-1) \qquad \text{si } 0 \leq j < M_i \\
&(i,-1) \to (i,-2) \to \cdots \to (i,-d_i) \to (0,0)
\end{aligned}$$

On remarque que le nombre de boucles de longueur n basées en $(0,0)$ est

$$T^n(0,0) \leq \sum_{(k_1,\ldots,k_r)} \left(\prod_{j=0}^{k_1-1} m_j\right) \cdots \left(\prod_{j=0}^{k_r-1} m_j\right)$$

la sommation portant sur les suites finies d'entiers positifs $(k_1, \ldots, k_r)$ telles que

$$(k_1 + d_{k_1} + 1) + \ldots (k_r + d_{k_r} + 1) = n.$$

D'autre part, le nombre de chemins de longueur n commençant en $(0,0)$ est minoré par $\prod_{j=0}^{n} m_j$.

Si on prend $m_i = 2$ et $d_i = \max(i, 99)$ pour tout $i \geq 0$, alors, ci-dessus $r \leq n/100$ et le nombre de suites $k_1, \ldots, k_r$ est majoré par $\frac{n}{100} C_n^{n/100}$ et $k_1 + \cdots + k_r$ est majoré par $n/2$ donc $h_G(T) \leq \log 2/2 + h(1/100)$, avec $h(t) = -t \log t - (1-t)\log(1-t)$. D'autre part, $h_S(T) \geq \log 2$. On a bien $h_S(T) > h_G(T)$.

Si on prend $m_i = i$ et $d_i = \max(E(\log i!), 99)$, alors $h_G(A) < \infty = h_S(T)$. I. Salama a montré bien plus:

(3.13) Proposition (I. Salama [42]). *Pour tous α, β tels que*

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \infty$$

il existe une chaîne de Markov irréductible telle que

$$h_G(T) = \alpha \text{ et } h_S(T) = \beta$$

Question (I. Salama): Quand a-t-on $h_G(T) = h_S(T)$?

I. Salama a donné un critère pour une classe particulière de graphes [42, (3.4)]. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante dont le sens est le suivant: $h_S(T) > h_G(T)$ si la "plupart" des chemins partent à l'infini. La quantité suivante compte ces chemins:

(3.14) Définition. *On appelle* **entropie (de Salama) à l'infini** *la quantité définie par*

$$h_S^\infty(T) = \lim_{n \to \infty} h_S(A \setminus A_n)$$

*avec A_n une suite croissante arbitraire de parties finies de A telle que $\bigcup_{n \geq 0} A_n = A$. On définit de même l'***entropie de Gurevič à l'infini** *et l'***entropie combinatoire à l'infini***: $h_G^\infty(T)$ et $h_C^\infty(T)$.*

Remarquons que $h_G^\infty(T) \leq h_S^\infty(T) \leq h_C^\infty(T)$.

(3.15) Théorème. *Soit T un graphe simple et irréductible, d'alphabet A. Si T n'est pas localement fini, $h_S(T) = \infty$.*

Si T est localement fini alors:

$$h_S(T) = \max(h_G(T), h_S^\infty(T)),$$

et de même, l'entropie combinatoire vérifie $h_C(T) = \max(h_G(T), h_C^\infty(T))$.

Remarque. Si T est l'extension de Hofbauer (chapitre 2) d'un système symbolique compact S, ce résultat peut être obtenu comme un corollaire du théorème de relèvement de Keller [24, théorème 2 + proposition 1]:

On a la propriété de relèvement faible, donc $h_C(T) = h_C(S) = h_{\text{top}}(S)$ et la quantité notée par G. Keller $r_\infty(\mathcal{G})$ est égale à $e^{h_C^\infty(T)}$.

Preuve. Traitons d'abord le cas de h_C. Posons $h = \max(h_G(T), h_C^\infty(T))$. On a $h_C(T) \geq h$. Etudions l'inégalité réciproque. Soit $\epsilon > 0$. On veut majorer $B_T(a, n)$ pour n grand, indépendamment de $a \in A$.

Soit A_N une partie finie de A telle que $h_C(A \setminus A_N) \leq h_C^\infty(T) + \epsilon$ et $h_S(A \setminus A_N) \leq h_S^\infty(T) + \epsilon$. Définissons le bord de A_N comme

$$\mathrm{Bd}(A_N) = \{b \in A \setminus A_N : \exists a \in A_N \;\; b \in \mathrm{succ}(a)\}$$

Vu l'hypothèse T localement fini, $\mathrm{Bd}(A_N)$ est finie.

Soit $n \geq 0$ et $a \in A$. On considère les chemins $w_0 \dots w_n$ sur A, issus de $w_0 = a$. On note

$$k_i(w) = \min\{n, 0 \leq k \leq n : w_k \in A_N\} \text{ et } k_f(w) = \max\{0, 0 \leq k \leq n : w_k \in A_N\}.$$

Soit $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$. Considérons parmi ces chemins ceux tels que $k_i(w) = k_1$ et $k_f(w) = k_2$. Leur nombre est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{b \in A_N} \sum_{c \in \mathrm{Bd}(A_N)} & N_{A \setminus A_N}(k_1, a, b) N_T(b, c, k_2 - k_1) B_{A \setminus A_N}(c, n - k_2 + 1) \\ & \leq K_1 e^{(h_C^\infty(T)+\epsilon)k_1} K_2 e^{(h_G(T)+\epsilon)(k_2-k_1)} K_3 e^{(h_S^\infty(T)+\epsilon)(n-k)} \\ & \leq K_1 K_2 K_3 e^{(h+\epsilon)n} \end{aligned}$$

avec K_1, K_2, K_3 constantes finies (A_N et $\mathrm{Bd}(A_N)$ sont des parties finies de A). Donc, en sommant sur $k_1, k_2 = 0, \dots, n$,

$$B_A(a, n) \leq K_1 K_2 K_3 (n+1)^2 e^{(h+\epsilon)n}$$

On en déduit $h_C(T) \leq h + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. L'égalité concernant h_C est démontrée. Pour $h_S(T)$ il suffit de reprendre le raisonnement avec a fixé On peut donc prendre $A_N \ni a$. Alors $k_1 = 0$ et on obtient la majoration avec $h' = \max(h_G(T), h_S^\infty(T))$ à la place de h. □

CHAPITRE 4

ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DU NOMBRE DE CHEMINS

Ce chapitre étudie les propriétés asymptotique des chaînes de Markov.

On rappelle (section 1) les principaux résultats la théorie de D. Vere-Jones qui, en généralisant la théorie de Perron-Frobenius de l'itération des matrices positives permet d'obtenir des *équivalents fins* du nombre de chemins d'extrémités données, notamment pour la classe des matrices dites positives-récurrentes.

On présente un résultat analogue pour le nombre de chemins d'origine fixé (un résultat de ce genre a été énoncé par F. Hofbauer [17]).

Ces résultats illustrent la précision avec laquelle peuvent être analysées les chaînes de Markov topologiques.

1 Théorie de Vere-Jones

D. Vere-Jones a étudié dans deux articles [46,47] la généralisation de la théorie de Perron-Frobenius sur l'itération des matrices finies positives [43] aux "matrices" positives mais définies sur un ensemble d'indice infini dénombrable, i.e. les applications $P : A \times A \to \mathbb{R}_+$. Comme dans le cas des matrices finies, P définit deux opérateurs sur les vecteurs (éléments de $\mathbb{C}^A$):

$$X \mapsto P \cdot X = \left(\sum_{b \in A} P(a,b) X(b) \right)_{a \in A} \qquad \text{et} \qquad X \mapsto X \cdot P = \left(\sum_{a \in A} X(a) P(a,b) \right)_{b \in A}$$

(4.1) Définition. *Soit A un alphabet et T une matrice positive irréductible sur A. Soit $a \in A$.*

La série génératrice associée au poids des chemins joignant deux symboles $a, b \in A$ est notée:

$$t_{ab}(z) = \sum_{n \geq 0} T^n(a,b) z^n.$$

On note $\ell^n(a,b)$ la somme des poids des chemins $w_0 \dots w_n$ sur T tels que $w_0 = a$, $w_n = b$ et $w_i \neq a$ pour $0 < i < n$. La série génératrice associée est:

$$\ell_{ab}(z) = \sum_{n \geq 0} \ell^n(a,b) z^n.$$

On note $\ell'_{ab}(z) = \sum_{n \geq 1} n \ell^n(a,b) z^{n-1}$ la série obtenue par dérivation de $\ell_{ab}(z)$.

On appelle **valeur de Perron** *de T l'inverse du rayon de convergence de $t_{aa}(z)$, pour $a \in A$ arbitraire. On la note $\lambda(T)$.*

Par définition, $\lambda(T) = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{T^n(a,a)}$. Soit $p = p(T)$ la période du graphe T. Comme la suite $n \mapsto t_{aa}(np)$ est super-multiplicative,

$$\lambda(T) = \lim\nolimits\uparrow_{n \to \infty} \sqrt[n]{T^n(a,a)}$$

et $T^n(a,a) \leq \lambda(T)^n$. T étant irréductible, $\lambda(T) \geq 1$.

C'est bien indépendant de a.

D. Vere-Jones a montré que ces séries génératrices permettent de classer les matrices positives selon le comportement asymptotique de leurs éléments $T^n(a,b)$ dont on a vu qu'ils représentaient les poids des chemins d'extrémités fixées.

(4.2) Définition (D. Vere-Jones [46,47]**).** *Soit T une matrice positive irréductible sur A, de valeur de Perron λ. Soit $a \in A$.*

On dit que T est λ-**transitoire** *si $t_{aa}(1/\lambda) < \infty$.*

Supposons que $t_{aa}(1/\lambda) = \infty$.

Si cette série ℓ'_{aa} vérifie $\ell'_{aa}(1/\lambda) = \infty$ alors on dit que T est λ-**nul-récurrent**. *Sinon on dit que T est* λ-**positif-récurrent**.

On peut montrer que ces notions ne dépendent pas du choix de a.

Remarquons que, même dans le cas où T est une matrice stochastique, ces notions ne coïncident pas nécessairement [26, 1.42 (iii)] avec les notions probabilistes homonymes. Toutefois nous n'utiliserons pas ces notions probabilistes et donc on omettra le λ.

Citons la caractérisation des matrices positives récurrentes mise en évidence par I. Salama:

(4.3) Proposition (I. Salama [42]**).** *Soit $T : A \times A \to \mathbb{R}_+$ une matrice positive irréductible. T est positif-récurrent ssi*

$$T' \leq T \text{ et } T' \neq T \implies h_G(T') < h_G(T).$$

i.e. toute suppression d'une flèche diminue (strictement) l'entropie de Gurevič.

Le théorème de Gurevič sur les mesures maximales (5.2) peut être également vu comme une caractérisation de cette propriété.

D. Vere-Jones a élucidé le comportement asymptotique des éléments de T^n si T n'est pas transitoire:

(4.4) Théorème (D. Vere-Jones [46,47]**).** *Soit T une matrice positive, irréductible, définie sur un alphabet A. Supposons T non-transitoire et de valeur de Perron $\lambda < \infty$. Notons $p = p(T)$ sa période. Alors*

(1) *les équations $L \cdot T = \lambda L$ et $T \cdot R = \lambda R$ définissent chacune une unique droite de $\mathbb{C}^A$ engendrée par un vecteur à coordonnée strictement positive que l'on note L, resp. R (ils sont définis chacun à un facteur près).*

(2) *si $L \cdot R = \sum_{a \in A} L_a R_a$ est fini alors T est positif-récurrent. Sinon T est nul-récurrent.*

(3) *Pour chaque $(a,b) \in A^2$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda^{-np} T^{np}(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{R \cdot L} R(a) L(b) & \text{si } T \text{ est positif-récurrent} \\ 0 & \text{si } T \text{ est nul-récurrent} \end{cases}$$

(4.5) Proposition (D. Vere-Jones). *Si T est une matrice positive irréductible, peut-être transitoire, alors*

T est positif-récurrent $\iff$ il existe L, R comme ci-dessus et tels que $L \cdot R < \infty$

Désormais si T est positif-récurrent on suppose les vecteurs R, L normalisés dans le sens où

$$R \cdot L = 1.$$

(il reste encore un facteur arbitraire).

Si T est un graphe simple, irréductible et positif-récurrent, l'estimation asymptotique (3) ci-dessus admet l'interprétation suivante en terme du système symbolique $\Sigma_+(T)$: le nombre de points périodiques dans un cylindre donné vérifie:

$$\text{card}\,(\text{Per}_{np}(\Sigma_+(T)) \cap <w_0 \dots w_r>_T) \sim \lambda^{np-r} L(w_0) R(w_r)$$

2 Compléments

Contrairement au cas général des systèmes dynamiques topologiques où l'entropie ne donne qu'un équivalent logarithmique du nombre d'orbites de longueur donnée, pour les chaînes de Markov on peut obtenir de vrais équivalents.

Très classiquement, on a:

(4.6) Lemme. *Soit T est un graphe simple, irréductible sur un alphabet A. Le nombre des boucles en un point fixé $a \in A$ est majoré par*

$$N_T(a, a, n) = T^n(a, a) \leq \lambda(T)^n$$

Si T est de plus positif-récurrent, le nombre des chemins d'extrémités fixées $a, b \in A$ est majoré par

$$N_T(a, b, n) \leq \frac{L(b)}{L(a)} \lambda(T)^n$$

Preuve. La première inégalité découle de la super-multiplicativité: $T^n(a,a)^k \leq T^{nk}(a,a)$. Donc, en prenant la racine et en faisant $k \to \infty$ on obtient le résultat. La deuxième est semblable: $T^k(a,a)T^n(a,b) \leq T^{n+k}(a,b)$. Donc $T^n(a,b) \leq \frac{T^{n+k}(a,b)}{T^k(a,a)}$. Quand $k \to \infty$, l'hypothèse de positive-récurrence entraîne que le membre de droite tend vers $\lambda^n \frac{L(b)}{L(a)}$. □

Par définition de l'entropie de Salama (3.8), pour tout $\epsilon > 0$, et tout $n \geq n(\epsilon, a)$

$$B_T(n, a) \leq e^{(h_S(T)+\epsilon)n}$$

(sans qu'il y ait nécessairement d'uniformité par rapport à a).

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour renforcer cette majoration.

(4.7) Théorème. *Soit T un graphe simple, irréductible, positif-récurrent. Si*

$$h_S^\infty(T) < h_G(T) < \infty$$

alors $h_S(T) = h_G(T)$ et pour tout $a \in A$, il existe une constante $C(a)$ telle que

$$B_T(a,n) \leq C(a)e^{h_S(T)n}$$

i.e. on peut remplacer $e^{\epsilon n}$ par la constante $C(a)$.

Si

$$h_C^\infty(T) < h_G(T) < \infty$$

alors $h_C(T) = h_S(T) = h_G(T)$ et la constante $C(a)$ ci-dessus peut être choisie indépendamment de a.

Preuve. Le théorème (3.15) donne les égalités d'entropies énoncée. Il suffit de reprendre sa majoration. Traitons d'abord le cas: $h_S^\infty(T) < h_G(T)$. Soit $a \in A$.

Fixons une partie finie $A_1 \subset A$ contenant a et $\epsilon > 0$ tels que $h_S(A \setminus A_1) + \epsilon < h_G(T)$.

Soit $\mathrm{Bd}(A_1) = \{b \in A : b \notin A_1 \text{ et } b \in \mathrm{succ}_T(a) \text{ avec } a \in A_1\}$ le bord de A_1. $\mathrm{Bd}(A_1)$ est fini (sinon $h_S(T) = \infty$). Il existe une constante $C(A_1)$ telle que le nombre de chemins de longueur n et d'extrémités dans $A_1 \cup \mathrm{Bd}(A_1)$ vérifie la majoration:

$$\sum_{b,c \in A_1 \cup \mathrm{Bd}(A_1)} N_T(b,c,n) \leq C(A_1)e^{h_G(T)n}$$

Le nombre des chemins de longueur n issu de a et qui quittent A_1 à l'instant k_2 est majoré par

$$\sum_{c \in \mathrm{Bd}(A_1)} N_T(a,c,k_2)B_{A\setminus A_1}(c,n-k_2) \leq$$

$$\leq C(A_1)\,\mathrm{card}\,\mathrm{Bd}(A_1)e^{h_G(T)n}e^{-(n-k_2)(h_G(T)-h_S(A\setminus A_1))}$$

$h_G(T) - h_S(A \setminus A_1) \geq \epsilon$ absorbant le facteur n provenant du choix de k_2, on a:

$$B_T(a,n) \leq \mathrm{card}\,\mathrm{Bd}(A_1)C(A_1)\frac{1}{1-e^{-\epsilon}}e^{h_G(T)n}$$

La condition $h_C^\infty(T) < h_G(T)$ se traite similairement. □

(4.8) Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème, le vecteur L est sommable.*

Preuve. On peut supposer le graphe apériodique.

Remarquons que la quantité estimée ci-dessus n'est autre que:

$$B_T(a,n) = \sum_b T^n(a,b)$$

Or, pour toute partie finie B de l'alphabet A, on a:

$$\sum_{b \in B} T^n(a,b) \sim \lambda^n R(a) \sum_{b \in B} L(b)$$

On obtient donc

$$\sum_{b \in B} L(b) \leq (1+\epsilon)\,\mathrm{card}\,\mathrm{Bd}(A_1)C(A_1)\frac{1}{1-e^{-\epsilon}}$$

On fait $B \to A$. □

CHAPITRE 5

ERGODICITÉ INTRINSÈQUE DES CHAÎNES DE MARKOV

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème de B.M. Gurevič élucidant (complètement d'un point de vue combinatoire) le problème de l'ergodicité intrinsèque des chaînes de Markov topologiques. On s'inspire des démonstrations proposées par B. Kitchens [26] et F. Hofbauer [16].

Rappelons d'abord une

(5.1) Définition. *Soit A un alphabet et T un graphe simple et irréductible sur A. On appelle* **partition de temps zéro** *la partition dénombrable, mesurable, $\Pi = \{<a> : a \in A\}$.*

On dit qu'une mesure de probabilité invariante $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(A))$ est une **mesure markovienne** *si, pour tous $a_0, \ldots, a_n \in A$:*

$$<a_0 \ldots a_n> = \frac{<a_0 a_1><a_1 a_2> \ldots <a_{n-1} a_n>}{<a_1> \ldots <a_{n-1}>}$$

(dans cette formule on a écrit le cylindre pour sa masse: $<a_1>$ au lieu de $\mu(<a_1>)$).

On peut maintenant énoncer le résultat de B. Gurevič qui résout le problème de l'ergodicité intrinsèque:

(5.2) Théorème (B. Gurevič [14]). *Soit T un graphe simple et irréductible sur un alphabet A. On suppose $h_G(T) < \infty$. $(\Sigma_+(T), \sigma)$ admet:*

(1) *au plus une mesure maximale qui est nécessairement une mesure markovienne.*
(2) *exactement une mesure maximale ssi la matrice T est positive-récurrente.*

Remarque. Nous nous servirons de l'unicité (1) et de l'implication: existence $\Longrightarrow$ positive-récurrence. La section 1 expose une condition indépendante de la théorie de Gurevič garantissant l'existence.

1 Condition suffisante pour l'existence

La preuve de l'existence d'une mesure maximale ne sera pas déduite du théorème de Gurevič mais plutôt de l'analyse directe du système dynamique définissant la chaîne de Markov considérée: (12.1), (13.2). De plus, le critère suivant sera souvent satisfait.

(5.3) Proposition. *Si $h_G(T) < \infty$ et si l'entropie de Salama à l'infini (3.8) est nulle:*

$$h_S^\infty(T) = 0,$$

alors le système $(\overline{\Sigma_+(T)}, \sigma)$ est asymptotiquement h-expansif (0.5). Plus précisément:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_x h_B(f, B_\infty(x, \epsilon)) \leq h_S^\infty(T)$$

D'après le résultat de M. Denker cité dans l'introduction, ceci implique la semi-continuité supérieure de l'entropie métrique et donc

(5.4) Corollaire. *Si $h_S^\infty(T) = 0$ alors il existe une mesure maximale.*

Remarque. L'hypothèse $h_G^\infty(T) = 0$ est insuffisante. Par ailleurs, l'inégalité ci-dessus peut être stricte. L'appendice 5.A illustre ces deux points.

Preuve de la proposition. On peut supposer la distance sur $\Sigma_+(T)$ induite par une distance sur l'alphabet. Soit $\alpha > 0$. Il existe une partie finie $A \subset T$ telle que $h_S(T \setminus A) \leq h_S^\infty(T) + \alpha$. $h_S(T) = h_G(T) < \infty$ (3.15) donc le bord de A:

$$\mathrm{Bd}(A) = \{b \in T : b \notin A \text{ et } a \to b \text{ pour un } a \in A\}$$

est fini. Il existe $n_0 < \infty$ tel que le nombre de chemins issu de tout élément a du bord de A vérifie, pour $n \geq n_0$:

$$B_T(a, n) \leq e^{(h_S^\infty(T) + 2\alpha)n}.$$

Soit $B \supset A$ l'ensemble des éléments pouvant être joints depuis un élément de A par un chemin de longueur inférieure à n_0. B est fini. Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que deux éléments distincts quelconques de B soient distants d'au moins $\epsilon > 0$.

Soit $x \in \Sigma_+(T)$. Notons $J_1 \leq J_2 \leq \ldots$ les intervalles d'entiers consécutifs k pour lesquels $x_k \notin A$. Supprimons parmi ces intervalles ceux de longueur inférieure à n_0. Les entiers k qui n'appartiennent à aucun des intervalles restants vérifient: $x_k \in B$. Donc si $y \in B_\infty(x, \epsilon)$, alors $y_k = x_k$ pour ces entiers k. Les suites $(y_k)_{k \in J_i}$ sont des chemins sur $T \setminus A$, commençant en un point du bord de A, $\mathrm{Bd}(A)$, et de longueur au moins n_0. On en déduit que le nombre des suites de la forme $(y_k)_{0 \leq k < n}$ avec $y \in B_\infty(x, \epsilon)$ est majoré par

$$e^{(h_S^\infty(T) + 2\alpha)n}.$$

□

Revenons au théorème de Gurevič.

2 Preuve du théorème — Préparations

(5.5) Lemme. *On peut représenter l'ensemble des mesures markoviennes sur $\Sigma_+(T)$:*

1. *par l'ensemble $\mathcal{R}_T$ des* **représentations classiques** *des couples (π, P) tels que*

(1) $\pi : A \to [0,1]$, $P : A \times A \to [0,1]$.
(2) $T(a,b) = 0 \implies P(a,b) = 0$.
(3) $\sum_a \pi(a) = 1$, $\sum_b P(a,b) = 1$.
(4) $\sum_a \pi(a) P(a,b) = \pi(b)$.

La correspondance est définie par

$$\pi(a) = \mu(<a>), P(a,b) = \frac{\mu(<ab>)}{\mu(<a>)}$$
$$\text{et } \mu(<a_0 \dots a_n>) = \pi(a_0)P(a_0,a_1)\dots P(a_{n-1},a_n).$$

C'est une bijection (non-affine).

2. *par l'ensemble* $\mathcal{X}_T$ *des* **représentations matricielles** X *telles que*

(1) $X : A \times A \to [0,1]$.
(2) $T(a,b) = 0 \implies X(a,b) = 0$.
(3) $\sum_{a,b} X(a,b) = 1$.
(4) $\sum_a X(a,b) = \sum_a X(b,a)$.

La correspondance est définie par

$$X(a,b) = \mu(<ab>) \quad \text{et} \quad \mu(<a_0 \dots a_n>) = \frac{X(a_0,a_1)\dots X(a_{n-1}a_n)}{\pi(a_1)\dots\pi(a_{n-1})}$$

avec $\pi(a) = \sum_b X(a,b)$. *C'est une bijection, affine de* $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(T))$ *vers* $\mathcal{X}$ *(mais sa réciproque n'est pas affine).*

Remarquons que ci-dessus les conditions (3) assurent qu'on définit bien une mesure et que c'est une probabilité, les conditions (2) que la mesure est concentrée sur $\Sigma_+(T)$ et les conditions (4) qu'elle est invariante.

La première représentation est commode pour le calcul de l'entropie (cf. ci-dessous), la deuxième, due à Y. Takahashi [44], est plus simple, plus maniable.

Assurons-nous que les formules de l'entropie métrique valables pour une mesure markovienne dans le cas d'un alphabet fini sont encore valables pour un alphabet dénombrable bien qu'on n'ait plus nécessairement $H_\mu(\Pi) < \infty$. Remarquons que ce n'est pas le cas d'une formule du type

$$h_\mu(\Sigma_+(T)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\Pi^{\vee n})$$

qui n'est valable que si $H_\mu(\Pi) < \infty$.

(5.6) Lemme. *L'entropie métrique d'une mesure* σ*-invariante* μ *est donnée par*

$$h_\mu(\Sigma_+(T)) = H_\mu\left(\Pi \mid \bigvee_{k\geq 1} \sigma^{-k}\Pi\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{A\in\Pi} -\int_A \log E_\mu\left(1_A(x) \mid \bigvee_{k\geq 1} \sigma^{-k}\Pi\right) \mu(dx)$$

avec $E_\mu(\cdot \mid \bigvee_{k\geq 1} \sigma^{-k}\Pi)$ *l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu engendrée par les éléments des partitions* $\sigma^{-k}\Pi$, $k \geq 1$.

(5.7) Corollaire. *Si* μ *est une mesure markovienne définie par* $(\pi, P) \in \mathcal{R}_T$, *alors*

$$h_\mu(\Sigma_+(T)) = -\sum_{a,b} \pi(a)P(a,b)\log P(a,b)$$

Preuve du lemme. Identifions A à $\mathbb{N}$. Pour $r \geq 0$, posons

$$\Pi_r = \{<0>, \ldots, <r>, \bigcup_{s>r} <s>\}.$$

Cette suite de partitions *finies* est croissante et l'union $\bigcup_{k,r\geq 0} \sigma^{-k}\Pi_r$ engendre la tribu des boréliens. On a donc [37, 5.3.6]

$$h_\mu(\sigma) = \lim_{r\to\infty} h_\mu(\sigma, \Pi_r)$$

et la limite est aussi un supremum. D'autre part, si on note $(\Pi_r)_1^\infty = \bigvee_{k\geq 1} \sigma^{-k}\Pi_r$, on a d'après [37, 5.2.12],

$$h_\mu(\sigma, \Pi_r) = H_\mu(\Pi_r \mid (\Pi_r)_1^\infty).$$

Montrons que $h_\mu(\sigma)$ est minoré par l'expression proposée. Pour tout $r \geq 0$:

$$H_\mu(\Pi_r \mid (\Pi_r)_1^\infty) \geq H_\mu(\Pi_r \mid (\Pi)_1^\infty) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} H_\mu(\Pi \mid (\Pi)_1^\infty)$$

l'inégalité vient de ce que Π est plus fine que Π_r et la limite du théorème de convergence monotone. Inversement, Π_r étant moins fine que Π:

$$H_\mu(\Pi_r \mid (\Pi_r)_1^\infty) \leq H_\mu(\Pi \mid (\Pi)_1^\infty)$$

(par exemple en appliquant la formule de Pinsker [37, p.243]:

$$H(\alpha \vee \beta \mid (\alpha \vee \beta)_1^\infty) = H(\alpha \mid \alpha_1^\infty) + H(\beta \mid \alpha_{-\infty}^\infty \vee \beta_1^\infty)$$

à l'extension naturelle). □

3 Unicité de la mesure maximale

(5.8) Lemme. *Si $h_G(T) < \infty$ toute mesure maximisant l'entropie est une mesure markovienne.*

Preuve (*B. Kitchens* [26]). Soit $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(T))$ maximale. On définit l'approximation markovienne μ_M de μ par le vecteur de probabilité π et la matrice stochastique P suivants:

$$\pi(a) = \mu(<a>) \quad \text{et} \quad P(a,b) = \frac{\mu(<ab>)}{\mu(<a>)}$$

On a

$$\begin{aligned} h_\mu(\sigma) = H_\mu(\Pi \mid (\Pi)_1^\infty) \leq & H_\mu(\Pi \mid \sigma^{-1}\Pi) \\ & = H_{\mu_M}(\Pi \mid (\Pi)_1^\infty) = h_{\mu_M}(\sigma) \end{aligned}$$

Comme μ est maximale, l'inégalité $h_{\mu_M}(\sigma) \geq h_\mu(\sigma)$ est nécessairement une égalité et toutes ces quantités sont égales et finies. On va montrer, de la même façon que

dans le cas des mesures markoviennes définies avec un alphabet fini (W. Parry, [36]) que ceci entraîne l'égalité $\mu = \mu_M$. Pour $k \geq 2$, les indices de sommation décrivant A sous la condition $\mu(<A_0 \dots A_k>) > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&H_\mu(\Pi \mid (\Pi)_1^k) \\
&\quad = -\sum_{A_0,\dots,A_k} \mu(<A_0 \dots A_k>) \log \frac{\mu(<A_0 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_k>)} \\
&\quad = \sum_{A_0,\dots,A_{k-1}} \mu(<A_1 \dots A_{k-1}>) \sum_{A_k} \frac{\mu(<A_1 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_{k-1}>)} \\
&\qquad\qquad \times \frac{\mu(<A_0 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_k>)} f\left(\frac{\mu(<A_0 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_k>)}\right) \\
&\quad = \sum_{A_0,\dots,A_{k-1}} \mu(<A_1 \dots A_{k-1}>) \sum_{A_k} \alpha_{A_k} f(x_{A_k}) \\
&\quad \leq \sum_{A_0,\dots,A_{k-1}} \mu(<A_1 \dots A_{k-1}>) f\left(\sum_{A_k} \alpha_{A_k} x_{A_k}\right) \\
&\quad = H_\mu(\Pi \mid (\Pi_1)^{k-1})
\end{aligned}$$

en utilisant la concavité de $f(t) = -t \log t$ avec

$$\alpha_{A_k} = \frac{\mu(<A_1 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_{k-1}>)}, \quad x_{A_k} = \frac{\mu(<A_0 \dots A_k>)}{\mu(<A_1 \dots A_k>)}$$
$$\text{et } \sum_{A_k} \alpha_{A_k} x_{A_k} = \frac{\mu<A_0 \dots A_{k-1}>)}{\mu<A_1 \dots A_{k-1}>)}$$

La stricte concavité de $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ entraîne en cas d'égalité que tous les $x_{A_k} > 0$ sont égaux: si on note leur valeur commune x_k, on a

$$\mu(<A_0 \dots A_k>) = x_k \mu(<A_1 \dots A_k>)$$

En sommant sur $A_k \in \Pi$, on obtient $x_k = x_{k-1} = \cdots = x_1 = \frac{\mu(<A_0 A_1>)}{\mu(<A_1>)}$
k et $A_0 \dots A_k$ étaient arbitraires: on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mu(<A_0 \dots A_k>) &= \frac{\mu(<A_0 A_1>)}{\mu(<A_1>)} \mu(<A_1 \dots A_k>) \\
&= \frac{\mu(<A_0 A_1>)}{\mu(<A_1>)} \frac{\mu(<A_1 A_2>)}{\mu(<A_2>)} \cdots \frac{\mu(<A_{k-1} A_k>)}{\mu(<A_k>)} \mu(<A_k>)
\end{aligned}$$

la mesure est donc markovienne. □

(5.9) Lemme. *Une mesure markovienne μ maximisant l'entropie est de support $\overline{\Sigma_+(T)}$: pour tous $a, b \in A$, tels que $T(a,b) > 0$:*

$$\mu(<ab>) > 0.$$

Preuve (*F. Hofbauer* [16]). Montrons qu'une mesure markovienne μ pour laquelle il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $T(a_1, a_2) > 0$ et

$$\mu(<a_1 a_2>) = 0$$

n'est pas d'entropie maximale. On considère la représentation matricielle X. L'entropie de μ a pour expression:

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{a,b} X(a,b) \log \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)}$$

Soit $a_1 \dots a_r a_1$ une boucle sur le graphe T avec $X(a_i, a_{i+1}) > 0$, pour un certain $1 < i < r$. Posons $\mathcal{B} = \{(a_1, a_2), \dots, (a_r, a_1)\}$ et, pour $\epsilon \geq 0$,

$$X_\epsilon(a,b) = \begin{cases} X(a,b)/(1+r\epsilon) & (a,b) \notin \mathcal{B} \\ (X(a,b)+\epsilon)/(1+r\epsilon) & (a,b) \in \mathcal{B} \end{cases}$$

X_ϵ est encore la représentation matricielle d'une mesure markovienne μ_ϵ. Or la différentielle de $h(X)$ est:

$$dh = -\sum_{a,b} dX(a,b) \log \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)} + X(a,b) \frac{dX(a,b)}{X(a,b)} - X(a,b) \frac{\sum_c dX(a,c)}{\sum_c X(a,c)}$$

$$dh = -\sum_{a,b} \left(\log \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)} + 1 - 1 \right) dX(a,b)$$

$$dh = -\sum_{a,b} \log \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)} dX(a,b)$$

et chaque $\frac{\partial X_\epsilon(a,b)}{\partial \epsilon}$ est de valeur absolue bornée par $(1+r)$. Examinons les coefficients dans le second membre de l'équation précédente:

(1) si $(a,b) \in \mathcal{B}$ et $X(a,b) = 0$, $\frac{\partial X_\epsilon(a,b)}{\partial \epsilon} > 0$ est affecté d'un coefficent positif tendant vers l'infini quand $\epsilon \to 0+$;
(2) si $X(a,b) \notin \mathcal{B}$ et $X(a,b) = 0$, $\frac{\partial X_\epsilon(a,b)}{\partial \epsilon} = 0$;
(3) les $X(a,b) \neq 0$, $\frac{\partial X_\epsilon(a,b)}{\partial \epsilon}$ sont affectés d'un coefficient borné quand $\epsilon \to 0+$; plus précisément la somme des valeurs absolues de ces coefficients est majorée par l'entropie $h_\sigma(\mu)$;

On en déduit que pour $\epsilon > 0$ et proche de 0, $\epsilon \to h(\epsilon)$ est une fonction strictement croissante. En particulier $h(\epsilon) > h(0)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit et μ n'est pas une mesure maximale. □

(5.10) Lemme. *S'il existe une mesure maximale elle est unique.*

Preuve (*F. Hofbauer* [16]). D'après les deux lemmes précédents, toute mesure maximisant l'entropie est une mesure markovienne de support $\Sigma_+(T)$ tout entier. En particulier, toute mesure maximisant l'entropie est ergodique. Mais l'ensemble des mesures maximisant l'entropie est un convexe. Il est donc réduit à zéro ou un élément. □

4 Existence de la mesure maximale

(5.11) Lemme. *Soit T une matrice positive, irréductible.*
Si $\Sigma_+(T)$ admet une mesure maximale alors T est positive récurrente et la mesure maximale est markovienne définie par:

$$\pi(a) = R(a)L(a) \quad \text{et} \quad P(a,b) = T(a,b)\frac{R(b)}{\lambda(T)R(a)}.$$

Réciproquement si T est positve récurrente la formule ci-dessus défini une mesure maximale.

Preuve (d'après F. Hofbauer). Soit la fonction $f : \mathcal{X}_T \times \mathbb{R}^A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(X,\lambda,\kappa) = h(X) + \sum_a \lambda_a \left(\sum_b X(a,b) - \sum_b X(b,a) \right) + \kappa \left(\sum_{a,b} X(a,b) - 1 \right)$$

avec

$$\begin{aligned} h(X) &= -\sum_{a,b} X(a,b) \log \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)} \\ &= -\sum_{a,b} X(a,b) \log X(a,b) + \sum_a \left(\sum_b X(a,b) \right) \log \left(\sum_b X(a,b) \right). \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une mesure maximale μ. On a vu qu'elle était markovienne et de support total. Notons X sa représentation matricielle.

D'après la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il existe λ, κ tels que toutes les dérivées partielles de f en (X,λ,κ) sont nulles. Mais

$$\frac{\partial f}{\partial X(a,b)} = -\log X(a,b) - 1 + \log \left(\sum_c X(a,c) \right) + 1 + (\lambda_a - \lambda_b) + \kappa$$

Donc

$$(*) \qquad \frac{X(a,b)}{\sum_c X(a,c)} = e^{\kappa} \frac{e^{\lambda_a}}{e^{\lambda_b}}$$

Vérifions que $\kappa = -h_G(T)$. Un calcul de $h_G(T) = h(X)$ se heurte à des problèmes de convergence absolue. Procédons indirectement (d'après B. Kitchens [26]).

$$\mu{<}a{>} \cap \sigma^{-n}{<}a{>} = \sum_{a_1 \ldots a_{n-2}} \mu{<}aa_1 \ldots a_{n-2}a{>} = \sum_{a_1 \ldots a_{n-2}} e^{\kappa n} = e^{\kappa n} T^n(a,a)$$

Mais la mesure μ est markovienne et ergodique donc fortement mélangeante (à la période $p(T)$ du graphe près): la quantité ci-dessus a une limite finie et non-nulle quand $n \to \infty$ avec $p(T)|n$. Donc $\kappa = -\log \lambda(T) = -h_G(T)$.

Vérifions que le vecteur strictement positif défini par $L(a) = e^{\lambda_a}$ est un vecteur propre à gauche de la matrice T pour la valeur propre $\lambda = e^{h_G(T)} = e^{-\kappa}$: $L \cdot T = \lambda L$. On a

$$(L \cdot T)_b = \sum_a L(a)T(a,b) = \sum_a \frac{X(a,b)}{\sum_c X(b,c)} e^{\lambda_b - \kappa} T(a,b)$$

en exprimant e^{λ_a} grâce à (*). Si $X(a,b) > 0$ alors $T(a,b) = 1$, on peut donc omettre le facteur $T(a,b)$. Mais d'après la condition (4)

$$\frac{\sum_a X(a,b)}{\sum_c X(b,c)} = 1$$

On en déduit le résultat voulu.

Vérifions que le vecteur strictement positif défini par $R(b) = e^{-\lambda_b} \sum_c X(b,c)$ est un vecteur propre à droite. On a

$$(T \cdot R)_a = \sum_b T(a,b) e^{-\lambda_b} \sum_c X(b,c) = e^{-\kappa} R(a)$$

en se servant à nouveau de (*). Enfin

$$R \cdot L = \sum_a e^{\lambda_a} \cdot e^{-\lambda_a} \sum_b X(a,b) = 1 < \infty.$$

D'après la proposition (4.5), ceci montre que T est positif-récurrent.

Esquissons la réciproque. On vérifie aisément que la formule annoncée définit une mesure markovienne invariante portée par $\Sigma_+(T)$. Comme précédemment, un calcul direct de l'entropie métrique se heurte à des problèmes de convergence.

On pose $\kappa = -\log \lambda(T)$ et $\lambda_a = -\log R(a)$. On vérifie que (X, λ, κ) est alors un point critique de f (toutes les dérivées partielles y sont nulles). La concavité de $X \mapsto h(X)$ implique que le graphe de h est en-dessous de ses hyperplans tangents. On en déduit que le point critique est un maximum global: la mesure est maximale. □

5.A Contre-exemples à l'expansivité asymptotique

On donne deux exemples illustrant respectivement:

(1) l'insuffisance de la condition $h_G^\infty(T) = 0$ pour obtenir l'expansivité asymptotique.

(2) la majoration du défaut d'expansivité asymptotique:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_x h_B(f, B_\infty(x, \epsilon)) \leq h_S^\infty(T)$$

peut être stricte.

5.A.1. Premier contre-exemple.

Considérons le graphe T représenté sur la figure 5.1. Identifions les éléments de ce graphe aux éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(1,1)$ étant l'élément représenté au coin en bas à gauche.

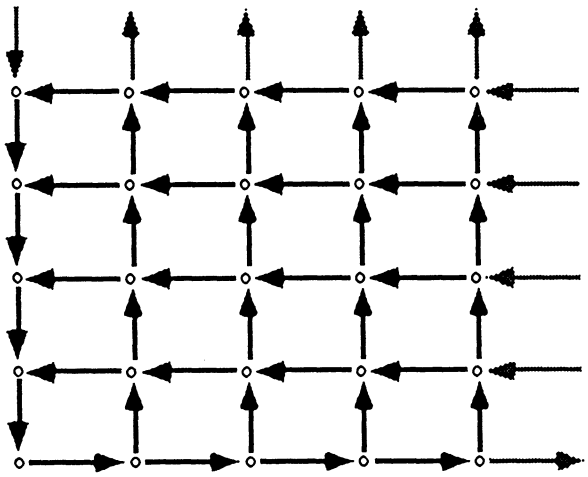

FIGURE 5.1

On remarque que toute boucle contient l'élément $(1,1)$. La condition $h_G^\infty(T) = 0$ est donc vérifiée.

Munissons $T \equiv \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de la distance induite par l'identification $(a,b) \in T \equiv \frac{(a,b)}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme euclidienne. Considérons les quarts de disque de rayon N, $\Delta_N = \{(n,m) : n^2 + m^2 < N^2\}$. Deux éléments de Δ_N sont séparés d'au moins N^{-2}. Deux éléments de $T \setminus \Delta_N$ sont séparés d'au plus $\sqrt{2}N^{-1}$.

Soit $\epsilon > 0$. Posons $N = \sqrt{2}\epsilon^{-1}$. Si $x, y \in \Sigma_+(T)$ vérifient:

$$x_i = y_i \text{ ou } \{x_i, y_i\} \subset T \setminus \Delta_N$$

pour tout $i \geq 0$, alors $y \in B_\infty(x, \epsilon)$.

Soit $x \in \Sigma_+(T)$, suite $6N$-périodique définie par

$$\begin{aligned} x_k &= (k+1, 1) \\ x_{2N+k} &= (2N-k+1, k+1) \\ x_{4N+k} &= (1, 2N-k+1) \end{aligned}$$

pour $0 \leq k < 2N$. Considérons les points $y \in \Sigma_+(T)$ dont les symboles y_k coïncident avec ceux de x sauf aux instants $k \equiv 3N+1, 3N+1, \ldots, 4N-1$. La restriction de y à chacun de ces intervalles de temps est un chemin sur T de $(N+1, N+1)$ à $(1, 2N+1)$ par ailleurs arbitraire. Il est nécessairement inclus dans le carré $[1, N+1] \times [N+1, 2N+1]$: pour le spécifier, il suffit de choisir les N instants pendant lesquels on monte, on ira à gauche pendant le reste du temps; puis exclure le cas où on arrive sur la droite d'abscisse zéro avant la fin: on obtient ainsi $C_{2N}^N - 1$ possibilités.

Soit $0 < \delta < (8N^2)^{-1}$. Tous les points y envisagés ci-dessus sont deux-à-deux δ-séparés. On a donc

$$h_B(f, B_\infty(x, \epsilon)) \geq \frac{1}{6N} \log(C_{2N}^N - 1)$$

qui tend vers $\frac{1}{6}\log 2$ quand $\epsilon \to 0$.

5.A.2. Deuxième contre-exemple.

Il suffit de prendre l'extension markovienne formelle formelle du shift complet sur 2 symboles: $h_{\mathcal{G}}^{\infty}(T) = \log 2$. Mais il y a clairement expansivité asymptotique: tous les points tendent vers le point à l'infini défini par la compactification.

TROISIÈME PARTIE

MAJORATIONS D'ENTROPIES

Cette troisième partie est consacrée à des résultats généraux contrôlant différentes entropies, cruciales dans notre approche:

(1) l'entropie absolue de la partie non-markovienne $\Sigma_0(f, P)$ en fonction de l'entropie de Bowen de l'ensemble critique sous une hypothèse de connexité.

(2) l'entropie locale k-dimensionnelle sous une hypothèse de différentiabilité.

L'importance du (1) est déjà claire d'après le rôle de cette partie non-markovienne dans le théorème d'isomorphisme (2.7). Le (2) permet de contrôler très facilement différents défauts de semi-continuité de fonctions "entropies": on obtient notamment le résultat de S. Newhouse selon lequel tout système C^∞ admet au moins une mesure maximale. La semi-continuité de l'entropie métrique sera également utilisé pour l'étude de la multiplicité des mesures maximales sur l'intervalle. On remarque que la semi-continuité de l'entropie topologique de codimension 1 permet de contrôler les variations de l'entropie topologique de $C(f)$, la frontière de la partition.

CHAPITRE 6

ENTROPIE DE LA PARTIE NON-MARKOVIENNE

Dans la première partie de cette thèse, nous avons donné un théorème d'isomorphisme (2.7) qui décompose l'extension naturelle du système symbolique en une partie isomorphe à la chaîne de Markov définie par le diagramme de Hofbauer et une partie invariante $\Sigma_0(f,P)$ dite partie non-markovienne.

Le but de ce chapitre est d'obtenir une majoration la plus générale possible de l'entropie des mesures portées par la partie non-markovienne. On est amené à faire une hypothèse de connexité.

Dans l'appendice on montre comment obtenir les résultats de Keller [24] qui, sur un plan quelque peu abstrait, tentent de se passer de cette hypothèse. Notons que c'est cet article de G. Keller qui est à l'origine de l'idée suivante:

La quantité qui fournira la majoration est l'entropie de Bowen de l'ensemble critique.

Comme on ne souhaite pas supposer que f est continue et définie sur X tout entier, on introduit la définition suivante:

(6.1) Définition. *Soit (X,d) un espace métrique, une partie $Y \subset X$ et $f : Y \to X$ une application.*

*L'***entropie de Bowen** *d'une partie $Z \subset X$ est alors définie comme la quantité*

$$h_B(f,Z) = \lim_{\epsilon \to 0+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{crit}}(\epsilon, n, Z)$$

avec $r_{\text{crit}}(\epsilon,n,Z)$ le cardinal minimal d'une partie $R \subset \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(Y)$ telle que, $Z \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(Y) \subset \bigcup_{x\in R} B_n(x,\epsilon)$.

La majoration qu'on se propose de démontrer ici relie une quantité métrique définie sur X à une quantité symbolique définie sur $\Sigma(f,P)$. C'est pourquoi on a besoin de considérer la notion suivante:

On appelle **itinéraires topologiquement réguliers** du système symbolique $\Sigma_+(f,P)$ les itinéraires *réels* A tels que $\operatorname{diam}[A_0 \dots A_n] \to 0$ quand $n \to \infty$. $A \in \Sigma(f,P)$ est dit topologiquement régulier si $A_p A_{p+1} \cdots \in \Sigma_+(f,P)$ l'est pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

On peut maintenant énoncer le résultat essentiel de ce chapitre:

(6.2) Théorème. *Soit (X,f,P) un système partitionné tel que les ensembles*

$$[A_0 \dots A_n] \qquad \text{pour } A_0 \dots A_n \in \Sigma_*(f,P)$$

soient connexes. *Alors, pour toute mesure invariante μ, portée par les itinéraires topologiquement réguliers de la partie non-markovienne $\Sigma_0(f,P)$, on a:*

$$h_\mu(\sigma) \le h_B(f, f(C(f))).$$

Remarque. L'hypothèse de régularité peut sans doute être affaiblie dans cet énoncé mais elle est de toute manière nécessaire pour que le codage puisse servir à construire une représentation du système partitionné.

Ce résultat sera un des deux ingrédients essentiels pour l'extension au cas régulier des résultats d'Hofbauer du cas monotone par morceaux. Par ailleurs, cela fournit un critère applicable dans certaines classes d'applications en dimension supérieure dont la plus simple est celle des applications affines par morceaux convexes.

