THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

MARCO GARUTI

Prolongement de revêtements galoisiens et géométrie rigide, 1995

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.

Ug Orsay (1995) 93

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences

de l'Université Paris XI Orsay

Spécialité : Mathématiques

par

Marco GARUTI

Sujet : **Prolongement de revêtements galoisiens et géométrie rigide**

soutenue le : 31 janvier 1995 devant la Commission d'examen

Luc ILLUSIE	Président
Werner LÜTKEBOHMERT	
Michel RAYNAUD	

BIBLIOTHEQUES DE L'UNIVERSITE DE PARIS · ORSAY

Resumé Dans le premier chapitre, nous considérons des revêtements finis étales galoisiens de couronnes rigides d'épaisseur nulle: nous demontrons que, quitte à étendre le corps de base, on peut prolonger un tel revêtement en un revêtement fini galoisien du disque fermé ramifié en un nombre fini de points. La preuve utilise la cohomologie du groupe fondamental profini de la couronne.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons ces résultats pour relever un revêtement fini galoisien de courbes algébriques sur un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel le corps de définition des courbes, en introduisant des singularités unibranches lorsque le revêtement de départ est sauvagement ramifié.

Abstract In the first chapter we study finite étale galois coverings of rigid annuli: we show that, up to a finite extension of the ground field, it is possible to extend such a covering to a finite galois covering of the closed disk, branched at a finite number of points. The proof has recourse to the cohomology of the profinite fundamental group of the annulus.

In the second chapter, these results are applied to the lifting of a finite galois covering of curves to a complete discrete valuation ring, admitting the base field of the curves as residue field, introducing cuspidal singularities whenever the original covering is wildly ramified.

Mots clés: revêtement galoisien, groupe fondamental, cohomologie des groupes profinis, géométrie analytique rigide, courbes algébriques.

Remerciements

Michel Raynaud m'a proposé ce sujet et m'a introduit aux théories touchées par cette thèse: il est impossible d'exprimer tout ce que je lui dois et tout ce qu'il a su m'apprendre tout en respectant mes temps de réflexion. Je lui suis infiniment reconnaissant pour la disponibilité avec laquelle il a exercé l'art maïeutique en dirigeant ce travail et pour avoir eu la patience de me guider à travers les difficultés de sa rédaction.

David Harbater et Werner Lütkebohmert ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et ont accompli cette tâche avec soin et dans le plus bref délai: je leur suis extrêmement reconnaissant et je voudrais remercier le premier pour ses conseils, qui ont permis une amélioration de la présentation des résultats, et le second pour avoir accepté d'être membre du jury.

Luc Illusie me fait l'honneur de présider ce jury: je l'en remercie vivement.

Je tiens également à remercier Lucien Szpiro, auquel je dois mon premier contact avec la géométrie arithmétique lors de son cours de troisième cycle et qui m'a invité à participer aux groupes de travail qu'il a organisé.

Enrico Arbarello m'a introduit à la géométrie algébrique à l'Université de Rome: je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté pour ma formation.

Mes remerciements vont aussi à Arnaud Beauville, qui a rendu possible mon séjour dans ce laboratoire.

Je suis enfin reconnaissant à des nombreuses personnes qui m'ont aidé à mener à bien la réalisation de ce travail. Je tiens à remercier particulièrement Ahmed Abbes pour ses conseils, entre autre en informatique, et Carlo Gasbarri pour s'être prêté à des nombreuses répétitions.

Durant l'élaboration de cette thèse j'ai bénéficié d'une Allocation de Recherche du Ministère de la Recherche et de la Technologie.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel k de caractéristique positive p, algébriquement clos. La valuation définit une topologie totalement discontinue sur le corps des fractions K de R. Néanmoins, grâce à la géométrie rigide de Tate [16], on peut parler d'une géométrie analytique globale sur le corps K.

Dans ce travail, nous étudions des revêtement finis galoisiens de courbes analytiques rigides. Lorsque le degré du revêtement est premier à la caractéristique résiduelle p, la situation ne présente pas de nouveautés par rapport au cas classique (sur le corps des complexes); par contre, en travaillant avec des revêtements de degré multiple de p, on rencontre des phénomènes de ramification sauvage, et on est confronté à des situations complètement différentes suivant la caractéristique de K.

Dans le premier chapitre, nous considèrons un revêtement étale, galoisien de groupe G, de la couronne $C = \{x \in K : |x| = 1\}$. Nous montrons que, quitte à passer à une extension finie K'/K, il peut être prolongé en un revêtement algébrique fini du disque $D = \{x \in K' : |x| \leq 1\}$, galoisien de groupe G et ramifié sur un ensemble fini de points de D; lorsque p divise $|G|$ et K est de caractéristique 0, on ne peut pas en général trouver un prolongement ramifié seulement à l'origine.

Il est intéressant de remarquer que la complexité du groupe G ne joue aucun rôle: en fait on peut se ramener au cas où G est extension d'un p-groupe par un groupe cyclique d'ordre premier à p.

Nous travaillons ici avec les groupe fondamentaux de courbes affinoïdes. Si A est l'algèbre de l'affinoïde X, $\pi_1(X)$ désigne le groupe profini $\pi_1(\operatorname{Spec} A)$; nous introduisons aussi un groupe fondamental $\pi_1(D_0)$ qui classe les revêtement algébriques du disque D étales en dehors de 0. La solution au problème suit alors d'une étude detaillée de la flêche naturelle $\pi_1(C) \to \pi_1(D_0)$. Il s'agit de groupes *profinis*, et nos aurons en fait à traiter avec leur pro-p-quotients maximaux. Le premier paragraphe est donc consacré à des rappels et à quelques résultats techniques sur les pro-p-groupes.

Si on néglige l'arithmétique du corps K en travaillant avec des revêtements géométriques, les pro-p-quotient fondamentaux qui interviennent alors sont des pro-p-groupes libres, et les résultats qui nous intéressent se déduisent de leur cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On est donc ramené à l'étude des revêtements cycliques de degré p, une situation que l'on sait traiter aisément grâce à la théorie de Kummer ou d'Artin-Schreier.

Le deuxième chapitre de cette thèse est une contribution à une question classique. Soit X une R-courbe propre et lisse, et soit

$$\rho_k : Y_k \longrightarrow X_k$$

un revêtement fini, galoisien de groupe G, génériquement étale de la fibre spéciale de

X. On demande s'il est possible de trouver un revêtement fini

$$\rho : Y \longrightarrow X$$

galoisien de groupe G de R-courbes propres et lisses, qui se réduise suivant ρ_k.

En particulier, puisque toute courbe X_k propre et lisse sur k admet un R-modèle propre et lisse X, on demande si, étant donné un revêtement galoisien $\rho_k : Y_k \to X_k$, il est possible de le relever sur R.

Grothendieck a démontré (SGA 1) que si ρ_k est étale, il existe une unique solution à ce problème; si ρ_k est modérément ramifié, il existe une unique solution pour tout choix du diviseur de la ramification dans X. Par contre, si ρ_k est sauvagement ramifié et K et de caractéristique 0, il n'est pas possible en général de trouver un tel revêtement.

Dans le chapitre II nous démontrons que, quitte à passer à une extension finie K'/K, il existe un revêtement galoisien de groupe G

$$\rho' : Y' \longrightarrow X \times_R R'$$

de R'-courbes propres normales, tel que la fibre spéciale Y'_k de Y' soit réduite, admette un G-morphisme de normalisation $Y_k \to Y'_k$ et ait au pire des points de rebroussement au dessus des points sauvagement ramifiés de X_k. La fibre générique X_K de X est une courbe analytique rigide propre et lisse. Par les théorèmes de Grothendieck mentionnés ci-dessus, on dispose d'un revêtement galoisien modéré de l'ouvert U_K de X_K complémentaire des points se réduisant sur le diviseur de la ramification sauvage dans X_k. Aprés une localisation étale, on est ramené à prolonger à l'intérieur de ces disques un revêtement galoisien dont le groupe est le groupe d'inertie au point de X_k correspondant, ce qu'on peut faire par les techniques de la premiere partie.

Chapitre I

Prolongements de revêtements galoisiens de couronnes rigides

§1-Rappels sur les pro-p-groupes

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats connus sur les groupes profinis et leur cohomologie dont nous nous servirons dans la suite; nous renvoyons aux ouvrages de Serre [13] et Shatz [15] pour les démonstrations.

Un *groupe profini* est un groupe topologique limite projective de groupes finis (munis de la topologie discrète): c'est donc un groupe topologique compact totalement discontinu; une base de voisinages de l'unité est formée par les sous-groupes ouverts distingués. Les groupes profinis, munis des homomorphismes continus, forment une catégorie où les produits infinis et les limites projectives existent. Pour un nombre premier p fixé, on appelle *pro-p-groupe* un groupe profini, limite projective de p-groupes finis.

Dans la théorie des groupes profinis, un rôle particulièrement important est joué par les groupes libres; soit I un ensemble d'indices et $\Lambda(I)$ le groupe abstrait libre engendré par des éléments $\{x_i\}_{i\in I}$, muni de la topologie discrète: le *groupe profini libre* engendré par les $\{x_i\}_{i\in I}$ est le completé profini de $\Lambda(I)$, i.e.

$$L(I) = \varprojlim_{U} \Lambda(I)/U$$

où les U varient parmi les sous-groupes distingués de $\Lambda(I)$ tels que 1) $\Lambda(I)/U$ est un groupe fini, et 2) U contient presque tous les x_i. Le *pro-p-groupe libre* engendré par les $\{x_i\}_{i\in I}$ est défini comme la limite $L^{(p)}(I) = \varprojlim_U \Lambda(I)/U$, où les U varient parmi les sous-groupes distingués de $\Lambda(I)$ vérifiants les conditions 1) et 2) ci-dessus et encore 3) $\Lambda(I)/U$ est un p-groupe.

L'appellation de groupe libre est justifiée par la proprieté suivante, immédiate à partir des définitions: si G est un groupe profini (resp. un pro-p-groupe) les morphismes de $L(I)$ (resp. $L^{(p)}(I)$) dans G correspondent bijectivement aux familles d'éléments $(g_i)_I$ de G qui tendent vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de G.

Une propriété remarquable des groupes profinis est l'existence de sections continues: si $f : G_1 \to G_2$ est un morphisme surjectif de groupes profinis, il existe une application continue $s : G_2 \to G_1$ telle que $f \circ s$ soit l'identité sur G_2 (cf. Serre [13] prop. 1, p.I-2). Cela déjà suffit à prouver la

Proposition 1. *Un groupe profini libre L (resp. un pro-p-groupe libre $L^{(p)}$) a la propriété de relèvement pour les suites exactes de groupes profinis (resp. les suites exactes de pro-p-groupes)*

$$1 \to N \to E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$$

i.e. pour tout homomorphisme $\phi : L \to Q$ il existe un homomorphisme $\phi' : L \to E$ tel que $\phi = \pi \circ \phi'$. En particulier tout automorphisme α d'un quotient L/S de L se relève à un endomorphisme de L.

Le premier énoncé est évident à partir des propriétés mentionnées ci-dessus. Le deuxième est une application de la propriété du relèvement à la suite

$$1 \to S \to L \xrightarrow{\pi} L/S \to 1$$

et au morphisme $\phi : L \xrightarrow{\pi} L/S \xrightarrow{\alpha} L/S$.

Si G est un groupe profini, on note $\mathcal{C}_G$ la catègorie des G-modules discrets, i.e. la catègorie des groupes abéliens avec topologie discrète munis d'une action continue de G. Si $A \in \mathcal{C}_G$ on peut definir les groupes

$$C^n(G, A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(G^n, A)$$

et un cobord $d : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ par la formule usuelle

$$(d\phi)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 . \phi(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} \phi(g_1, \ldots, g_n).$$

La cohomologie de G à valeurs dans A est alors définie comme la cohomologie du complexe $(C^n(G, A), d)$; en particulier $H^0(G, A) = A^G$, le sous-groupe des éléments de A invariants sous l'action de G et, si A est muni d'action triviale, $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(G, A)$. En fait on peut prouver que les $H^q(G, -)$ sont des δ-foncteurs universels de $\mathcal{C}_G$ dans la catègorie des groupes abéliens et que $H^q(G, -)$ est le q-iéme foncteur derivé à droite de $H^0(G, -)$ (cf. Shatz [15], prop.5, p.29).

La cohomologie des groupes profinis est reliée à la théorie analogue pour les groupes finis par la proposition suivante:

Proposition 2. *(Serre [13] prop.8, p.I-9) Si $(G_i)_I$ est un système projectif de groupes profinis et $(A_i)_I$ un système inductif de G_i-modules discrets (les morphismes $A_i \to A_j$ étant compatibles avec les $G_j \to G_i$), alors, pour tout $q \geq 0$:*

$$H^q(\varprojlim G_i, \varinjlim A_i) = \varinjlim H^q(G_i, A_i)$$

Si p est un nombre premier fixé, on appelle *p-dimension cohomologique* d'un groupe profini G, le plus petit entier n tel que, pour tout $q > n$, la p-composante primaire de $H^q(G, A)$ soit nulle pour tout G-module discret de torsion A; on le note $cd_p G$. En fait, pour montrer que $cd_p G = n$ il suffit de vérifier que $H^{n+1}(G, A) = 0$ pour tout G-module discret simple annulé par p (Serre [13], prop. 11); la proposition 2 permet alors de se reduire au cas d'un module fini (tout G-module A comme ci dessus étant limite inductive de ses sous-modules de type fini). Si G est un pro-p-groupe, le seul G-module discret, simple fini annulé par p est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni d'action triviale (Serre [13], prop.20, p.I-32):

Proposition 3. *Si G est un pro-p-groupe, cd_pG est le plus petit entier n tel que*

$$H^{n+1}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0.$$

Bien entendu, on a $G = \{1\}$ si et seulement si $cd_pG = 0$ pour tout nombre premier p; de plus, on a la caractérisation suivante:

Proposition 4. *(Serre [13], prop.16, p.I-23) Soit G un groupe profini, p un nombre premier. Alors $cd_pG \leq 1$ si et seulement si G a la propriété du relèvement pour les suites exactes de groupes profinis*

$$1 \to N \to E \to Q \to 1$$

où le noyau N est un pro-p-groupe.

La proposition 3 nous permet de nous borner, dans la suite, à l'étude de la seule cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni de l'action triviale; en particulier $H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Le *sous-groupe de Frattini* G^* d'un pro-p-groupe G est défini comme le sous-groupe fermé distingué de G intersection des noyaux de tous les homomorphismes $\chi : G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'application $g \mapsto \phi_g$, où

$$\begin{aligned} \phi_g : H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \chi &\to \chi(g) \end{aligned}$$

établit un isomorphisme entre le groupe compact G/G^* et le dual du groupe discret $H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (dualité de Pontrjagin).

Proposition 5. *(Serre [13], prop.23 p.I-35) Une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un homomorphisme*

$$\varphi : G_1 \to G_2$$

entre pro-p-groupes soit surjectif, est que l'homomorphisme induit

$$\bar{\varphi} : G_1/G_1^* \to G_2/G_2^*$$

soit surjectif, ou, dualement, que l'homomorphisme

$$H^1(\varphi) : H^1(G_2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(G_1, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

soit injectif.

