

# THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

**PETER HAÏSSINSKY**

*Applications de la chirurgie holomorphe notamment aux points paraboliques, 1998*

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



63679

ORSAY  
n° d'ordre :

**UNIVERSITÉ de PARIS-SUD**

**Centre d'ORSAY**

**THÈSE**

présentée  
pour obtenir

**le titre de Docteur en Sciences**

**Spécialité : Mathématique**

par

**Peter HAÏSSINSKY**

**Sujet : Applications de la chirurgie holomorphe, notamment aux points paraboliques.**

soutenue le 22 Mai 1998 devant la Commission d'examen

MM. ASTALA Kari  
DOUADY Adrien  
Mme FLEXOR Marguerite  
HUBBARD John-Hamal  
PETERSEN Carsten Lunde  
SHISHIKURA Mitsuhiro



## Résumé.

Cette thèse porte sur l'étude dynamique des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann, et les méthodes employées proviennent essentiellement de la chirurgie quasiconforme. Elle est organisée en cinq parties.

Dans le Chapitre 5 de la Partie II, on généralise la notion d'applications à allure polynomiale de A. Douady et J.H. Hubbard à celles de *figuration* et de *silhouettes polynomiales*. La principale différence est que l'application n'est plus forcément expansive à l'extérieur de l'ensemble de Julia. Par exemple, on admet des points paraboliques et des points critiques dans la classe externe de ces applications. Sous des hypothèses de finitude, on montre que l'on peut accoupler des polynômes à de telles classes externes. La démonstration utilise d'une part la chirurgie et d'autre part une généralisation du théorème d'intégration des formes de Beltrami dû à G. David. Le problème inverse, dit de *redressement*, est en fait plus difficile car les hypothèses du théorème d'intégration ne sont plus vérifiées. Pour une classe externe ne comportant que des points répulsifs, et éventuellement des points critiques strictement préperiodiques, on peut redresser l'application en un polynôme.

Dans la Partie III, on s'intéresse aux similitudes entre ensembles de Julia comportant un point parabolique et ensembles de Julia n'en comportant pas. On développe la *déformation par pincement*, introduite par P. Makienco, qui fait tendre des points attractifs et répulsifs en points paraboliques. Cette déformation permet de montrer que la dynamique d'un polynôme hyperbolique est semi-conjugée à celle du polynôme limite, qui n'est plus hyperbolique. Il s'agit des premiers résultats positifs sur cette déformation. La démonstration repose sur une estimation de C.T. McMullen de la longueur extrême de certaines familles de courbes. Inversement, le Chapitre 8 perturbe un polynôme géométriquement fini pour le rendre sous-hyperbolique, tout en gardant une conjugaison sur les ensembles de Julia.

La Partie IV est consacrée aux polynômes quadratiques et à la combinatoire de l'ensemble de Mandelbrot. Il existe déjà beaucoup de littérature sur le sujet. On introduit ici la notion de *groupeïde dilatant* qui permet de caractériser dynamiquement l'arbre de Hubbard. On en déduit que ses arêtes sont supportées sur des quasidroites de mesure de Hausdorff finie et non nulle. Le second chapitre donne une démonstration détaillée du Théorème de Modulation de A. Douady et J.H. Hubbard. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à "l'opération de modulation". On y trouve notamment une construction par chirurgie quasiconforme d'un polynôme modulé, à partir du centre d'une petite copie de  $M$  et d'un polynôme ayant un ensemble de Julia connexe.

La Partie V porte sur la chirurgie croisée. Étant donnés deux polynômes vérifiant une condition combinatoire, on définit leur *croisement*, qui est un polynôme de degré plus grand, dont l'ensemble de Julia ressemble à la superposition des deux autres ensembles au-dessus d'un point fixe. On fait une étude approfondie de cette opération : on montre que le croisement de deux polynômes au-dessus de deux points fixes répulsifs, ou d'un point répulsif et d'un point parabolique existe toujours. On donne une définition du croisement qui caractérise à conjugaison conforme près les polynômes résultants. On s'intéresse aussi à savoir comment reconnaître le croisement de deux polynômes. Le dernier chapitre traite de la dépendance par rapport à des paramètres.

## Abstract.

This thesis deals with the iteration of rational maps on the Riemann sphere. Most of the techniques used herein come from quasiconformal surgery. It is divided into five parts.

The first original result is in Chapter 5 of Part II: the theory of polynomial-like mappings of A. Douady and J.H. Hubbard is generalized into *polynomial figures*. The main difference comes from the external class which is no longer assumed to be expanding: critical points and parabolic points are allowed. Under finiteness assumptions, we show that polynomials can be mated to such maps. The proof uses surgery and a generalization of the Measurable Riemann Mapping Theorem of G. David. The opposite procedure is more difficult, because the assumptions of G. David's theorem are no longer fulfilled. If an external class contains only prerepelling critical points (no parabolics), then the polynomial figure can be *straightened* to a real complex polynomial.

In Part III, we discuss analogies between Julia sets containing and not containing parabolic points. We first study the *pinching deformation*, introduced in this setting by P. Makienko, which transforms a pair of attracting and repelling points into a same parabolic point. This deformation shows the existence of a semi-conjugacy between hyperbolic polynomials and geometrically finite ones (obtained as limits of this perturbation). These are the first positive results on this deformation. The proof is based on an extremal length estimate of C.T. McMullen. Chapter 8 deals with the opposite problem: given a geometrically finite polynomial, we define a perturbation by sub-hyperbolic polynomials, such that all are conjugate to the former on their Julia sets.

Part IV is reserved to the study of the quadratic family and the Mandelbrot set. We introduce the notion of *expanding groupoid* which characterizes dynamically Hubbard trees. As a corollary, we show that their edges have finite Hausdorff measure and rest on quasilines. The second Chapter of this part is devoted to the proof of the Tuning Theorem of A. Douady and J.H. Hubbard. The last chapter is concerned with the study of the "tuning map". A quasiconformal construction of a tuned polynomial is given (starting with the center of a copy of  $M$  and with any point having a connected Julia set).

The last part is devoted to *intertwining*. Given two polynomials with connected Julia sets and verifying a combinatorial assumption, one can define their intertwining to be a polynomial of a higher degree, such that its Julia set looks like the superposition of the former ones over respective fixed points. In the first chapter, we prove the existence of such maps, given the assumption that the fixed points are not both parabolic. We use the 'sector method' of B. Branner and A. Douady and also G. David's theorem. Using polynomial figures, we give a formal definition of intertwining such that conformal class of intertwining are well defined. Chapter 13 gives criteria for recognizing these special maps. The last chapter deals with families of intertwining.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Adrien Douady pour avoir accepté de diriger mes recherches et de m'initier à cette tâche des plus passionnantes. Outre sa vision originale des mathématiques, j'ai aussi bénéficié de sa constante confiance. Ses incitations à rencontrer d'autres chercheurs, notamment étrangers, m'ont permis de me retrouver dans un milieu scientifique très chaleureux et stimulant. Pour cette indépendance que j'ai eue, qui m'a permis de travailler à mon rythme et parfois dans des directions de mon choix, je l'en remercie chaleureusement.

Tout au long de l'élaboration de ce travail, j'ai eu de nombreuses discussions très intéressantes avec Carsten L. Petersen. Il a accepté de rapporter mon travail, j'en suis très touché.

Je remercie Mitsuhiro Shishikura pour l'honneur qu'il me fait d'être rapporteur de ma thèse. Ses travaux m'ont inspiré une partie importante de mon travail.

Que Kari Astala reçoive ma gratitude pour avoir accepté d'être membre du jury. Je tiens tout particulièrement à le remercier de l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie Marguerite Flexor de faire partie du jury. Le temps qu'elle m'a accordé à relire les différentes versions de mon manuscrit m'a été des plus profitable. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie aussi John H. Hubbard d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse. Les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui m'ont appris de belles mathématiques.

Tout au long de ce travail de recherche, j'ai eu beaucoup de plaisir à discuter et à apprendre des mathématiques avec Tan Lei. Ces compétences scientifiques m'ont beaucoup apporté. Je l'en remercie.

Le présent mémoire est le fruit d'un travail réalisé essentiellement à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon où j'ai bénéficié de relations et de conditions de travail exceptionnelles. Je remercie Etienne Ghys, actuel directeur du laboratoire de mathématiques pures et appliquées, de m'avoir accueilli au laboratoire. Les constants encouragements du laboratoire m'ont notamment permis – dans les moments difficiles – de réduire mon isolement. J'aimerais plus particulièrement remercier Pascale Roesch pour toutes les discussions quotidiennes que nous avons eues. Il est difficile de remercier à leur juste valeur toutes les personnes qui m'ont soutenu : je n'ai cité que quelques noms, que les autres ne se sentent pas exclues !

Je remercie spécialement Virginia Gallardo et Sabrina Kadri à Lyon, et Martine Justin et Laurence Stephen à Orsay de m'avoir souvent plus qu'aidé à m'orienter dans les dédales de l'administration.

Et enfin, je tiens à remercier particulièrement tous les gens qui, à Lyon comme à Paris, ont eu à me supporter durant l'élaboration laborieuse de cette thèse.



# Introduction

Cette thèse porte sur l'étude dynamique des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann, et en particulier des polynômes. L'accent est mis sur les applications de la chirurgie, notamment le fait qu'on obtient, en général, un modèle topologique des objets construits.

Étant donné un polynôme  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit son *ensemble de Julia rempli* comme l'ensemble des points qui restent bornés par itération. À  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixé, on associe la suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  définie par  $z_{n+1} = P(z_n) = P^{\circ n}(z_0)$ .

La chirurgie consiste à faire des découpages et des collages afin de construire de nouveaux polynômes en connaissant d'avance leurs propriétés dynamiques, comme la topologie de son ensemble de Julia.

Cette thèse est organisée en cinq parties.

Dans la première partie, on rappelle les principales propriétés de dynamique conforme à une variable, ainsi qu'un bref historique sur les applications de la chirurgie.

Les principaux outils de la chirurgie, notamment les applications quasiconformes et les applications à allure polynomiale ([DH2]), sont présentés dans la seconde partie. Le dernier chapitre développe la théorie de la figuration et des silhouettes polynomiales qui généralisent les applications à allure polynomiale. Il s'agit des premiers résultats originaux de cette thèse. La plupart des démonstrations utilisent la chirurgie et la *méthode des secteurs*, introduite par B. Branner et A. Douady ([BD]) : elle consiste à changer des polynômes sur des secteurs situés à l'extérieur de leurs ensembles de Julia, pour ensuite pouvoir appliquer le théorème d'Ahlfors-Bers et obtenir un nouveau système dynamique holomorphe. Un autre point intéressant est l'usage du théorème de G. David sur les formes de Beltrami dégénérées (cf [Da]), ce qui constitue une première application de ce théorème. La figuration est utilisée dans les autres parties.

La troisième partie est consacrée à la dynamique liée à la présence de points paraboliques. Le but est d'exhiber les similitudes — locales et globales — engendrées par la présence d'un point parabolique ou d'une paire de points attractif et répulsif. La principale difficulté est la différence géométrique entre les ensembles de Julia. Elle interdit l'usage des applications quasiconformes et oblige à avoir recours à des objets plus singuliers. La *déformation par pincement* est une déformation qui pince un tore attractif en un cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  afin de transformer sur le plan dynamique un point attractif en un point parabolique. Cette déformation avait tout d'abord été introduite dans ce cadre par P. Makienko pour montrer que des composantes hyperboliques dans des espaces de fractions rationnelles

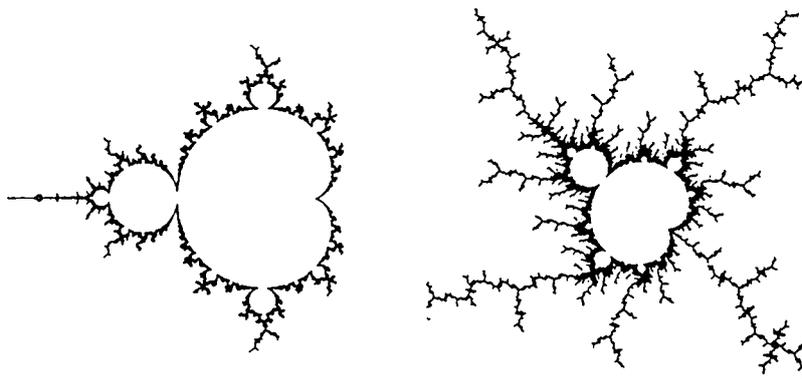
n'étaient pas compactes (voir [Mk1, Pi]). Elle était donc utilisée dans un sens négatif. Ici, on montre que cette déformation admet des limites que l'on contrôle bien, malgré des dégénérescences. Pour obtenir ce contrôle, on utilise une estimation de C.T. McMullen sur la longueur extrémale de courbes.

Dans le dernier paragraphe, on utilise à nouveau le théorème de G. David pour compléter nos résultats: on montre que l'on peut remplacer une paire attractif/répulsif par un point parabolique sans changer la topologie ni la dynamique de l'ensemble de Julia sous la seule condition qu'aucune orbite critique n'accumule le point répulsif. Le dernier chapitre traite du problème inverse. Étant donné un polynôme géométriquement fini, on définit un déploiement de ce polynôme en polynômes sous-hyperboliques ayant la même dynamique sur les ensembles de Julia. La preuve s'appuie sur les propriétés d'expansivité de ces applications.



Figure 1 *Pincement vers le lapin gras.*

Dans la quatrième partie, nous nous tournons vers la famille quadratique, et nous nous intéressons surtout à la modulation. Celle-ci explique la présence de petites copies de l'ensemble de Mandelbrot  $M$  dans lui-même. Dans un premier temps, on étudie les propriétés combinatoires de  $M$  et ses liens avec les polynômes à ensemble postcritique fini. Pour ce faire, on introduit la notion de *groupeïde dilatant* qui caractérise l'arbre de Hubbard d'un polynôme quadratique. Ce groupeïde peut être "poussé" à d'autres paramètres plus "loin" et complété afin d'obtenir le groupeïde de ces autres arbres. Ce type d'objet a déjà été longuement étudié, et nous en profitons pour en déduire des propriétés géométriques de l'arbre de Hubbard. Le second chapitre donne une démonstration détaillée du Théorème de Modulation de A. Douady et J.H. Hubbard, d'après [Do3] où elle est esquissée. On complète ce résultat en montrant que l'on peut définir une silhouette polynomiale à la racine d'une composante hyperbolique non primitive dans laquelle figure de manière rigide le chou-fleur. Le dernier chapitre traite de l'opération de modulation induite par ce théorème. On montre notamment que la modulation remplace les composantes connexes de l'intérieur d'un ensemble de Julia par des petites copies du polynôme modulateur. On y trouve aussi une construction directe, par chirurgie quasiconforme, de cette opération, ce qui permet aussi d'aborder la modulation en degré supérieur.

Figure 2 *M et un zoom.*

La cinquième partie constitue une étude assez poussée d'un type particulier de chirurgie : la chirurgie croisée (voir aussi [EY] pour le degré trois). Étant donnés deux polynômes, on se propose de construire, modulo des hypothèses combinatoires, un nouveau polynôme tel que son ensemble de Julia ressemble à la superposition des deux précédents au-dessus d'un point. Ce polynôme est de degré plus grand que ceux de ses "ancêtres". Une fraction importante de cette dernière partie vise à montrer que cette construction est bien définie, et qu'elle peut s'effectuer par chirurgie. C'est l'occasion pour nous de montrer différentes techniques utilisables en chirurgie. On utilise comme dans le chapitre sur les silhouettes polynomiales la méthode des secteurs et le théorème de G. David. Malheureusement, les différents théorèmes d'intégration des formes de Beltrami ne permettent pas de montrer l'existence de polynômes dans tous les cas. Cependant, la notion de figuration rigidifie bien la situation. On construit aussi un modèle topologique du croisement de deux polynômes à l'aide de limites projectives de sphères. Cette méthode peut aussi être appliquée à d'autres chirurgies, par exemple à l'explosion d'ensemble de Julia (Partie II, Chapitre 5). On étudie enfin la dépendance de cette opération en fonction de paramètres.

Figure 3 *Exemple de croisement.*

Les figures sont numérotées de deux manières :

- les légendes en gras correspondent à des représentations d'ensembles de Julia dessinées à l'aide du logiciel "citol" pour les ensembles de Julia remplis et d'un logiciel de C.T. McMullen pour les autres ;
- les autres figures ont été tracées avec "xfig".

# Table des matières

<b>Résumés</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>I. Rappels de dynamique</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à l'itération</b>	<b>3</b>
1.1 Points périodiques . . . . .	3
1.2 Domaines de Fatou . . . . .	5
1.3 Ensemble de Julia . . . . .	7
1.4 Dynamique de polynômes . . . . .	7
<b>2 La chirurgie, la déformation et leurs applications depuis 1981</b>	<b>11</b>
<b>II. Outils de la chirurgie et de la déformation</b>	<b>15</b>
<b>3 Rappels d'analyse complexe</b>	<b>17</b>
<b>4 Applications quasiconformes &amp; espaces de Teichmüller</b>	<b>23</b>
4.1 Applications quasiconformes : définition et principales propriétés . . . . .	23
4.2 Extensions d'applications et problème de couture . . . . .	25
4.2.1 Applications quasisymétriques et extension d'homéomorphismes réels	26
4.2.2 Prolongements d'applications conformes définies sur des secteurs . .	26
4.2.3 Problème de couture . . . . .	29
4.3 Mouvements holomorphes . . . . .	29
4.4 Espace de Teichmüller "classique" . . . . .	30

4.5	Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Applications à allure polynomiale et figuration</b>	<b>35</b>
5.1	Applications à allure polynomiale . . . . .	35
5.2	Figuration souple . . . . .	37
5.3	Figuration rigide . . . . .	39
5.4	Silhouettes polynomiales et figuration rigide . . . . .	40
5.5	Un exemple avec un point parabolique dans la classe externe . . . . .	46
5.6	Accouplements de classes externes combinatoirement finies . . . . .	51
5.6.1	Explosions d'ensembles de Julia . . . . .	52
5.6.2	Démonstration du Théorème 2 . . . . .	56
<b>III.</b>	<b>Points paraboliques</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Etude locale</b>	<b>61</b>
6.1	Déploiement central . . . . .	61
6.2	Déploiement parabolique . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Pincement de polynômes</b>	<b>67</b>
7.1	Pincement d'une paire attractif/répulsif . . . . .	68
7.2	Déformation globale . . . . .	72
7.2.1	Définition générale du pincement . . . . .	72
7.2.2	Cas à allure monomiale . . . . .	76
7.2.3	Pincement d'un polynôme hyperbolique . . . . .	84
7.3	Points répulsif/attractif et point parabolique . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Déformation <math>J</math>-équivalente de polynômes géométriquement finis</b>	<b>91</b>
8.1	Construction d'un déploiement . . . . .	92
8.2	Une propriété de continuité . . . . .	94
8.3	Preuve du théorème . . . . .	95

<u>Introduction</u>	xi
<b>IV. Applications de la chirurgie à la famille quadratique</b>	<b>97</b>
<b>9 Polynômes hyperboliques et combinatoire de <math>M</math></b>	<b>99</b>
9.1 Propriétés de l'ensemble de Julia . . . . .	99
9.2 Arbres de Hubbard et propriétés combinatoires . . . . .	101
9.3 Chemins combinatoires dans $M$ . . . . .	102
9.4 Groupoïdes . . . . .	103
9.5 Sur la géométrie de l'arbre de Hubbard . . . . .	112
<b>10 Théorème de Modulation</b>	<b>115</b>
10.1 Première construction . . . . .	116
10.2 $W$ primitive . . . . .	123
10.3 $W$ non primitive . . . . .	126
<b>11 Opération de Modulation</b>	<b>131</b>
11.1 Puzzle associé à une copie $M_{c_0}$ . . . . .	132
11.2 Modèle topologique de la modulation . . . . .	136
11.3 Construction par chirurgie quasiconforme . . . . .	137
11.3.1 Cas primitif . . . . .	137
11.3.2 Cas non primitif . . . . .	140
11.4 Modulation de compacts du plan . . . . .	141
11.4.1 Introduction . . . . .	141
11.4.2 Lemme et définition . . . . .	142
11.5 Théorème 8 . . . . .	143
11.6 Corollaires . . . . .	144
11.7 Modulation généralisée . . . . .	145
<b>V. Chirurgie croisée</b>	<b>147</b>
<b>12 Croisement de polynômes par chirurgie</b>	<b>151</b>
12.1 Chirurgie croisée en degré deux: un exemple . . . . .	151
12.1.1 Chirurgie topologique . . . . .	152
12.1.2 Passage à l'holomorphe . . . . .	153

12.2	Cas général (croisement répulsif) . . . . .	157
12.3	Estimations de modules d'ouvertures . . . . .	158
12.3.1	$\alpha$ non au bord de composante de Fatou bornée . . . . .	158
12.3.2	$\alpha$ au bord de composante(s) de Fatou bornée(s) . . . . .	159
12.3.3	$\alpha$ au bord de quasidisque(s) . . . . .	160
12.3.4	Autres cas ( $\alpha$ répulsif) . . . . .	160
12.4	Croisement répulsif/parabolique . . . . .	161
12.5	Propriétés et généralisations . . . . .	162
<b>13</b>	<b>Rigidité des croisements à combinatoire fixée</b>	<b>169</b>
13.1	Cas répulsif . . . . .	170
13.2	Cas parabolique . . . . .	172
<b>14</b>	<b>Croisement topologique</b>	<b>175</b>
14.1	Limites projectives d'espaces topologiques . . . . .	176
14.2	Construction de $(\Sigma_\infty, F)$ . . . . .	177
14.3	Propriétés . . . . .	179
14.4	Classe topologique des croisements . . . . .	180
14.5	Conséquence sur la connexité locale . . . . .	183
<b>15</b>	<b>Critère de dévissage</b>	<b>185</b>
15.1	Partition associée à un polynôme . . . . .	185
15.2	Condition nécessaire . . . . .	186
15.3	Obtention de figurants . . . . .	186
15.4	Figurants/figuré . . . . .	187
<b>16</b>	<b>Dépendance par rapport aux paramètres</b>	<b>191</b>
16.1	Cas géométriquement fini . . . . .	191
16.1.1	Motivation et exemples . . . . .	191
16.1.2	Cas général . . . . .	193
16.2	Sur les familles de croisements . . . . .	193
16.3	Application au degré trois . . . . .	195

# I. Rappels de dynamique

Dans cette partie, on rappelle les notions et théorèmes “classiques” de la théorie de l’itération de fractions rationnelles sur la sphère de Riemann. Le dernier chapitre donne un bref historique de l’usage de la chirurgie dans ce domaine.



# Chapitre 1

## Introduction à l'itération

Soit  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On s'intéresse à l'étude des itérés  $(f^n)_{n \geq 0}$  de  $f$  sur la sphère de Riemann. Soit  $z \in \bar{\mathbb{C}}$ , on définit son orbite par  $orb(z) = \{f^n(z)\}_{n \geq 0}$  et sa grande orbite par  $GO(z) = \cup_{n,j \in \mathbb{N}} f^{-n}(\{f^j(z)\})$ .

Lorsque l'on étudie l'itération de fonctions holomorphes, il suffit de se restreindre aux fonctions définies à conjugaison conforme près. En effet, étudier la dynamique d'une fonction  $f : U' \rightarrow U$  ou  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : V' \rightarrow V$ , où  $\varphi : U' \cup U \rightarrow V' \cup V$  est conforme, revient au même: les propriétés dynamiques restent les mêmes ( $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$ ) et les invariants conformes sont conservés.

Un point  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  est un point périodique de  $f$  s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $f^n(z) = z$ . La période de  $z$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $f^k(z) = z$ . Son cycle est défini comme étant son orbite. Un point  $z$  est prépériodique si son orbite est finie, autrement dit s'il existe  $\ell \geq 0, k \geq 1$  tels que  $f^{\ell+k}(z) = f^\ell(z)$ . Le plus petit  $\ell \geq 0$  qui vérifie cette relation est le temps cyclique ou la durée non cyclique de  $z$ . Ce dernier est strictement prépériodique si son temps cyclique est strictement positif.

On commencera d'abord par étudier les points périodiques, pour une fraction rationnelle donnée. Ensuite, on définira l'ensemble de Fatou et l'on précisera ses principales propriétés, ainsi que pour son complémentaire, l'ensemble de Julia. Cette décomposition correspond à la partition entre une dynamique "fluviale" (ensemble de Fatou) et une dynamique "chaotique" (ensemble de Julia). Le dernier paragraphe est consacré plus particulièrement aux polynômes et surtout à la famille quadratique.

Pour des introductions plus complètes, on peut se reporter par exemple à [CG, Do1, Mi, Sul].

### 1.1 Points périodiques

Soit  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On suppose que 0 est un point  $k$ -périodique, et que sur un voisinage  $\Omega$  de l'origine,  $g(z) := f^k(z) = \lambda \cdot z + o(z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On appelle  $\lambda = (f^k)'(0)$  le multiplicateur du cycle contenant 0. On classe les germes périodiques par leur multiplicateur.

**Points répulsifs et attractifs.** L'origine est un point *répulsif* si  $|\lambda| > 1$  et *attractif* si  $0 < |\lambda| < 1$ .

D'après un théorème de G. Koenigs, il existe une unique application conforme  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = 1, \end{cases} \text{ et } \varphi \circ f^k(z) = \lambda^k \varphi(z)$$

pour  $z$  assez de proche de 0. On dit que l'origine est *linéarisable*.

A un point attractif ou répulsif, on associe un tore en considérant

$$(\Omega \setminus \{0\})/(f) \simeq \mathbb{C}/(\text{Log } \lambda \mathbb{Z} \oplus 2i\pi \mathbb{Z}).$$

**Points paraboliques.** Un point est *parabolique* si  $\lambda$  est une racine de l'unité. Quitte à itérer  $f$ , on se ramène à un germe de la forme  $g(z) = z + z^{\nu+1} + o(z^{\nu+1})$ .

Un ouvert connexe  $\mathcal{P}_a \subset \Omega$  est un *pétale attractif* si  $0 \in \partial \mathcal{P}_a$ ,  $g(\overline{\mathcal{P}_a}) \subset \mathcal{P}_a \cup \{0\}$  et si  $\bigcap_{n \geq 0} g^n(\overline{\mathcal{P}_a}) = \{0\}$ . De même, un *pétale répulsif* est un ouvert connexe  $\mathcal{P}_r$  qui est un pétale attractif de  $g^{-1}$ .

D'après L. Leau et P. Fatou, il existe  $\nu$  pétales attractifs disjoints et  $\nu$  pétales répulsifs disjoints tels que leur réunion avec 0 est un voisinage de l'origine. Les pétales attractifs et répulsifs sont alternés, et un pétale ne peut intersecter au plus que deux pétales de type opposé. De plus, sur chaque pétale  $\mathcal{P}$ , l'application  $g$  est conjuguée à la translation  $z \mapsto z + 1$ .

À chaque pétale, on associe la surface de Riemann  $\mathcal{P}/(g) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . On verra dans la Partie III d'autres propriétés des points paraboliques.

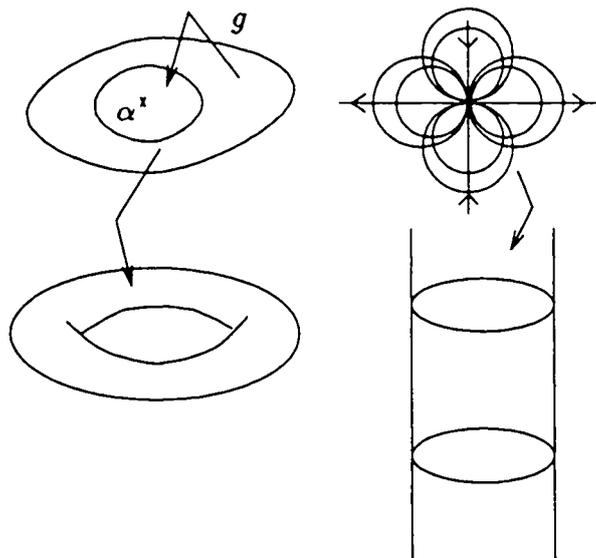


FIG. 1.1 - Point attractif et point parabolique.

**Points super-attractifs.** Un point est super-attractif si  $\lambda = 0$ . À ce moment, l'application premier retour est de la forme  $g(z) = z^k + o(z^k)$ ,  $k \geq 2$ .

D'après un théorème de Böttcher, il existe une unique application conforme  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = 1, \end{cases} \quad \text{et } \varphi \circ g(z) = \varphi(z)^k$$

pour  $z$  assez de proche de 0, appelée la coordonnée de Böttcher.

**Points de Siegel.** Supposons que  $|\lambda| = 1$  et que  $\lambda$  ne soit pas une racine de l'unité. Si  $g$  est linéarisable, *i.e.* conjugué à la rotation rigide  $z \mapsto \lambda z$ , alors 0 est un point de Siegel.

D'après les travaux de C.L. Siegel, A.D. Brjuno et J.C. Yoccoz (voir [Yo]), on a une condition arithmétique optimale sur  $\lambda$  pour savoir si n'importe quel germe est linéarisable.

**Points de Cremer.** Un point est dit de Cremer si  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  n'est pas une racine de l'unité et n'est pas linéarisable.

D'après un théorème de R. Perez-Marco (voir [PM]), pour tout voisinage  $\Omega$  assez petit, il existe un unique compact  $K$  connexe plein ( $\mathbb{C} \setminus K$  connexe) totalement invariant ( $g(K) = g^{-1}(K) = K$ ) et  $K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . Ce compact n'est pas localement connexe, et on l'appelle hérisson.

## 1.2 Domaines de Fatou

On rappelle qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions méromorphes jouissant du même domaine de définition  $U$  est normale, si, de toute suite, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers une application méromorphe.

**Définition.** Soit  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On appelle domaine de Fatou de  $f$  l'ensemble des  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  tels qu'il existe un voisinage  $U_z$  de  $z$  tel que la suite des itérés  $(f|_{U_z}^n)_{n \geq 0}$  soit normale.

Cet ensemble est un ouvert (éventuellement vide) totalement invariant de la sphère. Pour toute composante connexe  $U$  du domaine de Fatou,  $f(U)$  est une aussi composante connexe du domaine de Fatou et  $f : U \rightarrow f(U)$  est propre.

**Domaines de Fatou associés à des points périodiques.**

**BASSIN D'ATTRACTION.** Si  $\alpha$  est un point  $k$ -périodique attractif, on définit son bassin d'attraction  $A(\alpha)$  comme étant l'ensemble des  $z$  attirés par un point du cycle par  $(f^{kn})_{n \geq 0}$ . Son bassin immédiat  $A^*(\alpha)$  est la réunion des composantes connexes de  $A(\alpha)$  contenant le cycle.

Celui-ci contient toujours au moins un point critique. On note

$$\hat{A}(\alpha) = A(\alpha) \setminus \cup GO(\text{points attractifs et critiques}).$$

L'application  $f : \hat{A}(\alpha) \rightarrow \hat{A}(\alpha)$  est un revêtement et son action est discrète.

À un bassin d'attraction, on associe la surface de Riemann quotient  $\hat{A}(\alpha)/(f)$  qui est

isomorphe au tore attractif privé du nombre de grandes orbites ( $GO$ ) distinctes de points critiques.

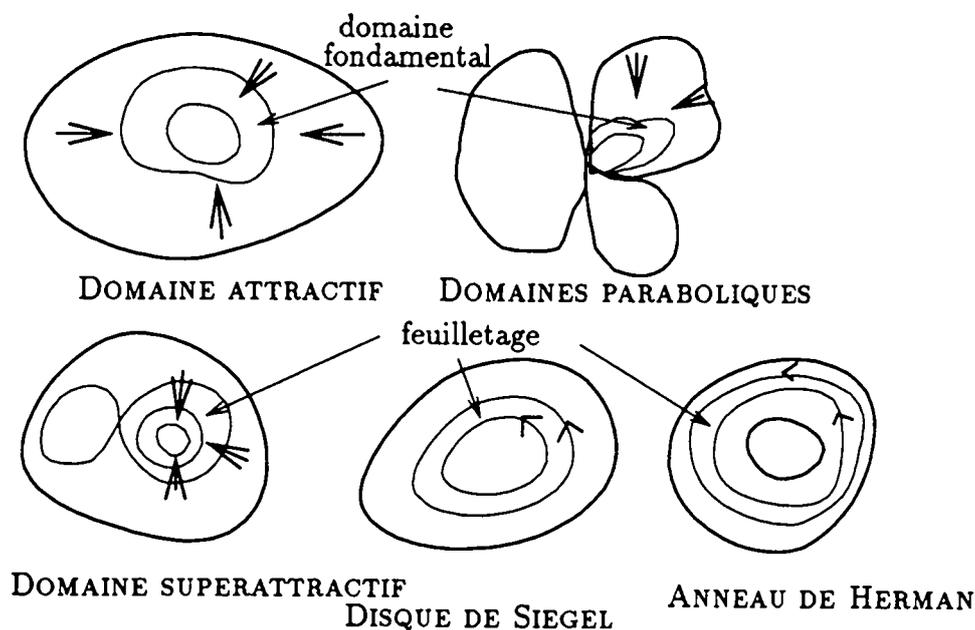


FIG. 1.2 - Classification des composantes de Fatou.

**BASSIN PARABOLIQUE.** En complète analogie, si  $\alpha$  est parabolique, on définit son *bassin parabolique*  $A(\alpha)$  comme étant l'ensemble des  $z$  attirés par le cycle, et son *bassin immédiat*  $A^*(\alpha)$  comme la réunion des composantes connexes de  $A(\alpha)$  ayant le cycle dans son bord.

Son bassin immédiat contient toujours au moins un point critique. On note

$$\hat{A}(\alpha) = A(\alpha) \setminus \cup GO(\text{critiques}).$$

L'application  $f : \hat{A}(\alpha) \rightarrow \hat{A}(\alpha)$  est un revêtement et son action est discrète.

À un bassin parabolique, on associe la surface de Riemann quotient  $\hat{A}(\alpha)/(f)$  qui est isomorphe au cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  privé du nombre de  $GO$  distinctes de points critiques.

**DISQUES DE SIEGEL.** Si  $\alpha$  est un point de Siegel, on définit son *disque de Siegel* comme l'ouvert maximal contenant le cycle et tel que  $f^k$  soit conformément conjuguée à une rotation. On considère  $\Omega$ , la réunion des composantes connexes de Fatou qui aboutissent en temps fini dans le disque de Siegel.

Sur les disques, la dynamique de  $f$  induit un feuilletage de cercles  $\mathbb{R}$ -analytiques centrés en  $\alpha$ .

**BASSIN SUPER-ATTRACTIF.** Si  $\alpha$  est super-attractif, on prend les mêmes définitions que pour un point attractif. Seulement, l'action de  $f$  sur  $\hat{A}(\alpha)$  n'est plus discrète, mais induit comme dans le cas de Siegel un feuilletage par cercles  $\mathbb{R}$ -analytiques immergés.

**Classification des composantes de Fatou d'une fraction rationnelle.** Suites aux travaux de P. Fatou, M. Herman, V.I. Arnol'd et D. Sullivan, on classe les composantes de Fatou de la façon suivante.

▷ Toute composante est prépériodique.

▷ Soit  $U$  une composante périodique. Alors, ou bien

(i)  $U$  est le bassin d'attraction d'un point attractif ou super-attractif,

(ii)  $U$  est un bassin parabolique,

(iii)  $U$  est un disque de Siegel,

(iv)  $U$  est un anneau de Herman : ouvert doublement connexe (anneau) sur lequel l'application premier retour est conjuguée à une rotation irrationnelle.

**Remarque.** Les polynômes peuvent être classés de la même manière, sauf que le cas (iv) ne peut pas se produire.

**Inégalité de Shishikura.** Soit  $f$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On note  $n_a$  le nombre de cycles (super-)attractifs,  $n_p$  le nombre de cycles de pétales paraboliques,  $n_S$  le nombre de cycles de Siegel,  $n_H$  le nombre d'anneaux de Herman, et  $n_C$  le nombre de cycles de Cremer. Alors

$$n_a + n_p + n_S + 2n_H + n_C \leq 2d - 2.$$

### 1.3 Ensemble de Julia

**Définition.** Soit  $f$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . Son ensemble de Julia  $J_f$  est le complémentaire du domaine de Fatou.

C'est un compact non vide uniformément parfait, *i.e.* s'il existe  $0 < c < 1$  tel que pour tout  $z_0 \in J_f$  et pour tout  $r_0 > r > 0$ ,  $(cr < |z - z_0| < r) \cap J_f \neq \emptyset$ .

De plus il est totalement invariant par  $f$ , et, si  $J_f \neq \overline{\mathbb{C}}$ , alors il est d'intérieur vide. Il contient les points répulsifs, les points paraboliques et les points de Cremer.

Pour tout  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , l'ensemble de ses préimages  $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(z)$  non seulement s'accumulent sur  $J_f$ , mais aussi sont denses. De plus, pour tout ouvert  $U$  tel que  $U \cap J_f \neq \emptyset$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $f^n(U) \supset J_f$ .

Le résultat général le plus important est dû à P. Fatou et G. Julia : soit  $f$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ ; alors

$$J_f = \overline{\{\text{points répulsifs}\}}.$$

### 1.4 Dynamique de polynômes

On se restreint à la famille quadratique, bien que de nombreux résultats restent vrais dans le cas de polynômes de degré plus élevé. La particularité des polynômes est l'existence

à l'infini d'un point super-attractif, de bassin connexe et dont le bord est son ensemble de Julia.

On considère la famille de polynômes

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

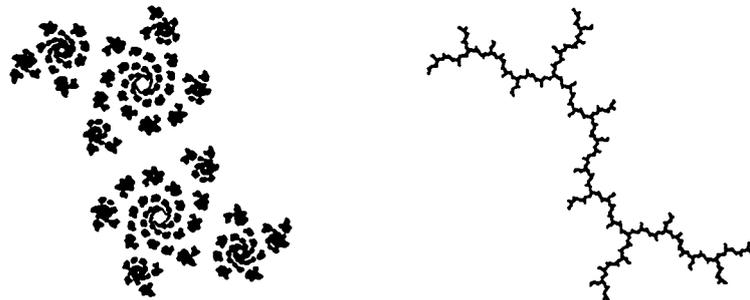
On note  $\left\{ \begin{array}{l} K_c = \{z \in \mathbb{C}, P_c^n(z) \not\rightarrow \infty\} \text{ l'ensemble de Julia rempli, qui est compact plein, et} \\ J_c = \partial K_c \text{ l'ensemble de Julia de } P_c. \end{array} \right.$

On va énumérer les principaux résultats dont on aura besoin. Les démonstrations se trouvent dans [DH1], sauf mention différente.

**Proposition 1.4.1** (I, Chap.3, Prop.1)

De deux choses l'une :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } 0 \in K_c \text{ et } K_c \text{ est connexe,} \\ \text{soit } K_c \text{ est un Cantor.} \end{array} \right.$

**Exemples.**



**Figure 4** Ensembles de Julia quadratiques.

Pour tout  $c$  dans  $\mathbb{C}$ , on peut définir la coordonnée de Böttcher  $\varphi_c$  au voisinage de l'infini qui conjugue  $P_c$  à  $z \mapsto z^2$ ,  $\varphi_c$  tangente à l'identité à l'infini. Si  $K_c$  est connexe, alors  $\varphi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ .

On définit le potentiel de  $P_c$  par  $G_c = \log |\varphi_c|$ . On prolonge  $G_c$  à  $\mathbb{C}$  comme suit :

- Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$ , on utilise la relation  $G_c(P_c(z)) = 2G_c(z)$ ,
- Pour  $z \in K_c$ , on prolonge par continuité en posant  $G_c(z) = 0$ .

On définit les équipotentielles par  $G_c^{-1}(\eta)$ ,  $\eta > 0$ ; c'est un cercle topologique si  $\eta > G_c(0)$ . Le rayon externe  $\mathcal{R}_c(\theta)$ , où  $\theta$  est compté en nombre de tours, est  $\varphi_c^{-1}(\eta e^{2i\pi\theta})$ , pour  $\eta$  assez grand. On le prolonge tant qu'on ne "bute" pas sur un point précritique  $\omega$  de  $P_c$ , i.e.  $\text{Arg}\varphi_c(\omega) = \theta$ . Pour tout  $z$  de  $\mathcal{R}_c(\theta)$ , on dit que  $z$  a pour argument  $\theta$ . Si  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi_c^{-1}(\eta e^{2i\pi\theta})$  existe, alors  $\mathcal{R}_c(\theta)$  aboutit.