Ce théorème est une généralisation des résultats de F. Hofbauer et S. Newhouse qui utilisaient (cf. chap. 13), en plus de l'hypothèse de pistage, la *finitude* de l'ensemble critique ainsi qu'une propriété d'*emboîtement* particulière à la dimension 1 (cf. chap. 12). On utilise notamment la formule de Katok pour l'entropie métrique qu'on formule ci-dessous (6.6) avec un minimum d'hypothèses topologiques.

Remarque 1. Insistons sur le fait qu'on majore ici des *entropies métriques*, c'est-à-dire (sous certaines conditions) l'entropie absolue de $\Sigma_0(f,P)$. L'énoncé avec "entropie de Bowen" à la place est *faux* comme on le verra (section 4). C'est d'ailleurs ici qu'on a *besoin* de toute la "force d'oubli" de la notion d'isomorphisme à entropie critique près (0.6).

Remarque 2. Dans la démonstration qui suit on se place dans l'extension naturelle de X et non pas dans le système symbolique $\Sigma(f,P)$ pour la raison suivante. Si le pistage fournit des informations en termes d'itinéraires, l'entropie de Bowen de l'ensemble critique $C(f) \subset X$ ne se laisse pas traduire facilement en termes symboliques —à l'exception du cas où P est finie et X est l'intervalle. On pourrait, dans ce dernier cas, donner une démonstration expurgée des différentes complications techniques présentes ci-dessous. On donnera (chap. 13) une version de la démonstration de S. Newhouse.

1 Réduction à l'énoncé abstrait

On examine la définition de la partie non-markovienne. Cela nous permet d'introduire la notion d'intervalles de pistage, pendant lesquels, sous l'hypothèse de connexité, il y a effectivement pistage par des points du bord de la partition. On aboutit ainsi à un énoncé "abstrait" majorant l'entropie d'une mesure "pistée" par l'entropie de Bowen de l'ensemble pisteur.

Rappelons que la partie non-markovienne $\Sigma_0(f,P)$ s'écrit comme l'union

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma^k(\Sigma_1)$$

avec $\Sigma_1 = \Sigma_1(f,P)$ l'ensemble des $A \in \Sigma(f,P)$ tels que la suite décroissante

$$n \mapsto \mathrm{fut}_X(A_{-n}\dots A_0)$$

n'est pas constante à partir d'un certain rang.

Remarquons que, dans tous les cas,

$$f(A_{-n-1}) \cap [A_{-n}\dots A_0] = f([A_{-n-1}\dots A_0]) \neq \emptyset$$

En particulier, $\sigma^{-1}(\Sigma_1) \subset \Sigma_1$ et $\Sigma_0(f,P)$ est l'union croissante des $\sigma^k(\Sigma_1)$ et, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma(f,P))$:

$$1 = \mu\big(\Sigma_0(f,P)\big) = \lim\uparrow_{k\to\infty} \mu\big(\sigma^k \Sigma_1\big).$$

Mais μ est supposée σ-invariante donc $\mu(\Sigma_1) = \mu(\sigma^k\Sigma_1) \to 1$. On en déduit que

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \sigma^k(\Sigma_1)\right) = 1$$

Sous l'hypothèse de connexité on peut expliciter la structure de Σ_1:

(6.3) Lemme. *Soit (X,f,P) un système partitionné tel que tous les ensembles $[A_0 \dots A_n]$, pour $n \geq 0$ et $A_0 \dots A_n \in \Sigma_*(f)$, soient* connexes.
On a alors

$$\Sigma_1 = \left\{ A \in \Sigma(f,P) : \exists n \to \infty \; [A_{-n} \dots A_0] \cap f_{A_{-n-1}}(\partial A_{-n-1}) \neq \emptyset \right\}.$$

En effet, cela découle des remarques précédentes complétées par un petit lemme de topologie générale. Soit A, B deux parties d'un espace topologique. Supposons A connexe. Si A rencontre à la fois B et le complémentaire de B, il doit rencontrer sa frontière: sinon, on aurait $A \subset B \cup (B^c \setminus \partial B)$ et on voit que A n'est pas connexe.

Autrement dit les $A \in \Sigma_0$ coïncident, sur des intervalles $[-q,p]$ avec p,q arbitrairement grands, avec l'itinéraire de points de $Z = f\left(\bigcup_{B\in P} \partial B\right) \subset f(C(f))$:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \; \exists q \to \infty \;\; \exists z \in Z \setminus \bigcup_{k=0}^{p-q} f^{-k} C(f) \;\; z \in [A_{p-q} \dots A_p]$$

Notons que l'exclusion des points n-précritiques est automatique:

$$[A_{-n} \dots A_0] \subset X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} f^{-k} C(f).$$

Ces intervalles d'entiers $[-q,p]$ sont appelés **intervalles de pistage** (symboliques).

Soit $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_0(f,P))$ comme dans l'énoncé du théorème. On veut se ramener sur le système dynamique initial, où vit $C(f)$ et où son entropie de Bowen a un sens clair. On va se ramener en fait sur l'extension naturelle $p : (\vec{X}, \vec{f}) \to (X,f)$:

$$\vec{X} = \{\vec{x} \in X^{\mathbb{Z}} : f(\vec{x}_n) = x_{n+1} \; (n \in \mathbb{Z})\}, \qquad p(\vec{x}) = \vec{x}_0.$$

Posons $\mu = \Gamma_*^{-1}(\nu) \in \mathcal{M}_{\vec{f}}(\vec{X})$. Par hypothèse, P est topologiquement génératrice relativement à $p_*\mu \in \mathcal{M}_f(X)$: pour μ-presque tout $\vec{x} \in \vec{X}$, tout $k \geq 0$, $P^{\vee k}(p(\vec{x}))$ est bien défini et:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}\left(P^{\vee k}(p(\vec{x}))\right) = 0.$$

Soit $\alpha, \epsilon > 0$. Il existe une fonction mesurable $k : \vec{X} \to \mathbb{N}$, μ-presque partout finie telle que

$$k \geq k(\vec{x}) \implies \operatorname{diam}\left(P^{\vee k}(p(\vec{x}))\right) < \epsilon.$$

Il existe un ensemble $\vec{X}_1 \subset \vec{X}$ de mesure $\mu(\vec{X}_1) > 1 - \alpha/2$ tel que $k(\cdot)$ est bornée sur $\vec{X}_1$. Notons K_1 cette borne.

Le théorème de Birkhoff implique qu'il existe $\vec{X}_2 \subset \vec{X}$ de mesure $\mu(\vec{X}_2) > 1 - \alpha$ et un entier N_2 tels que, pour tous $\vec{x} \in \vec{X}_2$ et $n \geq N_2$:

$$\frac{1}{n} \operatorname{card}\{k \in [0, n-1] : \vec{f}^k(\vec{x}) \in X_1\} \geq 1 - \alpha$$

Comme μ est concentrée sur $\Gamma^{-1}(\Sigma_0(f, P))$, on peut supposer $\vec{X}_2$ inclus dans cet ensemble. On trouve que pour tout $\vec{x}$ de cet ensemble, il existe p, q arbitrairement grands (on peut supposer $q \geq K_1$, $p \geq N_2$) tels que $[-p, q]$ est un intervalle de pistage pour $\Gamma(x) \in \Sigma(f, P)$, donc, *a forîtiori* $[-p, K_1]$. A l'exception d'une fraction au plus α des temps $k \in [-p, 0]$, on a

$$d(p(\vec{f}^k(x)), f^{k+p}(z)) < \epsilon.$$

On s'est donc ramené à l'énoncé suivant (on a entièrement traduit le contenu "symbolique" de l'énoncé précédent en termes métriques):

(6.4) Théorème. *Soit (X, d) un espace standard, $Y \subset X$ et $f : Y \to X$ mesurable. On note $p : (\vec{X}, \vec{f}) \to (X, f)$ son extension naturelle.*

Soit $Z \subset X$ une partie quelconque *de X et $\mu \in \mathcal{M}_{\vec{f}}(\vec{X})$ une* mesure pistée par *Z dans le sens suivant. Pour tous $\alpha, \epsilon > 0$, il existe une partie de $\vec{X}$ de μ-mesure supérieure à $1 - \alpha$, pour chacun des points $\vec{x}$ de laquelle, il existe des entiers q arbitrairement grands et un point $z \in Z$ tels que:*

$$\frac{1}{q+1} \operatorname{card}\{k \in [-q, 0] : d\big(p(\vec{f}^k(\vec{x})), f^{k+q}(z)\big) < \epsilon\} < \alpha$$

On dira que $[-q, 0]$ est un **intervalle de ϵ-pistage métrique** *pour $\vec{x}$.*

L'entropie métrique de μ est alors majorée en fonction de Z:

$$h_\mu(\vec{f}) \leq h_B(f, Z).$$

$\Sigma_0(f, P)$ est donc en rapport très étroit avec $f(C(f))$. Quand $C(f)$ est fini (cas monotone par morceaux) F. Hofbauer a montré que l'entropie absolue $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f, P))$, c'est-à-dire le supremum des entropies des mesures portées par l'ensemble invariant $\Sigma_0(f, P)$, était nulle. Le théorème annoncé peut être vu comme une généralisation de cette estimation: 0 devient en général l'entropie de Bowen de $f(C(f))$.

Avant de donner la démonstration de ce théorème (section 3) on considère une (légère) généralisation de la formule de Katok:

2 Formule de Katok pour l'entropie métrique

La formule de l'entropie métrique de A. Katok [22] a été énoncée, à l'origine, pour un difféomorphisme sur une variété compacte. On souhaite réduire au minimum les hypothèses topologiques, l'entropie métrique étant une quantité presque indépendante de la topologie.

La démonstration de A. Katok s'étend d'abord sans changements à une application quelconque (non-nécessairement continue) sur un compact. On va un peu plus loin.

Afin de ne pas avoir à supposer la pré-compacité de l'espace, on est amené à généraliser la notion de (ϵ, n)-boule de la façon suivante:

(6.5) Définition. *Soit X un espace métrique muni d'une application $f : Y \to X$ avec $Y \subset X$.*

A toute suite finie $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in (X \cup \{*\})^n$ et $\epsilon > 0$ on associe l'ensemble:

$$B_*(x_0 \ldots x_{n-1}, \epsilon) = \left\{ y \in \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}Y : x_k = * \text{ ou } d(f^k(y), x_k) < \epsilon \ (0 \leq k < n) \right\}$$

*Cet ensemble est appelé (ϵ, n, α)-**boule** si α majore la proportion des $k = 0, \ldots, n-1$ tels que $x_k = *$.*

On peut maintenand donner l'énoncé:

(6.6) Proposition (d'après A. Katok). *Soit (X, d) un espace métrique et séparable, $f : Y \to Y$ une application mesurable définie sur $Y \subset X$ une partie mesurable et invariante de X, μ une mesure de probabilité invariante et ergodique pour f. Fixons une constante $0 < \lambda < 1$.*

Notons, pour $n \geq 0$, $r_\mu(\epsilon, n, \alpha)$ le nombre minimal de (ϵ, n, α)-boules d'union de mesure au moins λ. On a

$$h_\mu^d(f, \epsilon, \alpha) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_\mu(\epsilon, n, \alpha)$$

$$h_\mu(f) = \sup_{\epsilon, \alpha > 0} h_\mu^d(f, \epsilon, \alpha)$$

3 Démonstration du théorème (6.2)

On peut maintenant démontrer le théorème abstrait.

Fixons $\lambda \in (0, 1)$ arbitrairement. Soit $\delta > 0$ et $\beta > 0$. On va construire un (δ, n, β)-recouvrement d'une partie de mesure au moins λ. La majoration annoncée de l'entropie découlera alors de la formule de Katok généralisée (6.6).

On prend la distance suivante sur $\vec{X}$:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} \frac{d(x_n, y_n)}{1 + d(x_n, y_n)}.$$

Il existe donc un $\epsilon > 0$ et un entier N_0 tel que

$$\max_{-N_0 \leq k \leq N_0} d(p(\vec{f}^k x), p(\vec{f}^k y)) < 2\epsilon \implies d(x, y) < \delta$$

pour $x, y \in \vec{X}$.

Soit N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, il existe $Z_n \subset X \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(Y)$ un (ϵ, n)-recouvrement de $Z \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(Y)$ de cardinal $\operatorname{card} Z_n \leq e^{(h_B(f,Z)+\beta)n}$.

Posons $\alpha = (2N_0+1)^{-1}\beta/5 > 0$.

Fixons $m_1 = \max(N_1, \alpha^{-1}N_0)$.

On définit $n : \vec{X} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$n(x) = \inf\{k \geq m_1 : [-k, 0] \text{ est un intervalle de } \epsilon\text{-pistage métrique pour } x\}.$$

Par hypothèse, $n(\cdot)$ est finie sur un ensemble de μ-mesure au moins $1-\alpha$. Il existe donc $\vec{X}_1 \subset \vec{X}$ avec $\mu(\vec{X}_1) > 1-2\alpha$ tel que

$$M_1 = \sup\{n(x) : x \in \vec{X}_1\} < \infty.$$

D'après le théorème de Birkhoff, il existe $E \subset \vec{X}$ mesurable, de mesure $\mu(E) > \lambda$ et un entier N_2 tels que, si $x \in E$ et $n \geq N_2$ alors

$$(*) \qquad \frac{1}{n} \operatorname{card}\{0 \leq k < n : \vec{f}^k(x) \in \vec{X}_1\} \geq 1 - 3\alpha.$$

Fixons $N_3 = \max(N_2, 2\alpha^{-1}M_1)$.

Soit $x \in E$ et $n \geq N_3$. Découpons $[0, n-1]$ en intervalles de pistage $[b_i, a_i]$, $0 \leq i < r$, disjoints. On pose (par récurrence) $b_{-1} = n$ et, pour $i \geq 0$:

(1) $a_i = \max\{k < b_{i-1} : m_1 \leq n(\vec{f}^k(x)) \leq M_1\}$.

(2) $b_i = a_i - n(a_i)$.

Notons $r = \min\{i \geq 0 : b_i < 0\}$.

Remarquons que $r \leq n/m_1$ et que $[0, n-1] \setminus \bigcup_{i=0}^{r-1}[b_i, a_i]$ a au plus $3\alpha n + 2M_1 \leq 4\alpha n$ éléments (en comptant à la fois les "trous", où $n(\cdot)$ est trop grande, et les segments incomplets, correspondants à $i = -1, i = r$).

Pour chaque $i \geq 0$, il existe un point z_i de Z tel que

$$d(p(\vec{f}^{b_i+k}(x)), f^k(z)) < \epsilon$$

pour une fraction au moins $1-\alpha$ des entiers $k \in [a_i - b_i, 0]$.

On choisit z_i' dans $Z_{a_i-b_i+1}$ tel que $d_n(z_i', z_i) < \epsilon$.

La donnée de $z_0', \ldots, z_{r-1}'$ (avec la connaissance de la position des intervalles $[b_i, a_i]$) détermine $p(\vec{f}^k(x))$ à 2ϵ près pour $k \in J$ avec $J \subset [0, n-1]$ et $\operatorname{card}(J) \geq (1-4\alpha)n - \alpha n = (1-5\alpha)n$.

Mais c'est connaître, à δ près, les $\vec{f}^k(x)$ pour les $k \in \{j \in [0, n-1] : [j - N_0, j + N_0] \subset J\}$: ce dernier ensemble a au moins $(1-5\alpha\cdot(2N_0+1))n = (1-\beta)n$ éléments.

Ces données définissent donc une (ϵ, n, β)-boule contenant x. On en déduit:

$$\begin{aligned} r_\mu(f, \epsilon, \beta) &\leq \frac{n}{m_1} C_n^{2n/m_1} C_n^{5\alpha n} \prod_{i=0}^{r} \operatorname{card} Z_{a_i-b_i+1} \\ &\leq \exp\left((h(2/m_1) + h(5\alpha) + h_B(f, Z) + \beta + e(n))n\right) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$ et $h(t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$.

Le résultat annoncé est maintenant clair. □

4 Contre-exemples

Comme $\Sigma_0(f,P)$ n'est pas supposé compact, ni Z invariant, notons que les deux notions d'entropies suivantes sont en général distinctes de l'entropie absolue qui nous intéresse:

(1) l'entropie topologique de la compactification:

$$h_{\text{top}}(\overline{\Sigma_0(f,P)})$$

(2) l'entropie des mesures invariantes et ergodiques chargeant Z:

$$h_{\text{rec}}(f,Z) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \text{ invariante et ergodique et } \mu(Z) > 0\}$$

Ces entropies se comparent de la façon suivante:

$$(*) \qquad h_{\text{rec}}(f,Z) \leq h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P)) \leq h_{\text{top}}(\overline{\Sigma_0(f,P)})$$

Situation dans le cas d'une application régulière de l'intervalle. On verra que $Z \subset \{x \in [0,1] : f'(x) = 0\}$. On peut montrer (en appliquant l'inégalité de Margulis-Ruelle [40] ou bien de façon élémentaire et similaire à la preuve de la section 13.2) que, dès que f est de classe $C^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, $h_{\text{rec}}(f,Z)$ est nulle.

Remarquons que, même dans le cas d'une application unimodale ($C(f)$ est réduit à un point, donc $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P)) = 0$ d'après le résultat ci-dessous) l'orbite du point critique peut être dense dans (l'image d') un sous-shift de type fini. On obtient ainsi un exemple (unidimensionnel) d'inégalité stricte.

Construisons une classe d'exemples symboliques illustrant l'indépendance entre ces trois entropies dans un cadre "abstrait":

(6.7) Exemple. *Soit $N \geq 1$ un entier et $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \Sigma_+(N)$ trois sous-shifts topologiquement mélangeants et de type fini.*

Il existe une partie compacte $Z \subset S_3$ telle que, si on pose:

$$\Sigma_Z = \{u \in \Sigma : \forall n \geq 0 \ \exists p,q \geq n \ \ <u_{-p} \dots u_q> \cap Z \neq \emptyset\}$$

avec Σ l'extension naturelle de Σ_+, on a alors $h_B(\sigma,Z) = h_{\text{top}}(S_2)$ et:

$$\begin{array}{lcl} h_{\text{rec}}(Z) & = & h_{\text{top}}(S_1) \\ h_{\text{abs}}(\Sigma_Z) & = & h_{\text{top}}(S_2) \\ h_{\text{top}}\left(\overline{\bigcup_{k\geq 0} \sigma^k Z}\right) & = & h_{\text{top}}(S_3) \end{array}$$

Construction. S_2 étant un sous-shift de type fini, il admet (W. Parry [36] — cf. (5.2)) une mesure maximale μ_2 qui est markovienne donc définie par un vecteur de probabilité et une matrice de transition (π,P) (5.5). Soit $\epsilon > 0$ le minimum des coordonnées de ces deux objets. Si $C \subset S_2$ est un cylindre non-vide défini par un mot de longueur n, alors $\mu_2(C) \geq \epsilon^n$.

D'autre part, S_2 étant topologiquement mélangeant, il existe un entier $d \geq 0$ tel que, si C_1 et C_2 sont deux cylindres de S_2, C_1 et $\sigma^{-k}C_2$ sont μ_2-indépendants dès que $k \geq |C_2| + d$ où $|C_2|$ représente la longueur du mot définissant C_2.

On choisit un mot fini $s \in \Sigma_*(S_2) \setminus \Sigma_*(S_1)$ tel que $v * s \in \Sigma_*(S_2)$ pour un certain $v \in S_1$ (si $S_1 = S_2$, on prend s le mot vide), on choisit également une suite infinie $t \in S_1$ et on pose

$$Z = \{v * s * w * u * t : v \in S_1, v * s * w \in S_2 \text{ et } u \in S_3 \\ \text{avec } |v| \geq 1,\ |w| = f(|v|),\ \text{ et } |u| = |v|\} \cup S_1$$

où $f(n) = (10\epsilon^{-1})^n$. Du fait en particulier des relations entre les longueurs de mots ci-dessus, Z est bien compact.

1. Si une mesure ergodique μ charge Z alors Z contient un point générique pour cette mesure. Mais $\omega(z) \subset S_1$ pour $z \in Z$ donc $\operatorname{supp}\mu \subset S_1$. Mais $Z \supset S_1$. Donc $h_{\text{rec}}(Z) = h_{\text{top}}(S_1)$.

2. $\bigcup_{k\geq 0} \sigma^k Z$ est dense dans S_3 et $Z \subset S_3$ donc

$$h_{\text{top}}\left(\overline{\bigcup_{k\geq 0} \sigma^k Z}\right) = h_{\text{top}}(S_3).$$

3. Posons

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_{k=f(n)/4n}^{3f(n)/4n} \mathcal{A}_{n,k} \qquad \text{avec } \mathcal{A}_{n,k} = \sigma^{-k(n+|s|+d)} \bigcup_{w\in\Sigma_n(S_1)} <w * s>_{S_2}$$

Pour n fixé, les $\mathcal{A}_{n,k}$ sont μ_2-indépendants et chacun de μ_2-mesure identique et au moins $\epsilon^{n+|s|}$.

La mesure de $\mathcal{A}_n$ est donc ($o(1)$ représentant une fonction tendant vers 0 quand $n \to \infty$):

$$\mu_2(\mathcal{A}_n) \geq 1 - \left(1 - \epsilon^{n+|s|}\right)^{f(n)/2n} = 1 - \exp\left(\frac{f(n)}{2n}\epsilon^{n+|s|}(-1 + o(1))\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

comme $\epsilon^n \frac{f(n)}{2n} = 10^n/2n$ tend vers l'infini. La somme $\sum_{n\geq 1} \mu_2(\mathcal{A}_n)$ est donc infinie et, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

(*)

l'ensemble des points appartenant à une infinité de $\mathcal{A}_n$ est de μ-mesure positive.

Mais si une suite $A \in \mathcal{A}_n$ alors

$$<A_{-p} \dots A_q>_{\Sigma_+} \cap Z \neq \emptyset$$

avec $p = k(n + |s| + d) - 1 \geq f(n)/4$ et $q = -p + f(n) + n + 2 \geq f(n)/4$ pour au moins un $\frac{f(n)}{4n} \leq k \leq \frac{3f(n)}{4n}$. On en déduit que si A appartient à une infinité de $\mathcal{A}_n$ alors $A \in \Sigma_Z$. Donc (*) montre que $\mu(\Sigma_Z) > 0$. Comme μ est ergodique, $\mu(\Sigma_Z) = 1$ et

$$h_{\text{abs}}(\Sigma_Z) \geq h_\mu(\sigma) = h_{\text{top}}(S_2).$$

Le théorème (6.2) appliqué au système partitionné

$$\left(\Sigma_+(N+1), \sigma, \{<0>, \ldots, <N-1>\}\right)$$

montre l'inégalité réciproque. En effet:

$$h_B(\sigma, Z) = h_{\text{top}}(S_2)$$

car $\frac{2n+|s|}{f(n)}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. On a donc bien $h_{\text{abs}}(\Sigma_Z) = h_{\text{top}}(S_2)$.

6.A Démonstration de la formule de Katok généralisée

On démontre la formule de Katok (6.6), débarassée d'un certain nombre d'hypothèses topologiques superflues. Les idées sont pratiquement inchangées par rapport à A. Katok [22].

Le théorème de Shannon-McMillan-Breiman admet le corollaire suivant (voir, par exemple, [39, chap. 5]):

(6.8) Lemme. *Soit X un espace mesurable, $f : X \to X$ une application mesurable et μ une mesure* ergodique *et invariante. Soit $\lambda \in (0,1)$ une constante.*
Pour toute partition finie Q,

$$h_\mu(f, Q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_\mu(Q, n)$$

avec $r_\mu(Q,n)$ le nombre minimal d'éléments de $Q^{\vee n}$ dont l'union soit de mesure au moins λ.

Preuve de la proposition (6.6). Notons provisoirement

$$h^d_\mu(f) = \sup_{\epsilon,\alpha>0} h^d_\mu(f, \epsilon, \alpha).$$

Montrons d'abord que $h^d_\mu(f) \geq h_\mu(f)$.
On construit pour tout $\epsilon > 0$, une partition finie $Q = Q(\epsilon)$. Soit $(x_i)_{i\geq 0}$ une suite dense dans X (X est séparable). Il existe $N = N(\epsilon)$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{N} B(x_i, \epsilon/2)\right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

Il existe $\epsilon' \in (\epsilon/2, \epsilon)$ tel que $\mu(\partial B(x_i, \epsilon')) = 0$ pour tout i, et donc $\epsilon'' > \epsilon'$ et assez proche de ϵ',

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{N} B(x_i, \epsilon'') \setminus B(x_i, \epsilon')\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

On choisit ϵ'' de façon à avoir, en plus, $\mu(\partial B(x_i, \epsilon'')) = 0$ pour tout i.
On pose $Q(\epsilon) = \{A_0, \ldots, A_N, A'\}$ avec $A_i = B(x_i, \epsilon') \setminus \bigcup_{0\leq j<i} B(x_j, \epsilon'')$ et $A' = X \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_N)$, le **reste de** $Q(\epsilon)$. On voit que $\mu(A') \leq \epsilon$.

Soit $\beta > 0$. Notons $\delta = \epsilon'' - \epsilon' > 0$. Pour recouvrir une (δ, n, β)-boule B il faut au plus

$$2^n (\operatorname{card} Q)^{\beta n}$$

éléments de $Q^{\vee n}$. En effet soit $x_0 \dots x_{n-1}$ la suite définissant la *-boule B considérée. Si $x_k = *$, $f^k(B)$ peut (peut-être) rencontrer n'importe lequel des $\operatorname{card} Q$ éléments de Q. Sinon $f^k(B) \subset B(x_k, \delta)$ ne peut rencontrer qu'un seul $A_i \in Q$ et peut-être aussi le reste A': on a donc le choix entre (au plus) deux éléments. D'où la majoration.

On déduit du lemme (6.8):

$$h_\mu(f, \epsilon, \beta) \geq h_\mu(f, Q(\epsilon)) - 2\beta \log \operatorname{card} Q(\epsilon) - \log 2$$

On fait d'abord tendre $\beta \to 0$, puis on applique la majoration obtenue à f^r et Q^r (à la place de f et de Q) et on divise par r:

$$\lim_{\beta \to 0+} h_\mu(f, \epsilon, \beta) \geq h_\mu(f, Q(\epsilon)) - \frac{1}{r} \log 2$$

On fait tendre $r \to \infty$.

Clairement, $\bigvee_{n \geq 1} Q(n^{-1})$, la tribu engendrée par l'union des algèbres définies par les partitions $Q(n^{-1})$, est la tribu des boréliens, modulo μ. Remarquons qu'une boule $B(x, r)$ qui contient à la fois des points d'une boule $B(x_0, r_0)$ et de son complémentaire est incluse dans $B(x_0, r_0 + 2r) \setminus B(x_0, r_0 - 2r)$. D'autre part les partitions $Q(\epsilon)$ construites ci-dessus le sont à l'aide de boules dont la frontière est de mesure nulle. On en déduit que:

pour tout $\epsilon_1 > 0$, tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que tout élément $A \in Q(\epsilon_1)$ s'écrit comme une union d'éléments de $Q(\epsilon_2)$ à un ensemble de mesure inférieure à $\delta > 0$ près.

Donc

$$h_\mu(f) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(f, \bigvee_{k=1}^{n} Q(n^{-1})) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(f, Q(n^{-1})).$$

En prenant la limite $n \to \infty$ avec $\epsilon = n^{-1}$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient donc: $h_\mu^d(f) \geq h_\mu(f)$ comme annoncé.

Démontrons l'inégalité réciproque. Montrons que, pour tous $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$, il existe une partition mesurable finie Q telle que $h_\mu^d(f, \epsilon, \alpha) \leq h_\mu(f, Q)$.

On prend $Q = Q(\min(\epsilon, \alpha/2))$ une partition construite comme précédemment. Le théorème de Shannon-McMillan-Breiman implique qu'il existe une partie X_1 de mesure $\mu(X_1) > \lambda$ et un entier N_1 tels que, si $n \geq N_1$ alors X_1 est recouverte par l'union d'au plus $e^{(h_\mu(f,Q)+\epsilon)n}$ éléments de $Q^{\vee n}$.

Soit A' le reste de Q. On a $\mu(A') \leq \alpha/2$. D'après le théorème de Birkhoff (quitte à réduire un peu X_1 et augmenter N_1) que, si $x \in X_1$ et $n \geq N_1$ alors $\frac{1}{n} \operatorname{card}\{0 \leq k < n : f^k(x) \in A'\} \leq \alpha$.

On en déduit $r_\mu(\epsilon, n, \alpha) \leq r_\mu(Q, n)$ et donc $h_\mu^d(f) \leq h_\mu(f)$. □

6.B Théorème de relèvement des mesures de G. Keller

Dans cet appendice, on indique brièvement comment retrouver les résultats de G. Keller sur le relèvement des mesures dans le cas d'une partition génératrice, à partir de la décomposition de Hofbauer. On traite le cas du théorème principal de [24]. Les autres s'en déduisent ou se démontrent de façon semblable.

La suppression de l'hypothèse de connexité se fait au prix de l'obligation de considérer, pour tous les $k \geq 1$, le bord symbolique d'ordre k relativement à P:

$$\Delta_P^k f(S) = \{A \in P^{\vee k} : A \cap f(S) \neq \emptyset \text{ et } A \cap (X \setminus f(S)) \neq \emptyset\}$$

à la place de la frontière "réelle".

(6.9) Théorème. *Soit (Y, g, Q) un système inversible par morceaux compact. L'entropie absolue de la partie non-markovienne est majorée par*

$$\mathrm{cap}_P(f, (\partial f(S))_{S\in P}) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sup_{S\in P} \mathrm{card}(\Delta_P^k f(S)).$$

Naturellement l'isomorphisme $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma}(f, P) \to \Sigma(f, P)$ implique que toute mesure ergodique et invariante sur X pour laquelle la partition P est génératrice peut être relevée sur $\tilde{\Sigma}(f, P)$ (par extension naturelle puis par l'isomorphisme $\tilde{\pi}$), puis projetée sur $\tilde{\Sigma}_+(f, P)$ et enfin sur $\hat{\Sigma}_+(f, P)$. On obtient de cette façon:

(6.10) Corollaire (G. Keller [24, th. 3]**).** *Soit (X, f, P) un système inversible par morceaux compact et $\mu \in \mathcal{M}_f^*(X)$ une mesure invariante et ergodique telle que P soit μ-génératrice et*

$$h_\mu(f) > \mathrm{cap}_P(f, (\partial f(S))_{S\in P})$$

alors il existe une unique mesure invariante $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\hat{f}}(\hat{X})$ telle que $\hat{\pi}_* \hat{\mu} = \mu$. De plus $\hat{\mu}$ est ergodique et $h_{\hat{\mu}}(\hat{f}) = h_\mu(f)$.

Esquisse de la preuve du théorème. D'après la partie abstraite (2.12), il suffit de montrer que $\mu(p \circ \Gamma^{-1}(\Sigma_0(f, P)) = 0$.

Le point de départ est l'analyse de $\Sigma_1(f, P)$. $A \in \Sigma_1(f, P)$ ssi

$$f(A_{-n-1}) \text{ rencontre sans contenir entièrement } [A_{-n} \dots A_0]$$

pour une infinité de $n \geq 0$. Donc $A_{-n} \dots A_0 \in \Delta_P^{n+1} f(A_{-n-1})$ (cf. lemme (2.6)). Il suffit ensuite de reprendre une démonstration suivant les grandes lignes de celle du théorème (6.2) (avec des simplifications dues au fait que P est supposée finie). On obtient alors la majoration annoncée de $h_{\mathrm{abs}}(\Sigma_0(f, P))$. □

Remarques. 1. $\mathrm{cap}_P(f, (\partial f(S))_{S\in P}) \leq \mathrm{cap}_P(f, (\partial f(S))_{S\in \mathrm{Fut}(P)})$, l'énoncé ci-dessus est donc un peu plus fort que celui de [24] de ce point de vue.

2. Au prix d'un effort supplémentaire, on pourrait supprimer l'hypothèse que la partition est μ-génératrice à condition de considérer l'extension complète et non plus symbolique et de remplacer $h_\mu(f)$ par $h_\mu(f, P)$ dans la condition (remarquons à ce propos que dans l'énoncé de [24] il faut lire $h_\mu(T, \xi) > \dots$ et non pas $h_\mu(T) > \dots$).

CHAPITRE 7

ENTROPIES DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Ce chapitre est consacré à différentes majorations du défaut de semi-continuité supérieure (s.c.s.) de l'entropie. Nous étudierons principalement l'entropie métrique. Son défaut joue en effet un rôle central dans les problèmes d'existence (en général) et de multiplicité (en dimension 1) des mesures maximales.

En guise d'introduction, on rappelle que l'expansivité implique la semi-continuité supérieure de l'entropie métrique. On présente ensuite la théorie de Yomdin à partir du lemme algébrique de M. Gromov. On remarque qu'on obtient un peu plus que les énoncés de Y. Yomdin et de M. Gromov. Cela nous permet de majorer facilement une entropie locale "grossière" qui nous permet d'obtenir tout aussi facilement les majorations voulues des défauts de semi-continuité considérés, sans recourir aux estimations "hyperboliques" de S. Newhouse [33].

1 Conséquence de l'expansivité

Cette section est consacrée à un résultat aussi facile que classique mais dont les ingrédients sont repris dans l'estimation plus sophistiquée de la section 3.

Soit f une application continue d'un compact métrique X dans lui-même. On dit que f est expansive s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $d(f^k x, f^k y) < \epsilon_0$ pour tout $k \geq 0$ implique $x = y$. En particulier toute partition mesurable P de diamètre $\operatorname{diam}(P) := \max_{A \in P} \operatorname{diam}(A) < \epsilon_0$ est génératrice. Par compacité de X, il existe une telle partition finie P. On a donc:

$$(*) \qquad h_\nu(f) = h_\nu(f, P) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} H_\nu(P^{\vee n}).$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$. Pour que μ soit un point de semi-continuité supérieure (s.c.s.) de $\nu \mapsto h_\nu(f)$, il suffit, d'après (*), que ce soit un point de continuité de toutes les fonctions $\nu \mapsto H_\nu(P^n)$ $(n \geq 1)$. Or $H_\nu(P^{\vee n})$ est une fonction continue des mesures des éléments de $P^{\vee n}$.

Pour que μ soit un point de continuité de $\nu \mapsto \nu(A)$, avec A un ensemble mesurable, il suffit que $\mu(\partial A) = 0$ (la mesure d'un compact est s.c.s., celle d'un ouvert est semi-continue inférieurement) et les frontières des éléments de $P^{\vee n}$ vérifient:

$$\partial(A_0 \cap f^{-1}A_1 \cap \cdots \cap f^{-n+1}A_{n-1}) \subset \partial A_0 \cup f^{-1}\partial A_1 \cup \cdots \cup f^{-n+1}\partial A_{n-1}$$

en remarquant que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial f^{-1}A \subset f^{-1}\partial A$.

Il suffit donc de prendre une partition P de diamètre inférieur à ϵ_0 et dont la frontière de chaque élément soit de μ-mesure nulle, par exemple:

$$P = \{B(x_1, \alpha), B(x_2, \alpha) \setminus B(x_1, \alpha), B(x_3, \alpha) \setminus (B(x_1, \alpha) \cup B(x_2, \alpha)), \dots\}$$

avec $\{x_1, \dots, x_N\}$ un $\epsilon_0/2$-recouvrement fini de X et $\alpha \in (\epsilon_0/2, (2/3)\epsilon_0)$, choisi pour que $\mu(\partial B(x_i, \alpha)) = 0$ pour $i = 1, \dots, N$.

Donc $\nu \mapsto h_\nu(f)$ est s.c.s. en μ. Mais $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ était arbitraire, l'entropie métrique est s.c.s. (partout).

2 Notions C^r

Donnons d'abord quelques définitions relatives aux applications de classe C^r. Le cas le plus simple est celui d'une application définie entre deux espaces euclidiens:

(7.1) Définition. *On appelle* **espace euclidien** *une partie ouverte non-vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ arbitraire).*

Soit E, F deux espaces euclidiens et $h : E \to F$ une application C^r. En chaque point $x \in E$, les dérivées partielles d'ordre s ($1 \leq s \leq r$) définissent une application s-linéaire symétrique de $(TE)^s = (\mathbb{R}^{\dim E})^s$ dans $TF = \mathbb{R}^{\dim F}$ notée

$$d^s h : TE^s \longrightarrow TF$$

On munit TF de la norme euclidienne $||\cdot||$. On pose:

$$||d^s h(x)|| = \max_{\alpha \in \{1,\ldots,\dim E\}^s} \left\| \frac{\partial^s h}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} \right\|.$$

Enfin on note $||d^s h|| = \sup_{x \in E} ||d^s h(x)||$.

Si E' et F' sont des parties non-vides, non nécessairement ouvertes, d'espaces euclidiens E et F, on dira que $h : E' \to F'$ est une application C^r si elle admet un prolongement C^r de E dans F.

Rappelons que si E n'est plus un espace euclidien les dérivées d'ordre 2 ou plus exigent pour être définies de façon intrinsèque le choix d'une connection [9] (on le voit aisément en considérant la transformation des coordonnées des applications linéraires dérivées (d'ordre 2 par exemple) dans un changement de variables). En ce qui nous concerne il est plus efficace de procéder d'une manière non-intrinsèque, comme suit (d'après Y. Yomdin [51]):

On fixe dans la suite un ordre de différentiabilité $r \geq 1$ et V une variété compacte, à bord, de classe C^r et de dimension m munie d'une structure riemanienne et d'un atlas fini dans le sens suivant:

(7.2) Définition. *On dit que V est munie d'un* **atlas fini** *si on a fait, une fois pour toutes, le choix d'une collection finie de cartes recouvrant V, c'est-à-dire de difféomorphismes C^r, $\chi_a : V_a \to U_a$ pour $a \in A$ (ensemble fini d'indices) avec U_a ouvert de $\mathbb{R}^m$ (ou d'un demi-espace), V_a ouvert de V et $\bigcup_{a \in A} V_a = V$.*

On définit alors, pour une application C^r de V dans V, pour $0 \leq s \leq r$, la **norme de "la dérivée d'ordre s"**, *comme*

$$||d^s h(x)||_A = \sup_{a,b} ||d^s(\chi_b \circ h \circ \chi_a^{-1})(y)|| \qquad y = \chi_a(x)$$

le supremum portant sur les $a, b \in A$ tels que $x \in V_a$ et $h(x) \in V_b$. Il est commode de définir de même pour une application $h : E \to V$

$$||d^s h(x)||_A = \sup_b ||d^s(\chi_b \circ h)(x)||$$

le supremum portant sur les $b \in A$ tels que $h(x) \in V_b$. Enfin

$$||d^s h||_A = \sup_x ||d^s h(x)||_A$$

x parcourant l'ensemble de départ de h.

Remarquons que dans ce dernier cas, bien que $d^s h(x)$ soit une application s-linéaire bien définie, nous utiliserons toujours $||d^s h(x)||_A$.

Afin d'éviter de répéter presque mot pour mot certaines définitions on se permettra d'écrire $||\cdot||_A$ y compris dans le cas d'espaces euclidiens. Dans ce cas c'est simplement une notation pour $||\cdot||$ (on peut dire que tout espace euclidien E est muni de l'atlas trivial $\{Id : E \to E\}$).

La compacité de V donne trivialement la constante $\beta \geq 1$:

(7.3) Lemme. *La structure riemannienne de V définit une norme $||\cdot||_V$ sur le fibré tangent et une distance d_V sur V. Il existe une constante $1 \leq \beta < \infty$ telle que, pour tous $x, y \in V$ dans une même carte V_a,*

$$\beta^{-1}||\chi_a(x) - \chi_a(y)|| \leq d_V(x,y) \leq \beta||\chi_a(x) - \chi_a(y)||.$$

(7.4) Définition. *Soit une application $f : V \to V$ de classe C^r. Pour $s = 1, \ldots, r$, on appelle* **taille** *C^r de f la quantité*

$$||f||_r = \sup_{1 \leq s \leq r} ||d_s f||_A$$

(dépendant de l'atlas fini) et **dilatation** *de f la quantité*

$$M(f) = \max(1, \sup_{x \in V} ||df(x)||_V)$$

(ne dépendant que de la structure riemannienne de V).

(7.5) Définition. *Soit X un espace euclidien ou la variété V.*

Soit (σ, S) une **partie C^r-paramétrée**, *c'est-à-dire la donnée de $S \subset X$ et d'une application C^r, dite* **paramétrage**, *$\sigma : [0,1]^l \to X$. On appelle* **taille de la partie paramétrée** *(σ, S) la quantité $||\sigma||_r$.*

On appelle **C^r-décomposition** *de (σ, S) toute collection finie $\{\phi_1, \ldots, \phi_q\}$ d'applications de classe C^r telle que:*

(1) $\bigcup_{j=1}^q \mathrm{Im}(\phi_j) \supset \sigma^{-1}S$.
(2) $||\sigma \circ \phi_j||_r \leq 1$.
(3) $||d\phi_j|| \leq 1$.

La condition (1) veut dire que l'union des images des $\sigma \circ \phi_j$ recouvre l'image de σ sur S en tenant compte des multiplicités. Remarquons qu'on ne demande pas que $\mathrm{Im}\,\sigma \supset S$, mais l'ensemble à recouvrir est $S \cap \mathrm{Im}\,\sigma$.

La condition (2) implique que les morceaux de la décomposition soit de taille constante.

La condition (3) assure que la décomposition est bien obtenue, comme on s'y attend, par des reparamétrages contractant. Cette remarque triviale sera nécessaire pour faire le lien ci-dessous avec l'entropie locale.

3 Structure des applications différentiables

Le résultat fondamental de Y. Yomdin porte sur les variétés algébriques. Ce résultat a été amélioré par M. Gromov pour aboutir à l'énoncé appelé **lemme algébrique** (cf. ci-dessous).

(7.6) Définition. *On dit que $Y \subset [0,1]^n$ est un* **sous-ensemble algébrique** *de* **degré** *au plus d, s'il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ dont la somme des degrés totaux soit au plus d et qui définissent Y de la manière suivante:*

$$Y = \{x \in [0,1]^n : P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0\}$$

On dit que Y est de **dimension** *m si Y peut s'écrire comme une union finie de parties difféomorphes à $[0,1]^m$.*

(7.7) Lemme algébrique (M. Gromov [11], d'après Y. Yomdin [51,52]). *Soit un ordre de différentiabilité r, une dimension n et un degré d (trois entiers supérieurs ou égaux à 1). Il existe alors un entier $Q(r,n,d)$ tel que, si Y est un sous-ensemble algébrique de $[0,1]^n$ de degré au plus d et de dimension notée l, alors il existe une collection d'applications C^r $\{h_j : [0,1]^l \to Y \mid j = 1, \ldots, q\}$ avec*

$$q \leq Q(r,n,d)$$

et

(1) $||h_j||_r \leq 1/2$.
(2) $\bigcup_{j=1}^{q} \mathrm{Im}(h_j) = Y$.

Pour une preuve, ainsi qu'un énoncé un peu plus fort, on renvoie à M. Gromov [11].

Appliquons le lemme algébrique à l'étude d'une application différentiable définie d'un espace euclidien sur un autre.

(7.8) Théorème (Y. Yomdin [51]). *Soit $h : [0,1]^l \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^r. Il existe alors une C^r-décomposition de la partie paramétrée $(h, [0,1]^m)$ de cardinal $q \leq A(1 + ||d^r h||)^{l/r}$, avec A une* **constante universelle**, *c'est-à-dire ne dépendant que de l, m, r.*

La preuve suivante est due à M. Gromov [11].

Preuve. Fixons $\delta > 0$ une (petite) constante universelle. Soit

$$K = E(\delta^{-1/r} ||d^r h||^{1/r}) + 1.$$

On considère l'application résultant du changement d'échelle:

$$\begin{array}{rccc} \bar{h} : & [0,K]^l & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & h(K^{-1}x) \end{array}$$

De cette façon, on a $||d^r \bar{h}|| \leq \delta$.

On découpe $[0,K]^l$ en K^l cubes de taille 1 et $[0,1]^m$ en 3^m cubes de taille $1/3$. Il suffit ainsi de trouver une C^r-décomposition de cardinal majoré par une constante universelle pour chacun des $3^m \cdot K^l$ couples (g,S) formés par

(1) g: une restriction de $\bar{h}$ à un des K^l cubes de taille 1 de $[0,K]^l$ qu'on peut supposer être $[0,1]^l$, $g : [0,1]^l \to \mathbb{R}^m$.

(2) S: un des 3^m cubes de taille $1/3$ inclus dans $[0,1]^m$ qu'on peut supposer être $[1/3,2/3]^m$.

Fixons un tel couple (g,S).

Soit $G : [0,1]^l \to \mathbb{R}^m$ le développement de Taylor à l'ordre r de g au centre du cube $[0,1]^l$. On a, $\sqrt{l}$ étant la longueur de la diagonale, pour $s = 0,\dots,r$,

$$||d^s(G-g)|| \leq \frac{l^{\frac{r-s}{2}}}{2^{r-s}(r-s)!}\delta$$

qu'on peut supposer inférieur à $1/3$, δ étant petit. Soit le sous-ensemble algébrique

$$Y = \{(x,y) \in [0,1]^l \times [0,1]^m : G_1(x) - y_1 = \cdots = G_m(x) - y_m = 0\}$$

Y est de degré au plus mr. Notons $\pi_1 : [0,1]^l \times [0,1]^m \to [0,1]^l$ et $\pi_2 : [0,1]^l \times [0,1]^m \to [0,1]^m$ les projections. On a, d'après la majoration de $||G-g||$,

$$\pi_1 Y = \{x \in [0,1]^l : G(x) \in [0,1]^m\} \supset \{x \in [0,1]^l : g(x) \in S = [1/3,2/3]^m\}$$

Soit $\{h_j : j = 1,\dots,q\}$ la collection d'applications fournies par le lemme algébrique appliqué à Y. En particulier, q est majorée par une constante universelle. On pose $\phi_j = \pi_1 \circ h_j$. Vérifions que les ϕ_j ont bien les propriétés annoncées:

(1) $\bigcup_{j=1}^q \operatorname{Im} h_j \supset Y$ donc $\bigcup_{j=1}^q \operatorname{Im} \phi_j \supset \pi_1 Y \supset g^{-1}S$.

(2) $||g \circ \phi_j||_r \leq 1$. En effet,

$$\frac{\partial^s g \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_s}} = \frac{\partial^s G \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_s}} + \frac{\partial^s (g-G) \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_s}}$$

Or $G \circ \phi_j = G \circ \pi_1 \circ h_j = \pi_2 \circ h_j$ car Y est inclus dans le graphe de G, donc la norme euclidienne du premier terme est majorée par $1/2$. Chaque coordonnée du deuxième terme se majore en montrant, par récurrence, qu'elle se met sous la forme

$$\sum_\beta \frac{\partial^b (g_i - G_i)}{\partial x_{\beta_1} \dots x_{\beta_b}} P_\beta(d^s \phi_j)$$

où $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_b)$ décrit $\bigcup_{1 \leq t \leq s} \{1,\dots,l\}^t$ et P_β est un polynôme en les coordonnées des dérivées partielles d'ordre s ne dépendant que de α, β, l, m, s. La norme du deuxième terme est donc majorée par une constante universelle fois δ, on peut supposer que c'est plus petit que $1/2$.