Puisque les images homomorphes d'un pro-p-groupe libre $L^{(p)}(I)$ sont determinées par les images d'un système de générateurs, on voit bien que

$$H^1(L^{(p)}(I), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \prod_I \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Proposition 6. *(Serre [13] prop.24 p.I-36) Soit G un pro-p-groupe, I un ensemble et*

$$\varphi : H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \prod_I \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

un homomorphisme. Alors:

(1) *Il existe un morphisme $f : L^{(p)}(I) \to G$ tel que $\varphi = H^1(f)$.*
(2) *Si φ est injectif, f est surjectif.*
(3) *Si φ est bijectif et si $cd_p G \leq 1$, f est un isomorphisme.*

Corollaire 1. *Tout pro-p-groupe est quotient d'un pro-p-groupe libre. Pour qu'un pro-p-groupe soit libre, il faut et suffit que $cd_p G \leq 1$.*

Corollaire 2. *Si L est un pro-p-groupe libre, tout automorphisme de L/L^* se relève à un automorphisme de L.*

Il suffit pour cela d'appliquer le critère précédent au relèvement donné par la proposition 1.

Nous dirons qu'un sous-groupe F d'un pro-p-groupe libre L est un *facteur direct* de L si l'inclusion naturelle $i : F \to L$ admet un scindage, i.e. un homomorphisme $s : L \to F$ tel que $s \circ i = 1_F$. Si N est le noyau d'un tel scindage s, l'application $F * N \to L$ induit un isomorphisme en cohomologie et est donc un isomorphisme, car elle est surjective et, L étant libre, elle admet un scindage surjectif: on en déduit que F est nécéssairement un sous-groupe distingué de L, libre, car la dimension cohomologique d'un sous-groupe fermé est majorée par la dimension du groupe. De même, le sous-groupe N défini ci-dessus est un facteur direct libre de L: nous dirons qu'il est un *supplémentaire de F*: remarquons que ce sous-groupe, comme le scindage s qui le définit, n'est pas unique.

Proposition 7. *Soit F un pro-p-groupe, $f : F \to L$ un homomorphisme de F dans un pro-p-groupe libre tel que $H^1(f)$ soit surjectif: alors f fait de F un facteur direct de L.*

Preuve. Soit $H = f(F)$ l'image de F, $i : H \hookrightarrow L$ l'inclusion naturelle. H est un sous-groupe fermé du groupe libre L (ces groupes sont compacts); il est donc libre. Puisque l'application composée $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjective, le deuxième homomorphisme est surjectif, mais il est aussi injectif, car $F \to H$ est surjectif (proposition 5).

On a alors que $H^1(i) : H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels, qui admet donc un scindage $\gamma : H^1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$; par dualité de Pontrjagin et par la proposition 6, il existe un homomorphisme surjectif $g : L \to H$ tel que $H^1(g) = \gamma$. On voit bien alors que l'homomorphisme $f * j : H * \ker g \to L$ (j étant l'inclusion naturelle) est un isomorphisme, car il l'est en cohomologie (proposition 6).

D'autre part, $H^1(f) : H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est aussi un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels; par la proposition 6, le scindage $\sigma : H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$\to H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se relève en un homomorphisme $s : L \to F$ tel que $\sigma = H^1(s)$, et s est surjectif puisque σ est injectif. De plus, $f \circ s|_H$ est un endomorphisme du pro-p-groupe libre H qui induit l'identité en cohomologie: on en déduit que $f \circ s|_H$ est un isomorphisme. En particulier $s|_H$ est aussi injectif, et donc f établit un isomorphisme entre F et le facteur direct H.

Nous terminons ce paragraphe par un lemme sur le pro-p-groupes qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 1. *Soit L un pro-p-groupe libre, Γ un groupe fini d'ordre premier à p. Alors une action de Γ sur L/L^* se relève en une action sur L.*

Preuve. On notera n l'ordre de Γ, premier à p. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des couples (S, φ_S) formés d'un sous-groupe fermé distingué S de L et d'une action $\varphi_S : \Gamma \to Aut(L/S)$ de Γ sur L/S. On peut ordonner $\mathfrak{S}$ par la relation suivante: on dit que $(S', \varphi_{S'}) \leq (S, \varphi_S)$ si

1) $S' \subset S$;

2) Les actions φ_S et $\varphi_{S'}$ sont compatibles, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd} L/S' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{S'}(\sigma)"'] & L/S \arrow[d, "\varphi_S(\sigma)"'] \\ L/S' \arrow[r] & L/S \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout $\sigma \in \Gamma$.

$\mathfrak{S}$ est non vide ($L^* \in \mathfrak{S}$) et si $\{S_i\}_{i \in I}$ est une chaine dans $\mathfrak{S}$, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ est un majorant de la chaine (l'action de Γ sur $L/S \simeq \varprojlim L/S_i$ est définie à partir des L/S_i). On peut donc appliquer le lemme de Zorn à $\mathfrak{S}$ pour trouver un élément maximal N de $\mathfrak{S}$; on va montrer que $N = \{1\}$.

Par la propriété de relèvement des pro-p-groupes libres (prop.1), tout élément σ de Γ peut se relever en un automorphisme $\hat{\sigma}$ de L: en choisissant un relèvement pour tout $\sigma \in \Gamma$ on peut former le sous-groupe Γ_1, a priori infini, de $Aut(L)$ engendré par tous ces $\hat{\sigma}$; nous conviendrons de prendre $\hat{1} = 1$.

Si $N \neq \{1\}$, il existe un sous-groupe ouvert distingué U de L tel que $N \not\subset U$; quitte à remplacer U par $\bigcap_{\sigma \in \Gamma} \hat{\sigma}(U)$ on peut supposer que U soit stable sous l'action de Γ_1. On va montrer qu'il est possible de relever l'action de Γ sur le quotient $L/U \cap N$, ce qui contredit la maximalité de N.

Considérons la suite exacte

$$1 \to N/N \cap U \to L/N \cap U \to L/N \to 1$$

Puisque U est ouvert, $N/N \cap U$ est un p-groupe fini. On a alors que pour tout $\sigma \in \Gamma$ et pour tout élément $x \in L/N \cap U$, $\hat{\sigma}^{m.\mathrm{ord}\sigma}(x).x^{-1}$ appartient au groupe fini $N/N \cap U$ pour tout entier m; on en déduit que l'action de tout générateur de Γ_1 sur $L/N \cap U$ est d'ordre fini et que Γ_1 agit sur $L/N \cap U$ *via* un quotient fini convenable Γ_2. Par abus de notation on continuera à appeler $\hat{\sigma}$ l'image de $\hat{\sigma}$ par la projection $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

Si p^m est la plus grande puissance de p divisant $|\Gamma_2|$, et si $n = |\Gamma|$, puisque on a supposé $(n, p) = 1$, on peut trouver un entier a tel que $p^{am} \equiv 1 \pmod{n}$: l'application

$$\phi : \Gamma \to \Gamma_2$$
$$\sigma \to \hat{\sigma}^{p^{am}}$$

constitue un scindage ensembliste pour la projection canonique $\Gamma_2 \to \Gamma$ telle que tout élément $\phi(\sigma)$ soit d'ordre premier à p. Ceci nous permet de montrer que cette application ϕ est en fait un morphisme de groupes: si σ et τ sont deux éléments de Γ, l'élément $\alpha = \phi(\sigma)\phi(\tau)(\phi(\sigma\tau))^{-1}$ de Γ_2 laisse stable $N/N \cap U$ et agit trivialement sur L/N; on a donc que le sous-groupe $A = \langle\alpha\rangle$ de Γ_2 stabilise la suite normale à un cran

$$L/N \cap U \supset N/N \cap U \supset \{1\}$$

Le lemme suivant implique alors que A est réduit à l'unité, et donc ϕ est bien un scindage: on peut donc munir $L/N \cap U$ d'une action de Γ, de sorte que $N \cap U$ appartienne à $\mathfrak{S}$, ce qui contredit la maximalité de N.

Lemme 2. *Soit M un pro-p-groupe, $A \subseteq Aut(M)$ un sous-groupe fini d'ordre premier à p. Si A* stabilise *une suite normale*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = \{1\}$$

(i.e. tout M_i est stable par A et A agit trivialement sur les quotients successifs) alors $A = \{1\}$

Preuve. C'est une simple extension au cas profini d'un résultat classique sur les p-groupes finis: $M = \varprojlim M/U$ est une limite projective de p-groupes finis où les U sont des sous-groupes ouverts distingués compacts, formant un système de voisinages de 1. Le groupe A étant fini et M Hausdorff, l'intersection de tous les sous-groupes ouverts distingués, compacts de M stables par A est reduite à l'unité: on peut donc supposer que le système de voisinages choisi soit formé d'ouverts A-stables. Pour un U donné, la suite normale $\{M_i\}$ induit une suite normale

$$M/U \supseteq M_1/U \cap M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n/U \cap M_n = \{1\}$$

pour le p-groupe fini M/U stabilisée par l'action de A (car $(M_i/U \cap M_i)/(M_{i+1}/U \cap M_{i+1})$ est un quotient de M_i/M_{i+1}): cela implique que le groupe A agit trivialement sur le p-groupe fini M/U (cf. Gorenstein [3], corollaire 5.3.3); par passage à la limite on en déduit que A agit trivialement sur M.

Remarque. Si Γ agit sur L/L^* par automorphismes intérieurs, la même démonstration met en évidence que Γ peut être relevé en un sous-groupe de $Int\,(L)$.

Lemme 3. *Si $\phi : \Gamma \to Aut(L)$ et $\psi : \Gamma \to Aut(L)$ sont deux relèvements d'une action de Γ sur L/L^*, il existe un automorphisme α de L, induisant l'identité en cohomologie, tel que $\psi(\sigma) = \alpha \circ \varphi(\sigma) \circ \alpha^{-1}$, pour tout $\sigma \in \Gamma$.*

Preuve. On note $\Phi = \phi(\Gamma)$ et $\Psi = \psi(\Gamma)$ les deux sous-groupes de $Aut(L)$ images de Γ; si S est un sous-groupe distingué de L stable par Φ et Ψ, on note Φ_S (resp. Ψ_S) l'action de ces groupes sur le quotient L/S. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des couples (S, α_S) formés d'un sous-groupe fermé distingué S de L, stable par $\phi(\Gamma)$ et $\psi(\Gamma)$, et d'un automorphisme $\alpha_S \in Aut(L/S)$ tel que $\Psi_S = \alpha_S \Phi_S \alpha_S^{-1}$. On peut ordonner $\mathfrak{A}$ par la relation suivante: on dit que $(S', \alpha_{S'}) \leq (S, \alpha_S)$ si

1) $S' \subset S$;

2) $\alpha_{S'}$ se réduit sur α_S, i.e. on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L/S' & \longrightarrow & L/S \\ {\scriptstyle \alpha_{S'}} \downarrow & & {\scriptstyle \alpha_S} \downarrow \\ L/S' & \longrightarrow & L/S \end{array}$$

$\mathfrak{A}$ est non vide ($(L^*, 1) \in \mathfrak{A}$) et si $\{(S_i, \alpha_{S_i})\}_{i \in I}$ est une chaine dans $\mathfrak{A}$, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ et l'automorphisme α_S de $L/S \simeq \varprojlim L/S_i$ défini à partir des α_{S_i} définissent un majorant de la chaine. On peut alors appliquer le lemme de Zorn à $\mathfrak{A}$ pour trouver un élément maximal (N, α_N) de $\mathfrak{A}$; on va montrer que $N = \{1\}$.

Par la propriété de relèvement des pro-p-groupes libres (prop.1), α_N peut se relever en un endomorphisme $\hat{\alpha}$ de L qui est un automorphisme car il induit l'identité en cohomologie (corollaire 2 à la prop. 6).

Si $N \neq \{1\}$, il existe un sous-groupe ouvert distingué U de L tel que $N \not\subseteq U$; quitte à remplacer U par $\bigcap_{\sigma \in \Gamma} \left(\phi(\sigma)(U) \cap \psi(\sigma)(U) \cap \hat{\alpha}\phi(\sigma)\hat{\alpha}^{-1}(U)\right)$ on peut supposer que U soit stable simultanèment sous l'action de Φ, Ψ et $\hat{\alpha}\Phi\hat{\alpha}^{-1}$.

Considérons la suite exacte

$$1 \to N/N \cap U \to L/N \cap U \to L/N \to 1$$

et notons G le sous-groupe de $Aut(L/N \cap U)$ formé des automorphismes qui stabilisent $N/N \cap U$. On dispose alors d'une suite exacte

$$1 \to H \to G \xrightarrow{r_N} Aut(L/N) \to 1$$

où r_N est la réduction mod. $N/N \cap U$ et H est le sous-groupe de G formé des automorphismes de $L/N \cap U$ qui induisent l'identité sur L/N; puisque $N/N \cap U$ est un p-groupe fini, tout élément de H est d'ordre une puissance de p, car N contient L^*.

Notons (de façon assez abusive) Γ le sous-groupe $\Psi_N = \alpha_N \Phi_N \alpha_N^{-1}$ de $Aut(L/N)$, et soit $G_1 = r_N^{-1}(\Gamma)$ le sous-groupe de G des automorphismes qui se réduisent sur un élément de Γ. G_1 est une extension du groupe fini Γ d'ordre premier à p par le p-groupe H:

$$1 \to H \to G_1 \xrightarrow{r_N} \Gamma \to 1$$

$\Psi_{N\cap U}$ et $\hat{\alpha}\Phi_{N\cap U}\hat{\alpha}^{-1}$ définissent deux scindages de cette suite exacte, et sont donc conjugués: il existe un élément $\beta \in H$ tel que

$$\Psi_{N\cap U} = \beta\hat{\alpha}\Phi_{N\cap U}\hat{\alpha}^{-1}\beta^{-1}$$

Comme β induit l'identité mod. $N \cap U$, $\beta\hat{\alpha}$ se réduit sur α_N, et on a bien que $L/N \cap U$ muni de l'automorphisme $\alpha_{N\cap U} = \beta\hat{\alpha}$ définit un élément de $\mathfrak{A}$, ce qui contredit la maximalité de (N, α_N).

Corollaire. *Soit L un pro-p-groupe libre, F un facteur direct de L et soit $\phi : \Gamma \to Aut(L)$ une action d'un groupe fini d'ordre premier à p. Supposons que F soit stable sous cette action. Alors F admet un supplémentaire stable.*

Preuve. Considerons le groupe de cohomologie $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: il s'agit d'un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, muni d'une action de Γ qui stabilise le facteur direct $H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Puisque Γ est cyclique d'ordre premier à p, on peut trouver un supplémentaire $H^1(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ à $H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, stable sous l'action de Γ.

Soit E un supplémentaire de F relèvant $H^1(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Par le lemme 1, on peut relever l'action de Γ à E. A présent, on dispose de deux action de Γ sur L: d'une part, l'action $\phi : \Gamma \to Aut(L)$ donnée au départ et de l'autre une action définie à partir de la décomposition $\psi : \Gamma \longrightarrow Aut(F) * Aut(E)$ qui coïncide avec ϕ sur le premier facteur et est le relèvement de l'action en cohomologie sur le deuxième. Par le lemme précédent, il existe un automorphisme α de L, induisant l'identité en cohomologie, tel que $\psi(\Gamma) = \alpha\phi(\Gamma)\alpha^{-1}$: il est maintenant facile de vérifier sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\psi(\sigma)"] \arrow[d, "\alpha"'] & L \arrow[d, "\alpha"'] \\ L \arrow[r, "\phi(\sigma)"] & L \end{tikzcd}$$

commutatif pour tout $\sigma \in \Gamma$, que $M := \alpha(E)$ est un supplémentaire de F (l'homomorphisme $F * M \to L$ donne l'identité en cohomologie), stable sous l'action du groupe $\phi(\Gamma)$.