Si  $K_c$  est connexe et localement connexe, on peut définir le lacet de Carathéodory par l'application  $\gamma_c : \mathbb{T} \rightarrow \partial K_c$ , fonction continue et surjective, qui à  $\theta$  associe le point où  $\mathcal{R}_c(\theta)$  aboutit.

**Proposition 1.4.2** (I, Chap.8, 2, Prop.2)

$\forall c \in \mathbb{C}, \forall \theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathcal{R}_c(\theta)$  aboutit ou bute sur un point précritique de  $P_c$ .

Soit  $M = \{c \in \mathbb{C}, \text{ tel que } K_c \text{ connexe}\} = \{c \in \mathbb{C}, 0 \in K_c\}$ , l'ensemble de Mandelbrot.  $M$  est compact connexe et plein.

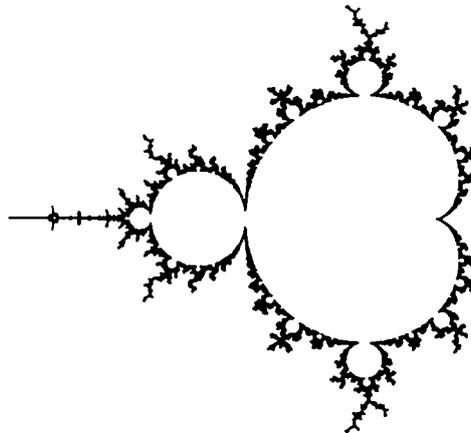


Figure 5 L'ensemble  $M$ .

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} \times \text{voisinage de l'infini} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (c, z) &\mapsto \varphi_c(z) \end{aligned}$$

est holomorphe par rapport à  $(c, z)$ , partout où  $\varphi_c$  est définie.

$\varphi$  induit l'uniformisante

$$\begin{aligned} \varphi_M : \mathbb{C} \setminus M &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}, \\ c &\mapsto \varphi_c(c) \end{aligned}$$

de potentiel  $G_M = \log |\varphi_M|$ .

On définit les équipotentielles et les rayons externes de  $M$  de la même façon.

Pour  $k \geq 1$  fixé,  $\{c \in \mathbb{C} \text{ tq } \exists k\text{-cycle attractif pour } P_c\} \subset \overset{\circ}{M}$ , et chaque composante est appelée *composante hyperbolique* de  $M$  de période  $k$ .

**Remarque.**  $\forall c \in \mathbb{C}, P_c$  admet au plus un cycle non répulsif (car  $\deg P_c = 2$ ).

Pour toute composante hyperbolique  $W$ , on a la représentation conforme  $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$ , qui à  $c$  associe le multiplicateur du cycle attractif de  $P_c$ . L'application  $\rho_W$  se prolonge continûment au bord; on note  $\rho_W^{-1}(0)$  le centre de  $W$  et  $\rho_W^{-1}(1)$  sa racine.

**Définitions.**

$\mathcal{D}_0 = \{\text{centres des composantes hyperboliques}\} = \{c \in \mathbb{C}, 0 \text{ soit périodique}\};$

$\mathcal{D}_1 = \{\text{racines des composantes hyperboliques}\} = \{\text{points paraboliques}\};$

$\mathcal{D}_2 = \{\text{points de Misiurewicz}\} = \{c \in \mathbb{C}, 0 \text{ soit strictement prépériodique}\}.$

**Proposition 1.4.3** (II, Chap.13, Th.1)  $\forall \theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathcal{R}_M(\theta)$  aboutit en  $c \in \partial M$  ;

-  $c \in \mathcal{D}_1$  si  $\theta$  est à dénominateur impair,

-  $c \in \mathcal{D}_2$  sinon.

**Proposition 1.4.4 (relations entres arguments dynamiques et arguments externes)**

- (I, Chap.8, I, Cor.2) : Pour  $c \notin M, \text{Arg}_c c = \text{Arg}_M c.$

- ([Do5]) : Pour  $c \in \mathcal{D}_0,$  il existe  $\mathcal{R}_M(\theta_-)$  et  $\mathcal{R}_M(\theta_+)$  aboutissant à la racine de la composante de  $c.$  Ils aboutissent dans le plan dynamique à la racine de la composante de  $\overset{\circ}{K}_c$  contenant  $c,$  en étant adjacents à cette composante.

- ([Do5]) : Pour  $c \in \mathcal{D}_1,$  il existe  $\mathcal{R}_M(\theta_-)$  et  $\mathcal{R}_M(\theta_+)$  aboutissant en  $c.$  Ils aboutissent dans le plan dynamique à la racine de la composante de  $\overset{\circ}{K}_c$  contenant  $c,$  qui est un point parabolique, en étant adjacents à cette composante.

- (I, Chap.8, III, Th.2) : Pour  $c \in \mathcal{D}_2,$  il existe  $\theta_1, \dots, \theta_\nu$  tels que leurs rayons externes aboutissent en  $c$  dans  $M.$  Ils y aboutissent aussi dans le plan dynamique, et ce sont les seuls.

## Chapitre 2

# La chirurgie, la déformation et leurs applications depuis 1981

**Théorie de la déformation.** La chirurgie fait ses premières apparitions dans l'étude dynamique des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann pendant l'automne 1981. D. Sullivan montre qu'on peut utiliser une approche "à la Teichmüller" pour aborder l'étude de l'ensemble de Mandelbrot  $M$ . Il montre que, pour toute composante hyperbolique de  $M$ , l'application multiplicateur  $\rho : W \rightarrow \mathbf{D}$  est un revêtement, peut-être ramifié sur  $\rho^{-1}(0)$ . Pour cela, il compare l'espace des déformations d'un polynôme quadratique  $c$  ayant un point périodique attractif de multiplicateur non nul avec l'espace des modules d'un tore épointé associé à  $\rho(c)$ . Il construit ainsi, en changeant la structure complexe sur le plan dynamique de  $c$ , une section holomorphe au voisinage de chaque  $\rho \in \mathbf{D}^*$ . Quelque temps plus tard, et inspirés par cette méthode, A. Douady et J.H. Hubbard comparent les paramètres de  $W$  avec la famille de produits de Blaschke  $B_\lambda : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  :

$$B_\lambda(z) = z \frac{z + \lambda}{1 + \bar{\lambda}z}$$

pour montrer que  $\rho$  est en fait un isomorphisme (voir [Do1], [DH1]).

Cette analogie avec l'étude des groupes kleinéens conduit D. Sullivan à achever la classification des composantes de Fatou en montrant le théorème de non-errance, *i.e.* il montre que l'existence d'une composante errante donnerait lieu à un espace de déformation de dimension infinie, ce qui est impossible (voir [Su2] et [McS]). Enfin, il définit un *espace de Teichmüller* pour paramétrer les fractions rationnelles équivalentes à homéomorphismes quasiconformes près (voir [McS]).

Ces mêmes méthodes permettent à R. Mañé, P. Sad et D. Sullivan de décomposer toute famille analytique de fractions rationnelles en composantes structurellement stables et instables, où la réunion des composantes stables est un ouvert dense de l'espace des paramètres. De plus, ils montrent qu'il existe un ouvert, dense dans le précédent, tel que deux paramètres dans une même composante connexe sont quasiconformément conjugués (voir [MSS]), *i.e.* appartiennent à un même espace de Teichmüller. Les auteurs introduisent aussi dans cet article la notion de mouvement holomorphe qui sert à caractériser la stabilité.

**Applications à allure polynomiale.** En parallèle, A. Douady et J.H. Hubbard développent la théorie des applications à allure polynomiale qui met en évidence la présence locale d'une dynamique polynomiale (voir [DH2]). Étant donnée une application holomorphe propre  $f : U' \rightarrow U$ , où  $U' \subset\subset U$  sont des disques topologiques, il existe un polynôme  $P$  et un homéomorphisme qui conjugue  $f$  à  $P$  (Théorème de Redressement). Ce résultat est montré en recollant sur  $U \setminus U'$  la dynamique de  $z \mapsto z^d$  à l'extérieur de  $D$ .

Une première application permet d'exhiber la nature d'auto-ressemblance de  $M$ . À chaque paramètre  $c$  ayant un cycle super-attractif, on associe un voisinage compact  $M_c \subset M$  qui soit homéomorphe à  $M$ . Si  $c \neq c'$ , ou bien  $M_c$  et  $M_{c'}$  sont disjoints, ou bien l'un est strictement contenu dans l'autre (Théorème de Modulation (A. Douady et J.H. Hubbard), voir [Do3] et Partie IV). Cette théorie est aujourd'hui centrale dans la renormalisation et la chirurgie.

**Chirurgie et Disques de Siegel.** L'application de la chirurgie à l'étude des disques de Siegel a débuté en 1983 par les travaux de E. Ghys ([Gh]), améliorés par M. Herman ([He]) et A. Douady ([Do4]). Il s'agit des premiers résultats sur la dynamique globale induite par la présence d'un disque de Siegel. Leurs constructions utilisent une hypothèse que l'on ne savait pas encore possible afin d'obtenir une fraction rationnelle et/ou un polynôme quadratique qui admet(tent) un disque de Siegel qui soit un quasidisque, et qui ne contient pas de point critique dans son bord. Seulement, il faut attendre 1986 pour que M. Herman montre que l'hypothèse de E. Ghys peut être satisfaite. En 1987, quelques années après avoir montré l'optimalité de la condition de Brjuno ([Br, Yo]), et en partant d'une idée de Y.S. Il'yashenko, J.C. Yoccoz montre l'universalité des polynômes quadratiques : à un nombre de rotation fixé, tout germe est linéarisable si et seulement si celui provenant de la famille quadratique l'est. Pour cela, il utilise la théorie des applications à allure polynomiale ([Yo]). La même année, M. Herman utilise des estimations de G. Świątek ([Sw]) et la construction par chirurgie pour montrer que le bord du disque de Siegel d'un polynôme quadratique diophantien d'exposant 2 est un quasicercle (toujours non publié). Ce n'est qu'en 1993-94 que l'on a un premier résultat topologique sur la dynamique globale de polynômes quadratiques admettant un disque de Siegel. C.L. Petersen montre en effet la connexité locale des ensembles de Julia quadratique "diophantien d'exposant 2" ([Pe2]). Là encore, la même chirurgie et les estimations de G. Świątek jouent un rôle prépondérant.

**La méthode des secteurs.** En 1986, B. Branner et A. Douady posent les premières pierres de ce que l'on peut appeler "la méthode des secteurs" (voir [BD]). Elle consiste, *grosso modo*, à découper des plans dynamiques de polynômes le long de rayons externes, les recoller différemment les uns aux autres, de manière à définir au voisinage des anciens ensembles de Julia remplis un revêtement ramifié, en recollant entre eux des itérés des polynômes de départ. En général, cette construction conduit à des discontinuités le long de rayons externes. Pour y remédier, on remplace l'application déjà obtenue par une extension continue définie sur un secteur voisinage du rayon. Modulo des lemmes techniques, on se ramène ainsi à une application à allure polynomiale qui, elle-même, est équivalente à un polynôme.

Par ce procédé, les auteurs construisent d'une part un homéomorphisme entre le membre  $1/2$  et le membre  $1/3$  de  $M$ , et entre le membre  $1/2$  de  $M$  et un membre d'une famille cubique d'autre part. Cette méthode a été plus récemment utilisée par B. Branner

et N. Fagella pour exhiber des homéomorphismes entre membres de  $M$  ayant même dénominateur (voir [BF]). Cette méthode des secteurs permet d'autres chirurgies comme la chirurgie croisée de polynômes (voir [EY] et Partie V) et l'explosion/implosion d'ensembles de Julia (voir Partie II, Chap. 5 et [Bil]).

**La chirurgie formalisée et le principe de Shishikura.** Au milieu des années quatre-vingt, M. Shishikura formalise la notion de chirurgie en énonçant ce qu'il appelle le "lemme fondamental de la chirurgie", qui donne un critère de redressement des applications quasirégulières. Il utilise avec dextérité les techniques de découpe et de couture pour montrer une conjecture datant de P. Fatou sur le nombre maximal de points non répulsifs pour une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$  (voir [Sh1]). Sa démonstration montre aussi qu'un nombre de rotation d'un disque de Siegel est aussi un nombre de rotation d'un anneau de Herman, et réciproquement. L'analogue pour les polynômes avait déjà été montré par A. Douady grâce à l'introduction des applications à allure polynomiale.

De son côté, C.T. McMullen définit un "lemme de recollement" qui permet de remplacer des dynamiques sur le complémentaire d'un compact invariant par une dynamique plus simple (voir [Mc1]). Il l'utilise pour montrer que, si  $K$  est une composante connexe de l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle  $f$  telle que  $f(K) = K$ , alors il existe une fraction rationnelle  $g$ , telle que l'action de  $f$  sur  $K$  soit quasiconformément conjuguée à celle de  $g$  sur  $J_g$ .

**Équivalence combinatoire.** En 1982, W.P. Thurston démontre un théorème sur la caractérisation topologique des fractions rationnelles à ensemble postcritique fini. Étant donné un revêtement ramifié de degré  $d \geq 2$  à ensemble postcritique fini, *i.e.* tel que l'orbite des points critiques soit finie, son critère nous permet de décider si ce revêtement ramifié est équivalent à une fraction rationnelle, ou non (voir [Th], [DH3] et [HS] pour les polynômes). Ce théorème permet un autre type de chirurgie : la fabrication de revêtements ramifiés à ensemble postcritique fini, n'ayant aucune autre régularité que la continuité. Ensuite, il faut vérifier le critère... Ce critère a subi d'importantes simplifications dans sa pratique, notamment à la suite des travaux de S. Levy, B. Wittner, M. Shishikura et Tan L., K. Pilgrim et Tan L., et A. Poirier (voir [Lev, Wt, STL, PTL, Po]).

Ce théorème a été rapidement appliqué dans le cas des chirurgies suivantes :

- ▷ **ACCOUPLEMENT DE POLYNÔMES :** Étant donnés deux polynômes  $P$  et  $Q$  d'ensemble de Julia connexe et localement connexe, on note  $\gamma_P : \mathbb{T} \rightarrow J_P$  (resp.  $\gamma_Q : \mathbb{T} \rightarrow J_Q$ ) le lacet de Carathéodory de  $K_P$  (resp.  $K_Q$ ). On considère  $\Sigma = K_P \cup K_Q / \gamma_P(t) \sim \gamma_Q(-t)$ , et on définit  $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$  par  $P$  et  $Q$ . Lorsque  $\Sigma$  est une sphère, une fraction rationnelle  $f$  est un accouplement de  $P$  et  $Q$  si  $f$  est topologiquement conjugué à  $F$  et si  $P$  et  $Q$  figurent dans  $f$ . Tan L. montre que deux polynômes  $z \mapsto z^d + c$ ,  $d \geq 2$  à ensemble postcritique fini sont accouplables si et seulement si ils ne sont pas dans des membres conjugués (voir [TL1]).
- ▷ **CAPTURE :** Étant donné un polynôme à ensemble postcritique fini, la capture est une construction qui confond le point à l'infini avec deux points strictement prépériodiques répulsifs ayant la même image (voir [Wt]) et qui fabrique une fraction rationnelle.

À l'aide de ces deux chirurgies, Tan L. montre que la méthode de Newton appliquée à la famille de polynômes cubiques se décompose en accouplement ou capture (voir [TL2]).

Plus récemment, des généralisations du théorème de Thurston au cas géométriquement

fini (*i.e.* l'ensemble postcritique fini a un nombre fini de points d'accumulation) commencent à être établies (voir [CJS] et communication personnelle de J.H. Hubbard pour les polynômes, travail joint avec D. Schleicher). Leurs preuves conduisent à l'existence de fractions rationnelles hyperboliques (sans point parabolique).

**Retour aux applications à allure polynomiale.** D. Sullivan interprète l'ensemble des classes externes d'une application à allure polynomiale comme l'espace de Teichmüller d'une lamination en surface de Riemann. Cette idée lui permet de montrer l'universalité de la renormalisation par doublement de période (voir [Su3, Su4] et [Ly2, Mc3] pour des développements).

Par ailleurs, M. Lyubich généralise la notion d'application à allure polynomiale en acceptant des domaines de définition non connexes (voir [Ly1]), ce qui lui permet de démontrer que certains ensembles de Julia sont de mesure nulle. Cette technique est aussi utilisée pour étudier la rigidité de polynômes quadratiques (voir [Ly3, Mc2]). L'étude de points fixes de renormalisation s'applique aussi à l'étude de disques de Siegel ([dF, Mc4]), et au problème d'ensembles de Julia de mesure positive ([SN, Bu]).

## II. Outils de la chirurgie et de la déformation

Cette partie est consacrée aux outils essentiels de la chirurgie et de la théorie de la déformation.

Dans le premier chapitre, on rappelle des théorèmes d'analyse complexe, notamment des résultats liés aux invariants conformes. Dans le chapitre suivant, on présente succinctement les applications quasiconformes et leurs usages dans les espaces de Teichmüller. Le dernier chapitre traite des applications à allure polynomiale, des silhouettes polynomiales et de la figuration. Ces objets permettent de caractériser des applications premier-retour par des polynômes. À part le chapitre sur la figuration, le reste est assez connu, donc il y a peu de démonstrations.

Les principaux résultats sur les silhouettes polynomiales (voir définition p. 40) sont les suivants :

**Proposition 1** *Soit  $(U' \xrightarrow{f} U, K)$  une silhouette polynomiale. On suppose que sa classe externe marquée  $h_f$  est de degré  $d_f \geq 2$ , topologiquement expansive, combinatoirement finie et sans point parabolique. Alors, il existe un unique polynôme  $P$ , à conjugaison affine près, qui figure de manière rigide dans  $f$ , et tel que leurs ensembles de Julia soient homéomorphes.*

**Théorème 2** *Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe ; on note  $\gamma_P : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow J_P$  son lacet de Carathéodory ( $J_P$  n'est pas supposé localement connexe). Soit  $h : (\mathbb{S}^1, X) \rightarrow (\mathbb{S}^1, X)$  un revêtement  $\mathbb{R}$ -analytique marqué topologiquement expansif et combinatoirement fini, et où  $X$  est formé des orbites critiques et paraboliques de  $h$ .*

*On suppose qu'il existe un homéomorphisme  $\chi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  qui conjugue  $h$  à  $z \mapsto z^d$  tel que :*

- (a) pour tout  $x \in X$ ,  $\gamma_P \circ \chi(x)$  est un point prépériodique répulsif de  $P$  ;*
- (b) les points paraboliques de  $h$  correspondent à des points répulsifs de  $P$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $\omega$ -limite des points critiques.*

*Alors il existe une silhouette polynomiale  $f : U' \rightarrow U$  de classe externe  $h$  telle que  $P$  y figure de manière rigide.*

Les techniques utilisées sont essentiellement la méthode des secteurs et le théorème de G. David d'intégrations des formes de Beltrami. On introduit aussi *l'explosion* et *l'implosion* d'ensembles de Julia en un point strictement prépériodique qui sont des chirurgies qui créent et font disparaître des points critiques strictement prépériodiques de polynômes.

# Chapitre 3

## Rappels d'analyse complexe

**Applications conformes.** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert simplement connexe. D'après le théorème de Riemann de représentation conforme, il existe une unique application conforme  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$  à précomposition près par un automorphisme du disque. On s'intéresse à l'extensivité de  $\varphi$  à  $\mathbb{S}^1$ .

On définit la *limite radiale* de  $\varphi$  en  $\zeta \in \mathbb{S}^1$  par la limite - si elle existe - de  $\varphi(r\zeta)$  quand  $r \rightarrow 1$ . D'après un théorème de Fatou, cette limite existe pour presque tout  $\zeta \in \mathbb{S}^1$ .

C. Carathéodory caractérise topologiquement les applications qui se prolongent au bord :

**Théorème 3.0.5 (C. Carathéodory)** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$  une application conforme. Alors, (i) le bord de  $U$  est localement connexe ;

$\Updownarrow$

(ii)  $\varphi$  se prolonge en  $\bar{\varphi} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{U}$  continue.

On conclut ce paragraphe par deux versions du théorème de distorsion de P. Kőbe :

**Théorème 3.0.6 (P. Kőbe)**

(i) Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , une application univalente telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$  ; alors,  $f(\mathbb{D}) \supset \{|z| < 1/4\}$ .

(ii) La famille des applications vérifiant (i) est compacte.

**Longueur extrémale.** D'après A. Beurling ([Ah2, Beu]), on définit la *longueur extrémale* d'une famille de courbes rectifiables  $\Gamma$  du plan comme suit :

Considérons  $\Omega$  un ouvert connexe contenant toutes les courbes de  $\Gamma$ , ainsi que toutes les métriques conformes  $\rho(z)|dz|$  vivant sur  $\Omega$ , où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une application mesurable, telle que

$$0 < \text{Aire}(\Omega, \rho) = \int_{\Omega} \rho^2(z) dx dy < \infty.$$

Posons

$$\text{pour } \gamma \in \Gamma, L(\gamma, \rho) = \int_{\gamma} \rho |dz|,$$

et

$$L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho).$$

**Définition.** La *longueur extrême* de  $\Gamma$  dans  $\Omega$  est :

$$\Lambda_{\Omega}(\Gamma) = \sup \frac{L^2(\gamma, \rho)}{\text{Aire}(\Omega, \rho)},$$

où le “sup” est pris sur toutes les métriques conformes pour lesquelles l’aire de  $\Omega$  est finie et strictement positive.

- C’est un invariant conforme, i.e. si  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  est une application conforme,  $\Gamma' = \{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ , alors  $\Lambda_{\Omega'}(\Gamma') = \Lambda_{\Omega}(\Gamma)$ .
- Elle est indépendante du domaine  $\Omega$  contenant  $\Gamma$ .

On dit que  $\rho$  est une *métrique extrême* pour  $\Gamma$  si elle réalise la longueur extrême de  $\Gamma$ . Les métriques extrêmes existent toujours dans le cas d’anneaux ou de quadrilatères - qui nous intéresse, ce qui est faux en général pour une famille quelconque de courbes. De plus, lorsqu’il en existe une, elle est unique à une normalisation près.

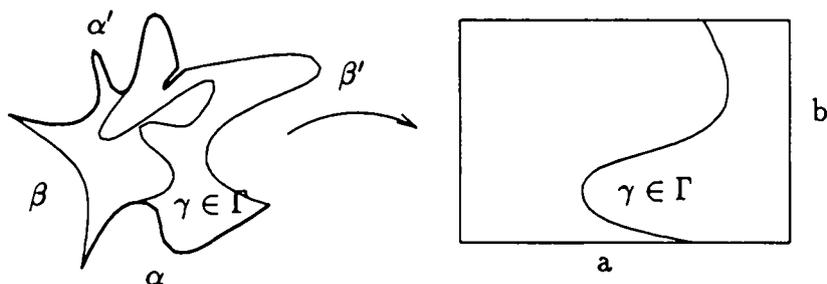


FIG. 3.1 - Redressement d’un quadrilatère.

**Définitions.**  $\triangleright$  Un quadrilatère  $Q$  est un domaine de Jordan avec 4 points marqués sur son bord. Ils divisent le bord en deux paires de côtés opposés  $(\alpha, \alpha')$  et  $(\beta, \beta')$  (voir Figure 3.1). On oriente  $Q$  en choisissant une paire, e.g.  $(\alpha, \alpha')$ , et on note  $Q(\alpha, \alpha')$ . On définit le *module* de  $Q(\alpha, \alpha')$  comme la longueur extrême des courbes joignant  $\alpha$  et  $\alpha'$ . Pour tout quadrilatère, il existe un rectangle  $R = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}(z) < a, 0 < \text{Im}(z) < b, a, b > 0\}$ , unique à homothétie près, conformément équivalent à  $Q$  et tel que l’image de  $\alpha$  soit le segment  $[0, a]$ . Alors,  $\text{mod } Q(\alpha, \alpha') = b/a$ . Si l’on transporte la métrique euclidienne de  $R$  sur  $Q$ , elle définit une métrique extrême pour  $Q$ .

$\triangleright$  Un anneau  $A$  est un ouvert doublement connexe du plan. On définit son module par la longueur extrême des courbes joignant les deux composantes du bord. Un anneau est conforme à un unique ouvert de la forme  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  ( $\approx \mathbb{C}^*$ ),  $\mathbb{H}/\mathbb{Z}$  ( $\approx \mathbb{D}^*$ ) ou  $B_h/\mathbb{Z}$ , où  $B_h = \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im}(z)| < h\}$ . Dans ce dernier cas, il est aussi conforme à un unique

anneau droit  $A = \{1/r < |z| < r\}$ ,  $0 < r < \infty$ , et son module est  $2h$  dans le premier modèle, et  $\frac{\log r}{\pi}$  dans le second. Dans les autres cas, le module est infini (ils sont distingués par leur revêtement universel). Tout anneau admet une métrique extrémale en tirant en arrière la métrique euclidienne définit sur un des modèles précédents.

▷ On dira qu'un sous-anneau d'un anneau est *essentiel* si un générateur de son groupe fondamental est homotope à un générateur de l'anneau le contenant. On dira qu'un quadrilatère est *essentiel* dans un anneau si deux côtés opposés appartiennent à des composantes distinctes du bord de l'anneau. On s'intéressera alors au module induit par ces deux côtés.

Dans la suite, on s'intéressera tout particulièrement à la recherche de bornes sur des modules d'anneaux. La manière la plus évidente de trouver une borne inférieure est d'exhiber une métrique conforme  $\rho$  : pour toute famille de courbes rectifiables  $\Gamma$ , et pour toute métrique conforme  $\rho$  admissible,

$$\Lambda_{\Omega}(\Gamma) \geq \frac{L^2(\Gamma, \rho)}{\text{Aire}(\Omega, \rho)}.$$

Les autres méthodes sont connues sous le nom d'Inégalités de Grötzsch énoncées dans la proposition suivante (le premier point impliquant les autres, voir Figure 3.2) :

**Proposition 3.0.7** (i) Soient  $(\Gamma_i)_{i \in I}$  et  $\Gamma$  des familles de courbes rectifiables telles que  $\forall \gamma_i \in \Gamma_i$  et  $\forall \gamma_j \in \Gamma_j$ ,  $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

- Si toute courbe  $\gamma \in \Gamma$  contient une courbe de chaque  $\Gamma_i$ ,  $i \in I$ , alors

$$\Lambda(\Gamma) \geq \sum_{i \in I} \Lambda(\Gamma_i);$$

- si toute courbe de  $\cup_{i \in I} \Gamma_i$  contient une courbe de  $\Gamma$ , alors

$$1/\Lambda(\Gamma) \geq \sum_{i \in I} 1/\Lambda(\Gamma_i).$$

(ii) Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'anneaux disjoints essentiels dans un anneau  $A$ , alors

$$\sum_{i \in I} \text{mod } A_i \leq \text{mod } A.$$

(iii) Soit  $(Q_i)_{i \in I}$  une famille de quadrilatères disjoints essentiels dans un anneau  $A$ , alors

$$\sum_{i \in I} 1/\text{mod } Q_i \leq 1/\text{mod } A.$$

**Géométrie hyperbolique.** Tournons-nous maintenant vers la géométrie hyperbolique. Une surface de Riemann est *hyperbolique* si son revêtement universel est isomorphe au demi-plan supérieur  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{D}$ ). La *métrique de Poincaré* est l'unique métrique conforme complète de courbure constante  $-1$ . Par le lemme de Schwarz, on en déduit que toute application holomorphe est contractante pour cette métrique. Si une application est une isométrie locale en un seul point, alors c'est un revêtement (holomorphe). Dans un domaine borné simplement connexe hyperbolique du plan, le coefficient de la métrique hyperbolique en un point est comparable à l'inverse de la distance de ce point au bord.

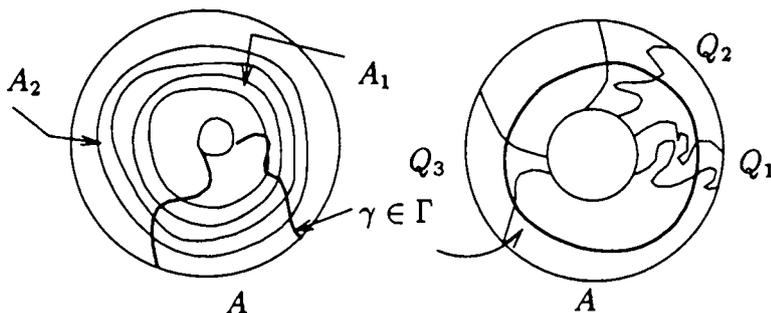


FIG. 3.2 - Inégalités de Grötzsch.

Pour toute surface de Riemann hyperbolique  $X$ , il existe un groupe  $\Gamma \simeq \pi_1(X)$  qui agit proprement discontinûment et sans points fixes sur  $\mathbf{H}$  tel que  $X \simeq \mathbf{H}/\Gamma$ .

Pour un anneau de module fini  $B_\pi/\mathbf{Z}l$ , on définit son *équateur* comme étant l'unique géodésique fermée de cet anneau. Elle se relève dans  $B_\pi$  sur l'axe réel. De plus, sa longueur hyperbolique coïncide avec sa longueur euclidienne, *i.e.*  $l$ .

L'inclusion entre domaines hyperboliques est strictement contractante. De plus, sur tout compact d'un domaine hyperbolique du plan, les métriques de Poincaré et euclidienne sont équivalentes.

Il existe un très joli lien entre la distance hyperbolique de deux points dans un domaine simplement connexe et le module d'un anneau :

**Proposition 3.0.8 ([Do7])** *Soit  $U$  une surface de Riemann simplement connexe hyperbolique et soient  $z_1 \neq z_2 \in U$ . On considère  $\pi : A \rightarrow U$  le revêtement à deux feuillets de  $U$  ramifié au-dessus de  $z_1$  et  $z_2$ . Alors  $A$  est un anneau dont le module ne dépend que de la distance de Poincaré entre  $z_1$  et  $z_2$ . Plus précisément, il existe un homéomorphisme décroissant  $M : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  tel que  $\text{mod } A = M(d(z_1, z_2))$ , avec*

$$M(d) = \frac{\log 4/d}{\pi} + O(1/d^2)$$

*au voisinage de zéro.*

Cette estimation est le point de vue hyperbolique du problème de l'anneau extrême de Grötzsch (*cf* [Ah1, LV])

**DÉMONSTRATION.** La formule de Riemann-Hurwitz permet de calculer le genre de  $A$ , et le résultat est 1. Comme  $U$  n'est pas compact, c'est un anneau (voir Figure 3.3).

On note  $d$  la métrique de Poincaré de  $U$ .

Pour toute paire  $(w_1, w_2)$ ,  $w_1 \neq w_2$ , de  $U$  telle que  $d(w_1, w_2) = d(z_1, z_2)$ , il existe un automorphisme de  $U$  envoyant une paire sur l'autre, qui se relève en un isomorphisme entre leurs anneaux associés. Si  $d(z_1, z_2) > d(w_1, w_2)$ , alors il existe une application conforme

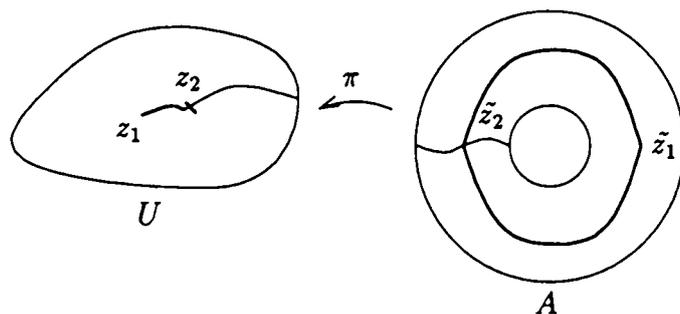


FIG. 3.3 - Revêtement à deux feuillets.

$\varphi : U \rightarrow V$  où  $V$  est strictement inclus dans  $U$  et telle que  $\varphi(z_i) = w_i, i = 1, 2$ . Soient  $A_U$  l'anneau provenant du revêtement à deux feuillets de  $U$  ramifié au-dessus de  $w_1$  et  $w_2$ , et  $\varpi : A_U \rightarrow U$  la projection. Le domaine  $V$  se relève par  $\varpi$  en un anneau  $A_V$  homotope à  $A_U$  et strictement inclus dedans, donc  $\text{mod } A_U > \text{mod } A_V$ . L'application  $M$  est par conséquent strictement décroissante.

Montrons que  $M$  est surjective, ce qui impliquera que c'est un homéomorphisme. Soit  $m > 0$ ; on note  $R = e^{\pi m}$  et on considère l'anneau

$$A_R = (1/R < |z| < R)$$

de module  $m$ . Pour  $0 < a < 1$ ,  $\phi_a(z) = (a/2)(z + 1/z)$  est un revêtement à deux feuillets ramifié au-dessus de  $\pm a$ , et les deux composantes de  $\partial A_R$  ont pour image (commune) une ellipse de grand axe de longueur  $aR + a/R$  et de petit axe de longueur  $aR - a/R$ . Soit  $U$  la composante intérieure de cette ellipse, qui correspond à l'image de  $A_R$  par  $\phi_a$ . Par construction,

$$M(d(-a, a)) = m.$$

Pour trouver l'estimation, on remarque que  $D(0, aR - a/R) \subset U \subset D(0, aR + a/R)$ . En comparant les distances de Poincaré de  $a$  à  $-a$  dans ces domaines, on trouve que  $d(-a, a) = 4/R + O(1/R^3)$  et donc que  $m = \frac{\log R}{\pi} = \frac{\log 4/d(-a, a)}{\pi} + O(1/d(-a, a)^2)$ . ■

**Lemme 3.0.9 (Critère d'équicontinuité)** Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  un système fondamental de voisinages-disques de l'origine dans le disque unité tel que  $A_n = \mathbf{D} \setminus U_n$  soit un anneau; soit  $\mathcal{F}$  une famille d'applications continues et injectives  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\cup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbf{D})$  soit bornée. Si

$$\exists c > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall n \geq 0, \text{mod } f(A_n) \geq c \cdot \text{mod } A_n,$$

alors  $\mathcal{F}$  est équicontinue en zéro.

**DÉMONSTRATION.** Pour un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  simplement connexe et  $x \neq y$  des points de  $U$ , on note  $\pi_{x,y}^U : A_{x,y} \rightarrow U$  le revêtement à deux feuillets ramifié au-dessus de  $x$  et  $y$ ; si

$U = f(\mathbf{D})$  ( $f \in \mathcal{F}$ ), on écrit  $\pi_{x,y}^f$  pour  $\pi_{x,y}^{f(\mathbf{D})}$ . Il existe un disque  $G = D(0, R)$  de rayon  $R < \infty$  tel que  $\cup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbf{D}) \subset\subset G$ . Notons  $d_{\mathbf{D}}$ ,  $d_G$  et  $d_f$  les métriques de Poincaré de  $\mathbf{D}$ ,  $G$  et  $f(\mathbf{D})$  respectivement. On pose  $\alpha_n = d_{\mathbf{D}}(0, A_n)$ .

Il existe  $c' > 0$  tel que pour tous  $x, y \in G$ ,  $d_G(x, y) \geq c'|x - y|$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe  $m > 0$  tel que  $\forall f \in \mathcal{F}$  et  $\forall x, y \in f(\mathbf{D})$ ,

$$\text{mod } A_{x,y}^f \geq m \implies d_f(x, y) \leq c'\varepsilon.$$

Comme  $\text{mod } A_n \rightarrow \infty$ , il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\text{mod } A_n > m/2c$ . Soit  $x \in \mathbf{D}$  tel que  $d_{\mathbf{D}}(x, 0) < \alpha_{n_0}$ ; alors, pour tout  $f \in \mathcal{F}$ , l'anneau  $f(A_{n_0})$  se relève dans  $A_{0,x}^f$  en deux anneaux disjoints et essentiels; d'après les propositions 3.0.7 et 3.0.8, on en déduit que

$$\text{mod } A_{f(0), f(x)}^f \geq 2\text{mod } f(A_{n_0}) \geq m$$

et  $d_f(f(0), f(x)) < c'\varepsilon$ .

Comme  $f(\mathbf{D}) \subset G$ , on a

$$d_f(f(0), f(x)) \geq d_G(f(0), f(x)) \geq c'|f(0) - f(x)|,$$

et il s'ensuit que  $|f(0) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x| \leq \alpha \implies |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon,$$

parce que le coefficient infinitésimale de  $d_{\mathbf{D}}$  est plus grand que 1. ■

**Proposition 3.0.10 ([Mc2])** *Il existe trois fonctions  $m$ ,  $C_1$  et  $C_2 : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  avec  $m(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $C_1(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$  et  $C_2(r) \rightarrow \infty$  quand  $r \rightarrow \infty$ , telles que : pour tout compact  $K$  plein et connexe de  $\mathbf{C}$  de diamètre euclidien 1, et pour tout voisinage simplement connexe  $D$  de  $K$ , on ait :*

(i)  $\text{mod}(D \setminus K) \geq m(\text{dist}(\partial D, K)) > 0$ ;

(ii)  $C_1(\text{mod } D \setminus K) \geq \text{dist}(\partial D, K) \geq C_2(\text{mod } D \setminus K)$ .

# Chapitre 4

## Applications quasiconformes & espaces de Teichmüller

La théorie des applications quasiconformes a pris son essor à partir de la fin des années cinquante. Dans la suite, on rappellera les principaux résultats de la théorie, ainsi que des résultats moins communs qui nous seront utiles par la suite. Les références usuelles sont [Ah1, LV]. Ensuite, on introduit l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann d'une part, et d'une fraction rationnelle d'autre part (voir [McS]).

### 4.1 Applications quasiconformes : définition et principales propriétés

**Définition.** Soient  $X, Y$  deux surfaces de Riemann,  $\varphi : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme respectant l'orientation et  $K \geq 1$ . L'application  $\varphi$  est  $K$ -*quasiconforme* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\varphi \in CH^1(X)$ , i.e.  $\varphi$  admet des dérivées au sens des distributions  $\varphi_z$  et  $\varphi_{\bar{z}}$  par rapport à  $z$  et  $\bar{z}$  qui sont dans  $L^2_{loc}(X)$  ;
- (ii) on définit la *forme de Beltrami* de  $\varphi$

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_{\bar{z}} d\bar{z}}{\varphi_z dz}$$

qui existe pp. et on demande

$$\|\mu_\varphi\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}.$$

Une application est *quasirégulière* s'il s'agit de la composée d'un homéomorphisme quasiconforme et d'une fonction holomorphe.

La forme de Beltrami associée à  $\varphi$ ,  $\mu_\varphi = \varphi_{\bar{z}}/\varphi_z \frac{d\bar{z}}{dz}$  vit dans l'espace des  $(-1, 1)$ -différentielles à coefficient  $L^\infty(X)$ , ce qui signifie que si  $c : Z \rightarrow X$  est un changement de carte (conforme) de  $X$ , alors

$$\mu_{\varphi \circ c} = \mu_\varphi \circ c \frac{\bar{c}}{c}.$$

**Théorème 4.1.1 (Propriétés)**

- (i) Un homéomorphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est  $K$ -quasiconforme si et seulement si pour tout anneau  $A$  de  $X$ ,  $\frac{1}{K} \text{mod } A \leq \text{mod } f(A) \leq K \text{mod } A$ .
- (ii) Un homéomorphisme  $\varphi$  est 1-quasiconforme si et seulement si  $\varphi$  est conforme.
- (iii) L'inverse d'une application  $K$ -quasiconforme est  $K$ -quasiconforme et la composée d'homéomorphismes  $K_1$ - et  $K_2$ -quasiconforme est  $K_1 K_2$ -quasiconforme.
- (iv) La famille des applications  $f : D \rightarrow D$   $K$ -quasiconformes telles que  $f(0) = 0$  est compacte.