(3) $||d^1 \phi_j|| \leq ||d^1 h_j|| \leq 1/2 \leq 1$.

□

Fixons un tel couple (g, S).

Soit $G : [0,1]^l \to \mathbb{R}^m$ le développement de Taylor à l'ordre r de g au centre du cube $[0,1]^l$. On a, $\sqrt{l}$ étant la longueur de la diagonale, pour $s = 0, \ldots, r$,

$$||d^s(G-g)|| \leq \frac{l^{\frac{r-s}{2}}}{2^{r-s}(r-s)!}\delta$$

qu'on peut supposer inférieur à $1/3$, δ étant petit. Soit le sous-ensemble algébrique

$$Y = \{(x,y) \in [0,1]^l \times [0,1]^m : G_1(x) - y_1 = \cdots = G_m(x) - y_m = 0\}$$

Y est de degré au plus mr. Notons $\pi_1 : [0,1]^l \times [0,1]^m \to [0,1]^l$ et $\pi_2 : [0,1]^l \times [0,1]^m \to [0,1]^m$ les projections. On a, d'après la majoration de $||G-g||$,

$$\pi_1 Y = \{x \in [0,1]^l : G(x) \in [0,1]^m\} \supset \{x \in [0,1]^l : g(x) \in S = [1/3, 2/3]^m\}$$

Soit $\{h_j : j = 1, \ldots, q\}$ la collection d'applications fournies par le lemme algébrique appliqué à Y. En particulier, q est majorée par une constante universelle. On pose $\phi_j = \pi_1 \circ h_j$. Vérifions que les ϕ_j ont bien les propriétés annoncées:

(1) $\bigcup_{j=1}^q \operatorname{Im} h_j \supset Y$ donc $\bigcup_{j=1}^q \operatorname{Im} \phi_j \supset \pi_1 Y \supset g^{-1}S$.

(2) $||g \circ \phi_j||_r \leq 1$. En effet,

$$\frac{\partial^s g \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} = \frac{\partial^s G \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} + \frac{\partial^s (g-G) \circ \phi_j}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}}$$

Or $G \circ \phi_j = G \circ \pi_1 \circ h_j = \pi_2 \circ h_j$ car Y est inclus dans le graphe de G, donc la norme euclidienne du premier terme est majorée par $1/2$. Chaque coordonnée du deuxième terme se majore en montrant, par récurrence, qu'elle se met sous la forme

$$\sum_\beta \frac{\partial^b (g_i - G_i)}{\partial x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_b}} P_\beta(d^s \phi_j)$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_b)$ décrit $\bigcup_{1 \leq t \leq s} \{1, \ldots, l\}^t$ et P_β est un polynôme en les coordonnées des dérivées partielles d'ordre s ne dépendant que de α, β, l, m, s. La norme du deuxième terme est donc majorée par une constante universelle fois δ, on peut supposer que c'est plus petit que $1/2$.

(3) $||d^1 \phi_j|| \leq ||d^1 h_j|| \leq 1/2 \leq 1$.

□

4 Application à l'itération

On va étudier grâce aux résultats précédents, l'itération des applications différentiables au voisinage d'une orbite.

Le théorème de Y. Yomdin que nous allons présenter se généralise sans difficulté à la composition arbitraire d'applications (au lieu d'itérer une même application):

(7.9) Définition. *On appelle* **application aléatoire** *une famille* $f = (f_i)_{i\in I}$ *d'applications* f_i *avec* $f_i : V \to V$ *de classe* C^r *telles que les quantités*

$$M(f) := \sup_{i\in I} M(f_i), \|d^s f\| := \sup_{i\in I} \|d^s f_i\| \text{ et } \|f\|_r := \sup_{i\in I} \|f_i\|_r$$

sont finies. On définit l'action $f_{i_1\dots i_{k-1}}$ *sur* V *d'une suite finie* $i_1 \dots i_{k-1}$ *à valeurs dans* I, *comme*

$$f_{i_1\dots i_{k-1}} = f_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{i_1}.$$

par convention $f_\emptyset = \mathrm{id}$. *Si* $i = (i_n)_{n\geq 1}$ *est une suite infinie à valeurs dans* I, *on pose* $f_i^k = f_{i_1\dots i_{k-1}}$ *et si* $x \in V$, *on appelle* **orbite** *de l'application aléatoire la suite* $(f_i^k x)_{k\geq 0}$.

Le (ϵ, n)*-voisinage de* (x, i) *est défini comme*

$$V_n(x, i, \epsilon) = \{y \in V : \forall k \geq 0\ d(f_i^k(y), f_i^k(x)) < \epsilon \text{ pour } k = 0, \dots, \}$$

Remarquons qu'on peut identifier de façon évidente une application $g : V \to V$ de classe C^r à une application aléatoire $f = \{g\}$.

(7.10) Définition. *Soit* f *une application aléatoire sur* V *de classe* C^r, $i \in I^{\mathbb{N}}$ *et* (σ, S) *une partie paramétrée.*

On appelle C^r**-découpage** *de* f_i^n *sur une partie* C^r (σ, S) *la donnée d'une* C^r*-décomposition de* $f_{i_1\dots i_n} \circ \sigma$ *sur* $f_{i_1\dots i_n} S$.

Un C^r*-découpage,* $\mathcal{D}_n$, *de* f_i^n *est dit* P**-admissible** *pour un entier* $P \geq 1$ *s'il existe* $\mathcal{D}_P$, *un* C^r*-découpage de* f_i^P *tel que*

$$\mathcal{D}_n = \bigcup_{\phi\in\mathcal{D}_P} \{\phi \circ \psi : \psi \in \mathcal{D}(n, P, \phi)\}$$

avec $\mathcal{D}(n, P, \phi)$ *un* C^r*-découpage* P-admissible *de* $f_{i_{P+1}\dots i_n}^{n-P}$ *sur* $(f_{i_1\dots i_P}^P \circ \sigma \circ \phi, f_i^P S)$.

Remarquons que, vu la définition des C^r-décompositions, $\|d^1\psi\| \leq 1$ ci-dessus.

(7.11) Théorème (d'après Y. Yomdin [51]**).** *Soit* V *une variété à bord de dimension* m, *compacte, munie d'une structure riemannienne et d'un atlas fini (7.2).*

Il existe alors une constante K *et un* $\epsilon_0 > 0$ *fonction continue de* $M(f)$ *et de* $\|f\|_r$ *tels que, pour toute application aléatoire* $f = (f_i)_{i\in I}$:

pour tout $(x, i) \in V \times I^{\mathbb{N}}$, *et toute application* $\sigma : [0, 1]^l \to V$ *de taille* $\|\sigma\|_r \leq 1$, *il existe, pour chaque* $k \geq 0$, *un* C^r*-découpage* 1*-admissible* $\{\phi_{k,1}, \dots, \phi_{k,q}\}$ *de* f_i^k *sur* $(\sigma, V_n(x, i, \epsilon_0))$ *de cardinal*

$$q \leq (K_0 M^{l/r})^k \tag{1}$$

(7.12) Corollaire. *Pour tout* $\alpha > 0$, *il existe un* $\epsilon_0 > 0$, *une constante* K_1 *et un entier* $P \geq 1$, *ces trois nombres ne dépendant de* f *que comme fonctions de* $M(f)$ *et* $\|f\|_r$, *tels que, pour tous* $k \geq 0$, $(x, i) \in V \times I^{\mathbb{N}}$, *il existe un découpage* C^r P*-admissible de* f_i^k *sur* $(\sigma, V_n(x, i, \epsilon))$, *de cardinal* q *tel que*

$$q \leq K_1(\alpha) e^{\alpha n} M^{\frac{l}{r} n}. \tag{1a}$$

La preuve qui suit est calquée sur celle de Y. Yomdin [51]. Traitons d'abord le problème de l'itération dans un contexte euclidien:

(7.13) Lemme. *Soit* $\sigma : [0,1]^l \to \mathbb{R}^m$ *et* $g_i : [0,1]^m \to \mathbb{R}^m$, *pour* $i = 1, \ldots, n$ *tels que* $||\sigma||_r \leq 1$ *et* $M = \sup\{1, ||g_i||_r : i = 1, \ldots, n\}$. *Posons* $G^k = g_k \circ \cdots \circ g_1$ *et* $S = \{y \in [0,1]^m : \forall k = 0, \ldots, n\ G^k(y) \in [0,1]^m\}$.

Il existe alors, pour chaque $k = 0, \ldots, n$, *un* C^r*-découpage 1-admissible*

$$\{\phi_{k,1}, \ldots, \phi_{k,q}\}$$

de G^k *sur* (σ, S) *avec*

$$q \leq (K_2 M^{\frac{l}{r}})^k$$

avec K_2 *une constante universelle (ne dépendant que de* l, m, r*).*

Preuve du lemme. Soit $n \geq 0$. Pour $k = 0$ il suffit de prendre le C^r-découpage trivial $\{\mathrm{id}\}$. Supposons $1 \leq k \leq n$ et qu'il existe un C^r-découpage $\{\phi_{k-1,j} : j = 1, \ldots, q\}$ de G^{k-1} sur (σ, S) avec $q \leq (K_2 M^{\frac{l}{r}})^{k-1}$ avec K_2 une constante universelle à préciser.

Fixons $j = 1, \ldots q$. Posons $\tau = G^{k-1} \circ \sigma \circ \phi_{k-1,j}$. Par hypothèse, $||\tau||_r \leq 1$. Posons $h := G^k \circ \sigma \circ \phi_{k-1,j} = g_k \circ \tau$, donc (comme dans la preuve précédente) $||h||_r \leq BM$ avec B une constante universelle. Le théorème (7.8) donne une C^r-décomposition de h sur $(h, G^k S)$ avec $G^k(S) \subset [0,1]^m$,

$$\{\psi_p : p = 1, \ldots, q'\} \qquad \text{avec } q' \leq A(1 + (BM)^{l/r}) \leq AB^{l/r}(1 + B^{-l/r})M^{l/r}.$$

On obtient donc un sous-découpage $\{\phi_{k-1,j} \circ \psi_p\}$ comme annoncé avec $K_2 = AB^{l/r}(1 + B^{-l/r})$.

Ce découpage construit par récurrence est naturellement 1-admissible. □

Preuve du théorème. Fixons $\epsilon_0 > 0$ assez petit pour qu'on puisse se ramener à un contexte "euclidien". Il faut que la condition suivante soit remplie:

(1) à tout $(x, i) \in V \times I$, on peut associer $a, b \in A$ tel que $B(x, \epsilon_0) \subset V_a$ et $B(f_i x, M\epsilon_0) \subset V_b$, donc $f_i(B(x, \epsilon_0))$ aussi (boules définies par la métrique riemannienne).

on veut aussi que, pour tous $(x, i), a, b$ comme ci-dessus, les coordonnées "à l'échelle"

$$\chi_x : y \mapsto <(2\beta\epsilon_0)^{-1}> \circ (\chi_a(y) - \chi_a(x)) + c$$

($< k >$ représente une homothétie de rapport k et c est le centre du cube $[0,1]^m$) dans lesquelles $B(x, \epsilon_0)$ a une taille de l'ordre de l'unité:

$$[-\beta^{-2}/2, \beta^{-2}/2]^m + c \subset \chi_x(B(x, \epsilon_0)) \subset [0,1]^m$$

soient telles que, la représentation de f_i dans ces coordonnées:

$$\begin{array}{rccc} g_{x,i} : & [0,1]^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & z & \longmapsto & \chi_{f_i(x)} \circ f_i \circ \chi_x^{-1} \end{array}$$

vérifie $||g_{x,i}||_r \leq \beta^2 M(f)$ ($||d^1 f||_A \leq \beta^2 M(f)$): il suffit que

(2) $(2\beta\epsilon_0)^{s-1} ||d^s f_i|| \leq M(f)$.

On voit que ϵ_0 peut être choisi continuement en fonction de $||f||_r$ et $M(f)$ (et par ailleurs indépendant de f).

Pour tout $(x,i) \in V \times I^{\mathbb{N}}$, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $g_k = g_{f_i^{k-1}x,i_k}$. On obtient le résultat avec $K_0 = K_1\beta^{2l/r}$. □

Preuve du corollaire. Soit $\alpha > 0$. Fixons $P = E(\log K_0/\alpha) + 1$. Appliquons le théorème à f^P (l'itération d'une application aléatoire se définissant clairement comme une famille indexée par I^P). On obtient ϵ_0 minoré par une fonction continue > 0 de $M(f)$ et $||f||_r$ car $M(f^P) \leq M(f)^P$ et $||f^n||_r \leq C||f||_r^D$ avec C et D constantes ne dépendant que de m, r et $P = P(\alpha)$. On obtient pour $k \geq 0$ multiple de P les résultats annoncés si $K_1 \geq K_0^P$.

Pour obtenir un découpage à k quelconque, on écrit $k = Pk' + k''$ avec $0 \leq k'' < P$: il suffit de raffiner le découpage de Pk' au plus k'' fois. Le cardinal obtenu est majoré par

$$K_0^P e^{\alpha Pk'} M^{\frac{l}{r}Pk'} \cdot K_0^{k''} M^{\frac{l}{r}k''}$$

il suffit donc de prendre $K_1 = K_0^{2P} e^{-\alpha P}$. □

5 Résultats de semi-continuité de l'entropie

Nous allons maintenant déduire de la théorie de Y. Yomdin les résultats suivants de semi-continuité supérieure (dus à Y. Yomdin [51] et S. Newhouse [33]).

Fixons V une variété compacte à bord, riemannienne. Rappelons la définition suivante due à M. Gromov [11]:

L'entropie topologique l-dimensionnelle est définie comme la quantité suivante:

$$h^l_{\text{top}}(f) = \lim_{\epsilon \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_l(\epsilon, n).$$

avec $r_l(\epsilon,n) = \sup_\sigma r(\epsilon, n, \operatorname{Im}\sigma)$, où σ parcourt l'ensemble $\Sigma(l,r)$ des applications $[0,1]^l \to V$ de classe C^r telles que $||\sigma||_r \leq 1$ (on munit V d'un atlas fini arbitraire mais fixé - cf. (7.2)). Notons que $h^m_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f)$.

(7.14) Théorème (S. Newhouse [33], Y. Yomdin[51]). *Soit V une variété à bord compacte, riemannienne, de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) et $m = \dim V$. On note $C^r(V)$ l'ensemble des applications C^r de V dans V muni de la topologie C^r.*

Fixons $f : V \to V$ de classe C^r. On a les majorations suivantes du défaut de semi-continuité supérieure des fonctions suivantes:

$$\limsup_{g \to f} h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f) + \frac{m}{r} \log M(f) \quad \text{dans } C^r(V).$$

$$\limsup_{g \to f} h^l_{\text{top}}(g) \leq h^l_{\text{top}}(f) + \frac{l}{r} \log M(f) \quad \text{dans } C^r(V).$$

$$\limsup_{\mu \to \nu} h_\mu(f) \leq h_\nu(f) + \frac{m}{r} \log M(f) \quad \text{dans } \mathcal{M}_f(V) \text{ muni de la topologie vague } (f \in C^r(V) \text{ est fixée}).$$

Remarquons qu'on peut se restreindre à $r < \infty$.

Nous montrons que ce sont des conséquences faciles du théorème (7.11), sans avoir besoin des estimations de S. Newhouse (globales [32] ou locales [33]).

L'ingrédient essentiel est l'*entropie locale* définie ci-dessous. On commence par la majorer grâce à la théorie de Yomdin, en utilisant notamment les remarques faites au cours de l'exposition ci-dessus quant au caractère P-admissible et contractant des reparamétrages. On en déduit ensuite facilement les résultats de semi-continuité.

La quantité fondamentale ici est une mesure de la complexité de la dynamique au voisinage d'une orbite donnée:

(7.15) Définition. *On appelle* **entropie locale** *l-dimensionnelle la quantité $h^l_{\mathrm{loc}}(f) = \lim_{\epsilon\to+} h^l_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon_0)$ avec*

$$h^l_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon_0) = \lim_{\epsilon\to 0+} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x,\sigma} \frac{1}{n} \log r^f(\epsilon, n, B^f_n(x,\epsilon_0) \cap \operatorname{Im}\sigma)$$

(le supremum étant pris sur les $\sigma \in \Sigma(l,r)$ et $x \in V$).

On appelle simplement "entropie locale" l'entropie locale m-dimensionnelle et on la note $h_{\mathrm{loc}}(f)$.

On peut rapprocher cette définition de celle de l'expansivité asymptotique de Bowen et Misiurevicz (0.5) ainsi que de l'entropie locale introduite par S. Newhouse. Par comparaison, on pourra noter la "rusticité" de la notion ci-dessus. Une estimation de l'entropie locale ainsi définie fournit une information *uniforme*. Mais la théorie de Yomdin est assez forte pour fournir une évaluation de cette complexité uniforme en termes de découpages. Le lien est le suivant:

(7.16) Lemme. *Si $\mathcal{D}$ est un découpage P-admissible de f^n sur (σ, S), alors le cardinal d'un (ϵ,n)-recouvrement de $S \cap \operatorname{Im}\sigma$ est majoré par*

$$\left(E\left(\frac{\sqrt{l}}{2\beta^{-1}\delta}\right)+2\right)^l \operatorname{card}\mathcal{D}$$

avec $\delta = \delta(f,P) > 0$ tel que $d(x,y) < \delta \implies d(f^k x, f^k y) \le \epsilon$ pour $k = 0,\dots,P-1$ et $\beta > 1$ la constante définie par l'atlas fini (7.3).

Il entraîne aussitôt:

(7.17) Proposition. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe un $\epsilon_0 > 0$ et une constante K_3, ces deux nombres ne dépendant de f que comme fonctions continues de $M(f)$ et $||f||_r$, tels que, pour tout $n \ge 0$, tout $\epsilon > 0$,*

$$r^f(\epsilon, n, B^f_n(x,\epsilon_0) \cap \operatorname{Im}\sigma) \le K_3 e^{\alpha n} M^{\frac{l}{r}n}$$

alors, uniformément par rapport à f avec $||f||_r$ et $M(f)$ bornés par une constante

$$\lim_{\epsilon\to 0+} h^l_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon_0) \le \frac{l}{r}\log M(f)$$

Notons que, pour $\epsilon > 0$,

$$h_B(f,V,\epsilon) \le h_B(f,V) = h_{\mathrm{top}}(f) \le h_B(f,V,\epsilon) + h_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon)$$

avec $h_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon) = h^m_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon)$.

Preuve de la proposition. Soit $\alpha > 0$. Le corollaire du théorème (7.11) fournit $\epsilon_0 > 0$, $P \geq 1$. On applique le lemme précédent au découpage de f^n sur $(\sigma, B_n(x,\epsilon_0))$ fournit par le corollaire de (7.11) et on pose

$$K_3 = K_1 \cdot \left(E(\frac{\sqrt{l}}{2\beta^{-1}\delta}) + 2 \right)^l$$

□

Preuve du lemme. L'essentiel du travail a été effectué lors de l'exposition de la théorie de Y. Yomdin, notamment en explicitant le caractère contractant des reparamétrages et la possibilité d'obtenir des décompositions P-admissibles. Il n'y a plus qu'à s'en servir:

Soit $\mathcal{R}_0$ un $\beta^{-1}\delta$-recouvrement de $[0,1]^l$ de cardinal majoré par

$$\left(E(\frac{\sqrt{l}}{2\beta^{-1}\delta}) + 2 \right)^l$$

obtenu en plaçant les points sur les sommets d'un réseau cubique d'arête $\beta^{-1}\delta/(\sqrt{l}/2)$ (la diagonale d'un cube de ce pavage doit être de longueur au plus $2\beta^{-1}\delta$).

Décomposons $n = kP + q$ avec $0 \leq q < P$. Posons, $\mathcal{D}$ étant le découpage de l'énoncé,

$$\mathcal{R} = \{\sigma \circ \phi(\mathcal{R}_0) : \phi \in \mathcal{D}\}$$

On a

$$\operatorname{card} \mathcal{R} \leq \operatorname{card} \mathcal{R}_0 \operatorname{card} \mathcal{D}$$

Il suffit de montrer que $\mathcal{R}$ est bien un (ϵ,n)-recouvrement de $B_n(x,\epsilon_0) \cap \operatorname{Im}\sigma$. Mais c'est un (δ,k)-recouvrement pour f^P sur $\sigma([0,1]^l)$.

Soit $\phi \in D$. Montrons que $\phi(\mathcal{R}_0)$ est un (δ,k)-recouvrement de $\sigma \circ \phi([0,1]^l)$. Soit $x \in \sigma \circ \phi([0,1]^l)$. Soit t un antécédent de x dans $[0,1]^l$. Il existe $t_0 \in \mathcal{R}_0$ tel que $||t - t_0|| \leq \beta^{-1}\delta$. Pour tout $k' = 0,\ldots,k$, on écrit, en se servant de la P-admissibilité, $\phi = \phi' \circ \psi$ avec $\phi' \in D_{k'P}$, découpage de $f^{k'P}$ et $||d\psi|| \leq 1$. Donc $d_V(f^{Pk'}x, f^{Pk'}(\sigma \circ \phi(t_0))) \leq \delta$ d'après la définition d'un découpage et de β.

Vu le choix de δ, c'est aussi un (ϵ,n)-recouvrement pour f. □

Le défaut de semi-continuité de l'entropie métrique ne fait intervenir la théorie de Yomdin que pour majorer $h_{\mathrm{loc}}(f)$. La majoration ci-dessus découle immédiatement de l'estimation $h_{\mathrm{loc}}(f) \leq \frac{m}{r} \log M(f)$ et du résultat purement topologique suivant:

(7.18) Théorème. *Soit $f : V \to V$ une application sur un compact métrique.*

$$\limsup_{\mu \to \nu} h_\mu(f) \leq h_\nu(f) + h_{\mathrm{loc}}(f)$$

dans $\mathcal{M}_f(V)$ muni de la topologie vague (f est fixée).

Remarque. Les deux autres majorations ci-après ne se laissent pas réduire à un énoncé de ce type. Celle concernant l'entropie topologique admet un énoncé

purement topologique, mais faisant intervenir, à la place de $\limsup_{g\to f} h_{\mathrm{loc}}(g)$, la limite uniforme:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{g\to f} h_{\mathrm{loc}}(g,\epsilon) \geq \limsup_{g\to f} h_{\mathrm{loc}}(g).$$

Quant à la majoration concernant l'entropie dimensionnelle, elle s'étudie beaucoup plus naturellement grâce aux découpages que grâce aux recouvrements.

Preuve du théorème (7.18). Fixons $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ et $\alpha > 0$. On a

$$h_\nu(f) = \sup_P h_\nu(f,P)$$

où P parcourt les partitions mesurables finies. On peut restreindre P aux **partitions "compactes"**, c'est-à-dire de la forme $\{K_1,\dots,K_N,U\}$ où les K_i sont des compacts 2 à 2 disjoints. Comparons une partition Q de diamètre petit mais fixé avec une partition P parcourant les partitions compactes:

$$h_\nu(f,P) \leq h_\nu(f,Q) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\nu(P^{\vee n}|Q^{\vee n})$$

avec $H_\nu(P^{\vee n}|Q^{\vee n}) = H_\nu(P^{\vee n}\vee Q^{\vee n}) - H(Q^{\vee n})$, l'entropie de $P^{\vee n}$ sachant $Q^{\vee n}$.

Affirmation. Si P est une partition compacte et Q une partition de diamètre ϵ_0,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\nu(P^n|Q^n) \leq h_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon_0) + \log 2.$$

L'affirmation entraîne pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}_f(X)$,

$$h_\nu(f^q) \leq h_\nu(f^q,Q) + h_{\mathrm{loc}}(f^q,\mathrm{diam}(Q)) + \log 2$$

Mais f étant de classe C^r, pour tout $q \geq 1$, il existe $\epsilon_q > 0$,

$$h_{\mathrm{loc}}(f^q,\epsilon_q) \leq h_{\mathrm{loc}}(f^q) + \alpha \leq q h_{\mathrm{loc}}(f) + \alpha$$

Fixons $q > \log 2/\alpha$. Pour Q une partition mesurable finie telle que $\mathrm{diam}(Q) < \epsilon_q$ et $\mu(\partial Q) = 0$,

$$h_\nu(f) \leq h_\nu(f,Q) + h_{\mathrm{loc}}(f) + \alpha/q + \log 2/q \leq h_\mu(f,Q) + \alpha + h_{\mathrm{loc}}(f) + 2\alpha$$

si ν est proche (dans la topologie vague) de μ, $\nu \mapsto h_\nu(f,Q)$ étant s.c.s. $\alpha > 0$ étant arbitraire, le résultat ne dépend plus que de la preuve de l'affirmation. Démontrons-la. On a

$$H_\nu(P^{\vee n}|Q^{\vee n}) \leq \log \max_{A\in Q^{\vee n}} \mathrm{card}\{B \in P^{\vee n} : B\cap A \neq \emptyset\}$$

P étant compacte $\epsilon := \min\{d(K_i,K_j) : i \neq j\}/2 > 0$.

$A \in Q^{\vee n}$ est inclus dans une boule (ϵ_0,n). Cette boule peut être recouverte par au plus $e^{(h_{\mathrm{loc}}(f,\epsilon_0)+\alpha)n}$ (ϵ,n)-boules avec $\alpha \to 0$ quand n tend vers l'infini. Mais une (ϵ,n)-boule rencontre au plus 2^n éléments de P^n (pour chaque x il existe

$i_0, \ldots, i_{n-1}$ tel que $f^k B_n(x,\epsilon) \subset K_{i_k} \cup U$, pour $k = 0, \ldots, n-1$, d'après le choix de ϵ). Donc le nombre d'éléments de $P^{\vee n}$ rencontrés par A vérifie:

$$\text{card}\{B \in P^{\vee n} : B \cap A \neq \emptyset\} \leq r(\epsilon, n, B_n(y, \epsilon_0)) \times 2^n$$

L'affirmation est démontrée. □

Preuve de la semi-continuité de l'entropie topologique classique. Fixons $f \in C^r(V)$ et $\alpha > 0$. Pour $g \in C^r(V)$ C^r-proche de f, on a, d'après le corollaire du théorème (7.11), $\epsilon_0(\alpha, g) \geq \epsilon_0(\alpha, f)/2$ et, par définition d la topologie C^r, $r \geq 1$, $\log M(g) \leq \log M(f) + \alpha$. En posant $\epsilon_0 = \epsilon_0(\alpha, f)/2$, on a donc, d'après la proposition (7.17):

$$h_{\text{loc}}(g, \epsilon_0) \leq \frac{1}{r} \log M(f) + 2\alpha.$$

Par conséquent:

$$(*) \qquad h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(g, \epsilon_0) + h_{\text{loc}}(g, \epsilon_0) \leq h_{\text{top}}(g, \epsilon_0) + \frac{1}{r} \log M(f) + 2\alpha$$

D'autre part, $h_{\text{top}}(g, \epsilon_0) = \lim_{n \to \infty} (1/n) \log r^g(\epsilon_0, n, V)$ avec $n \mapsto r^g(\epsilon_0, n, X)$ *sous-multiplicative.* Donc $h_{\text{top}}(g, \epsilon_0) \leq (1/n) \log r^g(\epsilon_0, n, X)$ pour chaque $n \geq 1$.

Fixons n_0 tel que $(1/n_0) \log r^f(\epsilon_0/2, n_0, V) \leq h_{\text{top}}(f) + \alpha$. Mais si g est C^0-proche de f alors $d^f_{n_0}(x,y) < \epsilon_0/2 \implies d^g_{n_0}(x,y) < \epsilon_0$ donc

$$(**) \qquad h_{\text{top}}(g, \epsilon_0) \leq \frac{1}{n_0} \log r^g(\epsilon_0, n_0, V) \leq \frac{1}{n_0} \log r^f(\epsilon_0, n_0, V) \leq h_{\text{top}}(f) + \alpha.$$

Il suffit de combiner les deux majorations (*) et (**) et de faire tendre $\alpha \to 0$. □

Preuve de la semi-continuité de l'entropie topologique dimensionnelle. Fixons $f \in C^r(V)$, $1 \leq l \leq m$ (pour $l = m$ on obtient l'entropie topologique classique) et $\alpha > 0$. Soit $\epsilon_0 > 0$, P et K_1 déterminés par le corollaire du théorème (7.11), valables pour g C^r-proche de f.

Pour majorer l'entropie dimensionnelle, il faut majorer $r_l(\epsilon, n) = \sup_\sigma r(\epsilon, n, \text{Im}\, \sigma)$ avec $\sigma \in \Sigma(l, r)$. Remarquons que $n \mapsto r_l(\epsilon, n)$ n'est pas clairement sous-multiplicative. C'est pourquoi on s'intéresse à la quantité suivante.

Soit $R^g(n)$ le plus petit entier majorant le cardinal de tout C^r-découpage minimal et P-admissible de g^n sur toute partie paramétrée (σ, S), de taille $||\sigma||_r \leq 1$ mais avec S quelconque, non nécessairement inclus dans une (ϵ_0, n)-boule. Vu la définition des découpages admissibles, c'est sous-multiplicatif:

$$R^g(nkP) \leq R^g(nP)^k$$

D'autre part, le corollaire du (7.11) implique que

$$R^g(n) \leq r^g_l(\epsilon_0, n) \cdot K_1 e^{\alpha n} M^{\frac{l}{r} n}$$

et le lemme (7.16) que

$$r^g_l(\epsilon, n) \leq C(\epsilon) R^g(n)$$

Soit $\epsilon > 0$. Fixons $n = n_0$ suffisamment grand pour que

$$\max(\log C(\epsilon)/n_0, \log K_0/n_0) < \alpha \text{ et } \frac{1}{n_0} r_l^f(\epsilon_0/2, n_0) \leq h_{\text{top}}^l(f) + \alpha.$$

On a donc

$$\begin{aligned} r_l^g(\epsilon, n) &\leq C(\epsilon) R^g(n - E(n/n_0)n_0) R^g(n_0)^{E(n/n_0)} \\ &\leq C'(\epsilon) \cdot \left(r_l^g(\epsilon_0, n_0) e^{2\alpha n_0} M^{\frac{l}{r} n_0} \right)^{E(n/n_0)} \end{aligned}$$

avec $C \leq C'$ des constantes. En faisant tendre $n \to \infty$ on en tire:

$$h_{\text{top}}^l(g, \epsilon) \leq \frac{1}{n_0} r_l^g(\epsilon_0, n_0) + \frac{l}{r} \log M + 3\alpha$$

Mais g est C^0-proche de f,

$$\frac{1}{n_0} r_l^g(\epsilon_0, n_0) \leq \frac{1}{n_0} r_l^f(\epsilon_0/2, n_0) \leq h_{\text{top}}^l(f) + \alpha$$

avec $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ sont arbitrairement petits. □

QUATRIÈME PARTIE

STRUCTURE DES APPLICATIONS DE L'INTERVALLE

Cette quatrième partie présente les théorèmes décrivant la structure des applications de l'intervalle. On donne une décomposition spectrale de l'ensemble non-errant: d'une part pour les applications continues arbitraires (théorie de A.M. Blokh) et d'autre part pour les applications monotones par morceaux, non nécessairement continues (théorie de F. Hofbauer). On donne ensuite une description du diagramme de Hofbauer d'une application arbitraire de l'intervalle. Enfin on considère la propriété de spécification.

CHAPITRE 8

DÉCOMPOSITION SPECTRALE DE A.M. BLOKH

Dans ce chapitre nous retrouvons des résultats de A.M. Blokh décrivant l'ensemble non-errant pour les applications de l'intervalle seulement supposées continues.

Rappelons d'abord quelques définitions relatives aux propriétés de récurrence.

(8.1) Définitions. *Soit une application $f : X \to X$ dans un espace topologique X.*

On dit qu'un point $x \in X$ est un point **non-errant** *si*

$$\forall U \in \mathcal{V}(x, X)\ \exists n \geq 1\ \ f^n(U) \cap U \neq \emptyset$$

($\mathcal{V}(x, X)$ est l'ensemble des voisinages dans la topologie relative de X d'un point x). L'ensemble non-errant, ensemble des points non-errants, est noté $\Omega(f)$.

On appelle **ensemble limite** *l'ensemble*

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$$

où $\omega(x)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f^n x)_{n \geq 0}$.

Soit $Y \subset Z \subset X$ avec $f(Y) \subset Y$. On dit que Y est une partie **topologiquement Z-transitive** *si pour tous $x, y \in Y$, tous $U \in \mathcal{V}(x, Z)$, $V \in \mathcal{V}(y, Z)$,*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

pour un certain $n \geq 1$. Si $Z = Y$, on dit simplement que Y est topologiquement transitive.

Si cela a lieu pour tous les n assez grands ($n \geq n(U, V)$), on dit que Y est **topologiquement Z-mélangeante.**

On dit enfin que Y est **fortement Z-transitive,** *s'il existe un ensemble fini (appelé* **ensemble exceptionnel***) Y_1 tel que, pour tout ouvert U de la topologie de Z rencontrant Y, $\bigcup_{k \geq 0} f^k U \supset Y \setminus Y_1$.*

La notion de Z-transitivité forte de Y avec $Z \supset Y$ est une variante technique de la notion habituelle. Remarquons que la Z_1-transitivité, si $Z_1 \subset Z_2$ (en particulier la propriété habituelle: $Z_1 = Y$) est une propriété plus forte que la Z_2-transitivité.

L'intérêt pour nous de ces notions de récurrence provient de la propriété bien connue: soit $\mu \in \mathcal{M}_f^*(X)$ (l'ensemble des mesures de probabilités invariantes et *ergodiques*), le support de μ est une partie topologiquement transitive (il suffit de considérer un point μ-générique appartenant à $\operatorname{supp} \mu$).

Pour l'étude (de la décomposition ergodique) des mesures invariantes, il suffit donc de considérer les parties topologiquement transitives. Pour deux classes d'applications unidimensionnelles, on obtient un résultat similaire à la décomposition spectrale de la théorie des difféomorphismes dits "axiome-A sans cycles". L'ensemble des points non-errants se décompose en une union presque disjointe de parties topologiquement transitives maximales, modulo un ensemble négligeable dans le sens suivant:

(8.2) Définition. *On dit qu'une partie $E \subset X$ est* **nulle** *si, pour toute mesure de probabilité invariante $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$:*

$$\mu(E) = 0.$$

A côté de cette définition en terme de mesures on a la notion topologique (plus explicite):

(8.3) Définition. *On dit que deux points $x, y \in X$ sont* **f-équivalents** *ssi il existe $k \geq 0$ tel $f^k(x) = f^k(y)$. On note $x \equiv_f y$.*

On dit qu'une partie $E \subset X$ est **effaçable** *si E est incluse dans une union dénombrable de classes d'équivalence de $\equiv_f$.*

Les relations entre ces notions sont claires:

(8.4) Lemme. *Soit $E \subset X$. On a les implications:*

E effaçable $\Longrightarrow$ Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ sans atomes, $\mu(E) = 0$.
E effaçable et $E \cap \mathrm{Per}(f) = \emptyset \Longrightarrow$ E nulle.

Preuve. Soit E une partie effaçable de X et $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ quelconque. Remarquons que, quitte à substituer à E l'union des classes de f-équivalence rencontrées par E, on peut supposer que E est mesurable. En effet la classe de f-équivalence d'un point x s'écrit

$$\bigcup_{k \geq 0} f^{-k} f^k(x).$$

Montrons que $\mu(E) > 0$ implique que μ est atomique.

$\mu(E) > 0$ implique (σ-additivité) qu'il existe une classe d'équivalence de $\equiv_f$ chargée par μ. Soit x pris dans cette classe. Or on a vu que la classe d'équivalence du point x peut s'écrire comme une union dénombrable croissante. Il existe donc $k \geq 0$ tel que $f^{-k} f^k(x)$ a une mesure positive: $f^k(x)$ est un atome de μ pour k assez grand. On a bien la propriété annoncée pour les parties effaçables.

Supposons que $E \cap \mathrm{Per}(f) = \emptyset$.

μ se décompose en $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ avec μ_1 une mesure invariante sans atomes, μ_2 une mesure invariante concentrée sur une collection dénombrable d'orbites périodiques et $t \in [0,1]$. Le raisonnement ci-dessus montre que $\mu_1(E) = 0$. Mais $\mu_2(\mathrm{Per}(f)) = 1$ donc $\mu_2(E) = 0$. On a bien $\mu(E) = 0$: E est nulle. □

Remarquons qu'un résultat de décomposition spectrale dans le cadre unidimensionnel a été d'abord obtenu dans le cas unimodal par J. Guckenheimer [12], L.B. Jonker et D.A. Rand [21].

On considère dans tout ce chapitre une application continue $f : [0,1] \to [0,1]$.

1 Intervalles périodiques

La décomposition sera obtenue en analysant les intervalles périodiques:

(8.5) Définition. *On dit que J est un* **intervalle faiblement périodique** *si J est un intervalle compact* **non-trivial**, *c'est-à-dire ni vide ni réduit à un point, et s'il existe un entier $n \geq 1$, tel que:*

(1) *les intervalles $J, \ldots, f^{n-1}(J)$ sont d'intérieurs disjoints.*
(2) *$f^n(J) \subset J$ et $n \geq 1$ est minimal.*

On note $\operatorname{orb}(J) = J \cup \cdots \cup f^{n-1}J$ *l'orbite de* J *et* $n(J)$ *sa période.*

Si, de plus, $f^n(J) = J$ *alors on dit que* J *est un* **intervalle périodique** *(ou* **intervalle strictement périodique***). Si on veut expliciter la période, on dira que* J *est un intervalle* n*-périodique.*

Le rôle de ces intervalles pour les applications continues de l'intervalle s'explique par la propriété triviale suivante: toute composante connexe d'une partie invariante est ou bien (aux extrémités près) un intervalle faiblement périodique ou bien est incluse dans l'ensemble errant. Notons quelques procédés de construction d'intervalles faiblement ou strictement périodiques:

(8.6) Lemme.

(1) *Si* $f^n(I_0) \subset I_0$, $x \in \Omega(f^n|I_0)$ *et si* U *est un voisinage connexe de* x *dans* I_0 *alors il existe un intervalle faiblement périodique* $I \subset I_0$ *tel que*

$$\operatorname{orb} I = \overline{\operatorname{orb} U}.$$

Plus précisément, $\operatorname{orb} U \supset \operatorname{orb}\operatorname{int}(I) = (\operatorname{orb} I) \setminus I_1$ *avec* $I_1 \subset \partial \operatorname{orb} I$ *et même* $I_1 \subset (\partial \operatorname{orb} I) \cap \operatorname{Per}(f)$ *si* I *est strictement périodique.*

(2) *L'intersection (d'intérieur non-vide) de deux intervalles faiblement ou strictement périodiques de périodes respectives* n *et* m *est un intervalle* faiblement *périodique de période* $\operatorname{ppcm}(n, m)$*, le plus petit commun multiple de* m *et de* n*.*

(3) *Si* I *est un intervalle faiblement périodique de période* p *alors* $J = \bigcap_{k\geq 0} f^{kp} I$ *est un intervalle (ou un point)* p*-périodique qui contient tous les intervalles périodiques inclus dans* I*. De plus*

$$J = \overline{\operatorname{conv}(I \cap \Omega(f^p|I))}$$

conv *étant la fermeture convexe. Si* J *n'est pas trivial, on dit que c'est l'***intervalle périodique défini par** I*.*

Preuve.

(1) On définit I comme la fermeture de la composante connexe de $\operatorname{orb} U \subset I_0$ contenant x. $I \supset U$ donc I est n'est pas réduit à un point et si $f^k(I) \cap I = \emptyset$ pour tout $k \geq 1$ alors x serait errant. Il existe donc $n \geq 1$ minimal tel que $f^n I \cap I \neq \emptyset$. Mais $\overline{\operatorname{orb} U}$ est invariant et $f^n(I)$ est connexe. Donc $f^n I \subset I$. I est faiblement n-périodique. Donc $\operatorname{orb} I$ est fermé et égal à $\overline{\operatorname{orb} U}$.

Vu la construction, $\operatorname{orb} U \supset \operatorname{int}(I)$, donc $\operatorname{orb} U \supset \operatorname{orb}\operatorname{int}(I)$. Si l'intervalle I est strictement périodique alors tout point $y \in \partial I \setminus \operatorname{orb}\operatorname{int}(I)$ a un antécédent par f^p dans I: $y' \in \partial I \setminus \operatorname{orb}\operatorname{int}(I)$, etc. Comme ∂I est fini, y est l'image par un itéré de f^p d'un point périodique, donc $y \in \operatorname{Per}(f)$.

(2) c'est clair.

(3) $f^p(I) \subset I$: $f^p(J) \subset J$ et d'autre part la suite $n \mapsto f^{np}(I)$ est une suite de compacts emboîtés. Soit $\epsilon > 0$. f^p est uniformément continue sur I donc il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $f^p(B(J, \delta)) \subset B(f^p(J), \epsilon)$. Mais pour n assez grand $f^{np} I \subset B(J, \delta)$. Donc

$$f^p(J) = \bigcap_{\epsilon>0} B(f^p(J), \epsilon) \supset \bigcap_{\epsilon>0} f^p(B(J, \delta(\epsilon))) \supset \bigcap_{n\geq 0} f^p(f^{np} I) \supset J$$

J est donc périodique.

Si $J_1 \subset I$ est un intervalle périodique, alors pour une infinité de $n \geq 0$, $J_1 = f^{np}J_1 \subset f^{np}I$: $J_1 \subset J$.

On a $\liminf_{n\to\infty} d(f^{np}I, x) = d(J, x)$. Or si $x \in I \setminus J$, soit $U = B(x, \frac{1}{2}d(x, J)) \cap I$,

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^{np}(U), U) \geq \liminf_{n\to\infty} d(f^{np}I, U) = d(J, U) \geq \frac{1}{2}d(x, J) > 0$$

et $x \notin \Omega(f^p|I)$.

□

Remarquons qu'une application triviale comme l'identité a une infinité non-dénombrable d'intervalles périodiques. On souhaite établir une correspondance entre parties transitives non-triviales (dans un sens à définir) et certains intervalles périodiques. C'est la raison des distinctions suivantes.

(8.7) Définition. *Soit J un intervalle périodique et $x \in \Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$. On dit que J est,* **pour le point** x,

*n-**essentiel**, avec $n \geq 1$, si J est le plus petit des intervalles n-périodiques contenant x.*

***-essentiel** s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que J soit n-essentiel pour le point x.*

essentiel *si J est le plus petit intervalle périodique contenant x (toutes périodes confondues).*

On dira que J est n-essentiel (-essentiel ou essentiel) s'il existe un $x \in \Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$ pour lequel J ait cette propriété. On note*

$\mathcal{J}_n$ l'ensemble des intervalles n-essentiels.

$\mathcal{J}_* = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{J}_n$, l'ensemble des intervalles $*$-essentiels.

$\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_*$ l'ensemble des intervalles essentiels.

On note enfin $\vec{\mathcal{J}}_*$ l'ensemble des suites $(J_k)_{k\geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{J}_*$ telles que, si on note n_k la période de J_k,

$$J_0 \supsetneq J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq \ldots \text{ et } n_k \to \infty$$

Remarques.

1. Une application comme l'application unimodale de Feigenbaum [45, p. 113] est dépourvue d'intervalles essentiels: $\Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$ est un solénoïde (cf. ci-dessous). Cela illustre la nécessité de considérer la classe plus large des intervalles *-essentiels.

2. Deux intervalles essentiels peuvent se chevaucher: il suffit de considérer l'application affine par morceaux définie par

x	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
$f(x)$	3/5	0	3/5	1	2/5	1

Les intervalles périodiques essentiels sont alors: $[0, 1]$ et $[2/5, 1]$. $[2/5, 1]$ est un intervalle topologiquement transitif et $[0, 2/5]$ contient une partie transitive Ω_1 (homéomorphe au shift complet sur 2 symboles, $\Sigma_+(2)$) mais pour tout intervalle non-trivial $I \subset [0, 2/5]$ dont l'intérieur rencontre Ω_1, $\overline{\mathrm{orb}\, I} = [0, 1]$.

Enonçons quelques propriétés des intersections des intervalles (strictement) périodiques:

(8.8) Lemme.

(1) *Si J_1, J_2 sont deux intervalles périodiques de périodes respectives $n_1 \leq n_2$ qui* **se chevauchent** *(intersection des intérieurs sans qu'un des intervalles contienne l'autre), alors*

$$n_2 = n_1 \quad ou \quad n_2 = 2n_1.$$

(2) *Si J_1 et J_2 sont deux intervalles périodiques de périodes n_1 et n_2 alors $J_1 \cap J_2$ définit un intervalle (ou un point) périodique J avec*

$$J \supset \Omega(f^n | J_1 \cap J_2) \supset \mathrm{int}(J_1 \cap J_2) \cap \Omega(f)$$

avec $n = \mathrm{ppcm}(n_1, n_2)$. De plus, si J n'est pas trivial, sa période est n.

Preuve.

(1) $\partial J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ donc, en appliquant f^{n_1}, f^{2n_1}: $J_1 \cap f^{n_1} J_2$ et $J_1 \cap f^{2n_1} J_2$ sont non-vides.

Si $f^i(J_2) \subset J_1$ alors $J_2 \subset f^{n_1 - i} J_1$. Mais $f^{n_1 - i} J_1$ est ou bien égal à J_1, ou bien d'intérieur disjoint de celui de J_1. Dans tous les cas cela contredit le chevauchement de J_1 et J_2. De même si $f^i(J_2) \supset J_1$.

Donc ∂J_1 rencontre à la fois J_2, $f^{n_1} J_2$ et $f^{2n_1} J_2$. Comme $\mathrm{card}\, \partial J_1 \leq 2$, au moins deux de ces trois intervalles contiennent un même point $a \in \partial J_1$. Ces deux ou trois intervalles contiennent donc $B(a, \epsilon) \cap J_1$ ($\epsilon > 0$ assez petit) et donc se confondent: $n_2 = n_1$ ou $2n_1$.

(2) Il suffit d'appliquer le lemme (8.6) et de voir que $\Omega(f^n | I) \supset \Omega(f^n) \cap \mathrm{int}(I)$ pour tout ensemble f^n-invariant I. □

2 Filtration

On va associer aux intervalles périodiques des intervalles réduits pour les deux raisons suivantes:

(1) on souhaite considérer des intervalles d'intérieurs disjoints ou emboîtés.
(2) ne sont véritablement associés à un intervalle périodique que les points qui n'appartiennent pas à un intervalle périodique plus petit.