§2-Prolongement de revêtements galoisiens de couronnes rigides

Soit K un corps complet pour une valuation discrète v, R l'anneau de la valuation, π une uniformisante de R, k le corps résiduel, qu'on supposera algèbriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Une *algèbre de Tate* est une K-algèbre topologiquement de type fini, i.e. isomorphe, comme K-algèbre topologique, à un quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes $K\{X_1,\ldots,X_n\}$ (rappelons qu'une série formelle $F=\sum_I a_I \underline{X}^I$ est dite restreinte lorsque $a_I \to 0$ quand $|I| \to \infty$). Nous renvoyons à l'article original de Tate [16] pour une discussion des propriétés de ces algèbres.

Exemples 1. a) L'algèbre $K\{X\}$ des séries convergentes sur le disque unité fermé $D=\{x\in K : |x|\leq 1\}$ de la droite affine sur K.

b) L'algèbre $K\{X,Y\}/(XY-1)$ des séries convergentes sur la couronne d'épaisseur nulle $C=\{x\in K : |x|=1\}$, "bord"de D.

c) L'algèbre $K\{X,Y\}/(XY-\pi^n)$ des séries convergentes sur la couronne $C(r)=\{x\in K : r\leq |x|\leq 1\}$ de rayon $r=|\pi|^n<1$.

Si A est une algèbre de Tate et $f_0,\ldots,f_n$ est un ensemble d'éléments de A engendrant l'ideal unité, on peut former le quotient $B=A\{Y_1,\ldots,Y_n\}/\langle f_1-f_0Y_1,\ldots,f_n-f_0Y_n\rangle$; l'inclusion $A\to B$ donne lieu à une application $\mathrm{Sp}\,B\to\mathrm{Sp}\,A$ entre les spectres maximaux de ces algèbres de Tate qui envoie $\mathrm{Sp}\,B$ sur la partie $U=\{x\in\mathrm{Sp}\,A : |f_i(x)|\leq |f_0(x)|\}$ de $\mathrm{Sp}\,A$ (si x est un point de $\mathrm{Sp}\,A$, le corps $K(x)=A/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie du corps complet K, et donc il existe une unique extension à $K(x)$ de la valuation de K).

Les parties U de $\mathrm{Sp}\,A$ du type decrit ci-dessus sont dites *ouverts standards* de $\mathrm{Sp}\,A$. On définit une topologie de Grothendieck sur $\mathrm{Sp}\,A$ où les ouverts sont les parties de $\mathrm{Sp}\,A$ possèdant un recouvrement fini par des ouverts standards. Un recouvrement ouvert de $\mathrm{Sp}\,A$ est dit *admissible* s'il admet un raffinement fini par des ouverts standards.

On peut munir l'espace topologique $X=\mathrm{Sp}\,A$ d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ tel que pour tout ouvert standard $U=\mathrm{Sp}\,B$ de X, $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)=B$ (cf. Tate [16], 8.2).

Définition. L'espace annelé $X=\mathrm{Sp}\,A$, muni de le topologie de Grothendieck et du faisceau $\mathcal{O}_X$ introduits ci-dessus, est dit *espace analytique rigide affinoïde.*

On définit également la catégorie des espaces rigides affinoïdes de façon immediate, sur laquelle on peut étendre un grand nombre des notions usuelles en géométrie. En particulier on appellera *revêtement étale* de l'affinoïde $\mathrm{Sp}\,A$ un morphisme $f:\mathrm{Sp}\,B\to\mathrm{Sp}\,A$ défini par une A-algèbre finie étale (au sens algébrique) B et on dira de plus que f est un revêtement *galoisien* si A est l'algèbre B^G des invariants de B sous l'action d'un groupe fini G operant librement.

Définition. On appelle *disque rigide standard* (resp. *couronne standard*) l'espace rigide affinoïde de l'exemple 1.a (resp. 1.b); on les note D et C respectivement.

Définition. Si X est un espace rigide affinoïde connexe d'algèbre de Tate A, ω un point géométrique fixé de $\mathrm{Spec}\,A$, on définit le *groupe fondamental profini* de X par la formule

$$\pi_1(X,\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\pi_1(\mathrm{Spec}\,A,\omega)$$

(où le π_1 d'un schéma est au sens de SGA 1).

Une telle définition est justifiée par le fait qu'un revêtement fini étale de X correspond à une A-algèbre finie étale et donc à un revêtement étale du schéma Spec A.

On a donc une équivalence de catégories entre les revêtements finis étales Y de X et les ensembles finis munis d'action de $\pi_1(X,\omega)$ établie par le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}_X(\omega, Y)$.

Définition. Si X est un espace rigide affinoïde, on dira qu'un revêtement étale Y/X est un *revêtement géométrique* de X si Y est géométriquement connexe, i.e. s'il reste connexe après toute extension finie du corps K.

Définition. Si X est un espace rigide affinoïde, on définit le *groupe fondamental géométrique* de X comme le noyau du morphisme canonique $\pi_1(X,\omega) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}, K)$:

(1) $$1 \to \pi_1(X,\omega)_{\text{géom}} \to \pi_1(X,\omega) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}, K) \to 1$$

où $\bar{K}$ une clôture séparable fixée de K dans le corps de ω.

Cette définition ne dépend évidemment pas du choix de ω et de $\bar{K}$.

Ce groupe, qui n'est pas un groupe fondamental d'un espace rigide à proprement parler, puisque on ne dispose pas d'une géométrie rigide sur $\bar{K}$ (ce corps n'étant pas complet en général), peut toutefois être interpreté comme groupe des revêtements géométriques de X dans le sens suivant: puisque $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est la limite projective des groupes $\mathrm{Gal}(L/K)$, où L varie parmi les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\bar{K}$, on déduit de la suite (1) que

$$\pi_1(X,\omega)_{\text{géom}} = \varprojlim_{L/K} \pi_1(X \times_K L, \omega)$$

On va étudier le problème suivant:

Problème. *Soit C' un revêtement fini, étale, galoisien, géométrique de groupe G de la couronne C: est-il possible de le prolonger en un revêtement fini ramifié galoisien géométrique de groupe G du disque D? Peut-on trouver un tel revêtement ramifié seulement à l'origine?*

Proposition 1. *Aprés une extension finie L/K du corps de base, tout revêtement fini étale galoisien de la couronne C se prolonge en un revêtement fini du disque D, qui est étale et galoisien de même groupe en restriction à une couronne d'épaisseur non nulle $C_L(r) = \mathrm{Sp}\, L\{X,Y\}/(XY - \pi_L^n)$.*

Preuve. Supposons, pour commencer, que le revêtement C'/C soit monogène: notons $A = K\{X, X^{-1}\}$ l'algèbre de Tate de C et $B = K\{X\}[X^{-1}]$ l'algèbre de $D - \{0\}$, X coordonnée de Laurent sur le disque. Soit $A' = A[\alpha] = A[T]/\phi(T)$ l'algèbre d'un revêtement galoisien monogène de groupe G de C; on peut approcher le polynôme $\phi(T) \in A[T]$, qu'on supposera unitaire, par un polynôme unitaire $f(T) \in B[T]$ du même degré. Toute racine de $f(T)$ (dans une clôture algèbrique du corps des fractions de A) est proche d'une racine de $\phi(T)$ et donc f est un polynôme séparable. Si de plus on choisit f suffisamment proche de ϕ pour que la racine a de f qui approche α vérifie l'inégalité

$$|a-\alpha|_v < \inf_{\sigma\in G} |\sigma\alpha - \alpha|_v$$

le lemme de Krasner montre que $A[\alpha] \cong A[a]$, ce qui permet de prolonger le revêtement donné en un revêtement fini de D. Ce revêtement est étale en dehors d'un nombre fini de points: en particulier on peut trouver une couronne d'épaisseur $r > 0$, $C(r)$, et un revêtement étale $C'(r)$ de $C(r)$ qui prolonge C'.

Il est possible que l'épaisseur de cette couronne ne soit pas entière, i.e. que $r > |\pi|$, et donc que la couronne semi-ouverte $r \leq |x| < 1$ ne contienne pas de points rationnels sur K; il est alors nécéssaire d'introduire une extension finie L du corps de base, pour en faire apparaitre.

Le germe de prolongement est unique: de façon précise, si le revêtement C' de C possède une section ε, cette section se prolonge au dessus de $C(r)$ pour r suffisament grand (cf. Raynaud [9], lemme 3.4.3); en appliquant cette remarque au revêtement $\coprod_{Aut(C'(r)/C')} C'(r)$ de $C(r)$, on voit bien que si C'/C est galoisien, quitte à augmenter r on peut supposer que le revêtement prolongé $C'(r)/C(r)$ est galoisien de groupe G.

On a supposé que le revêtement était monogène: cette hypothèse n'est pas restrictive, car le fait que K soit infini implique que localement (pour la topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec} A$) toute A-algèbre finie étale est monogène (cf. Raynaud [7], prop. 11 p. 34). Soit encore A' l'algèbre du revêtement C'/C et fixons un point $c \in C$: il existe alors un voisinage de Zariski U de c et un élément $\alpha \in A'$ tel que $A'|_U = A[\alpha]|_U$. Si $C - U = \{a_1, \ldots, a_s\}$, pour δ suffisament petit, les disques $\Delta_i = \{x \in K : |x - a_i| < \delta\}$ sont contenus dans C et tous disjoints. Posons $V = C - \bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i$, V est un ouvert standard de C. On peut prolonger le revêtement $A[\alpha]|_V$ par les methodes ci-dessus: en le recollant au revêtement initial au dessus de l'ouvert standard V on trouve le prolongement cherché.

Corollaire. *Avec les notations de la proposition, la restriction du revêtement prolongé au dessus de la couronne semi-ouverte $r \leq |x| < 1$ est decomposée en une somme de revêtements galoisiens de groupe de galois résoluble, produit semi-direct d'un p-groupe par un groupe cyclique d'ordre premier à p.*

Preuve. Nous reprenons ici les arguments de Raynaud [9], 3.4. La couronne $C_L(r) = \operatorname{Sp} L\{X,Y\}/(XY - \pi_L^n)$ sur la quelle on a prolongé le revêtement de départ admet un *modèle formel* standard

$$\mathfrak{C}(r) = \operatorname{Spf} R_L\{X,Y\}/XY - \pi_L^n$$

(nous renvoyons au prochain chapitre pour une explication de cette terminologie): c'est un schéma formel affine dont la fibre spéciale $\operatorname{Spec} k[X,Y]/XY$ est formée de deux droites affines qui se coupent transversalement en un point O sur lequel se spécialisent les points de la couronne rigide ouverte $0 < v(x) < r$. On peut alors établir une bijection entre les composantes connexes de $C'_L(r)$ au dessus de l'intérieur de $C_L(r)$ et les points de la fibre spéciale de $\mathfrak{C}'(r)$ au dessus de O, et entre les groupes de décomposition de ces composantes et ceux des point correspondants. Pour r suffisament grand, le sous-schéma réduit Q_k de la fibre spéciale de $\mathfrak{C}'(r)$ au dessus de la droite $\{Y = 0\}$ est normal aux points qui sont au dessus de O (cf. Raynaud [9], lemme 3.4.2); notons $y_1, \ldots, y_d$ ces points. Si η_i est le point générique de la composante irréductible de Q_k passant par y_i et D_{η_i}, I_{η_i} désignent respectivement les sous-groupes de décomposition et d'inertie en η_i, le groupe D_{η_i}/I_{η_i} opère fidèlement sur la composante irréductible de Q_k passant par y_i: si $J_{y_i} \subset D_{\eta_i}/I_{\eta_i}$ est le sous-groupe d'inertie en y_i, le sous-groupe de décomposition $D_{y_i} \subset G$ en y_i est alors extension de J_{y_i} par I_{η_i}. Quitte à étendre ulterieurement le corps L, de façon à éliminer l'inertie provenant de la base, on peut appliquer les théorèmes classiques sur les groupes d'inertie des corps locaux (par exemple Serre [14], corollaire 4.2.4) pour montrer que ces groupes de décompositions sont résolubles, extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p par un p-groupe. Par la correspondance ci-dessus, la restriction de $\mathfrak{C}'(r)$ au dessus de la couronne semi-ouverte $0 < v(x) \leq r$ est alors un revêtement décomposé du type indiqué.

Remarque 1. L'interêt du corollaire est bien sûr de simplifier la situation du groupe G.

Remarque 2. Dans la démonstration de la proposition 1, on a prolongé un revêtement galoisien de C en un revêtement ramifié du disque D (pour l'instant non galoisien), c'est à dire un revêtement ramifié algébrique de l'anneau de D.

Soit S l'ensemble fini des points de ramification: si K est de caractéristique nulle, Lütkebohmert a montré que tout revêtement rigide de $D - S$ se prolonge en un revêtement algébrique ramifié de D (cf. Lütkebohmert [5], corollary 2.9). Par contre, un tel énoncé est faux en égale caractéristique (cf. *loc. cit.*, example 2.10).

Dans la suite nous éviterons cet écueil en travaillant systématiquement avec des revêtements algébriques ramifiés d'affinoïdes.

Avant d'enoncer les théorèmes, nous passons en revue quelques exemples typiques des cas que nous aurons à traiter; nous utiliserons d'ailleurs les considérations faites à cette occasion au cours des démonstrations.

Proposition 2.a. *Tout revêtement cyclique de degré premier à p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien de D, étale en dehors de* 0.

Preuve. Soit $(n,p) = 1$ et donnons nous un revêtement cyclique de degré n de la couronne C. Par la théorie de Kummer, ce revêtement est monogène, donné par une équation $T^n - \alpha(X) = 0$, $\alpha(X)$ une unité de $K\{X, X^{-1}\}$ (comme k est algébriquement clos, R contient les racines n-iémes de l'unité). On peut approximer α par un polynôme de Laurent $a(X) \in K\{X\}[X^{-1}]$ qui est encore une unité sur C. Si π est l'uniformisante de R, on peut écrire $a(x) = \pi^N x^M a'(x)$, où $a'(x) \in R[x]$ est inversible de norme 1 sur C: $a'(x) = u(1+b(x))$, $b(x) \in \pi R[x]$: $1+b(x)$ admet une racine n-iéme, car $(n,p) = 1$, et la théorie de Kummer permet de remplacer l'équation de départ: on peut donc prolonger le revêtement en un revêtement galoisien (le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ agissant par multiplication par les puissances d'une racine primitive de l'unité) du disque ramifié seulement à l'origine.