**Remarque.** Le disque unité et le plan complexe ne sont pas quasiconformément équivalents.

On interprète géométriquement une forme de Beltrami  $\mu = \mu_\varphi(x) \frac{dx}{dy}$  en lui associant un champ mesurable d'ellipses infinitésimal, à homothétie strictement positive près, en presque tout point de  $X$  : pour presque tout  $x \in X$ , on considère sur  $T_x X$  l'ellipse d'écenricité  $\frac{1 + |\mu_\varphi(x)|}{1 - |\mu_\varphi(x)|}$  faisant un angle  $2 \arg(\mu_\varphi(x))$  avec  $\mathbf{R}_+$ . L'écenricité de ces ellipses est bornée par  $K$ . L'homéomorphisme  $\varphi$  transforme ce champ d'ellipses en un champ de cercles sur  $Y$  (voir Figure 4.1). Un homéomorphisme quasiconforme  $\varphi$  est holomorphe si et seulement si  $\varphi^* : TY \rightarrow TX$  transforme le champ de cercles défini sur  $TY$  en celui de  $TX$ . Par suite, on interprète le champ d'ellipses défini par  $\mu_\varphi$  comme une autre structure complexe sur  $X$ . En particulier, si  $f : X \rightarrow X$  est une application quasirégulière, telle que  $f^* \mu_\varphi = \mu_\varphi$  pp. (ou de façon équivalente laisse invariant le champ d'ellipses défini par  $\varphi$ ), alors  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : Y \rightarrow Y$  est holomorphe.

Inversement, à tout champ infinitésimal mesurable d'ellipses, on peut associer une forme de Beltrami  $\mu$ , ce qui définit une *structure presque-complexe*. La question naturelle est alors de savoir sous quelle(s) condition(s),  $\mu$  est-elle *intégrable* (existe-t-il un homéomorphisme de forme de Beltrami  $\mu$  pp.), ou de façon équivalente, est-ce que cette structure presque-complexe détermine une véritable structure complexe. Une réponse est fournie par le théorème de Morrey-Ahlfors-Bers :

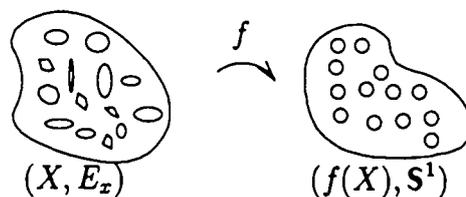


FIG. 4.1 - Application quasiconforme.

**Théorème 4.1.2** (i) Soit  $\mu \in L^\infty(\overline{\mathbb{C}})$  ; si  $\|\mu\|_\infty < 1$  alors il existe un homéomorphisme quasiconforme  $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , unique à postcomposition près par une application de Möbius, tel que

$$\varphi_{\bar{z}} = \mu \varphi_z \text{ pp.}$$

Autrement dit, si  $\sigma$  est une structure presque-complexe définie presque partout sur  $\overline{\mathbb{C}}$ , à ellipticité bornée, alors  $\sigma$  est en fait une structure complexe sur  $\overline{\mathbb{C}}$ . Il existe donc  $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  quasiconforme telle que  $\varphi^*\sigma_0 = \sigma$  pp. où  $\sigma_0$  désigne la structure complexe standard.

(ii) Soit  $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de coefficients de Beltrami dépendant  $\mathbb{C}$ -analytiquement de  $\lambda$ . Si les supports des  $\mu_\lambda$  sont dans un compact fixe de  $\mathbb{C}$  et si les  $\mu_\lambda$  sont uniformément bornés par une constante plus petite que 1, alors on peut résoudre l'équation de Beltrami de telle sorte que les solutions  $\varphi_\lambda$  varient de façon  $\mathbb{C}$ -analytique par rapport à  $\lambda$  et que  $\varphi_\lambda(z) = z + o(1)$  à l'infini.

**Exemple.** Soit  $K \geq 1$ . On considère la forme de Beltrami  $\mu(z) = \frac{K-1}{K+1} \frac{d\bar{z}}{dz}$ . Son champ d'ellipses est porté par les horizontales, et l'excentricité est constante (égale à  $K$ ). L'application  $\varphi : x + iy \mapsto x + iKy$  est une solution de l'équation de Beltrami.

**Définitions.** Un  $K$ -quasidisque (resp. quasicerle) est l'image du disque unité (resp. cercle unité) par un homéomorphisme  $K$ -quasiconforme de la sphère. De même, une quasidroite est l'image d'une droite par un homéomorphisme quasiconforme qui fixe l'infini.

Ces derniers ont la caractérisation géométrique suivante :

**Proposition 4.1.3 (Caractérisation des quasidroites)**

(i) Soit  $L$  une  $K$ -quasidroite orientée, alors il existe  $C(K) > 0$  tel que pour tout triplet ordonné  $(z_1, z_2, z_3)$  de  $L$ ,

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} \right| \leq C(K).$$

(ii) Réciproquement, soient  $L$  une courbe de Jordan passant par l'infini et  $C > 0$ . Si pour tout triplet ordonné  $(z_1, z_2, z_3)$  de  $L$ ,

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} \right| \leq C,$$

alors  $L$  est une  $K(C)$ -quasidroite.

Cette condition signifie que les composantes connexes du complémentaire n'ont pas de "presque-île".

## 4.2 Extensions d'applications et problème de couture

Depuis L.V. Ahlfors et A. Beurling, il existe des critères permettant de savoir sous quelle(s) condition(s), une application définie sur un sous-ensemble de  $\overline{\mathbb{C}}$  peut être prolongée en application quasiconforme globale. On commence par donner des résultats généraux, puis on se spécialise à des extensions sur des secteurs.

### 4.2.1 Applications quasisymétriques et extension d'homéomorphismes réels

**Définition.** Soit  $M \geq 1$ . Un homéomorphisme  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est  $M$ -quasisymétrique si pour tout  $x \in \mathbf{R}$  et tout  $t > 0$ ,

$$1/M \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq M.$$

Ces homéomorphismes jouent un rôle particulier pour les applications quasiconformes puisque :

**Théorème 4.2.1 (L.V. Ahlfors et A. Beurling)**

(i) Soit  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  une application  $K$ -quasiconforme qui fixe l'axe réel. Alors  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est  $M(K)$ -quasisymétrique.

(ii) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  un homéomorphisme  $M$ -quasisymétrique. Alors il existe une extension  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $K(M)$ -quasiconforme telle que  $\varphi|_{\mathbf{R}} = f$ .

Plus généralement, ces auteurs ont montrés :

**Théorème 4.2.2** Un domaine de Jordan du plan  $U$  est un quasidisque si et seulement si pour tout homéomorphisme quasiconforme  $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow U$ , il existe une extension  $\phi : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  quasiconforme.

Il existe en fait de très nombreuses caractérisations de quasidisques (voir [Ge]).

**Extension barycentrique.** On se donne un homéomorphisme  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ . A. Douady et C.J. Earle (voir [DE]) ont montré :

**Théorème 4.2.3** On peut associer à chaque homéomorphisme qui préserve l'orientation  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  une extension au disque  $E(f) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  qui soit un difféomorphisme  $\mathbf{R}$ -analytique et de manière conformement naturelle, i.e. telle que

$$\text{pour tous } \gamma, \delta \in \text{Aut}(\mathbf{D}), \quad E(\gamma \circ f \circ \delta) = \gamma \circ E(f) \circ \delta.$$

De plus, si  $f$  admet une extension quasiconforme alors  $E(f)$  est quasiconforme et bi-Lipschitz relativement à la métrique de Poincaré du disque.

### 4.2.2 Prolongements d'applications conformes définies sur des secteurs

Dans les différentes chirurgies sur les secteurs, on a besoin de prolonger des applications conformes de façon quasiconforme. L'existence de ces applications dépend de la géométrie du bord, ainsi que des singularités des applications définies au bord.

Ci-dessous sont données deux méthodes d'extension dont l'une provient de [BD] (voir aussi [BF, Wl]), qui utilise la dynamique au voisinage d'un point répulsif.

**Bandes  $\sigma$ -périodiques et difféomorphismes  $C^1$ -bornés.**

Ce paragraphe regroupe (sans démonstration) des lemmes techniques démontrés par B. Branner et A. Douady.

Soit  $\sigma \in \mathbb{C}$  avec  $Re\sigma > 0$ . On définit une bande  $C^1$   $\sigma$ -périodique  $H$  comme un ensemble fermé de  $\mathbb{C}$  invariant par la translation  $z \mapsto z + \sigma$ , et bordé par deux courbes  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$ , de classe  $C^1$ . Une moitié gauche  $H^<$  est la composante connexe de  $H$  privé d'une courbe  $C^1$  transverse à  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$ , stable par image inverse de la translation.

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux bandes  $\sigma$ -périodiques. Une application  $h : H_1 \rightarrow H_2$  est  $\sigma$ -périodique si  $h(z + \sigma) = h(z) + \sigma$ .

**Lemme 4.2.4** *Il existe un homéomorphisme holomorphe  $\sigma$ -périodique entre les bandes si et seulement si les modules des anneaux  $H_1/\sigma\mathbb{Z}$  et  $H_2/\sigma\mathbb{Z}$  sont les mêmes.*

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux courbes  $C^1$   $\sigma$ -périodiques; on note  $\Gamma_1^<$  et  $\Gamma_2^<$  leur moitié gauche; un difféomorphisme  $h : \Gamma_1^< \rightarrow \Gamma_2^<$  est  $C^1$ -borné si  $|h(z) - z|$  et  $|\log h'(z)|$  restent bornées quand  $z$  tend vers  $-\infty$ .

**Lemme 4.2.5** *Soit  $h : \Gamma_1^< \rightarrow \Gamma_2^<$  un difféomorphisme  $\sigma$ -périodique, alors  $h$  est  $C^1$ -bornée.*

**Proposition 4.2.6** *Si  $h : H_1^< \rightarrow H_2^<$  est holomorphe,  $\sigma$ -périodique et tels que les anneaux soient isomorphes, alors sa restriction au bord est de classe  $C^1$  et est  $C^1$ -bornée.*

La réciproque de ce résultat est (sans condition sur les modules) :

**Proposition 4.2.7** *En gardant les mêmes notations, si  $\varphi_{\pm} : \Gamma_{1\pm}^< \rightarrow \Gamma_{2\pm}^<$  sont deux difféomorphismes  $C^1$ -bornés sur les bords des moitiés gauches de bandes  $H_1$  et  $H_2$   $\sigma$ -périodiques et si  $\varphi_0$  est un difféomorphisme entre les arcs transverses définissant  $H_1^<$  et  $H_2^<$ , alors il existe une application quasiconforme  $\phi : H_1^< \rightarrow H_2^<$  prolongeant ces difféomorphismes.*

**Secteurs non périodiques.**

Soient  $S_i$  (resp.  $\hat{S}_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , des secteurs droits issus de l'origine d'angles  $\alpha_i$  (resp.  $\hat{\alpha}_i$ ) et intersectés à  $\mathbb{D}$  tels que  $\partial S_i \cap \partial S_{i+1}$  (resp.  $\partial \hat{S}_i \cap \partial \hat{S}_{i+1}$ ),  $i = 1, 2$ , soient des segments.

**Proposition 4.2.8** *On considère  $F_i : S_i \rightarrow \hat{S}_i$ ,  $i = 1, 3$ , deux applications conformes, respectant les bords. Si  $\frac{\hat{\alpha}_3}{\alpha_3} = \frac{\hat{\alpha}_1}{\alpha_1}$ , alors il existe  $F_2 : S_2 \rightarrow \hat{S}_2$  quasiconforme prolongeant les applications  $F_1$  et  $F_3$ .*

**DÉMONSTRATION.** On relève les secteurs  $S_i$  (resp.  $\hat{S}_i$ ) par  $z \mapsto \exp 2i\pi z$  en des moitiés gauches de bandes horizontales  $B_i$  (resp.  $\hat{B}_i$ ) de hauteur  $\alpha_i$  (resp.  $\hat{\alpha}_i$ ).

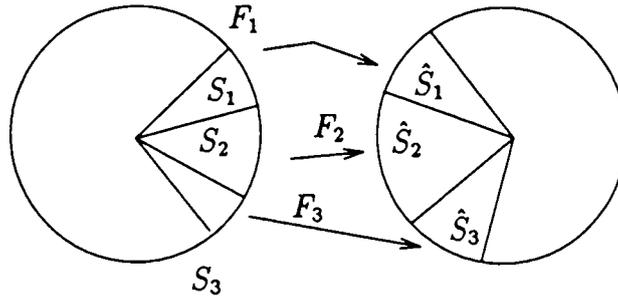


FIG. 4.2 - Extension.

Au voisinage de  $-\infty$ , les applications  $F_i$ ,  $i = 1, 3$ , sont de la forme  $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}z + C^{ste} + O(1/z)$ . L'existence de  $F_2$  découle alors du lemme suivant :

**Lemme 4.2.9** Soient  $h > 0$ ,  $B_h := \{z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Im } z < h \text{ et } \text{Re } z < 0\}$ ; soient  $f_i : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_-$ ,  $i = 1, 2$ , deux difféomorphismes tels que  $f_i(z) = az + b_i + O(1/z)$  à l'infini, avec  $a > 0$ .

$\forall (h, h') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ ,  $\exists F : B_h \rightarrow B_{h'}$  quasiconforme telle que  $\begin{cases} F|_{\mathbb{R}} = f_1, \\ F|_{\mathbb{R}+ih} = f_2 + ih'. \end{cases}$

DÉMONSTRATION. On définit

$$F : B_h \rightarrow B_{h'} \\ x + iy \mapsto (1 - y)f_1(x) + yf_2(x) + iyh'/h.$$

$F$  est un  $C^1$ -difféomorphisme ; regardons à l'infini :

$$F(x + iy) = ax + b_1 + y(b_2 - b_1 + yO(1/x) + iyh'/h).$$

On calcule les dérivées partielles, et on obtient :

$$2F_{\bar{z}} = a - h'/h + O(1/x) + i(b_2 - b_1 + O(1/x)), \\ 2F_z = a + h'/h + O(1/x) - i(b_2 - b_1 + O(1/x));$$

d'où

$$\left| \frac{F_{\bar{z}}}{F_z} \right|^2 = \frac{[a - h'/h + O(1/x)]^2 + [b_2 - b_1 + O(1/x)]^2}{[a + h'/h + O(1/x)]^2 + [b_2 - b_1 + O(1/x)]^2}.$$

Cette quantité est strictement majorée par 1 au voisinage de l'infini, donc  $F$  est quasiconforme à l'infini. Le complémentaire est compact,  $F$  est un  $C^1$ -difféomorphisme et respecte l'orientation, donc  $F$  est quasiconforme. ■

### 4.2.3 Problème de couture

Il s'agit du problème suivant : soient  $U, V$  des domaines de Jordan du plan. On suppose qu'il existe un homéomorphisme  $c : \partial U \rightarrow \partial V$  qui renverse l'orientation. On note  $X = \overline{U} \cup \overline{V}/(c)$  : c'est une sphère topologique.

**Question :** sous quelle(s) condition(s)  $X$  hérite-t-elle de la structure complexe de  $U$  et  $V$  ? Autrement dit, on cherche s'il existe

$$\begin{cases} F_U : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \text{ et} \\ F_V : V \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \end{cases}$$

des applications univalentes telles que  $F_U(\overline{U}) \cup F_V(\overline{V}) = \overline{\mathbb{C}}$ ,  $F_U(U) \cap F_V(V) = \emptyset$  et pour  $z \in \partial U$ ,  $F_U(z) = F_V \circ c(z)$ .

Soient  $\varphi_U : \mathbb{D} \rightarrow U$  et  $\varphi_V : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow V$  deux uniformisantes de Riemann. On note  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  l'application définie par  $f(z) = \varphi_V^{-1} \circ c \circ \varphi_U(z)$ , qui est bien définie par le Théorème de Carathéodory. C'est un homéomorphisme qui préserve l'orientation.

**Proposition 4.2.10** *Si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  est quasisymétrique, alors le problème de couture a une solution, unique à postcomposition près par un automorphisme de  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après le Théorème 4.2.1, l'application  $f$  admet une extension quasiconforme  $E(f) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . On note  $\mu = \mu_{E(f)^{-1}}$  la forme de Beltrami associée à  $E(f)^{-1}$  sur  $\mathbb{D}$  qu'on prolonge à  $\overline{\mathbb{C}}$  par zéro. D'après le Théorème 4.1.2, il existe une application  $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  qui intègre  $\mu$ . On définit

$$\begin{cases} F_U = \phi \circ E(f) \circ \varphi_U^{-1}, \\ F_V = \phi \circ \varphi_V^{-1}. \end{cases}$$

On note  $\sigma_0$  la structure complexe standard et  $\sigma = \phi^* \sigma_0$ . Par définition,  $E(f)^* \sigma = \sigma_0$ . Vérifions que  $F_U$  et  $F_V$  sont bien holomorphes :

$$\begin{cases} F_U^* \sigma_0 = \varphi_U^{-1*} E(f)^* \phi^* \sigma_0 = \varphi_U^* E(f)^* \sigma = \sigma_0, \\ F_V^* \sigma_0 = \varphi_V^{-1*} \phi^* \sigma_0 = \varphi_V^{-1*} \sigma_0 = \sigma_0. \end{cases}$$

De plus, pour  $z \in \partial U$ ,

$$F_U(z) = \phi \circ f \circ \varphi_U^{-1}(z) = \phi \circ \varphi_V^{-1} \circ c(z) = F_V \circ c(z).$$

Donc on peut recoller  $U$  à  $V$  par l'application de collage  $c$ . L'unicité provient du Théorème 4.1.2. ■

## 4.3 Mouvements holomorphes

**Définition.** Un *mouvement holomorphe* d'un ensemble  $A \subset \overline{\mathbb{C}}$  au-dessus d'une variété complexe connexe munie d'un point base  $(X, x_0)$  est une application  $\iota : X \times A \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  telle

que :

- pour chaque  $a \in A$ ,  $\iota(x_0, a) = a$ ,
- pour chaque  $a \in A$ , l'application  $x \mapsto \iota(x, a)$  est holomorphe,
- pour chaque  $x \in X$ , l'application  $\iota_x : a \mapsto \iota(x, a)$  est injective.

Cette notion a été introduite dans [MSS] pour expliciter un certain de type de régularité. Bien que la notion d'homéomorphisme quasiconforme ne transparaisse pas dans la définition d'un mouvement holomorphe, le premier résultat démontré est :

**Théorème 4.3.1** ( $\lambda$ -lemma, [MSS]) *Un mouvement holomorphe de  $A$  admet une unique extension en un mouvement holomorphe de  $\bar{A}$ . De plus, pour chaque paramètre, l'application de  $A$  admet un prolongement quasiconforme à la sphère.*

Ce résultat a eu de multiples améliorations, voir [BR, ST, Śl, Do6] dont la dernière est :

**Théorème 4.3.2** (Z. Ślodkowski) *Un mouvement holomorphe d'une partie de  $\bar{\mathbb{C}}$  au-dessus du disque unité se prolonge en un mouvement holomorphe de  $\bar{\mathbb{C}}$  au-dessus du disque unité.*

## 4.4 Espace de Teichmüller “classique”

Soit  $X$  une surface de Riemann. L'espace de Teichmüller de  $X$  paramètre l'ensemble des surfaces marquées  $(Y, [\varphi])$  quasiconformément conjuguées à  $X$  et de quelle façon, i.e. tout représentant de  $[\varphi]$  est une application quasiconforme  $\varphi : X \rightarrow Y$  et deux telles applications sont isotopes. Cet espace est le revêtement universel de l'ensemble des surfaces de Riemann quasiconformément équivalentes à  $X$ .

Pour un survol de la théorie, on peut se reporter à [Ber]. Ce qui suit est inspiré de [McS].

On a tout d'abord besoin de quelques préliminaires.

**Définitions.** Soit  $X$  une surface de Riemann hyperbolique.

▷  $Def(X) = \{\mu \in L^\infty(X), \|\mu\|_\infty < 1\}$ . C'est aussi l'ensemble des paires de classes d'équivalence  $(\varphi, Y)$  où  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme quasiconforme entre surfaces de Riemann, et deux paires  $(\varphi, Y)$  et  $(\psi, Z)$  sont équivalentes si  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est conforme.

▷  $QC(X)$  est l'ensemble des homéomorphismes quasiconformes  $\omega : X \rightarrow X$ . Ce groupe agit sur  $Def(X)$  par  $\omega \cdot (\varphi, Y) = (\varphi \circ \omega^{-1}, Y)$ .

▷  $QC_0(X)$  est un sous-groupe de  $QC(X)$ . Pour le définir, il faut d'abord définir le bord idéal de  $X$  : soit  $\Gamma$  un groupe qui agit sur  $\mathbf{H}$  tel que  $\mathbf{H}/\Gamma \simeq X$ . On note  $\Omega(\Gamma) \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  la partie où  $\Gamma$  agit proprement discontinûment ; alors,  $\bar{X} = (\mathbf{H} \cup \Omega)/\Gamma$  est une surface de Riemann à bord, dont l'intérieur est  $X$  et le bord  $\Omega/\Gamma$ . Le bord idéal de  $X$  est  $\partial_\infty X = \Omega/\Gamma$ .  $QC_0(X)$  est alors le sous-groupe de  $QC(X)$  dont les éléments sont isotopes à l'identité relativement à  $\partial_\infty X$ .

$QC_0(X)$  agit sur  $Def(X)$  comme  $QC(X)$ . On définit enfin l'espace de Teichmüller de  $X$  :

$$Teich(X) = Def(X)/QC_0(X).$$

On définit aussi :

- le groupe modulaire  $Mod(X) = QC(X)/QC_0(X)$  qui agit proprement discontinûment sur  $Teich(X)$ .

- l'espace des modules  $R(X) = Teich(X)/Mod(X)$ . Il s'obtient en ne conservant que la seconde coordonnée, i.e. il paramètre les surfaces de Riemann quasiconformément équivalentes à  $X$ .

On munit  $Teich(X)$  de la métrique suivante :

$$d([\varphi, Y], [\psi, Z]) = \frac{1}{2} \log \inf \{K_{\varphi \circ \psi^{-1}}, (\varphi, \psi) \in [\varphi] \times [\psi]\}.$$

$Teich(X)$  est une variété complexe contractile, et de dimension finie si  $X$  est une surface compacte privée d'un nombre fini de points.

## 4.5 Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle

On présente ici quelques résultats de [McS].

Soit  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On définit les espaces suivants :

▷ Espace des déformations de  $f$ .  $Def(f) = \{\mu \in L^\infty(\bar{\mathbb{C}}), \|\mu\|_\infty < 1, f^* \mu \frac{dz}{dz} = \mu \frac{dz}{dz}\}$  ;

▷  $QC(f) = \{\varphi : \bar{\mathbb{C}} \xrightarrow{qc} \bar{\mathbb{C}}, \varphi \circ f = f \circ \varphi\}$  ;

▷  $QC_0(f) = \{\varphi \in QC(f), \varphi \text{ isotope à l'identité dans } QC(f)\}$  ;

▷ Espace de Teichmüller de  $f$ .  $QC_0(f)$  est un sous-groupe normal de  $QC(f)$  qui agit sur  $Def(f)$  comme suit : soient  $\omega \in QC_0(f)$  et  $\mu \in Def(f)$ , on pose  $\omega \cdot \mu = \omega^* \mu$ . On définit alors

$$Teich(f) = Def(f)/QC_0(f).$$

Cet espace est une variété complexe, contractile, de dimension finie. Il se décompose en un produit de sous-espaces liés aux différents cycles de composantes de Fatou de  $f$  et d'éventuelle(s) champ(s) de droites  $f$ -invariants sur son ensemble de Julia  $J_f$ .

On définit aussi une distance sur  $Teich(f)$ , par

$$d([\varphi, g], [\psi, h]) = \frac{1}{2} \log \inf \{K_{\varphi \circ \psi^{-1}}, (\varphi, \psi) \in [\varphi] \times [\psi]\}.$$

▷ Groupe modulaire de  $f$ .  $Mod(f) = QC(f)/QC_0(f)$ . Il agit proprement discontinûment sur  $Teich(f)$ .

▷ Espace des modules de  $f$ .  $R(f) = Teich(f)/Mod(f)$ . La projection  $Teich(f) \rightarrow R(f)$  consiste à faire abstraction du marquage.

**Théorème 4.5.1** *L'espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle  $f$  de degré  $d \geq 2$  est canoniquement isomorphe à une variété complexe de dimension inférieure à  $2d - 2$ , qui est le produit d'un polydisque et d'espaces de Teichmüller classiques de tores et de sphères épointés.*

La décomposition de  $Teich(f)$  se fait comme suit :

Pour toute composante de Fatou  $\Omega$  de  $f$ , on note  $\hat{\Omega}$  l'ouvert  $\Omega$  privé des grandes orbites des points critiques et des points périodiques.

- Soit  $\Omega$  une composante de Fatou attractive ou parabolique. L'action de  $f$  sur  $\hat{\Omega}$  est discrète (c'est un revêtement) et la composante de  $Teich(f)$  associée à  $\Omega$  est canoniquement isomorphe à l'espace de Teichmüller de  $\hat{\Omega}/(f)$ , qui est une surface de Riemann hyperbolique de type fini, à savoir : un tore avec un nombre fini (non nul) d'épointements (cas attractif) ou un cylindre bi-infini avec un nombre (non nul) d'épointements (cas parabolique).

- Soit  $\Omega$  un domaine super-attractif ou un domaine de rotation (disque de Siegel ou anneau de Herman). L'action de  $f$  sur  $\Omega$  induit un feuilletage. Il induit un espace de Teichmüller isomorphe à celui d'un nombre fini d'anneaux ou de disques (hyperboliques) feuilletés, *i.e.* un polydisque.

- Enfin, si  $J_f$  est de mesure positive, il est - pour le moment - possible que  $f$  admette des champs de droites invariants qui donnent une composante de polydisque de dimension égale au nombre de composantes ergodiques de l'action de  $f$  sur  $J_f$ .

**Corollaire 4.5.2** *La dimension de  $Teich(f)$  est donnée par*

$$n = n_{CA} + n_{AH} + n_{CD} + n_P,$$

où

- ▷  $n_{CA}$  est le nombre de classes d'équivalence de points critiques acycliques provenant de l'ensemble de Fatou,
- ▷  $n_{AH}$  est le nombre d'anneaux de Herman,
- ▷  $n_{CD}$  est le nombre de champ droites ergodiques sur  $J_f$ ,
- ▷  $n_P$  est le nombre de cycles paraboliques.

**Corollaire 4.5.3** *Il existe une injection holomorphe naturelle d'orbifolds complexes*

$$Teich(f)/Mod(f) \hookrightarrow Rat_d/Aut(\overline{\mathbb{C}})$$

*qui paramètre les fractions rationnelles  $g$  quasiconformément conjuguées à  $f$ .*

**Familles C-analytiques de fractions rationnelles.** Soit  $\Lambda$  une variété complexe. Une famille C-analytique de fractions rationnelles paramétrée par  $\Lambda$  est une application holomorphe  $\underline{f} : \Lambda \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , telle que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $z \mapsto f_\lambda(z) = \underline{f}(\lambda, z)$  est une fraction rationnelle.

**Définitions.**

- ▷ Une famille est *quasiconformément constante* si quelles que soient deux fractions rationnelles dans la même composante de  $\Lambda$ , elles sont quasiconformément conjuguées.
- ▷ Une famille a ses *relations d'orbites critiques constantes* si toute coïncidence  $f_\lambda^n(c) = f_{\lambda'}^m(c')$  entre deux itérés positifs de deux points critiques persiste sur un petit voisinage de  $\lambda$ .
- ▷ Une fraction rationnelle  $f_{\lambda_0}$  est *structurellement stable* si les ensembles de Julia  $J_{f_\lambda}$  forment un mouvement holomorphe compatible avec la dynamique, au-dessus d'un voisinage de  $\lambda_0$ , i.e. pour tout  $z \in J_{f_{\lambda_0}}$ ,

$$\iota_\lambda \circ f_{\lambda_0}(z) = f_\lambda \circ \iota_\lambda(z).$$

**Théorème 4.5.4 ([MSS])** *Les paramètres structurellement stables sont ceux pour lesquels il existe un voisinage dans lequel le nombre de points attractifs est constant.*

**Théorème 4.5.5 ([MSS])** *Une famille analytique de fractions rationnelles  $f_\lambda(z)$  dont les relations critiques sont constantes est quasiconformément constante. Réciproquement, deux fractions rationnelles quasiconformément conjuguées sont contenues dans une famille connexe dont les relations d'orbites critiques sont constantes.*

**Théorème 4.5.6 (Densité de la stabilité structurelle, [MSS])** *Dans toute famille analytique de fractions rationnelles  $\underline{f}$ , l'ensemble des classes quasiconformes ouvertes est dense.*

*En particulier, les fractions rationnelles structurellement stables forment un ouvert dense dans l'espace des fractions rationnelles de degré fixé  $d \geq 2$ .*



# Chapitre 5

## Applications à allure polynomiale et figuration

Dans l'étude de l'itération de fonctions holomorphes  $f : X \rightarrow X$ , on cherche souvent à découper le plan dynamique afin d'isoler différents comportements. De cette manière, on se ramène à l'étude de l'application *premier retour* de Poincaré sur des domaines plus petits, de la forme  $\mathcal{R}(f) : U' \rightarrow U$ , avec  $U' \cap U \neq \emptyset$ .

La théorie des applications à allure polynomiale de A. Douady et J.H. Hubbard permet d'identifier quasiconformément une telle application à un polynôme lorsque  $f$  est propre et que  $U' \subset\subset U$  sont des disques topologiques (voir [DH2]). Seulement, par simulation numérique, on constate qu'il existe des applications de retour  $\mathcal{R}(f)$  qui ne sont pas à allure polynomiale, mais qui semblent avoir un comportement topologiquement identique, au moins sur un compact connexe plein.

Le but de ce chapitre est, d'une part, de rappeler les principaux résultats de la théorie des applications à allure polynomiale ([DH2]) et, d'autre part, de généraliser certains points de cette théorie à une classe d'applications plus large. Pour cela, on définit d'abord ce que signifie, dans notre cadre, l'équivalence d'une application à un polynôme et, dans certains cas, comment, étant donnée une application holomorphe  $f : U' \rightarrow U$ , se ramener à un polynôme. Réciproquement, on montrera, sur la base d'hypothèses de finitude, comment définir des dynamiques polynomiales qui ne sont pas à allure polynomiale. Les principaux ingrédients utilisés seront la théorie de la chirurgie quasiconforme et une extension du théorème d'Ahlfors-Bers pour des formes de Beltrami de norme 1, due à G. David (cf [Da]).

Ces résultats et ces méthodes sont appliqués dans la Partie III Chap.6 § 2.3, Partie IV Chap.10 § 3 et Partie V Chap.12, § 1.3.

### 5.1 Applications à allure polynomiale

#### Définitions.

▷ Une *application à allure polynomiale* de degré  $d \geq 2$  est la donnée d'un triplet  $(U', U, f)$

où  $U'$  et  $U$  sont des disques topologiques tels que  $U' \subset\subset U$  et tels qu'on ait  $f : U' \rightarrow U$  holomorphe propre de degré  $d$ .

▷  $K(f) = \cap f^{-n}(U')$  est l'ensemble de Julia rempli;

▷  $J(f) = \partial K_f$  est l'ensemble de Julia.

**Définition.** Deux applications à allure polynomiale  $(U', U, f)$  et  $(V', V, g)$  sont *hybridement équivalentes* s'il existe une application quasiconforme  $\varphi : U \rightarrow V$  qui conjugue  $f$  à  $g$  et telle que  $\bar{\partial}\varphi = 0$  pp. sur  $K(f)$ . On note  $f \sim_{\text{hyb}} g$ .

Indépendamment des propositions suivantes, on peut montrer que de nombreuses propriétés des ensembles de Julia (remplis) de polynômes se transposent dans ce cadre. Ils sont d'ailleurs étroitement liés par le théorème suivant :

**Théorème 5.1.1 (Théorème de Redressement, [DH2]; I, Th.1)**

Soit  $(U', U, f)$ , une application à allure polynomiale de degré  $d \geq 2$ . Il existe un polynôme  $P$  de degré  $d$  tel que  $P \sim_{\text{hyb}} f$ .

De plus, si  $K(f)$  est connexe, alors  $P$  est unique à conjugaison affine près. En particulier, si  $f$  est quadratique avec un ensemble de Julia connexe, alors il existe un unique  $c \in \mathbb{M}$  tel que  $P_c \sim_{\text{hyb}} f$ .

Afin de distinguer la dynamique sur le complémentaire de l'ensemble de Julia rempli d'une application à allure polynomiale, A. Douady et J.H. Hubbard introduisent les *classes externes*: à chaque application à allure polynomiale  $f$ , on associe un revêtement  $h_f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{R}$ -analytique de même degré, et fortement dilatant, i.e. il existe  $n \geq 1$  et  $\lambda > 1$ , tels que pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $|(h_f^n)'(x)| \geq \lambda$ .

Lorsque  $K_f$  est connexe, sa classe externe est définie comme suit : on considère une application conforme  $\psi : U \setminus K_f \rightarrow A_R$ , où  $A_R$  est un anneau droit  $\{1 < |z| < R\}$ . Soit  $A' = \psi(U' \setminus K_f)$ ; c'est un anneau inclus dans  $A_R$  dont un bord est  $\mathbb{S}^1$ . L'application  $\psi$  conjugue  $f$  à une application  $h : A' \rightarrow A_R$ . Comme  $h(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ , on applique le principe de réflexion de Schwarz afin d'obtenir une application holomorphe  $h_f : W' \rightarrow W$ , où  $W' \subset\subset W$  sont des voisinages annulaires de  $\mathbb{S}^1$ . Sa restriction au cercle unité est la classe externe de  $f$ . Cette application est bien définie à conjugaison conforme près et modulo un invariant combinatoire si le degré de  $f$  est strictement supérieur à deux.

La démonstration du Théorème de Redressement montre plus que l'équivalence à un polynôme. Elle montre qu'on peut accoupler n'importe quelle application à allure polynomiale à un revêtement  $\mathbb{R}$ -analytique de  $\mathbb{S}^1$  fortement dilatant :

**Corollaire 5.1.2 ([DH2])** Soient  $(U' \xrightarrow{f} U)$  une application à allure polynomiale de degré  $d \geq 2$ , et  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un revêtement  $\mathbb{R}$ -analytique fortement dilatant de même degré. Il existe une application à allure polynomiale  $(V' \xrightarrow{g} V)$  hybridement équivalente à  $f$  et de classe externe  $h$ .

**Définition.** Soit  $\Lambda$  une variété complexe et soit  $f = (f_\lambda : U_\lambda' \rightarrow U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'applications à allure polynomiale de degré  $d \geq 2$ . On pose  $\mathcal{U} = \{(\lambda, z), z \in U_\lambda\}$ ,  $\mathcal{U}' = \{(\lambda, z), z \in U_\lambda'\}$  et on définit  $f(\lambda, z) = f_\lambda(z)$ . Alors,  $f$  est une *famille analytique* si les

conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $\mathcal{U}'$  et  $\mathcal{U}$  sont homéomorphes à  $\Lambda \times \mathbb{D}$  au-dessus de  $\Lambda$ ,
- (ii) la projection de  $\overline{\mathcal{U}'} \subset \mathcal{U}$  dans  $\Lambda$  est propre,
- (iii) l'application  $f : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  est  $\mathbb{C}$ -analytique et propre.

**Théorème 5.1.3** (dépendance par rapport aux paramètres, [DH2]; II, Th.2, Prop.14; IV, Prop.21)

Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille analytique d'applications à allure polynomiale quadratiques.

- (i) Il existe  $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle que  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,  $f_\lambda \sim_{\text{hyb}} P_{\chi(\lambda)}$ .
- (ii) On suppose que  $\Lambda$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ . On définit  $M_f = \{\lambda \in \Lambda, K(f_\lambda) \text{ connexe}\}$ . Si  $M_f \subset\subset \Lambda$ , alors  $\chi : M_f \rightarrow \mathbb{C}$  est un revêtement ramifié de degré  $d$  (fini) que l'on peut calculer en comptant le nombre de tours de  $f_\lambda(\omega_\lambda) - \omega_\lambda$  ( $\omega_\lambda$  : point critique de  $f_\lambda$ ) quand on parcourt une fois un lacet entourant  $M_f$ .

**Définitions.** (a) Sous les hypothèses de (ii), si  $M_f$  est compact dans  $\Lambda$  et le degré de  $\chi$  est  $d = 1$ , alors  $\chi$  est un homéomorphisme et on dit que la famille est *mandelbrottesque*.  
 (b) Si  $\chi : M_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1/4\}$  est un homéomorphisme alors  $f$  est dite *semi-mandelbrottesque*.  
 (c) Si  $\chi$  est un homéomorphisme sur son image qui ne vérifie ni (a) ni (b), on dira que  $f$  est *sous-mandelbrottesque*.

**Complément.** Si la famille est mandelbrottesque et si les domaines de définition forment un mouvement holomorphe au-dessus de  $\Lambda$ , alors  $\chi$  est quasiconforme. M. Lyubich a démontré que  $\chi$  est quasiconforme sans l'hypothèse de mouvement holomorphe ([Ly2]). Ici, quasiconforme est au sens de Mañé-Sad-Sullivan : il existe une constante  $H \geq 1$  telle que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup \{d(\chi x, \chi y), d(x, y) = r \text{ et } x, y \in M_f\}}{\inf \{d(\chi x, \chi y), d(x, y) = r \text{ et } x, y \in M_f\}} \leq H$$

**Remarque.** Dans le cas de familles de plus haut degré, on rencontre de nombreuses discontinuités incompatibles avec des énoncés de ce type. Cependant, si la famille est structurellement stable, l'application de redressement varie holomorphiquement par rapport aux paramètres. Lorsque l'on considère des limites d'équivalences hybrides de distorsion bornée, on obtient une équivalence quasiconforme qui n'est pas en général une équivalence hybride. D'ailleurs, A. Douady et J.H. Hubbard ont montré que ce phénomène peut se produire dès le degré deux. En degré trois, ils donnent un exemple où l'application de redressement, fonction entre les paramètres, n'est pas continue.

## 5.2 Figuration souple

La notion de figuration apparaît la première fois dans [Do1].

**Définition.** Soient  $P$  un polynôme avec  $K(P)$  connexe et  $f$  une fraction rationnelle, de degré  $d_P$  et  $d_f \geq 2$  respectivement ;

▷  $P$  figure dans  $f$  s'il existe  $k \geq 1$  et  $\phi : K(P) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , non constante, limite uniforme d'injections continues tels que  $\phi \circ P = f^k \circ \phi$ .

▷ la figuration est rigide s'il existe un voisinage  $U$  de  $K(P)$  dans  $\overline{\mathbb{C}}$  telle que :

- (a)  $\phi$  peut être choisie injective sur  $U$  ;
- (b)  $\phi \in W^{1,p}(U)$  pour un  $p > 1$  ;
- (c)  $\overline{\partial}\phi = 0$  pp. sur  $K(P)$ .

Une application est dans l'espace  $W^{1,p}$  si elle est dans l'espace  $L^2$  et admet une dérivée au sens des distributions dans l'espace  $L^p$ .

### Remarques.

(i) On doit choisir une fonction non constante car sinon tout polynôme figure dans n'importe quelle fraction rationnelle : il suffit de l'envoyer sur un point fixe.

(ii) La semi-conjugaison implique que  $\phi(\text{Orb}_P(z)) = \text{Orb}_{f^k}(\phi(z))$  ; en particulier,  $\#\text{Orb}(z) \geq \#\text{Orb}(\phi(z))/k$ . Donc, si  $z$  est périodique de période  $\ell$  pour  $P$ , alors  $\phi(z)$  est périodique de période divisant  $k\ell$  pour  $f$ .

**Exemple.** Soit  $P$  un polynôme de degré  $d$  avec  $K(P)$  connexe et localement connexe, alors  $P_0 : z \mapsto z^d$  figure dans  $P$ .

En effet, il existe  $\phi$  conjuguant  $P_0$  à  $P$  sur l'extérieur de leurs ensembles de Julia remplis, qui se prolonge par continuité à l'adhérence. On définit  $\phi_r : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\phi_r(z) = \phi(1/(rz))$  pour  $0 < r < 1$ . Ces applications sont continues et injectives et lorsque  $r$  tend vers 1, les applications  $\phi_r$  tendent uniformément vers  $\phi$ .

**Proposition 5.2.1** *Si  $P$  figure dans  $f$ , alors  $\phi(J(P)) \subset J(f)$ .*

**DÉMONSTRATION.**  $\phi(J(P)) = \phi(\overline{\{\text{points répulsifs}\}}) \subset \overline{\phi(\{\text{points répulsifs}\})}$ .