Plus précisément, on a le:

(8.9) Théorème. *On associe à chaque intervalle périodique *-essentiel $J \in \mathcal{J}_*$, l'union:*

$$I_*(J) = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_* | \mathrm{orb}\, I \not\supset J} \mathrm{int}(I)$$

*et on pose $J' = \overline{\mathrm{conv}(J \setminus I_*(J))}$ l'***intervalle réduit** *associé à J. On a les propriétés suivantes:*

(1) *deux intervalles réduits sont ou d'intérieurs disjoints, ou emboîtés.*

(2) *si* $J_1' \supset J_2'$ *sont des intervalles non-triviaux alors* $J_1 \supset J_2$. *En particulier l'application* $J \mapsto J'$, *considérée sur l'ensemble des intervalles *-essentiels* J *tels que* J' *n'est pas trivial, est une injection.*

(3) *si on a une suite infinie* $(J_k)_{k\geq 0}$, *strictement monotone, d'intervalles essentiels de période* p *fixée, alors la différence symétrique* $J_k \Delta J_{k+1}$ *tend, au sens de Hausdorff (voir la preuve), vers un ensemble de points périodiques.*

(4) *les intervalles périodiques définissent une "filtration" de* $\Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$ *dans le sens où:*

$$\Omega(f) \subset \mathrm{Per}(f) \cup \bigcup_{J\in\mathcal{J}} J' \cup \bigcup_{s\in\vec{\mathcal{J}}_*} \bigcap\nolimits_{k\geq 0} \mathrm{orb}\, J_k$$

Notons les faits suivants pour fixer les idées:

(8.10) Remarques.

(1) $\mathcal{J}_*$ *est dénombrable.*

(2) $I_*(J)$ *ne retire de* J *que les points non-errants qui sont dans des intervalles périodiques strictement inclus dans* J*:*

$$I_*(J) \cap J \cap (\Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)) \subset \bigcup_{I\in\mathcal{J}_* \mid I\subsetneq J} \mathrm{int}(I)$$

Preuve du théorème.

(1) Soit $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$.

- si $\mathrm{orb}\, J_1 = \mathrm{orb}\, J_2$, ou bien $J_1 = J_2$ ou bien leurs intérieurs sont disjoints (ce sont des intervalles périodiques). Dans ces deux cas J_1', J_2' sont dans la même position l'un par rapport à l'autre que J_1 et J_2.
- sinon l'une des deux orbites n'est pas incluse dans l'autre: par exemple $\mathrm{orb}\, J_1 \not\subset \mathrm{orb}\, J_2$. Donc $\mathrm{int}(J_2) \subset I_*(J_1)$ donc ou $J_2 \subset J_1'$ ou J_2 et J_1' sont d'intérieurs disjoints.

(2) On voit que dans chacun des cas ci-dessus où $J_1' \supset J_2'$ et J_2' est non-trivial, on a bien $J_1 \supset J_2$. L'injectivité en est une conséquence immédiate.

(3) Supposons la suite strictement décroissante, le cas croissant étant similaire. Notons $[a_k, b_k] = J_k$, $[a, b] = \bigcap_{k\geq 0} J_k$. On a: $J_k \Delta J_{k+1} = [a_k, a_{k+1}) \cup (b_{k+1}, b_k]$. Cet ensemble tend vers un ensemble fini, X: $\{a, b\}$ ou $\{a\}$ (si $b_k = b$) ou $\{b\}$ (si $a = a_k$). p étant fixé, $f^p(X) \supset X$. X étant fini, ceci entraîne que X ne contient que des points périodiques.

(4) Il suffit de considérer $x \in \Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$. Notons $M \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ le supremum des périodes des intervalles faiblement périodiques contenant x en leur intérieur. On appelle **suite au-dessus de** x la donnée de

> $r \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$, une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{0\leq i<r}$ et une suite strictement décroissante d'intervalles périodiques $(J_i)_{0\leq i<r}$ tels que: J_i est n_i-essentiel pour x, et $n_i \mid n_{i+1}$.

Montrons qu'il existe des suites non-vides au-dessus de x, i.e. qu'il existe un intervalle J_0 *-essentiel pour x (il définira une suite avec $r = 1$ élément):

D'après le lemme (8.6), il existe un intervalle faiblement périodique I contenant x en son intérieur: on prend U voisinage de x dans $[0,1]$. Soit n_0 sa période. I définit un intervalle n_0-périodique contenant $x \notin \mathrm{Per}(f)$. Soit J_0 l'intersection des intervalles n_0-périodiques contenant $x \notin \mathrm{Per}(f)$. J_0 est un intervalle n_0-périodique et par construction c'est le plus petit: J_0 est n_0-essentiel. On a obtenu une suite avec $r = 1$.

Montrons que si $\sup_{i<r} n_i < M$ alors on peut prolonger la suite au-dessus de x:

Si $r = \infty$ alors $\sup n_i = \infty$ et l'inégalité $\sup n_i \leq M$ est nécessairement une égalité. On peut donc supposer que $r < \infty$ et qu'il existe I un intervalle contenant x en son intérieur, faiblement n-périodique avec $n > n_{r-1}$ et donc $I \not\supset J_{r-1}$. On pose $I_r = J_{r-1} \cap I \subsetneq J_{r-1}$ et $n_r = \mathrm{ppcm}(n_{r-1}, n)$. I_r, intervalle faiblement n_r-périodique définit comme ci-dessus un intervalle périodique $J_r \subsetneq J_{r-1}$ n_r-essentiel pour x.

Il existe donc une suite au-dessus de x avec $\sup_{i<r} n_i = M$.

Si $r = \infty$, alors $(J_k)_{k\geq 0} \in \vec{\mathcal{J}}_*$ et

$$x \in \bigcap_{k\geq 0} \mathrm{orb}\, J_k$$

Si $r < \infty$: $n_0 < \cdots < n_{r-1}$, on pose $J = \bigcap_{0\leq k<r} J_k$. C'est un intervalle périodique de période n_{r-1}. Clairement J est essentiel pour x et par construction $x \notin I_*(J)$, donc $x \in J'$. □

Preuve des remarques.

(1) Il suffit de montrer que pour chaque $n \geq 1$, $\mathcal{J}_n$ est dénombrable. Fixons $n \geq 1$. A chaque $J \in \mathcal{J}_n$ on associe: $I_n(J) = \bigcup_{I\in\mathcal{J}_n | \mathrm{orb}\, I \not\supset J} I$ (variante de $I_*(J)$ restreinte aux intervalles de même période). Montrons d'abord que $\overline{I_n(J)} \setminus I_n(J) \subset \mathrm{Fix}(f^{2n})$.

Soit $x \in \overline{I_n(J)} \setminus I_n(J)$. Il existe donc une suite d'intervalles n-essentiels $[a_k, b_k]$ avec (par exemple) $x = \lim\downarrow_{k\to\infty} a_k$ (limite décroissante). Si $\liminf_{k\to\infty} b_k = x$, alors $x \in \mathrm{Fix}(f^n)$. Plaçons-nous dans le cas contraire: il existe y tel que $b_k \geq y > x$ pour tout k assez grand. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite $k \mapsto b_k$ est monotone.

Si $\lim\downarrow_{k\to\infty} b_k = b$ alors $f^n([a_{k+1}, a_k]) \supset [a_{k+1}, a_k]$. En passant à la limite, $f^n(x) = x$.

Si $\lim\uparrow_{k\to\infty} b_k = b$ alors $f^n([a_{k+1}, a_k] \cup [b_k, b_{k+1}]) \supset [a_{k+1}, a_k] \cup [b_k, b_{k+1}]$. Comme $b_k - a_k \geq b_0 - a_0 > 0$, la continuité de f implique que $f^{2n}[a_{k+1}, a_k]$ contient $[a_{k+1}, a_k]$. Donc $f^{2n}(x) = x$.

La propriété annoncée est démontrée. On associe à chaque intervalle n-essentiel J l'ouvert (peut-être non connexe) $\mathrm{int}(J \setminus \overline{I_n(J)})$, qu'on note provisoirement J''. Comme $J \in \mathcal{J}_n$, il existe $x \in \Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$ tel que J soit le plus petit intervalle n-périodique contenant x. Donc $I_n(J) \not\ni x$. Comme $x \notin \mathrm{Per}(f)$, $x \notin \overline{I_n(J)}$: J'' est non-vide. On vérifie facilement que si $J_1, J_2 \in \mathcal{J}_n$ sont distincts alors $J_1'' \cap J_2'' = \emptyset$. On a mis $\mathcal{J}_n$ en bijection avec une famille d'ouverts non-vides disjoints. Donc $\mathcal{J}_n$ est bien dénombrable.

(2) Si $x \in I_*(J) \cap J \cap (\Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f))$, il existe un intervalle essentiel $J_1 \not\supset J$ contenant x. L'intervalle faiblement périodique $J_1 \cap J$ définit un intervalle périodique inclus dans J et contenant x. Il existe donc un intervalle périodique inclus dans J et *-essentiel pour x. □

3 Composantes transitives

Rappelons un résultat classique de topologie générale:

(8.11) Théorème de Cantor-Bendixon. *Soit X un espace topologique séparé dont la topologie admet une base dénombrable.*

On dit qu'un point de X est un **point de condensation** *d'une partie $Y \subset X$ si tout voisinage de ce point contient une infinité non-dénombrable de points de Y.*

Si Y est une partie quelconque de X l'ensemble Y^{cond} des points de condensation de Y dans X est un fermé *tel que*

$$Y = (Y^{\mathrm{cond}} \cap Y) \cup Y^0$$

avec Y^0 un ensemble dénombrable.

$Y^{\mathrm{cond}} \subset \overline{Y}$ *et* $Y^{\mathrm{cond}} = (Y^{\mathrm{cond}})^{\mathrm{cond}} = (Y \cap Y^{\mathrm{cond}})^{\mathrm{cond}}$.

Même si Y est invariante (i.e. $f(Y) \subset Y$), Y^{cond} ne l'est pas nécessairement: par exemple, si I est un intervalle non-trivial dont l'image par f est un point dont l'orbite ne rencontre pas I, $Y = \bigcup_{k \geq 0} f^k I$ est invariant mais $Y^{\mathrm{cond}} = I$ ne l'est pas. C'est pourquoi on introduit la variante suivante de cette construction:

(8.12) Lemme. *Soit X un espace topologique séparé dont la topologie admet une base dénombrable.*

On dit qu'un point de X est un **point de f-condensation** *d'une partie Y de X si tout voisinage U de ce point contient une infinité non-dénombrable de points de Y* non *f-équivalents (i.e. $U \cap Y$ est non-effaçable), cf.* (8.3).

Si Z est une partie invariante de X alors l'ensemble Z^{der} des points de f-condensation de Z est un fermé invariant *tel que*

$$Z^{\mathrm{cond}} = Z^{\mathrm{der}} \cup N \qquad \text{avec } N \text{ une partie de } X \text{ effaçable.}$$

et $Z^{\mathrm{der}} \subset Z^{\mathrm{cond}} \subset \overline{Z}$ *et* $Z^{\mathrm{der}} = (Z \cap Z^{\mathrm{der}})^{\mathrm{der}}$.

Preuve du théorème de Cantor-Bendixon. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie, on construit U l'union des ouverts de $\mathcal{B}$ ayant une intersection dénombrable (peut-être finie) avec Y. On a $Y^{\mathrm{cond}} = Y \setminus U$ et $Y^0 = U \cap Y$. Les propriétés annoncées se déduisent facilement de cette construction:

$Y^0 = Y \setminus Y^{\mathrm{cond}} = U \cap Y$ est une union dénombrable d'ensembles dénombrables: Y^0 est bien dénombrable.

On a, pour $V \subset X$, $V \cap (Y^{\mathrm{cond}} \cap Y) = V \cap Y \setminus Y^0$: si $V \cap Y$ est non-dénombrable alors $V \cap (Y^{\mathrm{cond}} \cap Y)$ est également non-dénombrable. On en déduit que $Y^{\mathrm{cond}} \subset (Y \cap Y^{\mathrm{cond}})^{\mathrm{cond}}$. L'inclusion réciproque est évidente.

Un point d'accumulation est soit dans U soit dans Y^{cond}. La réciproque est claire, donc $Y^{\mathrm{cond}} = \overline{Y} \cap U^c$. Y^{cond} est bien fermé. □

Preuve du lemme. L'invariance de Z^{der} est claire d'après la définition de la relation de f-équivalence. Clairement $Z^{\mathrm{der}} \subset Z^{\mathrm{cond}}$.

Une construction calquée sur celle du théorème ci-dessus montre que Z^{der} est fermé et que $Z^{\mathrm{cond}} \setminus Z^{\mathrm{der}}$ est inclus dans l'union d'une collection dénombrable de classes de f-équivalence, c'est-à-dire que $Z^{\mathrm{cond}} \setminus Z^{\mathrm{der}}$ est effaçable.

Vérifions que $(Z^{\mathrm{der}} \cap Z)^{\mathrm{der}} = Z^{\mathrm{der}}$. Clairement $(Z^{\mathrm{der}} \cap Z)^{\mathrm{der}} \subset Z^{\mathrm{der}}$. Montrons la réciproque: soit $x_0 \in Z^{\mathrm{der}}$. Fixons $(U_n)_{n\geq 0}$ une base de voisinages de x_0. Il suffit de voir que, pour tout $n \geq 1$, $U_n \cap (Z \cap Z^{\mathrm{der}})$ est non-effaçable.

Mais $U_n \cap Z$ est non-effaçable et $Z \setminus Z^{\mathrm{der}}$ est effaçable: $Z \setminus Z^{\mathrm{der}} \subset (Z \setminus Z^{\mathrm{cond}}) \cup (Z^{\mathrm{cond}} \setminus Z^{\mathrm{der}})$ et ces deux différences sont effaçables. Donc $x_0 \in (Z \cap Z^{\mathrm{der}})^{\mathrm{der}}$. □

On peut maintenant définir les éléments de la décomposition spectrale:

(8.13) Définition. *On appelle* **ensemble des points ambigus** *l'ensemble*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}\Big(\bigcup_{J\in\mathcal{J}_*} \partial J \cup \mathrm{Per}(f)\Big)$$

C'est un ensemble effaçable.

A tout intervalle périodique essentiel $J \in \mathcal{J}$, on associe la composante de **première espèce**

$$\Omega(J) = (\Omega^0(J))^{\mathrm{der}}$$
$$\text{avec } \Omega^0(J) = (\Omega(f) \setminus \mathcal{A}) \cap (\mathrm{orb}\, J \setminus I_*(J)).$$

A toute suite $s = (J_k)_{k\geq 0} \in \vec{\mathcal{J}}_*$, on associe la composante de **deuxième espèce** *ou* **solénoïde**

$$S(s) = \overline{S^0(s)} \quad \text{avec } S^0(s) = (\Omega(f) \setminus \mathcal{A}) \cap \bigcap_{k\geq 0} \mathrm{orb}\, J_k.$$

Les parties $\Omega(J)$, $S(J)$ non-vides *sont appelées* **composantes transitives.**

(8.14) Théorème (d'après A.M. Blokh [1]**).** *On a la décomposition suivante de l'ensemble non-errant:*

$$\Omega(f) = \mathrm{Per}(f) \cup \bigcup_{J\in\mathcal{J}} \Omega(J) \cup \bigcup_{s\in\vec{\mathcal{J}}_*} S(s) \cup N \tag{1}$$

avec N un ensemble nul.

Chaque composante transitive est une partie compacte, invariante et fortement $[0,1]$-transitive. L'intersection de deux composantes transitives est un ensemble fini. On a les descriptions suivantes:

1. *Pour chaque composante transitive $S(s)$ avec $s \in \vec{\mathcal{J}}_*$, si on note $(n_k)_{k\geq 0}$ la suite des périodes définies par s,*

$$G = \left\{ a \in \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} : a_{k+1} \equiv a_k \pmod{n_k} \right\}$$

(groupe abélien compact) et $\tau : (a_k)_{k\geq 0} \mapsto (a_k+1)_{k\geq 0}$ *(rotation), on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} S(s) & \xrightarrow{f} & S(s) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G & \xrightarrow{\tau} & G \end{array}$$

2. *Pour composante transitive* $\Omega(J)$ *avec* $J \in \mathcal{J}$ *de période* n*, on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(J) & \xrightarrow{f^n} & \Omega(J) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ [0,1] & \xrightarrow{g} & [0,1] \end{array}$$

avec n *la période de* J *et* g *une application continue et topologiquement mélangeante. De plus,* $\Omega(J)$ *est l'ensemble des points* $x \in \operatorname{orb} J$ *tels que*

$$\bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{k\geq 0} f^k(B(x,\epsilon) \cap \operatorname{orb} J)} = \operatorname{orb} J. \tag{2}$$

Dans ces diagrammes, π *est continue, surjective,* $\operatorname{card} \pi^{-1}(y) = 1$ *sauf sur un ensemble dénombrable de points* y *où* $\operatorname{card} \pi^{-1}(y) = 2$.

Preuve. Remarquons que la décomposition spectrale proprement dite (équation 1) est une conséquence immédiate du théorème (8.9) et des définitions (8.13).

1. Compacité, invariance et intersection finie.

La compacité est triviale. L'invariance des solénoïdes découle de l'invariance de $\Omega(f)$ et du complémentaire de $\mathcal{A}$

L'invariance des composantes transitives du type $\Omega(J)$ découle, vu le lemme (8.12), de l'invariance de $\Omega^0(J)$. Cette invariance résulte des invariances de $\Omega(f)$, de $\mathcal{A}^c$ et de $I_*(J)$.

Montrons par exemple que l'intersection entre deux composantes de la forme $\Omega(J_1)$ et $\Omega(J_2)$ est finie. Si $J_1 \subsetneq J_2$ ou si J_1 et J_2 se chevauchent alors $J_1 \subset I_*(J_2)$ et

$$\Omega(J_1) \cap \Omega(J_2) \subset J_1 \cap \overline{J_2 \setminus I_*(J_2)} \subset J_1 \setminus \operatorname{int} J_1 = \partial J_1$$

qui est fini. Les autres cas sont semblables.

2. Transitivité d'une composante de deuxième espèce.

Soit $x \in S^0(s)$ et U un intervalle ouvert contenant x. Nécessairement $x \notin \operatorname{Per}(f)$. Il suffit de montrer que $\operatorname{orb} U \supset S(s)$. D'après le lemme (8.6), $\operatorname{orb} U = \operatorname{orb} \operatorname{int}(I)$, avec I un intervalle faiblement périodique contenant x et I définit un intervalle périodique $K \subset I$ contenant x. Soit n sa période.

Notons $(J_k)_{k\geq 0} = s$. $x \in K \cap J_k$. Comme $x \notin \mathcal{A}$, $x \in \operatorname{int}(J_k)$ donc $\operatorname{int}(K) \cap \operatorname{int}(J_k) \neq \emptyset$. Pour $k \geq 0$ assez grand, $n_k > 2n$. Donc d'après le lemme (8.8), K et J_k ne peuvent se chevaucher et nécessairement $K \supset J_k$. Donc (8.6): il existe $K_1 \subset \partial K \cap \operatorname{Per}(f)$ fini tel que:

$$\operatorname{orb} U \supset \operatorname{orb} J_k \setminus K_1 \supset S(s) \setminus K_1.$$

Mais $S(s) \cap \operatorname{Per}(f) = \emptyset$ car les périodes des intervalles J_k tendent vers l'infini. Donc $S(s)$ est fortement $[0,1]$-transitif avec un ensemble exceptionnel vide.

3. Transitivité d'une composante de première espèce.

On procède comme ci-dessus avec $x \in \Omega^0(J)$ et U qu'on peut choisir inclus dans J (puisque $x \notin \mathcal{A}$ donc $x \notin \partial J$). Il suffit de montrer que $\operatorname{orb} U \supset \operatorname{int} \operatorname{orb} J$. L'intervalle périodique K (défini comme ci-dessus) est donc inclus dans J et contient x. Si $K \subsetneq J$ alors $x \in I_*(J)$: contradiction. Donc $K = J$ et $\operatorname{orb} U \supset \operatorname{orb} \operatorname{int}(J)$. On obtient la $[0,1]$-transitivité forte avec un ensemble exceptionnel $K_1 \subset \partial J \cap \operatorname{Per}(f)$.

En fait on a montré que tout point de $\Omega(J)$ satisfaisait le critère (2) de l'énoncé.

4. Diagramme pour les solénoïdes.

On pose

$$\pi : x \in S(s) \mapsto (a_k)_{k \geq 0} \qquad x \in f^{a_k} J_k.$$

L'intersection $J_k \cap f^l J_k$ $(0 \leq l < n_k)$ contient au plus un point qui est de ce fait n_k-périodique, donc $d(S(s) \cap f^a J_k, S(s) \cap f^b J_k) > 0$ $(0 \leq a < b < n_k)$. Donc π est bien définie et continue. Clairement, $\tau \circ \pi = \pi \circ f$.

π envoie au plus 2 points sur 1: $\pi^{-1}(a) = \bigcap_{k \geq 0} f^{a_k} J_k =: I$ (traitons par exemple le cas $a = (0, 0, \dots)$). Montrons que si cet intervalle est non-trivial il est non-récurrent: il n'existe pas de $n \geq 1$ tel que $f^n I \cap I \neq \emptyset$. Sinon chaque n_k diviserait n, contredisant $n_k \to \infty$. Finalement: ou bien $I = \{y\}$ ou bien $I \cap \Omega(f) \subset \partial I$. Donc, dans tous les cas, $\operatorname{card}(\pi^{-1}(y)) \leq 2$.

Les $a \in G$ tels que $\pi^{-1}(a)$ est un intervalle non-trivial sont nécessairement dénombrables. Donc on a aussi montré que π est injective en dehors d'un ensemble dénombrable.

$S(s)$ est un compact invariant non-vide et (G, τ) est minimal. Donc π est surjective.

Remarque. En fait les intervalles non-triviaux I ci-dessus sont des intervalles errants au sens habituel de la théorie à une dimension: les intervalles $f^n I$ $(n = 0, 1, \dots)$ sont deux-à-deux distincts et ne tendent pas vers une orbite périodique.

5. Diagramme pour les $\Omega(J)$ et critère (2).

On se sert du résultat général suivant (admis provisoirement ainsi que son corollaire):

(8.15) Proposition. *Soit J un intervalle, $f : J \to J$ une application continue et $L \subset J$ tel que*

(1) *$J \setminus L$ contient au moins deux points.*
(2) *chaque composante connexe de L est fermée.*
(3) *$f(L) \subset L$.*

Alors il existe $g : [0,1] \to [0,1]$ et $\pi : J \to [0,1]$ continues telles que

(1) *$g \circ \pi = \pi \circ f$.*
(2) *π est croissante.*
(3) *la restriction $\pi : J \setminus \operatorname{int} L \to [0,1]$ est surjective et au plus 2-sur-1. Plus précisément $\{y : \pi^{-1}(\pi y) \supsetneq \{y\}\} \subset L$.*
(4) *$\pi(L)$ est dénombrable et totalement discontinu.*

(8.16) Corollaire. *Soit $f : J \to J$ continue et $K \subset J$ tel que $K^{\text{cond}} = K \neq \emptyset$. On suppose que l'image par f de toute composante connexe de $J \setminus K$ ne contient pas de points de K dans son intérieur.*

Alors il existe $g : [0,1] \to [0,1]$ *et une projection* $\pi : J \to [0,1]$ *continues telles que*

(1) $g \circ \pi = \pi \circ f$.
(2) π *est croissante.*
(3) *la restriction* $\pi : K \to [0,1]$ *est surjective et au plus 2-sur-1.*

Montrons que les hypothèse du corollaire sont satisfaites pour $K = \Omega(J)$ et l'application f^n. D'après le lemme (8.12), $\Omega(J)^{\text{cond}} \supset \Omega(J)^{\text{der}} = \Omega(J)$ et l'inclusion réciproque est triviale: on a donc égalité. Il suffit de montrer que, pour tout intervalle ouvert U, si l'intérieur de $f(U)$ contient un point de $\Omega(J)$, alors U en contient aussi.

Les propriétés suivantes définissent chacune un ensemble de points $y \in \Omega(J)$ en bijection avec une collection d'ouverte non-vides et disjoints donc un ensemble *dénombrable*:

(i) $f^{-n}(y)$ est d'intérieur non-vide.
(ii) il existe $\epsilon > 0$ tel que, au moins l'un des deux intervalles $(y-\epsilon, y)$, $(y, y+\epsilon)$ ne contient qu'une collection dénombrable de points de $\Omega(J)$ (et donc aucun point de $\Omega(J)$).

Supposons donc que $\operatorname{int} f(U) \cap \Omega(J) \neq \emptyset$. D'après le lemme (8.12),

$$(*) \qquad \Omega(J) = \left(\Omega^0(J) \cap \Omega(J)\right)^{\text{der}}.$$

Posons $C = \Omega^0(J) \cap \Omega(J)$. On en déduit que $\operatorname{int} f(U) \cap C$ est non-effaçable.

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des points de $\operatorname{int} f(U) \cap C \subset \Omega(J)$ qui ne vérifient aucune des deux propriétés ci-dessus. $\mathcal{Y}$ est aussi non-effaçable. Par conséquent, $\mathcal{X} = f^{-n}\mathcal{Y} \cap U$ est non-effaçable. Montrons que $\mathcal{X} \subset \Omega^0(J)$.

Soit $x \in \mathcal{X}$. $f^n(x) \notin \mathcal{A} \cup I_*(J)$ donc x aussi. D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, $B(x,\epsilon) \subset J$, $f^n(B(x,\epsilon))$ est un intervalle non-trivial d'après la propriété (i), donc contient au moins l'un des intervalles $(f^n(x) - \delta, f^n(x)]$, $[f^n(x), f^n(x) + \delta)$ (pour $\delta > 0$ assez petit). Donc, d'après (ii), $f^n(B(x,\epsilon))$ contient un point de C. Vu la propriété de transitivité de $\Omega(J)$, $\bigcup_{k\geq 0} f^{nk} B(x,\epsilon) \supset \operatorname{int} J \supset B(x,\epsilon)$. Donc, $\epsilon > 0$ étant arbitrairement petit, $x \in \Omega(f)$. Finalement $\mathcal{X} \subset \Omega^0(J)$.

$\mathcal{X}^{\text{der}} \subset \Omega^0(J)^{\text{der}} = \Omega(J)$ et $\mathcal{X}^{\text{der}} \neq \emptyset$ car $\mathcal{X}$ n'est pas effaçable. Or $U \cap \Omega(J)$ contient $\mathcal{X}$, donc $\overline{\mathcal{X}}$ (à ∂U près) et $\overline{\mathcal{X}} \supset \mathcal{X}^{\text{der}}$: U contient un point (en fait une collection non-effaçable de points) de $\Omega(J)$.

On peut bien appliquer le corollaire pour obtenir le diagramme commutatif avec les propriétés annoncées. On obtient également le critère (2) du théorème décrivant $\Omega(J)$:

On a vu que tout point de $\Omega(J)$ satisfait le critère (preuve de la transitivité forte). Soit $x \in \operatorname{orb} J$ satisfaisant le critère: pour tout voisinage U de x dans $\operatorname{orb} J$, $\bigcup_{k\geq 0} f^k(U) \supset \Omega(J)$. L'ensemble $\bigcup_{k\geq 0} \partial f^k(U)$ est dénombrable et ne peut donc recouvrir $\Omega(J)$. Donc il existe donc un $k \geq 0$ tel que $\operatorname{int} f^k(U)$ rencontre $\Omega(J)$. On vient de voir que ce n'est possible que si U rencontre $\Omega(J)$. Donc $x \in \overline{\Omega(J)} = \Omega(J)$. Le critère est démontré.

6. Mélange topologique.

On va montrer que le facteur topologique $g : [0,1] \to [0,1]$ de $(\Omega(J), f^n)$ construit ci-dessus est topologiquement mélangeant: pour tout ouvert non-vide U de $[0,1]$, il suffit de voir que $\bigcup_{k\geq 0} g^k(U) \supset (0,1)$.

π étant continue: $\pi(\Omega(f^n|J)) \subset \Omega(g)$. Donc $\Omega(g) = [0,1]$.

Soit K un intervalle périodique de g. $\pi^{-1}(K)$ est un intervalle périodique pour f contenant des points de $\Omega^0(J)$. Par construction de π, $\pi^{-1}(K) \subset J$. Si $\pi^{-1}(K) \subsetneq J$ alors $I_*(J) \supset \pi^{-1}(K)$ et K serait trivial. Donc $\pi^{-1}(K) = J$ et $K = [0,1]$ est l'unique intervalle périodique de g. Donc $[0,1] = \Omega(K)$ et g est fortement topologiquement transitive: pour tout ouvert U non-vide, $\bigcup_{k\geq 0} f^k(U) \supset (0,1)$.

Notons d'abord que g admet un point fixe $p \in (0,1)$. Dans le cas contraire, on aurait, par exemple, $g(x) > x$ pour $x \in (0,1)$ et donc l'orbite de tout point intérieur convergerait vers le point fixe $g(1) = 1$ et en particulier $\Omega(g) \subset \{0,1\}$: contradiction.

Soit U un ouvert non-vide, il existe $k \geq 0$ tel que $f^k(U)$ contienne un voisinage au moins latéral du point fixe p: par exemple $[p, p+\epsilon)$. p étant fixe et g topologiquement transitive, il existe t arbitrairement proche de p tel que $g([t,p]) \supsetneq [t,p]$. S'il n'existe de tels t arbitrairement proches de p que dans $(p-\epsilon, p)$, c'est que pour $x > p$, proche de p, $g([p,x]) \supset [y,p]$ avec $y < p$. Donc dans tous les cas, il existe $k \geq 0$ tel que $g^k(U)$ contient un intervalle $[t,p]$ tel que $g([t,p]) \supset [t,p]$ ($t < p$ ou $t > p$).

Posons $[a_0, b_0] = [t,p]$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] = g([a_n, b_n])$, pour $n \geq 0$. Comme $[a_1, b_1] \supset [a_0, b_0]$ on voit facilement que $a_{n+2} = \min g([a_{n+1}, b_{n+1}]) \leq a_{n+1} = \min g([a_n, b_n])$ et de même $b_{n+2} \geq b_{n+1}$: les intervalles $g^n[a_0, b_0] = [a_n, b_n]$ sont croissants emboîtés. La transitivité topologique implique que $a_n \to 0$ et $b_n \to 1$. On a montré le mélange topologique. □

Démontrons les deux énoncés laissés en suspens:

Preuve du corollaire. Soit L l'union des fermetures de chaque composante connexe de $J \setminus K$. $L \cap K$ est un ensemble dénombrable. Donc si C est une composante connexe de L alors $\mathrm{int}(C)$ ne peut rencontrer $K = K^{\mathrm{cond}}$ (sinon l'intersection serait non-dénombrable). Donc C est de la forme $\bar{U}$ avec U une composante connexe de $J \setminus K$. Comme $f(U) \subset \bar{V}$ avec V une composante connexe de $J \setminus K$, on en conclut que $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$: on a bien $f(L) \subset L$. $J \setminus L$ est non-dénombrable. On peut donc appliquer la proposition (8.15). □

Preuve de la proposition (8.15). On considère la relation d'équivalence sur $[0,1]$ définie par

$$x \equiv y \iff x = y \text{ ou } (\exists C \text{ composante connexe de L}) \ x, y \in C$$

Soit $I = [0,1]/\equiv$ l'espace topologique quotient et $p : [0,1] \to I$ la surjection canonique. p est continue et croissante. Donc I est un espace compact, séparable, connexe et totalement ordonné, la topologie quotient coïncidant avec celle de l'ordre: les intervalles définis par des relations d'ordre strict forment une base d'ouverts.

Entre deux points $x < y$ de I il en existe toujours un troisième sinon

$$(\max p^{-1}(x), \min p^{-1}(y))$$

serait une composante connexe non fermée de L. Il existe donc une suite v infinie, injective, dense dans I telle que

$$\forall i \neq j \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ v_k \in (v_i, v_j).$$

Comme $f(L) \subset L$, f définit une application continue quotient, notée $p(f)$. La surjection canonique est continue, envoie l'action de f sur celle de $p(f)$. Si C est une composante connexe de L, le singleton $p(C)$ comme intersection de compacts ouverts dans $p(L)$ est une composante connexe de $p(L)$ qui est donc totalement discontinu. Si $x \in I$, $p^{-1}(x)$ est un point ou une composante connexe C de L, donc $\operatorname{card} p^{-1}(x) \setminus \operatorname{int} L = 1$ ou 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite (injective) dense dans I arrangée de telle sorte que l'application

$$u_n \longmapsto r_n = 2^{-p-1}(2k+1) \qquad \text{si } n = 2^p + k \text{ avec } 0 \leq k < 2^p$$

soit croissante. On peut construire cette suite à partir de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ ci-dessus: Posons $u_1 = v_0$. Si $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont définis pour $n = 2^p + k \geq 2$ $(0 \leq k < 2^p)$, on pose $u_n = v_m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ minimal tel que $v_m \in (u_i, u_j)$ avec $i, j = 0, 1, \ldots, \infty$ tels que $r_i = r_n - 2^{-p-1}$, $r_j = r_n + 2^{-p-1}$ (on pose $r_0 = 0$, $u_0 = p(0)$, $r_\infty = 1$ et $u_\infty = p(1)$).

On pose maintenant $j(x) = \sup\{r_n : u_n < x\}$ pour $x \in I$. $j : I \to [0,1]$ est:

(1) strictement croissante: si $x < y$ alors (x, y) est un ouvert, non-vide car I est connexe, donc contenant un u_n. De même, il existe $u_m \in (u_n, y)$. Donc $j(x) \leq u_n < u_m \leq j(y)$.

(2) continue: soit $u_m \in [u_{2^p+k}, u']$ avec $u' = u_{2p+k+1}$ si $k < 2^p - 1$, $u' = p(1)$ si $k = 2^p - 1$. L'arrangement de la suite u implique que $r_m \in [0, 2^{-p}] + 2^{-p-1}(2k+1)$.

(3) surjective: $j(I) \supset \{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $j(I)$ est compact.

Il suffit de prendre $\pi = j \circ p$ et $g = j \circ p(f) \circ j^{-1}$. □

CHAPITRE 9

EXTENSIONS MARKOVIENNES UNIDIMENSIONNELLES

Dans ce chapitre on commence par préciser la relation entre la dynamique symbolique et le système partitionné initial. Cette relation est particulièrement étroite dans ce cadre unidimensionnel. Puis on décrit la structure particulière, "quasi-linéaire", des diagrammes de Hofbauer obtenus pour les applications de l'intervalle, $f : [0,1] \to [0,1]$ *arbitraire*. Il s'agit de généralisations pratiquement immédiates de résultats de F. Hofbauer.

Remarquons que seules les sections 1 et 2 ci-dessous sont nécessaires à l'analyse des applications régulières du chapitre 13. Les section 3 et 4 ne seront utilisées, dans ce travail, que pour les estimations *explicites* du chapitre 12 ainsi que pour l'analyse de la spécification dans le cas monotone par morceaux au chapitre 11.

1 Définitions

(9.1) Définition. *Pour une application $f : [0,1] \to [0,1]$ arbitraire on appelle* **partition naturelle** *la collection P des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$ sur chacun desquels f est continue et strictement monotone et qui sont maximaux pour cette propriété.*

Remarques.

1. $([0,1], f, P)$ est un système partitionné dont tous les ensembles $[A_0 \dots A_n] \neq \emptyset$ sont des *intervalles ouverts*. En particulier ils sont *connexes*.

2. L'ensemble critique $C(f)$ est formé des points qui n'admettent pas de voisinage dans $\mathbb{R}$ sur lequel f soit continue et strictement monotone. On peut avoir $C(f) = [0,1]$ (et $P = \emptyset$).

3. $C(f)$ est compact. Les éléments de P sont les composantes connexes de l'ouvert $[0,1] \setminus C(f)$.

4. Si on a demandé des voisinages *dans* $\mathbb{R}$ c'est pour que les extrémités de $[0,1]$, comme toutes les autres extrémités d'intervalles éléments de P, soient automatiquement des points critiques.

(9.2) Définition. *On appelle* **ensemble des extrémités** *de la partition l'ensemble*

$$E(P) = \{(c, U) : U \in P \text{ et } c \in \partial U\}.$$

On note $P^{\vee n}(e)$ (s'il existe) l'élément H de

$$P^{\vee n} = \{[A_0 \dots A_{n-1}] \neq \emptyset : A_0, \dots, A_{n-1} \in P\}$$

tel que, si $e = (c, U)$, $\bar{H} \ni c$ et $H \cap U \neq \emptyset$.

Si $P^{\vee k-1}(e)$ existe, on pose $f^k(c, U)$ la limite de $f^k(x)$ quand x tend vers c dans $P^{\vee k-1}(e)$.

On dit qu'une extrémité $e = (c, U)$ est **quasi-régulière** *si pour tout $n \geq 0$, $P^{\vee n}(e)$ existe. On note $E_{QR}(f, P)$ le sous-ensemble de ces extrémités.*

On appelle n-**homtervalle** *tout intervalle ouvert sur lequel* f^n *est continue et strictement monotone et qui est maximal pour cette propriété. On appelle* **homtervalle** *tout intervalle ouvert sur lequel* f^n *est continue et stictement monotone, pour tout* $n \geq 0$, *et qui est maximal pour cette propriété.*

2 Isomorphisme du système dynamique avec le système symbolique

Rappelons que $\Sigma_+(f,P)$ (1.19) est le plus petit système symbolique contenant tous les itinéraires infinis de $([0,1],f,P)$. $\Sigma_+(f,P)$ contient donc en général des suites qui ne sont l'itinéraire d'aucun point et d'autre part de contient pas de suites correspondant à l'orbite de certains points de $[0,1]$.

Cependant, *pour les applications unidimensionnelles*, $([0,1],f)$ et $\Sigma_+(f,P)$ sont pratiquement identiques du point de vue des mesures invariantes. Plus précisément, on a:

(9.3) Proposition. *Soit* $\mu \in \mathcal{M}_f^{erg}([0,1])$, $\nu \in \mathcal{M}_\sigma^{erg}(\Sigma_+(f,P))$. *L'application (définie sur un sous-ensemble)* $\Gamma : ([0,1],f,\mu) \to (\Sigma_+(f,P),\sigma,\nu)$ *est un isomorphisme si*

(1) μ *et* ν *sont non-atomiques.*
(2) $\mu(C(f)) = 0$.

Explicitons d'abord les points rajoutés par la fermeture topologique, i.e. quand on passe de $\Sigma'_+(f,P)$ ensemble des itinéraires infinis à $\Sigma_+(f,P) = \mathrm{adh}_{P^{\mathbb{N}}} \Sigma'_+(f,P)$ (P étant muni de la topologie discrète):

(9.4) Lemme. *Pour toute extrémité quasi-régulière* $e \in E_{QR}(f,P)$, *il existe une unique suite* $A(e) \in P^{\mathbb{N}}$ *telle que, si on note* $e = (c,U)$, $A_0(e) = U$ *et* $c \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0(e)\dots A_n(e)]}$.

On a

$$\Sigma_+(f,P) \setminus \Sigma'_+(f,P) \subset \bigcup_{m\geq 0} \sigma^{-m}\{A(e) : e \in E_{QR}(f,P)\}$$

c'est en particulier dénombrable.

Preuve. Vérifions d'abord que e détermine une et une seule suite $A(e)$. Pour $A_0(e) = U$ c'est clair. $A_k(e)$ doit être tel que $c \in \overline{[A_0(e)\dots A_{k-1}(e)A_k(e)]}$. Mais e étant quasi-régulier, $f^k(B(c,\epsilon) \cap A_0) \subset X \setminus C(f)$: l'image d'un voisinage unilatéral de c rencontre un $V \in P$ et, par connexité, elle est contenue dans ce V. Il suffit de poser $A_k(e) = V$. Les intervalles de P étant disjoints, $A_k(e)$ est bien déterminé de façon unique pour tout $k \geq 0$: $A(e)$ est bien définie.

D'après le lemme (1.19), $\Sigma_+ \setminus \Sigma'_+$ (on omet (f,P) dans cette démonstration) est inclus dans

$$\bigcup_{m\geq 0} \sigma^{-m}\{A \in P^{\mathbb{N}} : \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\dots A_n]} \text{ contient un point de } \Delta C(f)\}$$

avec $\Delta C(f) = \bigcup_{U\in P} \partial U$. Soit $A \in P^{\mathbb{N}}$ pris dans le dernier ensemble ci-dessus: $\bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\dots A_n]}$ contient un point $c \in \partial U$ avec $U = A_0$. Clairement, $A = A(e)$ avec $e = (c, A_0)$. Donc $\Sigma_+ \setminus \Sigma'_+$ est inclus dans l'ensemble annoncé et, par conséquent,

est de cardinalité au plus celle de $\Sigma_*(P) \times \Delta C(f)$ (on prend les pré-images: on rajoute une suite finie devant $A(e)$) qui est dénombrable. □

Preuve de la proposition. Rappelons qu'on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \setminus C^-(f) & \xrightarrow{f} & [0,1] \setminus C^-(f) \\ \Gamma \downarrow & & \Gamma \downarrow \\ \Sigma'_+(f,P) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma'_+(f,P) \end{array}$$

Pour $A \in \Sigma'_+(f,P)$, $\Gamma^{-1}(A)$ est soit un point soit un intervalle ouvert qui est un homtervalle.

Un point d'un homtervalle est errant ou tend vers une orbite périodique. Donc si une mesure μ charge l'union des homtervalles, cette union étant dénombrable comme union d'intervalles non-triviaux disjoints, la mesure μ charge l'un des homtervalles: en considérant un point de cet homtervalle qui soit générique pour cette mesure on voit que la mesure est concentrée sur une orbite périodique: elle est atomique.

Soit X' l'ensemble des points $x \in X$ dont l'orbite ne passe pas dans l'ensemble critique, et qui ne sont pas dans un homtervalle. Soit μ comme dans l'énoncé. Par hypothèse $\mu(C(f)) = 0$ donc $\mu(C^-(f)) = 0$ par invariance. μ étant supposée ergodique sans atomes, le raisonnement ci-dessus montre que $\mu(X') = 1$.

Posons $Y' = \Gamma(X')$. Y' s'obtient à partir de $\Sigma'_+(f,P)$ en retirant un point pour chaque homtervalle: $\Sigma'_+(f,P) \setminus Y'$ est dénombrable. Soit ν comme dans l'énoncé. Comme ν est sans atomes, $\nu(\Sigma_+(f,P) \setminus Y') = 0$.

Mais $\Gamma : X' \to Y'$ est un isomorphisme. Donc Γ est bien un isomorphisme comme annoncé. □

3 Structure quasi-linéaire

f étant une application arbitraire de l'intervalle dans lui-même et P sa partition naturelle, on note $\tilde{P}$ le diagramme d'Hofbauer du système partitionné $([0,1], f, P)$. Dans le cas unidimensionnel le graphe $\tilde{P}$ a une structure très particulière, élucidée par F. Hofbauer [16] (dans le cas où $C(f)$ est un ensemble fini mais le cas général, que nous présentons, ne demande que des modifications de détails).

On abrège ci-dessous $E(P)$ en E.

L'image de chaque extrémité $e \in E$ définit un vrai itinéraire pendant le temps:

$$n(e) = \inf\{k \geq 1 : f^k(e) \in C(f)\}$$

($n(e)$ peut être infini): on associe à $e \in E$ la suite finie ou infinie $(A_n(e))_{0 \leq n < n(e)}$ à valeurs dans P définie de la manière suivante:

(1) $A_0(e) = U$ si $e = (c, U)$.
(2) $f^n(c) \in A_n(e)$ pour $1 \leq k < n(e)$.

Autrement dit, $(A_n(e))_{0 \leq n < n(e)} = U * \Gamma_{n(e)-1}(f(e))$.

Ces suites finies ou infinies sont appelées **invariants de repliement** (kneading invariants).

Remarque. Si e est une extrémité quasi-régulière, on n'a pas nécessairement $n(e) = \infty$ mais les symboles $A_n(e)$ coïncident, tant qu'ils sont définis, avec ceux de la suite infinie $A(e)$ définie ci-dessus pour les extrémités quasi-régulières.

On obtient ainsi, pour chaque extrémité $e \in E$, des mots finis. $A_0(e)\dots A_n(e)$ est mot fini du système symbolique ssi $[A_0(e)\dots A_n(e)] \not\subset C^-(f)$. On pose donc:

$$m(e) = \inf\{k \geq 1 : [A_0(e)\dots A_k(e)] \subset C^-(f)\} \cup \{n(e)\}.$$

Pour $0 \leq n < m(e)$, on peut définir:

$$\tilde{A}(e,n) = \mathrm{cl}^\sim(A_0(e)\dots A_n(e)) \qquad \text{pour } 0 \leq n < m(e).$$

La fonction $\tilde{A} : E \times \mathbb{N} \to \tilde{P}$ est définie pour $(e,n) \in S$ avec

$$S = \{(e,n) \in E \times \mathbb{N} : 0 \leq n < m(e)\}.$$

On a, trivialement, $\mathrm{Im}\,\tilde{A} \subset \tilde{P}$. On va voir qu'en fait il y a *égalité.*

(9.5) Définition. *On note* $S = \{(e,n) : e \in E(P)$ *et* $0 \leq n < m(e)\}$ *et* $S^* = \{(e,n) \in S : n \neq 0\}$. *On pose, pour* $(e,n) \in S$,

$$F(e,n) = \mathrm{fut}_X(\tilde{A}(e,n)) = f^n([A_0(e)\dots A_n(e)]) = f^n\left(P^{\vee n+1}(e)\right)$$

On dit que n *est un* **temps de coupure** *pour* $e \in E$ *si* $n = n(e) < \infty$ *ou si* $1 \leq n < n(e)$ *et*

$$F(e,n) \subsetneq f\big(F(e,n-1)\big).$$

On note $(K(e,r))_{1 \leq r < r(e)}$ *l'énumération par ordre croissant des temps de coupure associés à une extrémité* e *fixée.*

On rassemble les temps de coupures K *des différentes extrémités en une fonction* $K : E \times \bar{\mathbb{N}} \to \bar{\mathbb{N}}$ *en posant* $K(e,0) = 0$, *et* $K(e,r) = \infty$ *si* $r(e) \leq r \leq \infty$.

Remarques. 1. Si $n \geq 1$ n'est pas un temps de coupure pour $e \in E$, alors

$$\tilde{A}(e,n-1) \to \tilde{A}(e,n)$$

est la seule flèche issue de $\tilde{A}(e,n-1)$ (si $\tilde{A}(e,n)$ existe).

2. Pour tout n $(1 \leq n < m(e))$,

$$F(e,n) = f(F(e,n-1)) \cap A_n(e)$$

d'après la définition du futur dans X. En particulier:

n est un temps de coupure pour e ssi l'intervalle ouvert $f\big(F(e,n-1)\big) = f^n\big(P^{\vee n}(e)\big)$ contient un point critique.

3. Le nombre $r(e)$ des temps de coupure définis par une extrémité $e \in E$ peut être fini ou infini.

(9.6) Lemme. *Soit $e \in E(P)$ et $0 \leq r < r+1 < r(e)$. On note $K = K(e,r)$. Il existe une et une seule extrémité $g \in E$ telle que, pour $0 \leq p < K(e,r+1) - K(e,r)$:*

$$(*) \qquad F(e, K+p) = (f^{K+p}(e), f^p(g))$$

En particulier,

$$\begin{cases} A_{K+p}(e) = A_p(g) & 0 \leq p < K(e,r+1) - K(e,r) \\ A_{K(e,r+1)} \neq A_{K(e,r+1)-K(e,r)}(g) & K(e,r+1) < m(e) \end{cases}$$

Remarque. (a,b) désigne l'ensemble des points compris strictement entre a et b, que $a \leq b$ ou $b \leq a$.

(9.7) Corollaire. *Les invariants de repliement définissent les temps de coupure et les extrémités associées (g dans l'énoncé précédent est associé au r-ième temps de coupure de e).*

Preuve (du lemme). Remarquons d'abord que $K + p < m(e)$.