Proposition 2.b. *Si K est de caractéristique 0 et contient les racines p-ièmes de l'unité, tout revêtement galoisien de degré p de C se prolonge en un revêtement fini galoisien de D, étale en dehors d'un nombre fini de points.*

Preuve. Par la théorie de Kummer on peut supposer que le revêtement en question est monogène, donné par une équation $T^p - \alpha(X) = 0$, $\alpha(X)$ une unité de $K\{X, X^{-1}\}$. Par la proposition 1, on peut approximer α par un polynôme de Laurent $a(X) \in K\{X\}[X^{-1}]$ qui est encore une unité sur C. En essayant de répéter le raisonnement de la proposition précédente, on peut écrire la série binomiale $(1+X)^{1/p} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l/l!X^l$, avec $v(a_l) = -l$ et donc, dans les notations de la preuve de la prop. 2.a, le polynôme $1 + b(x)$ admet une racine p-iéme seulement si $b(x) \in \pi^r R[x]$, avec $r > \frac{v(p)}{p-1} + 1$. Dans le cas $(n,p) \neq 1$ on est donc forcé d'admettre de la ramification à l'origine et sur l'ensemble fini $a(x) = 0$.

Proposition 2.c. *Si K est de caractéristique p, tout revêtement galoisien de degré p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien de D, étale en dehors de 0.*

Preuve. Par la théorie d'Artin-Schreier on peut supposer que le revêtement en question est monogène, donné par une équation $T^p - T - \alpha(X) = 0$, $\alpha(X) \in K\{X\}[X^{-1}]$, et le prolonger en un revêtement galoisien du disque épointé, donné par une équation $T^p - T - a(X) = 0$, $a(X) \in K\{X\}[X^{-1}]$: c'est bien un revêtement fini galoisien du disque, ramifié au plus en 0.

Pour traiter des revêtements arbitraires de C nous allons étudier plus en détail les groupes fondamentaux de C et de D. Pour ne pas trop alourdir la notation, nous éviterons de mentionner le point base ω de ces groupes, que nous supposerons fixé une fois pour toutes dans C.

Notons $\pi_1(D_0) = \pi_1(\mathrm{Spec}\, K\{X\}_0)$ le groupe fondamental qui classe les revêtements finis de D étales en dehors de 0; soit $\pi_1^{(p)}(C)$ (resp. $\pi_1^{(p)}(D_0)$) le plus grand pro-p-quotient de $\pi_1(C)$ (resp. $\pi_1(D_0)$, cf. remarque 2).

Comme nous venons de le voir dans les exemples ci-dessus, le cas le plus simple se présente lorsque K est de caractéristique p.

Lemme 3. *Supposons K de caractéristique $p > 0$. Alors la flèche naturelle*

$$u^{(p)} : \pi_1^{(p)}(C) \longrightarrow \pi_1^{(p)}(D_0)$$

induite par l'immersion $C \hookrightarrow D$ fait de $\pi_1^{(p)}(C)$ un facteur direct de $\pi_1^{(p)}(D_0)$.

Preuve. $\pi_1^{(p)}(D_0)$ est libre car $cd_p\, \pi_1(D_0) \leq 1$ (la p-dimension cohomologique d'un schéma affine noetherien de caractéristique p est au plus égale à un, cf. SGA 4 III, th.

5.1 p. 58); la théorie d'Artin-Schreier et la proposition 2.c montrent que tout homomorphisme continu

$$f : \pi_1^{(p)}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

s'étend en un revêtement du disque épointé d'équation $T^p - T - a_f(x) = 0$; puisque l'équation du revêtement correspondant à un produit d'homomorphismes fg est $T^p - T - \alpha_f(x) - \alpha_g(x) = 0$, on a bien démontré que

$$H^1(u^{(p)}) : H^1(\pi_1^{(p)}(D_0), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\pi_1^{(p)}(C), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est surjectif: il ne reste plus qu'a appliquer la proposition 7, §1.

Du lemme précédent on déduit immediatement le corollaire suivant:

Théorème 1. *Si K est de caractéristique p, tout revêtement galoisien de degré une puissance de p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien du disque D avec même groupe, ramifié au plus en 0.*

Remarque 3. Signalons au passage, bien que nous n'aurons pas à nous en servir dans la suite, que, quitte à passer à une extension finie du corps K, le lemme 3 et son corollaire restent valides, sans hypothéses sur la caractéristique de K, lorsque on remplace p par un nombre premier $\ell \neq p$. Pour cela on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant la théorie d'Artin-Schreier par la théorie de Kummer: tout ce dont on a besoin est un renseignement sur la dimension cohomologique de $\pi_1^{(\ell)}(D_0)$.

Dans le cas d'inégale caractéristique la proposition 2.c montre bien qu'il n'est pas possible, en général, d'avoir le même resultat pour des revêtements de degré divisible par la caractéristique résiduelle; de plus les groupes fondamentaux sont de p-dimension cohomologique au moins 2, si le corps K n'est pas algébriquement clos.

Nous allons plonger le disque rigide D dans $\mathbf{P}^1_K$, sur lequel on peut définir une structure d'espace analytique rigide (non affinoïde) par recollement de deux copies de D, centrées en 0 et ∞, le long de la couronne C. Pour le groupe fondamental profini du schéma $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ on dispose encore d'une suite exacte du type (1)

$$1 \to \pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0,\infty\}) \to \pi_1(\mathbf{P}^1_K - \{0,\infty\}) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}, K) \to 1$$

où le noyau est le groupe fondamental du schéma affine $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0,\infty\}$.

Si $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$ est un ensemble fini de points de $\mathbf{P}^1_K - C$, contenant $0, \infty$, rationnels sur une extension finie L/K, on dispose d'un morphisme de groupes profinis

$$\varphi_S : \pi_1(C)_{\text{géom}} \hookrightarrow \pi_1(C \times_K L) \xrightarrow{u_S} \pi_1(\mathbf{P}^1_L - S)$$

où u_S est l'application définie par l'immersion $C \times_K L \to \mathbf{P}^1_L - S$ (L/K étant une extension finie, le corps L est complet pour l'unique extension à L de la valuation de K; en particulier, $C \times_K L$ est la couronne rigide standard sur le corps complet valué L).

Lemme 4. *Supposons K de caractéristique 0. L'application*

$$\varphi^{(p)} = \varprojlim_S \varphi_S^{(p)} : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \longrightarrow \varprojlim_S \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$$

où la limite est prise sur les ensembles finis S de points géométriques de $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - C$, fait de $\pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}}$ un facteur direct de $\varprojlim_S \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$.

Preuve. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ est libre de rang $s - 1 \geq 1$ et peut être engendré par s éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, σ_i étant un générateur profini d'un groupe d'inertie au dessus de a_i, avec la relation $\prod_{i=1}^{s} \sigma_i = 1$ (cf. SGA 1, cor. 2.12 p. 392); si $S' \supset S$, le morphisme $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S') \to \pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ (relatif au même point base ω) est défini en envoyant $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s'-s}$ sur 1.

Les flêches $\varphi_S^{(p)} : \pi_1^{(p)}(C) \to \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ induites par les immersions sont évidemment compatibles avec le système projectif et donnent lieu à un homomorphisme en cohomologie (cf. prop 2, §1)

$$H^1(\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \varinjlim H^1(\pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(\pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

La théorie de Kummer et la propositon 2.b montrent que tout revêtement géométrique cyclique (défini sur une extension finie L/K) de degré p de C se prolonge en un revêtement géométrique de $\mathbf{P}^1_L - S$, pour un ensemble fini S de points rationnels sur L de $\mathbf{P}^1_L - C$ suffisamment grand, et donc la flêche ci-dessus est surjective. D'autre part, le pro-p-groupe $\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ est libre, car

$$H^2(\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \varinjlim H^2(\pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$$

(cf. prop.3, §1). On peut donc appliquer la proposition 7, §1, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. *Si K est de caractéristique nulle, pour tout revêtement géométrique étale galoisien de degré une puissance de p de la couronne rigide, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement fini, géométrique, galoisien de même groupe, du disque $D \times_K L$ étale en dehors d'un nombre fini de points rationnels sur L.*

Preuve. Il est immediat, à partir de la proposition précédente, que tout morphisme surjectif $\vartheta : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \to G$ dans un p-groupe fini G, peut être prolongé en un morphisme surjectif $\vartheta_{lim} : \varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S) \to G$. ϑ_{lim} s'annule sur presque tous les générateurs de $\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$: on peut alors trouver un ensemble fini S de points de $\mathbf{P}_{\bar{K}}$ suffisament grand pour que ϑ_{lim} factorise par un morphisme surjectif ϑ_S tel que

$$(3) \qquad \vartheta : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \xrightarrow{\varphi_S^{(p)}} \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S) \overset{\vartheta_S}{\twoheadrightarrow} G$$

Il ne reste plus qu'à se restreidre à $D \times_K L - \{S \cap D \times_K L\}$, L étant une extension finie de K sur laquelle le revêtement $\vartheta_S : \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_K - S) \to G$ est défini.

Pour traiter le cas d'un revêtement fini d'ordre quelconque on a vu que, quitte à faire une extension finie de K, il suffit de considérer des revêtements par des groupes G qui sont résolubles, produits semi-directs d'un p-groupe P par un groupe cyclique Γ d'ordre premier à p (cf. Corollaire à la Proposition 1). On va d'abord prolonger au dessus de $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ le revêtement cyclique de groupe Γ, $C'' = C'/P$ de C, ce qui est possible grâce à la théorie de Kummer (cf. proposition 2.a), et ensuite prolonger le P-revêtement C' de C'' en appliquant le théorème 1 ou le théorème 2, selon la caractéristique de K: il faut s'assurer que ce deuxième prolongement peut être construit de façon équivariante sous l'action naturelle de Γ, pour que le revêtement composé soit encore galoisien.

Théorème 3. *Si K est de caractéristique nulle et C'/C est un revêtement fini étale géométrique, galoisien de groupe $G = P \ltimes \Gamma$, produit semi-direct d'un p-groupe P par un groupe cyclique Γ d'ordre premier à p, de la couronne rigide d'épaisseur nulle, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement géométrique fini, galoisien de même groupe du disque $D \times_K L$, privé d'un nombre fini de points rationnels sur L.*

Preuve. En considérant la tour des revêtements de C:

$$C' \xrightarrow{P} C'' = C'/P \xrightarrow{\Gamma} C$$

on peut d'abord prolonger C''/C en un Γ-revêtement X'' de $X = \mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ (cf. proposition 2.a).

Par la formule de Hurwitz, un revêtement fini étale de degré premier à p de $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ est totalement ramifié en 0, ∞ et isomorphe à $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$: un revêtement étale géométrique X de degré premier à p de $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ est donc une courbe sur K de genre géométrique 0 qui, puisque 0 est totalement ramifié, possède un point rationnel sur K, et qui est donc isomorphe à $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$.

On peut alors, en appliquant le théorème 1 ou le théorème 2, selon la caractéristique de K et quitte à faire une extension finie L/K, prolonger le P-revêtement C' de C'' en un P-revêtement de $X'' \simeq \mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$, étale en dehors d'un ensemble fini de points $S'' \subset X''(L)$. Toutefois, pour que le revêtement composé

$$X' \xrightarrow{P} X'' = X'/P \xrightarrow{\Gamma} X$$

soit galoisien de groupe G, il faut prendre soin de construir ce P-revêtement $X' \to X''$ de façon équivariante sous l'action de Γ.

De façon précise, le groupe Γ, cyclique d'ordre premier à p, agit sur $X'' - S''$ et sur C'', de façon compatible à l'inclusion: en appliquant le foncteur π_1, on dispose d'une action de Γ sur $\varprojlim \pi_1(X'' - S'')$, et on en déduit une action de Γ sur les pro-p-quotients maximaux qui laisse stable le facteur direct $\pi_1^{(p)}(C'')$.

L'homomorphisme surjectif $\vartheta : \pi_1^{(p)}(C'') \to P$ peut être prolongé en un morphisme surjectif $\vartheta_{lim} : \varprojlim \pi_1^{(p)}(X'' - S'') \to P$ qui est Γ-équivariant si on peut trouver un supplémentaire au facteur direct $\pi_1^{(p)}(C'')$ qui soit stable sous l'action de Γ.

Cette deniere condition étant satisfaite grâce au corollaire au lemme 3, §1, on peut construir un prolongement Γ-équivariant $X' \to X''$ de $C' \to C''$, de façon que le revêtement composé $X' \to X$, qui prolonge le revêtement initial C'/C, soit encore galoisien de groupe G: il ne reste plus qu'à se restreidre à $D \times_K L - \{S \cap D \times_K L\}$, L étant une extension finie de K sur laquelle le revêtement $\vartheta_{S''} : \pi_1^{(p)}(X'' - S'') \to P$ est défini.

Théorème 4. *Pour tout revêtement étale fini galoisien géométrique de la couronne rigide d'épaisseur nulle, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement géométrique fini, galoisien de même groupe du disque $D \times_K L$, privé d'un nombre fini de points rationnels sur L.*

Preuve. Par la proposition 1 et son corollaire, quitte à étendre le corps K, on peut prolonger le revêtement C'/C en un revêtement étale galoisien de groupe G de la couronne $C(r) = \{x \in K : r \leq |x| \leq 1\}$, tel que la restriction de $C'(r)$ au dessus de la couronne semi-ouverte $r \leq |x| < 1$ est un revêtement décomposé en une somme de revêtements galoisiens de groupes résolubles du type $P \ltimes \Gamma$.

Quitte à étendre ultérieurement le corps K, on peut trouver une couronne d'épaisseur nule $\Lambda = \{x \in K : |x| = r_1\}$, contenue dans $C(r)$ (i.e. avec $r < r_1 < 1$). Si $\Lambda' = C'(r) \times \Lambda$ est la restriction de $C'(r)$ au dessus de Λ, on peut appliquer le théorème 3 pour prolonger le revêtement résoluble (réductible) Λ'/Λ en un revêtement Δ' du disque $\Delta = \{x \in K : |x| \leq r_1\}$.

$C'(r)$ et Δ' définissent deux prolongements du revêtement Λ'/Λ. On a dejà mentionné le fait que le germe d'un tel prolongement est unique: pour r, r_1 suffisamment proches, $C'(r)$ et Δ' coïncident sur la couronne $r \leq |x| \leq r_1$; on peut alors les recoller en un revêtement galoisien de groupe G de D.

CHAPITRE II

Relèvement de revêtements galoisiens de courbes algébriques

Soit k un corps algébriquement clos, corps résiduel d'un anneau de valuation discrète complet R et soit X_k une courbe lisse sur k. Le problème du relèvement de X_k en une R-courbe lisse X (ayant X_k pour fibre spéciale) a été étudié dans SGA 1, exp. III. La solution, par des methodes infinitésimales, utilise le langage des schémas formels:

Théorème 0. *(SGA 1, III.6.10) On peut trouver une R-courbe formelle et lisse $\mathfrak{X}$ se réduisant suivant X_k.*

Remarque 1. Le schéma formel $\mathfrak{X}$ est une limite inductive de schémas X_n sur R/π^n, $n \in \mathbb{N}$. Pour un n donné le faisceau des germes d'automorphismes de X_{n+1} qui induisent l'identité sur X_n est canoniquement isomorphe à $\Theta_{X_k} \otimes_k \pi^n R$ (Θ_{X_k} étant le faisceau tangent à X_k, cf. SGA 1, III.6.1); de même, si X_n et X'_{n+1} sont deux schémas lisses sur R/π^{n+1} se réduisant sur X_n mod. π^n, le faisceau des R/π^{n+1}-isomorphismes de X_{n+1} dans X'_{n+1} induisant l'identité sur X_k est un torseur sous $\Theta_{X_k} \otimes_k \pi^n R$ (SGA 1, III.6.2). On a alors une classe d'obstruction au relèvement global de X_n en un X_{n+1} dans le $H^2(X_0, \Theta_{X_k} \otimes_k \pi^n R)$ (SGA 1, III.6.3), qui est nulle puisque X_0 est de dimension 1; par ailleurs, le relèvement X_{n+1} n'est pas unique en général, puisque l'ensemble des classes de R/π^{n+1}-isomorphismes des X_{n+1} se réduisant sur X_n est un torseur sous $H^1(X_0, \Theta_{X_k} \otimes_k \pi^n R)$. En particulier, la courbe formelle $\mathfrak{X}$ n'est pas unique: dans la suite on supposera fixé un choix d'un relèvement formel $\mathfrak{X}$ de X_0.