Donc, il reste à établir que si  $z$  est répulsif pour  $P$ , alors  $w = \phi(z)$  est dans  $J(f)$  : si  $w \notin J(f)$ , soit  $C(w)$  sa composante de Fatou ;  $\phi^{-1}(C(w))$  est un voisinage de  $z$  dans  $K(P)$ . Par suite, pour tout point  $z'$  périodique répulsif dans  $\phi^{-1}(C(w))$  de période première à celle de  $z$ ,  $\phi(z') = \phi(z)$  est fixe et  $\phi(J(P)) = \phi(z)$ , ce qui contredit la définition de  $\phi$ . ■

La notion de figuration se justifie, entre autres, par la proposition suivante :

**Proposition 5.2.2** (i) *Soit  $c_0 \in \mathcal{D}_0$ , i.e.  $c_0$  est  $k$ -périodique par  $P_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $c \in M$  ; alors  $P_c$  figure dans  $P_{c_0 \perp c}^k$ .*

(ii) *Soit  $f$  l'accouplement de deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  ; alors,  $P_1$  et  $P_2$  figurent dans  $f$ .*

**DÉMONSTRATION.** (i) Dans la preuve du Théorème de Modulation (voir [Do3] et Partie IV), on montre qu'il existe  $U' \subset\subset U$  tel que  $P_{c_0 \perp c}^k \sim_{\text{hyb}} P_c$ , pour tout  $c$  ( $\neq 1/4$ , si  $c_0$  est non primitif). De plus, si  $c_0$  est non primitif, alors  $P_{1/4}$  figure de manière rigide à la racine de la composante hyperbolique contenant  $c_0$ . C'est beaucoup plus fort que de figurer.

(ii) Cette proposition constitue un théorème de M. Rees (voir [Sh2] pour une démonstration).

■

**Remarque.**  $P_{c_0}$  ne figure pas en général dans  $P_{c_0 \perp c}^k$ , comme nous le montre l'exemple suivant :

on prend  $c_0 = 0$  et  $c = -2$  : on a  $c_0 \perp c = c$ .

Si  $P_\infty$  figure dans  $P_c$ , alors il existe  $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow [-2, 2]$  qui semi-conjuge les deux applications.

Or, soit  $z \in \mathbf{D}$ ,  $P_\infty^n(z) \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi(P_\infty^n(z)) = P_c^n(\varphi(z)) \rightarrow \varphi(0)$ . Mais,  $\varphi(0)$  ne peut être que répulsif, donc  $\varphi(\mathbf{D}) = \varphi(0)$  et  $\varphi$  est constante.

**Proposition 5.2.3** *Il existe des figurations telles que :*

- la nature d'un point périodique change par figuration,
- des points de  $\overset{\circ}{K}(P)$  aient des points de  $J(f)$  comme image,
- les images réciproques de points de  $J_f$  soient des continua de  $J(P)$ ,
- le degré local de  $f$  soit strictement plus petit que celui de  $P$ .

**DÉMONSTRATION.** Nous allons construire deux exemples qui, combinés, établiront cette proposition.

**Déformation par pincements.** (voir Partie III, Chap.7) On considère  $P : z \mapsto z^2 + \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1/4$ . Son ensemble de Julia est un quasicerle. Le polynôme est fortement dilatant dans son voisinage. On va esquisser une déformation qui va le semi-conjugué avec le chou-fleur  $f : z \mapsto z^2 + 1/4$ . Soit  $\beta$  le point fixe répulsif de  $P$ . On considère dans son tore quotient un anneau dans la projection de  $\overset{\circ}{K}(P)$ , disjoint des grandes orbites critiques. Sur cet anneau on définit une suite de champs d'ellipses parallèles à l'équateur dont l'ellipticité tend vite vers l'infini et uniformément, quand on tend vers l'équateur. On relève cette suite sur le plan dynamique qu'on prolonge afin que chaque élément  $\mu_n$  soit  $P$ -invariant, avec  $\|\mu_n\|_\infty \nearrow 1^-$ . On intègre cette suite par des applications quasiconformes  $\varphi_n$ , tangentes à l'identité à l'infini. On note  $P_n = \varphi_n \circ P \circ \varphi_n^{-1}$ . Chaque polynôme est une déformation quasiconforme de  $P$ , et est monique centré, dont la paire attractif/répulsif tend à être parabolique. Quitte à extraire une sous-suite, ces polynômes tendent donc vers  $f$ . Par des estimations sur les modules d'anneaux, on montre que la suite  $(\varphi_n)$  converge uniformément sur tout compact (à une sous-suite extraite près) vers une application continue  $\varphi$  telle que  $\varphi \circ P = f \circ \varphi$ . Tous les relevés de l'équateur sont écrasés par  $\varphi$  sur  $J(f)$ .

Cet exemple vérifie les deux premiers points.

**Baisse du degré.** On part de  $P : z \mapsto z^3$ , et on va montrer que  $P$  figure dans  $f : z \mapsto z^2$ . On définit l'application  $\phi : e^{r+2i\pi t} \mapsto e^{\rho(r)+2i\pi\theta(t)}$  comme suit :

soit  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  l'application en escalier de Lebesgue supportée sur l'ensemble de Cantor triadique. Elle est limite uniforme d'injections et semi-conjuge la multiplication par trois à la multiplication par deux. Donc, en notant  $\theta$  l'application du cercle lui correspondant et  $\rho$  son extension par périodicité,  $\phi$  vérifie  $\phi(z^3) = \phi(z)^2$ . ■

### 5.3 Figuration rigide

On rappelle qu'une figuration  $\varphi : K(P) \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  est rigide s'il existe une extension de  $\varphi$  à un voisinage  $U$  de  $K(P)$  telle que  $\varphi$  est injective sur  $U$ ,  $\varphi \in W^{1,p}(U)$ ,  $p > 1$ , et telle que  $\varphi$  vérifie  $\bar{\partial}\varphi = 0$  pp. dans  $K(P)$ .

**Proposition 5.3.1** *Si la figuration est rigide, alors  $\phi(\overset{\circ}{K}(P)) \subset \overline{C} \setminus J(f)$ . De plus, l'image d'un point superattractif, attractif, parabolique ou de Siegel est un point superattractif, attractif de même multiplicateur, parabolique ou de Siegel respectivement.*

**Remarque.** Il manque malgré tout un énoncé d'unicité du type : si deux polynômes  $f$  et  $g$  sont de même degré et si l'un figure dans l'autre par une figuration rigide (avec  $k = 1$ ), alors ce sont les mêmes, à conjugaison affine près. La difficulté principale pour utiliser un argument de *pull-back* est de s'assurer que l'on puisse appliquer le Lemme de Weil à l'application limite.

**DÉMONSTRATION.** Comme  $\phi$  est continue injective, l'image d'un domaine normal (de Fatou) est aussi normale. De plus les points restent de même nature, par conjugaison topologique. ■

**Proposition 5.3.2** *Soit  $(P, \varphi)$  une figuration rigide dans une fraction rationnelle  $f$  avec  $J_P$  connexe. Alors,  $\text{Teich}(P)$  s'injecte dans  $\text{Teich}(f)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Elle est fondée sur la décomposition dynamique de  $\text{Teich}(P)$  afin de définir l'injection.

- Pour toute composante de Fatou bornée de  $P$ , l'application  $\varphi$  est conforme, donc elle induit un isomorphisme entre les composantes de Teichmüller sous-jacentes. La composante de l'infini n'induit rien car  $J(P)$  est connexe.

- Supposons que  $P$  admette un champ de droites invariant  $\mu$  sur  $J_P$ . Comme  $\varphi$  est dans  $W^{1,p}$  d'un voisinage de  $J_P$ , on en déduit d'une part que  $\varphi(J_P)$  est de mesure positive, et d'autre part que  $\varphi_*\mu$  est un champ de droites  $f$ -invariant sur  $J_f$ . ■

## 5.4 Silhouettes polynomiales et figuration rigide

**Définition.** Une *silhouette polynomiale* est la donnée d'un quadruplet  $(f, U', U, K)$ , où  $U'$  et  $U$  sont des disques topologiques d'intersection non vide et connexe,  $f : U' \rightarrow U$  est une application holomorphe et  $K$  est un compact plein de  $U' \cap U$ , qui contient tous les points critiques de  $f$  et qui est invariant par  $f$ , i.e.  $f(K) = K$ . De plus, on demande que la restriction  $f : K \rightarrow K$  soit un revêtement ramifié topologique de degré fini  $d_f \geq 1$ . Enfin, soit  $z_0$  un point critique de  $f$  sur  $U \cap K$ ; ou bien il s'agit d'un point critique de  $f|_K$  en tant que revêtement ramifié de  $K$  de même multiplicité, ou bien non. En ce cas, le point  $z_0$  est sur le bord de  $K$  et on demande que sur un voisinage  $V$  assez petit de  $z_0$ ,  $f|_{K \cap V}$  respecte l'ordre cyclique des composantes connexes de  $K \setminus \{z_0\}$ , i.e. si  $L_1, L_2$  et  $L_3$  sont des composantes connexes dans cet ordre, alors l'image de ces composantes sont aussi dans le même ordre.

En particulier  $f$  a un nombre fini de points critiques. Un point critique de  $f$  est *inessentiel* s'il n'est pas critique pour  $f|_K$ . Par exemple, si  $f(z) = (3/2) - (3/2)z^2 + z^3$ ,

alors les points critiques sont 0 et 1 ; 0 tombe en une itération sur un point fixe répulsif  $(3/2)$  et 1 est fixe. Il n'est pas difficile de montrer que le segment  $]0, (3/2)[$  est dans le bassin immédiat d'attraction  $A^*(1)$  et que ces extrémités appartiennent au bord. On considère un voisinage  $U'$  de ce bassin ainsi que son image  $U = f(U')$ . Le quadruplet  $(f, U', U, \overline{A^*(1)})$  est une silhouette polynomiale pour laquelle 0 est un point critique inessentiel et 1 est un point critique essentiel.

**Exemples :**

- si  $U' = U$ , par l'uniformisante de Riemann, on se ramène à un produit de Blaschke défini sur le disque unité. Par suite, ou bien  $d_f > 1$  et  $K_f$  est un point attractif, ou bien  $d_f = 1$  et  $f$  est conjuguée à une rotation ; en ce cas,  $K$  peut être n'importe quel compact invariant (plein).
- si  $U \subset\subset U'$ ,  $K_f$  est un point attractif d'après le lemme de Schwarz.
- si  $U' \subset\subset U$  et si  $f$  est de degré 1 alors  $K_f$  est un point répulsif.

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux silhouettes polynomiales dont la restriction  $f|_{K_f}$  est de degré  $d_f \geq 2$ .

Sous ces conditions,  $(U' \cup U) \setminus K_f$  est un anneau de module fini que l'on transforme par une application conforme en un anneau de la forme  $A = \{1 < |z| < R\}$ ,  $R > 1$ . On définit  $\hat{U} = (U' \setminus f^{-1}(K_f))$  ; cet ensemble est un anneau privé d'un nombre fini de secteurs correspondant aux points critiques inessentiels. Soit  $h$  le conjugué de  $f$ , bien défini sur l'image de  $\hat{U}$ , voisinage extérieur de  $S^1$  privé d'un nombre fini de secteurs. En utilisant le principe de réflexion de Schwarz, on obtient un revêtement  $h_f : S^1 \rightarrow S^1$  non ramifié de degré  $d_f$ ,  $\mathbf{R}$ -analytique sauf en un nombre fini de points. En gardant la terminologie de [DH2], on appelle  $h_f$  la classe externe de  $(f, U', U, K_f)$ . Par extension, on appellera point critique de  $h_f$  tout point de  $S^1$  provenant d'un point critique inessentiel de  $f$ . On lui associe un sous-ensemble  $X_{h_f}$  de  $S^1$  correspondant aux orbites critiques et paraboliques de  $h_f$ . Cet ensemble est invariant par  $h_f : h_f(X_{h_f}) \subset X_{h_f}$ . La paire  $(h_f, X_{h_f})$  sera appelée classe externe marquée. On montrera plus loin que, si  $X_{h_f}$  est fini et les orbites critiques et paraboliques sont disjointes, on peut associer un revêtement  $\mathbf{R}$ -analytique de  $S^1$  dans lui-même, défini à application quasisymétrique près (voir Corollaire 5.4.3).

La classe externe marquée d'une silhouette polynomiale est définie à homéomorphisme  $\mathbf{R}$ -analytique de  $S^1$  près.

Si  $f$  ne contient pas de point critique inessentiel alors  $h_f$  est  $\mathbf{R}$ -analytique ; si, de plus,  $h_f$  est fortement dilatante, alors, quitte à réduire les domaines de définition  $U'$  et  $U$ ,  $f$  est une application à allure polynomiale et il existe un polynôme, unique à application affine près, qui figure de manière rigide dans  $f$  par une application quasiconforme (Théorème de redressement des applications à allure polynomiale 5.1.1). Le but est d'étendre ce résultat aux silhouettes polynomiales.

**Definition 1.** Un revêtement  $h : S^1 \rightarrow S^1$  est *topologiquement expansif* si pour tout arc de cercle  $I \subset S^1$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $f^n(I) = S^1$ .

**Definition 2.** Un revêtement  $(h, X_h)$   $\mathbf{R}$ -analytique de  $S^1$ , où  $X_h \subset S^1$  contient au moins les orbites critiques et paraboliques de  $h$ , et où  $X_h$  vérifie  $h(X_h) \subset X_h$ , est appelé *revêtement marqué*. On dit qu'il est *combinatoirement fini* si  $X_h$  est fini.

**Remarque.** Si  $f$  est une silhouette polynomiale et si sa classe externe est topologiquement expansive, alors un point périodique de  $h_f$  est soit répulsif soit parabolique (multiplicateur réel).

**Définition 3.** Deux revêtements marqués  $\mathbf{R}$ -analytiques  $(h_1, X_1)$  et  $(h_2, X_2)$  de  $\mathbf{S}^1$  sont *combinatoirement équivalents* s'il existe deux homéomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbf{S}^1$  qui respectent l'orientation, tels que  $\varphi|_{X_1} = \psi|_{X_1}$ ,  $\varphi(X_1) = \psi(X_1) = X_2$  et  $\varphi \circ h_1 = h_2 \circ \psi$  sur  $\mathbf{S}^1$ .

**Définitions 4.** Deux revêtements marqués  $\mathbf{R}$ -analytiques  $(h_1, X_1)$  et  $(h_2, X_2)$  de  $\mathbf{S}^1$  sont *topologiquement équivalents* (resp. *quasiconformément équivalents*, *conformément équivalents*) s'il existe un homéomorphisme  $\varphi : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  qui préserve l'orientation (resp. homéomorphisme quasimétrique, homéomorphisme  $\mathbf{R}$ -analytique) qui conjugue  $h_1$  à  $h_2$  et tel que  $\varphi(X_1) = X_2$ .

**Proposition 5.4.1** Soient  $(h_1, X_1)$  et  $(h_2, X_2)$  deux revêtements  $\mathbf{R}$ -analytiques marqués de  $\mathbf{S}^1$ , topologiquement expansifs, combinatoirement finis et combinatoirement équivalents.

(1) Ils sont topologiquement équivalents.

(2) Si les points paraboliques se correspondent, alors la conjugaison est quasimétrique.

(3) Pour chaque application, on considère une extension holomorphe  $H_i : W_i' \rightarrow W_i$ , où les domaines sont annulaires et symétriques par rapport au cercle unité. Si, d'une part les points paraboliques se correspondent de manière à préserver le nombre de pétales, et d'autre part les points critiques se correspondent de manière à conserver leur multiplicité, alors  $H_1$  et  $H_2$  sont quasiconformément équivalents au voisinage de  $\mathbf{S}^1$ .

**Remarque.** La conclusion (1) reste vraie sous l'hypothèse que les revêtements sont topologiquement expansifs et de même degré. On propose ici une démonstration de (1) qui prépare celle des points (2) et (3).

Pour montrer cette proposition, nous allons utiliser des secteurs invariants, outil qui sera récurrent dans nos chirurgies.

**Secteurs invariants et modules d'ouverture.** Soit  $h$  une fonction holomorphe au voisinage de zéro, qui vérifie  $\begin{cases} h(0) = 0, \\ h'(0) = \lambda \text{ avec } |\lambda| > 1. \end{cases}$

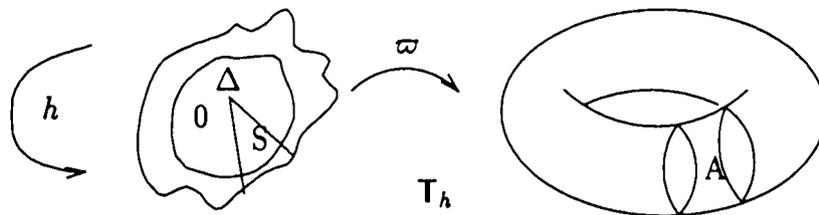


FIG. 5.1 - Tore associé à un germe répulsif.

Dans un voisinage de 0 ouvert simplement connexe  $\Delta$ , on peut trouver une coordonnée linéarisante, i.e. un isomorphisme  $\xi : \Delta \rightarrow \xi(\Delta) \subset \mathbf{C}$  tel que  $\xi \circ h(z) = \lambda \cdot \xi(z)$ , pour

$z \in h^{-1}(\Delta) \cap \Delta$ . On note  $T_h = (\Delta \setminus \{0\})/(h)$  le tore associé isomorphe au tore  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \log \lambda \oplus 2i\pi\mathbb{Z})$ . On définit  $\varpi : \Delta \setminus \{0\} \rightarrow T_h$  la projection canonique. Tout anneau  $A \subset T_h$  tel que  $S := \varpi^{-1}(A)$  est connexe définit un secteur  $h$ -invariant (Figure 5.1). Le module de  $A$  est aussi appelé le module d'ouverture de  $S$ .

De la même manière, si  $h$  est un germe parabolique alors on peut aussi définir des secteurs invariants et des modules d'ouvertures. En effet, au voisinage du point parabolique, on a des cylindres de Fatou-Ecalte (isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ) dans lesquels on peut considérer des sous-anneaux de module fini dont le relevé est connexe.

**DÉMONSTRATION DE 5.4.1.** La première étape consiste à trouver des “voisinages” de  $\mathbb{S}^1$  pour lesquels les extensions  $H_i$  seront propres et dilatantes. Il faut donc gérer les points paraboliques et les points critiques éventuels. Ensuite, nous construirons une partition dynamique qui nous permettra de définir une conjugaison partielle entre les  $H_i$  qui se prolongera en conjugaison totale sur  $\mathbb{S}^1$ .

La construction étant identique pour les deux applications, on oublie volontairement les indices. Soit  $x_1, \dots, x_k$ , un cycle marqué, *i.e.* dans  $X_h$ .

▷ S'il est répulsif, alors chaque point est accessible de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$  par deux secteurs symétriques  $S_i$   $H^k$ -invariant.

▷ S'il est parabolique, alors le cercle unité appartient localement à deux pétales répulsifs à cause de l'expansivité topologique de  $h$ . On considère, en chaque point, deux domaines symétriques bordés par des arcs invariants provenant de ces pétales, et qui forment un ouvert  $S_i$  dont le bord n'intersecte  $\mathbb{S}^1$  qu'en  $x_i$ . Ils sont aussi  $H^k$ -invariants.

Quitte à rétrécir  $W$ , on peut supposer que toutes les images réciproques des  $S_i$  le long de  $\mathbb{S}^1$  sont deux à deux disjointes.

Lorsqu'on rencontre un point critique, on obtient plusieurs secteurs du même côté de  $\mathbb{S}^1$  selon la multiplicité du point critique. On remplace ces secteurs par leur réunion de manière à n'en avoir qu'un seul, et telle que la partie du bord formé par les arcs issus du point critique sont ceux qui étaient adjacents à  $\mathbb{S}^1$ . Ensuite, on considère toutes ses préimages qui restent disjointes deux à deux avec les autres secteurs.

**Lemme 5.4.2** *L'application  $H$  est dilatante, i.e. il existe une métrique infinitésimale  $\lambda$  définie sur un voisinage de  $\mathbb{S}^1$  privé des pétales attractifs telle que*

$$\|T_x H\|_\lambda > 1$$

*pour tout  $x$  de ce voisinage.*

**DÉMONSTRATION.** Ceci découle de la construction de Douady et Hubbard d'une métrique dilatante pour les polynômes géométriquement finis (voir [DH1]).

■

**FIN DE LA DÉMONSTRATION DE 5.4.1.** Soient  $V = W \setminus (US_i)$  et  $V' = W' \setminus (US_i)$ . On a  $V' \subset V$  par le Lemme 5.4.2, et l'intersection des bords correspond aux bords invariants des secteurs.

On définit la partition suivante. Soit  $\gamma_0$  le bord de  $W$  ; on définit  $\gamma_1 = H^{-1}(\gamma_0) \cap V$ . Les courbes  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  bordent dans  $V$  une réunion finie de quadrilatères  $Q_0$ . Par récurrence, on

définit  $Q_n = H^{-1}(Q_{n-1})$ . Le complémentaire  $V \setminus (\cup Q_n)$  correspond aux images réciproques des secteurs  $S_i$ .

Ceci étant, si on a deux revêtements  $h_1$  et  $h_2$  combinatoirement équivalents, alors il existe une unique façon, compatible avec l'équivalence, de faire correspondre les différentes composantes connexes des  $Q_n$ .

On peut donc définir deux difféomorphismes  $\psi_0 : \gamma_0^{h_1} \rightarrow \gamma_0^{h_2}$  et  $\psi_1 : \gamma_1^{h_1} \rightarrow \gamma_1^{h_2}$  tels que  $\psi_0 \circ H_1 = H_2 \circ \psi_1$ . On prolonge ces deux applications quasiconformément à  $Q_0$  en une application  $\psi$ . En utilisant les branches inverses des  $H_i$  et la combinatoire imposée, on prolonge cette application en un homéomorphisme quasiconforme  $\psi : V_1 \setminus (\cup H_1^{-n}(S_i)) \rightarrow V_2 \setminus (\cup H_2^{-n}(S_i))$  qui conjugue  $H_1$  à  $H_2$ .

Sur chaque secteur  $S_i$ , on se donne une extension par un homéomorphisme que l'on prolonge à ses images réciproques par l'action des  $H_i$ . Cette extension n'est a priori pas quasiconforme ni compatible avec les dynamiques. Toutefois, au total, on obtient un homéomorphisme de  $V_1$  sur  $V_2$  qui conjugue  $h_1$  à  $h_2$ , car  $H_1$  et  $H_2$  sont dilatantes. Ceci montre (1).

Si les points paraboliques se correspondent, il suffit de montrer que l'on peut trouver une extension quasiconforme sur les secteurs critiques ou périodiques. Pour les points répulsifs, il suffit de déterminer un difféomorphisme entre deux domaines fondamentaux des secteurs, puis de le tirer en arrière. Pour les points paraboliques, selon le nombre  $\nu$  de pétales, les images réciproques d'un point s'accumulent sur le point parabolique à la vitesse  $1/n^\nu$ . Par suite, si on considère un quadrilatère bordé par deux sous-arcs fondamentaux du bord d'un secteur et deux arcs de cercle, on trouve un module de l'ordre de  $\nu/n$ . Donc, on peut trouver une extension dont la distorsion sera de l'ordre de  $\max(\nu_1/\nu_2, \nu_2/\nu_1)$ . Quant aux points critiques, si leur orbite est parabolique, alors le point critique a pour action d'augmenter le nombre de pétales donc on conclut de l'existence de l'extension quasiconforme comme ci-dessus; si son orbite est répulsive, alors son image par notre conjugaison est aussi un point pré-répulsif, et on utilise les extensions de B. Branner et A. Douady (cf Proposition 4.2.6 et 4.2.7) qui seront quasiconformes: en effet, en passant au "log", les restrictions de  $H$  sur les bords se comportent à l'infini comme des applications affines dont le coefficient de dilatation correspond à la multiplicité du point critique. La restriction d'une application quasiconforme au cercle est quasisymétrique. Ceci montre (2).

Maintenant, si les pétales se correspondent par l'équivalence, on peut déterminer une conjugaison quasiconforme entre secteurs paraboliques. De plus, si les points critiques se correspondent avec même multiplicité, alors les conjugaisons quasiconformes sur les cycles se relèvent au voisinage des points critiques. ■

**Proposition 1** *Soit  $(U' \xrightarrow{f} U, K)$  une silhouette polynomiale. On suppose que sa classe externe marquée  $h_f$  est de degré  $d_f \geq 2$ , topologiquement expansive, combinatoirement finie et sans point parabolique. Alors, il existe un unique polynôme  $P$ , à conjugaison affine près, qui figure de manière rigide dans  $f$ , et tel que leurs ensembles de Julia soient homéomorphes.*

**DÉMONSTRATION.** Pour montrer l'existence de  $P$ , on va procéder par chirurgie afin de

se ramener à une application à allure polynomiale de degré  $d_f$ . Tous les points critiques  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ont une orbite qui aboutit sur un cycle répulsif  $\xi_i, 1 \leq i \leq n$ . Considérons un voisinage linéarisable  $V$  de  $\xi_i$  muni des  $q_i$  accès du complémentaire de  $K_f$ . Lorsque l'on ramène  $V$  au voisinage de  $\omega_i$ , on obtient un voisinage  $W$  découpé en  $q_i d'$  secteurs, où  $d' > 1$  est la multiplicité de  $\omega_i$ . Par hypothèses, les secteurs de  $W$  qui intersectent  $K$  sont rangés dans le même ordre cyclique qu'au voisinage de  $\xi_i$ . On note  $\tilde{T}$  la réunion de la fermeture des secteurs de  $W$  qui intersectent  $K$ . À chaque bord invariant, on enlève un petit secteur (invariant) de telle sorte que  $f$  soit injective sur la fermeture du nouveau domaine  $T$  sur le voisinage de  $\xi_i$  (voir Figure 5.2).

Soit  $S$  le complémentaire de  $T$  dans  $W$  et notons  $\mathcal{S}$  la réunion des secteurs préimages de ceux de  $S$  qui sont basés sur  $K$ . Si on rétrécit le domaine de définition de  $f$ , on peut s'arranger pour que ces secteurs soient deux à deux disjoints.

Le but est de remplacer  $f|_{\mathcal{S}}$  par une application  $g$  localement injective. Puisque  $f|_K$  respecte l'orientation, l'application  $f^n : T \rightarrow V$  admet un prolongement topologique en un homéomorphisme local. De plus, le point  $\omega_i$  étant prérépulsif, on peut prolonger  $f|_{\partial \mathcal{S}_i}$  à  $S_i$  à valeur dans le secteur issu de  $f(\omega_i)$  de manière quasiconforme (voir Chap.4).

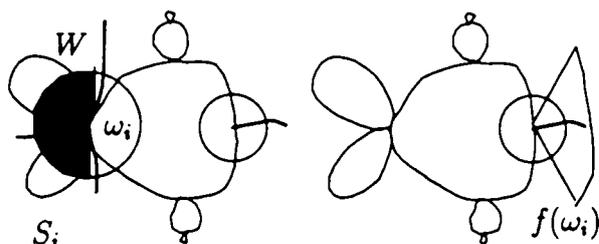


FIG. 5.2 - Suppression d'un point critique.

On obtient ainsi une nouvelle application  $g : U' \rightarrow U$  quasirégulière de degré  $d_f$  telle que  $g|_K = f|_K$ . On définit la structure presque-complexe suivante : sur les secteurs  $S_i$ , on tire en arrière la structure complexe standard. Comme leurs images réciproques sont deux à deux disjointes, on la déploie sur  $U \cup U'$  en la tirant en arrière par  $g^{n+1}$ , c'est-à-dire que sur  $g^{-n}(S_i)$ , on pose  $\sigma = (g^n)^* \sigma_0$ , où  $\sigma_0$  est la structure complexe standard. Sur le reste, on garde la structure standard. Comme  $g$  n'est pas conforme uniquement sur les  $S_i$ , où elle est quasiconforme, on obtient une structure presque-complexe  $g$ -invariante d'excentricité bornée. Par le théorème d'intégrabilité, on en déduit que  $g$  est quasiconformément conjuguée à une application à allure polynomiale de degré  $d_f$ , elle-même équivalente à un polynôme  $P$ .

L'unicité provient du fait qu'on ne change pas  $f$  sur  $K_f$ , et donc, toutes les étapes sont hybrides, et uniques car  $K_f$  est connexe.

■

**Corollaire 5.4.3** *Soit  $f$  une silhouette polynomiale, combinatoirement finie, topologiquement expansive et telle que tous les points critiques soient prérépulsifs. On peut lui associer*

une classe externe  $h_f : S^1 \rightarrow S^1$   $\mathbf{R}$ -analytique, bien définie à conjugaison quasisymétrique près.

**DÉMONSTRATION.** La démonstration de la Proposition 1 permet de remplir les secteurs où les applications sont mal définies et qui, après chirurgie, donnent une classe externe  $\mathbf{R}$ -analytique, avec les points paraboliques et les points critiques inessentiels marqués. D'après la Proposition 5.4.1, deux telles applications combinatoirement équivalentes sont quasiconformément conjuguées.

**Remarque.** Le revêtement marqué que l'on obtient par le Corollaire 5.4.3 n'est pas dans la même classe  $\mathbf{R}$ -analytique que la classe externe de  $f$ , puisqu'on lisse les singularités induites par les points critiques inessentiels. Cependant, pour effectuer des chirurgies, la classe quasisymétrique d'une classe externe est suffisante.

## 5.5 Un exemple avec un point parabolique dans la classe externe

**Proposition 5.5.1** *Le polynôme  $P : z \mapsto z^2$  figure de manière rigide dans  $f : z \mapsto z^2 + z$ .*

Le but est de montrer que l'application de Böttcher du complémentaire de  $K(f)$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\bar{\mathbb{C}}$  dans  $W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$ . Pour cela, on va d'abord montrer comment procéder lorsqu'on ne considère qu'un *cusp*, et ensuite comment le prolonger au chou-fleur tout entier.

**Prolongement au voisinage d'un *cusp*.** On considère un secteur  $S$  d'ouverture  $2\theta$  issu de l'origine ( $0 < \theta < \pi$ ), muni de l'application  $f : z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda > 1$ . On considère aussi l'application  $z \mapsto z + 1$  au voisinage de l'infini définie sur le domaine des  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq \theta / \log \lambda$ . Par l'inversion, on ramène cette application en

$$g : z \mapsto \frac{z}{1+z}$$

définie sur un *cusp*  $C$  issu de l'origine. L'application  $z \mapsto w = \log \lambda / \log z$  conjugue  $f$  à  $g$  de  $S$  dans le *cusp*  $C$ .

On note  $Q_n^f$  le quadrilatère bordé par les segments  $[(1/\lambda^{n+1})e^{\pm i\theta}, (1/\lambda^n)e^{\pm i\theta}]$  et les arcs de cercles de rayon  $1/\lambda^{n+1}$  et  $1/\lambda^n$  contenu dans  $\mathbb{D} \setminus S$ . Remarquons que  $Q_n^f = f^{-n}(Q_0^f)$ .

**Lemme 5.5.2** *Il existe une extension  $C^1$  par morceaux de cette application  $w$  à un voisinage de l'origine en un homéomorphisme  $\phi$  vivant, ainsi que son inverse, dans  $W^{1,2}$ .*

Si  $\psi$  est un homéomorphisme  $C^1$  par morceaux (plus généralement ACL), alors étudier ses dérivées partielles définies pp. a un sens. En notant  $\psi_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi$ ,  $\psi_z = \frac{\partial}{\partial z}\psi$  et  $\mu_\psi = \psi_{\bar{z}}/\psi_z$ , le jacobien d'un homéomorphisme  $\psi \in W^{1,2}$  qui respecte l'orientation s'écrit

$$\operatorname{Jac}(\psi) = |\psi_z|^2 - |\psi_{\bar{z}}|^2,$$

et son facteur de dilatation

$$K_\psi = \frac{(|\psi_z| + |\psi_{\bar{z}}|)^2}{Jac(\psi)}$$

Il vient alors

$$\int |\psi_z|^2 \asymp \int K_\psi \cdot Jac(\psi),$$

où  $a \asymp b$  s'il existe  $c > 1$  tel que  $1/c \leq (a/b) \leq c$ . De plus, si  $\psi_z$  est dans  $L^2$ , il en est de même de  $\psi_{\bar{z}}$ .

DÉMONSTRATION. On pose

$$\begin{aligned} \phi: \mathbf{D} \setminus \bar{S} &\rightarrow \mathbf{D} \setminus \bar{C} \\ \rho \cdot e^{it} &\mapsto \frac{\log \lambda}{|\log \rho + i\theta|} \cdot \exp ia_\rho(t), \end{aligned}$$

où  $a_\rho(t)$  est une application affine en  $t$ .

L'application  $\phi$  ainsi définie est un homéomorphisme (de  $\mathbf{D} \setminus S$  sur  $\mathbf{D} \setminus C$ ) qui transforme les cercles centrés à l'origine en cercles centrés à l'origine.

Notons  $Q_n^g = \phi(Q_n^f)$  (cf Figure 5.3).

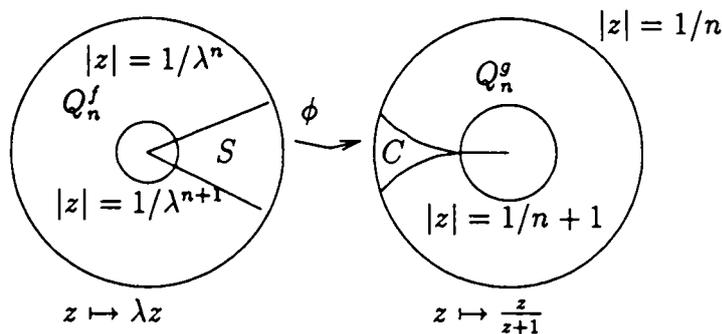


FIG. 5.3 - Extension locale.

La dilatation de  $\phi$  peut être calculée en évaluant le rapport des modules des quadrilatères. En effet, le champ d'ellipses associé est porté sur les demi-droites issues de l'origine et le rapport de dilatation est une fonction décroissante de la distance à l'origine : il n'y a donc pas de compensation.

On obtient

$$\begin{cases} \text{mod } Q_n^f \asymp 1 \text{ et } \text{mod } Q_n^g \asymp \log(1 + 1/n) \asymp 1/n, \\ \text{sur } Q_n^f, K_\phi \asymp \frac{\text{mod } Q_n^f}{\text{mod } Q_n^g} \stackrel{\text{def}}{=} K_n \asymp n. \end{cases}$$

Le calcul suivant montre que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont dans  $W^{1,2}$ .

On calcule :

$$\begin{cases} \|\phi_z\|_{L^2}^2 \asymp \int K_\phi \cdot Jac(\phi) \asymp \sum K_n \text{Aire } Q_n^g \asymp \sum 1/n^2 < \infty, \\ \|\phi_z^{-1}\|_{L^2}^2 \asymp \sum K_n \text{Aire } Q_n^f \asymp \sum n/\lambda^{2n} < \infty. \end{cases}$$

■

Dans ce cas, on peut en fait donner une expression explicite de cette extension et calculer "à la main" les dérivées. C'est ce que nous nous proposons de faire maintenant.

**AUTRE DÉMONSTRATION DE 5.5.2.** Avant de se lancer dans les calculs, expliquons la stratégie que nous allons employer. Au lieu de définir directement l'extension du complémentaire de  $S$  dans celui de  $C$ , nous allons d'abord montrer que l'on peut remplacer ce dernier par le complémentaire d'un segment. Pour cela, on définit une application quasi-conforme  $\varphi_1$  tangente à l'identité à l'origine qui effectue cette transformation (en fait, on travaille au voisinage de l'infini, *i.e.* on définit  $\varphi_0$ ). Ensuite, il suffit de considérer une extension  $\varphi_2$  pour laquelle la dérivée tangentielle est constante. Notre extension est alors  $\phi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ .

Fixons les notations :

- posons  $\aleph = \theta / \log \lambda$ ;
- on note  $\Omega = \{z \in \overline{\mathbb{C}}, |z| > 2\aleph\} \setminus \{Re z \leq 0 \text{ et } |Im(z)| \leq \aleph\}$ ;
- pour  $\rho > 2\aleph$ , on pose  $\theta_\rho = \pi - \arcsin[\aleph/\rho]$ ;
- on note aussi  $\Omega' = \{(\rho, t) \in ]2\aleph, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[, -\theta_\rho < t < \theta_\rho\}$ ;
- on définit l'application

$$a : \Omega' \rightarrow ]-\pi, \pi[ \\ (\rho, t) \mapsto \frac{t\pi}{\theta_\rho};$$

- on définit enfin

$$\varphi_0 : \Omega \rightarrow \{|z| > \aleph\sqrt{2}\} \setminus \mathbb{R}_- \\ \rho.e^{it} \mapsto \rho\sqrt{1 - (\aleph/\rho)^2}.e^{ia(\rho,t)}.$$

On considère  $\varphi_1 : \{|z| < 1/2\aleph\} \setminus C \rightarrow \{|z| < 1/\sqrt{2}\aleph\} \setminus [-1/\sqrt{2}\aleph, 0]$  le conjugué de  $\varphi_0$  par  $z \mapsto 1/z$ , *i.e.*

$$\varphi_1(\rho.e^{it}) = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (\aleph\rho)^2}} e^{-ia(1/\rho, -t)}.$$

Par suite,  $\varphi_1(z) = z(1 + O(|z|^2)).\exp(i.O(|z|^2))$  au voisinage de l'origine, et  $\varphi_1$  est tangente à l'identité en zéro.

De plus, comme  $\varphi_0$  commute avec  $z \mapsto z + 1$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\varphi_1$  commute avec  $f$  sur  $\partial C$ . Il suffit donc maintenant de prolonger

$$\rho \mapsto \frac{\log \lambda}{|\log \rho + i\theta|} \cdot \exp(\pm i\theta)$$

de  $\{|z| < e^{2\theta}\} \setminus \overline{S}$  sur  $\{|z| < 1/\aleph\sqrt{2}\} \setminus [-1/\aleph\sqrt{2}, 0]$ .

À cet effet, on pose

$$\varphi_2(\rho.e^{it}) = \frac{\log \lambda}{\log 1/\rho} \cdot \exp(i\pi \frac{t - \theta}{\pi - \theta}).$$

Il suffit maintenant de vérifier que  $\varphi_2$  et  $\phi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  sont dans  $W^{1,2}$ .

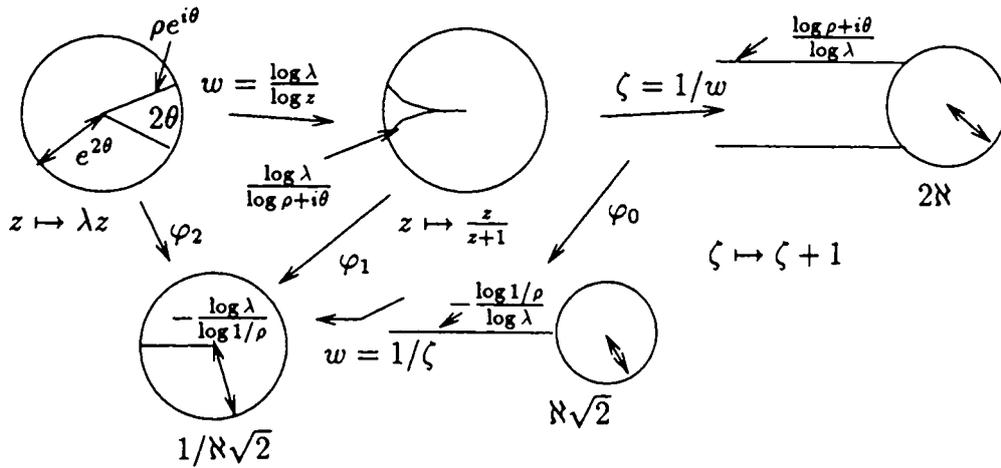


FIG. 5.4 - Construction de  $\phi$ .

En coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_2 = (1/2) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi_2 + i/\rho \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 \right) (\cos t + i \sin t), \\ \frac{\partial}{\partial z} \varphi_2 = (1/2) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi_2 - i/\rho \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 \right) (\cos t - i \sin t). \end{cases}$$

Le calcul montre

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial}{\partial z} \varphi_2 \right| = \frac{\log \lambda}{\rho \log 1/\rho} \left( \frac{1}{\log 1/\rho} + \frac{\pi}{\pi - \theta} \right), \\ Jac \varphi_2 = \frac{\log^2 \lambda}{\rho^2 \log^3(1/\rho)} \cdot \frac{\pi}{\pi - \theta}, \\ K_{\varphi_2} = \log 1/\rho \cdot \frac{\pi}{\pi - \theta}. \end{cases}$$

Donc  $\varphi_2 \in W^{1,2}$ . Comme  $\varphi_1$  est proche de l'identité en norme  $C^1$ ,  $\phi$  est aussi dans  $W^{1,2}$ . On trouve aussi que  $\varphi_2^{-1}$  est un élément de  $W^{1,2}$ , donc  $\phi^{-1}$  aussi, car

$$|(\varphi_2^{-1})_z|^2 = \frac{\log^2 \lambda}{4\rho^4} \cdot \exp[-2(\log \lambda)/\rho](1 + O(\rho)).$$

■

**Complément 5.5.2.** Il existe une constante  $C > 1$  telle que  $\text{Aire} \{z \in \mathbf{D}, K_\phi > n\} < C/\lambda^{2n}$ .