Examinons le cas $p = 0$. Si $K = 0$ alors $F(e,0) = A_0(e)$: (*) est clair. Sinon K étant un temps de coupure, l'intervalle $F(e,K) = f(F(e,K-1)) \cap A_K(e)$ s'écrit (a,b) avec $a \in \partial f(F(e,K-1))$ et $b \in \partial A_K(e) \subset \Delta C(f)$. Vu la définition de $\tilde{A}(e,n-1)$, $a = f^n(e)$. On obtient (*) pour $p = 0$ avec $g = (b, A_K(e))$.

Supposons donc (*) démontré pour $0 \leq p \leq p_{\max}$ et considérons $p = p_{\max} + 1$. Par hypothèse, $p < K(e,r+1) - K(e,r)$ implique que $K + p$ n'est pas un temps de coupure donc $F(e,K+p) = f(F(e,K+p-1))$ (image strictement monotone). L'hypothèse de récurrence entraîne immédiatement le résultat (*).

Pour $0 < p < K(e,r+1) - K(e,r)$, on voit que $f^{K+p}(e)$ et $f^p(g)$ sont dans le même élément de la partition P. Pour $p = 0$, on voit que $f^K(e) \in A_0(g)$. $K(e,r+1)$ étant un temps de coupure, on voit que les deux extrémités de $f(F(e,K(e,r+1)-1))$, $f^{K(e,r+1)}(e)$ et $f^{K(e,r+1)-K(e,r)}(g)$ ne sont pas dans le même élément de P. □

(9.8) Lemme. *Soit $e \in E$ et $1 \leq r < r(e)$. Notons $K = K(e,r)$. Les successeurs de $\tilde{A}(e,K-1)$ sont*

(1) *$\tilde{A}(e,K)$ si $K < m(e)$.*

(2) *$\tilde{A}(g, K(e,r) - K(e,r-1))$ avec g défini par*

$$F(e, K(e,r-1)) = (f^{K(e,r-1)}(e), g),$$

si $K(e,r-1) - K(e,r) < m(g)$.

(3) *$\mathrm{cl}^{\sim}(U)$ pour tout $U \in P$ vérifiant: $U \subset f(F(e,K-1))$.*

De plus $K(e,r) - K(e,r-1) = K(g,s)$ pour un certain s $(1 \leq s < r(g))$.

Preuve. Pour $0 \leq p < K(e,r) - K(e,r-1)$, $F(e,K+p) \subset F(g,p)$: c'est vrai pour $p = 0$ d'après le lemme précédent. Supposons $F(e,K+p-1) \subset F(g,p-1)$. $f^p(g)$ est une extrémité de $F(e,K+p)$ donc $A_p(g) = A_{K+p}(e)$. Comme $F(e,K+p) = f(F(e,K+p-1)) \cap A_{K+p}(e)$ avec une formule similaire pour $F(g,p)$, on en déduit que $F(e,K+p) \subset F(g,p)$.

Donc si $K(e,r)$ est un temps de coupure pour e, $f(F(e,K(e,r)-1))$ contient un point critique donc $f(F(g,K(e,r)-1-K(e,r-1)))$ aussi: $K(e,r)-K(e,r-1)$ est un temps de coupure pour g.

Les successeurs de $\tilde{A}(e,K-1)$ sont les

$$\mathrm{cl}^{\sim}(A_0(e)\dots A_{K-1}(e)*B)$$

avec $B\in P$ et $A_0(e)\dots A_{K-1}(e)*B\in\Sigma_*(f,P)$. Or $f(F(e,K-1))=(f^K(e),f^k(g))$ en posant $k=K(e,r)-K(e,r-1)$. Les futurs correspondant aux différentes classes sucesseurs de $\tilde{A}(e,K-1)$ sont au plus (certains sont peut-être vides ou inclus dans $C^-(f)$):

$$(f^K(e),g_1),\quad (g_2,f^k(g)),\quad U\qquad \text{pour } U\in P \text{ et } U\subset(g_1,g_2).$$

A chacun de ces futurs correspond une unique classe d'équivalence de la relation $\tilde{=}$, respectivement:

$$\tilde{A}(e,K),\quad \tilde{A}(g,k),\quad \mathrm{cl}^{\sim}(U)$$

Le premier et le dernier cas sont évidents. Le deuxième découle de $A_p(g)=A_{K+p}(g)$ pour $0\le p<K(e,r)-K(e,r-1)$. □

Ce dernier lemme montre qu'on peut définir la fonction suivante:

(9.9) Définition (F. Hofbauer). *On appelle* **fonction de repliement** *(kneading function) de l'application unidimensionnelle f la fonction $Q:S^*\to S$ définie par*

$$K(e,r)-K(e,r-1)=K(Q(e,r))$$

et la condition auxilliaire $Q(e,r)=(g,s)$ avec $F(e,K(e,r))=(f^{K(e,r)},g)$.

On introduit également G qui à (e,r) associe les $(g,0)$ tels que

$$F(g,0)\subset f(F(e,K(e,r)-1)).$$

G est la description des retours à zéro.

(9.10) Théorème (F. Hofbauer [16]). *Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ arbitraire, de partition naturelle P, d'extrémités $E(P)$. Cette application définit des temps de coupure K, une fonction Q et des retours à zéro G.*

Le diagramme d'Hofbauer s'obtient comme l'image par l'application $\tilde{A}$ d'un graphe supporté par $S\subset E\times\mathbb{N}$, dit **graphe formel** *au sens suivant:*

$$\tilde{P}=\tilde{A}(S)\ et\ s\xrightarrow{\tilde{P}}t\iff\exists S\in\pi^{-1}(s)\ \exists T\in\pi^{-1}(t)\ t.q.S\xrightarrow{S}T$$

La structure de ce graphe formel est définie par K,Q,G de la façon suivante: les flèches du graphe formel sont exactement:

$(e,n)\to(e,n+1)$, pour tout $(e,n)\in S$, si $(e,n+1)\in S$.
$(e,K(e,r)-1)\to(g,K(Q(g,s)))$ pour tout $e\in E(P)$ et $1\le r<r(e)$ si $Q(e,r)=(g,s)$ avec $s<\infty$.
$(e,K(e,r)-1)\to(g,0)$ pour $g\in G(e,r)$.

On a une propriété de relèvement: soit $B \in \tilde{P}$ et $(e,n) \in A^{-1}(B)$. Alors tout chemin sur $\tilde{P}$ issu de B se relève d'une façon unique sur B à partir de (e,n).

Preuve. Ce sont des conséquences immédiates des lemmes précédents. La propriété de relèvement vient du fait, qu'au niveau du graphe $\tilde{P}$, comme au niveau du graphe formel, les successeurs d'un même élément du graphe sont distingué par l'élément de P les contenant. □

Remarque. Les invariants de repliement définissent le graphe formel. Réciproquement:

La donnée de la fonction de repliement $Q : S^* \to S$ et des suites (appelées **segment initiaux des invariants de repliements**):

$$K(e,0) \geq 1,\ A_0 \dots A_{K(e,0)} \in P \qquad (e \in E(f)$$

détermine complètement les invariants de repliement $(A_k(e))_{0 \leq k < m(e)}$ pour $e \in E(P)$.

4 Entropie à l'infini

Notons la conséquence suivante de la structure "quasi-linéaire":

(9.11) Proposition (G. Keller [23]). *Considérons la filtration de $\tilde{P}$ définie par les*

$$\tilde{P}_n = \tilde{A}(E \times \{0, \dots, n-1\} \cap S)$$

L'entropie combinatoire a le comportement suivant

$$\lim_{n \to \infty} h_C(\tilde{P} \setminus \tilde{P}_n) = 0$$

Si P est fini alors les $\tilde{P}_n$ sont finis et on identifie la quantité évaluée ci-dessus à l'entropie combinatoire à l'infini (chapitre II):

(9.12) Corollaire. *Si P est finie, alors $h_C^{\infty}(\tilde{P}) = 0$.*

G. Keller [23] a montré que la condition $h_\mu(f) > \lim_{n \to \infty} h_C(\tilde{P} \setminus \tilde{P}_n)$ permettait d'exclure la branche $\hat{\mu} = 0$ de l'alternative du théorème de relèvement de G. Keller (rappelé par le chapitre IV).

Preuve. Dans $\tilde{P} \setminus \tilde{P}_2$, chaque élément a au plus deux successeurs. De plus si $A_1 \to A_2 \to \dots A_n$ est un chemin (de longueur $n-1$) sur $\tilde{P}$ et si A_1 et A_n ont chacun plus d'un successeur alors A_n a au plus un successeur n'appartenant pas à $\tilde{P}_n$. Sur $\tilde{P} \setminus \tilde{P}_n$, un chemin de longueur l peut être prolongé en au plus deux chemins de longueur $l+n$, le nombre de chemins de longueur l issus d'un point donné sur $\tilde{P} \setminus \tilde{P}_n$ est donc majoré par

$$2^{l/n+1}$$

et $h_C(\tilde{P} \setminus \tilde{P}_n) \leq (1/n) \log 2$. □

CHAPITRE 10

PARTICULARITÉS DU CAS MONOTONE PAR MORCEAUX

On se restreint maintenant aux applications du type suivant:

(10.1) Définition. *On appelle* **application monotone par morceaux** *une application $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que la partition naturelle P vérifie:*

P est finie.

1 Régularisations

Il sera parfois commode de se placer dans le cadre suivant:

(10.2) Définition. *Si I est une partie compacte de $\mathbb{R}$, on dit que $f : I \to I$ est une* **application monotone par morceaux généralisée** *s'il existe une collection finie d'intervalles ouverts $J_1, \ldots, J_N$ tels que $\bigcup_{i=1}^{N} \overline{J_i \cap I} = I$ et $(I, f, \{J_1 \cap I, \ldots, J_N \cap I\})$ soit un système partitionné, vérifiant la* **propriété de Darboux**, *i.e.:*

$$f([a,b] \cap I) = [f(a), f(b)] \cap I$$

pour tous $a, b \in J_i \cap I$ $(i = 1, \ldots, N)$. La partition naturelle de $f : I \to I$ est la collection $\{J_1 \cap I, \ldots, J_N \cap I\}$ vérifiant les propriétés ci-dessus et de cardinal minimal.

Si de plus on peut choisir ci-dessus les intervalles J_i tels que $\{J_1 \cap I, \ldots, J_N \cap I\}$ soit une partition au sens ensembliste en compacts ouverts, on dit que l'application est **monotone et inversible par morceaux**.

Pour conserver les résultats sur la structure du diagramme de Hofbauer, on pose:

$$C(f) = \{\min(J_i \cap I), \max(J_i \cap I) : i = 1, \ldots, N\}$$

(10.3) Lemme. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone par morceaux. f admet deux extensions g_1 et g_2, monotones par morceaux généralisées:*

$$\begin{array}{ccc} I_i & \xrightarrow{\ g\ } & I_i \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ [0,1] & \xrightarrow{\ f\ } & [0,1] \end{array}$$

de partition naturelle $Q_i = \overline{\{p_i^{-1}(A) : A \in P\}}$ et de projection p_i continue, surjective, au plus 2-sur-1 ($\operatorname{card} p_i^{-1}(x) = 1$ ou 2) avec les propriétés suivantes pour chacun des types:

(1) *g_1 est continue et $\operatorname{card} p_1^{-1}(x) = 2$ seulement sur l'ensemble dénombrable:*

$$\bigcup_{k \geq 0} f^{-k} D(f) \qquad (D(f) \text{ ensemble des discontinuités}).$$

(2) *g_2 est monotone et inversible par morceaux et* $\operatorname{card} p_2^{-1}(x) = 2$ *seulement sur l'ensemble dénombrable:*

$$\bigcup_{k\geq 0} f^{-k}C(f).$$

D'autre part, tout (I, g, Q) inversible et monotone par morceaux se projette

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{g} & I \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ J & \xrightarrow{h} & J \end{array}$$

avec (J, h, R) également inversible et monotone par morceaux, de partition $R = \{p(A) : A \in Q\}$ génératrice et p continue, surjective, $p^{-1}(x)$ est un singleton ou un homtervalle.

Preuve. On construit g_2 à l'aide de

$$j(x) = |x| + \sum_{\substack{y<x \\ y\in C^-(f)}} (\operatorname{card} C(f) + 1)^{-n(y)-1}$$

avec $C^-(f) = \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}C(f)$ et $n(y) = \min_{n\geq 0} f^n y \in C(f)$. On pose

$$I_2 = \overline{j([0,1] \setminus C^-(f)} \text{ et } g_2(j(x)) = j(f(x)) \quad (\text{si } x \in [0,1] \setminus C^-(f))$$

g_2 se définit sur le reste de I_2 par continuité (g_1 s'obtient de la même façon en remplaçant $C(f)$ par $D(f)$ — et $C^-(f)$ par $\bigcup_{k\geq 0} f^{-k}D(f)$).

On construit h en considérant le codage maintenant bien défini: pour $x \in I$, on pose

$$i(x) = \sum_{k\geq 0} (\operatorname{card} C(f) + 1)^{-k} i_n(x)$$

avec $i_n(x)$ le numéro de l'intervalle J_i contenant $f^n x$ (on suppose que ces intervalles sont numérotés par ordre croissant). On pose enfin $J = i(I)$, $h(i(x)) = i(g(x))$.

2 Orbite d'un intervalle

L'orbite d'un intervalle est comme dans le cas continu (presque) une union d'intervalles:

(10.4) Proposition (F. Hofbauer [17]). *Soit I une partie compacte de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ monotone par morceaux généralisée et continue, J un intervalle compact non-trivial de I (de la forme $K \cap I$ avec K un intervalle de $\mathbb{R}$). Il existe alors un entier $n(J) < \infty$ tel que*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k J \setminus \bigcup_{k=0}^{n(J)} f^k J \subset \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est la réunion des orbites des intérieurs des homtervalles de f.

En particulier, si f est dépourvue d'homtervalles, alors le futur de tout intervalle compact non-trivial J

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k J$$

est une partie compacte de I.

Remarquons qu'une application monotone par morceaux généralisée *continue* peut représenter une application monotone par morceaux *discontinue.*

(10.5) Corollaire. *Si $f : I \to I$ est monotone par morceaux, alors la transitivité topologique implique la transitivité forte.*

Preuve de la proposition 4. Si J est un homtervalle, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que J n'en soit pas un. Pour $n \geq 0$ on définit l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des intervalles maximaux I tels que

(1) $I \subset \bigcup_{k=0}^{n} f^k J$
(2) $\operatorname{int} I \cap C(f) = \emptyset$
(3) $I \cap C(f) \neq \emptyset$

On note

$$\mathcal{F}_n = \{[e, x_n(e)] : e \in E_n\}$$

avec $E_n \subset E$. La croissance de la suite des $\bigcup_{k=0}^{n} f^k J$ entraîne les propriétés suivantes:

(1) la suite E_n est croissante et donc $E_n = E_*$ à partir d'un certain rang.

Et pour chaque $e \in E_*$,

(2) la suite $x_n(e)$ est monotone. En particulier: i) elle admet une limite $x_*(e)$; ii) pour tout $k \geq 0$, il existe un k-homtervalle contenant tous les $x_n(e)$ à partir d'un certain rang.
(3) la suite $l([e, x_n(e)])$ (entier maximal tel que f^l soit continue et monotone sur $[e, x_n(e)]$) est décroissante donc égale à $l(e)$ à partir d'un certain rang.

Notons $l = \max_{e \in E_*} l(e)$. Pour n assez grand,

$$\bigcup_{k=0}^{n} f^k J \subset H \cup \bigcup_{\substack{e \in E_* \\ 0 \leq k \leq l(e)}} f^k [e, x_n(e)] \subset \bigcup_{k=0}^{n+l} f^k J$$

avec $H = \bigcup_{k=0}^{m} f^k J$ et m l'entier le plus petit tel que $f^{m+1} J$ contienne un point critique. Il suffit donc de démontrer que la suite des $\mathcal{F}_n$ est stationnaire modulo $\mathcal{H}$ à partir d'un certain rang. Si les suites $(x_n(e))_{n \geq 0}$ sont toutes stationnaires à partir d'un certain rang, c'est clair. Supposons donc qu'il existe $e_1 \in E_*$ tel que ce ne soit pas le cas (on dira que e_1 n'est pas stationnaire): montrons que $x_n(e_1)$ se trouve dans un homtervalle fixé pour n assez grand.

Mais alors il existe $e_2 \in E_*$ non stationnaire et un entier k tels que $x_{n+k}(e_1) = f^k x_n(e_2)$ pour une infinité de n (en particulier $x_*(e_1) = f^k x_*(e_2)$): on dira que e_1 est déterminé par e_2. De même e_2 est déterminé par e_3 et ainsi de suite. Mais

l'ensemble E_* est fini: $e_r = e_{r+p}$ avec $r, p \geq 1$. En particulier $x_*(e_r) = f^k x_*(e_r)$ pour un certain $k \geq 1$. Mais il existe un k-homtervalle H contenant les $x_n(e_r)$ pour n assez grand. Donc pour n assez grand, $x_n(e_r) \in \bigcap_{i\geq 0} f^{-ik}H$: mais ceci est un homtervalle. Enfin $x_n(e_1) = f^j(e_r)$ est par conséquent dans un homtervalle. □

3 Décomposition spectrale de F. Hofbauer.

On considère une application $f : I \to I$ inversible et monotone par morceaux, de partition naturelle notée P et de diagramme d'Hofbauer $\tilde{P}$.

Soient $\mathcal{D}^1$ l'ensemble des parties irréductibles (contenant au moins une boucle), $\mathcal{D}^2$ l'ensemble des parties transitoires (partie connexe ne rencontrant aucune partie élément de $\mathcal{D}^1$) infinies et maximales pour l'inclusion. $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1 \cup \mathcal{D}^2$ est ordonné (on dit que A précède B ssi $A = B$ ou il existe un chemin de A vers B).

On munit $\mathcal{D}$ d'un bon ordre compatible avec cet ordre partiel: il existe un ordinal μ tel que si on note $\mathbb{I}$ l'ensemble des ordinaux compris au sens large entre 0 et μ, il existe une bijection $i \in \mathbb{I} \mapsto D_i \in \mathcal{D}$ telle que

$$D_i \preceq D_j \implies i \leq j$$

Remarquons qu'il n'est pas toujours possible de prendre $\mathbb{I} = \mathbb{N}$: il peut exister $D \in \mathcal{D}$ ayant une infinité de prédécesseurs.

On définit d'abord une filtration de I. Pour $i \in \mathbb{I}$, on pose $G_i = \bigcup_{j\geq i} F(D_j)$, avec $F(S)$ ($S \subset \tilde{P}$) l'union des éléments de $\tilde{P}$ précédés par un élément de S.

On définit maintenant des compacts invariants. D'abord pour $i \in \mathbb{I}$, on note

$$\Omega_i = \bigcap_{k\geq 0} f^{-k}\overline{G_i \setminus G_{i+1}} \cap \Omega(f),$$

$\mathbb{J} = \{i \in \mathbb{I} : D_i \in \mathcal{D}^1\}$, et

$$W = \bigcup_{i\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{J}} \Omega_i$$

Ensuite $\vec{\mathcal{D}}$ étant l'ensemble des suites strictement croissantes à valeurs dans $\mathcal{D}$, pour $\alpha = (E_k)_{k\geq 0} \in \vec{\mathcal{D}}$, on pose

$$S_\alpha = \bigcap_{k\geq 0} F(E_k) \cap \Omega(f).$$

(10.6) Théorème (F. Hofbauer [17]**).** *Soit (I, f, P) monotone et inversible par morceaux sans homtervalles. On a:*

$$\Omega(f) = \bigcup_{i\in\mathbb{J}} \Omega_i \cup \bigcup_{\alpha\in\vec{\mathcal{D}}} S_\alpha \cup \bigcup_{x\in \mathrm{Per}(f)} \mathrm{orb}(x) \cup W,$$

l'ensemble $\Omega(f)$ se décompose en une union de compacts invariants fortement transitifs (à l'exception de W). Cette union est quasi-disjointe dans le sens où l'intersection de deux termes quelconques est finie.

De plus,

i) $\Omega_i = \overline{\Gamma^{-1}\tilde{\pi}\tilde{\Sigma}(D_i)}$ *($i \in \mathbb{J}$).*

ii) *la restriction de f à S_α se projette (de façon continue, surjective, au plus 2-sur-1) sur une rotation irrationnelle d'un groupe abélien compact ou sur une transformation "échange d'intervalle". Dans tous les cas, $h_{\mathrm{top}}(S_\alpha) = 0$.*

Du point (ii) on ne prouve ici que $h_{\text{top}}(S_\alpha) = 0$.

Preuve. Montrons d'abord l'inclusion de $\Omega(f)$. Soit $x \in \Omega(f) \setminus \text{Per}(f)$.

Si x n'appartient à aucun G_i ($i \in \mathbb{I}$) alors les éléments de $\tilde{P}$ contenant x sont en nombre fini et précèdent toutes les parties irréductibles; donc si A est un intervalle (compact ouvert) de P contenant x, l'ensemble des k tels que $f^k A \ni x$ est fini, $\bigcup_{k \geq k_0} f^k A$ étant un compact (d'après 4), cela implique que x est errant. Contradiction.

Si x appartient à une infinité de G_i ($i \in \mathbb{I}$) alors il existe $\alpha \in \vec{\mathcal{D}}$ tel que $x \in S_\alpha$: $\mathcal{D}$ peut s'écrire comme l'union d'un nombre finie de parties totalement ordonnées (considérer pour chaque $e \in E$, l'ensemble des $D \in \mathcal{D}$ rencontrant $J(e) := \{J(e,n) : n \geq 0\}$).

On peut donc supposer qu'il existe un $i \in \mathbb{I}$ maximal tel que $G_i \ni x$. S'il existait $k \geq 1$ tel que $f^k x \in \operatorname{int} G_{i+1}$, alors un voisinage assez petit de x serait envoyé dans G_{i+1}.

Mais G_{i+1} est définit comme l'union d'une partie connexe maximale $\mathcal{G} = \{D_j : j \geq i\}$. $\mathcal{G}$ est l'union des éléments accessibles depuis chacun de ses éléments minimaux, qui sont en nombre majoré par $\operatorname{card} E < \infty$: $E_1, \ldots, E_K$. Chaque $F(E_k)$ est compact d'après la proposition 4: G_{i+1} est un compact invariant.

Donc $x \notin \Omega_i$ impliquerait que x serait errant: contradiction. L'inclusion donc l'égalité est démontrée.

• Montrons la propriété d'intersection finie. On a

$$\Omega_i \cap \Omega_j \subset G_i \cap G_j \setminus (\operatorname{int} G_{i+1} \cup \operatorname{int} G_{j+1})$$

Supposons $i < j$. On a alors $\Omega_i \cap \Omega_j \subset G_j \setminus \operatorname{int} G_j = \partial G_j$. G_j étant une union finie d'intervalles son bord est fini.

• Chaque terme (sauf W) est clairement compact et invariant d'après sa définition.

• Montrons que $\Omega_i = \overline{\Gamma^{-1} \tilde{\pi} \tilde{\Sigma}_+(D_i)}$. Si D_i est réduit à une boucle, c'est clair. Supposons donc le contraire.

Il existe $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}_+(D_i)$ tel que $f^k \tilde{\pi}(\tilde{x})$ soit dense dans $\tilde{\Sigma}_+(D_i)$ et ne passe jamais dans l'ensemble exceptionnel du lemme (2.11) d'injectivité éventuelle: en effet, tout voisinage d'un point de $\tilde{\Sigma}_+(D_i)$ a une intersection non-dénombrable avec $\tilde{\Sigma}_+(D_i)$. On a $x := \tilde{\pi}(\tilde{x}) \in G_i$. Si $f^k x \in G_{i+1}$ pour un certain $k \geq 1$ alors il existerait $\tilde{y} \in \tilde{A}$ avec $A \in D_j \setminus D_i$ ($i < j$) tel que $\tilde{\pi}(\tilde{y}) = \tilde{\pi}(\tilde{x})$. Le lemme (2.3) implique que $\tilde{f}^n \tilde{y} = \tilde{f}^n \tilde{x} \in \hat{D}_i$. Donc $A \preceq D_i$: contradiction. On a montré $x \in \Omega_i$. Par conséquent, $\overline{\tilde{\pi} \tilde{\Sigma}_+(D_i)} = \omega(x) \subset \Omega_i$.

Réciproquement soit C un cylindre (élément de $P^{\vee n}$) rencontrant Ω_i. C rencontre $\overline{G_i \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k} G_{i+1}}$ donc $G_i \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k} G_{i+1}$, C étant ouvert. Donc il existe un chemin sur D_i de longueur n correspondant au cylindre C. Ce chemin peut être prolongé en un chemin infini sur D_i. Ce dernier défini un $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}(D_i)$ tel que $\tilde{\pi}(\tilde{x}) \in C$. Les cylindres formant une base d'ouverts, on a montré que $\Omega_i \subset \overline{\tilde{\pi} \tilde{\Sigma}(D_i)}$.

En particulier, Ω_i est topologiquement transitif.

• $h_{\text{top}}(S_\alpha) = 0$. Notons $(E_k)_{k \geq 0} = \alpha$. $F(E_k) \subset \tilde{\pi} \tilde{\Sigma}(\mathcal{G}_k)$ avec $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des éléments de $\tilde{P}$ accessibles depuis E_k. La nullité de l'entropie découle de $\lim_{k \to \infty} h_C(\mathcal{G}_k) = 0$ (9.11). □

CHAPITRE 11

SPÉCIFICATION

Ce chapitre est consacré à la notion de spécification (définie ci-dessous). On donne d'abord une démonstration du résultat de A.M. Blokh selon lequel toute application continue de l'intervalle dans lui-même permet la spécification. Puis on montre qu'en présence de discontinuités la situation est inverse: on verra en particulier que l'ensemble des $\beta > 1$ tels que $x \mapsto \beta x \mod 1$ permette la spécification est de mesure nulle.

En dehors de son aspect frappant ce résultat nous permet d'illustrer une autre façon d'utiliser le diagramme de Hofbauer: non pas comme un système dynamique isomorphe au système initial, mais comme une description de la dynamique symbolique de ce système initial. Notons que cette approche à déjà été utilisée par F. Hofbauer notamment pour mettre en évidence la structure des composantes transitives d'entropie nulle [54] ou une version faible de la propriété de spécification [53].

1 Propriété de Spécification

Bowen a introduit la notion de spécification:

(11.1) Définition (R. Bowen [2]). *Soit $f : X \to X$ avec X un espace métrique. On dit que z ϵ-**piste** le morceau d'orbite (x, n) si $d(f^i z, f^i x) < \epsilon$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.*

Soit $\epsilon > 0$. On dit que f permet la **spécification à ϵ près** *s'il existe un entier $N < \infty$ tel que, pour toute collection finie de morceaux d'orbites:*

$$(x_1, d_1), \ldots, (x_n, d_n) \in X \times \mathbb{N},$$

il existe $z \in \mathrm{Per}_{D_{n+1}}(f)$ tel que:

$$f^{D_i} z \ \epsilon\text{-piste}\ (x_i, d_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

avec $D_i = d_1 + \cdots + d_{i-1} + (i-1)N$.

Enfin on dit que f **permet la spécification** *si f permet la ϵ-spécification pour tout $\epsilon > 0$.*

Remarquons que, si X est un compact, la spécification est en fait indépendante du choix de la métrique.

Cette propriété est très forte mais elle est néammoins satisfaite dans nombre de cas importants:

(1) les sous-shifts de type fini.
(2) les systèmes hyperboliques: automorphismes du tore, difféomorphismes Anosov ou Axiome-A restreints à un ensemble basique.
(3) tout facteur ou produit de systèmes dynamiques topologiques (X compact métrique, f continue) permettant la spécification.

Elle a d'importantes conséquences:

(11.2) Proposition [8]. *Soit $f : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact, non réduit à un point. Supposons que f permette la spécification. On a alors:*

- *f est topologiquement mélangeante.*
- *$h_{\text{top}}(f) > 0$.*
- *$\text{Per}(f)$ est dense dans X et l'ensemble des mesures portées par une orbite périodique est dense dans $\mathcal{M}_f(X)$.*
- *pour tout $V \subset \mathcal{M}_f(X)$ non-vide, fermé et connexe l'ensemble des $x \in X$ tels que*
  l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{f^k x}\right)_{n\geq 1}$ est V
  est dense dans X.

Dans le cas particulier $V = \mathcal{M}_f(X)$, cet ensemble est même générique (G_δ dense).

De plus, si on ajoute l'expansivité:

(11.3) Théorème (R. Bowen [8,2]**).** *Soit $f : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact, non réduit à un point. Supposons que f permette la spécification et soit expansive: il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tous points $x \neq y$ de X, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $d(f^n x, f^n y) > \epsilon_0$. Les points périodiques constituent un échantillon représentatif de la dynamique de f dans son ensemble. Plus précisément, on a d'abord:*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \text{card}\, \text{Per}_n(f)$$

et ensuite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{card}\, \text{Per}_n(f)} \sum_{x\in \text{Per}_n(f)} \delta_x$$

existe et est l'unique mesure d'entropie maximale de (X, f) qui est donc intrinsèquement ergodique.

2 Résultats sur l'intervalle

A.M. Blokh a montré qu'une application unidimensionnelle continue permet la spécification dès qu'on a le mélange topologique (8.1):

(11.4) Théorème (A.M. Blokh [1]**).** *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Si f est topologiquement mélangeante alors f permet la spécification.*

Remarque. La nécessité de cette condition est triviale.

Il est naturel de se demander si ce résultat subsiste dès lors qu'on admet des discontinuités. Je montre qu'il n'en est rien: la spécification est alors exceptionnelle, en particulier on a le:

(11.5) Contre-Exemple. *Bien que, pour $\beta > 1$, toutes les applications $T_\beta : [0,1] \to [0,1]$ définies par*

$$T_\beta : x \mapsto \beta x - [\beta x] \qquad ([x]\text{: partie entière})$$

soient topologiquement mélangeantes, l'ensemble des $\beta > 1$ tels que l'application T_β permette la spécification est de mesure de Lebesgue nulle.

On le montre en fait dans un cadre un peu plus général.

3 Cas continu

Dans cette section on considère, sauf mention contraire, une application $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et topologiquement mélangeante. Soulignons qu'on ne suppose pas que f est m.p.m. Rappelons qu'on appelle la propriété de Darboux le fait que l'image d'un intervalle soit un intervalle.

(11.6) Lemme. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et topologiquement mélangeante. Pour tous $\alpha, \epsilon > 0$, il existe $N(\alpha,\epsilon)$ et $\delta(\epsilon) > 0$ tels que, pour tous $x, y \in [0,1]$, $n \geq 0$, il existe $z \in B_n(y,\epsilon)$ tel que $f^N(B(x,\alpha)) \supset B(z,\delta)$.*

Preuve. Pour tout $\delta > 0$ et $x \in [0,1]$, le mélange topologique et la propriété de Darboux impliquent l'existence d'un $N_1(x,\alpha,\delta)$ tel que, pour $n \geq N_1$ et $x \in [0,1]$,

$$f^n(B(x,\alpha/2)) \supset [\delta, 1-\delta].$$

Par compacité il existe donc $N_1(\alpha,\delta)$ tel que, pour $n \geq N_1$, $f^n(B(x,\alpha)) \supset [\delta, 1-\delta]$.

Le mélange implique $f([0,1]) = [0,1]$. S'il existe $a \in (0,1)$ tel que $f^i(a) = 0$ (on peut supposer que $i \in \{1,2\}$) on dit que 0 est accessible. Si 0 et 1 sont accessibles alors $f^{N_1+2}(B(y,\alpha)) = [0,1]$: il suffit alors de prendre $N = N_1(\alpha,\delta) + 2$ avec $\delta = \min\big(d(a_0,\{0,1\}), d(a_1,\{0,1\})\big)$ et $z = y$. On peut donc supposer que 0 est inaccessible: $f^{-1}(0) = \{0\}$ (quitte à échanger 0 et 1).

Si $(0,\epsilon/3]$ ne contenait aucun point fixe alors cet intervalle ou bien serait attiré par le point fixe 0 (si $f(t) < t$) ou bien contiendrait un intervalle non-récurrent (si $f(t) > t$, $f([\epsilon/3,1]) = [\epsilon', b]$ avec $\epsilon/3 < \epsilon' < b$ et $[\epsilon/3, \epsilon']$ est errant): contradiction. Notons p un de ces points fixes. Notons p' un point fixe au voisinage de 1 si 1 est inaccessible, $p' = 1$ si 1 est accessible. Fixons $\delta = \delta_1 = \min(p, 1-p')/2$ dans le premier cas et $\delta = p/2$, $\delta_1 = \min(p/2, d(a,\{0,1\}))$ (avec $a \in (0,1)$ tel que $f^i(a) = 1$ pour $1 \leq i \leq 2$). Remarquons que δ ne dépend que de ϵ.

On fixe alors $N = N_1(\alpha,\delta_1) + 2$. Il suffit alors que $z \in [p,p']$ pour avoir $f^N B(x,\alpha) \supset B(z,\delta)$.

Pour tout $y \in [0,1]$, $n \geq 0$, si $y \in [p,p']$ il suffit de prendre $z = y$. Sinon supposons que $y \in [0,p]$ et posons $n_1 = \min\{0 < k < n : f^k y \in [p,p']\}$. Si $n_1 = +\infty$, on prend $z = p$. Sinon $0 < n_1 < n$ et p étant un point fixe il existe $z > p$, au voisinage de p, tel que $f^k z \in [p, p+\epsilon/2]$ si $k < n_1$ et $f^{n_1} z \in B_{n-n_1}(f^{n_1} y, \epsilon)$. □

On note $B'_n(x,\epsilon)$ la composante connexe de x dans $B_n(x,\epsilon)$.

(11.7) Lemme. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et topologiquement mélangeante. Si, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\inf_{\substack{x \in [0,1] \\ n \geq 0}} \operatorname{diam}(f^n B'_n(x,\epsilon)) > 0 \tag{1}$$

alors f permet la spécification.

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$. Le lemme (11.6) définit alors un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$. Soit $\alpha > 0$ la moitié de la borne inférieure (1). Pour tout $x \in [0,1]$, $n \geq 0$, $f^n B'_n(x,\delta) \supset B(y,\alpha)$ si y est le milieu de l'intervalle $f^n B'_n(x,\delta)$. Fixons $N = N(\alpha,\epsilon)$ d'après le lemme (11.6).

Remarquons que si $[x,y]$ est un intervalle et si $[a,b] \subset f([x,y])$ alors il existe $[x',y'] \subset [x,y]$ tel que $f([x',y']) = [a,b]$: si $[a,b] = f([x,y])$ c'est clair. Sinon il existe $z \in (x,y)$ tel que, par exemple, $f(z) < a$ et $f([x,z]) \supset [a,b]$ (les autres cas sont similaires). Il suffit de prendre $x' = \max\{t < z : f(t) = b\}$ et $y' = \min\{t > x' : f(t) = a\}$.

Donnons-nous $(y_1,d_1),\dots,(y_r,d_r) \in [0,1] \times \mathbb{N}$. Soient $z_1,\dots,z_r$ déterminés par le lemme (11.6) tels que pour $1 \le i \le r$, $z_i \in B_{d_i}(y_i,\epsilon)$ et

$$(*) \qquad f^{d_{i-1}+N} B_{d_{i-1}}(z_{i-1},\epsilon) \supset f^N(B(t_{i-1},\alpha)) \supset B(z_i,\delta).$$

avec $t_i \in [0,1]$. En posant $(z_0,d_0) = (y_r,d_r)$, on obtient ainsi une première suite $z_1^1, z_2^1, \dots, Z_r^1$. En posant $(z_0,d_0) = (z_r^n,d_r)$, on obtient une nouvelle suite $z_1^{n+1},\dots,z_r^{n+1}$. Par compacité il existe une suite limite $z_1,\dots,z_r$ vérifiant (*) avec $z_0 = z_r$.

D'après la remarque précedente, il existe un intervalle $J_r \subset B'_{d_r}(z_r,\delta)$ tel que $f^{d_r+N} J_r = B'(z_1,\delta)$; $J_{r-1} \subset B'_{d_{r-1}}(z_{r-1},\delta)$ tel que $f^{d_{r-1}+N} J_{r-1} = J_r$, etc.

On obtient ainsi un intervalle J_1 tel que $f^{D_i} J_1 \subset B_{d_i}(z_i,\epsilon)$ $(i = 1,\dots,r)$ et $f^{D_{r+1}} J_1 \supset J_1$: donc J_1 contient un point D_{r+1}-périodique du type recherché. □

(11.8) Lemme. *Soient K un espace métrique compact et $f : K \to K$ topologiquement mélangeante. Pour tout $\epsilon > 0$,*

$$(2) \qquad \inf_{\substack{x \in K \\ n \ge 0}} \operatorname{diam}(f^n B(x,\epsilon)) > 0$$

Preuve. Par l'absurde. Dans le cas contraire il existerait $\epsilon > 0$ et, pour tout $i \ge 1$, $x_i \in [0,1]$ et $n_i \ge 0$ tel que $\operatorname{diam}(f^{n_i} B(x_i,\epsilon)) < i^{-1}$. Par compacité on peut supposer que la suite des x_i converge vers un $x \in K$. Mais, pour i assez grand, $B(x,\epsilon/2) \subset B(x_i,\epsilon)$ et $\operatorname{diam}(f^{n_i} B(x,\epsilon/2)) < i^{-1}$. Mais le mélange topologique implique que si U est un ouvert non-vide, $\operatorname{diam}(f^n U)$ tend vers $\operatorname{diam} X$ quand $n \to \infty$. Contradiction. □

Preuve du théorème. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et topologiquement mélangeante. D'après le lemme (11.7), il suffit de vérifier les hypothèses du lemme (11.8). Fixons $\epsilon > 0$. Notons $\delta > 0$ la borne inférieure (2). Soit $x \in [0,1]$ et $n \ge 0$. Posons n_1 le plus grand des $0 \le k < n$ tels que $B'_{n+1}(x,\epsilon) \ne B'_n(x,\epsilon)$ ou $n_1 = 0$ s'il n'en existe pas. $f^{n_1} B'_{n_1+1}(x,\epsilon)$ est de diamètre supérieur à ϵ que $n_1 > 0$ ou $n_1 = 0$. Donc $f^n B'_n(x,\epsilon) = f^{n-n_1}(f^{n_1} B'_{n_1}(x,\epsilon))$ est de diamètre supérieur à δ, indépendant de x et de n. □

4 Cas monotone par morceaux

Les propriétés pertinentes pour notre étude des β-transformations sont condensées dans la notion suivante:

(11.9) Définition. *Soit $0 < \theta < 1$. On appelle* **famille $C^{1+\theta}$ d'applications monotones par morceaux** *définie sur un intervalle $T \subset \mathbb{R}$ la donnée de*

(1) $0 < d_1(t) < \cdots < d_{N-1}(t) < 1$ — *les* **points critiques**, *supposés fonctions $C^{1+\theta}$ de t.*

(2) $f_i : T \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *$(i = 1,\dots,N)$ applications strictement monotones de classe $C^{1+\theta}$ — les "morceaux".*

A chaque valeur de $t \in T$ est associée l'application monotone par morceaux

$$f_t : x \in [0,1] \mapsto f_i(t,x) \qquad i = \max\{j \in \{1,\dots,N\} : d_{j-1} < x\}$$

On pose, par commodité, $d_0(t) = 0, d_N(t) = 1$. On suppose que $f_t([0,1]) \subset [0,1]$.

Notations. On note $g(x+)$ la limite à droite au point x de la fonction g. On note $g'(x)$ la dérivée de g fonction à une variable, si nécessaire on restreint g à l'intervalle de continuité voire de dérivabilité contenant x. On note $\partial_t f_t(x)$, $\partial_x f_t(x)$ les dérivées partielles (définies en les points critiques par la règle précédente). On note enfin D_t(expression) la dérivée "totale" de l'expression par rapport à t.

(11.10) Théorème. *Soit (f,d,T) une famille $C^{1+\theta}$ d'applications monotones par morceaux. Supposons que, pour Lebesgue-presque tout $t \in T$, f_t est*

(A1) **complètement discontinue**: *pour chaque discontinuité $d_i(t)$, les limites à gauche et à droite de f_t en $d_i(t)$ sont distinctes.*

(A2) **non-dégénérée**: *on demande qu'il existe une extrémité $e = e(t)$ (de la forme $d_i(t)\pm$) telle que la somme*

$$d_i'(t) + \sum_{n\geq 1} \frac{\partial_t f_t(f_t^{n-1}(e))}{\partial_x f_t^n(e)}$$

ne converge pas vers zéro.

(A3) **dilatante**:

$$\inf_{x\in[0,1]} |\partial_x f_t(x)| > 1$$

Alors l'ensemble des valeurs de $t \in T$ telles que f_t permette la spécification est de mesure de Lebesgue nulle.

Remarque. Une condition du type de (A2) ci-dessus est inévitable afin de garantir que la dépendence en t est réelle, par opposition, par exemple, à une famille de la forme:

$$(*) \qquad f_t(x) = \varphi_t \circ f \circ \varphi_t^{-1}$$

où $\varphi_t : [0,1] \to [0,1]$ est une famille de diffeomorphismes.

Question. La condition (A2) implique-t-elle que la famille, supposée dilatante, est de la forme (*) ci-dessus?

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes:

(1) l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application monotone par morceaux donnée permette la spécification.

(2) exploitation de la nécessité de cette condition.

Le diagramme de Hofbauer sera utilisé seulement pour le premier point.

4.1. Condition nécessaire et suffisante.

On démontre le critère suivant:

(11.11) Proposition. *Soit une application $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone par morceaux, dont tous les points critiques sont des discontinuités.*

Pour que f permette la spécification il faut et il suffit que

(S1) *l'application soit topologiquement mélangeante.*

(S2) *il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, si $n \geq 1$, si J est un intervalle maximal pour la propriété: $f^k|J$ est continue, et si ∂J contient une discontinuité alors la longueur de $f^k(J)$, $|f^k(J)|$, est minorée par α.*

Remarquons que la nécessité de ces deux conditions — qui nous suffit pour la preuve du théorème — est la partie de loin la plus facile de ce résultat.

La condition (S2) de la proposition s'écrit en utilisant la partition naturelle P et les homtervalles associés $P^{\vee n}$ (9.1): pour toute extrémité $e \in E(f)$,

$$\inf_{n \geq 0} |f^n(P^{\vee n}(e))| > 0$$

On se servira du diagramme de Hofbauer correspondant à l'extension markovienne de Hofbauer, c'est-à-dire $\hat{P}$ p. 17, identifié à l'ensemble des futurs de $([0,1], f, P)$. Chaque élément de $\hat{P}$ est donc un sous-intervalle de $[0,1]$.

(11.12) Remarque. Par une récurrence immédiate on obtient que si γ est un chemin sur $\hat{P}$ alors

$$\gamma_n = f^n(\gamma_0 \cap H_{n+1})$$

où H_{n+1} est le $n+1$-homtervalle définit par $H_{n+1} = \hat{\pi}(\gamma_0) \cap \cdots \cap f^{-n}\hat{\pi}(\gamma_n)$ avec $\tilde{\pi} : \hat{P} \to P$ défini par $\hat{\pi}(\gamma_k)$ est l'intervalle de P contenant γ_k.

En particulier, si $A \in \hat{P}$ contient $x \in [0,1]$ tel que $\Gamma(x)$, son itinéraire (1.19), soit bien défini, alors il existe un unique chemin γ sur $\hat{P}$ tel que $\gamma_0 = A$ et $\hat{\pi}(\gamma) = \Gamma(x)$, où $\hat{\pi}(\gamma) := (\hat{\pi}(\gamma_n))_{n \geq 0}$.

On rappelle le résultat principal du chapitre 9. Il existe un graphe, dit **graphe formel** défini sur (un sous-ensemble de) $E \times \mathbb{N}$ (9.10). Ce graphe se projette *surjectivement* sur $\tilde{P}$ donc sur $\hat{P}$ par l'application F définie par:

$$F(e,n) = f^n(P^{\vee n+1}(e))$$

dans le sens où: d'une part, $F(E \times \mathbb{N}) = \hat{P}$ en tant qu'ensemble et, d'autre part, $F_1 \to F_2$ est une flèche de $\hat{P}$ ssi, pour tout $(e_1, n_1) \in F^{-1}(F_1)$ il existe un $(e_2, n_2) \in E \times \mathbb{N}$ tel que

$$F(e_2, n_2) = F_2 \text{ et } (e_1, n_1) \to (e_2, n_2).$$

De plus, le graphe formel vérifie l'énoncé suivant:

(11.13) Proposition (F. Hofbauer). *Il existe une fonction $K : E \times \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, \infty\}$ telle que, si on note $\mathrm{Bif}(e) = \{K(e,r) - 1 < \infty : r \geq 0\}$, les successeurs de $(e,n) \in E \times \mathbb{N}$ sont les éléments de $\mathrm{succ}(e,n)$ défini de la façon suivante:*

(1) *si $n \notin \mathrm{Bif}(e)$,*

$$\mathrm{succ}(e,n) = \{(e, n+1)\}$$

(uniquement le successeur dit trivial).

(2) *si* $n \in \mathrm{Bif}(e)$,

$$\mathrm{succ}(e,n) = \{(e,n+1),(f,K(f,s)),(g,0) : g \in G\}$$

avec $(f,s) \in E \times \mathbb{N}$ *et* $\emptyset \subset G \subset E$.

Enfin la fonction K *vérifie: si* $K(e,r+1) < \infty$ *alors*

$$K(e,r+1) = K(e,r) + K(f,s).$$

avec $(f,s) \in E \times \mathbb{N}$ *comme ci-dessus en prenant* $n = K(e,r+1) - 1$.

La propriété d'injectivité éventuelle (2.11) entraîne facilement le:

(11.14) Lemme. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une application monotone par morceaux.*

Si f *est topologiquement mélangeante alors le graphe* $\hat{P}$ *contient une partie irréductible* $\hat{I}$ *telle que* $\bigcup_{A \in \hat{I}} A = [0,1] \setminus F$ *avec* F *un ensemble fini.*

De plus cette partie irréductible est apériodique et **close** *dans le sens où il n'existe pas de flèche du graphe qui sorte de* $\hat{I}$.

Le résultat de F. Hofbauer sur l'orbite d'un intervalle pour une application monotone par morceaux (10.4) entraîne le:

(11.15) Lemme. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une application monotone par morceaux et sans homtervalles. Soit* $\tilde{I}$ *une partie irréductible close. Alors il existe* $\tilde{I}_* \subset \tilde{I}$ *une partie finie telle que*

$$\bigcup_{A \in \tilde{I}_*} A = \bigcup_{A \in \tilde{I}} A$$

Remarquons que f étant supposée topologiquement mélangeante, il n'existe pas de homtervalle, c'est-à-dire d'intervalle I tel que $f^k|I$ est continue et monotone pour tout $k \geq 0$. La correspondance entre P-itinéraires et points de $[0,1]$ (9.3) entraîne quant à elle le:

(11.16) Lemme. *A tout chemin* γ *sur* $\hat{P}$ *on associe l'intervalle de* $[0,1]$ *défini par*

$$H(\gamma) = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(A_k)$$

si $A = \hat{\pi}(\gamma)$ *est le projeté de* γ.