Corollaire. *Si X_k est une courbe propre et lisse sur k, on peut trouver une R-courbe propre et lisse X se réduisant sur X_k.*

Il suffit pour cela d'appliquer le principe GAGA formel (cf. FGA, exp. 182, thm. 4): par les mêmes techniques employées ci-dessus, un faisceau ample sur X_k se relève en un faisceau cohérent inversible sur $\mathfrak{X}$, dont une puissance convenable définit une immersion fermée de $\mathfrak{X}$ dans un espace projectif sur R. Par les théorèmes des fonctions formelles (cf. FGA, exp. 182, thm. 1 et 2), la courbe formelle propre et lisse $\mathfrak{X}$ est algébrisable, i.e. isomorphe au completé formel $\widehat{X}$ d'une R-courbe algébrique propre et lisse X le long du sous-schéma fermé X_k.

Le but de ce chapitre est l'étude du problème suivant (cf. Oort [6]):

Problème. *Supposons que X_k soit propre et fixons une R-courbe propre et lisse X se réduisant sur X_k; soit*

$$\rho_k : Y_k \longrightarrow X_k$$

un revêtement génériquement étale, galoisien de groupe G, de courbes lisses sur k. Peut-on trouver un revêtement galoisien de groupe G, de R-courbes lisses

$$\rho : Y \longrightarrow X$$

se réduisant sur ρ_k?

Bien entendu, on n'a pas besoin d'hypothèse de propreté pour formuler ce problème, en demandant un relèvement formel de ρ_k. La reponse à cette question dépend de la ramification de ρ_k. Pour un revêtement étale on a le résultat suivant:

Proposition 1. *(SGA 1, I.8.4) Le foncteur de spécialisation*

$$\mathfrak{Y} \longmapsto \mathfrak{Y} \times_R k$$

établit une équivalence de catégories entre les revêtements étales $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ et les revêtements étales de la fibre spéciale X_k et, en particulier, entre revêtements galoisiens.

Corollaire. *Tout revêtement étale galoisien $Y_k \to X_k$ de courbes propres et lisses se relève en un revêtement $Y \to X$ étale galoisien de même groupe de R-courbes propres et lisses.*

Un résultat analogue peut être établit pour des revêtements modérés (cf. corollaire 2 au lemme 3 plus loin); rappelons qu'une extension B/A d'anneaux de Dedekind est dite *modérée* en un ideal maximal $\mathfrak{p}$ de A si pour tout ideal $\mathfrak{b}$ au dessus de $\mathfrak{p}$ l'extension residuelle $B/\mathfrak{b}$ est séparable sur $A/\mathfrak{p}$ et l'indice de ramification ne divise pas la caractéristique de $A/\mathfrak{p}$.

Pour des revêtements sauvagement ramifiés la réponse au problème de départ peut être négative. C'est le cas, par exemple, si R est un anneau d'inégale caractéristique, pour le quotient d'une courbe par son groupe total des automorphismes,

$$\rho_k : Y_k \longrightarrow X_k = Y_k/Aut(Y_k)$$

lorsque ce groupe a plus que $84(g(Y_k) - 1)$ éléments (de telles courbes existent en caractéristique positive, cf. exemple 2 plus loin); si on pouvait relever ρ_k en un revêtement $\rho : Y \to X$ de R-courbes lisses, la fibre générique Y_K serait une courbe lisse sur un corps de caractéristique 0 telle que $Aut_K(Y_K) \gtrsim 84(g(Y_K) - 1)$, et par un théorème classique de Hurwitz on sait que ce n'est pas possible.

Parfois il est possible de relever le revêtement $Y_k \to X_k$ seulement sur une extension ramifiée de R, ce qui conduit à formuler une variante du probleme (*weak lifting problem*, dans la terminologie de Oort [6]): dans cette direction Oort, Sekiguchi et Suwa [11] ont montré que tout revêtement cyclique de degré p peut être relevé sur l'anneau $W(k)[\zeta]$, où $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et ζ une racine primitive p-ième de l'unité.

Le contrexemple ci-dessus (cf. aussi l'exemple 1 plus loin) montre toutefois que l'on ne peut pas espérer un relèvement pour tout revêtement sauvage en inégale caractéristique, même sur un anneau plus ramifié.

Par contre, nous montrerons ici que l'on peut "relever"tout revêtement galoisien dans le sens suivant:

Théorème 1. *Soit X une courbe propre et lisse sur R, et soit*

$$\rho_k : Y_k \to X_k$$

un revêtement fini génériquement étale, galoisien de groupe G de courbes propres et lisses sur k. Il existe alors une extension finie R'/R et un revêtement génériquement étale, galoisien de groupe G

$$\rho' : Y' \to X' = X \times_R R'$$

vérifiant les conditions suivantes:

(1) *Y' est une R'-courbe propre normale.*

(2) *Il existe un G-morphisme ν*

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\rho_k"'] & Y'_k \arrow[d, "\rho'_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

qui est un isomorphisme en dehors du diviseur de la ramification sauvage de ρ_k.

(3) *La fibre spéciale Y'_k est réduite, unibranche et ν est sa normalisation; en particulier Y'_k est homéomorphe à Y_k.*

Comme nous venons de le voir, traditionnellement l'étude de ce type de problèmes a été conduit par des techniques de déformations infinitésimales; nous poursuivrons dans cette approche en employant le language des espaces analytiques rigides.

On a deja utilisé les espaces rigides affinoïdes tout au long du premier chapitre: le lien entre ceux-ci et les schémas formels affines est trés simple. Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{A}$ est un schéma formel affine noethérien, spectre formel d'une R-algèbre noethérienne complète pour la topologie π-adique, par EGA 0, 7.5.3, $\mathcal{A}$ est une R-algèbre topologiquement de type fini, i.e. $\mathcal{A}$ est isomorphe, comme R-algèbre topologique, à un quotient de l'algèbre des series formelles restreintes $R\{T_1, \ldots, T_r\}$ par un idéal $\mathcal{I}$ (nécessairement de type fini, puisque $R\{\underline{T}\}$ est noethérienne). Au schéma formel $\mathfrak{X}$ on peut alors associer l'espace rigide affinoïde $X_K = \mathrm{Sp}(\mathcal{A} \otimes_R K)$, spectre maximal de l'algèbre de Tate $K\{T_1, \ldots, T_r\}/\mathcal{I} \otimes K$.

La notion d'espace rigide général est moins évidente; la définition qui semble le mieux adaptée au besoins de la géométrie formelle a été proposée par Raynaud [8].

La catégorie des espaces rigides séparés et quasi-compacts est définie comme la localisation de la catégorie des R-schémas formels séparés de type fini et complets pour la topologie π-adique par rapport aux éclatements admissibles, où on dit qu'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ est admissible s'il contient une puissance de l'uniformisante π, et on appelle *éclatement admissible* de $\mathfrak{X}$ le long de $\mathcal{I}$ le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$, où $\mathfrak{X}'$ est le schéma formel completé π-adique de l'éclatement de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{I}$.

Par définition, on a donc que tout schéma formel (séparé, complet, de type fini) définit un espace analytique rigide, et un morphisme d'espaces rigides est donné par un triplet $(\mathfrak{X}', \sigma, f)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{X}' \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathfrak{X} & & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où σ est un éclatement admissible et f un morphisme de schémas formels. Un autre triplet $(\mathfrak{X}'', \tau, g)$ donne lieu au même morphisme d'espaces rigides s'il existe un troisième éclatement admissible $\mathfrak{X}'''$ de $\mathfrak{X}$ qui domine $(\mathfrak{X}', \sigma, f)$ et $(\mathfrak{X}'', \tau, g)$ dans un sens évident.

Les raisons pour le choix d'une telle définition (expliquées dans le mémoire cité) sont motivées par le désir de faire le lien entre les recouvrements standards des ouverts affinoïdes et les recouvrements usuels de la géométrie algèbrique et formelle (i.e. par des ouverts complémentaires des zeros de sections d'un fibré inversible): le choix de structures entiéres sur X_K conduit à des idéaux admissibes, et il faut les éclater pour les rendre inversibles.

Plus concrètement, on peut associer à $\mathfrak{X}$ un espace topologique X_K et un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X_K}$, obtenus par recollement des $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_i \otimes K)$, pour un recouvrement affine fini $\mathfrak{X} = \bigcup_i \mathrm{Spf}\, \mathcal{A}_i$: si $\mathcal{I}$ est un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, par définition il contient une puissance de π, et donc $\mathcal{I} \otimes K$ est l'idéal unité de $\mathcal{O}_{X_K}$, et l'éclatement n'a aucun effet sur X_K. On retrouve ainsi la définition de Khiel, plus proche de la géométrie analytique (cf. Bosch, Güntzer, Remmert [1]).

Tout R-schéma formel séparé de type fini $\mathfrak{X}$ définit donc de façon canonique un espace rigide séparé quasi-compact X_K qu'on appelera ***fibre générique*** de $\mathfrak{X}$; inversement, tout espace rigide séparé et quasi-compact est la fibre générique de schémas formels qu'on appelera des ***modèles entiers*** de X_K. De façon analogue, tout faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}$ définit un faisceau cohérent sur X_K (en tensorisant par K) et tout faisceau cohérent sur X_K provient d'un faisceau sur $\mathfrak{X}$.

Les schémas formels propres correspondent aux espaces rigides propres, et l'on retrouve les théorèmes usuels de finitude de la cohomologie cohérente. Si le schéma formel $\mathfrak{X}$ est algèbrisable (i.e. $\mathfrak{X} = \widehat{X}$ est le séparé completé d'un R-schéma propre le long de sa fibre spéciale), l'espace rigide $\mathfrak{X}_K$ défini ci-dessus est isomorphe à l'espace X_K^{an} qu'on peut associer à la fibre générique de X (cf. Bosch, Gunzer, Remmert [1], 9.3.4); si $\mathfrak{X}$ n'est pas propre on a seulement une immersion ouverte $\mathfrak{X}_K \hookrightarrow X_K^{an}$. En particulier, pour tout espace analytique rigide propre, le choix d'un modèle entier permet d'appliquer les résultats "GAGA formel"de EGA III cités ci-dessus; par exemple toute courbe rigide propre est la fibre générique d'une R-courbe algèbrique propre. Ce type de raisonnement prend le nom de ***GAGA rigide***.

Nous démontrerons le théorème 1 par une suite de constructions locales, suivie de recollements. Nous commencons par nous placer dans le cas affine. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, \mathcal{A}$ une R-courbe formelle, affine et lisse, $x \in \mathfrak{X}(R)$ un point de $\mathfrak{X}$, x_s sa réduction mod π. Soit $Y_k \to X_k$ un revêtement fini, galoisien de groupe G de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$, étale sur $U_k = X_k - \{x_s\}$. Soient $y_1, \ldots, y_r$ les points de Y_k au dessus de x_s: fixons-en un, disons y_1, et notons $I = I_{y_1}$ son groupe d'inertie.

L'immersion ouverte $U_k \hookrightarrow X_k$ se relève en une immersion ouverte de schémas formels $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (EGA IV, 2.7.1): on dispose d'une équivalence de catégories entre les revêtements étales de U_k et de $\mathfrak{U}$ (cf. proposition 1) et donc en particulier d'un revêtement étale de groupe G, $\mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ qui se réduit mod. π sur la restriction de $V_k = \rho_k^{-1}(U_k) \to U_k$.

Notons U_K (resp. X_K, V_K) les espaces rigides fibres génériques des schémas formels $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{V}$); le complémentaire de U_K dans X_K est formé des points qui se spécialisent sur x_s.

La premiere étape consiste à se ramener au cas d'un revêtement de groupe I, le groupe d'inertie en x_s au moyen d'une localisation étale. Rappelons que si H est uns sous-groupe de G et si $Y \to X$ est un revêtement (de schémas ou d'espaces rigides) galoisien de groupe H, le *revêtement induit* $Ind_H^G Y$ de X est défini par

$$Y = \coprod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$$

où Γ est un système de représentants des classes à gauche de G/H. Si $g \in G$ et $\alpha \in \Gamma$, il existe un unique $\beta \in \Gamma$ et un unique $h \in H$ tels que $g\alpha = \beta h$, et on définit l'action de G sur Ind_H^G en convenant que $g|_{Y_\alpha}$ envoie Y_α sur Y_β par h. Pour plus de détails cf. Raynaud [9], 4.1.

Lemme 1. *Quitte à rétrécir* Spf $\mathcal{A}$, *il existe une* $\mathcal{A}$-*algèbre* $\mathcal{A}^1$ *vérifiant les conditions suivantes:*

(1) $\mathcal{A}^1$ *est une* $\mathcal{A}$-*algèbre formelle étale et fidèlement plate.*
(2) *Il existe un seul point au dessus de* x_s *dans la fibre spéciale* A^1 *de* $\mathcal{A}^1 \otimes k$.
(3) *Le revêtement* $Y_k^1 \to \operatorname{Spec} A^1$, *déduit par changement de base, est décomposé:* $Y_k^1 = Ind_I^G Z_k$. *Il en est de même pour le revêtement de la fibre générique* $V_K^1 \to U_K^1$ *déduit du changement de base.*

Preuve. Notons $Y_k = \operatorname{Spec} B$. Si A^h est un henselisé de l'anneau local A_{x_s}, la A^h-algèbre finie $B^h = B \otimes_A A^h$ est décomposée, $B^h = \prod_{i=1}^r B_{y_i}$, les y_i étant les ideaux maximaux de B au dessus de x_s. A^h est limite inductive filtrante de A_{x_s}-algèbres locales-étales $\{A_{x_\alpha}^\alpha\}$, et soit $B^\alpha = B \otimes_A A^\alpha$: on a donc que, pour α suffisament grand, l'algèbre $B_{x_\alpha}^\alpha = B^\alpha \otimes A_{x_\alpha}^\alpha$ est décomposée, les idempotents qui definissent la décomposition de $B^h = \varinjlim B_{x_\alpha}^\alpha$ appartenant à $B_{x_\alpha}^\alpha$ pour $\alpha \gg 0$.

Fixons un tel α et posons $\xi = x_\alpha$; la courbe Y_k etant lisse, les anneaux locaux B_{y_i} sont normaux et on s'autorisera un abus de notations en appelant encore y_i l'unique point de $\operatorname{Spec} B^\alpha$ au dessus de $y_i \in \operatorname{Spec} B$. Il est standard que la décomposition $B_\xi^\alpha = \prod_{i=1}^r B_{y_i}^\alpha$ puisse s'étendre à un voisinage ouvert de ξ: il suffit de se rappeler que $A_\xi^\alpha = \varinjlim_{f \in A^\alpha - \xi} A_f^\alpha$ et de relever les idempotents de la décomposition de B_ξ^α sur A_f^α pour un f convenable.