**Prolongement au voisinage de  $J_f$ .** Le but est d'essayer de se ramener au calcul précédent. Afin d'isoler les singularités, on définit une suite de domaines dans chaque ensemble de Julia rempli comme suit.

Dans le disque. Soit  $0 < r < 1$ . On considère un secteur  $S_0 \subset \mathbf{D}$  issu de 1, coupé par le cercle de rayon  $r^2$ , invariant par  $P$ , et symétrique par rapport à l'axe réel. Si l'angle de

ce secteur et  $r$  sont bien choisis, alors toutes les préimages  $S_n$  de  $S_0$  sont deux à deux disjointes. On note  $\gamma_0^P$  la courbe définie comme suit : elle part de 1 en suivant le bord de  $S_0$  dans le demi-plan supérieur jusqu'au cercle de  $r$ , puis tourne autour du disque sur le cercle de rayon  $r$  dans le sens trigonométrique et revient sur 1 par l'autre bord de  $S_0$  (l'indice de cette courbe par rapport à l'origine est 1).

Posons  $\gamma_n^P = P^{-n}(\gamma_0^P)$  ; on obtient ainsi une partition d'un voisinage intérieur de  $S^1$  (voir Figure 7.11).

À  $n$  fixé, les courbes  $\gamma_n^P$  et  $\gamma_{n+1}^P$  bordent des quadrilatères  $A_n^P$  et des secteurs  $S_n$ .

Dans le chou-fleur. Procédons à la même partition que ci-dessus. Notons  $F : \mathring{K}_f \rightarrow \mathbb{C}$  la coordonnée de Fatou attractive qui fixe l'origine, et rappelons qu'il s'agit d'un revêtement ramifié de degré infini ramifié au-dessus des entiers négatifs ou nuls qu'il satisfait l'équation fonctionnelle

$$F \circ f(z) = \tau \circ F(z),$$

où  $\tau(z) = z + 1$ . Soit  $R > 0$  fixé. On considère l'ouvert  $X_0$  du plan non borné et bordé par les demi-droites  $] - \infty, 3/2] \times \{\pm R\}$  et le segment  $\{3/2\} \times [-R, R]$ .

On définit  $T_0$  comme l'unique composante connexe de  $F^{-1}(X_0)$  qui contient le point parabolique  $1/2$  dans son bord. Notons  $C_{\pm}$  les images réciproques de  $] - \infty, 3/2] \times \{\pm R\}$ . Notons enfin  $P^{\wedge}$  la branche inverse de  $P$  définie sur  $\bar{T}_0$  qui ne fixe pas  $1/2$ . Posons  $T_n = P^{-(n-1)} \circ P^{\wedge}(T_0)$ . On note  $\delta_0$  les deux composantes connexes de  $F^{-1}(\{-1/2\} \times [-R, R])$  qui touchent à la fois les bords de  $T_0$  et de  $T_1$  et on pose  $\delta_n = f^{-n}(\delta_0)$ . Les courbes  $\delta_0$  réunies avec les bords de  $T_0$  et de  $T_1$  bordent une composante connexe de leur complémentaire qui contient l'origine. On note ce quadrilatère  $A_0^f$  et on pose  $A_n^f = f^{-n}(A_0^f) \setminus (A_0^f \cup S_0)$ . Ces quadrilatères ont la même géométrie que  $A_n^P$ . Les partitions de  $K_P$  et  $K_f$  sont naturellement combinatoirement équivalentes.

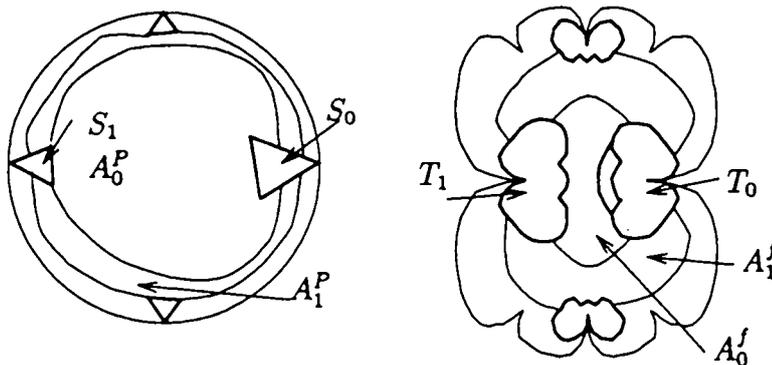


FIG. 5.5 - Extension globale.

On commence par définir une application  $\varphi : S_0 \rightarrow T_0$ , comme ci-dessus et telle que  $\varphi_0(F^{-1}(1/2))$  soit l'extrémité de  $C_+$  sur le cercle de rayon  $r^2$ . En particulier,  $\varphi$  conjugue  $P$  à  $f$  des côtés de  $S_0$  issus de 1 sur  $F^{-1}(] - \infty, \pm 1/2]) \cap \partial T_0$ .

Maintenant, on définit de manière à faire conjuguer  $P$  à  $f$ . On prolonge quasiconformément  $\varphi : A_1^P \rightarrow A_1^f$ . Par un argument de *pull-back*, on prolonge cette application à

un voisinage de  $J_P$  et  $J_f$ . Il est à noter que sur  $\cup A_n^P$ , l'application  $\varphi$  est quasiconforme avec une constante  $K$  uniformément majorée. Le défaut de quasiconformité ne se situe que dans les secteurs. On conclut par le Lemme suivant. ■

**Lemme 5.5.3** *L'application  $\varphi_z \in L_{loc}^2$ .*

DÉMONSTRATION.

$$\|\varphi_z\|_{L^2}^2 \asymp K \cdot \text{Aire}(\cup A_n^f) + \sum_{S_n} \int_{S_n} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi).$$

Comme  $P^n : S_n \rightarrow S_0$  est conforme,

$$\int_{S_n} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) = \int_{S_0} K_\varphi(P^{-n}) \cdot \text{Jac}(\varphi)(P^{-n}) |(P^{-n})'|^2;$$

or

$$\text{Jac}(\varphi)(P^{-n}) |(P^{-n})'|^2 = \text{Jac}(\varphi \circ P^{-n}) = \text{Jac}(f^{-n} \circ \varphi) = \text{Jac}(\varphi) \cdot |(f^{-n})'|^2;$$

donc

$$\int_{S_n} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) = \int_{S_0} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) \cdot |(f^{-n})'|^2;$$

d'où

$$\sum_{S_n} \int_{S_n} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) \asymp \left( \int_{S_0} K_\varphi \text{Jac}(\varphi) \right) \cdot \sum_{n \geq 0} |(f^{-n})'(0)|^2,$$

par le Théorème de Kôbe.

De plus,  $\sum_{n \geq 0} |(f^{-n})'(0)|^2 < \infty$ , car, par le Théorème de Kôbe, cette somme est comparable à l'aire total des préimages du secteur qui sont deux à deux disjointes et dans un domaine borné; donc  $\varphi \in W^{1,2}$ . De même, on peut montrer que  $\varphi^{-1} \in W^{1,2}$  aussi. On a donc une application dans  $W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1)$ . Mais d'après un théorème de P. Jones (cf [Jo]), si  $K$  est le bord d'un domaine de John, alors il est effaçable pour les applications de  $W^{1,2}$ . On en déduit donc que  $\varphi$  et  $\varphi^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$ , car  $\mathbb{S}^1$  et  $J_f$  sont le bord de domaines de John. ■

## 5.6 Accouplements de classes externes combinatoirement finies

Nous nous proposons de montrer :

**Théorème 2** *Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe ; on note  $\gamma_P : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow J_P$  son lacet de Carathéodory. Soit  $h : (\mathbb{S}^1, X) \rightarrow (\mathbb{S}^1, X)$  un revêtement  $\mathbb{R}$ -analytique marqué topologiquement expansif et combinatoirement fini, et où  $X$  est formé des orbites critiques et paraboliques de  $h$ .*

*On suppose qu'il existe un homéomorphisme  $\chi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  qui conjugue  $h$  à  $z \mapsto z^d$  tel que :*

- (a) pour tout  $x \in X$ ,  $\gamma_P \circ \chi(x)$  est un point prépériodique répulsif de  $P$  ;  
 (b) les points paraboliques de  $h$  correspondent à des points répulsifs de  $P$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $\omega$ -limite des points critiques.

Alors il existe une silhouette polynomiale  $f : U' \rightarrow U$  de classe externe  $h$  telle que  $P$  y figure de manière rigide. Plus précisément,  $\chi$  induit un homéomorphisme entre les bouts premiers de  $K(P)$  et  $K(f)$  qui conjugue les actions de  $f$  et  $P$ .

La preuve sera faite en deux temps : dans un premier temps, les points critiques seront rajoutés là où il en manque, puis on introduira les points paraboliques. Ainsi, on aura une silhouette polynomiale avec  $h$  comme classe externe. On procède par chirurgie.

### 5.6.1 Explosions d'ensembles de Julia

Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe, et soit  $z_0$  un point strictement pré-répulsif. On va montrer comment construire un polynôme  $Q$  de degré  $d' > d$  tel que  $P$  figure dans  $Q$  de manière rigide, et tel que  $z_0$  soit un point critique de degré local  $d' - d$ . Pour cela, on va utiliser la méthode des secteurs. Il s'agit de faire l'opération inverse de la Proposition 1.

**Définition.** Soit  $P$  un polynôme de degré  $\geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe. Un polynôme  $Q$  est une explosion de  $P$  en un point  $z_0 \in J_P$  apériodique si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (E1)  $P$  figure de manière rigide dans  $Q$  par  $\varphi$ ,  
 (E2)  $\deg(Q) = \deg(P) + (d_{\varphi(z_0)}Q - d_{z_0}P)$ .

On montre :

**Théorème 5.6.1** Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe, et soit  $z_0$  un point strictement pré-répulsif ; alors, il existe une explosion de  $P$  en  $z_0$  de n'importe quel degré.

**DÉMONSTRATION DE 5.6.1.** Soient  $U$  l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  de potentiel  $s < \eta$ , où  $\eta > 0$  sera déterminée ultérieurement, et  $U' = P^{-1}(U)$  ; ce sont des voisinages-disques de  $K(P)$  tels que  $(U' \xrightarrow{P} U)$  soit une application à allure polynomiale de degré  $d$ .

On considère le cycle répulsif  $\xi$  qui deviendra postcritique. En utilisant la coordonnée de Böttcher de  $P$ , on définit un cycle de secteurs invariants tels que leurs préimages soient deux à deux disjointes dans  $U$ . Il s'agit de changer  $P$  sur le secteur  $S$  issu de  $z_0$  pour le rendre critique du degré voulu. Supposons, pour simplifier l'exposition, qu'on ne veuille rendre  $z_0$  que point critique simple, i.e. l'image de  $S$  devra couvrir tout l'ensemble de Julia rempli  $K_P$ , et aussi que le temps cyclique de  $z_0$  et sa période sont 1.

On commence par couper  $S$  en 3 secteurs invariants  $S_0$  et  $S_{\pm}$ . Pour obtenir une application quasirégulière rectifiable, il suffit que l'image de  $S_0$  couvre  $K_P$  et que l'application y soit holomorphe ; les secteurs  $S_{\pm}$  auront alors pour image  $P(S)$ . On note  $\Xi = U \setminus P(S)$  ; c'est un secteur  $P$ -invariant.

En conjuguant par  $P$ , on peut définir un germe répulsif au voisinage de  $z_0$ , afin de définir un module d'ouverture pour  $S$ . Comme dans [BD], la construction sera possible si l'hypothèse de la proposition suivante est vérifiée :

**Proposition 5.6.2** *Si  $\text{mod}(S) > \text{mod}(\Xi)$  alors il existe  $f_1 : U' \rightarrow U$  quasirégulière telle que  $f_1|_{U' \setminus S} = P$  et  $f_1$  est holomorphe sur  $S_0$  vérifiant  $f_1(S_0) \supset \Xi$ .*

Il restera à préciser sous quelle(s) condition(s), cette inégalité est satisfaite.

DÉMONSTRATION. On choisit  $S_0$  de module égal à celui de  $\Xi$ . Au niveau des anneaux quotients, il existe une application conforme  $\bar{\psi} : S_0/(\tilde{P}) \rightarrow \Xi/(P)$  qui transforme l'un en l'autre, où  $\tilde{P}$  est le conjugué de  $P$  au voisinage de  $P(z_0)$  par la branche inverse de  $P$  telle que  $P^{-1}(P(z_0)) = z_0$ . La restriction de cette application au bord ainsi que la restriction de  $P$  au bord de  $S$  admettent des extensions quasiconformes  $\bar{\psi}_\pm : S_\pm \rightarrow P(S)/(P)$ . Ces applications se relèvent en une application  $F : S \rightarrow U$  quasirégulière d'après les propositions 4.2.6 et 4.2.7.

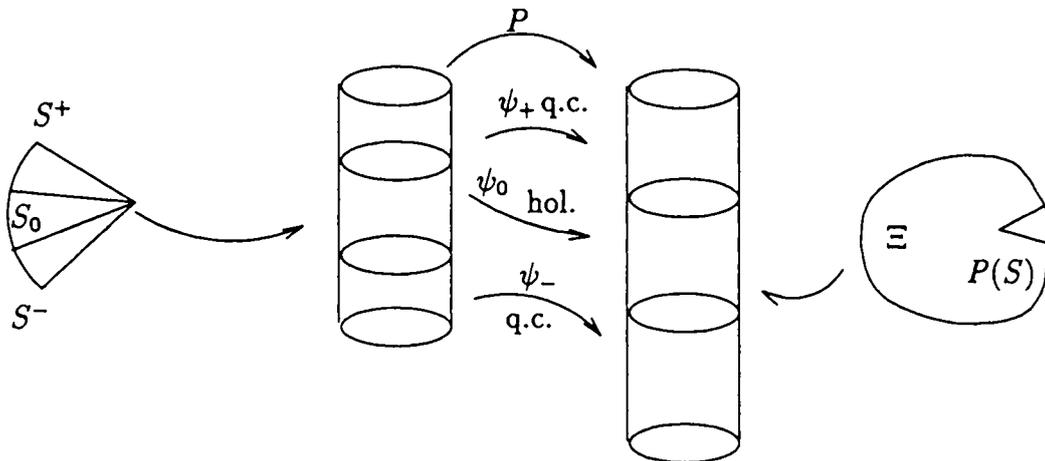


FIG. 5.6 - Définition de  $F$ .

On définit donc  $f_1 : U' \rightarrow U$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } z \in S, \quad f_1(z) &= F(z), \\ \text{si } z \notin S, \quad f_1(z) &= P(z). \end{aligned}$$

■

FIN DE LA DÉMONSTRATION DE 5.6.1. Ensuite, on définit une structure presque-complexe invariante pour  $f_1$  qui sera à ellipticité bornée car chaque point ne passe qu'une fois dans une zone non holomorphe, par construction. En l'intégrant par le Théorème d'Ahlfors-Bers, on obtient une application à allure polynomiale de degré  $d + 1$  et enfin, par le Théorème de redressement 5.1.1, on obtient le polynôme  $Q$ . Il vient directement que  $P$  figure dans  $Q$  de manière rigide.



Figure 6 *Explosion du lapin en  $\alpha'$ .*

Si le module de  $S_0$  est trop petit, on peut d'abord changer la classe externe de  $P$  pour le rendre à allure polynomiale avec un secteur à l'extérieur de  $K(P)$  aussi grand qu'on le veut (voir Proposition 5.6.3 ci-dessous).

Pour que  $z_0$  soit un point critique de rang plus important, il suffit de découper  $S$  en plus de secteurs. ■

Pour une construction plus détaillée, on peut se reporter à [W1], où l'auteur traite un exemple d'explosion. Cette méthode des secteurs est aussi employée pour construire des croisements (voir Partie V).

**Proposition 5.6.3** *Soient  $(U' \xrightarrow{f} U)$ , une application à allure polynomiale d'ensemble de Julia connexe,  $\alpha$  un point fixe de nombre de rotation  $p/q$ ,  $S$  un secteur invariant issu de  $\alpha$  dans  $U \setminus K_f$ , et  $m > 0$ ; il existe  $(\hat{U}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{U})$  hybridement équivalente à  $f$  telle que  $\text{mod } S > m$ .*

DÉMONSTRATION. On considère  $A \subset S/f^q$ , un sous-anneau non dégénéré invariant par  $f^q$  et homotope à  $S/f^q$ . Soit  $B$  un anneau de module  $\text{mod } A + m$ . On considère  $\phi : A \rightarrow B$ , un homéomorphisme quasiconforme extrémal. Sa forme de Beltrami  $\mu = \bar{\partial}\phi/\partial\phi$  se prolonge de façon  $f$ -invariante sur  $(\text{vois}(\alpha) \setminus \{\alpha\})/(f^q)$  ou  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  dans le cas parabolique. On pose  $\mu = 0$  sur le complémentaire, et on la remonte dans  $U$  pour en faire une forme  $\tilde{\mu}$   $f$ -invariante (avec  $\mu = 0$  sur le complémentaire), cf Figure 5.7. Par le Théorème d'intégrabilité d'Ahlfors-Bers,  $f$  est hybridement équivalente à une application à allure polynomiale  $(\hat{U}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{U})$  telle que le module d'ouverture de l'image de  $S$  soit plus grand que  $m$ . ■

Lorsque l'on reste dans une même classe hybride, les modules d'ouverture liés aux ensembles de Julia remplis ne changent pas car la conjugante à un  $\bar{\partial} = 0$  pp. :

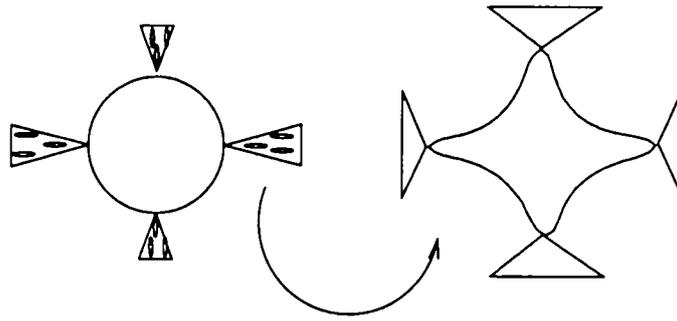


FIG. 5.7 - Changement de classe hybride.

**Lemme 5.6.4** Soient  $(U' \xrightarrow{f} U)$  et  $(V' \xrightarrow{g} V)$  deux applications à allure polynomiale hybridement équivalentes par une application  $K$ -qc  $\phi : U \rightarrow V$ . On suppose que leurs ensembles de Julia sont connexes et on considère un secteur invariant issu d'un point  $k$ -répulsif  $\alpha_f$  contenant une composante connexe  $L$  de  $K(P) \setminus \{\alpha_f\}$ . Notons  $m_f = \inf \text{mod} S$ , où l'infimum est pris sur les secteurs invariants contenant  $L$  et  $m_g = \inf \text{mod} T$ , où l'infimum est pris sur les secteurs invariants contenant  $\phi(L)$ . Alors  $m_f = m_g$ .

**DÉMONSTRATION.** On se place dans le tore quotient de  $\alpha_f$  et on se fixe  $\varepsilon > 0$ . Soit  $A$  un anneau non dégénéré contenant le projeté  $\mathcal{L}$  de  $L$  telle que  $\text{mod} \varphi(A) \leq m_g + \varepsilon$  et  $\text{Aire}(A \setminus \mathcal{L}) \leq \varepsilon$ . On note  $\Gamma$  la famille de courbe joignant les bords de  $A$ . Soit  $\rho(z)|dz|$  la métrique extrémale d'aire 1. On associe à  $\varphi(A)$  la métrique

$$\rho' = \frac{\rho}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \circ \varphi^{-1},$$

où les indices indiquent les dérivées partielles. Pour presque toutes courbes  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\int_{\varphi(\gamma)} \rho'(z)|dz| = \int_{\gamma} \frac{\|\nabla \varphi(z)\|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \rho(z)|dz| \geq \int_{\gamma} \rho(z)|dz|;$$

D'autre part,

$$\int_{\varphi A} \rho'^2(z) dx dy = \text{Aire}(\mathcal{L}, \rho) + \int_{A \setminus \mathcal{L}} \rho^2(z) \text{Jac} \varphi(z) dx dy \leq \text{Aire}(\mathcal{L}, \rho) + K \cdot \text{Aire}(A \setminus \mathcal{L}, \rho).$$

Par suite,

$$\text{Aire}(\varphi A, \rho') \leq \text{Aire}(A, \rho) + (K - 1)\varepsilon$$

et

$$\text{mod} \varphi(A) \geq \frac{\text{mod} A}{1 + (K - 1)\varepsilon}.$$

Il s'ensuit que

$$m_g + \varepsilon \geq \frac{m_f}{1 + (K - 1)\varepsilon}$$

et  $m_g \geq m_f$ . Par symétrie, on obtient l'égalité. ■

## 5.6.2 Démonstration du Théorème 2

Par le paragraphe ci-dessus, on peut supposer que l'on a déjà construit une silhouette polynomiale  $\hat{f} : \hat{U}' \rightarrow \hat{U}$  telle que  $P$  y figure de manière rigide par une application quasiconforme et telle que sa classe externe soit combinatoirement finie et combinatoirement équivalente à  $h$ . L'ensemble  $X_h$ , contient les arguments des points critiques, mais ceux qui correspondent aux points paraboliques de  $h$  sont encore répulsifs. D'après la Proposition 5.4.1, il existe un homéomorphisme  $\phi : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  tel que  $\phi \circ h_j = h \circ \phi$ , et on note  $\hat{\phi}$  l'application conforme telle que  $\hat{\phi} \circ \hat{f} = h_j \circ \hat{\phi}$ .

En suivant la procédure du Paragraphe 5.5 (cf Lemmes 5.5.2 et 5.5.3), on peut définir une extension de  $\phi$  sur un petit voisinage de  $\mathbf{S}^1$  telle que l'application soit quasiconforme sauf sur une réunion de "secteurs" aboutissant aux points qui deviendront paraboliques. Sur ces domaines, on considère la même extension que l'extension locale du Lemme 5.5.2. On note  $\mu$  la forme de Beltrami de cette extension ramenée par  $\hat{\phi}$  sur un voisinage de  $K_j$ . On la prolonge par zéro sur le reste. De plus, on définit  $F : \hat{U}' \rightarrow \hat{U}$  en remplaçant  $\hat{f}$  à l'extérieur de  $K_j$  par  $(\phi \circ \hat{\phi})^{-1} \circ h \circ (\phi \circ \hat{\phi})$  ( $h$  étant  $\mathbf{R}$ -analytique se prolonge en une application holomorphe sur un voisinage de  $\mathbf{S}^1$ ). La forme de Beltrami  $\mu$  est alors  $F$ -invariante par construction.

Afin de terminer la construction, on va s'appuyer sur une généralisation du théorème d'intégration des formes de Beltrami due à G. David ([Da]):

**Théorème 5.6.5 (G. David, [Da])** *Soit  $\mu$  une forme de Beltrami sur  $\mathbf{C}$ . S'il existe des constantes  $C, \alpha > 0$  et  $K_0 \geq 1$  telles que, pour  $K \geq K_0$ , on ait*

$$\text{Aire} \{z \in \mathbf{C}, K_\mu(z) > K\} < C \cdot \exp(-\alpha \cdot K),$$

*alors il existe un homéomorphisme ACL  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , unique à postcomposition près par une application conforme, tel que, pour tout  $0 < p < 2$ ,  $\varphi \in W_{loc}^{1,p}(\mathbf{C})$  et  $\mu_\varphi = \mu$  pp.*

Pour les propriétés des homéomorphismes ACL, on se reporter à [Ah1, LV].

D'après le Complément 5.5.2, on a obtenu, dans le domaine répulsif, une forme de Beltrami telle que sa dilatation  $K$  vérifie  $\text{Aire}(K \geq n) < C \cdot \exp(-n \log \lambda)$ . Comme les points que l'on cherche à rendre paraboliques sont répulsifs, il existe une conjugaison holomorphe avec le germe répulsif du modèle. Par suite, le lieu des points tels que  $K \asymp n$  se trouve dans un domaine fondamental pour l'action répulsive du point considéré, i.e. on a bien une décroissance exponentielle.

Comme les points répulsifs qui doivent devenir paraboliques ne sont pas accumulés par une orbite critique, il existe un voisinage  $U$  de ces cycles tel que, pour tout  $n \geq 1$ , les applications  $P^n : P^{-n}(U) \rightarrow U$  soient de degré uniformément majoré. Considérons un autre voisinage  $W \subset U$  et  $\Sigma$  la trace des secteurs dans  $W$ .

En utilisant  $\hat{f}$  comme conjugante, on définit des germes répulsifs en chaque préimage  $y$  des cycles. On note  $\Sigma_y$  les images réciproques de  $\Sigma$  issues de  $y$ . Par distorsion bornée, il existe  $c > 1$  et  $\lambda > 1$  tel que

$$\text{pour tout } y, \text{ Aire}(\{z \in \Sigma_y, K_\mu(z) > n\}) \leq c/\lambda^n.$$

Du coup,

$$\text{Aire} (\{z \in \mathbb{C}, K_\mu(z) > n\}) = \sum_{\mathbf{y}} \text{Aire} (\{z \in \Sigma_{\mathbf{y}}, K_\mu(z) > n\}) \leq c \left( \sum_{\mathbf{y}} \text{Aire} \Sigma_{\mathbf{y}} \right) / \lambda^n \leq C / \lambda^n.$$

Par le Théorème 5.6.5, il existe un homéomorphisme  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ACL,  $\varphi \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$ , tel que  $\mu_\varphi = \mu$  pp. Notons

$$\begin{cases} U' = \varphi(\hat{U}'); \\ U = \varphi(\hat{U}); \\ K = \varphi(K_j); \\ f = \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}. \end{cases}$$

Comme  $F^* \mu = \mu$  pp., on en déduit que  $\bar{\partial} f = 0$  pp.. Pour montrer que  $f$  est holomorphe, on considère un disque sur lequel  $F$  est injective. On normalise  $\varphi$  et  $\varphi \circ F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et on définit une extension de  $\varphi$  et de  $\varphi \circ F$ , par réflexion de manière à ce que ces applications soient localement quasiconformes à l'infini. Par suite, elles sont toutes les deux solutions de la même équation de Beltrami, qui vérifie les hypothèses du Théorème 5.6.5: l'unicité du Théorème montre que ces applications diffèrent par une application conforme, *i.e.*  $f$ .

De plus,  $P$  figure de manière rigide dans  $(U', U, f, K)$ , par construction. Sur  $U \setminus K$ , l'application  $\varphi \circ (\phi \circ \hat{\phi})^{-1}$  est holomorphe – pour les mêmes raisons que  $f$  — et conjugue  $f$  à  $h$ .

■



### III. Points paraboliques

Cette partie est consacrée à une étude plus approfondie des points paraboliques. L'accent est mis sur les propriétés de continuité, en contraste avec les études habituelles (voir *e.g.* [La2]).

Le premier chapitre analyse deux modèles locaux de déploiements paraboliques. Le principal résultat est la mise en évidence d'une persistance des cylindres de Fatou-Ecalle sur un voisinage du point parabolique, ainsi que des applications de cornes.

Les autres chapitres portent sur les propriétés globales de polynômes ayant un point parabolique. Ils constituent une approche de la conjecture suivante :

**Conjecture.** Soit  $P_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe, et soit  $p/q \in \mathbb{Q}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

▷ Si  $P_0$  admet un point attractif, alors il existe un chemin continu de polynômes  $(P_t)_{t \geq 0}$  de même degré tel que  $P_1$  ait un point parabolique de multiplicateur  $e^{2i\pi(p/q)}$  à la place de l'ancien point attractif de  $P_0$ , et la dynamique de  $P_0$  est semi-conjuguée à celle de  $P_1$  sur leurs ensembles de Julia.

▷ Réciproquement, si  $P_0$  admet un point parabolique de multiplicateur  $e^{2i\pi(p/q)}$ , alors il existe deux déploiements  $(P_t)_{t \geq 0}$  qui perturbent le point parabolique en une paire attractif/répulsif :

- l'un induit un point attractif de même période et un (éventuellement plusieurs) cycle(s)  $q$ -périodique(s) répulsif(s) ; la dynamique de  $P_1$  est alors semi-conjuguée à celle de  $P_0$  ;
- l'autre induit un point périodique répulsif de nombre de rotation combinatoire  $p/q$  et un (éventuellement plusieurs) cycle(s) attractif(s) ; les dynamiques de  $P_0$  et  $P_1$  sont conjuguées sur leurs ensembles de Julia (non remplis).

Les techniques développées (déformation par pincement et déploiement) permettent de montrer cette conjecture dans le cas de polynômes géométriquement finis. À l'aide du théorème de G. David, on peut effectuer une chirurgie qui remplace une paire attractif/répulsif par un point parabolique, si le point répulsif n'est pas accumulé par une orbite critique.



# Chapitre 6

## Etude locale

**Germe parabolique.** On considère un germe holomorphe  $g : U \rightarrow V$  de la forme  $g(z) = z + z^{\nu+1} + o(z^{\nu+1})$ ,  $\nu \geq 1$ .

On rappelle qu'un ouvert connexe  $\mathcal{P}_a \subset \Omega$  est un *pétale attractif* si  $0 \in \partial\mathcal{P}_a$ ,  $g(\overline{\mathcal{P}_a}) \subset \mathcal{P}_a \cup \{0\}$  et si  $\bigcap_{n \geq 0} g^n(\overline{\mathcal{P}_a}) = \{0\}$ . De même, un *pétale répulsif* est un ouvert connexe  $\mathcal{P}_r$  qui est un pétale attractif de  $g^{-1}$ .

D'après la Partie I, il existe  $\nu$  pétales attractifs disjoints et  $\nu$  pétales répulsifs disjoints tels que leur réunion avec 0 est un voisinage de l'origine. Les pétales attractifs et répulsifs sont alternés, et un pétale ne peut intersecter au plus que deux pétales de type opposé. De plus, sur chaque pétale  $\mathcal{P}$ , l'application  $g$  est conjuguée à la translation  $z \mapsto z + 1$ . La conjuguante est appelée *coordonnée de Fatou*.

A chaque pétale, on associe la surface de Riemann  $\mathcal{P}/(g) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

On considère aussi les *applications de cornes (ou d'Ecalles)*, définies comme suit : pour certains points  $z$  de  $\mathcal{P}_r$ , il existe un itéré  $g^n$  tel que  $g^n(z) \in \mathcal{P}_a$ . Ceci définit, en passant au quotient, des applications conformes définies au voisinage des deux bouts des cylindres :  $E : \mathcal{P}_r/(g) \rightarrow \mathcal{P}_a/(g)$ .

Dans la suite, on s'intéresse à des perturbations de tels germes et on cherche à mettre en évidence une continuité dans la dynamique.

### 6.1 Déploiement central

On considère un déploiement de la forme  $f_\lambda : z \mapsto (1 - \lambda)z + z^{q+1} + h(z, \lambda)$  au voisinage de zéro de  $f_0$ , où  $h(z, \lambda) = O(z^{q+2})$  est holomorphe et  $\lambda$  est dans un voisinage  $\Lambda$  de zéro. On note  $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda, |\lambda| < \varepsilon \text{ et } \arg \lambda \text{ proche de } \frac{\pi}{2}\}$ .

0 est un point fixe parabolique de  $f_0$ .

**Théorème 6.1.1** *Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit et  $\lambda \in \Lambda_1$ ,  $f_\lambda$  a une dynamique de batteur à œufs sur  $q$  ouverts disjoints  $V_i$  tels que  $0 \in \bigcap_{1 \leq i \leq q} \partial V_i$ , ce qui se traduit par :*

- (i) l'éclatement du point fixe parabolique en  $(q + 1)$  points fixes  $A_\lambda^i$  et 0 ;
- (ii) la présence de cylindres de Fatou-Ecalle d'extrémités 0 et  $A_\lambda^i$  tels que  $V_i/f_\lambda \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  ;
- (iii) et la persistance des applications de cornes.

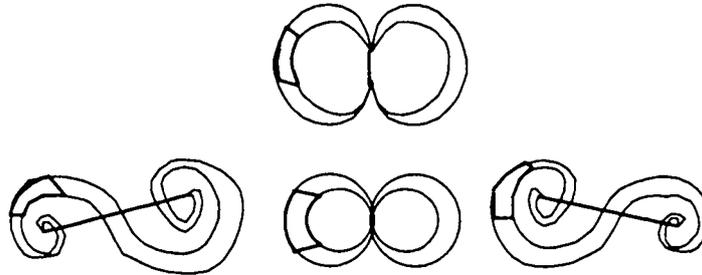


FIG. 6.1 - Implosion parabolique.

DÉMONSTRATION. On considère un secteur ouvert  $U$  de rayon  $\eta$  et d'angle  $1/q$  tour.

Par le changement de variable  $\zeta = \alpha(z) = \frac{-1}{qz^q}$  défini de  $U$  sur  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$ , on conjugue  $f_\lambda$  à  $F_\mu : \zeta \mapsto (1 + \mu)\zeta + 1 + h_1(\zeta, \mu)$  où  $\frac{1}{(1-\lambda)^q} = 1 + \mu$  et  $h_1(\zeta, \mu) = O(1/\zeta^{1/q}, \mu)$ .

- L'application  $F_\mu$  admet un point fixe  $B_\mu \sim \frac{-1}{\mu}$ .
- L'orbite de  $\zeta \in \Omega$  tourne autour de  $B_\mu$  dans le sens positif, car  $0 < \text{Im} \frac{F_\mu(\zeta) - B_\mu}{\zeta - B_\mu}$ .

**Proposition 6.1.2** Soient  $L$  et  $L'$  deux demi-droites issues de  $B_\mu$  contenues dans  $\Omega$ . On suppose que l'angle définissant la direction de  $L$  est plus petite que celui de  $L'$ , et que le secteur orienté  $\Omega_1 = (B_\mu, L, F_\mu(L'))$  est contenu dans  $\Omega$ ,

alors,  $\Omega_1/F_\mu \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

DÉMONSTRATION. On conjugue  $F_\mu$  par  $\beta_\mu : \zeta \mapsto w = \frac{\log(\zeta - B) - \log B}{\log(1 + \mu)}$ .

Cette application dépend analytiquement de  $\mu$ , et, en choisissant correctement une section du  $\log$ , les applications  $\beta_\mu$  tendent vers l'identité quand  $\mu$  tend vers zéro.

Par l'application  $\beta_\mu$ ,  $\Omega_1$  devient une bande quasiment verticale  $B(\mathcal{L}, \Phi_\mu(\mathcal{L}'))$  et  $F_\mu$  devient

$$\Phi_\mu : w \mapsto 1 + w + h_2(w, \mu)$$

où  $h_2$  et  $\frac{\partial h_2}{\partial w}$  tendent vers 0 quand  $\eta$  et  $\varepsilon$  tendent vers 0.

Pour  $w \in \mathcal{L} = \beta(L)$ , on définit  $\chi_w : [w, w + 1] \rightarrow [w, \Phi(w)]$  affine, ce qui induit un homéomorphisme  $\mathcal{C}^1 \chi : B(\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}')) \rightarrow B(\mathcal{L}, \Phi_\mu(\mathcal{L}'))$  ( $\tau$  désigne la translation de vecteur 1); en effet, pour  $w, w' \in \mathcal{L}$ , si  $\text{Im}(w - w') > 0$  alors  $\text{Im} \frac{\Phi(w) - \Phi(w')}{\Phi(w) - w} > 0$ .

L'application  $\chi$  est, de plus, quasiconforme car

$$\begin{cases} \chi = id + o(1), \\ D\chi = id + o(1). \end{cases}$$

Comme  $B(\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}'))/(\tau) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ,  $B(\mathcal{L}, \Phi_\mu(\mathcal{L}'))/(\Phi_\mu) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  d'après l'inégalité de Grötzsch.

Dans la carte  $\beta_\mu$ , une des applications de cornes est bien définie pour  $Im(z) \gg 1$ . ■

**Remarque.** Même si on ne reste pas dans le secteur, on peut toujours définir des cylindres dépendant continûment du paramètre (voir proposition suivante).

Dans la suite, on prend  $q = 1$ , i.e.  $f_\lambda(z) = (1 - \lambda)z + z^2 + h(z, \lambda)$  au voisinage de zéro de  $f_0$ , où  $h(z, \lambda) = O(z^3)$  est holomorphe et  $\lambda$  est appartient à un voisinage  $\Lambda$  de zéro.

**Définition.** Pour  $\lambda \in \Lambda_1$ , un point  $z$  est attiré par le batteur s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $f^{n_0}(z)$  soit dans le domaine de définition des cylindres  $\mathcal{C}_\lambda$ . Ce point s'échappe s'il existe  $n \geq n_0$  tel que  $f^n(z)$  n'est pas dans le domaine de définition des applications de cornes  $E_\lambda$ .

**Proposition 6.1.3** Soit  $\lambda_0 \in \Lambda_1$ . Soient  $\mathcal{C}$  un cylindre associé à cette perturbation, et  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\hat{\Lambda}$  un secteur issu de l'origine contenant  $\Lambda \cap \bar{\mathbb{H}}$ . Alors il existe un mouvement holomorphe  $\iota : \hat{\Lambda} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $\iota(\lambda, \mathcal{D}) = \mathcal{D}_\lambda$  soit un domaine fondamental d'un cylindre  $\mathcal{D}_\lambda/(f_\lambda) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

De plus, quand  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{D}_\lambda$  tend vers un domaine fondamental d'un pétale de  $f_0$  pour la métrique de Hausdorff sur les compacts.

**Remarque.** Le procédé employé pour obtenir ce mouvement holomorphe ne permet pas de le prolonger à  $i\mathbb{R}_-$ .

**DÉMONSTRATION.** D'après la preuve de la Proposition 6.1.2, il existe une carte multivaluée dans laquelle  $f_\lambda$  s'écrit  $\Phi_\mu(w) = 1 + w + h_2(w, \mu)$ . Le domaine de définition est le plan privé d'un voisinage  $D$  de l'origine et de ses translatés par  $w \mapsto w + 2i\pi/\log(1 + \mu)$ , dont on note  $\hat{D}_\lambda$  la réunion.

Pour  $\lambda_0$ , on définit le domaine  $\mathcal{D}$  en prenant l'ouvert bordé par une droite verticale  $\mathcal{L}_{\lambda_0}$  et son image (cf Proposition 6.1.2). L'ouvert  $\hat{D}_{\lambda_0}$  est alors contenu dans une bande horizontale  $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ . Lorsque  $\lambda$  tourne autour de l'origine, la bande  $\mathcal{B}_\lambda$  contenant  $\hat{D}_\lambda$  tourne autour de l'origine jusqu'à devenir verticale, lorsque  $\lambda$  est réel, non nul.

On peut suivre  $\mathcal{D}_{\lambda_0}$  tant que  $Im\lambda \geq 0$ , en suivant  $\mathcal{L}_\lambda$ . Quand  $\lambda \neq 0$  est réel,  $\mathcal{D}_\lambda$  est un domaine qui "traverse"  $\mathcal{B}_\lambda$ , allant de droite à gauche ou de gauche à droite. Afin de garder des domaines fondamentaux, il faut que  $\mathcal{L}_\lambda$  et  $\phi_\mu(\mathcal{L}_\lambda)$  soient disjoints de  $\hat{D}_\lambda$ , i.e. la partie imaginaire des points de  $\mathcal{L}_\lambda$  doit donner une relation d'ordre totale, et qu'il n'y ait pas d'identification entre points du domaine.

À partir d'un certain moment, les domaines spiralent autour des points fixes attractif et répulsif.