Deux cas se présentent:

(1) $H(\gamma)$ *est un singleton* $\{x\}$ *formé par l'unique point d'itinéraire* A.

(2) $H(\gamma)$ *est vide.*

Le cas (2) ne se produit que pour une collection dénombrable d'itinéraires. Il se produit si:

$$\bigcap_{k \geq 0} \overline{f^{-k}(A_k)} = \{c_-\}$$

avec $c_- \in \bigcup_{l \geq 0} f^{-l}(C(f))$ *tel que* A *n'est pas l'itinéraire de* c_-.

Réciproquement, les points $x \in [0,1]$ dont l'itinéraire $\Gamma(x)$ n'est pas défini sont parmi ceux dont l'orbite passe par un point critique non-*discontinu.*

Preuve de la proposition 11.11 (nécessité). Montrons d'abord la nécessité des deux conditions. Celle de (S1) est claire. Supposons donc que (S1) est satisfaite mais non (S2): il existe $A_1, A_2, \cdots \in \hat{P}$ dont les longueurs tendent vers 0, $|A_i| \to 0+$.

Soit $0 < \epsilon < \min_{d \in C(f)} |f(d-) - f(d+)|$. Clairement les points de $B_{n+1}(x,\epsilon) = \{y \in [0,1] : \forall k = 0,\ldots,n \quad |f^k(y) - f^k(x)| < \epsilon\}$ ont le même itinéraire que x pendant les temps $0,\ldots,n-1$:

$$B_{n+1}(x,\epsilon) \subset P^{\vee n}(x)$$

Vu la structure quasi-linéaire du graphe, il existe $e \in E$ tel que le chemin γ défini par $\gamma_n = F(e,n)$, $n \geq 0$ rencontre une infinité de termes A_k. D'autre part, pour tout $n \geq 0$, si $x \in P^{\vee n}(e)$,

$$f^{n+1}(B_{n+1}(x,\epsilon)) \subset f^2(f^{n-1}(P^{\vee n}(e))) = f^2(\gamma_{n-1})$$

Or γ_{n-1} est un intervalle sur lequel f^2 a moins de N discontinuités et dont le diamètre est arbitrairement petit quand $n \to \infty$, $\epsilon > 0$ étant fixé. Il en résulte que f ne permet pas la spécification. □

Preuve de la proposition 11.11 (suffisance). Montrons maintenant que (S1)+(S2) implique la spécification. Remarquons tout d'abord que le mélange topologique implique que f n'a pas d'homtervalle. Il existe donc $K < \infty$ tel que si I est un intervalle de diamètre au moins $\alpha > 0$ alors $f^K|I$ admet un point critique.

Appelons **segment** de longueur l une suite à valeurs dans $\hat{P}$, $A_1 \to A_2 \to \ldots A_l$ telle que A_{i+1} est le seul successeur de A_i dans $\hat{P}$ $(i = 1,\ldots,l-1)$. La condition (S2) implique que K majore la longueur des segments contenus dans $\hat{P}$. La proposition (11.13) implique que si $A_1 \to \ldots A_l$ est un segment maximal (i.e. s'il n'existe pas de segment $A_i \to \ldots A_j$ avec $i \leq 1, j \geq l$ et $j - i + 1 > l$) alors A_l a un successeur dans

$$\hat{P}_l := \{F(e,n) : e \in E \text{ et } 0 \leq n < l\}.$$

Soit $\hat{I}$ la partie irréductible définie par la proposition 11.14. $\hat{I}$ étant une partie close, on a donc montré: de tout élément de $\hat{I}$ on peut accéder à un élément de $P_l \cap \hat{I}$ par un chemin de longueur bornée par K. En utilisant la finitude de $\hat{P}_l \cap \hat{I}$, l'irréductibilité et l'apériodicité de $\hat{I}$, on obtient $T < \infty$ et $A_* \in \hat{P}_l \cap \hat{I}$ tels que tout élément de $\hat{I}$ peut être joint à A_* par un chemin de longueur exactement t pour tout $t \geq T$.

La proposition 11.15 et la remarque 11.12 montrent qu'il existe $m < \infty$ tel que tout itinéraire peut être relevé en un chemin sur $\hat{P}$ débutant dans $\hat{P}_m \cap \hat{I}$. Soit d tel que A_* peut être joint à n'importe quel point de $\hat{P}_m \cap \hat{I}$ par un chemin de longueur au plus d. N'importe quel élément de $\hat{I}$ peut donc être joint par un chemin de longueur exactement $T + d$ au début du relèvement de n'importe quel itinéraire.

f n'ayant pas d'homtervalles, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M < \infty$ tel que si les itinéraires de x et y coïncident sur les M premiers symboles alors $|x - y| < \epsilon$. En particulier tout point dont l'itinéraire est périodique est lui-même périodique. Concluons:

Soit $\epsilon > 0$. Fixons $M < \infty$ comme ci-dessus. On considère les points des orbites "virtuelles" des points critiques, i.e. c'est $\{f^n(e) : n \geq 0\}$, si $e = (c, I)$ est une extrémité telle que $f^n(c) \neq f^n(e)$ pour un $n \geq 1$.

Soit X l'union des orbites critiques virtuelles qui sont aussi périodiques. X est un ensemble fini. Il existe donc $y_0 \in [0,1]$ et $\delta > 0$ tel que $B(y_0, \delta)$ ne contient aucun point de X. D'après la remarque ci-dessus il existe donc $m_0 \geq 1$ tel que $B_{m_0}(y_0, \epsilon) \subset P^{\vee m_0}(y_0) \subset B(y_0, \delta)$ et ne contient aucun point de X.

Soit $y_1, \ldots, y_s \in [0,1]$ et $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Posons $r = 2s$, $(x_{2i-1}, n_{2i-1}) = (y_i, m_i)$ $(x_{2i}, n_{2i}) = (y_0, m_0)$ $(1 \leq i \leq s)$. Notons γ^i un relèvement sur $\hat{P}$ de l'itinéraire de x_i tel que $\gamma_0^i \in \hat{P}_m \cap \hat{I}$ et $D_i = (i-1)(M+T+d) + \sum_{1 \leq j < i} n_i$ si $1 \leq i \leq r+1$.

D'après ce qu'on a dit, il existe un chemin γ sur $\hat{I}$ tel que $\gamma_{D_i+k} = \gamma_k^i$ pour $0 \leq k \leq n_i + M$, pour $i = 1, \ldots, r$ et $\gamma_{D_{r+1}+k} = \gamma_k$ pour $k \geq 0$.

Si $\bigcap_{k \geq 0} \overline{f^{-k} A_k}$ était un point pré-critique, ce serait un point d'une orbite critique et périodique donc ne s'approcherait pas de y_0: contradiction. L'itinéraire γ détermine donc bien un point $z \in [0,1]$ d'après le lemme 11.16. Ce point z satisfait aux exigences de la définition de la spécification. □

4.2. Démonstration du théorème.

Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver le théorème pour des intervalles de paramètre T compacts sur lesquels

(1) la famille soit uniformément dilatante: il existe $\lambda > 1$ tel que

$$|\partial_x f_t(x)| \geq \lambda \qquad (\forall x \in [0,1) \setminus C(f_t),\ t \in T)$$

Comme l'ont remarqué M. Benedicks et L. Carleson, les propriétés de dilatation par rapport à x et par rapport à t sont liées:

(11.17) Lemme. *Soit $(f_t)_{t \in T}$ une famille régulière d'applications monotones par morceaux. Soit $x \in [0,1]$. On a alors:*

$$\frac{\partial_t f_t^n(x)}{\partial_x f_t^n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial_t f_t(f_t^k(x))}{\partial_x f_t^{k+1}(x)}$$

Preuve. Etudions $r_n = \frac{\partial_t f_t^n(x)}{\partial_x f_t^n(x)}$ (fonction de x et de t). On a:

$$\partial_t f_t^{n+1}(x) = \partial_t f_t(y)|_{y=f_t^n(x)} + \partial_x f_t(y)|_{y=f_t^n(x)} \partial_t f_t^n(x)$$
$$\partial_x f_t^{n+1}(x) = \partial_x f_t(y)|_{y=f_t^n(x)} \partial_x f_t^n(x)$$

Soit $r_{n+1} = \frac{\partial_t f_t(y)|_{y=f_t^n(x)}}{\partial_x f_t^{n+1}(x)} + r_n$. Donc

$$r_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial_t f_t(y)|_{y=f_t^n(x)}}{\partial_x f_t^{n+1}(x)}$$

□

Remarquons qu'on peut tout aussi bien considérer l'extrémité non-dégénérée (cf. (A2)) $e(t)$, variant de façon $C^{1+\theta}$, à la place d'un point fixe x. Il suffit d'ajouter le terme $e'(t)$. Posons donc

$$\sigma(t) = e'(t) + \sum_{n\geq 0} \frac{\partial_t f_t(f_t^n(e(t)))}{\partial_x f_t^{n+1}(e(t))}$$

En général cette fonction est discontinue sur un ensemble dense (y compris à x ou t fixé). Mais, sous l'hypothèse de dilatation uniforme (1), la série est uniformément convergente et donc: l'ensemble $\{t \in T : \sigma(t) \neq 0\}$ s'écrit comme une union dénombrable d'intervalles T' sur chacun desquels $|\sigma(t)|$ est minoré par une constante (dépendante de T'). On peut donc supposer

(2) il existe $C < \infty$ telle que

$$C^{-1} \leq \left| \frac{D_t[f_t^n(e(t))]}{\partial_x f_t^n(e(t))} \right| \leq C \qquad (n \geq 0)$$

Les propriétés de dilatation entraînent classiquement un résultat de distorsion:

(11.18) Lemme. *Soit $(f_t)_{t\in T}$ une famille uniformément dilatante et non-dégénérée (i.e. satisfaisant (1) et (2) ci-dessus).*

Il existe $K < \infty$ bornant, pour tout $n \geq 0$, la distorsion de $F_n : t \mapsto f_t^n(e(t))$ sur chaque intervalle de continuité $U \subset T$:

$$\sup_{t_1,t_2\in U} \left| \frac{F_n'(t_1)}{F_n'(t_2)} \right| < K$$

Preuve. Montrons d'abord qu'on a un peu mieux que (2): pour tous $0 \leq k \leq n$,

$$(**) \qquad |D_x(F_n \circ F_k^{-1})(x)| \geq C'\lambda^{n-k} \qquad (x \in F_k(U)).$$

En effet, $F_n \circ F_k^{-1}(x) = f_t^{n-k}(x)$ en posant $t = F_k^{-1}(x)$. Dérivons

$$\begin{aligned} D_x(F_n \circ F_k^{-1})(x) &= \partial_x f_t^{n-k}(x) + (F_k^{-1})'(x)\partial_t f_t^{n-k}(x) \\ &= \partial_x f_t^{n-k}(x)(1 + (F_k^{-1})'(x) r_{n-k}) \end{aligned}$$

Mais $|F_k'| \geq C\lambda^k$ et les fonctions $r_n, n \geq 0$ sont uniformément bornées par une constante M, donc,

$$|D_x(F_n \circ F_k^{-1})(x)| \geq C\lambda^{n-k}(1 - C\lambda^{-k} \cdot M)$$

On obtient bien (**) pour $k \geq [\log CM/\log\lambda] + 2$. Mais pour k borné par une constante c'est clair. (**) est donc démontré, la constante C' étant indépendante de $n \geq 0$.

(**) implique notamment que $|F_k(t_1)-F_k(t_2)| \le C'^{-1}\lambda^{-(n-k)}$ (en effet, $|F_n(t_1)-F_n(t_2)| \le 1$). Mais d'après (2), $C^{\pm 1}$ représentant un nombre $r \in (C^{-1}, C^1)$,

$$|F_n'(t_i)| = C^{\pm 1}|\partial_x f_{t_i}^n(e_{t_i})| = C^{\pm 1}\prod_{k=0}^{n-1}|\partial_x f_{t_i}(F_k(e(t_i)))|$$

donc, en notant C'' la constante définie par la condition f de classe $C^{1+\theta}$,

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{F_n'(t_1)}{F_n'(t_2)}\right| &\le 2\log C + \sum_{k=0}^{n-1}\Big|\log|\partial_x f_{t_1}(F_k(t_1))| - \log|\partial_x f_{t_1}(F_k(t_2))|\Big| \\ &\quad + \Big|\log|\partial_x f_{t_1}(F_k(t_2))| - \log|\partial_x f_{t_2}(F_k(t_2))|\Big| \\ &\le 2\log C + \sum_{k=0}^{n-1} C''(|F_k(t_1)-F_k(t_2)| + |t_1-t_2|)^\theta \\ &\le 2\log C + C''\cdot C'^{-1}\frac{2}{1-\lambda^{-\theta}}\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $K < \infty$ tel qu'annoncé. □

Fixons $\alpha > 0$. Il suffit de montrer que l'ensemble des $t \in T$ tels que

$$\inf_{0\le k} f_t^k(H_k(e)) > \alpha$$

est de mesure nulle et de prendre ensuite l'union (dénombrable) sur les $\alpha = 1/n$, $n \ge 1$.

Remarquons que $f_t^k(H_k(e)) \subset f([f_t^k(e(t)), d])$ si la discontinuité d et $f_t^k(B(e,\epsilon))$ (pour $\epsilon > 0$ suffisament petit) sont du même côté de $f_t^k(e)$. On appellera donc ce côté de $f_t^k(e)$ **côté interdit**.

Remarquons également que si $H_k(e)$ dépend de t, le côté de $f_t^n(e(t))$ est déterminé par le n-itinéraire $\Gamma_n(e)$ et est donc constant sur chaque intervalle de continuité de F_n.

(11.19) Définition. *On dira que $t \in T$ est n-***admissible** *($n \ge 1$) si, pour tout $0 \le k \le n$,*

$$(F_k(t), F_k(t) \pm \alpha) \cap C(f_t) = \emptyset$$

le signe $\pm$ étant choisi pour obtenir le côté interdit.

*On dira qu'un intervalle $U \subset T$ est n-***admissible** *($n \ge 1$) si les applications $F_k : t \mapsto f_t^k(e(t))$, $0 \le k \le n$, sont continues sur U et si chaque $t \in U$ est n-admissible.*

On va montrer la chose suivante:

> **Affirmation.** Il existe $\kappa < 1$ tel que, pour tout $n \ge 0$, si U est un intervalle n-admissible alors il existe $m > n$ tel que l'union des intervalles m-admissibles inclus dans U est de mesure de Lebesgue au plus $\kappa \cdot m(U)$.

Le théorème s'en déduira. Démontrons donc l'affirmation. Soit $U \subset T$ un intervalle n-admissible. Posons $\kappa = 1 - \alpha/K$.

Si U est $(n+p)$-admissible alors, d'après le lemme 11.17,

$$|F_{n+p}(U)| \geq C^{-1}\lambda^{n+p}|U|.$$

Mais $|F_{n+p}(U)| \leq 1$, il existe donc $p < \infty$ maximal tel que U est $(n+p)$-admissible. F_{n+p} est donc continue sur U alors que certains $t \in T$ ne sont pas $(n+p+1)$-admissibles: pour un certain $1 \leq i \leq N$, $F_{n+p}(t) \in (d_i(t), d_i(t) \pm \alpha)$ (côté interdit).

Pour plus de clarté on se restreint au cas où i est unique, le cas général étant similaire. Quitte à considérer $F_{n+p}(t) - d_i(t)$ au lieu de F_{n+p}, on peut supposer que $d_i(t) = d$, une constante: comme $F'_{n+p}(t) \geq C\lambda^{n+p} \to \infty$ alors que $d'_i(t)$ reste bornée, cela ne change presque pas les propriétés envisagées (dilatation, distorsion).

Les $t \in U$ qui ne sont pas $(n+p+1)$-admissibles sont donc ceux tels que $f_t^{n+p}(e) \in (d-\alpha, \alpha)$ (si le côté interdit est à droite de $f_t^n(e(t))$ sur U). Si

$$(*) \qquad |(d-\alpha, d) \cap F_{n+p}(U)| < \alpha |F_{n+p}(U)|$$

alors U contient un seul intervalle $(n+p+1)$-admissible et maximal et cet intervalle V vérifie, en utilisant le lemme 11.18:

$$|V| \geq \left(1 - K\frac{|F_{n+p}(U) \setminus (d-\alpha, d)|}{|F_{n+p}(U)|}\right)|U| \geq (1 - K\alpha)|U|$$

donc $|F_{n+p}(V)| \geq C\lambda^{n+p}(1-K\alpha)|U|$. Comme $\lambda^p(1-K\alpha) \geq \lambda^{1/2} > 1$ ($\alpha > 0$ étant petit et $p \geq 1$), on en déduit que, après r rencontres de ce type, l'intervalle admissible maximal est V_r et, avec des notations évidentes,

$$|F_{n+p_1+\cdots+p_r}(V_r)| \geq C\lambda^{n+p_1+\cdots+p_r}(1-K\alpha)^r \geq C\lambda^{n+\frac{r}{2}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

et donc (*) ne peut pas se reproduire indéfiniment: il existe $m > n$, un intervalle $W \subset U$ unique intervalle $(m-1)$-admissible et maximal inclus dans U tel que W n'est pas m-admissible et, avec les notations ci-dessus, $|(d-\alpha, d) \cap F_m(W)| \geq \alpha |F_m(W)|$. Donc d'après le lemme 11.18, la partie de W envoyée dans $(d-\alpha, d)$ —en particulier non m-admissible— est une proportion de W au moins $K^{-1}\alpha$ et

$$|U'| \leq |W| - |(F_m|W)^{-1}((d-\alpha, d))| \leq (1 - K^{-1}\alpha)|W| \leq (1 - K^{-1}\alpha)|U|.$$

□

4.3. Application à la famille $(T_\beta)_{\beta>1}$.

(11.20) Lemme. *Pour tout $\beta > 1$, l'application T_β est topologiquement mélangeante.*

Preuve. En effet, si un intervalle ne contient aucune discontinuité en son intérieur, sa longueur est multipliée par $\beta > 1$. On en deduit que si I est un intervalle non-réduit à un point, il existe $n(I)$ tel que $f^{n(I)}(I)$ contient un intervalle de la forme $(0, \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. Mais $f^k((0,\epsilon)) = (0,1)$ dès que $k > \frac{|\log \epsilon|}{\log \beta}$. □

Il s'agit maintenant de vérifier la condition (A2). On va utiliser pour cela la notion suivante:

(11.21) Définition. *Une famille d'applications monotones par morceaux est dite* **monotone** *si*

(1) *les morceaux sont croissants: pour $t \in T$ fixé, $x \mapsto f_i(t,x)$ est une fonction croissante.*
(2) *pour toute extrémité e, il existe un entier n tel que $f_t^n(e(t))$ est une fonction croissante de t.*

Mais, clairement, on a

(11.22) Lemme. *Toute famille croissante est non-dégénérée pour Lebesgue-presque toute valeur du paramètre.*

Le théorème principal s'applique donc bien aux transformations β qui fournissent donc le contre-exemple annoncé.

(11.23) Remarque. Du fait de la première condition de monotonie $f_t^n(H_{n+1}(e))$ est situé du même côté de $f_t^n(e)$ pour tout $n \geq 0$. Les extrémités droites s'envoient sur le point fixe répulsif 0 et satisfont toutes la condition (S2). Les extrémités gauches s'envoient toutes sur 1 et $f_t^n(e)$ est toujours l'extrémité droite de $\Gamma(e,n)$. Si l'extrémité gauche est un point critique alors $\Gamma(e,n) = (d_i+, f_t^n(e))$ et donc $f_t(\Gamma(e,n)) = (0, f_t^{n+1}(e))$. La condition (S2) s'écrit donc:

$$\inf_{n\geq 0}\{f_t^n(1-) > 0 : n \geq 0\} > 0$$

CINQUIÈME PARTIE

ERGODICITÉ INTRINSÈQUE SUR L'INTERVALLE

Cette cinquième partie met en œuvre les techniques précédemment développées pour étudier la représentation par des chaînes de Markov de deux classes d'applications de l'intervalle:

- les applications monotones par morceaux au chapitre 12.
- les applications suffisamment dérivables (et notamment C^∞) au chapitre 13.

Les représentations ainsi obtenues permettent de conclure quant au nombre des mesures maximales.

Ces deux chapitres sont *indépendants*. Le premier retrouve les résultats de F. Hofbauer puis les précise en utilisant explicitement la structure du diagramme de Hofbauer, détaillée précédemment (chapitre 9).

Le deuxième généralise les résultats de F. Hofbauer au cas d'applications ayant une infinité de morceaux mais supposées suffisamment dérivables. On utilise ici la décomposition spectrale de A.M. Blokh et les majorations d'entropies obtenues grâce à la théorie de Yomdin et ainsi que celles relatives aux mesures pistées.

CHAPITRE 12

CAS MONOTONE PAR MORCEAUX

Ce chapitre est consacré aux problèmes de la représentation markovienne et de l'ergodicité intrinsèque pour les applications *monotones par morceaux*. Rappelons que l'ensemble $C(f)$ des points critiques est l'ensemble des $x \in [0,1]$ n'admettant pas de voisinage dans $\mathbb{R}$ sur lequel f soit un homéomorphisme sur son image (9.1). f est monotone par morceaux si $[0,1] \setminus C(f)$ est l'union d'un nombre *fini* d'intervalles U_i de continuité et de monotonie pour f.

$P = \{U_1, \ldots, U_N\}$ est la partition naturelle, partition en intervalles de monotonie et de continuité. N est supposé minimal. $C(f)$ est une union finie d'intervalles (le plus souvent réduits à un point) sur chacun desquels f est constante.

On démontre notamment le résultat suivant:

(12.1) Théorème. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone par morceaux. Notons N le nombre d'intervalles de monotonie et de continuité de f. Si f est d'entropie $h_{\text{top}}(f) > 0$, alors le nombre n_{Max} de mesures maximales (mesures de probabilité invariantes, ergodiques, μ telles que $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)$) est d'une part non-nul, d'autre part majoré en fonction du nombre N d'intervalles de f:*

$$n_{\text{Max}} \leq 4N - 5.$$

Si on suppose de plus f continue alors:

$$n_{\text{Max}} \leq 3N - 4.$$

Enfin dans le cas unimodal, on a l'ergodicité intrinsèque: $n_{\text{Max}} = 1$.

Remarques. On ne fait pas d'hypothèse de transitivité topologique (on aurait alors l'unicité d'après le résultat de F. Hofbauer rappelé ci-dessous (12.7)).

f n'est pas supposée continue. L'entropie $h_{\text{top}}(f)$ ci-dessus est l'entropie topologique, définie par la formule de Bowen. Elle coïncide, comme dans le cas continu, avec la borne supérieure des entropies métriques (ou entropie absolue) sauf dans le cas où il n'y a aucune mesure de probabilité invariante.

C'est à cause de cette dernière possibilité que l'existence d'une mesure maximale est subordonnée, dans l'énoncé ci-dessus, à la condition $h_{\text{top}}(f) > 0$.

Ce théorème précise un résultat de F. Hofbauer [16] qui établissait, sous les mêmes hypothèses, que ce nombre n_{Max} de mesures maximales était fini et non-nul (F. Hofbauer avait aussi obtenu par la suite [18] l'ergodicité intrinsèque dans le cas unimodal). Les majorations obtenues sont de la forme conjecturée par S. Newhouse: $n_{\text{Max}} \leq N$. Cependant, on n'a pas réussi à démontrer cette conjecture ou à construire un contre-exemple. La méthode adoptée ici (analyse du diagramme de Hofbauer) nous semble d'ailleurs avoir atteint ses limites (cf. ci-dessous).

On déduit ce théorème d'une analyse semblable à celle de F. Hofbauer, complétée par une *minoration de l'entropie* des parties irréductibles et une évaluation de la taille du diagramme en terme de *nombre de branches* (cf. ci-dessous):

On commence (section 1) par ramener le problème au dénombrement des parties irréductibles d'entropie maximale dans le diagramme de Hofbauer $\tilde{P}$ de f puis (section 2) on étudie ce dernier problème dans le cadre abstrait des graphes dits quasi-linéaires à B branches, cadre calqué sur la structure des diagrammes de Hofbauer définis par des applications monotones par morceaux:

(12.2) Définition. *Un graphe G dénombrable (peut-être fini) est dit* **quasi-linéaire à B branches** *s'il est orienté et s'il existe une filtration, i.e. $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$ tels que $\bigcup_{n\geq 0} G_n = G$, vérifiant les cinq propriétés suivantes:*

(QL1) *$G_n \setminus G_{n-1}$ a au plus B éléments ($n \geq 0$, on pose $G_{-1} = \emptyset$).*

A désignant un élément de G_n ($n \geq 0$) et $\mathrm{succ}(A) = \{B \in G : A \to B\}$ l'ensemble de ses successeurs sur G alors:

(QL2) $\mathrm{succ}(A) \subset G_{n+1}$.

(QL3) $\mathrm{succ}(A) \setminus G_n$ *a au plus un élément.*

(QL4) $\mathrm{succ}(A) \setminus G_0$ *a au plus deux éléments.*

enfin,

(QL5) *soit $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_l$ un chemin sur G avec A_1, A_l des* **points de bifurcation** *de G, i.e. tels que $\mathrm{succ}(A_1)$ et $\mathrm{succ}(A_l)$ contiennent, chacun, plus d'un élément (i.e. au moins deux éléments!) de G, alors $\mathrm{succ}(A_l)$ comporte au moins un élément de niveau $< l$ (on appelle* **niveau** *de A dans G la quantité $\mathrm{niv}(A) = \min\{n \geq 0 : G_n \ni A\}$).*

En estimant l'entropie des parties irréductibles à la fois par la majoration de F. Hofbauer en fonction du niveau et par une minoration en fonction du cardinal (nouvelle dans ce contexte au moins, quoique triviale), on montre:

(12.3) Théorème. *Soit G un graphe quasi-linéaire à B branches. Soit $H > 0$. Alors le nombre de parties irréductibles d'entropie de Salama* exactement égale à *H est majoré, indépendamment de $H > 0$, par*

$$2B - 1,$$

alors que le nombre de parties irréductibles d'entropie supérieure ou égale à *H est majoré par*

$$\left(1 + \frac{h_S(G)}{H}\right) B - 1.$$

On est essentiellement intéressé par le cas $G = \tilde{P}$ et $H = h_{\mathrm{top}}(f)$.

Le diagramme de Hofbauer $\tilde{P}$ d'une application monotone par morceaux muni de sa filtration naturelle, $(\tilde{P}_n)_{n\geq 0}$, a une structure de graphe quasi-linéaire, en général à $2N$ branches. On obtient donc, par application directe du résultat précédent au diagramme $\tilde{P}$, la majoration $n_{\mathrm{Max}} \leq 4N - 1$. On obtient les majorations annoncées en réduisant d'abord le graphe $\tilde{P}$ (section 3): par l'élimination (facile) de parties toujours "triviales" (on a alors $B \leq 2(N-1)$) et, dans le cas continu, on a aussi

des identifications (plus délicates) (on a dans ce cas $B \leq \frac{3}{2}(N-1)$ et $B = 1$ dans le cas unimodal).

On conclut (section 4) par la preuve du théorème annoncé ci-dessus.

Remarques. On ne sait pas si la majoration abstraite ci-dessus est la meilleure possible. On sait toutefois que la majoration "naturelle" $n_{\mathrm{Max}} \leq B$ est fausse sous les hypothèses envisagées: on donne en appendice un contre-exemple.

Au contraire les majorations $B \leq 2(N-1)$ et $B \leq \frac{3}{2}(N-1)$ sont *optimales* sous ces hypothèses, bien qu'on puisse donner —on le fait ci-dessous, section 3— une hypothèse simple impliquant $B \leq N-1$.

Ces remarques expliquent pourquoi la conjecture de S. Newhouse paraît impossible à démontrer par cette approche. Il faudrait tout au moins mieux cerner les graphes quasi-linéaires correspondant à des diagrammes de Hofbauer d'applications monotones par morceaux. En dehors du cas unimodal pour lequel F. Hofbauer et G. Keller ont établi une condition en fonction de l'application Q [20], on n'a pas de condition exploitable en termes de propriétés du graphe.

Il nous semble que ceci illustre le défaut principal de cette technique d'extension markovienne introduite par F. Hofbauer: il est parfois difficile de revenir sur l'intervalle. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous ne sommes pas arrivés à construire un contre-exemple concret, mais seulement abstrait.

Il existe une autre approche, plus concrète. On voit ici (section 1) que le dénombrement des mesures maximales se réduit à celui des parties irréductibles d'entropie maximale. Mais sous l'hypothèse que f est continue, les parties irréductibles correspondent à des intervalles périodiques (intervalles de renormalisation). On peut ainsi traiter le cas unimodal. Peut-on étendre ce traitement au cas général (continu)?

1. Réduction du problème au dénombrement des parties irréductibles

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application monotone par morceaux.

Dans cette partie, on montre que le nombre n_{Max} de mesures maximales de $([0,1], f)$ est majoré par le nombre n_{PI} de parties irréductibles d'entropie de Salama maximale, égale à $h_{\mathrm{top}}(f)$, dans le diagramme de Hofbauer $\tilde{P}$ de f.

Rappelons que le diagramme $\tilde{P}$ n'étant pas, en général, fini, la chaîne de Markov topologique associée, $\tilde{\Sigma}(f, P)$, n'est pas, en général, compacte. Ceci nécessite certaines précautions techniques: on a vu (3.1) que l'entropie topologique classique –en terme de recouvrements ouverts minimaux– est alors infinie, tandis que l'entropie de Bowen dépend de la métrique choisie. Les mesures maximales sont toujours définies comme les mesures de probabilité invariantes et ergodiques dont l'entropie métrique est égale au supremum des entropies métriques, noté $h_{\mathrm{abs}}(\tilde{\Sigma}(f, P))$. On sait que ce supremum peut se calculer de façon combinatoire sous la forme de l'entropie de Gurevič, $h_G(\tilde{P})$, (3.3). On a vu, au chapitre 3, d'autres notions, combinatoires, d'entropie: l'entropie combinatoire (3.9) et l'entropie de Salama (3.8). Cette dernière se calculant à partir du nombre de chemins issus d'un point fixé, elle nous sera la plus accessible. Mais on a vu (9.11) (et c'est aussi un corollaire immédiat de la majoration de la proposition (12.3) ci-dessous) que l'entropie combinatoire à l'infini (3.14) d'un graphe quasi-linéaire est nulle. On en déduit, par le

théorème (3.15), que *toutes ces entropies combinatoires sont égales* entre elles, et donc égales à l'entropie absolue, entropie métrique des mesures maximales.

Montrons d'abord que le nombre de mesures maximales pour $\tilde{\Sigma}(f,P)$ est majoré par n_{PI}.

Admettons provisoirement que l'entropie de $\tilde{\Sigma}(f,P)$ est finie: $h_G(\tilde{P}) < \infty$. La théorie de Gurevič permet alors de majorer le nombre de mesures maximales de $\tilde{\Sigma}(f,P)$ par le nombre de parties irréductibles d'entropie de Gurevič maximale. Plus précisément, soit μ une mesure maximale pour $\tilde{\Sigma}(f,P)$. Par ergodicité, elle est concentrée sur une partie topologiquement transitive, donc sur une sous-chaîne $\Sigma(\tilde{Q})$ avec $\tilde{Q}$ une partie irréductible de $\tilde{P}$. μ est *a fortiori* une mesure maximale pour cette sous-chaîne. Donc $h_{\text{abs}}(\Sigma(\tilde{Q})) = h_{\text{abs}}(\tilde{\Sigma}(f,P))$. Or on a vu que les différentes entropies étaient égales sur $\tilde{P}$:

$$h_S(\tilde{Q}) = h_{\text{abs}}(\Sigma(\tilde{Q})) = h_{\text{abs}}(\tilde{\Sigma}(f,P)) = h_S(\tilde{P}).$$

$\tilde{Q}$ est donc une partie d'*entropie de Salama maximale.* Enfin on sait, grâce à la théorie de Gurevič (rappelée au chapitre 5) appliquée à la chaîne irréductible $\Sigma(\tilde{Q})$, qu'il ne peut y avoir d'autre mesure maximale sur $\Sigma(\tilde{Q})$.

Il suffit maintenant de mettre en bijection les mesures maximales de $([0,1],f)$ et celles de $\tilde{\Sigma}(f,P)$ et de montrer que les entropies absolues sont égales de part et d'autre. On va montrer un résultat un peu plus précis:

(12.4) Proposition. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application monotone par morceaux et d'entropie $h_{\text{top}}(f) > 0$.*

Il existe alors une bijection entre $\mathcal{M}_f^0([0,1])$ et $\mathcal{M}_\sigma^0(\tilde{\Sigma}(f,P))$ (les mesures de probabilité invariantes, ergodiques et d'entropie > 0) et cette bijection ne met en correspondance que des mesures d'entropie égale.

On aura, en particulier, $h_{\text{abs}}(\tilde{\Sigma}(f,P)) = h_{\text{abs}}(f) < \infty$ comme souhaité.

Cette correspondance découlera de la construction d'un isomorphisme du type suivant (cf. (0.6)):

(12.5) Définition. *On dit que ψ est un* **isomorphisme d'entropie critique** *h_* de (X,f) sur (Y,g) (deux systèmes dynamiques mesurables) si*

$$h_* < \min(h_{\text{abs}}(f), h_{\text{abs}}(g)),$$

et s'il existe $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ des parties mesurables invariantes telles que:

(1) *$\psi : (X',f) \to (Y',g)$ est un isomorphisme mesurable, i.e. $\psi : X' \to Y'$ est une bijection bi-mesurable et $\psi \circ f = g \circ \psi$ sur X'.*

(2) *$X \setminus X'$ est négligeable dans le sens suivant: pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_f^{h_*}(X)$, i.e. de probabilité, invariante, ergodique et d'entropie strictement supérieure à h_*, $\mu(X') = 1$.*

(3) *$Y \setminus Y'$ est négligeable dans le même sens.*

Il est clair qu'on a bien alors une correspondance du type souhaité entre les mesures maximales de (X,f) et celles de (Y,g).

On passe des mesures maximales de $([0,1],f)$ à celles de $\tilde{\Sigma}(f,P)$ par les étapes suivantes:

$$([0,1],f) \xrightarrow{\Gamma} \Sigma_+(f,P) \overset{E.N.}{\rightarrow} \Sigma(f,P) \xrightarrow{\rho} \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P) \overset{\pi_*^{-1}}{\rightarrow} \tilde{\Sigma}(f,P)$$

Γ, ρ et π_*^{-1} sont respectivement: le codage, la restriction et l'isomorphisme défini par le théorème d'isomorphisme (2.7) (cf. ci-dessous) alors que $E.N.$ représente le passage à l'extension naturelle. $\Sigma_0(f,P)$ est la partie non-markovienne (2.5) mise en jeu par ce théorème d'isomorphisme.

On va montrer (ou rappeler) que Γ, ρ et π_*^{-1} sont des isomorphismes d'entropie critique $h_* = 0$.

D'autre part, on sait que $\Sigma_+(f,P)$ admet, comme tout système dynamique, une extension naturelle. $\Sigma_+(f,P)$ étant une partie de $P^{\mathbb{N}}$, cette extension naaturelle est définie sous la forme particulièrement simple:

$$\Sigma(f,P) = \{A \in P^{\mathbb{Z}} : \forall n \in \mathbb{Z} \quad A_n A_{n+1} \cdots \in \Sigma_+(f,P)\}.$$

Si la projection $p : (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (A_n)_{n\geq 0}$ n'est pas un homéomorphisme, elle induit une bijection affine entre $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma(f,P))$ et $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(f,P))$ qui préserve l'entropie et l'ergodicité: pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma(f,P))$, on a: i) $h_{p_*\mu}(\sigma) = h_\mu(\sigma)$; ii) μ ergodique ssi $p_*\mu$ est ergodique.

Cette suite de liens entraîne donc bien le résultat annoncé.

Dynamique symbolique. Elle est définie par la partition naturelle: à tout point dont l'orbite ne passe pas par un point critique, on fait correspondre un unique itinéraire:

$$\begin{array}{rccll} \Gamma: & [0,1]\setminus C^-(f) & \longrightarrow & P^{\mathbb{N}} & \\ & x & \longmapsto & \Gamma(x) = (A_n)_{n\geq 0} & (f^n(x) \in A_n,\ n \geq 0) \end{array}$$

avec $C^-(f) = \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}C(f)$. On prend comme système dynamique symbolique associé le plus petit sous-shift (partie invariante, compacte) contenant ces itinéraires: $\Sigma_+(f,P) = \overline{\operatorname{Im}\Gamma}$.

Soit $A \in \Sigma_+(f,P)$. $\Gamma^{-1}(A)$ est soit vide, soit un point, soit un intervalle U ouvert et non-vide, plus précisément un homtervalle, c'est-à-dire tel que $f^k|U$ est un homéomorphisme sur son image pour tout $k \geq 0$, et c'est (à ses extrémités près) un homtervalle maximal. Mais les homtervalles maximaux forment une collection dénombrable et une minute de réflexion montre qu'ils ne sont chargés par une mesure invariante et ergodique que si celle-ci est concentrée sur une orbite périodique. Notons $H(f)$ l'union de ces intervalles U. Remarquons que $f^{-1}(H) \subset H \cup C(f)$. On a également montré que $\Gamma(H(f))$ est dénombrable.

$C^-(f)$ est dénombrable et on a vu (9.3) que, dès que f est une application de l'intervalle, alors $\Sigma_+(f,P) \setminus \operatorname{Im}\Gamma$ est aussi dénombrable.

Posons $A = [0,1]\setminus(C^-(f)\cup H(f))$ et $B = \operatorname{Im}\Gamma\setminus\Gamma(H(f)\setminus C^-(f))$. Les remarques précédentes montrent que $A = [0,1]$ et $B = \Sigma_+(f,P)$ modulo toute mesure de probabilité invariante et ergodique non-atomique. Or Γ induit un isomorphisme entre (A,f) et (B,σ). C'est donc un isomorphisme d'entropie critique $h_* = 0$.

Partie non-markovienne $\Sigma_0(f,P)$. La restriction ($\rho(x) = x$ si $x \notin \Sigma_0(f,P)$, autrement pas définie)

$$\rho : \Sigma(f,P) \to \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$$

est un isomorphisme d'entropie critique $h_* = 0$ ssi $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P)) = 0$. Mais $C(f)$ est un ensemble fini donc $h_B(f, f(C(f))) = 0$: la théorie du chapitre 6, théorème (6.2), implique que $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P)) = 0$ comme souhaité. Il existe toutefois, dans ce cas particulier, une preuve, due à S. Newhouse, plus courte et plus élégante. Nous allons donc l'exposer. Les deux propriétés particulières sur lesquelles repose cette preuve sont les suivantes:

Rappelons qu'un intervalle de pistage est un intervalle $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, tel que, en particulier –on le retrouvera ci-dessous– il existe $e \in E(f)$, extrémité commune de A_{a-1} et de $[A_{a-1} \dots A_b]$, vérifiant $f(e) \in [A_a A_{a+1} \dots A_b]$.

P1. Pour toute $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^{erg}(\Sigma(f,P))$, il existe une partie invariante $\Sigma_\infty \equiv \Sigma_0(f,P)$ modulo μ avec la propriété suivante. Pour tout $A \in \Sigma_\infty$, on peut sélectionner, de façon *déterministe* dans le sens précisé ci-dessous, un ensemble $\mathcal{S}_A$ d'intervalles de pistages de telle sorte que deux quelconques d'entre eux soient ou bien disjoints, ou bien emboîtés et que tout intervalle fini de $\mathbb{Z}_- = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq 0\}$ soit inclus dans un de ces intervalles sélectionnés (on écrira $\mathcal{S}_A \to \mathbb{Z}_-$).

On entend ici par *sélection déterministe* le fait que si $B \in \Sigma_\infty$ coïncide sur le passé avec A, i.e. si $B_p = A_p$ pour tout $p < 0$, alors l'ensemble des intersections avec $\mathbb{Z}_-^* = \{p \in \mathbb{Z} : p < 0\}$ des intervalles sélectionnés pour A:

$$\{[a,b] \cap \mathbb{Z}_-^* : [a,b] \in \mathcal{S}_A\}$$

coïncide avec l'ensemble analogue défini par B.

P2. $C(f)$ est fini et pas seulement d'entropie nulle.

Ceci permet de ne pas être gêné par l'absence (éventuelle) de régularité de $\mathcal{S}_A$: le plus petit intervalle de $\mathcal{S}_A$ contenant $[-n, 0]$ peut avoir une longueur arbitrairement grande devant n.

P2 est évidente, admettons provisoirement P1 pour montrer que ces deux propriétés entraînent $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P)) = 0$ comme annoncé.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^{erg}(\Sigma(f,P))$ telle que $\mu(\Sigma_0(f,P)) > 0$. Il s'agit de montrer que $h_\mu(\sigma) = 0$. Il est bien connu que $h_\mu(\sigma) = H_\mu(\mathcal{P} \mid \bigvee_{k=1}^\infty \sigma^k \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ étant la partition naturelle de $P^{\mathbb{Z}}$ en cylindres de longueur 1. Il s'agit donc de montrer que, pour μ-presque tout A, la connaissance de $(A_n)_{n<0}$ détermine A_0. On peut supposer $A \in \Sigma_\infty$, l'ensemble défini par P1.

Collectons en une suite strictement croissante $i \mapsto [-s_i, -1] = [-s_i, t_i] \cap \mathbb{Z}_-^*$, $i \geq 0$, l'intersection avec $\mathbb{Z}_-^*$ des intervalles de pistage $[a,b] \in \mathcal{S}_A$ contenant la position -1. (s'il y a plusieurs intervalles ayant la même extrémité gauche, on ne retient que le plus grand, ainsi t_i est bien défini, quoique peut-être infini). D'après P1 cette suite s_i est déterministe (ne dépend que de $(A_n)_{n<0}$).

La suite $i \mapsto t_i$ n'est pas déterministe en général, mais d'après la propriété d'emboîtement, elle est croissante, et comme $\mathcal{S}_A \to \mathbb{Z}_-$, $t_i \geq 0$ pour i grand.

D'autre part, $E(f)$ étant fini, il existe $M < \infty$ tel que la connaissance de (l'existence et de la valeur de) $\Gamma_M(f(e))$, i.e. des M premiers symboles de l'itinéraire de $f(e)$, suffit à entraîner l'existence et à connaître la valeur de $\Gamma_n(f(e))$ pour $n \geq M$.

Pour i grand, d'une part $s_i \geq M$ et donc $A_{-s_i} \dots A_{-1} = \Gamma_{s_i}(f(e))$ détermine $\Gamma_{s_i+t_i}(f(e))$ et d'autre part $t_i \geq 0$ donc A_0 en est le $s_i + 1$-ème symbole: A_0 est bien déterminé par $(A_n)_{n<0}$. Ceci démontre $h_\mu(\sigma) = 0$.

Il reste à prouver P1. Il est commode de se ramener, grâce au lemme suivant dû à F. Hofbauer au cas où f est *croissante* sur chacun de ses intervalles de monotonie (on dira croissante par morceaux):

(12.6) Lemme (F. Hofbauer [16, Part II]). *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone par morceaux. Il existe une application monotone par morceaux $g : [0,1] \to [0,1]$ croissante sur chacun de ses intervalles de monotonie telle que $h_{\text{abs}}(\Sigma_0(g,Q)) = h_{\text{abs}}(\Sigma_0(f,P))$ (Q étant la partition naturelle de g).*

Preuve. On définit $G : [0,1] \times \{-1,+1\}$ par $G(x,\epsilon) = (f(x), \epsilon(x)\epsilon)$ avec $\epsilon(x) = +1$ si f croissante au voisinage de x, $\epsilon(x) = -1$ sinon. On représente G par une application monotone par morceaux $g : [0,1] \to [0,1]$ en posant $Y(x,\epsilon) = x/2$ si $\epsilon = +1$, $Y(x,\epsilon) = 1 - x/2$ si $\epsilon = -1$ et $g \circ Y = Y \circ G$. Autrement dit si $x < 1/2$:

$$g(x) = \begin{cases} f(2x)/2 & \text{si } f \text{ croissante au voisinage de } 2x \\ 1 - f(2x)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et si $x > 1/2$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - f(2-2x)/2 & \text{si } f \text{ croissante au voisinage de } 2-2x \\ f(2-2x)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

A chaque intervalle de monotonie $A \in P$ de f, correspond deux intervalles de monotonie pour g: $A^+ = \frac{1}{2}A$ et $A^- = 1 - \frac{1}{2}A$: $Q = \{A^+, A^- : A \in P\}$. On vérifie que g est croissante sur chacun de ses intervalles de monotonie $B \in Q$. Il est clair que

$$\Sigma_0(g,Q) = \psi(\Sigma_0(f,P) \times \{-1,+1\})$$

avec $\psi((A_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \epsilon) = (B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si $B_n = A_n^{\epsilon \prod_k \epsilon(A_k)}$ où le produit s'effectue sur les $k = 0, 1, \dots, n-1$ si $n \geq 0$ et sur $k = -n, -n+1, \dots, -1$ si $n \leq -1$; et $\epsilon(A_k) = +1$ si f est croissante sur A_k, $\epsilon(A_k) = -1$ si f est décroissante.

Mais ceci implique immédiatement l'égalité des entropies absolues. □

Preuve de P1. Rappelons que $\Sigma_0(f,P) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \Sigma_1(f,P)$ avec

$$\begin{aligned}\Sigma_1(f,P) &= \{A \in \Sigma(f,P) : n \mapsto \text{fut}_X(A_{-n} \dots A_0) \text{ non-éventuellement stationnaire}\} \\ &= \{A \in \Sigma(f,P) : \\ &\qquad A \text{ admet des intervalles de pistages de la forme } [-s,0] \text{ avec } s \to \infty\}\end{aligned}$$

Posons $\Sigma_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \sigma^k \Sigma_1(f,P)$. Σ_∞ coïncide avec $\Sigma_0(f,P)$ modulo toute mesure invariante. C'est une conséquence facile du fait que $\sigma^{-1}(\Sigma_1(f,P)) \subset \Sigma_1(f,P)$. Prenons donc $A \in \Sigma_\infty$.

Soit $[a,b]$ un intervalle de pistage: $\mathrm{fut}_X(A_{a-1}\dots A_b) \subsetneq \mathrm{fut}_X(A_a\dots A_b)$ donc $f[A_{a-1}\dots A_b] \subsetneq [A_a\dots A_b]$, mais $f[A_{a-1}\dots A_b] = f(A_{a-1}) \cap [A_a\dots A_b]$, l'intersection de deux intervalles:

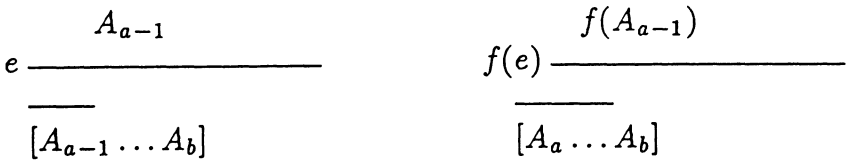

FIGURE 12.1.

Donc $f[A_{a-1}\dots A_b]$ est un intervalle dont au moins l'une des extrémités est de la forme $f(e)$ avec $e \in \partial A_{a-1}$ et appartient à l'ouvert $[A_a\dots A_b]$. En particulier, on a montré

> il existe $e \in \partial A_{a-1}$ tel que $f(e)$ admet un itinéraire de longueur $n+1$ coïncidant avec $A_a\dots A_b$ et $e \in \partial[A_{a-1}\dots A_b]$.