Dans la suite nous remplacons A par A_f et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_{\{\hat{f}\}}$, le complété π-adique de $S^{-1}\mathcal{A}$, $S = \{\hat{f}^n\}$ et $\hat{f}$ un relèvement de f; nous noterons $A^1 = A_f^\alpha$ et $B^1 = B^\alpha \otimes_{A^\alpha} A_f^\alpha$.

Chaque composante connexe de B^1 contient un seul idéal η_i au dessus de ξ et le groupe de décomposition de cette composante est I_{y_i}, le groupe d'inertie en y_i: le revêtement B^1/A^1 galoisien de groupe G est donc un revêtement induit, $B^1 = Ind_I^G C^1$, où C^1 est la composante de B^1 contenant η_1.

On peut relever l'algèbre étale A^1 en une $\mathcal{A}$-algébre formelle étale (cf. proposition 1); cette algèbre vérifie certainement les conditions a) et b).

On a vu que le revêtement $Y_k^1 = \operatorname{Spec} B^1$ est décomposé; si $V^1 = \operatorname{Spec} B^1 - \{\eta_1 \ldots, \eta_r\}$, V^1 est un revêtement étale de $U^1 = \operatorname{Spec} A^1 - \{\xi\}$, galoisien de groupe G, qui est aussi décomposé: $V^1 = Ind_I^G W$, où $W = \operatorname{Spec} C^1 - \{\eta_1\}$. Par la proposition 1, le revêtement étale $V^1 \to U^1$ se relève en un revêtement formel étale $\mathfrak{V}^1 \to \mathfrak{U}^1$, qui est aussi un revêtement induit puisque les idempotents élémentaires qui définissent la décomposition $V^1 = Ind_I^G W$ se relèvent à l'algèbre de $\mathfrak{V}^1$ (cf. Bourbaki, AC, III 4.6). On peut alors écrire $\mathfrak{V}^1 = Ind_I^G \mathfrak{W}$ et on obtient enfin une décomposition du revêtement de la fibre générique $V_K^1 = Ind_I^G W \to U_K^1$.

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$ une courbe formelle affine et lisse sur R, et soit*

$$\rho_k : Y_k \to X_k$$

un revêtement fini, galoisien de groupe G de courbes affines lisses, étale en dehors d'un point $x_s \in X_k$, modéré en x_s. Soit $x \in \mathfrak{X}(R)$ un relèvement de x_s. Quitte à rétrécir $\mathfrak{X}$, il existe une $\mathcal{A}$-algèbre formelle étale fidèlement plate $\mathcal{A}^1$, ayant un seul point au dessus de x_s dans sa fibre spéciale, et un revêtement galoisien de groupe G

$$\varrho_1 : \mathfrak{Y}^1 \to \mathfrak{X}^1 = \operatorname{Spf} \mathcal{A}^1$$

de courbes formelles affines lisses, modérément ramifié le long de l'image réciproque x_1 de x, se réduisant sur ρ_k mod. π. Ce revêtement est l'unique revêtement de $\mathfrak{X}^1$ ayant ces propriétés.

Preuve. Reprenons la preuve du lemme précedent: aprés le changement de base $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^1$, on dispose d'un revêtement décomposé $Y_k^1 = Ind_I^G Z_k$ de $X_{1,k}$, où I est le groupe d'inertie de l'un des points de Y_k au dessus de x_s. Puisque le corps k est algébriquement clos et que l'on suppose ρ_k modéré, le groupe I est cyclique d'ordre premier à p. Par la théorie de Kummer, le revêtement cyclique $Z_k \to X_k^1$ est monogéne, $Z_k = \operatorname{Spec} A^1[T]/(T^n - a)$.

Choisissons un relèvement $\hat{a} \in \mathcal{A}^1$ de f, qui s'annule le long de x_1:

$$\mathfrak{Z} := \operatorname{Spf} \mathcal{A}^1[T]/(T^n - \hat{a})$$

est bien un revêtement galoisien de $\operatorname{Spf} \mathcal{A}^1$ (I agissant par multiplication par une racine n-ième de l'unité), et on a bien que $\mathfrak{Y}^1 = Ind_I^G \mathfrak{Z}^1$ est le revêtement cherché.

Si $\tilde{a} \in \mathcal{A}^1$ est un autre relèvement de a qui s'annule en x', on a $\tilde{a} = \hat{a}(1 + \pi b)$ et $1 + \pi b$ admet une racine n-ième dans le corps des fractions de $\mathcal{A}^1$ puisque $(n, p) = 1$ et $\mathcal{A}^1$ est complet pour la topologie π-adique: la théorie de Kummer permet alors de dire que les revêtements définis par les équations $T^n - \hat{a}$ et $T^n - \tilde{a}$ coïncident, d'où l'assertion d'unicité.

Avec les notations du lemme 1, quitte à remplacer Spf $\mathcal{A}^1$ par un ouvert, on peut trouver une coordonnée $g \in \mathcal{A}^1$ qui s'annule en x: elle définit un morphisme étale

$$(1) \qquad g_x : \mathrm{Spf}\, \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathfrak{D}$$

dans le disque formel standard $\mathfrak{D}$ qui induit un isomorphisme entre l'ensemble des points de $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}^1 \otimes K$ qui ont même réduction que x et le disque rigide ouvert. Ce morphisme nous permettra de nous servir des techniques developpées au premier chapitre pour prolonger $W \to U_K^1$ en un I-revêtement de $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}^1$.

Lemme 2. *Avec les notations ci-dessus, aprés une extension finie L/K, on peut prolonger le revêtement $W_L \to U_L^1$ au dessus d'un ouvert affinoïde*

$$U_L^1(r) = g_x^{-1}(C(r))$$

pour un $r < 1$ convenable.

Preuve. Il s'agit simplement de remplacer l'algèbre du disque standard par l'algèbre de Tate de U_K^1 dans la preuve de la proposition 1, §.2 du premier chapitre. Rappelons que l'extension finie L/K a été introduite pour que le rayon r soit égal à une puissance de la valeur absolue de l'uniformisante π_L.

En vue des recollements qu'on aura à faire il convient de se placer sur des ouverts admissibles: soit $\Delta(r_1) = g^{-1}\{z \in L : |z| \leq r_1\}$, avec $r = |\pi_L^a| < r_1 = |\pi_L^b| < 1$.

Avec ces notations, et en notant $W_L(r)$ le revêtement donné par le lemme précédent, le théorème 4 du chapitre 1, §2 entraine le résultat suivant:

Proposition 2. *Considérons le revêtement W_{r_1}, étale et galoisien de groupe I, induit par $W_L(r)$ en restriction à la couronne d'épaisseur nulle $C(r_1) = \{x \in L : |x| = r_1\}$. Alors il existe une extension finie K'/K et un revêtement $\Omega(r_1)$, fini galoisien de groupe I du disque $D(r_1)$ qui prolonge W_{r_1}, ramifié en un nombre fini de points de $D(r_1)$.*

Corollaire 1. *Il existe un revêtement galoisien de groupe I de l'espace affinoïde $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}^1 \otimes K'$ qui prolonge le revêtement $W \times K' \to U^1 \times K'$.*

$U_{K'}^1(r)$ et $g^{-1}D_{K'}(r_1)$ constituent un recouvrement ouvert de $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}_1 \otimes K'$ pour la topolgie rigide: on peut donc recoller le I-revêtement $g^*\Omega(r_1)$ donné par la proposition précédente avec $W \times K'(r)$ le long de l'ouvert $g^{-1}C'(r, r_1)$.

Corollaire 2. *Il existe un revêtement galoisien de groupe G de l'espace affinoïde $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}^1 \otimes K'$ qui prolonge le revêtement $V_{K'}^1 = Ind_I^G W' \to U_{K'}^1$.*

Résumons la situation: en partant d'un revêtement de groupe G de $\mathrm{Spec}\, A$, on dispose d'une part d'un G-revêtement $V_{K'} \to U_{K'} = \mathrm{Sp}\, \mathcal{A}_{\{x\}} \otimes K'$ et d'autre part d'un revêtement de $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A}^1 \otimes K'$ qui prolonge le précédent aprés le changement de base étale et fidèlement plat $f : \mathcal{A} \otimes K' \to \mathcal{A}^1 \otimes K'$. On voudrait à présent un G-revêtement de $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A} \otimes K'$ qui prolonge $V_{K'}$: on va l'obtenir au moyen d'un argument de descente de

Ferrand et Raynaud [2] combiné avec un passage à la limite; pour des résultats de ce type, cf. Harbater [4].

Soit $\mathcal{E}$ la R-algèbre d'une R-courbe formelle et soit $\mathcal{E}^1$ une $\mathcal{E}$-algèbre qui est formellement étale fidèlement plate. Soit e un point de $\mathrm{Spf}\,\mathcal{E}$ défini par $\mathcal{E} \to R$: on suppose que $\mathcal{E}^1 \otimes_{\mathcal{E}} R \cong R$. En particulier e se relève uniquement en un point $e^1 \in \mathrm{Spf}\,\mathcal{E}^1(R)$.

Si M est un $\mathcal{E}$-module cohérent, on en déduit les modules $M^1 = M \otimes \mathcal{E}^1$ et $M_e = M \otimes \mathcal{E}_{\{e\}}$ et un isomorphisme

$$u : M^1 \otimes \mathcal{E}^1_{\{e^1\}} \to M_e \otimes_{\mathcal{E}_{\{e\}}} \mathcal{E}^1_{\{e^1\}}$$

Lemme 3. *L'application $M \mapsto (M^1, M_e, u)$ est une équivalence entre la catégories des $\mathcal{E}$-modules (resp. algèbres, resp. G-algèbres) cohérents et la catégorie des triplets formés d'un $\mathcal{E}^1$-module (resp. algèbre, resp. G-algèbre) cohérent, d'un $\mathcal{E}_{\{e\}}$-module (resp. algèbre, resp. G-algèbre) cohérent et d'un $\mathcal{E}_{\{e^1\}}$-isomorphisme u comme ci-dessus.*

Preuve. Par passage à la limite, il suffit de le voir mod. π^n, pour tout n. Si X est une R-module, notons X_n sa réduction mod. π^n.

Donnons-nous un $\mathcal{E}_{\{e\}}$-module cohérent M_e, un $\mathcal{E}^1$-module cohérent N^1 et un isomorphisme $u : N^1 \otimes \mathcal{E}^1_{\{e^1\}} \to M_e \otimes_{\mathcal{E}_{\{e\}}} \mathcal{E}^1_{\{e^1\}}$. Nous allons construire, pour tout entier n, un $\mathcal{E}_n$-module N_n muni d'isomorphismes $N_n \otimes_{\mathcal{E}_n} \mathcal{E}^1_n \cong N^1_n$ et $N_n \otimes_{\mathcal{E}_n} \mathcal{E}_{\{e\},n} \cong M_{e,n}$ compatibles avec u_n; il faudra en suite vérifier que ces constructions définissent un système projectif.

On définit N_n comme produit fibré de $\mathcal{E}_n$-modules

$$\begin{array}{ccc} N_n & \xrightarrow{r} & M_{e,n} \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ N^1_n & \xrightarrow{r^1} & M^1_{e,n} \end{array} \tag{2}$$

où $M^1_{e,n} = N^1_n \otimes \mathcal{E}^1_{e,n}$, $\mu = u \circ (id_{M_{e,n}} \otimes 1) : M_{e,n} \to M_{e,n} \otimes \mathcal{E}^1_{e,n} \to M^1_{e,n}$ et $M^1_{e,n}$, N^1_n sont considérés comme $\mathcal{E}$-modules. Pour montrer que N_n satisfait aux conditions requises, on introduit les $\mathcal{E}_n$-modules $P^1 = \ker r^1$, $Q^1 = \operatorname{coker} r^1$, $P = \ker r$ et $Q = \operatorname{coker} r$. Puisque le carré qui définit N_n est cartésien, on a que ν induit un isomorphisme $P \to P^1$ et μ une injection $Q \to Q^1$. On voit alors que P et Q sont à support dans e, et donc les applications naturelles $P \to P \otimes \mathcal{E}^1_n$ et $Q \to Q \otimes \mathcal{E}^1_n$ sont des isomorphismes: il suffit de le vérifier sur les fibres en e et, par Nakayama, sur le quotient mod. e; on sait que $\mathcal{E}^1/(e^1)\mathcal{E}^1 \simeq \mathcal{E}/(e)\mathcal{E}$, car $\mathcal{E}^1$ est non ramifiée sur $\mathcal{E}$ et a un seul point au dessus de e, et on en déduit un isomorphisme mod. π^n.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P \otimes \mathcal{E}^1_n & \longrightarrow & N_n \otimes \mathcal{E}^1_n & \longrightarrow & M_{e,n} \otimes \mathcal{E}^1_n & \longrightarrow & Q \otimes \mathcal{E}^1_n & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle {}^a p}\downarrow & & {\scriptstyle {}^a \nu}\downarrow & & {\scriptstyle {}^a \mu}\downarrow & & {\scriptstyle {}^a q}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & N^1_n & \longrightarrow & M^1_{e,n} & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3}$$

où les flèches verticales sont définies par adjonction des foncteurs f_* et f^* (où on note $f : \operatorname{Spec}\mathcal{E}_n^1 \to \operatorname{Spec}\mathcal{E}_n$) et la suite supérieure est exacte par platitude de $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{E}$.

La flèche ${}^a\nu$ correspond à l'isomorphisme (1) de l'énoncé: pour prouver que c'est un isomorphisme il suffit de montrer que ${}^ap$, ${}^a\mu$ et ${}^aq$ en sont. Pour ${}^a\mu$ il suffit de l'exprimer en termes de faisceaux:

$$ {}^a\mu : f_*f^*i_*M_{e,n} \to f_*j_*j^*N_n^1 $$

(on a noté i, resp. j les inclusions du complémentaire de e dans $\operatorname{Spec}\mathcal{E}_n$, resp. $\operatorname{Spec}\mathcal{E}_n^1$); la platitude de f donne un isomorphisme canonique $f^*i_* = j_*f^*$ (cf. EGA III, 1.4.15) de sorte que ${}^a\mu$ n'est autre que $f_*j_*(u)$. La flèche ${}^ap$ factorise

$$ p : P \to f_*f^*P \xrightarrow{{}^ap} f_*P^1 $$

et on a démontré que p et $P \to P \otimes \mathcal{E}_n^1$ sont des isomorphismes. De même ${}^aq$ est injective et, puisque (3) est commutatif, un isomorphisme.

L'application $N_n \otimes \mathcal{E}_{(e),n} \to M_{e,n}$ déduite de r devient alors un isomorphisme aprés le changement de base fidèlement plat: c'est donc l'isomorphisme (2).

On a enfin le diagramme suivant:

(4)
$$
\begin{tikzcd}
 & N_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & M_{e,n+1} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
N_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_{e,n} \arrow[dd] & \\
 & N_{n+1}^1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & M_{e,n+1}^1 \arrow[dl] \\
N_n^1 \arrow[rr] & & M_{e,n}^1 &
\end{tikzcd}
$$

où les carrés antérieur et postérieur sont cartésiens et les autres sont commutatifs: on vérifie aisement que les flèches $N_{n+1} \to N_{n+1}^1 \to N_n^1$ et $N_{n+1} \to M_{n+1} \to M_{e,n}$ admettent une composition commune dans $M_{e,n}^1$, et donc il existe un unique $N_{n+1} \to N_n$ rendant commutatif le diagramme (4): on a donc le système projectif cherché, ce qui permet de construire le $\mathcal{E}$-module N.