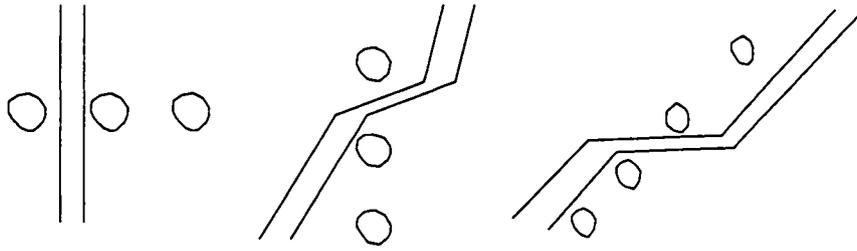


FIG. 6.2 - Mouvement des cylindres.

Quand  $\lambda$  continue son tour autour de l'origine,  $\mathcal{B}_\lambda$  continue de tourner et la pente de  $\mathcal{L}_\lambda$  tend vers zéro, ce qui rend impossible le prolongement de notre mouvement holomorphe.

Quand  $\lambda \rightarrow 0$ , la carte  $\beta_\mu$  tend vers l'identité, et  $\Phi_\mu$  tend vers le conjugué de  $f_0$  par  $z \mapsto -1/z$ . ■

**Corollaire 6.1.4** Soit  $z : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe telle que  $z(0) \in \mathcal{P}_a$ . Alors il existe un secteur  $\Lambda_1' \subset \Lambda_1$ , issu de zéro, tel que,  $\forall \lambda \in \Lambda_1'$ ,  $z(\lambda)$  est attiré par le batteur.

**DÉMONSTRATION.** On note  $\Lambda_1' = \{\lambda \in \Lambda_1, z(\lambda) \in \mathcal{P}_a\}$ : c'est un secteur. D'après le Théorème 6.1.1,  $f_\lambda$  est conjugué à la translation de vecteur 1 sur  $\mathcal{P}_a$ . Comme  $z(\lambda) \in \mathcal{P}_a$ , il passe dans le batteur. ■

**Remarque.** Si  $z(0)$  n'est pas dans le pétale répulsif, alors on peut s'arranger pour que  $z(\lambda)$  s'échappe, quitte à rétrécir  $\Lambda_1'$ .

**Proposition 6.1.5** Soit  $\mathcal{D}$  un quadrilatère non dégénéré inclus dans un domaine fondamental du pétale répulsif de  $f_0$ , dont deux côtés opposés  $\gamma$  et  $\gamma'$  vérifient  $f_0(\gamma') = \gamma$ . On suppose en outre qu'aucun point de  $\mathcal{D}$  n'est attiré par l'origine, autrement dit, les points s'échappent.

Alors il existe un mouvement holomorphe  $\iota : \Lambda \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $f_\lambda(\iota_\lambda(\gamma')) = \iota_\lambda(\gamma)$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\lambda \in \Lambda$ , on pose  $\gamma_{\lambda'} = f_\lambda^{-1}(\gamma)$ . Comme  $\mathcal{D}$  n'est pas dans l'intersection des pétales,  $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$ . Par suite, il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  tel que, si  $|\lambda| < \lambda_0$ , alors  $\gamma \cap \gamma_{\lambda'} = \emptyset$ .

Donc  $\iota : \Lambda \times (\gamma \cup \gamma_{\lambda'}) \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\begin{cases} \text{si } z \in \gamma, & \iota_\lambda(z) = z \text{ et} \\ \text{si } z \in \gamma', & \iota_\lambda(z) = f_\lambda^{-1} \circ f_0(z) \end{cases}$  est un mouvement holomorphe qu'on peut prolonger à  $\mathcal{D}$  (théorème de Ślodkowski). ■

## 6.2 Déploiement parabolique

On considère le déploiement de  $g_0$  suivant :

$$g_\lambda : z \mapsto z + \lambda z^2 + z^3 + h(z, \lambda).$$

Le paramètre  $\lambda$  appartient à un voisinage  $\Lambda$  de zéro et  $h(z, \lambda) = O(z^4\lambda)$ .

Lorsque  $\lambda = 0$ , on obtient un polynôme cubique avec, au voisinage de l'origine, deux pétales attractifs. Le déploiement considéré n'éclate pas totalement le point parabolique : 0 reste parabolique, mais perd un pétale. Cependant, les propriétés de continuité mises en évidence dans la perturbation précédente restent globalement les mêmes.

Les points fixes de  $g_\lambda$  sont l'origine (parabolique) et  $\alpha_\lambda = -\lambda + O(\lambda^2)$  de multiplicateur  $1 + \lambda^2 + O(\lambda^3)$ .

On s'intéresse plus particulièrement à trois cas :

- $\lambda$  est dans un cône centré sur l'axe imaginaire, i.e.  $\alpha_\lambda$  est attractif ;
- $\lambda$  est dans un cône centré sur l'axe réel, i.e.  $\alpha_\lambda$  est répulsif ;
- $\lambda$  est dans un cône centré sur les premières bissectrices, et l'on verra qu'on aura affaire à une dynamique de batteur à œufs.

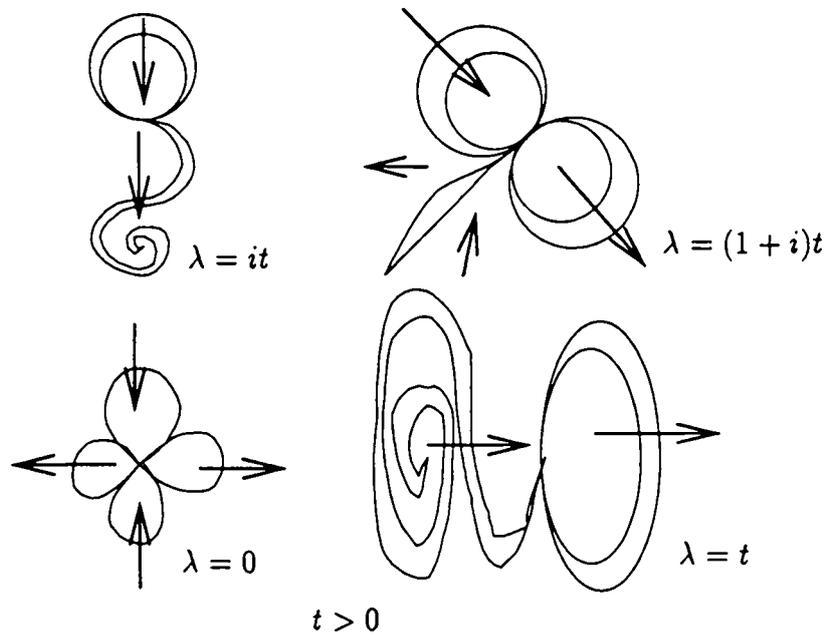


FIG. 6.3 - L'origine reste parabolique.

### Premier cas.

On considère un premier changement de variable  $\zeta = -1/(\lambda z)$  qui conjugue  $g_\lambda$  à  $F_\lambda(\zeta) = \zeta + 1 + (1 - 1/(2\lambda^2)) \cdot 1/\zeta + h_1(\zeta, \lambda)$  avec  $h_1(\zeta, \lambda) = O(1/\zeta^2)$ . Au voisinage de l'infini,

on a une conjugaison avec une translation induisant une surface quotient isomorphe à  $\mathbf{H}/\mathbf{Z}$ . Le second point fixe est  $p_\lambda \sim 1/\lambda$ .

Par un nouveau changement de variable en  $\xi = \frac{\log(\zeta - p_\lambda)}{\log(1 + \lambda^2)}$ , on montre de même que  $g_\lambda$  est conjuguée à une translation au voisinage de  $\xi(p_\lambda)$ . Choisir un domaine fondamental pour avoir un cylindre bi-infini ( $\sim \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ ) implique l'introduction de spirales logarithmiques au voisinage du point attractif.

Deuxième cas. En passant à  $g_\lambda^{-1}$ , on se ramène au cas précédent.

Troisième cas.

Pour  $z$  dans le rectangle défini par sa diagonale  $[\alpha_\lambda, 0]$ , on trouve

$$\operatorname{Im} \frac{g_\lambda(z) - \alpha_\lambda}{z - \alpha_\lambda} > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \frac{g_\lambda(z)}{z} < 0,$$

*i.e.* les points passent au travers du segment avec leur partie réelle allant en décroissant.

En effet, dans la coordonnée

$$w = \frac{\log \frac{\alpha_\lambda - z}{\alpha_\lambda}}{\log(1 + 2\lambda^2)},$$

$g_\lambda$  est conjugué à  $w \mapsto w + 1 + O(\lambda)$  sur un demi-plan  $\operatorname{Im} z \geq C > 0$ .

Au voisinage de l'origine,  $z \mapsto w(z)$  est univalente. Il s'ensuit que  $g_\lambda$  est localement conjugué à  $w \mapsto w + (\lambda/w'(0))w^2 + O(w^3)$ . Puisque

$$\lambda/w'(0) \sim 2\lambda^4 < 0,$$

les axes sont à peu près horizontaux, orientés négativement. Par suite, la dynamique au voisinage de  $\alpha_\lambda$  est une "extension" de l'application de corne de l'origine.

On en déduit que l'on peut définir aussi des cylindres bi-infinis, quotients d'une bande joignant  $\alpha_\lambda$  à l'origine par  $g_\lambda$ .

# Chapitre 7

## Pincement de polynômes

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  hyperbolique ([DH1]), *i.e.* tous ses points critiques sont attirés par un cycle attractif. On se propose de définir une *déformation par pincement* de ce polynôme afin de rendre un point attractif parabolique (voir aussi [Mk1-3], [Pi]). Cette déformation admet une limite  $f_\infty$  polynomiale qui est semi-conjugée à  $f$ . Ce type de déformation a tout d'abord été introduit par P. Makienko pour montrer, par l'absurde, que des composantes stables de fractions rationnelles hyperboliques de degré fixé n'étaient pas compactes.

La déformation par pincement consiste à déformer un tore attractif et un tore répulsif pour qu'ils deviennent des cylindres  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Pour faire cela, on *pince* une courbe fermée simple non homotopiquement triviale sur les tores. En choisissant convenablement une normalisation, on montre que ces points sont attirés l'un vers l'autre et on finit par obtenir un point parabolique.

Dans la suite, il sera commode de considérer un polynôme avec un ensemble de Julia connexe.

Le plan des prochaines sections est le suivant :

- on définit la déformation par pincement localement et on montre que notre schéma fonctionne sur un modèle ;
- on définit la déformation par pincement dans le cas général en s'inspirant de celle de P. Makienko et en utilisant la construction *d'étoiles* dans un bassin attractif due à C. Petersen ([Pe3]) ;
- on montre que pour les polynômes hyperboliques, les limites possibles du pincement sont bien contrôlées par le polynôme de départ ; on utilise à cet effet d'une part, que les bords des composantes connexes bornées de l'ensemble de Fatou sont des quasicerclles, et d'autre part, un modèle due à C.T. McMullen qui estime le module de quadrilatères indépendamment de certaines déformations quasiconformes ;
- et enfin, dans la dernière section, on montre le théorème suivant, qui étend les résultats obtenus par pincement :

**Théorème 3** *Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  et d'ensemble de Julia connexe, ayant un point fixe attractif et un point fixe répulsif  $\beta$  dans le bord de son bassin immédiat, accessible depuis ce bassin, et tel que  $\beta$  n'est dans l'ensemble  $\omega$ -limite d'aucun point cri-*

tique. Alors il existe un polynôme  $Q$  de même degré et un homéomorphisme  $\chi : J_P \rightarrow J_Q$  qui conjugue  $P$  à  $Q$  et tel que  $\beta$  soit devenu parabolique, le bassin de  $\alpha$  étant devenu le bassin de  $\beta$ .

Sa démonstration repose d'une part, sur une comparaison entre les dynamiques induites par des points hyperboliques (attractifs et répulsifs) et par des points paraboliques, et d'autre part, sur un théorème d'analyse de G. David d'intégration de formes de Beltrami (voir [Da]).

## 7.1 Pincement d'une paire attractif/répulsif

Dans ce paragraphe, on montre comment, à partir de deux points fixes attractif et répulsif respectivement, on peut définir une déformation à l'aide de formes de Beltrami qui, à la limite, donne un germe parabolique.

**Remarque.** Dans la suite, toutes les figures sont dessinées dans une carte dans laquelle se trouvent les deux points fixes.

On définit un modèle de la manière suivante.

Notons les bandes

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \mathbf{R} \times ] - \pi, \pi[; \\ \mathcal{B}_0 = \mathbf{R} \times ] - \pi/2, \pi/2[; \\ \mathcal{B}_+ = \mathbf{R} \times ] \pi/2, \pi[; \\ \mathcal{B}_- = \mathbf{R} \times ] - \pi, -\pi/2[. \end{cases}$$

On définit alors l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbf{C} \\ x + iy \in \mathcal{B}_0 &\mapsto x + iy \\ x + iy \in \mathcal{B}_+ &\mapsto x + i(\pi/2 + \operatorname{tg}(y - \pi/2)) \\ x + iy \in \mathcal{B}_- &\mapsto x + i(-\pi/2 + \operatorname{tg}(y + \pi/2)). \end{aligned}$$

Cette application est localement quasiconforme et

$$\begin{cases} \mu_{\mathfrak{N}}(x + iy) = -\operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2)/(2 + \operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2)) \\ K_{\mathfrak{N}}(x + iy) = 1 + \operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2) \end{cases}$$

sur  $\mathcal{B}_{\pm}$ . Soit  $\sigma > 0$ ; on note  $\tau : z \mapsto z + \sigma$ .

On considère alors  $\exp : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  et on conjugue  $\tau$  par  $\exp$  afin d'obtenir  $f(w) = e^{\sigma} w$  (modèle du pincement). Notons  $\gamma = \exp(\mathbf{R} \times \{\pi\}) = \mathbf{R}_-$ .

**Définition du pincement.** On définit d'abord sur  $\mathcal{B}$  la famille de formes de Beltrami  $(\nu_t)_{t \geq 0}$  suivante:

- si  $|\operatorname{Im} z| < 2 \operatorname{arctg} t$ , on pose  $\nu_t(z) = \mu_{\mathfrak{N}}(z)$ ;
- si  $\pi > |\operatorname{Im} z| \geq 2 \operatorname{arctg} t$ , on pose  $\nu_t(z) = \mu_{\mathfrak{N}}(2i \operatorname{arctg} t)$ .

De façon équivalente, on définit un champ d'ellipses constant sur les horizontales, tel que le grand axe de chaque ellipse soit horizontale, le petit verticale, et leur rapport soit  $K_{\mathfrak{N}}(z)$  sur  $(|\operatorname{Im} z| \leq 2 \operatorname{arctg} t)$  et sinon, constant à  $K_{\mathfrak{N}}(2i \operatorname{arctg} t)$ .

Cette famille est invariante par translations réelles, et définit un chemin dans l'espace de Teichmüller réduit de l'anneau  $A = \mathcal{B}/\tau$ : soit  $\bar{N}_t : A \rightarrow A_t = \bar{N}_t(A)$  une famille continue de solutions de l'équation de Beltrami. Le module de  $A_t$  tend vers l'infini avec  $t$ , et  $A_t$  tend vers  $\mathbb{C}/\sigma\mathbb{Z}$  car une solution de  $\nu_t$  est

$$\begin{aligned}
 N_t : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{C} \\
 z &\mapsto N(z) && \text{si } |\operatorname{Im}z| < 2\arctg t, \\
 z &\mapsto \operatorname{Re}z + N(2i\arctg t) + i.K_N(2i\arctg t).(|\operatorname{Im}z| - 2\arctg t) && \text{si } \pi > |\operatorname{Im}z| \geq 2\arctg t.
 \end{aligned}$$

De plus, ces solutions commutent avec  $\tau$ .

On définit  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  en transportant par exp la famille  $(\nu_t)_{t \geq 0}$ .

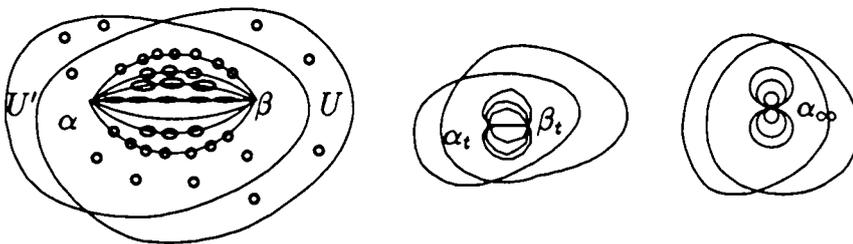


FIG. 7.1 - Un pincement.

Soit  $\phi_t$  la solution de l'équation de Beltrami de  $\mu_t$  qui fixe le triplet  $(\infty, 1, e^\sigma)$ . Soit  $f_t$  le conjugué de  $f$  par  $\phi_t$ . La famille  $(f_t)_{t \geq 0}$  représente un pincement du germe  $f$ .

**Convergence du pincement.** Le but de cette fin de paragraphe est de montrer la proposition suivante :

**Proposition 7.1.1** *Les familles  $(f_t)_{t \geq 0}$  et  $(\phi_t)_{t \geq 0}$  admettent des limites  $f_\infty$  et  $\phi_\infty$  pour la convergence de la sphère munie de la métrique sphérique, qui vérifient les propriétés suivantes (voir Figure 7.1) :*

- $f_\infty(z) = z + e^\sigma - 1$  est une translation,
- $\phi_\infty$  est localement quasiconforme de  $\bar{\mathcal{C}} \setminus \gamma$  sur  $\mathbb{C}$ , et  $\phi_\infty(\gamma) = \{\infty\}$ ,
- $f_\infty \circ \phi_\infty = \phi_\infty \circ f$ .

La Figure 7.1 décrit le pincement si on suppose que e.g.  $\alpha_t$  est le point infini et  $\beta$  l'autre point fixe. Les domaines  $U'$  et  $U$  sont des voisinages de ces deux points et  $f(U') = U$ .

D'après le modèle, le multiplicateur de  $\infty$  pour  $f_t$  tend vers 1, donc il existe une suite extraite  $(f_n)$  qui converge vers une translation  $f_\infty$ , i.e.  $f_\infty(z) = z + (e^\sigma - 1)$  car  $f_\infty(1) = e^\sigma$ .

On considère une exhaustion de  $\bar{\mathcal{C}} \setminus \gamma$  par des compacts. Sur chaque compact, les  $\phi_t$  sont uniformément quasiconformes et normalisées, donc, par un procédé diagonal, on peut extraire une suite qui converge sur tout compact de  $\bar{\mathcal{C}} \setminus \gamma$  vers une application injective localement quasiconforme  $\phi_\infty$  qui conjugue  $f$  à  $f_\infty$ .

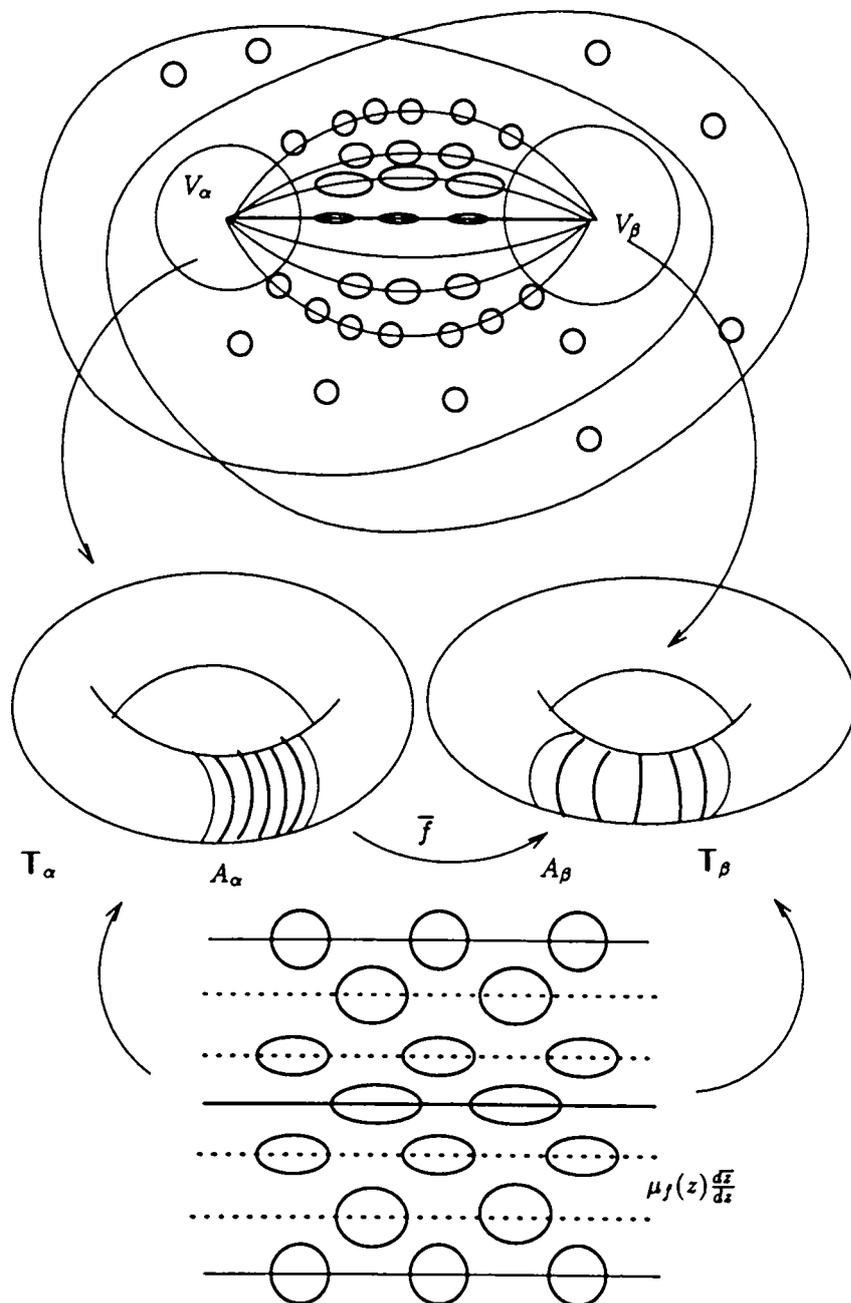


FIG. 7.2 - Définition d'un pincement.

Afin de montrer que le diamètre de  $\phi_t(\gamma)$  tend vers zéro, on se place dans  $\mathcal{B}$ . Notons  $Q = ]-1, 1[ \times ]-\pi/4, \pi/4[$  et considérons  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \setminus Q$ .

**Lemme 7.1.2**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod}_{\nu_t} \mathcal{A} = \infty.$$

**DÉMONSTRATION.** En normalisant les  $\mathcal{N}_t$  par des homothéties  $h_t$  centrées à l'origine pour que  $h_t \circ \mathcal{N}_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , il est clair que le diamètre de  $Q_t = h_t \circ \mathcal{N}_t(Q)$  tend vers zéro avec  $t : \text{mod } \mathcal{N}_t(\mathcal{A}) \rightarrow \infty$ . ■

**DÉMONSTRATION DE 7.1.1.** D'après le Lemme 7.1.2, le module de  $\phi_t(\exp(\mathcal{A}))$  tend vers l'infini, car  $\varphi_t \circ \exp \circ \mathcal{N}_t^{-1} : \mathcal{N}_t(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  est conforme; donc les  $\phi_t$  sont équicontinues et tendent vers une application continue non constante  $\phi_\infty$ , et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{diam } \phi_t(\gamma) = 0$ . Cette application est injective sur le complémentaire car on peut séparer toute paire de points par un anneau disjoint de  $\gamma$  qui aura un module minoré indépendamment de la déformation.

De plus, on a montré que de toute suite  $t_n$ , on peut extraire une sous-suite  $(t_{n_k})$  telle que :

- $f_{t_{n_k}}$  a pour limite  $f_\infty$  ;
- $\phi_{t_{n_k}}$  a une limite  $\phi_\infty$  ;
- et  $\phi_\infty \circ f = f_\infty \circ \phi_\infty$ .

La dilatation de  $\phi_t$  vaut  $K_t = t^2/4 + o(1)$  pour  $t \gg 1$ . Pour tout  $s > 0$ , les applications  $\phi_{t_n+s} \circ \phi_{t_n}^{-1}$  sont  $K_{t_n+s}/K_{t_n}$ -quasiconformes, donc équicontinues (car ce rapport tend vers 1, à  $s$  fixé). Tout point d'accumulation de cette suite est donc holomorphe et fixe trois points: cette limite existe et est donc l'identité. Par suite, on peut rajouter des termes dans la suite de manière à ce que la différence  $t_{n+1} - t_n$  soit bornée: si  $\phi_{s_n}$  est une autre suite, on suppose que pour tout  $n$ ,  $t_n \leq s_n < t_{n+1}$ . D'après ce qui précède,  $\phi_{t_n}^{-1} \circ \phi_{s_n} \rightarrow Id$  donc  $\phi_{s_n} \rightarrow \phi_\infty$ . ■

**Remarque.** Le même type de construction peut se faire en remplaçant l'un des points hyperboliques (ou les deux) par des points paraboliques, de manière à garder un arc invariant les joignant. Il est intéressant de voir que la convergence est en norme continue, et non  $C^1$ . En effet, considérons un germe du type

$$z \mapsto z + ibz^2 + z^3.$$

Lorsque  $b \rightarrow 0$ ,  $b > 0$ , les orbites "issues" de l'origine partent toujours tangentiellement à l'axe réel, mais lorsque  $b = 0$ , ces orbites partent verticalement (voir ci-dessous).

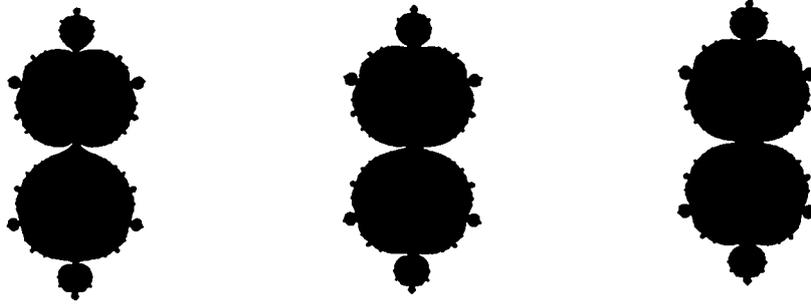


Figure 7 *Pincement en un point parabolique.*

## 7.2 Déformation globale

### 7.2.1 Définition générale du pincement

Soit  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . On suppose qu'il existe un point périodique  $\alpha$  attractif, non critique. On se propose dans ce paragraphe de définir une déformation par pincement  $f$  liée au point  $\alpha$ . *Grosso modo*, le pincement consiste à produire une collision entre points périodiques afin d'obtenir un point parabolique. Ensuite, on posera quelques questions au sujet de cette déformation, et on s'attachera à donner des éléments de réponse. Commençons par un modèle.

**Modèle floral  $p/q$ .** Considérons notre translation  $\tau : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ . On conjugue  $\tau$  par

$$z \mapsto w = \frac{e^z}{e^z + 1}$$

afin d'obtenir une application de Möbius  $w \mapsto \hat{f}(w)$  qui fixe 0 et 1. Pour tout  $q \geq 1$  (entier) et tout  $(p/q) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $p \wedge q = 1$ , on peut relever de manière unique  $\hat{f}$  au voisinage de  $\bar{\mathbb{D}}$  par l'application  $\zeta \mapsto w = \zeta^q$  en  $\hat{f}_{p/q}$  de manière à ce que  $\hat{f}_{p/q}(1) = e^{2i\pi(p/q)}$ . L'origine a pour multiplicateur  $e^{\sigma/q} \cdot e^{2i\pi(p/q)}$  et 1 devient un cycle  $q$ -périodique de nombre de rotation  $p/q$  et de multiplicateur  $e^{-q\sigma}$ . Quitte à renverser les rôles de  $\pm\infty \subset \mathcal{B}$ , l'origine est attractive ou répulsive.

On peut alors définir la déformation par pincement de  $\hat{f}_{(p/q)}$  en transportant la famille  $\nu_i$  du premier paragraphe.

**Étoiles d'un bassin attractif.** Soit  $\Omega$  un domaine attractif simplement connexe d'une fraction rationnelle  $f$ . Nous donnons ici une description plutôt sommaire de la construction de ces étoiles. Pour des justifications, nous invitons le lecteur à se reporter à [Pe3].

Notons  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  sa représentation conforme qui envoie le point attractif  $\alpha$  (de multiplicateur  $\lambda$ ) sur l'origine et  $\mathcal{B}$  le produit de Blaschke conjugué à  $f$ . Si  $\beta \in \mathbb{S}^1$  est

un point  $q$ -périodique de  $B$ , on dit qu'il a pour *nombre de rotation de Poincaré*  $p/q$  si la restriction de  $B$  à ce cycle peut être prolongée en un homéomorphisme du cercle de nombre de rotation  $p/q$  (ceci n'est pas toujours le cas : voir [BS]). Pour chaque nombre de rotation rationnel, il existe au moins un cycle répulsif ayant ce nombre de rotation (voir entre autres [BS, Go]).

Soit  $\kappa : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  l'application linéarisante de Königs qui semi-conjuge  $B$  à  $z \mapsto \lambda z$ . Les points critiques de  $\kappa$  sont les points précritiques de  $B$ . Si  $L$  est une détermination de  $\log \lambda$ , l'application  $\exp$  est un revêtement de  $\mathbf{C}^*$  et notre application linéaire se relève en la translation de vecteur  $L$ . Les points critiques de  $\kappa$  différents de l'origine se relèvent en un demi réseau

$$\Lambda = \{-nL + 2im\pi + \omega_j, (n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}\}$$

où les  $\omega_j$  (en nombre fini) sont des logarithmes des points critiques de  $B$  qui ont une orbite infinie (dans  $\mathbf{D}$ ).

Considérons les droites passant par  $\Lambda$  et parallèles à  $qL - 2ip\pi$ . Par  $\exp$ , elles sont transformées en  $kq (< \infty)$  spirales ou droites disjointes joignant 0 à l'infini et formant  $k$  cycles par la multiplication par  $\lambda$ . Ces courbes contiennent donc l'image de tous les points précritiques de  $B$  qui ne tombent pas sur l'origine. Notons  $\tilde{U}_j$  le complémentaire de ces courbes dans  $\mathbf{C}^*$  et  $\hat{U}_j$  des représentants dans le plan (par  $\exp$ ). Ceux-ci sont des bandes invariantes par la translation de vecteur  $qL - 2ip\pi$ . On considère enfin  $\tilde{\gamma}_j$  les droites "centrales" de  $\tilde{U}_j$ . Posons  $\hat{\gamma}_j = \exp \tilde{\gamma}_j$ . Ces  $kq$  courbes se regroupent en  $k$  cycles. Par construction, ces cycles ont pour nombre de rotation  $p/q$ .

Nous pouvons enfin définir l'étoile associée à  $(B, L)$ . On note  $U_j^B$  l'unique composante connexe de  $\kappa^{-1}(\hat{U}_j)$  qui contient l'origine dans sa fermeture, et  $\gamma_j^B$  les courbes leur correspondant.

**Définitions.** La  $(L, p/q)$  étoile  $\mathcal{E}_{L,p/q,B}$  associée à  $B$  est l'intérieur de

$$\bigcup_{0 \leq j < kq} \overline{U}_j^B$$

L'ouvert  $U_j^B$  est la  $j$ -ème bande et la courbe  $\gamma_j^B$  sa vertèbre.

Par construction, cette étoile est un voisinage de l'origine, sur lequel  $B$  est univalente ; de plus, elle est invariante par  $B$  ( $B(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ ). Les extrémités des vertèbres sur le cercle unité forment des cycles de nombre de rotation  $p/q$ .

**Remarque.** En degré deux, il n'existe qu'un seul cycle sur le cercle unité de nombre de rotation de Poincaré donné ; en revanche, dès le degré trois, L. Goldberg ([Go]) montre qu'il y en a toujours plus. Il n'est pas clair que l'on puisse définir une étoile par cycle.

Revenons maintenant à notre composante attractive initiale par  $\varphi^{-1}$  :

**Définitions.** La  $(L, p/q)$  étoile  $\mathcal{E}_{L,p/q,f}$  associée à  $(f, \alpha)$  est

$$\mathcal{E}_{L,p/q,f} = \varphi^{-1} \mathcal{E}_{L,p/q,B}$$

On note aussi  $U_j = \varphi^{-1} U_j^B$  la  $j$ -ème bande et  $\gamma_j = \varphi^{-1} \gamma_j^B$  sa vertèbre.

En revanche, il n'est plus évident que les vertèbres aboutissent en des points périodiques. On définit alors le bout d'une vertèbre par  $\bar{U}_j \setminus \Omega$ . En ce qui nous concerne, on a le lemme suivant :

**Lemme 7.2.1 (C. Petersen)** *Si  $f^q$  est définie et holomorphe au voisinage d'un point " $x_j$ " de chaque bout de l'étoile alors ces  $x_j$  sont ces bouts, et forment des cycles. La période de ces points est ou bien 1, ou bien  $q$ .*

*En particulier, si  $f$  est un polynôme et  $\Omega$  est bornée alors il s'agit de cycles  $q$ -périodiques de nombre de rotation  $p/q$ .*

**Définition du pincement de  $f$ .** Sans perte de généralité, supposons que  $\alpha$  est un point fixe attractif.

À  $p/q$  fixé, on considère une étoile  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L,p/q,f}$ . D'après le Lemme 7.2.1, il existe un point  $\beta$  au bout,  $q$ -répulsif ou parabolique au bord du bassin immédiat de  $\alpha$ . Il est de nombre de rotation 1 (en tant que point périodique), et de nombre de rotation de Poincaré  $p/q$ .

Dans la suite, on suppose que  $\beta$  est répulsif.

Au niveau des tores quotients de ces deux cycles, la projection  $\bar{\gamma}$  dans le tore  $T_\beta$  (associé à  $f^q$ ) de la vertèbre correspondante  $\gamma$  est fermée, simple, située dans la trace de la composante de  $\alpha$ , et disjointe des grandes orbites critiques. Sur le tore  $T_\alpha$  (associé à  $f$ ),  $\bar{\gamma}$  devient une courbe de nombre de rotation  $p/q$ , correspondant à l'ordre cyclique de l'orbite de  $\beta$ .

Considérons dans  $T_\alpha$  un anneau d'équateur  $\bar{\gamma}$  sur lequel on définit la même famille  $(\bar{\mu}_t)_{t \geq 0}$  de formes de Beltrami que dans le cas du germe. On la prolonge par zéro sur le reste du tore. Cette famille est ensuite relevée dans le plan dynamique, puis prolongée par zéro sur le reste afin qu'elle soit  $f$ -invariante sur toute la sphère.

De manière équivalente, on définit cette déformation sur chaque "bande" feuilletée par les parallèles aux vertèbres. Ensuite, on prolonge par la dynamique sur le reste du bassin, et enfin par zéro ailleurs.

Soient  $\varphi_t$  les solutions de l'équation de Beltrami ayant une normalisation fixée, et  $f_t$  les conjuguées de  $f$  par  $\varphi_t$  : ce sont des fractions rationnelles. La famille  $(\varphi_t, f_t)_{t \geq 0}$  ainsi définie représente un pincement de  $f$ .

### Questions.

- Quand cette déformation est-elle convergente ? à une sous-suite près ?
- Soit  $f_\infty$  un point d'accumulation de  $(f_t)_{t \geq 0}$  ; a-t-on une description dynamique explicite à partir de celle de  $f$  ?

### Proposition 7.2.2 (Pincement dans un bassin)

*Soit  $(f_t)_{t \geq 0}$  un pincement de deux points fixes attractif et répulsif. On note  $\Omega$  le bassin immédiat d'attraction de  $\alpha$  et on suppose que  $f_0$  n'admet qu'un point critique  $c$  dans ce bassin. On suppose que  $(\varphi_t(\Omega), \varphi_t(c))$  admet un ouvert  $(\Omega_\infty, c_\infty)$  comme limite pour la topologie de Carathéodory, et que  $f_\infty$  est limite des  $f_t$ .*

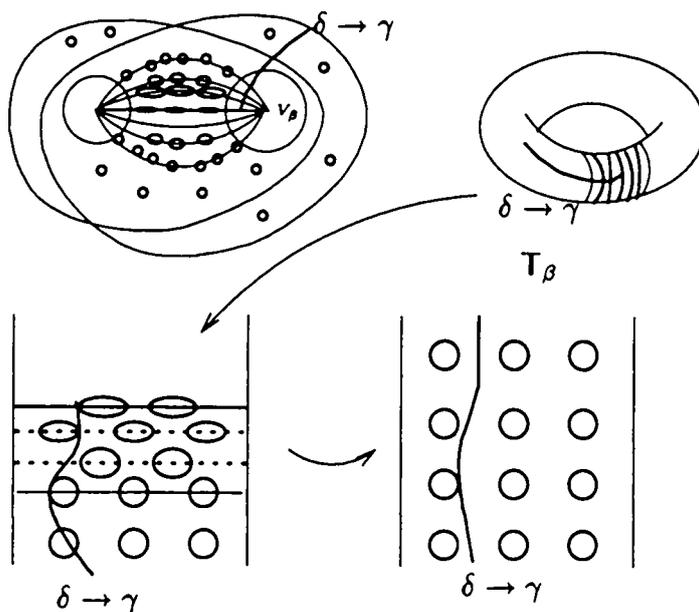


FIG. 7.3 - Limite dans le quotient.

Alors, il existe  $\varphi_\infty : \Omega \rightarrow \Omega_\infty$  continue surjective de degré 1, dont les fibres sont soit un point, soit une composante connexe du relevé de  $\bar{\gamma}$  dans le bassin. De plus,  $\Omega_\infty$  est le bassin immédiat parabolique d'un point  $\alpha_\infty$ , limite de  $\varphi_t(\alpha)$ , pour  $f_\infty$ . Enfin, la relation  $f_\infty \circ \varphi_\infty = \varphi_\infty \circ f$  est vérifiée dans le bassin.

DÉMONSTRATION. Soit  $\alpha_t = \varphi_t(\alpha)$ . Quitte à extraire une suite, ces points convergent vers un point  $\alpha_\infty$ , qui est parabolique d'après l'inégalité de Maskit (Proposition 7.2.3, à comparer avec l'inégalité de Pommerenke-Levin-Yoccoz, [Pel]).

**Proposition 7.2.3 (Inégalité de Maskit, [Ms, Pi])** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $|\lambda| > 1$ , et soit  $T_\lambda$  le tore  $\mathbb{C}^*/(\lambda)$ . La famille de cercles centrés à l'origine dans  $\mathbb{C}^*$  définit une classe d'homotopie  $\gamma_1$  dans  $T_\lambda$ . Se fixer un autre générateur revient à se donner une détermination du logarithme de  $\lambda$ ; soit  $\gamma_2$  une autre courbe fermée simple, telle que  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \simeq \pi_1(T_\lambda)$ . Soient  $\delta \subset T_\lambda$  une courbe fermée simple homotope à  $\gamma_1^{-p}\gamma_2^q$ , et  $A(\delta)$  un col de  $\delta$  (voisinage annulaire d'équateur  $\delta$ ), alors

$$\frac{\log^2|\lambda| + (\arg(\lambda) - 2\pi p/q)^2}{2\pi \log|\lambda|} \leq 1/\text{mod } A(\delta).$$

En particulier, si  $\text{mod } A(\delta) \rightarrow \infty$ , alors  $\lambda \rightarrow \exp(2i\pi p/q)$ .

Soit  $\tilde{\gamma}$  le relevé dans  $\Omega$  de  $\bar{\gamma}$ : c'est un Cantor d'accès au bord de  $\Omega$ . Les applications  $\varphi_t : (\Omega \setminus \tilde{\gamma}) \rightarrow \mathbb{C}$  sont uniformément quasiconformes sur tout compact; on peut donc extraire une suite  $\varphi_{t_n}$  qui converge vers  $\varphi_\infty : \Omega \setminus \tilde{\gamma} \rightarrow \mathbb{C}$ , continue injective (car le domaine image est bien défini).

De plus, comme  $f_t \circ \varphi_t = \varphi_t \circ f$ , on en déduit que  $f_\infty \circ \varphi_\infty = \varphi_\infty \circ f$ , et les points de  $\varphi_\infty(\Omega \setminus \tilde{\gamma})$  sont tous dans le bassin immédiat de  $\alpha_\infty$ .