On dit que e comme ci-dessus est **admis comme extrémité associée** par l'intervalle de pistage $[a,b]$.

On dit que $[a,b]$ est un **intervalle de g-pistage**, s'il admet comme extrémité associée l'extrémité gauche de A_{a-1}. Remarquons que, f étant supposée croissante sur chacun des A_i, on en déduit le fait suivant (qui était le but recherché par la réduction au cas croissant par morceaux): si $[a,b]$ et $[a',b]$ sont deux intervalles de g-pistage d'extrémités associées e et e' et si on pose $H = \bigcap_{n\geq 0} \overline{f^n([A_{b-n}\dots A_{b+n}])}$, alors $f^{b-a+1}(e)$ et $f^{b-a'+1}(e')$ sont *du même côté de* $H \subset A_b$, le côté gauche.

On définit de même le d-pistage (extrémité droite). Posons $\mathcal{S}_A^g$ (resp. $\mathcal{S}_A^d$) l'ensemble des $[a,b]$, intervalles de g-pistage (resp. d-pistage).

Par définition de Σ_1,

$$\mathcal{S}_A^g \to \mathbb{Z}_- \text{ ou } \mathcal{S}_A^d \to \mathbb{Z}_-.$$

Par ailleurs, on a la propriété d'invariance suivante:

$$\mathcal{S}^c_{\sigma(A)} = \mathcal{S}^c_A - 1$$

(notation $\mathcal{S}-1$ évidente) avec $c \in \{g,d\}$.

On en déduit que si $\mathcal{S}^g_{\sigma^k(A)} \to \mathbb{Z}_-$ pour un $k \geq 0$, *a fortiori* pour une infinité de $k \geq 0$, alors $\mathcal{S}^g_A \to \mathbb{Z}_-$; sinon $\mathcal{S}^d_A \to \mathbb{Z}_-$. Dans le premier cas, on pose $c(A) = g$, dans le deuxième $c(A) = d$. Remarquons que $c(\cdot)$ est σ-invariante. Par ergodicité de μ, on peut la supposer constante et égale à c sur Σ_∞.

Posons $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}^c_A$. c étant constant, l'ensemble $\mathcal{S}_A$ est clairement déterministe et vérifie la propriété d'invariance $\mathcal{S}_{\sigma(A)} = \mathcal{S}_A - 1$.

Montrons que deux intervalles, $[a,b]$ et $[a',b']$, de $\mathcal{S}_A$ sont soit disjoints, soit emboîtés. Supposons une intersection, p. ex. $a \leq a' \leq b$. Notons e, e', les extrémités (inférieures si $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A^g$) associées à $[a,b]$, $[a',b']$, et H' l'homtervalle $\bigcap_{n\geq 0} \overline{f^n[A_{a'-1-n}\dots A_{a'+n}]}$. $b > a'-1$ donc $f^{a'-a}(e)$ est plus près de H' que e':

sinon $f^{a'-a}(e)$ ne serait pas dans A_{a-1}:

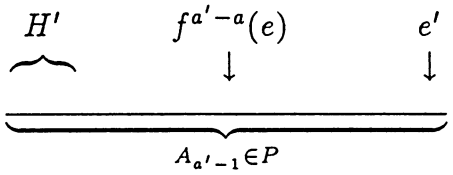

FIGURE 12.2.

Mais ceci implique que l'itinéraire de $f^{a'-a}(e)$ coïncide avec l'"itinéraire" de H' (i.e. $A_{a'-1}A_{a'}\dots$) plus longtemps que ne le fait celui de e': $b \geq b'$ et on a bien l'emboîtement annoncé.

P1 est démontrée. □

Conclusion. Le théorème d'isomorphisme (2.7) énonce justement que

$$\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma}(f,P) \to \Sigma(f,P) \setminus \Sigma_0(f,P)$$

est un isomorphisme mesurable. On a donc vérifié tous les liens annoncés: la proposition (12.4) est démontrée et on a bien $n_{\text{Max}} \leq n_{PI}$.

Si $([0,1],f)$ est topologiquement transitif alors, d'après le théorème de décomposition spectrale de F. Hofbauer (10.6), il existe une unique partie irréductible d'entropie non-nulle nécessairement maximale (l'entropie de f étant supposée non-nulle), autrement dit $n_{PI} = 1$. On retrouve donc:

(12.7) Théorème (F. Hofbauer [16]). *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application monotone par morceaux d'entropie $h_{\text{top}}(f) > 0$.*

Si f est topologiquement transitive alors f est intrinsèquement ergodique.

2. Majoration du nombre de parties irréductibles

Dans cette partie on étudie le nombre de parties irréductibles de grande entropie dans un graphe quasi-linéaire à B branches. De façon précise on démontre:

(12.8) Théorème. *Soit G un graphe quasi-linéaire à B branches. Soit $H > 0$.*

Alors le nombre de parties irréductibles I d'entropie de Salama fixée $h_S(I) = H > 0$ est majoré par:

$$2B - 1.$$

Le nombre de parties irréductibles d'entropie au moins H est majoré par:

$$\left(1 + \frac{h_S(G)}{H}\right) B - 1.$$

Ce résultat repose sur l'encadrement suivant de l'entropie d'une partie irréductible. On appelle **borne inférieure** d'une partie $I \subset G$ la quantité:

$$\inf I = \min\{\text{niv}(S) : S \in I\}.$$

On a alors (la majoration, due à F. Hofbauer, est contenue dans la preuve du lemme 13 de [16], la minoration, quoique triviale, semble nouvelle):

(12.9) Proposition. *Soit G un graphe quasi-linéaire à B branches et $I \subset G$ une partie irréductible.*

Si I est réduite à une boucle alors $h_S(I) = 0$. Sinon, on a l'encadrement:

$$\frac{\log 2}{\operatorname{card} I} < h_S(I) \leq \frac{\log 2}{\inf I}$$

Admettons-la pour l'instant.

Preuve du théorème. Posons $L = E\left(\frac{\log 2}{H}\right)$ (la partie entière). La majoration ci-dessus entraîne que toute partie irréductible I ayant une entropie au moins H vérifie $\inf I \leq L$ donc rencontre la partie finie G_L (ce qui fournit d'ailleurs une majoration, grossière, de n_{PI} par $L \cdot B$ d'après la disjonction des parties irréductibles). Pour utiliser la minoration du cardinal résultant de la proposition ci-dessus, on répartit les parties irréductibles en question en deux catégories: celles incluses dans G_{L-1}, partie finie de G de cardinal au plus $B \cdot L$, d'après (QL1), et les autres.

La minoration ci-dessus permettra de majorer le nombre de parties irréductibles de la première catégorie. On verra que la structure quasi-linéaire du graphe, plus précisément la propriété (QL2), implique que chacune des parties irréductibles de la deuxième catégorie rencontre $G_{L+1} \setminus G_L$. Leur nombre est donc majoré par $\operatorname{card}(G_{L+1} \setminus G_L) \leq B$, encore d'après (QL1).

Développons ceci.

Parties irréductibles $\subset G_{L-1}$. Considérons d'abord les parties irréductibles $I \subset G$ telles que:

$$h_S(I) = H \quad \text{et} \quad I \subset G_{L-1}.$$

D'après la minoration de la proposition (12.9), on a $\operatorname{card} I > \frac{\log 2}{h_S(I)} = \frac{\log 2}{H} \geq L$. Mais $\operatorname{card}(G_{L-1}) \leq B \cdot L$. Donc le nombre de ces parties irréductibles d'entropie fixée vérifie:

$$n_1(h = H) < B$$

Si l'on demande seulement que l'entropie soit $h \geq H$, le cardinal de ces parties irréductibles est simplement (strictement) minoré par $\frac{\log 2}{h_S(G)}$, d'où:

$$n_1(h \geq H) < B \cdot \frac{h_S(G)}{H}.$$

Parties irréductibles $\not\subset G_{L-1}$. Considérons maintenant les parties irréductibles $I \subset G$ telles que:

$$h_S(I) \geq H \quad \text{et} \quad I \not\subset G_{L-1}.$$

D'après la majoration de la proposition (12.9), on a $\inf I \leq \frac{\log 2}{h_S(I)} = \frac{\log 2}{H}$ donc $\inf I \leq L$ et I contient au moins un élément de niveau au plus L. Montrons que I contient un élément de niveau exactement L. On va l'obtenir en voyant que (QL2) implique que l'image par l'application niveau $S \mapsto \operatorname{niv}(S)$ d'une partie irréductible est un intervalle d'entiers.

Dans le cas contraire, I contient des éléments de niveau aussi bien $> L$ que $< L$ mais pas d'élément de niveau L. Soit γ un chemin sur I tel que $\operatorname{niv}(\gamma_0) < L$ et

$\mathrm{niv}(\gamma_n) > L$ pour un certain $n \geq 0$ qu'on peut supposer minimal. Mais $n \geq 1$ et donc, d'après (QL2) $L+1 \leq \mathrm{niv}(\gamma_n) \leq \mathrm{niv}(\gamma_{n-1})+1$: $\mathrm{niv}(\gamma_{n-1}) \geq L$. Or ce niveau ne peut être ni L (par hypothèse), ni $> L$ (n est minimal). La contradiction prouve l'existence d'un élément de I de niveau L, i.e. un élément de $G_L \setminus G_{L-1}$.

Des parties irréductibles étant soit disjointes, soit confondues, le nombre des parties irréductibles de la deuxième catégorie est donc:

$$n_2(h = H) \leq n_2(h \geq H) \leq \operatorname{card} G_L \setminus G_{L-1} \leq B.$$

La condition $h = H$ ne permet pas de renforcer cette majoration.

On obtient les majorations en sommant $n_1 + n_2$ dans chacun des deux cas ($h = H$, $h \geq H$). □

Preuve de la proposition.

Majoration. Si $\inf I = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\inf I \geq 1$. La majoration résulte alors de:

(1) sur le sous-graphe $G \setminus G_0 \supset I$ tout élément a au plus deux successeurs, d'après (QL3).

(2) deux points de bifurcations de I (i.e. dont l'ensemble des successeurs *dans* I contient au moins deux –donc deux– éléments) ne peuvent pas être joints par un chemin de longueur inférieure à $\inf I$, d'après (QL5).

En effet si $h_S(I) > \frac{\log 2}{\inf I}$ alors il existe un chemin sur I de longueur $n \geq 1$, $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k < n}$ admettant trois prolongement distincts, α, β, γ, de longueur $n + \inf I$. (1) ci-dessus implique que ces chemins se séparent deux à deux: il existe p, q avec $n \leq p < q < n + \inf I$ tels que

$$p = \min\{k \geq 0 : \alpha_k = \beta_k \neq \gamma_k\}$$
$$q = \min\{k \geq 0 : \alpha_k \neq \beta_k\}$$

(quitte à permuter α, β, γ).

α_{p-1} et α_{q-1} sont des points de bifurcations donc, d'après (QL5),

$$\min(\mathrm{niv}(\alpha_q), \mathrm{niv}(\beta_q)) \leq q - p < \inf I$$

contredisant $\alpha_q, \beta_q \in I$. La majoration est démontrée.

Minoration. Elle est valable pour n'importe quel graphe I, non nécessairement inclus dans un graphe quasi-linéaire. Elle résulte de ce que si I n'est pas simplement une boucle alors I contient un point S de bifurcation *dans* I: $S \to T_0$, $S \to T_0'$ avec $T_0 \neq T_0'$ et $T_0, T_0' \in I$ donc I contient une fourche:

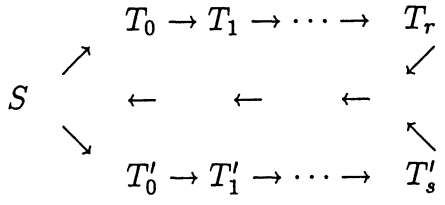

FIGURE 12.3

dont les temps de retours à S de chacun des deux côtés sont bornés par $\operatorname{card} I$, sans pouvoir être égaux tous les deux à cette borne:

Soit $T_0 \dots T_r$ un chemin sur I de longueur minimale joignant T_0 à $T_r = S$. On définit de même $T'_0 \dots T'_s$. Si l'un des chemins, par exemple $T_0 \dots T_r$, est de longueur $\operatorname{card} I$ (i.e. $r = \operatorname{card} I - 1$), alors T'_0, étant élément de I et distinct de T_0, est égal à l'un des T_i avec $i = 1, \dots, r$. Par minimalité de r, $s \leq r - i < \operatorname{card} I - 1$.

L'entropie de la fourche $\{S, T_0, \dots, T_{r-1}, T'_0, \dots, T'_{s-1}\} \subset I$ est le logarithme de la plus grande valeur propre de

$$\begin{array}{c} \overbrace{}^{1}\ \overbrace{}^{r}\ \overbrace{}^{s} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots1 & 0\cdots1 \\ 1 & 00\cdots & \\ 0 & 10\cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 00\cdots \\ 0 & & 10\cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette entropie est donc le logarithme de $X(r,s)$ l'unique racine positive de

$$X^{r+s+1} - X^r - X^s = 0$$

On calcule $\frac{\partial X}{\partial r} = -\frac{\log X (X^{r+s+1} - X^r)}{(r+s+1)X^{r+s} - rX^{r-1}}$. Comme $X > 1$ (l'entropie est clairement > 0), $\frac{\partial X}{\partial r} > 0$. De même pour l'autre dérivée partielle. Comme $r \leq \operatorname{card} I - 1$ et $s < \operatorname{card} I - 1$ (en supposant $s \leq r$), on en déduit:

$$X(r,s) \geq X(\operatorname{card} I - 1, s) > X(\operatorname{card} I - 1, \operatorname{card} I - 1) = 2^{1/\operatorname{card} I}.$$

D'où la minoration annoncée. □

3. Quasi-linéarité du diagramme de Hofbauer

Dans cette partie on commence par montrer la quasi-linéarité des graphes envisagés dans ce chapitre. Cette quasi-linéarité est héritée de celle du graphe formel $S \subset E \times \mathbb{N}$ (9.10) dont ces graphes sont des images par des projections **localement surjectives** (cf. (LS), proposition ci-dessous).

Remarque. Par souci de clarté, on écrira $E \times \mathbb{N}$, $E' \times \mathbb{N}$ au lieu de S, $S \cap (E' \times \mathbb{N})$.

On remarquera tout de suite que ceci s'applique à la projection $E \times \mathbb{N} \to \tilde{P}$ entraînant immédiatement la majoration "brute" $n_{\mathrm{Max}} \leq 4N - 1$. Puis on procèdera à des raffinements pour obtenir les majorations annoncées et, notamment, essayer de tenir compte de la continuité éventuelle de f.

(12.10) Lemme. *Le graphe formel $E \times \mathbb{N}$ muni de sa filtration naturelle $E_n = E \times \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, est un graphe quasi-linéaire à* card E *branches.*

Preuve. On vérifie facilement que:

(1) $E \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 0} E_n$.

(2) $G_n \setminus G_{n-1} = E \times \{n\}$ a card E éléments.

Comme $\mathrm{succ}(e,n) = \{(e, n+1)\}$ si $n+1 \notin \{K(e,r) : r \geq 0\}$ et, si n+1=K(e,r), $\mathrm{succ}(e,n) = \{(e,n+1), (f, K(f,s))\} \cup S$ avec $S \subset E_0$ et $K(f,s) = K(e,r) - K(e,r-1)$, on voit donc que

(3) $\mathrm{succ}(e,n) \subset E_{n+1}$.

(4) $\mathrm{succ}(e,n) \setminus E_n = \{(e,n+1)\}$ a un élément.

(5) $\mathrm{succ}(e,n) \setminus E_0 = \{(e,n+1)\}$ ou $\{(e,n+1), (f,K(f,s))\}$, a au plus deux éléments.

(6) si $A_1 \to \cdots \to A_l$ et si A_l est un point de bifurcation alors $A_l = (e, K(e,r)-1)$ et A_l admet comme successeur $(f, K(f,s))$ (avec les notations ci-dessus), de niveau $K(e,r) - K(e,r-1)$. De plus, sur le graphe formel il n'existe qu'un seul chemin inverse issu de A_l de longueur $K(e,r) - K(e,r-1)$: jusqu'à ce qu'on atteigne $(e, K(e,r-1))$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & & & & & \\ \to & K(e,r-1) & \to & K(e,r-1)+1 & \to & \cdots & \to & K(e,r)-1 & \to \cdots \\ & & \uparrow & & & & & & \end{array}$$

FIGURE 12.4

car sur le graphe formel seul un (e,m) de la forme $(e, K(e,s))$ peut être l'aboutissement de plus d'une flèche. Mais ci-dessus il n'y a qu'un seul point de bifurcation c'est $(e, K(e,r) - 1)$. A_1 étant supposé un point de bifurcation, il ne peut se trouver sur la portion de chemin représentée ci-dessus: on a donc $l > K(e,r) - K(e,r-1)$.

Mais $(e, K(e,r) - 1)$ a un successeur de niveau $K(e,r) - K(e,r-1) < l$.

□

(12.11) Proposition. *Soit G un graphe obtenu comme l'image d'un graphe F, quasi-linéaire à B branches, par une application $\pi : F \to G$, dans le sens où: G est, comme ensemble, l'image $\pi(F)$ de F, et est, comme graphe, muni des flèches:*

$$s \to t \iff \exists S \in \pi^{-1}(s)\ \exists T \in \pi^{-1}(t) \quad t.q.\ S \xrightarrow{F} T.$$

Supposons que $\pi : F \to G$ soit **localement surjective***:*

$$\text{(LS)} \qquad \pi(\mathrm{succ}(S)) = \mathrm{succ}(\pi(S)) \text{ pour tout } S.$$

Alors le graphe G est, comme le graphe F, quasi-linéaire à B branches et, si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une filtration de F, alors $(\pi(F_n))_{n \geq 0}$ est une filtration de G.

Preuve. Prenons comme filtration $G_n = \pi(F_n)$. Le niveau d'un élément T de G vérifie alors:

$$\mathrm{niv}_G(T) = \min_{S \in \pi^{-1}(T)} \mathrm{niv}(S)$$

et on en déduit:

(1) $\bigcup_{n\geq 0} G_n = G$.

(2) en associant à chaque élément T de $G_n \setminus G_{n-1} = \mathrm{niv}_G^{-1}(n)$ un élément de F de même niveau pris dans $\pi^{-1}(T)$ on voit que $G_n \setminus G_{n-1}$ est de cardinal au plus celui de $\pi(F_n \setminus F_{n-1})$, qui est lui-même majoré par B.

Soit $T \in G$ tel que $\mathrm{niv}_G(T) = n$. Prenons $S \in \pi^{-1}(T)$ ayant même niveau n:

(3) d'après (LS), $\mathrm{succ}(T) = \pi(\mathrm{succ}(S)) \subset \pi(F_{n+1}) = G_{n+1}$,

(4) comme $\mathrm{niv}_G \circ \pi \leq \mathrm{niv}$, $\mathrm{succ}(T) \setminus G_n$, resp. $\mathrm{succ}(T) \setminus G_0$, a au plus un, resp. deux, élément.

(5) soit $T_1 \to \cdots \to T_l$ un chemin sur G. D'après (LS), il admet un relèvement, i.e. un chemin $S_1 \to \cdots \to S_l$ sur F tel que $\pi(S_i) = T_i$ et, en utilisant (LS) encore une fois, S_1 et S_L sont des points de bifurcation. Donc S_l admet un successeur de niveau $< l$: c'est *a fortiori* le cas de T_l.

□

Arrivé à ce point, arrêtons-nous le temps de remarquer que les résultats obtenus jusqu'ici, appliqués à $\tilde{P} = \tilde{A}(E \times \mathbb{N})$, suffisent à établir que $B \leq 2N$, pour toute application monotone par morceaux. Donc, si l'application est d'entropie non-nulle, on a: $n_{PI} \leq 4N - 1$, d'où la majoration "brute" annoncée:

$$n_{\mathrm{Max}} \leq 4N - 1.$$

4 Réduction du nombre de branches

Ce qui suit est essentiellement technique, destiné à améliorer (marginalement) la majoration par $4N - 1$, en procédant à des éliminations et des identifications dans le graphe $\tilde{P}$.

Elimination des branches triviales. Dans cette partie on montre qu'au lieu de prendre l'image, $\tilde{P} = \tilde{A}(E \times \mathbb{N})$, de tout le graphe formel, on peut, sans perdre de parties irréductibles d'entropie non-nulle, se restreindre à $E' \times \mathbb{N}$ avec $E' = E \setminus \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$: on omet les extrémités correspondant aux points de $\{0,1\} = \partial[0,1]$. On obtiendra ainsi un graphe à $2(N-1)$ branches.

Il est commode de "normaliser" f au sens suivant:

(12.12) Lemme. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone par morceaux d'entropie $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$.*

Sans augmenter le nombre d'intervalles de monotonie et de continuité, ni modifier les mesures invariantes, ergodiques, d'entropie non-nulle, on peut supposer que

(1) $f^{-1}(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

(2) *aucun des deux intervalles $f([0,c_1))$ et $f((c_{N-1},1])$ n'est inclus dans un intervalle de monotonie et de continuité de f.*

c_1, c_{N-1} sont respectivement le premier et le dernier point critique de f sur $(0,1)$.

Preuve du lemme. Supposons, par exemple, f croissante sur $[0,c_1)$. Si $f(c_1-) \leq c_1$, les points de $[0,c_1)$ tendent vers un point fixe. On peut donc considérer $g : [c_1,1] \to [c_1,1]$ définie par $g(x) = \max(f(x), c_1)$: on ne perd que des mesures invariantes concentrées sur des points fixes et g a un intervalle de monotonie de

moins que f: $[0, c_1)$ est supprimé, les autres sont peut-être diminués ou supprimés mais ne sont pas coupés par les intervalles où $f(x) \leq c_1$. En itérant au besoin cette réduction ($h_{\text{top}}(f) > 0$ donc il doit rester quelque chose), on peut donc supposer que $f(c_1-) > c_1$ dans ce cas. Plus généralement, on peut supposer la condition (2) ci-dessus remplie.

On peut clairement prolonger f à $[a, b]$ avec $a < 0 < 1 < b$ de sorte que $f(\{a, b\}) \subset \{a, b\}$, f soit strictement monotone sur $[a, c_1]$ et sur $[c_{N-1}, b]$ (où c_1 et c_{N-1} sont le premier et le dernier point critique de f sur $(0, 1)$). Clairement $f^{-1}\{a, b\} = \{a, b\}$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_f([a, b])$ ergodique. Ou bien $\mu([0, 1]) = 1$ et alors $\mu \in \mathcal{M}_f([0, 1])$; ou bien $\mu([0, 1]) = 0$ et, p. ex., $\mu([a, 0]) > 0$. Soit $x \in [a, 0]$ un point μ-générique. Pour tout $n \geq 0$, $f^n(x) \in [a, 0] \cup [1, b]$. Si $f^2(a) = b$ c'est que $f(a) = b$ et $f(b) = b$ donc $f([0, b]) \subset [0, b]$ donc $f^n(x) \in [1, b]$ pour $n \geq 1$, ce qui est exclu. Donc $f^2(a) = a$ et $f^{2n}(x) \in [a, 0]$ pour tout $n \geq 0$: $x \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-2n}([a, 0])$ qui est soit $\{a\}$, soit un homtervalle. Dans les deux cas $f^{2n}(x)$ tend vers un point fixe de f^2 et μ est portée par une orbite périodique: l'entropie de μ est nulle.

La condition (2) est *a fortiori* vérifiée pour le prolongement de f. □

On suppose dans toute cette partie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ normalisée au sens du lemme précédent.

Montrons que l'union $\tilde{P}'$ des parties irréductibles d'entropie non-nulle est incluse dans:

$$\tilde{A}(E' \times \mathbb{N}) \setminus \{\tilde{A}(\tilde{0}, 0), \tilde{A}(\tilde{1}, 0)\}.$$

Considérons le cas de l'extrémité $\tilde{0}$ associée à 0 et supposons $f(0) = 0$, les autres cas étant similaires. On a donc $f(c_1) > c_1$. On en déduit que $\tilde{A}(\tilde{0}, 0)$ admet pour successeurs: $\tilde{A}(\tilde{0}, 1) = \tilde{A}(\tilde{0}, 0)$ et $\tilde{A}(c_1-, 1)$. Enfin $\tilde{A}(\tilde{0}, n) = \tilde{A}(\tilde{0}, 0)$ pour $n \geq 0$. Mais le futur correspondant à $\tilde{A}(c_1-, 1)$ est un intervalle I tel que $\bar{I} \cap \{0, 1\} = \emptyset$ et donc $f^n(I) \not\supset (0, c_1)$: on ne peut pas revenir, sur le graphe $\tilde{P}$, de $\tilde{A}(c_1-, 1)$ à $\tilde{A}(\tilde{0}, 0)$: $\{\tilde{A}(\tilde{0}, n) : n \geq 0\}$ est donc la boucle $\{\tilde{A}(\tilde{0}, 0)\}$ et est une partie de $\tilde{P}$ maximale pour la forte connexité, donc une partie irréductible d'entropie nulle.

Le cas $f(0) = 1$ et la branche associée à $\tilde{1}$ se traitent d'une façon toute semblable. On obtient l'inclusion annoncée. On en déduit que pour toute application monotone par morceaux on peut se ramener à un graphe quasi-linéaire à B branches avec:

$$B \leq 2(N - 1).$$

Identifications dans le cas continu. Soit un point critique intérieur $c \in (0, 1)$. Supposons f continue en c (donc un extremum local). Notons $d < c < g$ les points critiques précédant et suivant immédiatement c. On a:

$$f([d, c]) = [f(d), f(c)] \text{ et } f([c, g]) = [f(g), f(c)]$$

en notant $[f(d), f(c)]$ les points strictement compris entre $f(c)$ et $f(d)$ quel que soit l'ordre de ces deux points. Ces deux intervalles sont du même côté d'une extrémité commune $f(c)$: l'un est donc inclus dans l'autre. Par exemple, $[f(d), f(c)] \subset [f(g), f(c)]$. Examinons ce que cela implique en matière de futurs pour les mots

finis correspondants (rappelons que ces intervalles sont aussi des éléments de P, i.e. des symboles).

Si ces deux intervalles sont coupés par un point critique e (en général cela peut ne pas arriver tout de suite, il faut attendre le temps $n = K(c-, 0)$, cf. ci-dessous), on a alors:

$$\mathrm{fut}_X([d,c] * P(f(c))) = \mathrm{fut}_X([c,g] * P(f(c))) = [e, f(c)]$$

avec $P(f(c))$ l'élément de P rencontrant $f(B(c,\epsilon))$ pour tout $\epsilon > 0$ et $*$ la concaténation.

Mais

$$\mathrm{fut}_X(P(f(c)) = P(f(c)) = (e,g),$$

l'élément de P contenant $[e, f(c)]$, et n'a aucune raison d'être égal à $[e, f(c)]$. Les deux mots finis $[d,c] * P(f(c))$ et $[c,g] * P(f(c))$ ne sont donc *pas identifiés* par $\tilde{=}$. C'est un exemple des identifications dues à la structure unidimensionnelle qui sont ignorées par le formalisme général.

Pour tirer profit de ces identifications, on va projeter $\tilde{P}$ a son tour sur le graphe $\hat{P}$ constitué par les futurs. On vérifiera ensuite que ce graphe $\hat{P}$ est encore un graphe quasi-linéaire, que ses parties irréductibles d'entropie non-nulle sont en bijection avec celles de $\tilde{P}$ et ont même entropie et qu'enfin quand f est continue sur $[0,1]$, $\hat{P}$ a au plus $\frac{3}{2}(N-1)$ branches (et non plus $2(N-1)$).

Remarque. On verra que la correspondance entre les mesures invariantes de l'extension markovienne spéciale $\tilde{\Sigma}(f,P) = \Sigma(\tilde{P})$ et celles de la chaîne de Markov $\hat{\Sigma}(f,P) = \Sigma(\hat{P})$, qui n'est autre que l'*extension markovienne de Hofbauer*, résulte du théorème de relèvement de Keller. En dernier ressort, le passage à l'extension markovienne de Hofbauer est rendu possible par la propriété d'*injectivité éventuelle* (2.3).

On pose, pour $\tilde{A} \in \tilde{P}$,

$$\pi(\tilde{A}) = \mathrm{fut}_X(\tilde{A}).$$

On définit $\hat{P}'$ comme le graphe image de $\tilde{P}' = \tilde{A}(E' \times \mathbb{N})$ par π:

$$\hat{P}' = \pi(\tilde{P}') \text{ et } s \xrightarrow{\hat{P}'} t \iff \exists S \in \pi^{-1}(s)\ \exists T \in \pi^{-1}(t) S \xrightarrow{\tilde{P}'} T$$

Montrons que $\hat{P}'$ est quasi-linéaire. Il suffit de vérifier la propriété (LS). Dans $\tilde{P}'$, les successeurs de $\tilde{A} = \mathrm{cl}^{\sim}(A_{-n} \dots A_0)$ sont exactement les $\mathrm{cl}^{\sim}(A_{-n} \dots A_0 Z)$ où $Z \in P$ est tel que $[A_{-n} \dots A_0 Z] \not\subset C^-(f)$, l'ensemble des points dont l'orbite finit par "tomber" dans $C(f)$. Ceci donne que l'image par π des successeurs de $\tilde{A}$ sont les $\mathrm{fut}_X(A_{-n} \dots A_0 Z) = f(\mathrm{fut}_X(\tilde{A})) \cap Z$ avec $Z \in P$ tel que cette intersection ne soit pas incluse dans $C^-(f)$. Si $\tilde{B} \in \tilde{P}'$ se projette sur le même élément de $\hat{P}'$, i.e. si $\mathrm{fut}_X(\tilde{B}) = \mathrm{fut}_X(\tilde{A})$, alors $\tilde{B}$ définit les mêmes successeurs pour cet élément: on a bien la propriété (LS) et donc, d'après la proposition (12.11), $\hat{P}'$ est quasi-linéaire à B branches.

Notons pour la suite que $\pi : \mathrm{succ}(\tilde{A}) \to \mathrm{succ}(\pi(\tilde{A}))$ est non seulement surjective mais bijective (**bijectivité locale**).

On vérifie maintenant qu'il revient au même de considérer les parties irréductibles d'entropie $H > 0$ sur $\hat{P}'$ ou sur $\tilde{\pi}$.

La version abstraite du théorème de relèvement de Keller (2.12) s'applique et montre que π induit une bijection préservant l'entropie et l'ergodicité entre

$$\mathcal{M}_\sigma(\hat{\Sigma}_+(f,P)) \text{ et } \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+(f,P)),$$

ce qui entraîne le résultat voulu.

On peut aussi, c'est ce que l'on va faire ici, raisonner directement en termes combinatoires. On va montrer la bijection entre les ensembles des parties irréductibles d'entropie fixée non-nulle de chacun des deux systèmes $\tilde{\Sigma}_+(f,P)$ et $\hat{\Sigma}_+(f,P)$. A chaque partie irréductible $\tilde{I}$ de $\tilde{P}$ on associe la partie irréductible $\Pi(\tilde{I})$ de $\hat{P}'$ contenant l'image $\pi(\tilde{I})$: il en existe une et une seule car cette image est fortement connexe.

Remarquons que la bijectivité locale constatée ci-dessus implique l'égalité des entropies (de Salama):

$$h_S(\pi(\tilde{I})) = h_S(\tilde{I})$$

Pour l'instant on sait seulement que $\pi(\tilde{I}) \subset \Pi(\tilde{I})$: on n'en déduit donc qu'une inégalité $h_S(\tilde{I}) \leq h_S(\Pi(\tilde{I}))$.

Comme dans la preuve du théorème de Keller (2.12) évoqué ci-dessu, on a besoin du résultat dit d'injectivité éventuelle:

(12.13) Lemme. *Soit $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\Sigma}_+(f,P)$ tels que $\tilde{\pi}(\tilde{A}) = \tilde{\pi}(\tilde{B})$ n'appartienne pas à un ensemble exceptionnel $X \subset \Sigma_+(f,P)$. Alors il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique:*

$$\tilde{A}_n = \tilde{B}_n$$

De plus X est dénombrable, $\sigma(X) \subset X$ et X ne contient qu'un nombre fini d'orbites périodiques.

C'est une version du lemme de F. Hofbauer (2.3), l'ensemble exceptionnel étant: $X \subset \{A \in \Sigma_+(f,P) : \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0 \dots A_n]} \ni f^k(e)\ (e \in E(f), k \geq 0)\}$. X, comme union des orbites des itinéraires des extrémités $E(f)$, est dénombrable, invariant et ne contient qu'un nombre fini d'orbites périodiques.

Montrons que Π est surjective. Soit I une partie irréductible de $\hat{P}'$ d'entropie non-nulle. On va montrer qu'il existe une boucle A sur I dont la "trace" $\{A_n : n \geq 0\}$ recouvre une partie finie fixée de I et dont la projection sur $\Sigma_+(f,P)$ n'est pas dans X. Soit $A_0 \dots A_n$ un chemin sur I recouvrant une telle partie finie de I d'entropie non-nulle.

$\hat{\Sigma}_+(f,P)$ se projette naturellement sur $\Sigma_+(f,P)$ par l'application induite par $F \mapsto A$ avec A l'unique élément de P contenant $F \in \hat{P}$. La propriété de bijectivité locale de π permet à la projection de $\hat{\Sigma}_+(f,P)$ sur $\Sigma_+(f,P)$ d'hériter de la projection $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma}_+(f,P) \to \Sigma_+(f,P)$ de la propriété suivante: cette projection restreinte aux chemins commençant en A_n est une injection. En particulier il existe sur I une infinité de boucles dont les projections sur $\Sigma_+(f,P)$ sont deux-à-deux distinctes. Il existe donc une boucle $A \in \Sigma_+(I)$, commençant par le chemin $A_0 \dots A_n$ fixé ci-dessus, avec les propriétés annoncées.

D'après le lemme, A se relève en une boucle sur $\tilde{P}$. Mais alors $I = \Pi(\tilde{I})$ avec $\tilde{I}$ la partie irréductible de $\tilde{P}$ contenant la trace de la boucle relevée et $\pi(\tilde{I})$ contient la trace de A, et est donc d'entropie non-nulle. Mais $h_S(\tilde{I}) = h_S(\pi(\tilde{I}))$: $\tilde{I}$ est bien une partie irréductible d'entropie non-nulle. La surjectivité est démontrée.

Montrons que Π est injective. Si $\tilde{I}_1$ et $\tilde{I}_2 \subset \tilde{P}$ sont deux parties irréductibles d'entropie non-nulle telles que $\Pi(\tilde{I}_1) = \Pi(\tilde{I}_2) = I$ alors il existe un chemin A sur I tel que $A_0 \in \pi(\tilde{I}_1)$ et $A_n \in \pi(\tilde{I}_2)$ pour $n \geq n_0$. On peut de plus choisir A pour que $\sigma^{n_0}(A) \notin X$: en effet $h_S(\pi(\tilde{I}_2)) = h_S(\tilde{I}_2) > 0$. Soit $\tilde{A}$ un relèvement de A sur $\tilde{P}$ tel que $\tilde{A}_0 \in \tilde{I}_1$. Soit $\tilde{B}$ un relèvement de $\sigma^{n_0}(A)$ sur $\tilde{P}$ tel que $\tilde{B}_n \in \tilde{I}_2$ pour $n \geq 0$. On applique le lemme ci-dessus: $\tilde{A}_{n_0+n} = \tilde{B}_n$ pour n assez grand: $\tilde{I}_1$ précède $\tilde{I}_2$. Par symétrie $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2$. L'injectivité est démontrée.

Π est donc une bijection. Il reste à montrer qu'elle préserve l'entropie. Il suffit pour cela de voir que $\pi(\tilde{I}) = \Pi(\tilde{I})$: $\tilde{I}$ se projette sur la partie irréductible correspondante toute entière. Pour cela on reprend la démonstration de la surjectivité en considérant une suite $(I_k)_{k\geq 0}$ de parties fortement connexes, finies et d'entropie non-nulle dont l'union soit $\Pi(\tilde{I})$ tout entière; pour chaque $k \geq 0$, il existe une boucle A_k ne se projetant pas dans l'ensemble exceptionnel X et parcourant I_k; on obtient ainsi des parties irréductibles $\tilde{I}'_k$ telles que $\pi(\tilde{I}'_k)$ contient $I_k \subset \Pi(\tilde{I})$. Mais alors $\Pi(\tilde{I}'_k) = \Pi(\tilde{I})$ donc, par injectivité de Π, $\tilde{I}'_k = \tilde{I}$, pour $k \geq 0$. Donc $\pi(\tilde{I}) = \Pi(\tilde{I})$.

Π a bien toutes les propriétés annoncées.

Il suffit maintenant de dénombrer les branches du graphe $\hat{P}' = \pi(E' \times \mathbb{N})$.

Cas unimodal (f continue et $N = 2$). On suppose toujours f normalisée. Soit c l'unique point critique intérieur. On a, en notant

$$F(e,n) = \pi(\tilde{A}(e,n))$$

les futurs,

$$F(c-,0) = (0,c),\ F(c-,1) = (c,f(c)),\dots$$
$$F(c+,0) = (c,1),\ F(c+,1) = (c,f(c)),\dots$$

On a bien $F(c-,1) = F(c+,1)$ et donc $F(c+,n) = F(c-,n)$ pour $n \geq 1$. Par ailleurs, $0 \notin f^k([c,1])$ pour tout $k \geq 0$, vu l'hypothèse $f^{-1}(0) \subset \{0\}$: $F(c-,0)$ ne peut être le successeur que de lui-même et donc si $F(c-,0)$ appartient à une partie irréductible celle-ci est réduite à la boucle de longueur 1 $F(c-,0)$: $F(c-,0)$ peut être omis. On a donc bien $B = 1$. □

Cas général. On essaie d'exploiter les identifications ayant lieu du fait de points critiques continus. Celles-ci sont décrites dans le lemme suivant:

On va déduire les majorations annoncées des identifications suivantes:

(12.14) Lemme. *Soit $c < d$ deux points critiques successifs. On a: $K(c+,0) = K(d-,0)$ ces deux quantités étant, par définition, égales à*

$$\min\{k \geq 1 : f^k|(c,d) \text{ n'est pas un homéomorphisme sur son image}\}.$$

On a:

(1) $F(c+,n) = F(d-,n) = (f^n(c+), f^n(d-))$ *pour* $0 \leq n < K(c+,0)$.
(2) $F(c+,n) = F(c-,n) = (f^n(c), x_n)$ *pour* $n \geq \max(K(c+,0), K(c-,0))$ *si* $f(c+) = f(c-)$.

(à chaque fois que les $F(\cdot,\cdot)$ en question sont définis, i.e. pour $n \leq m(e)$ avec e l'extrémité pertinente et $m(e)$ défini au chapitre 9).

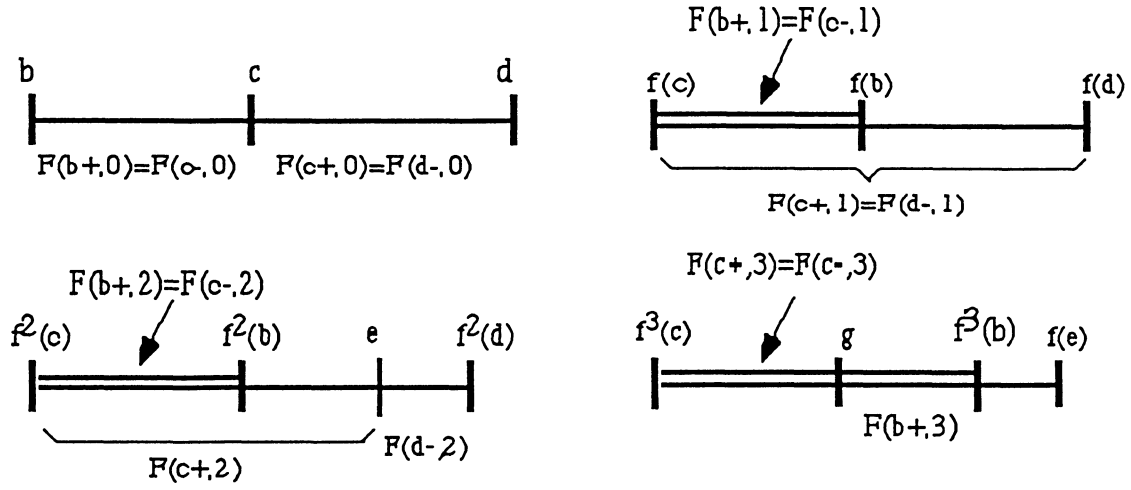

FIGURE 12.5. Lemme (12.14). $K(c+,0) = 2 < K(c-,0) = 3$.

Preuve. (1) vient de la coïncidence des itinéraires $A_0A_1\ldots$ de $c+$ et $d-$ pour les temps $0,\ldots,K(c+,0)-1$.

Montrons (2). On a, p. ex., $F(c+,1) = (x, f(c)) \subset F(c-,1) = (y, f(c))$. Mais, pour $n \geq 0$,

$$F(c+,n+1) = f^n(F(c+,1) \cap [A_1 \ldots A_{n+1}])$$

avec $A_0A_1A_2\ldots$ l'itinéraire généralisé de $c+$ (défini par $c+ = (c, A_0)$ et $c \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0\ldots A_n]}$). En particulier, pour tout $n \geq 0$, $f(c) \in \overline{[A_0\ldots A_n]}$. $F(c-,n+1)$ s'exprime par une formule similaire avec le même itinéraire $A_1A_2\ldots$.

Donc, pour $n = \max(K(c+,0), K(c-,0))$, $F(c+,n) = F(c-,n) = (z, f^n(c))$ avec z extrémité de $f^n([A_0\ldots A_n])$ "opposée à $f^n(c)$" (extrémité gauche si $f^n(c)$ est l'extrémité droite de $f^n(B(c,\epsilon))$ pour $\epsilon > 0$ petit). (2) est démontrée. □

Pour tirer profit de ces deux catégories d'identifications ayant lieu respectivement pour les petits n et pour les grands n, il faut considérer simultanéments les branches définies par plusieurs intervalles adjacents de monotonie de f. C'est le but des notions suivantes.

On appelle **segment** (critique) un intervalle $(c,d) \subset [0,1]$ délimité par deux points critiques $c, d \in C(f)$. On **associe** au segment (c,d) les extrémités comprises entre $c+$ et $d-$: $c+ < c_1- < c_1+ < c_2- < \cdots < c_r+ < d-$ $(r \geq 0)$. Un segment critique est dit **de niveau** n si:

(1) $K(c+,0) = K(c_1-,0) = K(c_1+,0) = \cdots = K(c_r+,0) = K(d-,0) = n$.
(2) f est continue sur (c,d).

et (c,d) est maximal pour ces propriétés: c'est l'union d'intervalles de P contigüs sur lesquel $K(\cdot,0)$ est constante et égal à n.

Soit (c,d) un segment de niveau n. On dit que l'extrémité c de (c,d) est proéminente si $c > 0$ et si $K(c-,0) > n$ ou si c est un point de discontinuité pour f. On définit de même la proéminence de d (avec $d+$ à la place de $c-$).

On dit que (c,d) est un **segment proéminent** si ses deux extrémités c et d sont *toutes les deux* proéminentes. On note $p(n)$ le nombre de segments proéminents de niveau inférieur ou égal à n.

On peut maintenant énoncer la majoration technique.

(12.15) Lemme. *Pour tout* $n \geq 0$,

$$\operatorname{card} \pi(\hat{P}'_n \setminus \hat{P}'_{n-1}) = \operatorname{card}\{F(e,n) : e \in E'(f)\} \leq N + p(n)$$

D'après la proposition (12.11), le nombre de branches de G est donc majoré par $N+p$, avec $p = \max_{n\geq 0} p(n)$.

Admettons-la dans un premier temps pour en déduire les majorations annoncées. Rappelons qu'on suppose f "normalisée".

Cas continu ($N \geq 3$). On majore $p = \max_{n\geq 0} p(n)$.

f étant continue sur $[0,1]$, il existe toujours au moins un intervalle de monotonie (correspondant à une "grande" valeur de K, au moins 2!) entre deux segments proéminents successifs et ainsi qu'avant le premier segment proéminent et après le dernier: il y a donc au moins $p+1$ intervalles de monotonie "intercalaires" dès que $p > 0$.

Remarquons que $K(\tilde{0},0) = K(\tilde{1},0) = 1$, donc le premier et le dernier intervalle de monotonie ne peuvent être des intervalles "intercalaires".

Enfin s'il y a p segments proéminents, chacun contient au moins un intervalle de monotonie: leur union couvre au moins p intervalles de monotonie. On obtient donc si $p > 0$, $p + (p+1) \leq N - 2$ soit:

$$p \leq \frac{1}{2}(N-3).$$

D'où $B \leq N + p \leq \frac{3}{2}(N-1)$ si $p > 0$ et $B \leq N \leq \frac{3}{2}(N-1)$ si $p = 0$. □

Cas sans petits intervalles. L'absence de petits intervalles est équivalente à $K(e,0) = 1$ pour tout $e \in E(f)$. Les segments proéminents sont donc les (c,d) tels que c, d sont *deux discontinuités* successives: $p \leq$ nbr de discontinuités $- 1$. Soit:

$$B \leq N + \text{discontinuités} - 1$$

Mais ceci est la majoration annoncée (on pourrait aussi appliquer directement le lemme (12.14)). □

Preuve du lemme (12.15). Pour $e \in E(f)$, si $e = (c,U)$, notons

(1) $e^- = (c,V) \in E(f)$ avec $V \neq U$, i.e. l'autre extrémité correspondant au même point critique, p. ex.: $(c+)^- = c-$.

(2) $e' = (d,U)$ avec $d \neq e$, i.e. l'autre extrémité du même intervalle, p. ex.: $(c+)' = d-$ si d est le point critique suivant immédiatement c.

Les identifications mises en évidence par le lemme (12.14) sont exactement celles qui sont nécessaires pour la démonstration. Pour ne pas être gêné par d'éventuelles identifications supplémentaires, on considère au lieu de $\tilde{P}$ l'ensemble $E(f) \times \mathbb{N}$ avec les identifications suivantes:

(1) $(e,n) \equiv (e^-,n)$ ssi $n \geq \max(K(e,0),K(e^-,0))$.
(2) $(e,n) \equiv (e',n)$ ssi $n < K(e,0) = K(e',0)$.

On note $S/_\equiv$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments d'une partie $S \subset E \times \mathbb{N}$. D'après le lemme (12.14), $\operatorname{card}\{F(e,n) : e \in E'(f)\} \leq \operatorname{card}(E'(f) \times \mathbb{N}/_\equiv)$. Montrons donc par récurrence l'inégalité:

$$\operatorname{card}(E'(f) \times \{n\}/_\equiv) \leq N + p(n).$$

L'inégalité au rang $n = 0$ est claire, le membre de gauche étant égal à N. Supposons-la à un certain rang $n \geq 0$ et démontrons-la au rang suivant:

Soit $S_1, \ldots, S_r$, $r \geq 0$, les éventuels segments de niveau $n+1$. Notons, pour $i = 1, \ldots, r$, G_i l'ensemble des extrémités associées au segment S_i. Soit $F = E'(f) \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_r)$ l'ensemble des extrémités ne correspondant à aucun des segments de niveau $n+1$.