Enfin, le fait que les N_n soient définis par des diagrammes cartésiens à partir des données $M_{e,n}$ et N_n^1, permet de vérifier sans peine que si celles-ci sont équipées de structures d'algèbres (resp. G-algèbres) les N_n le sont aussi, et le diagramme (4) montre que ces structures sont compatibles, de sorte que N aussi aura des structures supplémentaires.

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$ une courbe formelle affine et lisse sur R, et soit*

$$\rho_k : Y_k \to X_k$$

un revêtement fini, galoisien de groupe G de courbes affines lisses, étale en dehors d'un point $x_s \in X_k$, modéré en x_s. Soit $x \in \mathfrak{X}(R)$ un relèvement de x_s. Quitte à rétrécir $\mathfrak{X}$, il existe un unique revêtement galoisien de groupe G

$$\varrho : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$$

de courbes formelles affines lisses, modérément ramifié le long de x, se réduisant sur ρ_k mod. π.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent aux R-algèbres formelles $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{E}^1 = \mathcal{A}^1$, l'algèbre donnée par le lemme 1. Soit M_x l'algèbre du revêtement $\mathfrak{V} \to \mathfrak{U} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}_{\{x\}}$ (dans les notations du debut du chapitre), N^1 la normalisation de $\mathcal{A}^1$ dans l'anneau total des fractions de la G-algèbre donnée par le corollaire 1 au lemme 1: le lemme 3 fournit une G-algèbre N sur $\mathcal{A}$ ayant les propriétés voulues; il ne reste plus qu'à prendre pour $\mathfrak{Y} = \operatorname{Spf} N$.

Corollaire 2. *Soit $\mathfrak{X}$ une R-courbe formelle lisse, $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{X}(R)$ un ensemble fini de points rationnels. Le foncteur de spécialisation*

$$\mathfrak{Y} \longmapsto \mathfrak{Y} \times_R k$$

établit une équivalence de catégories entre les revêtements $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ étales en dehors de $x_1, \ldots, x_d$ et modérés en $x_1, \ldots, x_d$ et les revêtements modérées de la fibre spéciale X_k étales en dehors de la spécialisation de $x_1, \ldots, x_d$. En particulier, on a une équivalence entre revêtements galoisiens.

Preuve. Soit $Y_k \to X_k$ un tel revêtement et choisissons un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines qu'on peut supposer suffisament petit pour satisfaire aux hypothèses du lemme 1 et pour que les intersections ne contiennent aucun des points $x_1, \ldots, x_d$: ces hypothèses permettent de recoller les revêtements donnés par le corollaire précédent sur chaque ouvert du recouvrement en un revêtement $\mathfrak{Y}'$ ayant les propriétés requises.

Corollaire 3. *(Grothendieck) Soit X une R-courbe propre et lisse, $\rho_k : Y_k \to X_k$ un revêtement fini galoisien modéré de courbes propres et lisses sur k, et soit D un relèvement à X du diviseur de la ramification modérée de ρ_k. Alors il existe un unique revêtement $\rho : Y \to X$ modéré, galoisien de même groupe de R-courbes propres et lisses, étale en dehors de D.*

Proposition 3. *Soit $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$ une R-courbe formelle affine et lisse et soit $\rho_k : Y_k \to X_k$ un revêtement galoisien fini de groupe G de courbes affines lisses étale en dehors d'un point $x_s \in X_k$. Quitte à retrecir $\mathcal{A}$ (cf. Lemme 1), il existe une extension finie R'/R et un revêtement de R'-courbes formelles normales*

$$\varrho' : \mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_R R'$$

galoisien de groupe G, tel que, si Σ est l'ensemble des points de $\mathfrak{X}$ se réduisant sur x_s, le morphisme $\mathfrak{Y}' - (\varrho')^{-1}(\Sigma) \to \mathfrak{X}' - \Sigma$ se réduise sur $Y_k - \rho_k^{-1}(x_s) \to X_k - x_s$ de façon compatible avec G.

Preuve. Rappelons que jusqu'ici on dispose des données suivantes: un G-revêtement $\operatorname{Spf} M_x = \mathfrak{V}_{R'} \to \mathfrak{U}_{R'} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}_{\{x\}} \otimes R'$; un G-revêtement d'espaces rigides $\operatorname{Sp} M^1_{K'} \to \operatorname{Sp} \mathcal{A}' \otimes K'$ qui prolonge le précédent après le changement de base $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^1$ (corollaire 2 à la proposition 2).

On va alors appliquer le lemme 3 aux R'-algèbres formelles $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes R'$ et $\mathcal{E}^1 = \mathcal{A}^1 \otimes R'$. Soit M^1 la normalisation de $\mathcal{A}^1 \otimes R'$ dans l'anneau total des fractions de la G-algèbre $M^1_{K'}$ ci-dessus: le Lemme 3 fournit une G-algèbre $N_{R'}$ sur $\mathcal{A} \otimes R'$ ayant les propriétés voulues; il ne reste plus qu'à prendre pour $\mathfrak{Y}' = \operatorname{Spf} N_{R'}$.

Preuve du Théorème 1 Notons Σ l'ensemble des points de X se réduisant sur le diviseur de ramification de ρ_k. Soit $\{\operatorname{Spf} \mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement affine formel de $\mathfrak{X} = \hat{X}$, qu'on peut supposer suffisament fin pour que les $\mathcal{A}_\alpha$ vérifient les hypotèses du lemme 1 et pour que $\operatorname{Sp} \mathcal{A}_\alpha \cap \operatorname{Sp} \mathcal{A}_\beta \cap \Sigma = \varnothing$ pour $\alpha \neq \beta$: cette hypothèse permet de recoller les revêtements $\varrho'_{\mathcal{A}_\alpha}$ donnés par la proposition précédente en un revêtement $\mathfrak{Y}'$ fini galoisien de groupe G de la courbe formelle $\mathfrak{X}'$:

$$\varrho' : \mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{X}'$$

La courbe formelle normale $\mathfrak{Y}'$ étant finie sur $\mathfrak{X}'$ propre sur R', par GAGA formel le revêtement ϱ' ainsi construit s'algébrise en un revêtement galoisien

$$\rho' : Y' \longrightarrow X'$$

de groupe G de R-courbes.

La démonstration du théorème 1 est achevée par les lemmes suivants

Lemme 4. *Le lieu singulier de Y'_k est contenu dans l'ensemble des points sauvagement ramifiés de ρ_k, la courbe Y_k est la normalisée de Y'_k et on a le diagramme commutatif suivant, équivariant sous l'action de G.*

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\rho_k"'] & Y'_k \arrow[d, "\rho'_k"] \\ & X_k \end{tikzcd} \tag{5}$$

Preuve. Par construction les ouverts $\rho_k^{-1}(U_k)$ de Y_k et $(\rho'_k)^{-1}(U_k)$ de Y'_k sont isomorphes, donc Y_k et Y'_k sont birationnelles: puisque Y_k est normale, on a une application $\nu : Y_k \to Y'_k$ partout définie qui a une inverse rationnelle définie en dehors de S_k. Y_k est compléte et ν dominante: il en découle que ν est surjective; le diagramme (5) est commutatif car ρ_k et $\rho'_k \circ \nu$ coincident sur un ouvert dense.

Lemme 5. *La courbe Y'_k est unibranche.*

Preuve. La question étant locale pour la topologie étale, plaçons nous au voisinage d'un point $x_s \in X_k$ sauvagement ramifié; après la localisation étale utilisée, on peut supposer le revêtement totalement ramifié de groupe $I = I_{x_s}$ (Lemme 1): il existe donc un seul point y dans Y_k au dessus de x_s et a *fortiori* un seul point y' dans Y'_k au dessus de x_s (cf. diagramme (5)). Puisque Y_k est la normalisée de Y'_k (Lemme 4), on a bien que l'anneau local $\mathcal{O}_{Y'_k,y'}$ est unibranche.

Exemple 1. Fixons un corps k algébriquement clos de caractéristique p, et posons $R = W(k)[\zeta]$, où $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et ζ une racine primitive p-ième de l'unité. Le corps k contient le corps premier $\mathbb{F}_p$. Nous allons étudier l'action de $G = PGL(2, \mathbb{F}_p)$ et de ses sous-groupes sur la droite projective $\mathbf{P}^1_k$ et appliquer les résultats précédents pour relever à l'anneau R le revêtement $\mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k/G \cong \mathbf{P}^1_k$: nous trouverons une R-courbe $Y'' \to \mathbf{P}^1_R$ de genre $g(Y''_K) = \frac{1}{2}(p+1)(p-1)(p-2)$ dont la fibre spéciale a $p+1$ points de rebroussement, et chacun contribue au genre de Y''_K pour $\delta = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$.

i) Le quotient $\mathbf{P}^1_k/G$ existe, il est intègre et normal: c'est donc une courbe propre et lisse sur k et, puisque le genre ne peut que baisser dans un morphisme fini de courbes, ce quotient est isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$: pour éviter toute confusion nous noterons Y_k la droite de départ, avec coordonnées homogènes $[y_0 : y_1]$, et X_k le quotient, avec coordonnées $[x_0 : x_1]$.

ii) Pour en étudier la ramification, on remarque que, puisque les éléments de G sont définis sur $\mathbb{F}_p$, si $\xi \in \mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_{p^n})$, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma(\xi) \in \mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_{p^n})$. Les $p+1$ points de la droite projective sur $\mathbb{F}_p$ constituent une premiere orbite sous G et chacun de ces points à un indice de ramification égal à $p(p-1)$ (car G a $p(p^2-1)$ éléments). Il y a $p^2 - p$ points dans Y_k qui sont rationnels sur $\mathbb{F}_{p^2}$ et distincts des précédents: ces points sont permutés par les $p^2 - p$ transformations affines:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \qquad c, d \in \mathbb{F}_p, d \neq 0.$$

ils constituent donc une autre orbite sous G dont chaque point a pour indice de ramification $p+1$, qui est premier à p. Un point y de $\mathbf{A}^1_k \subset Y_k$ est ramifié si on peut trouver $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p$, $ad - bc \neq 0$, tels que $ay + b = cy^2 + dy$, donc les seuls points ramifiés sont rationnels sur $\mathbb{F}_{p^2}$.

iii) On aura besoin plus tard des groupes de ramification supérieure au points sauvagement ramifiés, i.e. au points de Y rationnels sur $\mathbb{F}_p$: le revêtement étant galoisien, il suffit de les calculer en $\infty = [0:1]$. Le groupe d'inertie en ∞ est

$$G_0 = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad \neq 0 \right\}$$

En prenant une coordonnée affine $y = y_1/y_0$:

$$\sigma y - y = \frac{ay}{cy+d} - y = \frac{(a-d)y - cy^2}{cy+d}$$

on a donc que $v_{(0)}(\sigma y - y) \leq 2$ et est supérieure à 1 si et seulement si $a - d = 0$: on a alors

$$G_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad G_2 = G_3 = \cdots = \{id\}$$

et G_0 est produit semi-direct du groupe G_1, cyclique d'ordre p, par

$$\Gamma = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \rangle \quad e \text{ générateur de } \mathbb{F}_p^\times$$

cyclique d'ordre $p-1$.

iv) Puisque R contient les racines $p-1$-ièmes de l'unité, on peut relever le générateur β de Γ

en un automorphisme

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{P}^1_R$ (où ε est une racine primitive $p-1$-ième de l'unité) et $\mathbf{P}^1_R \to \mathbf{P}^1_R/\langle\tilde{\beta}\rangle$ est un relèvement de $\mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k/\langle\beta\rangle$; les point fixes de $\tilde{\beta}$ dans $\mathbf{P}^1_R$ sont $\{0 = [1:0], \infty = [0:1]\}$, qui se réduisent respectivement sur $\overline{0}, \overline{\infty} \in Y_k$.

v) Nous allons à présent relever localement le revêtement $\rho_k : Y_k = \mathbf{P}^1_k \to X_k = \mathbf{P}^1_k/\langle\alpha\rangle$, α étant un générateur de la partie sauvage de l'inertie en ∞: soit x une coordonée locale sur X_k s'annulant en ∞: on peut relever le revêtement galoisien étale $Y_k - \{0,\infty\} \to X_k - \{0,\infty\}$ donné par l'équation $y^p - y = 1/x$ en un revêtement étale de la couronne standard donné par l'équation

$$\prod_{i=0}^{p-1} (y - 1 - \zeta - \cdots - \zeta^i) = 1/x$$

Ce revêtement est encore galoisien cyclique, un générateur étant donné par $\tilde{\alpha} : y \mapsto \zeta y + 1$ (ζ une racine primitive p-ième de l'unité). Ce revêtement peut être prolongé en un revêtement fini galoisien de $0 < |x| \leq 1$ ramifié seulement au point $Q = (\zeta - 1)^p$, image du point $y = 1/(1-\zeta)$ fixe par $\tilde{\alpha}$.

vi) Appliquons à présent le théorème 1 pour relever $\rho : Y_k \to Y_k/G_0$ sur R:

$$\rho' : Y' \longrightarrow \mathbf{P}^1_R$$

Plaçons-nous sur les espaces rigides fibres génériques: le revêtement modéré $\mathbf{A}^1_k \to \mathbf{A}^1_k$ se relève en un revêtement entre disques rigides standards $\Delta' \to \Delta$ centrés en 0; les points $\{P_i = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^i\}_{i=0,\ldots,p-1}$, images reciproques de 0 dans Δ', sont ramifiés et le groupe d'inertie en P_i est

$$I_{P_i} = \tilde{\alpha}^{-i}\langle\tilde{\beta}\rangle\tilde{\alpha}^i \cong N$$

Les points de $\mathbf{P}^1_k$ rationnels sur $\mathbf{F}_{p^2}$ sont permutés transitivement par les éléments de G_0 (cf. *ii)* et se relèvent donc en des points non ramifiés. Pour étudier le relèvement de la ramification sauvage, prenons une coordonnée $x = x_0/x_1$ en ∞ et soit $D = \{|t| < 1\}$ le disque ouvert standard centré en ∞. Le revêtement $D' = (\rho')^{-1}(D) \to D$ est donné par composition:

$$D' \longrightarrow D'/\langle\tilde{\alpha}\rangle \longrightarrow (D'/\langle\tilde{\alpha}\rangle)/\langle\tilde{\beta}\rangle = D \tag{6}$$

(cf. chapitre I, théorème 2). Le premier quotient est étudié au point *v)*; $D'/\langle\tilde{\alpha}\rangle$ est isomorphe à un disque standard, $\tilde{\beta}$ agit sur ce disque par $t \mapsto \varepsilon \cdot t$ et donc ∞ est un point fixe et on trouve $p-1$ points $\{q_j = \varepsilon^j 1/(1-\zeta)\}$ au dessus de Q: on a alors que ∞ est totalement ramifié (on note Q_∞ l'unique point de Y'_K au dessus de ∞) et que le groupe d'inertie au point Q_j, unique image réciproque de q_j dans D' est

$$I_{Q_j} = \tilde{\beta}^{-j}\langle\tilde{\alpha}\rangle\tilde{\beta}^j \cong G_1$$

Le revêtement $Y'_K \to X$ est défini par recollement de Δ' et de D' au desus de la couronne standard.

vii) On a donc déterminé la différente du morhisme $Y'_K \to \mathbf{P}^1_K$:

$$\mathfrak{D}_{Y'_K/\mathbf{P}^1_K} = [p(p-1)-1]Q_\infty + [p-1].Q_1 + \cdots + [p-1].Q_{p-1} + [p-2].P_0 + \cdots + [p-2].P_{p-1}$$

En appliquant la formule de Hurwitz on peut calculer le genre de Y'_K:

$$\begin{aligned} 2g(Y'_K) - 2 &= -2p(p-1) + \deg \mathfrak{D}_{Y'_K/\mathbf{P}^1_K} \\ &= -2p(p-1) + [p(p+1)-1] + (p-1)[p-1] + p[p-2] \\ &= p^2 - 3p. \end{aligned}$$

ce qui donne $g(Y'_K) = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$.