En fait,  $\varphi_\infty : \Omega \setminus \tilde{\gamma} \rightarrow \Omega_\infty$  est surjective. En effet, cette application induit un homéomorphisme  $\bar{\varphi}_\infty : \mathbb{T}_\alpha \setminus \bar{\gamma} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , surface associée à  $\alpha_\infty$ , car, par définition du pincement, l'application  $\bar{\mathfrak{K}}_t$  coïncide avec  $\varphi_t|_{\mathbb{T}_\alpha \setminus \bar{\gamma}}$ . Soit  $w \in \Omega_\infty$ . En appliquant  $f_\infty$ , on définit un chemin combinatoire de  $w$  à  $\alpha_\infty$  (voir Lemme 7.2.4 ci-dessous); soit  $\bar{w} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  le projeté de  $w$ ; on lui associe combinatoire donnée par  $z$  (cf Lemme 7.2.4). Le point ainsi obtenu vérifie  $\varphi_\infty(z) = w$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $\varphi_\infty$  se prolonge bien au bassin tout entier. Soit  $z \in \tilde{\gamma}$ ; on considère une suite  $z_n$  dans  $\Omega \setminus \tilde{\gamma}$ . On considère les projetés  $\bar{z}$  et  $\bar{z}_n$  dans  $\mathbb{T}_\alpha$ . La suite  $\bar{z}_n$  tend vers  $\bar{\gamma}$ . Par suite, quand on lui applique  $\bar{\varphi}_\infty$ , la suite  $\bar{w}_n = \bar{\varphi}_\infty(\bar{z}_n)$  tend vers l'infini dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , i.e.  $w_n = \varphi_\infty(z_n)$  tend vers une préimage de  $\alpha_\infty$  (voir Figure 7.3).

Ceci montre que  $\varphi_\infty$  se prolonge continûment au bassin entier, en envoyant les composantes de  $\tilde{\gamma}$  sur les préimages de  $\alpha_\infty$ . ■

**Lemme 7.2.4** *Il existe deux partitions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_\infty$  de  $\Omega$  et  $\Omega_\infty$  respectivement combinatoirement équivalentes.*

**DÉMONSTRATION.** D'une part, on construit  $\mathcal{P}$  en considérant les pièces bordés par la vertèbre et toutes ses préimages ainsi que  $\tilde{\gamma}$ . D'autre part, notons  $F : \Omega_\infty \rightarrow \mathbb{C}$  la coordonnée de Fatou attractive de  $f_\infty$ . On définit  $\mathcal{P}_\infty$  par les images réciproques de la droite horizontale qui contient les valeurs critiques de  $F$ . Ces partitions sont combinatoirement équivalentes car  $F$  et  $\log \kappa$  conjuguent  $f_\infty$  et  $f$  à des translations en envoyant leurs points critiques sur une orbite des translations. ■

## 7.2.2 Cas à allure monomiale

On considère maintenant un polynôme  $f : z \mapsto z^d + c(\lambda)$ ,  $0 < |\lambda| < 1$ , où  $c(\lambda)$  est une constante telle que  $f$  admette un point fixe de multiplicateur  $\lambda$ ; et on cherche à rendre ce point parabolique par pincement, tout en gardant le contrôle de la dynamique.

L'ensemble de Julia de  $f$  est un quasicercle, et il existe une application quasiconforme  $\chi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  qui conjugue  $f$  à  $z \mapsto z^d$  au voisinage de leurs ensembles de Julia, i.e.  $\chi(J_f) = \mathbb{S}^1$ .

Soit  $\beta$  un point  $q$ -périodique répulsif, tel que l'orbite de son argument externe ait pour nombre de rotation  $p/q$ . On choisit  $\lambda = (1/2)e^{2i\pi(p/q)}$ . On considère le pincement défini sur un arc  $f$ -invariant joignant 0 à  $\beta$ , ainsi que son orbite. On normalise les solutions des équations de Beltrami par  $\varphi_t(0) = 0$ ,  $\varphi_t(z) = z + O(1)$  au voisinage de l'infini.

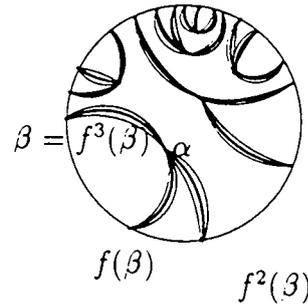


FIG. 7.4 - Support du pincement.

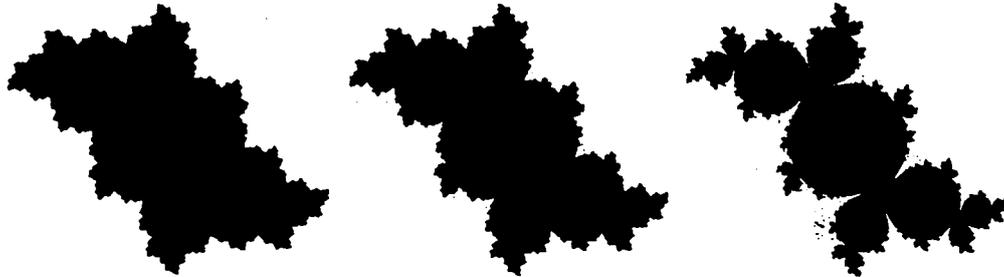


Figure 8 Pincement vers le lapin gras.

Quitte à extraire une suite, la famille de polynômes  $(f_t)_{t \geq 0}$  admet une limite  $f_\infty$ , qui est un polynôme monique ; et d'après l'inégalité de Maskit, le point fixe tend à devenir parabolique de multiplicateur  $e^{2i\pi(p/q)}$ , i.e.

$$f_\infty(z) = z^d + c(e^{2i\pi(p/q)}).$$

Reste à examiner s'il y a convergence des applications  $\varphi_t$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  le relevé total de  $\gamma \in \mathbb{T}_0$  dans le bassin de l'origine. Chaque composante connexe de  $\tilde{\gamma}$  est contractile. Le résultat principal de ce paragraphe est alors :

**Théorème 7.2.5** *Les applications  $\varphi_t$  convergent uniformément vers une application  $\varphi_\infty$ , dont les fibres sont soit des points, soit une composante connexe de  $\tilde{\gamma}$  et telle que*

$$\varphi_\infty \circ f = f_\infty \circ \varphi_\infty.$$

Comme dans la Proposition 7.2.2, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  qui n'est pas dans la fermeture de  $\tilde{\gamma}$ , le pincement a une dilatation localement bornée, donc, en utilisant par exemple le

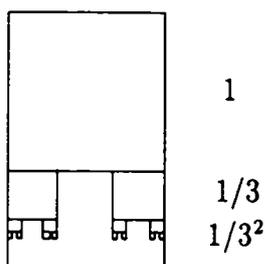


FIG. 7.5 - Modèle de McMullen.

Lemme 3.0.9 de la Partie II, les théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 d'Ahlfors-Bers, on montre que le pincement est équicontinu en  $z$ .

Pour montrer que les  $\varphi_t$  sont équicontinues au voisinage de  $J_f$ , on va utiliser des estimations sur des modules d'anneaux obtenus sur le modèle  $z \mapsto z^d$ .

Pour conclure, un voisinage borné de  $K_f$  reste dans un domaine borné indépendant des  $\varphi_t$ , d'après le théorème de Kōbe appliqué à l'infini. On pourra donc appliquer le théorème Arzela-Ascoli.

**Estimation sur un modèle.** On va montrer que l'on peut se ramener au modèle qui suit, proposé par C.T. McMullen, pour montrer la locale connexité de l'ensemble de Mandelbrot en certains points du bord (cf [Hu]).

Soit  $R = ]0, 1[ \times ]0, 3/2[$ . On définit une famille de sous-carrés  $(Q_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq 2^i}}$  par récurrence :

- $Q_0 = ]0, 1[ \times ]1/2, 3/2[$ ;
- si, à  $i \geq 0$  fixé, tous les  $Q_{i,j}$ ,  $1 \leq j \leq 2^i$ , sont construits, on définit le rang supérieur  $Q_{i+1,j}$  comme suit : on considère un carré  $Q_{i,j_0}$  dont on découpe le côté horizontal le plus bas en trois. On recolle alors deux carrés  $Q_{i+1,2j_0-1}$  et  $Q_{i+1,2j_0}$ , de côté  $(1/3)$  celui de  $Q_{i,j}$ , aux deux segments contenant un sommet de ce dernier. Les  $Q_{i,j}$  ainsi définis s'accroissent sur l'axe réel en l'ensemble triadique de Cantor (voir Figure 7.5).

**Proposition 7.2.6 (C.T. McMullen)** Soit  $\Gamma$  la famille de courbes joignant les côtés verticaux de  $R$ . Pour toute forme de Beltrami dont le support est disjoint de  $\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq 2^i}} Q_{i,j}$ ,

$$(3/2)\Lambda(\Gamma) \geq \Lambda_\mu(\Gamma) \geq \Lambda(\Gamma)/3.$$

**DÉMONSTRATION.** Comme  $R$  est un rectangle,  $\Lambda(\Gamma) = 2/3$ .

Soit  $\mu$  une forme de Beltrami supportée dans le complémentaire des  $Q_{i,j}$ .

Comme  $Q_0$  est un carré qui joint les deux côtés verticaux et disjoint du support de  $\mu$ , d'après la Proposition 3.0.7 de la Partie II, il vient  $\Lambda_\mu(\Gamma) \leq \Lambda(Q_0) = 1$ .

Pour obtenir une minoration indépendante de  $\mu$ , on va définir une métrique  $\rho|dz|$  telle que  $\text{supp } \mu \subset (\rho = 0)$  et  $\Lambda(\Gamma, \rho) > 0$ .

- Sur le bord de  $R$  et des  $Q_{i,j}$ , on pose  $\rho = +\infty$ .
- Sur le complémentaire des  $Q_{i,j}$ , on pose  $\rho = 0$ .
- Sur  $Q_{i,j}$ , on pose  $\rho|dz| = (3/2)^i|dz|$ .

Évaluons  $\Lambda(\Gamma, \rho)$ :

- $\rho$  est bien admissible:  $\text{Aire}(R, \rho) = \sum_{n \geq 0} 1/2^n = 2$ .
- Remarquons que pour toute courbe horizontale  $\gamma_h$ ,  $L(\gamma_h, \rho) = 1$ . Pour trouver la plus petite longueur, il suffit de se restreindre à deux niveaux  $i$  et  $i + 1$  à cause de l'auto-ressemblance du problème. On trouve alors  $L(\Gamma, \rho) = 2/3$ .

Au total, on obtient

$$\Lambda_\mu(\Gamma) \geq \Lambda(\Gamma, \rho) = 2/9 = \Lambda(\Gamma)/3.$$

■

**Partition du bassin associée à une étoile.** Nous allons définir une partition en "rectangles" au voisinage du bord du bassin, qui nous servira à appliquer la Proposition 7.2.6.

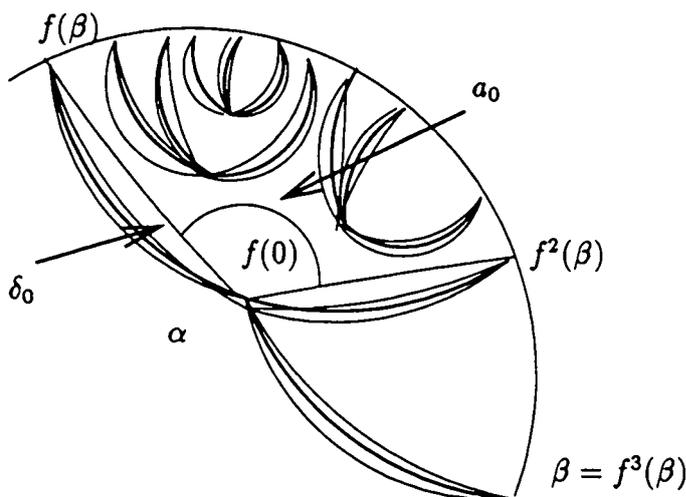


FIG. 7.6 -  $a_0$  et  $\delta_0$ .

Dans la coordonnée log-linéarisante, on considère – dans une bande  $\tilde{U}_j$  – deux droites parallèles au (et disjointes du) support du pincement qui l'encadrent. Ses relevés dans le bassin sont des accès qui aboutissent aux préimages de  $\beta$  et qui passent par celles du point attractif. On extrait certains d'entre eux. Sur les  $2q$  qui contiennent le point attractif  $\alpha$ , on considère seulement les deux dont la réunion sépare le support du pincement qui passe par  $\alpha$  de la valeur critique. Cette courbe  $\delta_0$  borde un domaine qui contient donc la valeur critique que l'on note  $\hat{R}_0$ . On considère alors un nouvel arc de cercle dans  $\hat{R}_0$ , disjointe du support, d'extrémité un point par composante connexe de  $\partial \hat{R}_0 \setminus \{\alpha\}$  et qui, réunie avec  $\partial \hat{R}_0$  entoure une fois la valeur critique. On note  $a_0$  la courbe de Jordan qui

borde un voisinage de la valeur critique. On définit alors par récurrence  $\delta_n = f^{-1}(\delta_{n-1})$  et  $a_n = f^{-1}(a_{n-1})$ . La courbe  $a_1$  borde donc un voisinage de zéro.

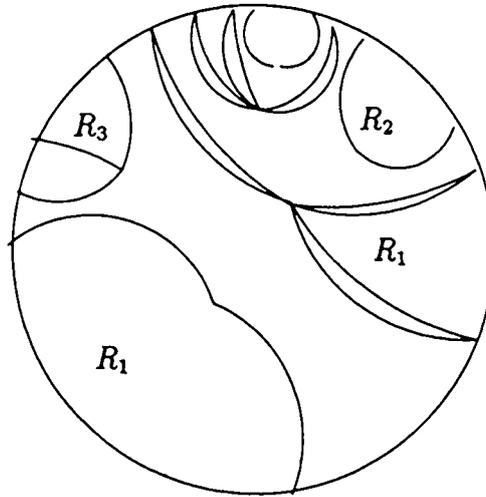


FIG. 7.7 - Rectangles.

Chaque composante connexe de  $\delta_n$  borde un "rectangle"  $\hat{R}_{n,j}$  qui ne contient pas 0. Ces rectangles, pour  $n \geq 1$ , sont tous isomorphes deux à deux. La composante connexe du complémentaire de  $\cup \delta_n$  qui contient le point critique est naturellement découpée par les  $a_n$  en quadrilatères  $\hat{Q}_{n,j}$ . Ceux-ci sont transformés les uns dans les autres par  $f^q$  (qui agit comme un revêtement de degré  $d$  sur cette composante). Cette dernière assertion provient de la combinatoire de  $z \mapsto z^d + c(e^{2i\pi(p/q)})$ , et notamment de la restriction de l'itérée  $q^{\text{ème}}$  au bassin immédiat contenant l'origine.

**Définition.** Un rectangle est visible d'un point s'il existe un chemin qui ne coupe aucune vertèbre qui lie ce point au rectangle.

L'ensemble des rectangles visibles du point critique a une structure similaire à celle de la Proposition 7.2.6. Pour rendre plus précise cette idée, nous allons construire un homéomorphisme quasiconforme  $\chi$  d'un voisinage du bord du bassin sur un voisinage de l'axe réel qui va conjuguer  $f^q$  à  $z \mapsto d^q \cdot z$  (l'axe réel est considéré comme le revêtement universel de  $S^1$ ).

Enfin, on considère aussi le bord  $a_0'$  d'un disque centré à l'origine relativement compact dans le complémentaire de toutes les courbes définies ci-dessus (donc disjointe).

**Redressement de la partition.** Notre application  $f$  est conjuguée à  $z \mapsto z^d$  de  $J(f)$  sur  $S^1$  et cette conjugaison n'est bien définie qu'à un invariant combinatoire près appartenant à  $\mathbb{Z}/(d-1)\mathbb{Z}$ . On se fixe une fois pour toute cet invariant de manière à pouvoir considérer sans ambiguïté des représentants d'un point du cercle sur  $\mathbb{R}$  (en considérant par exemple la coordonnée de Böttcher de l'infini). Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons qu'à la partie visible de l'origine.

Sur le demi-plan inférieur, on définit donc  $\chi$  par le log de la coordonnée de Böttcher

(à une constante près). Sur le demi-plan supérieur, on définit  $d$  rectangles  $R_{1,j}$  basés sur  $\mathbf{R}$  de hauteur  $h > 0$  et dont la partie sur le bord a ses extrémités en les mêmes arguments que ceux de  $\hat{R}_1$ . On peut alors définir  $\chi$  en transformant  $\partial\hat{R}_1$  sur  $\partial R_1$  de manière  $C^1$ . De même, on transforme  $a_1$  sur la droite de hauteur  $h$ . On définit alors  $\chi$  par un argument de *pull-back* sur les bords. Au bout de la  $q$ ième étape, on peut prolonger quasiconformément  $\chi$  sur la bande  $h/d^q < \text{Im} z < h$ , qui est visible. On continue ensuite en tirant en arrière par  $f^q$  et  $z \mapsto d^q z$ . On se fixe une extension sur les rectangles que l'on prolonge aussi par la dynamique. Enfin, on prolonge  $\chi$  de l'anneau bordé par  $a_0'$  et  $a_1$  sur la bande  $h < \text{Im} z < d^q h$ .

On obtient bien un homéomorphisme car les dynamiques sont fortement dilatantes. Cette application est de surcroît quasiconforme parce qu'on n'impose qu'un nombre fini d'extensions au début de sa construction.

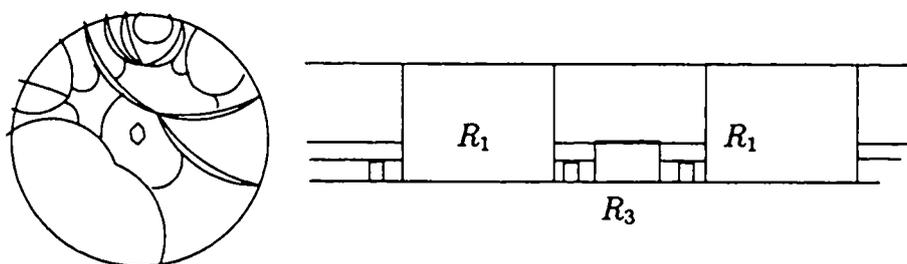


FIG. 7.8 - Définition de l'application.

**Equicontinuité du pincement au voisinage de  $J_f$ .** Par l'application  $\chi$  définie ci-dessus, on se ramène à l'étude de modules d'anneaux pour des points de  $\mathbf{S}^1$ , ou de manière équivalente sur  $\mathbf{R}$ . Ces estimations pourront être transportées au voisinage de  $J_f$  par  $\chi$ , où elles seront distordues d'un facteur uniforme. Le but est de trouver au voisinage de chaque  $x \in \mathbf{S}^1$ , une suite d'anneaux emboîtés dont la somme des modules est divergente, et qui le reste pour la déformation envisagée.

On commence par définir une métrique conforme  $\rho$  au voisinage de  $\mathbf{S}^1$ , pour montrer que la déformation n'écrase pas un voisinage du point fixe (cf Proposition 7.2.6). Cette métrique nous servira par la suite à minorer des modules d'anneaux.

Un domaine fondamental se situe dans une bande verticale de largeur 1. Le support du pincement a une structure auto-similaire induite par la multiplication par  $d^q$ . Par construction, chaque composante connexe du pincement est incluse dans un rectangle  $R_{i,j}$  (avec  $d.R_{i+1,j} \in \{R_{i,j}\}$ ) basé sur  $\mathbf{R}$ , de bord des préimages de  $\beta$ . Les plus grands rectangles correspondent au cycle de  $\beta$  et à ses premières préimages par  $f^q$ ; soit  $h$  sa hauteur. On considère une première droite horizontale  $\gamma_0$  de hauteur  $d^q h$  au-dessus de ce rectangle, et  $\gamma_1$  une droite parallèle qui contient un côté. On note  $A_0$  le quadrilatère ainsi défini. On lui associe la métrique extrémale  $\rho_0$  telle que la plus petite courbe joignant les côtés verticaux ait longueur 1. On note  $\eta = h(1 - 1/d^q)$ .

Par translation de  $1/d$ , on obtient les  $(d - 1)$  rectangles provenant des premières pré-

images du cycle. Le prochain retour de ces rectangles est pour l'itéré  $q^{\text{ième}}$ ; il en apparaît  $d^2$ , et sont de hauteur  $h/d^q$ . On note  $A_1$  la bande située entre  $hd^{-q}$  et  $h$ . Elle intersecte le complémentaire des rectangles en  $d$  quadrilatères longueur de chaque quadrilatère. La longueur par rapport à  $\rho_1$  d'une courbe horizontale de  $A_1$  est 1, et l'aire de  $A_1$  :  $\eta/(ld)$ .

De proche en proche, on considère la bande  $A_n$  comprise entre  $h/d^{qn}$  et  $h/d^{q(n-1)}$ . Son intersection avec le complémentaire des rectangles est formée de  $d^n$  quadrilatères de même module que  $Q_{1,1}$ . Sur chacun d'eux, on définit la métrique

$$\rho_n = d^{q(n-1)-n}/\ell|dz|.$$

On vérifie que la longueur d'une courbe horizontale est encore 1. L'aire de  $A_n$  est alors  $\eta/(ld^n)$ .

On définit alors  $\rho$  comme étant  $\rho_n$  sur chaque quadrilatère  $Q_{n,j}$ , 0 ailleurs. L'aire totale est finie, puisqu'on somme une suite géométrique. De plus, la longueur de toute courbe joignant deux côtés verticaux est uniformément minorée (cf 7.2.6). Ainsi, on obtient que le module d'un anneau dans le bassin contenant le support de la déformation est uniformément majoré par la métrique  $\rho$  (il s'agit de la longueur extrémale conjuguée).

Pour montrer l'équicontinuité de la déformation sur  $J_f$ , nous allons construire au voisinage de chaque  $z \in J_f$ , un anneau entourant  $z$  qui aura un module uniformément minoré par rapport au pincement. Ensuite, nous pourrons extraire un sous-recouvrement fini des intérieurs de ces anneaux et utiliser la dynamique auto-similaire pour définir une suite d'anneaux emboîtés de module minoré au voisinage de chaque point.

Les anneaux que nous allons définir auront, dans les deux premiers cas, des bords vérifiant les propriétés suivantes :

- chaque composante décrit un rectangle, symétriques par rapport à  $\mathbf{R}$ ,
- elle intersecte  $\mathbf{R}$  le long du bord de rectangles  $R_{i,j}$  sans les contenir.

Nous distinguons trois cas :

▷ **PREMIER CAS.** En un nombre fini d'itération, le point  $z$  est visible du point critique et n'est pas une préimage de  $\beta$ .

Pour cet itéré, le bord extérieur de l'anneau est constitué de verticales longeant les bords de  $R_1$  les plus proches (sans les contenir) et les bords horizontaux sont de hauteur  $h$ . Les segments verticaux du bord intérieur longent des préimages visibles de  $R_1$  et sont à la hauteur  $h/d$ .

Pour évaluer le module de cet anneau, il suffit de couper l'anneau en quatre rectangles qui isolent l'axe réel. Sur le voisinage de l'axe réel, on considère la métrique  $\rho$  ci-dessus (prolongée par réflexion de Schwarz). Sur le reste, on considère des métriques extrémales. L'estimation obtenue pour le module de l'anneau est strictement positive et indépendante du pincement.

On tire en arrière cet anneau par  $f^{-n}$  pour avoir la même estimation au voisinage de  $z$ .

▷ **DEUXIÈME CAS.** En un nombre fini d'itération, le point  $z$  est dans un rectangle  $R_1$  différent de celui qui contient  $\alpha$  dans son bord et n'est pas une préimage de  $\beta$ .

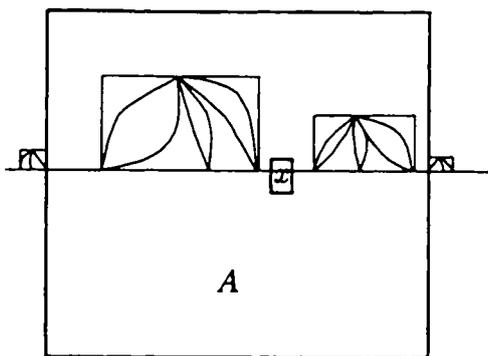


FIG. 7.9 - Anneau autour de  $x$ .

Pour cet itéré, on considère alors l'anneau de bord intérieur ce rectangle et comme bord extérieur les bords les plus proches de  $R_1$ . On conclut comme dans le premier cas.

▷ TROISIÈME CAS. Le point  $z$  est une préimage de  $\beta$ .

On définit un anneau  $A$  comme suit, au voisinage de  $\beta$ : le bord intérieur est constitué des vertèbres qui contiennent  $\alpha$ . Le bord extérieur contient les bords verticaux de  $R_1$  les plus proches.

**Lemme 7.2.7**  $\text{mod } \varphi_t(A) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**DÉMONSTRATION.** Le modèle floral vient naturellement avec une étoile, qui est quasiconformément équivalente à celle de  $f$  (et qui conjugue les dynamiques). Cette application peut être prolongée de manière à conjuguer les dynamiques sur un voisinage des points périodiques. Il existe donc une application quasirégulière qui transforme notre anneau (ou un sous-anneau) en l'anneau  $\mathcal{A}$  du modèle - i.e. la bande  $\mathcal{B}$  privé d'un rectangle  $Q$  - tel que les rectangles visibles soient de hauteur inférieure à celle de  $Q$ . On considère une exhaustion de  $\mathcal{A}$  en anneaux  $\mathcal{P}_n$  de même composante de bord intérieur, et de bord extérieur celui de  $\mathcal{A}$  tronqué à distance euclidienne  $n$  de  $Q$ . Notons  $h_t$  la distance euclidienne de  $Q$  à  $\mathcal{N}_t(\pm i\pi)$ .

À  $n$  et  $t$  fixé, on définit la métrique  $\rho_n(t)$  provenant :

- d'une part, de la métrique euclidienne de  $\mathcal{N}_t(\mathcal{B}_\pm)$  (avec les notations du paragraphe précédent);
- d'autre part, de la métrique de la Proposition 7.2.6, normalisée de manière avoir même infimum sur la longueur des courbes, soit  $h_t$ .

Par suite,

$$\text{mod } \mathcal{A}_t \geq \frac{h_t^2}{c \cdot h_t n + n} \asymp \frac{h_t}{n(c + 1/h_t)}.$$

Si on choisit une suite  $t_n$  telle que  $n \asymp \sqrt{h_{t_n}}$ , alors on montre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod } \mathcal{A}_t = \infty.$$

Comme les anneaux sont homéomorphes par une application quasiconforme de dilatation bornée,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod } \varphi_t(A) = \infty.$$

■

**DÉMONSTRATION DE 7.2.5:** D'après ce qui précède, la famille est équicontinue en tout point relativement métrique sphérique et un voisinage de  $J_f$  reste borné par la déformation (par Kőbe appliqué à donc d'après le théorème d'Ascoli, on peut extraire une suite convergente vers une application  $\varphi_\infty$  continue. Comme pour tout  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t \circ f = f_t \circ \varphi_t$ , on obtient à la limite  $\varphi_\infty \circ f = f_\infty \circ \varphi_\infty$ .

On a vu que si deux points étaient dans la même composante de  $\tilde{\gamma}$ , alors le module d'un anneau les entourant tendait à l'infini. Maintenant, si deux points ne sont pas dans une même composante de  $\tilde{\gamma}$ , alors on peut trouver un anneau les séparant de module uniformément minorée par rapport au suffit de remarquer que

L'unicité de la limite s'établit comme dans la Proposition 7.1.1.

■

**Remarque.** Si le pincement se situe en un point fixe répulsif  $\beta$ , alors  $J_f$  est une courbe de Jordan et  $\varphi_\infty$  est un homéomorphisme restreint aux ensembles de Julia.

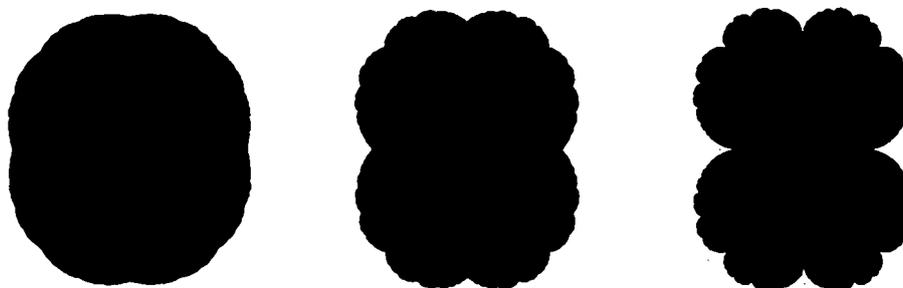


Figure 9 *Pincement vers le chou-fleur.*

### 7.2.3 Pincement d'un polynôme hyperbolique

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme monique centré hyperbolique, *i.e.* tous les points critiques sont attirés par un cycle (super-)attractif. On suppose qu'il existe un cycle attractif  $\alpha$  non critique et que son ensemble de Julia est connexe. On se propose de montrer

**Théorème 7.2.8** *Le pincement du cycle  $\alpha$  est bien défini: il existe  $\varphi_\infty : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  qui semi-conjuge  $f$  à un polynôme  $f_\infty$  pour lequel  $\alpha$  est devenu parabolique.*

On considère un pincement du point  $\alpha$  avec un cycle  $\beta$   $q$ -périodique de nombre de rotation combinatoire  $p/q$ . Comme dans le cas à allure monomiale, on commence par extraire une suite de  $(f_t)$  qui converge vers un polynôme  $f_\infty$ . Par continuité, les cycles (super-)attractifs pour lesquels le multiplicateur n'est pas changé subsistent, ainsi que les points critiques attirés vers ces points. En revanche, le cycle  $\alpha$  tend à devenir parabolique de nombre de rotation  $p/q$ .

Pour obtenir des estimations, on utilise le fait que le bord de chaque composante de l'intérieur est un quasicercle, que l'on peut redresser pour utiliser le même type d'estimations que précédemment. Le problème essentiel sera de recoller les métriques entre elles en s'assurant de ne pas faire chuter la longueur des courbes. Dans un premier temps, on va exhiber une métrique sur un voisinage annulaire de  $\mathbb{S}^1$  qui donnera une majoration du module de l'anneau indépendante du pincement. À cette fin, on définit d'abord un "bon" redressement du bassin attractif.

▷ Afin d'imiter ce qui précède, on va d'abord cerner le support de la déformation. Si  $U$  est une composante connexe de l'intérieur de  $K_f$ , un *membre* de  $U$  est la fermeture d'une composante connexe de  $K_f \setminus \bar{U}$ , attaché à  $\partial U$  par sa *racine*; son *sillage* est l'ouvert bordé par les rayons aboutissant à la racine contenant tous les membres de même racine. Étant donnée  $U$ , le support de la déformation se trouve soit dans  $U$ , soit dans ses membres.

▷ Dans le paragraphe précédent, on a utilisé une application  $\chi$  quasiconforme transformant le bassin  $A^*(\alpha)$  en disque, et incluant l'image du support du bassin dans une réunion infinie  $\mathbb{K}$  de rectangles auto-similaires par la multiplication par  $d'$  (en coordonnée logarithmique), où  $d'$  est le degré de  $f$  restreint au bassin. Dans la suite, on se place toujours au voisinage de  $[0, 1] \times [-\eta, \eta]$  pour redresser  $A^*(\alpha)$ . Notons  $\bar{\mathbb{K}}$  l'ensemble conjugué. La première étape est de prolonger quasiconformément cette application à un voisinage du bord du bassin de manière à ce que ou bien le membre est dans  $\bar{\mathbb{K}}$  ou bien il en est disjoint (à quelques exceptions près), en gardant l'auto-similarité. Les membres (et les sillages donc) sont engendrés par un nombre fini de cycles répulsifs du bord de  $A^*(\alpha)$ . L'image par  $\chi$  de ces points est donnée: soit tout le cycle est dans  $\mathbb{K}$ , soit un point sur  $q$  est *visible* du point  $\alpha$  (i.e. il existe une courbe de  $A^*(\alpha)$  joignant  $\alpha$  à ce point, tout en restant disjoint du support  $\tilde{\gamma}$ ). Sur l'axe réel, on considère un secteur vertical en chacun de ces points, de même hauteur que le plus grand rectangle de  $\bar{\mathbb{K}}$  et de pente que l'on précisera. À chaque préimage, on trace un secteur de taille  $d'$  fois plus petite, et ainsi de suite... Si la pente est suffisamment faible, alors les secteurs des points invisibles sont inclus dans  $\bar{\mathbb{K}}$ , et ceux des points visibles sont disjoints deux à deux. S'il existe un membre dans le cycle  $\beta$ , alors, seule une moitié du secteur est visible.

On coupe ce dessin par des courbes de hauteurs  $(1/d')^n$  qui découpent le complémentaire de tous les secteurs en quadrilatères, comme le complémentaire des sillages est découpé en quadrilatères par les équipotentielles de hauteur  $\eta/d'^n$ . En définissant l'extension de  $\chi$  quadrilatère par quadrilatère, on construit ainsi une application quasiconforme qui conjugue  $f$  à  $z \mapsto d'z$ , car on a un nombre fini de quadrilatères de modules différents. On prolonge ensuite des sillages aux secteurs de manière régulière.

▷ Maintenant, on a une "bonne géométrie" qui permet de définir une métrique conforme  $\rho$  nulle sur  $\bar{\mathbb{K}}$  et les secteurs telle que la longueur extrémale des courbes joignant les côtés verticaux soit minorée (cf Propositions 7.2.6 et 7.2.5). Par la réflexion de Schwarz,

on prolonge cette métrique à un voisinage de  $[0, 1]$  et le module total est aussi minoré indépendamment de la déformation.

▷ Comme  $K_f$  est connexe et localement connexe, pour chaque point  $x \in J_f$  qui n'est pas dans la grande orbite de  $\beta$ , il existe un anneau  $A_x$  dont la composante intérieure du complémentaire contient  $x$ , et qui vérifie les conditions suivantes :

- l'anneau "rempli" est disjoint de l'ensemble postcritique de  $f$  ;
- dans  $\mathbb{C} \setminus K_f$ , le bord est une réunion de rayons externes prépériodiques et d'équipotentiels ; si le bord contient le bord d'un sillage, alors celui-ci ne sera pas dans l'anneau, et si une racine est dans l'anneau, alors celui-ci le contient entièrement (jusqu'à  $\eta > 0$  fini) ;
- si l'anneau traverse une préimage de  $A^*(\alpha)$ , alors le bord est disjoint de l'intérieur des rectangles, et aucune composante de  $\tilde{\gamma}$  ne joint les deux côtés opposés du quadrilatère induit ;
- le bord de l'anneau coupe  $J_f$  en un nombre fini de points (prépériodiques).

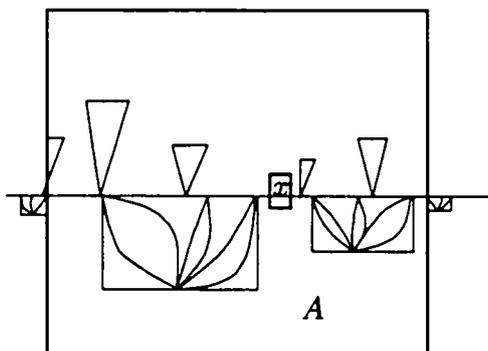


FIG. 7.10 - Anneau autour de  $x$ .

Étant donné un tel anneau  $A$ , on le redresse localement afin d'obtenir au voisinage de  $J_f \cap A$  les domaines définies ci-dessus. Par suite, le module de l'anneau est uniformément minoré, car les métriques se recollent correctement.

Pour le cycle  $\beta$  et ses préimages, on peut définir un anneau, dont le bord intérieur est la composante connexe de  $\tilde{\gamma}$  contenant le cycle et le bord extérieur vérifie les propriétés ci-dessus, et effectuer les mêmes calculs que dans le Lemme 7.2.7 pour montrer que son module diverge avec  $t$ .

**DÉMONSTRATION DE 7.2.8.** En chaque point de  $J_f$ , il existe un anneau dont le module est uniformément minoré ; on extrait un sous-recouvrement fini induit par l'intérieur des anneaux  $A_1, \dots, A_n$  : pour chaque point, on peut trouver une suite d'anneaux emboîtés isomorphes aux  $A_i$ , de module uniformément minoré, par rapport à la déformation et à  $x \in J_f$ . Par suite, la famille des  $(\varphi_t)$  est équicontinue, et on peut extraire une sous-suite convergente. On conclut comme le Théorème 7.2.5.

■

### 7.3 Points répulsif/attractif et point parabolique

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 3** Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  d'ensemble de Julia connexe ayant un point fixe  $\alpha$  attractif et un point fixe répulsif  $\beta$  dans le bord de son bassin immédiat, accessible depuis ce bassin et tel que  $\beta$  n'est dans l'ensemble  $\omega$ -limite d'aucun point critique. Alors il existe un polynôme  $Q$  de même degré et un homéomorphisme  $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui conjugue  $P$  à  $Q$  sur leurs ensembles de Julia et tel que  $\beta$  soit devenu parabolique, le bassin de  $\alpha$  étant devenu le bassin de  $\beta$ .

**Complément 3.** Si  $\beta$  n'est pas dans l'ensemble postcritique de  $P$ , alors  $\chi, \chi^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$ .

**Remarque.** Ce théorème n'a aucune hypothèse de connexité locale.

Commençons par un Lemme préparatoire.

Considérons les deux produits de Blaschke

$$B_{par}(z) = \frac{z^d + a}{1 + az^d}, \quad a = (d-1)/(d+1), \text{ et}$$

$$B(z) = \frac{z^d + b}{1 + bz^d}, \quad 0 < b < a.$$

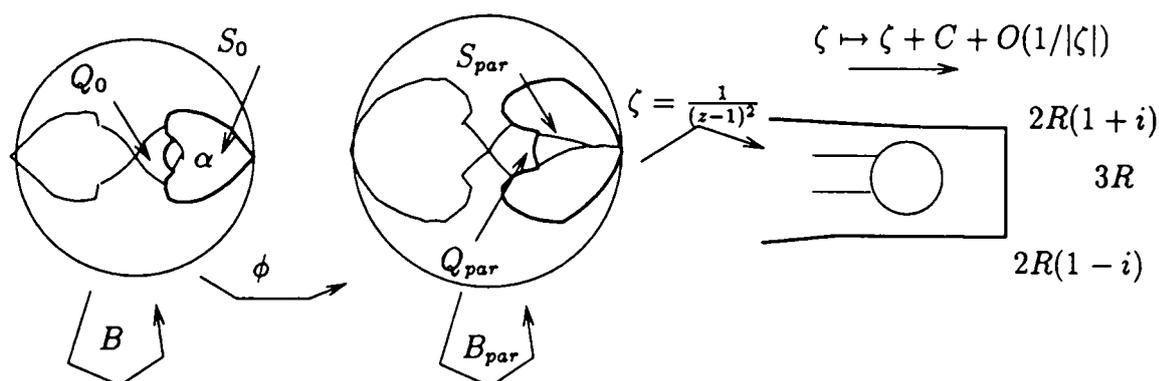
Ces deux applications fixent le disque unité  $\mathbb{D}$  ; l'application  $B$  admet un point fixe attractif  $\alpha$  (dans  $]0, 1[$ ) qui attire tout point de  $\mathbb{D}$  ainsi qu'un point fixe répulsif (1), et  $B_{par}$  admet un point parabolique (1) qui attire aussi tout point de  $\mathbb{D}$ . On note  $\rho_B = B'(1)$ .

**Lemme 7.3.1** Il existe un homéomorphisme  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $C^1$  par morceaux, et un secteur  $S_B \subset \mathbb{D}$  de sommet 1, voisinage de  $\alpha$ , tels que :

- (i) pour tout  $z \in \mathbb{D} \setminus S_B$ ,  $\phi \circ B(z) = B_{par} \circ \phi(z)$ ,
- (ii)  $\phi : \mathbb{D} \setminus \cup B^{-n}(S_B) \rightarrow \phi(\mathbb{D} \setminus \cup B^{-n}(S_B))$  est quasiconforme,
- (iii) il existe  $C > 0$  tel que  $\text{Aire} \{z \in S_B, K_\phi > n\} \leq C/\rho_B^{2n}$ .