$F \times \{n+1\}/_\equiv$ est en bijection avec $F \times \{n\}/_\equiv$.

Explicitons $G_1 = \{c_0+ < c_1- < c_1+ < \cdots < c_s-\}$, $s \geq 1$. Dans $G_1 \times \{n\}$, la relation $\equiv$ identifie exactement $(c_{i-1}+,n) \equiv (c_i-,n)$ pour $i = 1, \ldots, s-1$. Dans $G_1 \times \{n+1\}$, on a $(c_i-,n+1) \equiv (c_i+,n+1)$ pour $i = 1, \ldots, s-1$:

rang n:	c_0+	$\equiv$	c_1-		c_1+	$\equiv$	c_2-	$\ldots$		$c_{s-1}+$	$\equiv$	c_s-
rang $n+1$:	c_0+		c_1-	$\equiv$	c_1+		c_2-	$\equiv \ldots$		$c_{s-1}+$		c_s-

FIGURE 12.6

On en déduit que:

$$\operatorname{card}(G_1 \times \{n+1\}/_\equiv) \leq \operatorname{card}(G_1 \times \{n\}/_\equiv) + 1$$

Il suffit de montrer que si G_1 n'est pas proéminent alors:

$$(*) \qquad \operatorname{card}\Big(G_1 \times \{n+1\}/_\equiv \cap F \times \{n+1\}/_\equiv\Big) \geq 1$$

En effet, on aura alors:

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(E'(f) \times \{n+1\}/_\equiv) &\leq \operatorname{card}(F \times \{n+1\}/_\equiv) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{card}\big(G_i \times \{n+1\}/_\equiv \setminus (F \times \{n+1\}/_\equiv)\big) \\ &\leq N + p(n+1)\end{aligned}$$

(on s'est servi de la disjonction $G_i \times \{n+1\}/_\equiv \cap G_j \times \{n+1\}/_\equiv = \emptyset$ dès que $i \neq j$).

Montrons donc (*) sous l'hypothèse: G_1 non-proéminent. Une des deux extrémités du segment est proéminente, p. ex. c_0 (le cas c_s est similaire), on a donc f

continue au voisinage de c_0 et $K(c_0-,0) < K(c_0+,0) = n+1$. Il vient aussitôt: $(c_0-,n+1) \equiv (c_0+,n+1)$. Mais $c_0- \in F$, (*) est démontré. □

Remarque. Les majorations de B ci-dessus sont optimales. Si f est une application monotone par morceaux telle que l'application de $E' \times \mathbb{N}^*$ dans $[0,1]$ définie par $(e,n) \mapsto f^n(e)$ est injective, alors on obtient un graphe avec $2(N-1)$ branches. Pour la deuxième majoration, il suffit de prendre f une application monotone par morceaux continue avec N impair, telle que:

(1) les intervalles (c_1,c_2), (c_3,c_4), ... (c_{2q-1},c_{2q}) sont d'images grandes dans le sens où chacune d'elle contient en son intérieur un point critique;
(2) les autres intervalles, $(c_2,c_3),\ldots,(c_{2q-2},c_{2q-1})$, sont d'images petites dans le sens où elles ne sont coupées qu'au bout d'un temps $K \geq 2$.

L'existence d'une telle application f est claire. Mais alors de $n=1$ à $n=K-1$ on a bien $\frac{3}{2}(N-1)$ éléments de niveau de n: $B = \frac{3}{2}(N-1)$ est atteint.

(12.16) Contre-Exemple. On peut par ailleurs se demander à quel point les branches associées à $c+$ et $c-$ avec c point critique continu doivent effectivement être toutes les deux prises en compte. On peut construire un exemple (cf. figures 12.7 et 12.8) d'application où chacune de ces deux branches rencontre une partie irréductible distincte et d'entropie non-nulle.

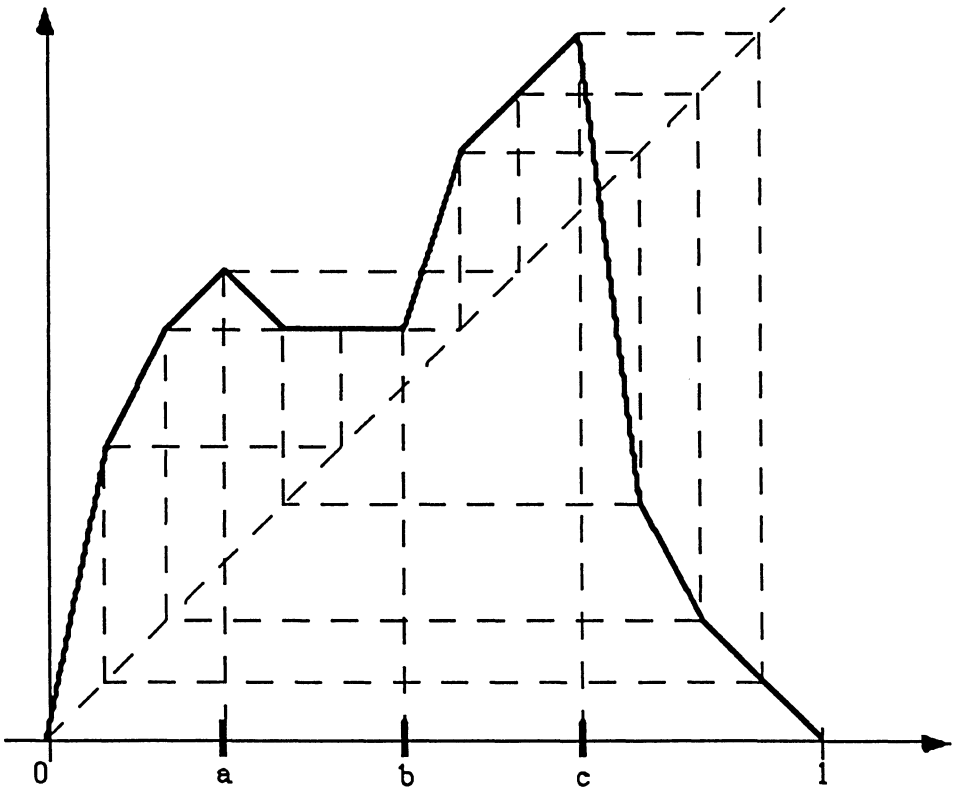

FIGURE 12.7. Contre-exemple (12.16).

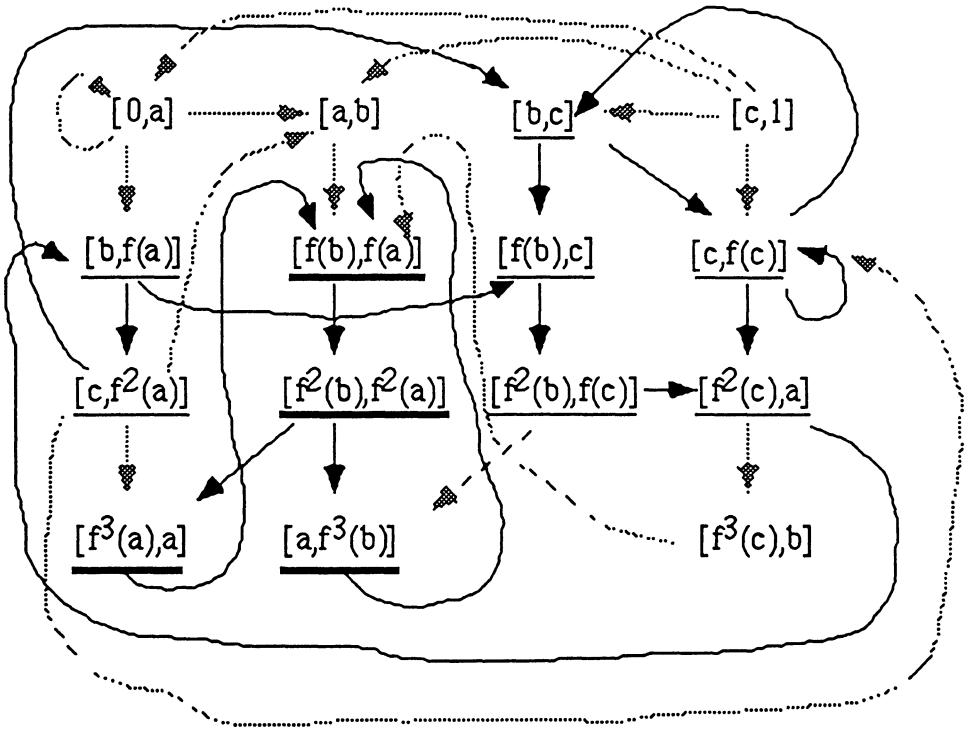

FIGURE 12.8. Diagramme de l'application de la fig. 12.7. Les éléments de la première partie irréductible sont soulignés simplement, ceux de la seconde sont soulignés en gras.

5 Conclusion

Preuve du théorème (12.1). La multiplicité finie et sa majoration explicite sont un simple corollaire de la proposition (12.4) et du théorème (12.8).

L'existence d'une mesure d'entropie maximale découle de l'expansivité du sous-shift (système symbolique *compact*) $\Sigma_+(f,P)$ qui admet donc au moins une mesure d'entropie maximale (sec. 1, chap. 7), en considérant sa décomposition ergodique on obtient une mesure maximale pour ce sous-shift. Comme $\Sigma_+(f,P)$ et $([0,1],f)$ coïncident pour les mesures ergodiques non-atomiques (9.3), $h_{\text{top}}(\Sigma_+(f,P)) = h_{\text{top}}(f) > 0$ et une mesure maximale pour $\Sigma_+(f,P)$ est isomorphe à une mesure maximale pour $([0,1],f)$. L'existence est démontrée. □

Remarquons que du fait des discontinuités, la condition $h_{\text{top}}(f) > 0$ est nécessaire même pour l'existence.

On obtient également:

(12.17) Théorème (F. Hofbauer [19]**).** *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ unimodale et d'entropie non-nulle. Alors f est intrinsèquement ergodique.*

Preuve. Par rapport au théorème précédent, il suffit de montrer qu'il n'existe qu'une partie irréductible d'entropie maximale. Il suffit d'appliquer le théorème

(12.8) avec $B = 1$. On peut aussi raisonner directement:

Supposons qu'il existe deux parties irréductibles d'entropie maximale A_1 et A_2. Comme le graphe ne comporte qu'une seule branche, les parties irréductibles se suivent: $\inf A_2 \geq \operatorname{card} A_1$. La proposition (12.9) permet de conclure. □

Remarque. On aimerait prouver que B (et non pas $2B-1$) majore le nombre de mesures maximales: c'est la conjecture de S. Newhouse. Mais on doit recourir soit à d'autres méthodes, soit à des informations plus fines sur la structure des graphes définis par les applications par morceaux.

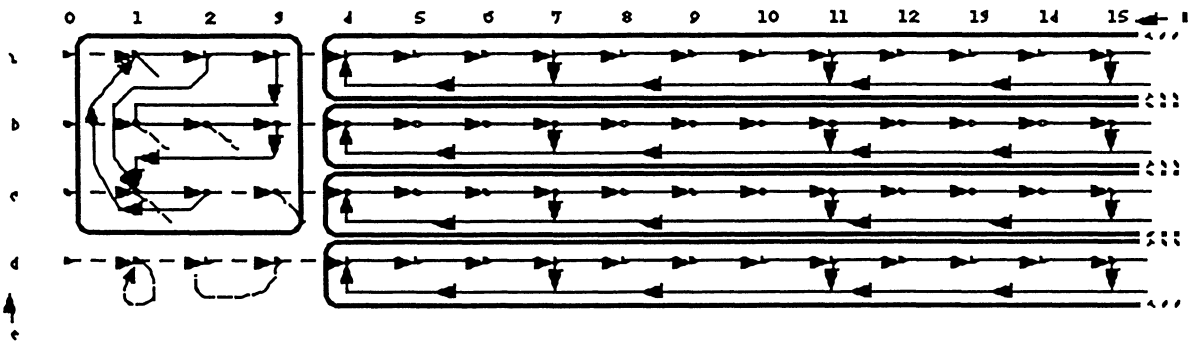

FIGURE 12.9. Graphe défini par la fonction Q de la table 1 et $K(\cdot, 0) = 1$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	...	←	n
a	$(d,0)$	$(c,0)$	$(b,0)$	$(a,3)$	$(a,3)$	$(a,3)$	...		
b	$(d,0)$	$(d,0)$	$(c,0)$	$(b,3)$	$(b,3)$	$(b,3)$	...		
c	$(d,0)$	$(a,0)$	$(d,0)$	$(c,3)$	$(c,4)$	$(c,3)$	...		
d	$(d,0)$	$(d,1)$	$(d,2)$	$(d,2)$	$(d,2)$	$(d,2)$	...		
$\uparrow e$									

TABLE 1. Fonction $Q(e,n)$ pour le graphe représenté Figure 12.9.

En effet, le graphe de la figure 12.9 se laisse définir par une fonction de repliement Q (c'est en fait la seule propriété utilisée pour démontrer la majoration explicite) et possède B branches et $B+1$ partie irréductibles d'entropie maximale:

(1) $\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$.

(2) $\{(a,4),(a,5),(a,6),\dots\}$.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	...	←	n
a	1	2	3	4	8	12	16	...		
b	1	2	3	4	8	12	16	...		
c	1	2	3	4	8	12	16	...		
d	1	2	4	8	12	16	20	...		
$\uparrow e$										

TABLE 2. Fonction K déterminée par $K(\cdot, 0) = 1$ et la fonction Q de la table 1.

(3) $\{(b,4),(b,5),(b,6),\dots\}$.
(4) $\{(c,4),(c,5),(c,6),\dots\}$.
(5) $\{(d,4),(d,5),(d,6),\dots\}$.

L'égalité des entropies de chacune de ces parties irréductibles peut se voir de la façon suivante. On vérifie que, dans chacune de ces parties, les chemins issus de (respectivement):

$$(a,2) \quad (a,4) \quad (b,4) \quad (c,4) \quad (d,4)$$

sont en bijection par une application par bloc sd'ordre 1 (3.10) avec l'ensemble des suites infinies formées à partir des mots $a = 1^{*4}$ et $b = 0^{*8}$.

CHAPITRE 13

CAS RÉGULIER

Ce chapitre est consacré au résultat d'ergodicité intrinsèque suivant:

(13.1) Théorème. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. Supposons f "assez" différentiable, i.e. f est de classe C^r ($r \geq 1$, entier ou infini) avec:*

$$r > \frac{\log R(f)}{h_{\text{top}}(f)}$$

$\left(R(f) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{x\in[0,1]} |f^{n\prime}(x)|}\right.$ *est le rayon spectral de* $\left.f'\right)$.

Alors il n'existe qu'un nombre fini, peut-être nul, de mesures de probabilité invariantes, ergodiques et maximisant l'entropie.

En utilisant le résultat d'existence de S. Newhouse [33], on obtient sous l'hypothèse C^∞, la *même conclusion* que celle obtenue par F. Hofbauer dans le cas monotone par morceaux (rappelé au chapitre précédent):

(13.2) Théorème. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^∞ et d'entropie non-nulle:*

$$h_{\text{top}}(f) > 0.$$

Il existe alors un nombre fini, non-nul, de mesures maximales.

Soulignons que, dans ce chapitre, l'ensemble $C(f)$ des points critiques n'est pas supposé fini. C'est un compact arbitraire, en général *infini non-dénombrable.*

Représentation markovienne. Les résultats ci-dessus se déduisent du théorème ci-dessous de "représentation markovienne". Rappelons d'abord quelques faits et définitions.

La décomposition spectrale de A.M. Blokh (8.14) montre qu'une application continue $f : [0,1] \to [0,1]$ peut être considérée, du point de vue de l'étude de ses mesures invariantes, ergodiques et non-atomiques, comme la juxtaposition des sous-systèmes définis par chaque composante transitive (8.13) de cette décomposition. Plus précisément, on a:

$$\mathcal{M}_f^{\substack{ergodique\\non-atomique}}([0,1]) = \bigcup_T \mathcal{M}_f^{\substack{ergodique\\non-atomique}}(T)$$

l'union étant disjointe et portant sur les composantes transitives.

On a clairement la même situation pour une chaîne de Markov, si on définit les composantes transitives comme les sous-chaînes définies par les parties irréductibles non-complètement triviales p. 7. Remarquons que, dans ce cas, les composantes transitives sont des fermés, non nécessairement compacts: on parlera donc non pas d'entropie topologique (3.1), mais d'entropie absolue (cf. p. vi).

L'extension naturelle de $([0,1],f)$ est le système $(\vec{X},\vec{f})$ obtenu en considérant l'action –inversible– de f sur ses orbites:

$$\vec{X} = \{\vec{x} \in [0,1]^{\mathbb{Z}} : x_{p+1} = f(x_p) \quad (p \in \mathbb{Z})\}$$
$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{si } y_p = f(x_p) = x_{p+1} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

$(\vec{x} = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}}, \vec{y} = (y_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

On a associé à $([0,1],f)$ une chaîne de Markov topologique $\tilde{\Sigma}(f,P)$ dite "extension markovienne spéciale" (cf. p. 16).

Enfin on a introduit (0.6) la notion d'isomorphisme d'entropie critique h_*: un isomorphisme ayant lieu après la suppression de parties d'entropie absolue au plus h_*.

On peut maintenant énoncer:

(13.3) Théorème. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application de classe C^r ($r \geq 1$, entier ou infini). Posons $h_* = \frac{1}{r}\log R(f)$.*

1. *Si $h_{\text{top}}(f) > h_*$ alors il existe un isomorphisme d'entropie critique h_* entre l'extension naturelle $(\vec{X},\vec{f})$ de $([0,1],f)$ et la chaîne de Markov $(\tilde{\Sigma}(f,P),\sigma)$.*

2. *Considérons, pour chacun des deux systèmes $(\vec{X},\vec{f})$ et $(\tilde{\Sigma}(f,P),\sigma)$, l'ensemble des composantes transitives d'entropie absolue strictement supérieure à h_*. L'isomorphisme précédent induit une bijection entre ces deux ensembles, les composantes transitives correspondantes étant isomorphes.*

3. *Soit h tel que $h_* < h \leq h_{\text{top}}(f)$. Le nombre de composantes transitives de $([0,1],f)$ d'entropie topologique au moins égale à h est fini et non-nul.*

Remarques. Les résultats de F. Hofbauer dans le cas monotone par morceaux correspondent à l'énoncé ci-dessus avec $h_* = 0$.

On verra que la condition du point 3 est optimale: on peut construire, pour tout $r < \infty$, un contre-exemple C^r avec $h = h_*$ *sans aucune* composante transitive d'entropie h_* et avec une *infinité* de composantes transitives T d'entropie $h < h_{\text{top}}(T) < h_*$, pour tout $h < h_*$.

Plan.

La section 1 montre que les composantes transitives de la décomposition spectrale de "grande entropie" sont en nombre fini en utilisant les résultats de semi-continuité supérieure du chapitre 7 ainsi que la décomposition spectrale de A.M. Blokh.

La section 2 évalue l'entropie de Bowen de l'ensemble critique par des moyens élémentaires.

La section 3 construit l'isomorphisme d'entropie critique $h_* = h_B(f,C(f))$ en appliquant le théorème d'isomorphisme (2.7) et en utilisant la majoration sur l'entropie des mesures pistées (6.2). On établit ensuite la correspondance entre composantes transitives de la décomposition spectrale et parties irréductibles du diagramme de Hofbauer. Il suffit alors de conclure.

La section 4 donne deux exemples mettant en évidence que la condition de différentiabilité ci-dessus est bien nécessaire.

A l'exception du résultat d'existence, ces résultats sont nouveaux.

1 Entropie dans la décomposition spectrale

On va montrer que la décomposition spectrale ne peut comprendre qu'un nombre fini de composantes de "grande" entropie. Le plan de la démonstration est le suivant.

Raisonnant par l'absurde, on suppose l'existence d'une infinité de composantes transitives d'entropie supérieure à $h > h_*$. On montre, grâce à la propriété d'emboîtement mise en évidence au chapitre 8, que, de toute collection infinie de composantes transitives, on peut extraire soit une sous-collection infinie de composantes transitives ne se chevauchant pas, soit une suite infinie de composantes transitives emboîtées et tendant donc vers un solénoïde ou une orbite périodique.

On exclut ces deux possibilités en utilisant $h > h_{\mathrm{loc}}(f)$, l'entropie locale introduite au chapitre 7:

(13.4) Définition. *On appelle* **entropie locale** *la quantité:*

$$h_{\mathrm{loc}}(f) = \lim_{\epsilon \to +} h_{\mathrm{loc}}(f, \epsilon_0)$$

avec

$$h_{\mathrm{loc}}(f, \epsilon_0) = \lim_{\epsilon \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \sup_x \frac{1}{n} \log r^f(\epsilon, n, B_n^f(x, \epsilon_0)).$$

En effet, la théorie de Yomdin (chapitre 7) nous fournit une majoration de cette quantité sous les hypothèses annoncées: si f est C^r, alors

$$h_{\mathrm{loc}}(f) \leq \frac{1}{r} M_1(f),$$

avec $M_1(f) = \sup_x |f'(x)|$. Remarquons ici une fois pour toutes qu'il suffit de considérer des itérés f^q avec $q \to \infty$, pour en déduire:

$$h_{\mathrm{loc}}(f) \leq \frac{1}{r} R(f)$$

avec $R(f)$ le rayon spectral (dont la définition a été rappelée au tout début de ce chapitre).

Il suffit donc de montrer le résultat suivant, purement topologique:

(13.5) Théorème. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.*
Les composantes transitives Ω de la décomposition spectrale (8.9) *telles que*

$$h_{\mathrm{top}}(f|\Omega) \geq h > h_{\mathrm{loc}}(f)$$

sont en nombre fini.

Preuve. Les composantes transitives d'entropie non-nulle sont des $\Omega(J)$ (8.13) avec $J \in \mathcal{J}$ (intervalle essentiel). On a

$$\Omega(J) \subset \bigcup_{k=0}^{n(J)-1} f^k(J)'$$

avec $n(J)$ la période de J et $f^k(J)'$ l'intervalle réduit associé à l'intervalle $f^k(J)$. Si on note $d(J) = \max_{k\geq 0} \operatorname{diam}\left(f^k(J)'\right)$, on a, pour tout $x \in \Omega(J)$,

$$\Omega(J) \subset \bigcup_{k=0}^{n(J)-1} f^k(B_\infty(x, 2d(J)))$$

Donc $h_{\text{top}}(f|\Omega(J)) \leq h_B(B_\infty(x, 2d(J)), f)$.

Soit $\epsilon_0 > 0$ tel que $h_{\text{loc}}(f, 2\epsilon_0) < h$. En particulier, $h_B(f, B_\infty(x, 2\epsilon_0)) < h$ quel que soit x donc:

$$d(J) < \epsilon_0 \implies h_{\text{top}}(f|\Omega(J)) < h.$$

Raisonnons par l'absurde. S'il existe une infinité de composantes transitives distinctes et d'entropie au moins h, il existe une suite infinie $(J_n)_{n\geq 0}$ telle que $J_n \in \mathcal{J}$, $d(J_n) \geq \epsilon_0$ et $n \mapsto \Omega(J_n)$ est une injection.

Pour chaque $n \geq 0$, il existe $0 \leq k(n) < n(J_n)$ avec

$$\operatorname{diam}\left(f^{k(n)}(J_n)'\right) = d(J_n) \geq \epsilon_0.$$

Par compacité de $[0,1]$, on peut supposer que les intervalles $f^{k(n)}(J_n)'$ convergent:

$$f^{k(n)}(J_n)' = [a_n, b_n] \text{ et } a_n \to a,\ b_n \to b.$$

Par construction $|a-b| \geq \epsilon_0 > 0$. Les intervalles $[a_n, b_n]$ sont donc, pour n assez grand, d'intérieurs non-disjoints. Comme ce sont des intervalles réduits, ils sont emboîtés (8.9). Quitte à la ré-ordonner et à supprimer les premiers termes, on peut supposer que la suite des intervalles $[a_n, b_n]$ est strictement monotone. Rappelons-nous que $\Omega(J_n) \subset \overline{\operatorname{orb}(J_n) \setminus \operatorname{orb}(J_{n+1})}$ (si la suite est décroissante, sinon permuter n et $n+1$). Or, d'après (8.9), ceci tend, soit vers une union d'orbites périodiques (si les périodes $n(J_n)$ sont bornées), soit vers un solénoïde: en posant $s = (J_n)_{n\geq 0} \in \vec{\mathcal{J}}_*$, on a:

$$\bigcap_{n\geq 0} \operatorname{orb} J_n = S(s) \cup N$$

avec $S(s)$ un solénoïde (8.14) et N un ensemble effaçable (8.3) et par conséquent négligeable pour toute mesure ergodique d'entropie non-nulle. Dans tous les cas, la limite au sens de Hausdorff est un compact invariant K d'entropie topologique nulle.

Pour chaque $n \geq 1$, fixons une mesure $\mu_n \in \mathcal{M}_f(\Omega(J_n))$ telle que $h_{\mu_n}(f) \geq h - n^{-1}$. $\mathcal{M}_f([0,1])$ étant compact pour la topologie vague, on peut supposer que les mesures μ_n convergent. Soit μ leur limite. Elle est nécessairement concentrée sur la limite K. Mais alors $h_\mu(f) = 0$ et

$$\limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f) \geq h > h_\mu(f) + h_{\text{loc}}(f)$$

contredisant le résultat (7.18) sur la semi-continuité de l'entropie. □

(13.6) Remarque. On peut appliquer cette preuve dans le cas monotone par morceaux continu: l'entropie métrique est alors une fonction semi-continue supérieurement à cause de l'expansivité du système symbolique associé (qui est compact), le reste de la démonstration étant inchangé. On obtient ainsi une démonstration de la finitude du nombre de composantes transitives d'entropie $\geq h$, sans recourir à l'extension d'Hofbauer.

2 Entropie de Bowen de l'ensemble critique

Rappelons:

(13.7) Définition. *Soit $g : X \to Y$ une fonction d'un espace métrique dans un autre. On dit que g est* **hölderienne d'exposant** α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *si*

$$\sup_{\substack{x,x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{d(g(x), g(x'))}{d(x,x')^\alpha} < \infty$$

Le supremum est appelé **constante de Hölder (d'ordre α).**

On dit que g est de classe $C^{r+\alpha}$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha < 1$ si f est r fois continuement dérivable (i.e. continue si $r = 0$) et si $f^{(r)}$ est hölderienne d'exposant α.

La condition de Hölder d'exposant 0 dit simplement que g est bornée.

(13.8) Proposition. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. Si f est de classe $C^{r+\alpha}$, alors l'entropie topologique (au sens de Bowen) de $Z = \{x \in I : f'(x) = 0\} \supset C(f)$ vérifie:*

$$h_B(f, Z) \leq \frac{\log M_1}{r + \alpha}$$

Preuve de la proposition. Soit $h = h_B(f, Z)$ et $\epsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on fixe $E_n \subset Z$ une partie (ϵ, n)-séparée maximale. Notons $E_n = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{N(n)}\}$. Il existe des entiers n arbitrairement grands tels que $N(n) \geq e^{(h-\epsilon)n}$. Fixons un tel n. Le nombre des $k = 1, \ldots, N(n) - 1$ tels que $|x_{k+1} - x_k| \geq (r+1)e^{-(h-\epsilon)n}$ est majoré par $(r+1)^{-1}e^{(h-\epsilon)n}$. Donc (dès que $e^{(h-\epsilon)n} \geq r^2 - 1$) il existe une suite $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_s$ de r points consécutifs de E_n telle que chacun des $r-1$ intervalles séparant deux points consécutifs est de longueur au plus $(r+1)e^{-(h-\epsilon)n}$. L'intervalle $[x_k, x_{k+r-1}]$ est de longueur

$$|x_{k+r-1} - x_k| \leq (r^2 - 1)e^{-(h-\epsilon)n}.$$

et la dérivée f' s'annule r fois sur l'intervalle $[x_k, x_{k+r-1}]$: donc pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe un point z_i de cet intervalle tel que $f^{(i)}(z_i) = 0$. Donc $|f^{(r)}(x)| \leq Kr^{2\alpha}e^{-\alpha(h-\epsilon)n}$ avec K la constante définie par la condition de Hölder d'ordre α. En intégrant avec les conditions initiales $f^{(i)}(z_i) = 0$, on obtient

$$|f(x_{k+r-1}) - f(x_k)| \leq Kr^{2(r+\alpha)\alpha}e^{-(r+\alpha)(h-\epsilon)n}.$$

Mais x_{k+r-1} et x_k sont (ϵ, n)-séparés donc:

$$M(f)^n Kr^{2(r+\alpha)\alpha}e^{-(r+\alpha)(h-\epsilon)n} \geq \epsilon$$

On en déduit

$$h \leq \frac{\log M(f)}{r+\alpha} + \frac{1}{n}\frac{\log Kr^{2(r+\alpha)\alpha}}{r+\alpha} + \epsilon$$

On laisse tendre $n \to \infty$, puis $\epsilon \to 0$. □

3 Conclusion

Preuve du théorème (13.3). On construit d'abord l'isomorphisme annoncé. Posons $h_* = \frac{\log M_1}{r} > 0$. Notons que la proposition (13.8) montre que

$$h_B(f, C(f)) \leq h_*$$

. Par ailleurs, on a établi (7.17) que $h_{\text{loc}}(f) \leq h_*$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\vec{f}}^{erg}(\vec{X})$ d'entropie $h_\mu(\vec{f}) > h_*$. Si μ charge $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma^k p^{-1}(C(f))$ alors $p_*\mu$ charge $C(f)$ et la formule de Katok (6.6) montre que $h_{p*\mu}(f) = h_\mu(\vec{f}) \leq h_B(f, C(f))$. Si $p_*\mu$ charge l'union $H(f)$ des homtervalles de f alors μ est portée sur une orbite périodique donc d'entropie nulle. Le codage Γ permet donc de transporter, par isomorphisme, la mesure μ sur le système symbolique $\Sigma(f, P)$. Si $\Gamma_*\mu(\Sigma_0(f, P)) > 0$, alors, d'après le théorème (6.2) $h_\mu(\vec{f}) \leq h_B(f, f(C(f))) \leq h_*$. Le théorème d'isomorphisme (2.7) permet donc de transporter, par isomorphisme, la mesure $\Gamma_*(\mu)$ sur l'extension markovienne $\tilde{\Sigma}(f, P)$. On a donc transporté toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\vec{f}}^{erg}(\vec{X})$ d'entropie $h_\mu(\vec{f}) > h_*$ en une mesure $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\tilde{\Sigma}(f, P))$ telle que

$$(*) \qquad \tilde{\pi}^{-1} \circ \Gamma : (\vec{X}, \vec{f}, \mu) \to (\tilde{\Sigma}(f, P), \sigma, \nu)$$

est un isomorphisme entre systèmes dynamiques mesurés. En particulier ν est également ergodique et de même entropie que μ.

Réciproquement, toute mesure $\nu \in \mathcal{M}_\sigma^{erg}(\tilde{\Sigma}(f, P))$ se projette par l'isomorphisme $\tilde{\pi}$ sur $\Sigma(f, P)$. Si elle n'est pas atomique, elle ne peut charger les itinéraires correspondant à des homtervalles ou ne correspondant à aucun point de $[0, 1]$ (les itinéraires virtuels qui forment une collection dénombrable, (9.3)) elle est donc concentrée sur $\Sigma'_+(f, P) \setminus \Gamma(H(f) \setminus C^-(f))$. Elle se transporte donc par isomorphisme par le codage Γ^{-1} en une mesure μ et on a encore (*).

On a donc un isomorphisme d'entropie critique h_*, comme annoncé.

Il suffit maintenant de montrer que les parties irréductibles du diagramme de Hofbauer $\tilde{P}$ définissant $\tilde{\Sigma}(f, P)$ sont en correspondance avec les composantes transitives de la décomposition spectrale. Notons qu'alors, le troisième point (finitude), n'est qu'une ré-écriture de (13.5).

Chaque partie irréductible d'entropie non-nulle définit une partie non-effaçable (8.3) de $[0, 1]$ qui est topologiquement mélangeante (à une période près). Cette partie, appelée **composante irréductible** associée à la partie irréductible, est donc incluse dans une composante transitive du type $\Omega(J)$ (8.9), qui est donc d'entropie topologique supérieure ou égale à l'entropie de Gurevič de la partie irréductible.

On a vu que le nombre de composante transitives d'entropie $h_{\text{top}}(f) > \log M_1/r$ est fini. Mais on a:

(13.9) Lemme. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Toute composante transitive Ω de la décomposition spectrale contient au plus une composante irréductible, i.e. $K = \tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}_+(A)) \setminus E$ avec $A \subset \tilde{P}$ partie irréductible non-réduite à une boucle et E effaçable* (8.3).

Ce qui terminera donc la preuve du théorème. □

Preuve du lemme. Ω est fortement transitive d'ensemble exceptionnel fini Y (8.1).

Supposons que A_1, A_2 soient deux parties irréductibles de $\tilde{P}$ non-réduites à une boucle. Elles définissent, chacune, une composante irréductible $\Gamma^{-1}\tilde{\pi}\tilde{\Sigma}_+(A_i)$. $\tilde{\pi}\tilde{\Sigma}_+(A_i)$ est donc non-dénombrable. $\bigcup_{D\in A_1}\partial D$ est dénombrable donc il existe $D_1 \in A_1$ tel que $\mathrm{fut}_X(D_1)$ contienne en son intérieur un point de $\Omega \setminus Y$. Par transitivité forte, $\bigcup_{k\geq 0} f^k D_1 \supset \Omega \setminus Y$.

Toujours d'après la non-dénombrabilité de $\tilde{\pi}\tilde{\Sigma}_+(A_2)$, il existe $\beta \in \tilde{\Sigma}_+(A_2)$ tel que $\tilde{\pi}\beta \in \Sigma'_+(f,P)$ et ne soit l'itinéraire d'aucune extrémité d'intervalle $\mathrm{fut}_X(D)$, $D \in A_2$. Soit $x_2 \in [0,1]$ tel que $\Gamma(x_2) = \tilde{\pi}\beta$. Il existe donc $k \geq 0$ et $x_1 \in \mathrm{int}\,\mathrm{fut}_X(D_1)$ tel que $f^k(x_1) \ni x_2$: il existe donc $\alpha \in \tilde{\Sigma}_+(f,P)$ tel que $\tilde{\pi}\alpha = \Gamma(x_1)$ et $\alpha_0 = D_1$.

D'après le lemme (2.3), il existe $n \geq 0$ tel que $\sigma^{k+n}\alpha = \sigma^n\beta$. Mais les β_i sont dans A_2. On en conclut: $A_1 \preceq A_2$. De même $A_2 \preceq A_1$. Par irréductibilité on a: $A_1 = A_2$. □

Preuve du théorème (13.1). On utilise le théorème (13.3) précédemment démontré.

L'isomorphisme d'entropie critique $h_* < h_{\mathrm{top}}(f)$ implique que les entropies absolues sont les mêmes pour les deux systèmes:

$$h_G(\tilde{P}(f,P)) = h_{\mathrm{top}}(f)$$

et que les mesures maximales des deux systèmes sont en bijection.

Une mesure invariante et ergodique sur une chaîne de Markov est concentrée sur un sous-système symbolique défini par un sous-graphe irréductible, en particulier inclus dans une partie irréductible du graphe. Le théorème de Gurevič (5.2) implique l'unicité de la mesure maximale sur chaque sous-système irréductible: les mesures maximales de $\tilde{\Sigma}(f,P)$ s'injectent dans l'ensemble des parties irréductibles d'entropie de Gurevič égale à $h_{\mathrm{top}}(f)$. □

Preuve du théorème (13.2). L'existence est un résultat dû à S. Newhouse [33]: l'entropie métrique est une fonction semi-continue supérieurement sur $\mathcal{M}_f([0,1])$ muni de la topologie faible (7.14). Mais cet ensemble est un compact: l'entropie métrique atteint donc son supremum en un point $\mu \in \mathcal{M}_f([0,1])$. Mais presque toute composante ergodique de μ est alors une mesure maximale (l'entropie est finie). L'existence est démontrée.

La multiplicité finie est claire d'après le théorème précédent. □

4 Contre-exemples

On pourrait penser que, requérir, pour la multiplicité finie, que f soit de classe C^r avec $r > \frac{\log M_1}{h_{\mathrm{top}}(f)}$ est excessif. Donnons un exemple mettant en évidence que f de classe C^r avec $r < \frac{\log M_1}{h_{\mathrm{top}}(f)}$ ne garantit pas la multiplicité finie des mesures maximales.

On modifie ensuite cet exemple pour obtenir une application C^r (r arbitrairement grand, mais fini) sans mesures maximales.

(13.10) Lemme. *Pour tout entier $r \geq 1$, il existe $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^r telle que:*

f_1 est sans composantes transitives d'entropie maximale, avec un infinité de composantes transitives d'entropie $> h_{\text{top}}(f) - \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$.

Il existe $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^r telle que:

f_2 a une infinité de composantes transitives d'entropie maximale.

De plus, pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $\frac{\log M_1(f_2)}{r} - \epsilon < h_{\text{top}}(f_i) < \frac{\log M_1(f_2)}{r}$.

La restriction de f_1, f_2 à chacune de ses composantes transitives d'entropie non-nulle est intrinsèquement ergodique.

Construction. On construit d'abord f_2. f_1 sera obtenue de façon semblable.

Fixons un entier $r \geq 1$ et $\epsilon > 0$. Soit $\lambda = (3e^{\epsilon})^r$. On se donne d'abord une famille continue d'applications de classe C^∞, $g_N : [0,2] \to [0,2]$ $(N = 0, 1, \ldots, \infty)$ telles que

(1) $g_N(t) = \lambda t$ pour $t \in [0, (3/2)\lambda^{-1}]$.
(2) $g_N(t) = \lambda(1-t)$ pour $t \in [1 - (3/2)\lambda^{-1}, 1]$.
(3) $g_N(3/2) = \lambda^{-N}(3/2)$, $g_N(2) = 0$.

On note $x_n = 1 + 1/n$, $y_n = 1 + 1/n + 1/n^2$ pour $n \geq 4$.

(4) $g_N(x_n) = \lambda^{-n-N} x_n$, $g_N(y_n) = \lambda^{-n-N} y_n$, pour $n \geq 4$.
(5) $g_N^{(k)}(x_n) = g_N^{(k)}(y_n) = 0$ pour $k \geq 1$ et $n \geq 4$.
(6) $g_N|[0,1/2]$, $g_N|[1/2,1]$, $g_N|[1,3/2]$, $g_N|[3/2,2]$ sont monotones.

$g_\infty|\Omega(g_\infty)$ est conjuguée au 2-shift donc $h_{\text{top}}(g_\infty) = \log 2$. Mais l'entropie est une fonction continue parmi les applications de l'intervalle de classe C^1 dont les intervalles de monotonie sont fixés et en nombre fini [45, chapitre II.7]. Donc pour $N \geq N_0$, $h_{\text{top}}(g_N) < \log 3$. Fixons $g = g_N$ avec $N \geq N_0$.

On va maintenant modifier g sur chaque intervalle $J_n = [x_n, y_n]$. Il existe $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\rho(2n) = 0$, $\rho(2n+1) = 1$, $\rho^{(k)}(n) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et $\rho|[n, n+1]$ est strictement monotone. On pose, pour $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} f : [x_n, y_n] &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longmapsto \lambda^{-n-N}\big(\rho(3^{n+N} n^2 (t - x_n))(y_n - x_n) + x_n\big) \end{aligned}$$

et $f = g$ en dehors de l'union de ces intervalles $J_n = [x_n, y_n]$.

Quitte à augmenter N (en fonction de $\sup|\rho'|$), $M_1 = (3e^{\epsilon})^r$ et $\log M_1/r = \log 3 + \epsilon$.

Sur J_n,

$$f^{(k)}(x) = \lambda^{-n-N} 3^{k(n+N)} n^{2k-2} \rho^{(k)}(3^{n+N} n^2 (t - x_n))$$

Mais ρ est C^∞ et $\lambda > 3^r$ donc $f^{(k)}$ est bornée sur l'union de ces intervalles. En dehors $f = g$ et il y a bien raccordement donc f est bien de classe C^k sur $[0,2]$.

$f^{n+N+1}(J_n) = J_n$. Plus précisément f^{n+N} applique J_n 3^{n+N} fois sur lui-même donc $h_{\text{top}}(f, \operatorname{orb} J_n) = \log 3$. On voit que $(\operatorname{orb} J_n, f)$ est isomorphe à $\Sigma_+(3)$ donc admet une mesure d'entropie $\log 3$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_f^*([0,2])$ une mesure ergodique. Si $\mu(\bigcup_{n \geq 4} J_n) > 0$ alors μ est concentrée sur l'orbite d'un J_n et $h_\mu(f) \leq \log 3$. Sinon (f, μ) et (g, μ) sont isomorphes donc $h_\mu(f) \leq h_{\text{top}}(g) < \log 3$. L'entropie de f est bien $h_{\text{top}}(f) = \log 3$.

On en déduit que f a une infinité de composantes transitives d'entropie maximale.

Pour obtenir le contre-exemple f_1 à l'existence d'une composante transitive d'entropie maximale, il suffit de reprendre le contre-exemple ci-dessus en modifiant la définition de f sur J_n en

$$f(t) = \lambda^{-n-N-1}\big(\rho(3^{n+N}n^2(t-x_n))(y_n - x_n) + x_n\big).$$

On aura alors $h_{\text{top}}(f|\operatorname{orb} J_n) = \frac{n+N}{n+N+1}\log 3 \to 3-$ quand $n \to \infty$. On voit donc, comme ci-dessus, que $h_{\text{top}}(f) = \log 3$ et qu'il n'y a donc aucune composante transitive d'entropie maximale.

Notons enfin que la restriction de chaque f_i à une composante transitive d'entropie non-nulle est un sous-shift de type fini, donc est intrinsèquement ergodique.

□

References

[1] A.M. Blokh, *Decomposition of dynamical systems on an interval*, Russ. Math. Surv. **38** (1983), 133–134.

[2] R.Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401-414.

[3] ———, *Entropy-expansive maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 323-333.

[4] ———, *Topological entropy for non-compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 125–136.

[5] ———, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, LNM 470, Springer, 1975.

[6] ———, *Some systems with unique equilibrium state*, Math. Sys. Th. **8** (1975), 193–202.

[7] M. Denker, *Measures with maximal entropy*, Journées ergodiques, LNM Springer.

[8] M. Denker, C. Grillenberg, K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, LNM 527, Springer-Verlag, 1976.

[9] B.A. Doubrovine, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, *Géométrie contemporaine*, Editions Mir, Moscou, 1982.

[10] T.N.T. Goodman, *Maximal measures for expansive homeomorphisms*, J. London Math. Soc. **2** (1972), 439–444.

[11] M. Gromov, *Entropy, homology and semi-algebraic geometry*, Séminaire Bourbaki **663** (1985-1986).

[12] J. Guckenheimer, *Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps*, Comm. Math. Phys. **70** (1979), 133–160.

[13] B.M. Gurevič, *Topological entropy of enumerable Markov chains*, Soviet Math. Dokl. **10** (1969), 911–915.

[14] B.M. Gurevič, *Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph*, Soviet Math. Dokl. **11** (1970), 744–747.

[15] F. Hofbauer, *β-shifts have unique maximal measure*, Mh. Math. **85** (1978), 189–198.

[16] ———, *On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy*, Israel J. Math. I **34** (1979), 213–237; II **38** (1981), 107–115.

[17] ———, *The structure of piecewise monotonic transformations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981), 159–178.

[18] ———, *Kneading invariants and Markov diagrams*, Ergodic theory and related topics (Vitt) (H. Michels, ed.), 1982.

[19] ———, *Piecewise invertible dynamical systems*, Prob. Th. Rel. Fields **72** (1986), 359–386.

[20] F. Hofbauer, G. Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 319–337.

[21] L.B. Jonker, D.A. Rand, *Bifurcations in one dimension*, Invent. Math. I **62** (1981), 347–365; II **63** (1981), 1–16.

[22] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Publ. Math. I.H.E.S. **51** (1980), 137–173.

[23] G. Keller, *Markov extensions, zeta functions, and Fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc **314** (1989), 433–497.

[24] ———, *Lifting measures to Markov extensions*, Mh. Math. **108** (1989), 183–200.

[25] ———, *Exponents, attractors, and Hopf decomposition for interval maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** (1990), 717–744.

[26] B. Kitchens, *Countable Markov shifts* (preprint IBM T.J. Watson Research Center).

[27] T. Krüger, S. Troubetzkoy, *Symbolic dynamics for diffeomorphisms with no zero Lyapunoff exponents*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. Toruń 1994, non-publié.

[28] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measures of an interval*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981), 77–93.

[29] B. Marcus, S.E. Newhouse, *Measures of maximal entropy for a class of skew-products*, Lecture Notes in Math. 729, Springer.

[30] M. Misiurewicz, *Diffeomorphisms without any measures of maximal entropy*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. **21** (1973), 903–910.

[31] ———, *Topological conditional entropy*, Studia Math. **55** (1976), 175–200.

[32] S.E. Newhouse, *Volume growth and entropy*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8*** (1988), 283–299.
[33] ———, *Continuity properties of the entropy*, Ann. Math. **129** (1989), 215–237.
[34] ———, *On some results of Hofbauer on maps of the interval*, Proceedings, Nagoya 1991.
[35] S.E. Newhouse, L.-S. Young, *Dynamics of certain skew products*, Geometric Dynamics, Proc. Rio de Janeiro 1981. LNM 1007, Springer, 1983.
[36] W. Parry, *Intrinsic Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964), 55–66.
[37] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press, 1983.
[38] ———, *Chains, entropy, coding*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **6** (1986), 415–448.
[39] D.J. Rudolph, *Fundamentals of measurable dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
[40] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Bras. Mat. **9** (1978), 83–87.
[41] ———, *Thermodynamic formalism*, Addison-Wesley, 1979.
[42] I.A. Salama, *Topological entropy and classification of countable chains*, Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 1984.
[43] E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Springer, 1981.
[44] Y. Takahashi, Osaka J. Math. **10** (1973), 175–184.
[45] S. van Strien, W. de Melo, *One-dimensional dynamics*, Springer, 1993.
[46] D. Vere-Jones, *Geometric ergodicity in denumerable Markov chains*, Quarterly J. Math. **13** (1962), 7–28.
[47] ———, *Ergodic properties of nonnegative matrices* I, Pacific J. Math. **22** (1967), 361-386.
[48] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, 1981.
[49] B. Weiss, *Intrinsically ergodic systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 1266–1269.
[50] ———, *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monatsh. Math. **77** (1973), 462-474.
[51] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), 285–300.
[52] ———, *C^k-resolution of semi-algebraic mappings*, Israel J. Math. **57** (1987), 301–318.
[53] F. Hofbauer, *Generic properties of invariant measures for continuous piecewise monotonic transformations*, Monat. Math. **106** (1988), 301–312.
[54] F. Hofbauer, P. Raith, *Topologically transitive subsets of piecewise monotonic maps, which contains no periodic points*, Monat. Math. **107** (1989), 217-239.