Cela permet d'obtenir des renseignements plus precis sur la singularité de la fibre spéciale Y'_k au point $\bar{y}'$, spécialisation de Q_∞ et des Q_j: si $\bar{y}(=\infty) \in Y_k(\cong \mathbf{P}^1_k)$ est l'unique point au dessus de $\bar{y}'$ dans la normalisation $Y_k \to Y'_k$ (cf. Théorème 2) et si on note

$$\delta = \dim_k(\mathcal{O}_{Y_k,\bar{y}}/\mathcal{O}_{Y'_k,\bar{y}'}) \tag{7}$$

on peut exprimer le genre arithmétique local par $p_a(Y'_k) = \delta$ (cf. Serre [12], V.2.5). Or $p_a(Y'_k) = p_a(Y'_K) = g(Y'_K)$, car le genre arithmétique est une caractéristique d'Euler-Poincaré et la courbe rélative Y' est plate: on en déduit que $\delta = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$.

viii) Les arguments précédents s'appliquent enfin à l'étude du relèvement

$$Y'' \longrightarrow X = \mathbf{P}^1_R$$

du quotient par $G = PGL(2,p)$. Le relèvement au dessus de l'ouvert moderé $\mathbf{A}^1_k = U_k = X_k - \bar{\infty}$ ne pose pas de problèmes: U_K est le disque standard centré en 0, on a un revêtement galoisien modéré $V_K \to U_K$, où V_K est isomorphe au disque standard privé de p disques ouverts (centrés pour fixer les idées en 0 et au racines $p-1$-ièmes de l'unité) on peut choisir des points $M_1, \ldots, M_{p^2-p}$ dans V_K, se réduisant sur $\mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_{p^2})$ avec indice de ramification $p+1$ (cf. corollaire 2 au lemme 3).

La fibre générique du revêtement cherché Y''_K est un recollement du revêtement modéré V_K avec un revêtement D'' du disque standard D centré en ∞: le groupe d'inertie au points de $\mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_p)$ est isomorphe à G_0 et donc, par le corollaire 2 à la proposition 2, $D'' = Ind^G_{G_0} D'$, où D' est le revêtement (6) étudié en *vii)*: le morphisme $D' \to D$ est étale en dehors de 0, qui est totalement ramifié, et des points $\{q_j = \varepsilon^j 1/(1-\zeta)\}_{j=0,\ldots,p-2}$ au dessus de $Q = ((\zeta-1)^p$, dont le groupe d'inertie est isomorphe à G_1. Puisque D'' est somme de $[G : G_0] = p+1$ copies de D' (une pour chacque point de $\mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_p)$), on a finalement $p+1$ points $P_0, \ldots, P_\infty$ dans D'' au dessus de 0 avec indice de ramification p^2-p et p^2-1 points $Q_1, \ldots, Q_{p^2-1}$ au dessus de Q avec indice de ramification p.

La différente du revêtement $Y'' \to X$ est donc:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{Y''/X} = [p].M_1 + \cdots + [p].M_{p^2-p} + [p^2-p-1].P_0 + \ldots \\ + [p^2-p-1].P_\infty + [p-1].Q_1 + \cdots + [p-1].Q_{p^2-1}.\end{aligned}$$

La formule de Hurwitz permet de calculer le genre de Y''_K:

$$\begin{aligned}2g(Y''_K) - 2 &= -2p(p^2-1) + \deg \mathfrak{D}_{Y''_K/X_K} \\ &= -2p(p^2-1) + (p^2-p)[p] + (p+1)[p^2-p-1] + (p^2-1)[p-1] \\ &= p^3 - 2p^2 - p.\end{aligned}$$

ce qui donne $g(Y''_K) = \frac{1}{2}(p+1)(p-1)(p-2)$.

Comme en vii, on peut utiliser cette formule pour caractériser les singularités de Y''_k: içi la normalisation $\mathbf{P}^1_k = Y_k \to Y''_k$ envoie $\{0,\ldots,\infty\}$ sur les $p+1$ points singuliers $\{\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_\infty\}$ et les singularités sont toutes du même type. Alors, puisque $p_a(Y''_k) = \sum_{i=0,\ldots,\infty} \delta_{\bar{P}_i}$, où $\delta_{\bar{P}_i}$ est défini comme en (7), et $p_a(Y''_k) = p_a(Y''_K) = g(Y''_K)$, on en déduit que $\delta_{\bar{P}_i} = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ pour tout i.

Exemple 2. (cf. Roquette [10]) Soit C_k la courbe hyperelliptique revêtement double de $\mathbf{P}^1_k$, normalisation de l'équation d'Artin-Schreier

$$z^2 = y^p - y$$

(on suppose ici $p \neq 2$). Nous verrons que, pour $p > 5$, $|Aut(C_k)| \geq 84(g-1)$ (en fait C_k est —à isomorphisme prés — la seule courbe de genre $g < p-1$ qui ne respecte pas la borne de Hurwitz, cf. Roquette [10], Satz 3) Nous allons reprendre l'exemple précédent pour étudier un relèvement à $R = W(k)[\zeta]$ du revêtement galoisien $C_k \to C_k/Aut(C_k)$: nous trouverons une R-courbe $C' \to \mathbf{P}^1_R$ de genre $g(C'_K) = \frac{1}{2}(2p^3 - 4p^2 - p + 3)$ dont la fibre spéciale a $p+1$ points de rebroussement, tous de multiplicité $\delta = (p-1)(p-2)$..

i) Détermination de $Aut(C_k)$. On peut calculer le genre de la courbe hyperelliptique C_k par la formule de Hurwitz: $g = \frac{p-1}{2}$. Les automorphismes de $\mathbf{P}^1_k$ se relèvent à C_k: le groupe $G = PGL(2,p)$ est engendré par les matrices

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut exprimer leur action sur C_k par

$$\alpha = \begin{cases} y \mapsto y+1 \\ z \mapsto z \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} y \mapsto ey \\ z \mapsto \sqrt{e}\cdot z \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} y \mapsto -\dfrac{1}{y} \\ z \mapsto \dfrac{z}{y^{(p+1)/2}} \end{cases}$$

En rajoutant l'involution ι qui echange les feulliets du revêtement, on a alors que C_k a au moins $2p(p^2-1)$ automorphismes.

En fait on a determiné *tout* le groupe des automorphismes de C_k, car tout $\sigma \in Aut(C_k)$ se descend en un automorphisme de $\mathbf{P}^1_k$: C_k est hyperelliptique et donc tout morphisme de degé 2 dans $\mathbf{P}^1_k$ équivaut au choix d'une base de l'unique série lineaire g^1_2 sur C_k; si $\sigma \in Aut(C_k)$ la matrice du changement de base $\varphi \mapsto \varphi\circ\sigma$ donne lieu à un automorphisme ϕ_σ de $\mathbf{P}^1_k$

$$\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{\sigma} & C_k \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathbf{P}^1_k & \xrightarrow{\phi_\sigma} & \mathbf{P}^1_k \end{array}$$

rendant commutatif le diagramme. Il est d'autre part évident que tout automorphisme de $\mathbf{P}^1_k$ se relèvant en un automorphisme de C_k permute les points ramifiés et est donc défini sur $\mathbb{F}_p$. Pour $p \geq 5$, $g = \frac{p-1}{2} > 2$ et $|Aut_k(C_k)| > 84(g-1) = 42(p-3)$, contrairement à la borne de Hurwitz; cela implique que tout "relèvement"(au sens du théorème 1) de $C_k \to C_k/Aut(C_k)$ en caractéristique 0 aura nécessairement une fibre spéciale singuliére.

ii) Etude du relèvement. On peut utiliser les resultats de l'exemple 1 pour étudier le relèvement

$$C' \longrightarrow \mathbf{P}^1_R = C'/Aut(C_k)$$

du quotient de C_k par son groupe d'automorphismes. Comme en *vii)*, on peut supposer que $\bar{\infty} \in \mathbf{P}^1_k$ soit l'image des points sauvagement ramifiés de C_k. Le relèvement au dessus de l'ouvert moderé $\mathbf{A}^1_k = U_k = X_k - \bar{\infty}$ ne pose pas de problèmes: U_K est le disque standard centré en 0, et on a un revêtement galoisien modéré $V_K \to U_K$, où V_K est un revêtement double du disque standard privé de p disques ouverts (centrés pour fixer les idées en 0 et au racines $p-1$-ièmes de l'unité); on peut choisir des points $M_1, \ldots, M_{2(p^2-p)}$ dans V_K, se réduisant sur $\mathbf{P}^1_k(\mathbb{F}_{p^2})$ avec indice de ramification $p+1$ (cf. corollaire 2 au lemme 3).

La fibre générique du revêtement cherché Y''_K est un recollement du revêtement modéré V_K avec un revêtement D'' du disque standard D centré en ∞: le groupe d'inertie au points de $C_k(\mathbb{F}_p)$ est isomorphe à $\langle \iota, G_0 \rangle$ et donc, par le corollaire 2 à la proposition 2, $D'' = Ind^{Aut(C_k)}_{\langle \iota, G_0 \rangle} D'$, où D' est revêtement double du revêtement (6) étudié en *vii)*:

$$\Delta'' \longrightarrow D'/\langle \tilde{\alpha} \rangle \longrightarrow (\Delta/\langle \tilde{\alpha} \rangle)/\langle \iota, \tilde{\beta} \rangle = D$$

$\Delta/\langle \tilde{\alpha} \rangle$ est isomorphe à un disque ouvert standard (centré en ∞): son centre est totalement ramifié et il y a $2(p-1)$ points $\{q_j = \varepsilon^j 1/1/(1-\zeta)\}_{j=0,\ldots,p-2}$ et $\{\iota q_j\}$ au dessus de $Q = (1-\zeta)^p$. Le revêtement $D'' \to D$ est donc étale en dehors de l'image réciproque de ∞, qui est totalement ramifié, et des q_j et ιq_j, avec groupe d'inertie isomorphe à $G_1 = \langle \tilde{\alpha} \rangle$.

$Ind^{Aut(C_k)}_{\langle \iota, G_0 \rangle} D'$ est une somme de copies de D': on a donc $p+1$ points $P_0, \ldots, P_\infty$ au dessus de 0, avec indice de ramification $2p(p-1)$, et $2(p-1)(p+1)$ points $Q_1, \ldots, Q_{p^2-1}$, $\iota Q_1, \ldots, \iota Q_{p^2-1}$ au dessus de Q avec indice p. On a alors:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{C'_K/\mathbf{P}^1_K} &= [p].M_1 + \cdots + [p].M_{2(p^2-p)} + [2(p^2-p)-1].P_0 + \ldots \\ &\quad + [2(p^2-p)-1].P_\infty + [p-1].Q_1 + \cdots + [p-1].Q_{2(p^2-1)}.\end{aligned}$$

La formule de Hurwitz

$$\begin{aligned}2g(C'_K) - 2 &= -4p(p^2-1) + \deg \mathfrak{D}_{C'_K/\mathbf{P}^1_K} \\ &= -4p(p^2-1) + 2(p^2-p)[p] + (p+1)[2(p^2-p)-1] + 2(p^2-1)[p-1] \\ &= 2p^3 - 4p^2 - p + 1.\end{aligned}$$

permet de calculer le genre $g(C'_K) = \frac{1}{2}(2p^3 - 4p^2 - p + 3)$.

On utilise cette formule pour caractériser les singularités de C'_k: la normalisation $C_k \to C'_k$ envoie $\{(0,0),\ldots,(\infty,0)\}$ (dans les coordonnées y,z sur C_k de iv) sur les $p+1$ points singuliers $\{\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_\infty\}$. On a calculé le genre $g=(p-1)/2$ de C_k en *iv)*: g est alors le genre géométrique de C'_k et donc

$$p_a(C'_k) = g + \sum_{i=0,\ldots,\infty} \delta_{\bar{P}_i} = g(C'_K) = \frac{1}{2}(2p^3 - 4p^2 - p + 3)$$

On en deduit que

$$\begin{aligned}(p+1)\delta &= \frac{1}{2}(2p^3 - 4p^2 - p + 3) - \frac{1}{2}(p-1)\\ &= p^3 - 2p^2 - p + 2\end{aligned}$$

et enfin $\delta = (p-1)(p-2)$.

Bibliographie

[EGA I] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166, Springer, Heidelberg, 1971.

[EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique IV: Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **20, 24, 28, 32**.

[FGA] A. Grothendieck, *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Séminaire Bourbaki (1957-62), Secrétariat Mathématique, Paris, 1962.

[SGA 1] *Revêtements étales et groupe fondamental* (A. Grothendieck, ed.), Lecture Notes in Math. 224, Springer, Heidelberg, 1971.

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, eds.), Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer, Heidelberg, 1972-73.

1. S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 261, Springer, Heidelberg, 1984.
2. D. Ferrand et M. Raynaud, *Fibres formelles d'un anneau local noetherien*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4me série **3** (1970), 295-311.
3. D. Gorenstein, *Finite groups*, Chelsea, New York, 1980.
4. D. Harbater, *Formal patching and adding branch points.*, American Journal of Mathematics **115** (1993), 487-508.
5. W. Lütkebohmert, *Riemann's existence problem for a p-adic field.*, Inventiones Mathematicae **111** (1993), 309-330.
6. F. Oort, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems*, Algebraic Geometry, Oslo 1970 (F. Oort, ed.), Wolters-Noordhoff, 1972, pp. 223-254.
7. M. Raynaud, *Anneau locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer, Heidelberg, 1970.
8. M. Raynaud, *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Khiel ...*, Mémoires de la Société Mathématique de France **39-40** (1974), 319-327.
9. M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Inventiones Mathematicæ **116** (1994), 425-462.
10. P. Roquette, *Abschätzung der Automorphismenzhal von Functionenkőrpern bei Primzhalcharakteristik*, Mathematisce Zeitschrift **117** (1970), 157-163.
11. T. Sekiguchi, F. Oort and N. Suwa, *On the deformations of Artin-Schreier to Kummer*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4me série **22** (1989), 345-375.
12. J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.
13. J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, Springer, Heidelberg, 1964.

12\. J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1968.

15. S. Shatz, *Profinite groups, arithmetic and geometry*, Annals of Math. Studies 67, Princeton University Press, Princeton, 1972.
16. J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Inventiones Mathematicæ **12** (1971), 257-289.

BIBLIOTHÈQUES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS · ORSAY