**DÉMONSTRATION.** Considérons la dynamique de  $B_{par}$ . On conjugue cette application au voisinage du point parabolique par  $z \mapsto \zeta = 1/(z-1)^2$  afin d'avoir une coordonnée de Fatou approchée: le produit de Blaschke est conjugué à une application proche d'une translation réelle positive au voisinage de l'infini, définie à l'extérieur d'un disque ( $|\zeta| < R$ ). On considère le domaine bordé par deux "demi-droites" invariantes issues de  $(2R) \pm i2R$  et allant vers  $-\infty$  et un segment verticale joignant  $(2R) + 2Ri$  à  $(2R) - 2Ri$ , qui contient  $3R$ . Ce domaine contient son image par la quasi-translation. On note  $S_{par}$  son image par  $\zeta \mapsto z = 1 + (1/\zeta)^{1/2}$  dans  $\mathbb{D}$ . Quitte à translater le domaine de départ, on peut supposer que la valeur critique de  $B_{par}$  appartienne au bord vertical.

De la même manière, on construit un ouvert simplement connexe à bord lisse, joignant 1 au point attractif  $\alpha$ , et positivement invariant. On note  $S_0$  ce domaine réuni avec un disque linéarisable de  $\alpha$  contenant la valeur critique de  $B$  au bord. L'image de  $S_0$  est contenue dans  $S_0$ . Par suite,  $\phi$  conjugue  $B$  à  $B_{par}$  sauf sur le secteur  $S_B = S_0 \cup Q_0$  contenant  $\alpha$ , où il vérifie (iii) d'après le Complément 5.5.2. ■

FIG. 7.11 - Définition de  $\phi$ .

On va utiliser le Théorème 5.6.5 de la Partie II de G. David d'intégration des formes de Beltrami (Partie II, Chapitre 5).

**DÉMONSTRATION DE 3.** Procédons par chirurgie. Soit  $\Omega$  le bassin immédiat du point  $\alpha$ . Quitte à perturber un peu  $P$  ou à faire une chirurgie à l'intérieur de  $\Omega$ , on peut supposer qu'il n'y a qu'un seul point critique dans  $\Omega$  et que  $\alpha$  n'est pas super-attractif. On considère l'uniformisante de Riemann  $\varphi_\Omega$  de  $\Omega$  sur le disque unité  $\mathbf{D}$ , qui conjugue  $P$  à un produit de Blaschke  $B_\Omega = B$ .

On applique le Lemme 7.3.1 à  $B$ .

Notons  $\hat{B}$  le conjugué de  $B_{par}$  par  $\phi$ . L'application  $\hat{B}$  coïncide donc avec  $B_\Omega$  sauf sur le secteur  $S_\Omega$ . On définit sur  $\Omega$  l'application  $F = \varphi_\Omega^{-1} \circ \hat{B} \circ \varphi_\Omega$  qui coïncide avec  $P$  sauf sur l'image du secteur  $S_\Omega$ . Posons

$$G(z) = \begin{cases} F(z) & \text{pour } z \in \Omega \\ P(z) & \text{pour } z \notin \Omega. \end{cases}$$

L'application  $G$  est donc continue, et même ACL puisque  $F$  et  $P$  ne sont différents que sur un secteur.

Soit  $\hat{\mu}$  la forme de Beltrami induite par  $\phi$ ; elle est invariante par  $\hat{B}$ . On définit sur le plan de  $P$  la forme de Beltrami  $\mu$  comme suit :

- sur le bassin immédiat attractif, on pose  $\mu = \varphi_\Omega^* \hat{\mu}$ ,
- sur le reste du bassin, on tire en arrière  $\mu$ ,
- sur le complémentaire, on pose  $\mu = 0$ .

L'application  $G$  laisse  $\mu$  invariante par définition.

La forme de Beltrami  $\mu$  vérifie les hypothèses de décroissance exponentielle du Théorème 5.6.5 d'après le Lemme 7.3.2 ci-après.

Donc il existe une application  $\varphi$  qui intègre  $\mu$  et qui conjugue  $G$  à une application  $\hat{P}$ , holomorphe pp. sur le plan. Cette application est en fait holomorphe (cf la démonstration de 2). De plus,  $\hat{P}$  a un point parabolique en  $\varphi(\beta)$ . Par la normalisation, on obtient le

polynôme  $Q$  de l'énoncé.

■

**Lemme 7.3.2** *La forme de Beltrami vérifie les hypothèses du Théorème 5.6.5.*

**DÉMONSTRATION.** Il existe un voisinage linéarisable  $V$  simplement connexe de  $\beta$  tel que la trace de l'ensemble postcritique dans  $V$  soit contenue dans  $\{\beta\}$ . Notons  $U = P^{-1}(V) \subset \subset V$ . Notons aussi  $\Sigma_\beta$  la trace de  $\varphi_\Omega^{-1}(S_\Omega)$  dans  $U$ . Posons  $\rho = |P'(\beta)|$  et  $K_\mu$  la dilatation de  $\mu$ ; par le théorème de distorsion de Kōbe,

$$\text{Aire}\{z \in \Sigma_\beta, K_\mu > n\} \asymp (1/\rho^{2n})\text{Aire}\Sigma_\beta.$$

Si, pour  $y \in \mathbb{C}$ ,  $f^n(y) = \beta$ , on définit  $\Sigma_y$  comme la réunion des composantes connexes de  $P^{-n}(\Sigma_\beta)$  ayant  $y$  dans son bord. À  $y$ , on associe le produit  $\nu(y)$  des degrés locaux de  $P$  le long de l'orbite de  $y$  ( $y$  compris). Si l'application  $P^n$  est un difféomorphisme local, alors on peut transporter par conjugaison le germe répulsif en  $\beta$  au voisinage de  $y$  sans augmenter la distorsion et sans changer le multiplicateur. En revanche, si  $\nu(y) > 1$ , alors on obtient par le même procédé un germe répulsif dont le module de son multiplicateur est  $\rho^{1/\nu(y)}$ , et le module de l'anneau provenant de  $V \setminus U$  devient  $(\text{mod } V \setminus U)/\nu(y)$ . Au total, tous ces multiplicateurs sont minorés par une constante  $\lambda > 1$ , et la distorsion est uniforme. Par distorsion bornée, il existe donc une constante  $C > 0$  telle que

$$\text{Aire}\{z \in \Sigma_y, K_\mu > n\} \leq (C/\lambda^{2n})\text{Aire}\Sigma_y,$$

pour toute préimage  $y$  de  $\beta$ .

On en déduit que pour  $n$  assez grand,

$$\text{Aire}\{z \in \mathbb{C}, K_\mu > n\} = \sum_{p \geq 0} \sum_{f^p y = \beta} \text{Aire}\{z \in \Sigma_y, K_\mu > n\} \leq \sum_{p \geq 0} \sum_{f^p y = \beta} (C/\lambda^{2n})\text{Aire}\Sigma_y.$$

Par suite,

$$\text{Aire}\{z \in \mathbb{C}, K_\mu > n\} \leq (C/\lambda^{2n})\text{Aire}\cup_{p \geq 0, P^p(y) = \beta} \Sigma_y,$$

qui est finie car ces domaines sont deux à deux disjoints et contenus dans un domaine borné. D'où l'estimation sur  $K_\mu$ . ■

**DÉMONSTRATION DU COMPLÉMENT 3.** La démonstration est la même que celle de la Proposition 5.5.1 de la Partie II. Commençons par estimer la norme  $L^2$  de  $\varphi_z$  sur  $\Sigma_\beta$ . D'après le Lemme 5.5.2,

$$\int_{\Sigma_\beta} |\varphi_z|^2 < \infty.$$

On utilise maintenant le théorème de Kōbe pour estimer la norme sur un voisinage  $\Omega$  de  $K(P)$ :

$$\|\varphi_z\|_{L^2}^2 = \text{Aire}(\Omega \setminus \cup \Sigma_y) + \sum_{P^n y = \beta} \int_{\Sigma_y} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi).$$

Comme  $P^n : \Sigma_y \rightarrow \Sigma_\beta$  est conforme,

$$\int_{\Sigma_y} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) = \int_{\Sigma_\beta} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) |(Q^{-n})'|^2;$$

donc

$$\sum_{P^n_{y=\beta}} \int_{\Sigma_\nu} K_\varphi \cdot \text{Jac}(\varphi) \asymp \left( \int_{\Sigma_\beta} K_\varphi \text{Jac}(\varphi) \right) \cdot \sum_{n \geq 0} |(Q^{-n})'(0)|^2.$$

De plus,  $\sum_{n \geq 0} |(Q^{-n})'(0)|^2 < \infty$ , car, cette somme est comparable à l'aire totale des préimages du secteur qui sont deux à deux disjointes et dans un domaine borné; donc  $\varphi \in W^{1,2}$ . De même, on montre que  $\varphi^{-1} \in W^{1,2}$  aussi. ■

# Chapitre 8

## Déformation $J$ -équivalente de polynômes géométriquement finis

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$ , ayant tous ses points périodiques indifférents paraboliques. On cherche un déploiement  $f_\eta$ , paramétré par un segment, de polynômes sous-hyperboliques (sans points indifférents) ayant des ensembles de Julia homéomorphes à celui de  $f$ .

Plus précisément,

**Définition.** Un polynôme de degré  $d \geq 2$  est dit *géométriquement fini* si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) l'ensemble postcritique est fini sur l'ensemble de Julia,
- (ii) tout point critique est soit prépériodique, soit attiré par un cycle attractif ou parabolique.

En particulier, tous ses cycles indifférents sont paraboliques. On rappelle que l'ensemble de Julia connexe d'un polynôme géométriquement fini est toujours localement connexe. Il s'ensuit qu'il existe un lacet de Carathéodory  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow J_f$  continu surjectif tel que  $\gamma(d.t) = f(\gamma(t))$ .

Voici l'énoncé principal de ce chapitre :

**Théorème 4** *Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$  géométriquement fini et d'ensemble de Julia connexe (et localement connexe). Il existe  $\eta_0 > 0$  et une perturbation  $(f_\eta)_{\eta \in [0, \eta_0]}$  de polynômes sous-hyperboliques pour  $\eta > 0$ , avec  $f_0 = f$ , telle que : il existe un homéomorphisme  $\chi_\eta : J_\eta \rightarrow J_f$  tel que  $\chi_\eta \circ \gamma_\eta = \gamma_f$  et donc qui conjugue  $f_\eta$  à  $f$ .*

**Complément.** Les polynômes  $f_\eta$ ,  $\eta > 0$ , figurent dans  $f$  par une application injective.

Notre moyen sera de montrer que les classes d'équivalence induites par les lacets de Carathéodory pour tous ces polynômes sont les mêmes.

Le fil de la démonstration est donc le suivant :

- définir une perturbation ad hoc à l'aide des applications à allure polynomiale ;

- montrer une propriété de stabilité en contrôlant les orbites critiques ;
- en déduire que les classes d'équivalence sont les mêmes pour définir l'homéomorphisme  $\chi$  par l'identité sur  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ .

Dans la suite, on supposera toujours que les polynômes sont géométriquement finis.

## 8.1 Construction d'un déploiement

Soit  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  un polynôme de degré  $d$  d'ensemble de Julia connexe. Sans perte de généralité, on peut supposer que les cycles attractifs soient en fait superattractifs, qu'il n'y a qu'une seule grande orbite critique dans chaque cycle de Fatou, voire même que deux points critiques dans une même composante sont confondus.

**Proposition 8.1.1** *Il existe un polynôme  $R$  (de degré élevé) tel que, pour  $\eta > 0$  assez petit,  $f_\eta = f + \eta R$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) toutes les orbites critiques prépériodiques de  $f$  sont des orbites prépériodiques de  $f_\eta$ ,
- (ii) tout cycle parabolique ayant  $p$  cycles de pétales devient un cycle répulsif et s'éclate en  $p$  cycles attractifs.

**DÉMONSTRATION.** On considère un polynôme  $R$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (a) les orbites critiques finies  $\{f^n(c)\}_{n \geq 0}$  sont des racines de  $R$  de multiplicité plus grande que celle de  $c$  en tant que point critique de  $f$ ,
- (b) pour chaque cycle parabolique  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ,  $x_i$  est racine simple et  $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{R'(x_i)}{f'(x_i)} = 1$ ,
- (c) une condition linéaire sur les dérivées d'ordre supérieur de  $R$  aux cycles paraboliques qui sera précisée ultérieurement.

Soit  $\{x_i\}_{0 \leq i < k}$  un cycle parabolique. C'est encore un cycle périodique de même période. Calculons, pour  $\eta > 0$ , son multiplicateur :  $(f_\eta^k)'(x_0) = \prod_{1 \leq i \leq k} (f'(x_i) + \eta R'(x_i))$ . En passant au "log", on obtient :

$$\log |(f_\eta^k)'(x_0)| = \sum_{1 \leq i \leq k} \log |f'(x_i)| + \sum_{1 \leq i \leq k} \log \left| 1 + \eta \frac{R'(x_i)}{f'(x_i)} \right| = \eta \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{R'(x_i)}{f'(x_i)} + O(\eta^2) > 0.$$

Donc le cycle est devenu répulsif.

Pour simplifier les notations, on suppose que

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ f^k(z) = \lambda_q z + o(z), \text{ où } \lambda^q = 1, \\ f^{kq}(z) = z + z^{\nu+1} + o(z^{\nu+1}), \text{ où } \nu \in \mathbf{N}^*, \\ R(z) = (z - x_i)R'(x_i) + v_i(z) \text{ au voisinage de } x_i. \end{cases}$$

La condition (c) exprimera le fait que le développement de  $f_\eta^{kq}$  au voisinage de  $x_0$  sera du type

$$f_\eta^{kq}(z) = f^{kq}(z) + \eta z + \eta \hat{h}(z, \eta) \text{ où } \hat{h}(z, \eta) = o(z^{\nu+1}) + O(\eta).$$

On considère deux fonctions  $g$  et  $u$  telles que

$$\begin{cases} g(z) = x_i + h(z), \text{ où } h(z) = O(z), \\ u(z) = O(z). \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f_\eta(g(z) + \eta u(z)) &= f(g(z) + \eta u(z)) + \eta R'(x_i)h(z) + \eta v_i(g(z)) + o(\eta), \\ f_\eta(g(z) + \eta u(z)) &= f \circ g(z) + \eta f'(g(z))u(z) + \eta R'(x_i)h(z) + \eta v_i(g(z)) + o(\eta). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} f_\eta^i = f^i + \eta u_i(z) + o(\eta), \\ g = f^i. \end{cases}$$

On trouve que

$$u_{i+1}(z) = f'(f^i(z))u(z) + v_i(f^i(z)) + R'(x_i)(f^i(z) - x_i).$$

La condition (c) s'énonce ainsi

$$u_{kq}(z) = z + o(z^{\nu+1}).$$

On constate que (c) conduit à un système linéaire en les dérivées successives de  $R$  en chaque point de chaque cycle parabolique; ce système a une infinité de solutions. Par suite, un tel polynôme  $R$  existe.

Vérifions maintenant que, pour  $\eta > 0$  assez petit, on a bien création de  $\nu/q$  cycles attractifs: lorsque  $\eta$  est non nul, on a création de  $\nu$  points fixes de  $f_\eta^{kq}$ , qui sont en fait classés en  $q$ -cycles de  $f_\eta^k$  (d'après le principe de l'argument). En faisant un changement de variable en  $\zeta = \frac{-1}{\nu z^\nu}$ , on obtient que le point fixe crée de  $f_\eta^{kq}$  appartient à un pétale attractif de  $f^{kq}$  (cf la démonstration du Théorème 6.1.1): on en déduit que son multiplicateur est attractif.

La condition (i) est satisfaite grâce à (a). ■

Pour  $\eta \in \mathbf{D}$ , on pose  $f_\eta = f + \eta R$ . Le résultat en vue est :

**Proposition 8.1.2** *Il existe  $\eta_0 > 0$ , un ouvert  $S \supset ]0, \eta_0]$ , des ouverts  $(U'_\eta, U)_{\eta \in S}$ , tels que  $(U'_\eta \xrightarrow{f_\eta} U)_{\eta \in S}$  soit une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré  $d$ . De plus, les cycles paraboliques ont été perturbés en un cycle répulsif, et en cycles attractifs (en nombre égal à celui des cycles de pétales).*

**DÉMONSTRATION.** On note  $U$  un disque bordé par une équipotentielle de  $f$  de très grande valeur, et pour tout  $\eta \in \mathbf{D}$ ,  $U'_\eta = f_\eta^{-1}(U)$ . L'image par  $f$  de  $\partial U'$  fait  $d$  fois le tour de  $\partial U$ , donc si  $\eta$  est assez petit, il en sera de même pour le déploiement: du coup,  $(U'_\eta \xrightarrow{f_\eta} U)_{|\eta| < \eta_0}$  est une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré  $d$  (voir [DH2] et Partie II, Chapitre 5).

Le reste est prouvée par la Proposition 8.1.1. ■

## 8.2 Une propriété de continuité

D'après la théorie des applications à allure polynomiale, il existe  $\phi_\eta : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{q.c.} \overline{\mathbb{C}}$ , tangente à l'identité à l'infini et conjuguant  $f_\eta$  à un polynôme  $P_\eta$  de degré  $d$ .

**Lemme 8.2.1** *La dépendance des  $\phi_\eta$  est continue sur un voisinage complexe de l'origine, et on a  $\phi_0 = id^{té}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Reprenons la démonstration du théorème de redressement de Douady-Hubbard dans notre cas.

Soit  $\psi_f : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$  la coordonnée de Böttcher de  $f$ ; on a  $\psi_f(\partial U) = (|z| = R)$ . On définit  $\tau_\eta : \partial U_\eta' \rightarrow (|z| = R^{1/d})$  par  $\psi_f \circ f_\eta = (\tau_\eta)^d$ , pour  $\eta$  appartenant à un voisinage de l'origine. On normalise  $\tau_\eta$  de façon que  $\eta \mapsto \tau_\eta^{-1}$  soit continue et que  $\tau_0 = \psi_f$ . On relève  $(\psi_f|_{\partial U}, \tau_\eta)$  dans les revêtements universels de  $U \setminus U_\eta'$  et  $(R^{1/d} < |z| < R)$ , normalisé à  $\mathbb{D}$ , de telle sorte qu'on ait toujours une dépendance continue par rapport à  $\eta$ ; on considère alors l'extension de Douady-Earle ([DE]) qui, par conforme naturalité, descend en  $\Psi_\eta : U \setminus U_\eta' \rightarrow (R^{1/d} < |z| < R)$ , prolongeant  $(\psi_f|_{\partial U}, \tau_\eta)$ , et continue en fonction de  $\eta$ . On a alors  $\Psi_0 = \psi_f$ . Soient  $\mu_0$  la forme de Beltrami induite par la structure complexe standard, et  $\mu_\eta = \Psi_\eta^* \mu_0$ ; alors  $\|\mu_\eta - \mu_0\|_\infty$  tend vers zéro avec  $\eta$ . On prolonge les  $\mu_\eta$  à  $\overline{\mathbb{C}}$  par  $f_\eta^* \mu_\eta$ , et sinon par  $\mu_0$ . On a donc une famille analytique de formes de Beltrami uniformément bornée et à support dans un compact fixe. Il s'ensuit que, pour tout  $\eta$ , il existe une unique application quasiconforme  $\phi_\eta : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  qui intègre  $\mu_\eta$  et qui est tangente à l'identité à l'infini. De plus, les constantes de dilatation tendent vers 1 quand  $\eta$  tend vers zéro. Par unicité, on a  $\phi_0 = id^{té}$ . Par construction,  $\phi_\eta$  conjugue  $f_\eta$  à un polynôme  $P_\eta$ , avec  $P_0 = f$ . ■

**Corollaire 8.2.2** *La famille  $\{P_\eta\}_{\eta \in S}$  est structurellement stable.*

**DÉMONSTRATION.** Nous allons montrer que le nombre de cycle attractif est constant sur  $S$ , ce qui montrera le Corollaire d'après le Théorème 4.5.4. Pour cela, il suffit de vérifier que les points critiques qui étaient attirés par un cycle parabolique le sont maintenant par un cycle attractif qu'il a créé. En effet, un cycle attractif attire toujours un point critique; mais comme ceux de  $P_\eta$  sont tous occupés, on en déduit qu'il ne peut s'en créer. D'autre part, d'après la Proposition 8.1.2, aucun ne disparaît.

D'après le Lemme 8.2.1, on peut étudier  $f_\eta$  plutôt que  $P_\eta$ . Considérons un point critique  $c$  et un point  $k$ -périodique parabolique  $\alpha$  tel que  $f^{kn}(c) \rightarrow \alpha$ . Si celui-ci est de nombre de rotation  $p/q$ , alors  $f^{kqn}(c)$  appartient à un même pétale attractif pour  $n$  assez grand. Lorsque l'on fait la perturbation, les points de ce pétale sont attirés par le nouveau cycle créé situé dans ce pétale. ■

On note  $\rho_\eta$  l'inverse de  $\phi_\eta$ .

On note  $\varphi_\eta$  la coordonnée de Böttcher de  $P_\eta$ , bien définie à l'infini, et  $\psi_\eta$  son inverse.

**Proposition 8.2.3** *La fonction  $\eta \mapsto \psi_\eta$  est continue en zéro.*

DÉMONSTRATION. - Pour tout  $\eta > 0$ ,  $\psi_\eta(z) = z + o(1)$  à l'infini, donc ces applications sont localement uniformément bornées et on peut extraire une suite  $\eta_n \rightarrow 0$  telle que  $\psi_{\eta_n} \rightarrow \hat{\psi}$  uniformément sur tout compact.  $\hat{\psi}$  est un isomorphisme, car  $\hat{\psi}(z) = z + o(1)$ .

- De plus, comme  $\phi_\eta$  est  $K_\eta$ -quasiconforme, avec  $K_\eta \rightarrow 1$ , il en est de même pour les inverses  $\rho_{\eta_n}$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que cette suite converge uniformément sur tout compact : sa limite est l'identité.

Or

$$\forall \eta, f_\eta \circ \rho_\eta \circ \psi_\eta(z) = \rho_\eta \circ \psi_\eta(z^d).$$

En passant à la limite, on obtient  $f \circ \hat{\psi}(z) = \hat{\psi}(z^d)$ . Comme  $\hat{\psi}$  est tangente à l'identité à l'infini, il s'agit de la coordonnée de Böttcher de  $f$ .



### 8.3 Preuve du théorème

On suppose maintenant que  $f$  est géométriquement fini de degré  $d$ . Le déploiement associé est composé de polynômes sous-hyperboliques ayant des ensembles de Julia connexes et localement connexes. D'après le paragraphe ci-dessus, les coordonnées de Böttcher sont continues en  $\eta = 0$ .

Pour chaque  $\eta$ , on définit la relation d'équivalence  $\sim_\eta$  suivante sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  :

$$t \sim_\eta t' \iff \gamma_\eta(t) = \gamma_\eta(t')$$

où  $\gamma_\eta$  est le lacet de Carathéodory de  $P_\eta$ . Selon [Do5], l'ensemble de Julia  $P_\eta$  est homéomorphe au quotient  $\mathbb{T} / \sim_\eta$ .

Nous allons montrer que ces classes d'équivalence sont toutes les mêmes : on en déduira alors que les dynamiques sur les ensembles de Julia sont topologiquement conjuguées.

Comme tous les polynômes sont géométriquement finis il suffit de le vérifier sur les cycles de  $J_f$ .

Si le cycle est répulsif, alors tout rayon qui aboutit à un point de ce cycle continue à y aboutir pour  $\eta$  assez petit en vertu de la Proposition 8.3.1 ci-dessous, et donc sur  $S$  par stabilité structurelle.

**Proposition 8.3.1** ([DH1]) *Soient  $f$  un polynôme et  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . On suppose que  $\mathcal{R}_f(\theta)$  aboutit à un point prépériodique répulsif  $z_0 \in J_f$  et qu'aucun  $f^i(z_0)$  n'est un point critique de  $f$  pour aucune valeur de  $i \geq 0$ . Il existe alors un voisinage  $U$  de  $f$  tel que :  $\forall g \in U$ ,  $\gamma_g(\theta) = z(g)$  et l'application*

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ (g, s) &\mapsto \psi_g(s, \theta) \end{aligned}$$

*est continue, holomorphe en  $g$ .*

S'il s'agit d'un cycle parabolique, comme les rayons sont périodiques et qu'il n'y a création dans  $S$  que d'un seul cycle répulsif, ces rayons aboutissent en ces points. ■

**Remarque.** Ce résultat peut également être formulé de la façon suivante : tout polynôme géométriquement fini est accessible par des polynômes de même degré, sous-hyperboliques, avec ensembles de Julia structurellement stables. De plus, la dynamique de l'ensemble de Julia des polynômes sous-hyperboliques est conjuguée à celle du polynôme limite.

# IV. Applications de la chirurgie à la famille quadratique

Cette partie est consacrée à la famille quadratique et à l'ensemble de Mandelbrot.

Le premier chapitre rappelle les propriétés combinatoires des polynômes hyperboliques et le lien avec  $M$ . Le pont entre les deux est effectué grâce aux *groupoïdes dilatants* (voir la définition 103) qui caractérisent dynamiquement les arbres de Hubbard. On en déduit des propriétés géométriques.

**Théorème 5** *Soit  $c \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \neq 0$ , primitif; on note  $K = H_c \cap J_c$ , où  $H_c$  est l'arbre de Hubbard du polynôme  $P_c$ .  $K$  est un ensemble de Cantor dont le complémentaire est un domaine de John. Sa dimension de Hausdorff est dans  $]0, 2[$ , et sa mesure associée est finie et non nulle. En particulier, toute "arête" de cette arbre est supportée par une quasidroite.*

Dans cette partie, nous donnons également deux démonstration du Théorème de Modulation de A. Douady et J.H. Hubbard, qui explique la présence de petites copies de  $M$  dans lui-même.

**Théorème 6 de Modulation (A. Douady & J.H. Hubbard)**

(a) *Si  $W$  est une composante primitive de  $M$  de période  $k$ , on peut trouver un voisinage  $\Lambda$  de  $\overline{W}$ , et deux familles d'ouverts  $(U_c', U_c)_{c \in \Lambda}$  tels que les  $f_c = (U_c' \xrightarrow{P_c^k} U_c)$  forment une famille mandelbrotique.*

(b) *Si  $W$  n'est pas primitive, on peut seulement construire  $\Lambda$ , les  $U_c'$  et les  $U_c$  de façon que  $\Lambda$  soit un voisinage de  $\overline{W} \setminus \{c_1\}$ , racine de  $W$ , et que  $\chi$  induise un homéomorphisme de  $M_f$  sur  $M \setminus \{1/4\}$ . De plus,  $P_{1/4}$  figure de manière rigide dans  $P_{c_1}$ .*

**Corollaire 7** *Si  $W$  est primitive, la petite copie de  $M$  est quasiconforme à  $M$ . Sinon, tout compact de la copie privée de la racine est quasiconforme à un compact de  $M$ .*

Ici, il faut entendre "quasiconforme" au sens de Mañé-Sad-Sullivan.

La première démonstration, au Chapitre 10, détaille la démonstration de [Do3]. La seconde, au Chapitre 11, utilise *la chirurgie*. La première permet de montrer la continuité, et par suite la présence de copies quasiconformes de  $M$  dans lui-même. La seconde construit *directement* le polynôme modulé à partir du centre de la copie et du "modulateur". Cette construction, modulo un lemme technique, devrait pouvoir être généralisée à des polynômes de degré supérieur. Le reste du Chapitre 11 s'intéresse à l'opération de modulation. On caractérise topologiquement l'ensemble de Julia d'un polynôme modulé à partir du centre et du modulateur :

**Théorème 8** *L'opération de modulation agit sur les ensembles de Julia remplis comme suit :  $K_{c_0 \perp c}$  est homéomorphe à  $K_{c_0}$  dans lequel on a remplacé les composantes connexes de l'intérieur par des "copies" de  $K_c$ .*

# Chapitre 9

## Polynômes hyperboliques et combinatoire de $M$

### 9.1 Propriétés de l'ensemble de Julia

Soit  $c \in \mathcal{D}_0$ ; on rappelle que l'origine est  $k$ -périodique et qu'en conséquence son ensemble de Julia est connexe. De plus, il existe une métrique conforme  $\rho(z)|dz|$  définie sur un voisinage  $U$  de  $J_c$  telle que  $P_c$  soit fortement dilatante :

$$\exists \lambda > 1, \forall z \in P_c^{-1}(U), \|T_z P_c\| > \lambda.$$

On en déduit que son ensemble de Julia est aussi localement connexe et de mesure nulle.

D'après le théorème de Carathéodory, la coordonnée de Böttcher de  $P_c$  se prolonge en  $\psi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}_c$ .

L'origine est un point super-attractif; on note  $U_0$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}_c$  qui le contient. Il existe une unique application conforme  $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{D}$  qui conjugue  $P_c^k$  à  $z \mapsto z^2$ . Les cercles centrés en 0 et les rayons forment deux feuilletages de  $\mathbb{D}$  qu'on transporte sur  $U_0$ , puis sur toutes ses préimages par images réciproques.

De plus, comme  $K_c$  est plein, pour toute paire de points distincts  $(x, y)$  de  $K_c$ , il existe une unique composante connexe  $C_{x,y}$  de  $K_c \setminus \{x, y\}$  qui admet  $x$  et  $y$  dans son bord.

**Quasi-autosimilitude.** Du fait que la dynamique est hyperbolique au voisinage de  $J_c$ ,  $c \in \mathcal{D}_0$ , il suffit d'étudier  $J_c$  à de grandes échelles. Plus précisément,  $J_c$  est *quasi-autosimilaire*.

**Définitions.** Soit  $K \subset \mathbb{C}$  un compact.

▷  $K$  est *autosimilaire* s'il existe un rayon  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , pour  $r > 0$  assez petit, il existe une application affine  $\gamma : D(x, r) \rightarrow D(\gamma(x), r')$  telle que

$$\begin{cases} \gamma(D(x, r) \cap K) \subset K, \\ r' \geq r_0. \end{cases}$$

▷  $K$  est  *$k$ -quasi-autosimilaire*,  $k \geq 1$ , s'il existe un rayon  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ ,

pour  $r > 0$  assez petit, il existe une application continue injective  $\gamma : D(x, r) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\begin{cases} \gamma(D(x, r) \cap K) \subset K ; \\ \forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in D(x, r), (1/k) \cdot \left| \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \right| \leq \left| \frac{\gamma(z_1) - \gamma(z_2)}{\gamma(z_3) - \gamma(z_4)} \right| \leq k \cdot \left| \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \right| ; \\ \gamma(D(x, r)) \supset D(y, r_0) \text{ pour un certain } y \in \gamma(D(x, r)). \end{cases}$$

L'application  $\gamma$  est une  $k$ -quasi-isométrie et on mesure sa distorsion par  $\log k$ .

**Proposition 9.1.1** ([Su1]) *Si  $c \in \mathcal{D}_0$  alors  $J_c$  est quasi-autosimilaire pour tout  $k$  proche de 1.*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $c$  est périodique, l'orbite critique est finie et dans l'intérieur de  $K_c$ . Par suite, pour tout  $x \in J_c$ , il existe  $r_x > r_x' > 0$  tels que  $D(x, r_x)$  soit disjoint de l'orbite critique. On extrait un sous-recouvrement fini  $\{D(x_i, r_i')\}$  de  $J_c$ . Du coup,  $\{D(x_i, r_i)\}$  est aussi un recouvrement fini de  $J_c$  qui contient le précédent.

Comme les  $D_i$  sont disjoints de l'ensemble postcritique, toutes les branches inverses de  $P_c^n$  sont bien définies pour tout  $n \geq 1$ ; et comme  $P_c$  est fortement dilatante au voisinage de  $J_c$ , ces branches inverses contractent exponentiellement vite les distances.

Les branches inverses de  $P_c$  permettent de construire une suite de recouvrements telle que le diamètre du plus grand ouvert décroît exponentiellement vite.

De plus, par le Théorème 3.0.6 de Kôbe, il existe un  $k \geq 1$  qui ne dépend que du minimum de  $r_i/r_i'$  tel que  $P_c^{-n}$  soit une  $k$ -quasi-isométrie. Notons que pour diminuer la valeur de  $k$ , il faut aussi diminuer  $r_0$  de plus en plus, et donc considérer des recouvrements ayant de plus en plus d'éléments. ■

**Dimension de Hausdorff.** Soit  $K \subset \mathbb{C}$  un compact du plan. Pour  $0 \leq \alpha \leq 2$ , on définit  $H_\alpha(K)$  la  $\alpha$ -mesure de Hausdorff de  $K$ , comme suit : soit  $\delta > 0$ , on définit

$$H_\alpha^\delta(K) = \inf \left\{ \sum r_j^\alpha, K \subset \cup D(x_j, r_j) \text{ et } r_j \leq \delta \right\},$$

et

$$H_\alpha(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\alpha^\delta(K).$$

Cette limite existe dans  $[0, \infty]$ . Soient  $\delta > 0$  et  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2$ , alors  $\delta^{\beta-\alpha} H_\alpha^\delta(K) \geq H_\beta^\delta(K)$ , et donc

$$\text{si } H_\alpha(K) < \infty \text{ alors } H_\beta(K) = 0.$$

Par suite, la dimension de Hausdorff de  $K$  est

$$\dim_H(K) = \inf \{ \alpha > 0, H_\alpha(K) = 0 \}.$$

**Théorème 9.1.2** [Su1]) *Soit  $c \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ . La dimension de Hausdorff  $\alpha$  de  $J_{c_0}$  vérifie  $1 < \alpha < 2$ . De plus, sa mesure de Hausdorff associée est finie non nulle.*

## 9.2 Arbres de Hubbard et propriétés combinatoires

Un point  $z \in J_c$  (resp. une composante connexe  $U$  de  $\overset{\circ}{K}_c$ ) sépare  $x$  de  $y$  s'ils ne sont pas dans la même composante connexe de  $K_c \setminus \{z\}$  (resp.  $K_c \setminus \overline{U}$ ).

Pour chaque composante connexe  $U$  de  $\overset{\circ}{K}_c$ , on définit une projection  $\pi_U : K_c \rightarrow \overline{U}$  définie comme suit ([Do5]):

- si  $x \in \overline{U}$ , alors  $\pi_U(x) = x$ ,
- sinon, il existe un unique  $y \in \partial U$  qui sépare  $x$  du centre de  $U$ , et on note  $\pi_U(x) = y$ .

Ceci nous permet de définir des arcs réglementaires dans  $K_c$ :

L'arc réglementaire  $[x, y]_c$  est formé:

- des points qui séparent  $x$  de  $y$ ,
- dans chaque composante qui sépare  $x$  et  $y$ , de l'arc obtenu en reliant  $\pi_U(x)$  à  $\pi_U(y)$  dans  $\overline{U}$  suivant les rayons.

On obtient ainsi un arc topologique plongé dans le plan.

**Définition.** L'arbre de Hubbard  $H_c$  d'un polynôme quadratique super-attractif  $P_c$  est l'enveloppe réglementaire de l'orbite critique dans  $K_c$ , i.e. la réunion de tous les arcs réglementaires joignant deux points de l'orbite critique. On lui adjoint le bassin immédiat du cycle afin d'obtenir un arbre décoré.

L'arbre augmenté  $\hat{H}_c$  est  $H_c \cup [\gamma_c(0), \gamma_c(1/2)]_c$ .

Ces arbres capturent toute l'information dynamique et combinatoire de  $P_c$  sur  $K_c$ . Rappelons que A. Poirier donne un critère, fondé sur le théorème de caractérisation topologique des fractions rationnelles de Thurston, qui permet de savoir si un arbre abstrait plongé dans le plan est réalisable par un polynôme à ensemble postcritique fini (voir [Po]). Le cas des arbres quadratiques avait été résolu par J.H. Hubbard. De plus, A. Douady et J.H. Hubbard avaient aussi montré qu'on pouvait reconstruire l'ensemble de Julia en prenant une limite projective des préimages de l'arbre de Hubbard.

Dans la suite de ce paragraphe, nous énumérons des propriétés combinatoires dont les démonstrations se trouvent dans [DH1, La1, TL1].

▷ L'arbre de Hubbard est invariant par  $P_c$  et  $P_c$  est injective sur la fermeture des composantes connexes de  $H_c \setminus \{0\}$ .

▷ La valeur critique  $c$  est une extrémité de  $H_c$ .

▷ Soit  $U$  une composante connexe du bassin immédiat de l'orbite critique. Son bord contient exactement un point périodique  $y$  dont la période divise  $k$  dans  $H_c$ . Si  $y$  est  $k$ -périodique, alors il existe exactement deux rayons externes de période  $k$  qui  $y$  aboutissent, et dont les orbites sont disjointes. Sinon, tous les rayons externes qui aboutissent en  $y$  appartiennent au même cycle et sont de période  $k$ .

▷ On note  $\theta_-(c)$  et  $\theta_+(c)$ ,  $0 < \theta_-(c) < \theta_+(c) < 1$ , les arguments des rayons qui aboutissent au point périodique de la composante connexe  $U_1$  qui contient  $c$ , et qui sont adjacents à  $U_1$ . Ce sont les arguments de  $H_c$ .

▷ Les points  $\beta = \gamma_c(0)$  et sa préimage  $\beta'$  sont des extrémités de  $\hat{H}_c$  et n'admettent qu'un

rayon.

On pose

$$\begin{cases} I_i(c) = [\theta_+/2 + (i-1)/2, \theta_-/2 + i/2], & J_i(c) = \{z \in J_c, \arg_c z \in I_i(c)\}, \\ \hat{I}_i(c) = [\theta_-/2 + i/2, \theta_+/2 + i/2], & \hat{J}_i(c) = \{z \in J_c, \arg_c z \in \hat{I}_i(c)\}, \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

▷ Si un point  $z \neq 0 \in J_c$  a un argument dans  $I_i(c)$  (resp.  $\hat{I}_i$ ), alors  $z \in J_i(c)$  (resp.  $z \in \hat{J}_i(c)$ ).

▷  $\hat{J}_i(c) \cap H_c = \emptyset$ .

▷ Soit  $z \in J_c$  un point périodique. L'orbite de tout rayon par  $t \mapsto 2t$  qui aboutit en  $z$  est périodique et est contenue dans un demi-cercle.

▷  $P_c$  admet deux points fixes :  $\beta = \gamma_c(0)$  et  $\alpha$  qui admet au moins deux rayons externes.

▷ On note  $PJ_c = \{z \in J_c \text{ périodique, } \# \arg_c(z) \geq 2\}$ .  $PJ_c \subset H_c$  et tout point  $z$  de  $PJ_c$  a au moins un point de son orbite dans  $[\alpha_c, \alpha_c']$  et aucun dans  $\gamma_c([\theta_-, \theta_+])$ .

▷ On rappelle que deux rayons sont équivalents s'ils aboutissent au même point. Deux rayons d'argument  $t_1$  et  $t_2$  sont équivalents si et seulement si pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $i = 1, 2$  tel que  $2^n t_1$  et  $2^n t_2$  soient dans le même  $I_i(c)$  ou  $\hat{I}_i(c)$ . Si ces rayons sont périodiques et différents, alors ils sont équivalents si et seulement si pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $i$  tel que  $2^n t_1$  et  $2^n t_2$  soient dans le même  $I_i(c)$ .

### 9.3 Chemins combinatoires dans $M$

Ce paragraphe rassemble des résultats portant sur les liens qui existent entre la combinatoire d'arbres de Hubbard de polynômes et la combinatoire dans  $M$ . Ceux-ci permettent de définir, pour tout  $c \in \mathcal{D}_0$ , un *chemin combinatoire* de l'origine à  $c$  qui définit l'arbre associé à  $c$ .

**Membres et sillages.** Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $M$ . Dans cette composante, il existe un point attractif  $\alpha_c$  de période  $k \geq 1$ . L'application  $c \in W \mapsto \alpha_c$  est holomorphe et se prolonge continûment au bord. Sur le bord, la fonction multiplicateur se prolonge aussi continûment en un homéomorphisme de  $\partial W$  dans  $\mathbf{S}^1$ . La racine de  $W$  correspond à l'unique  $c_1 \in \partial W$  tel que  $(P_{c_1}^k)'(\alpha_{c_1}) = 1$ . Il existe deux rayons d'argument  $0 < \theta_- < \theta_+ < 1$  qui aboutissent en  $c_1$  dans  $M$ ; ces rayons sont les mêmes que ceux associés au centre de  $W$ . On dit que  $W$  est *primitive* si  $\alpha_{c_1}$  n'est pas de période plus petite que  $k$ .

En effectuant un pincement du point  $\alpha$  avec un cycle  $kq$ -répulsif, de nombre de rotation  $p/q$  (voir Partie III, Chapitre 7), on montre que  $\alpha$  devient le point d'aboutissement de  $q$  rayons. Le  $p/q$ -sillage  $S_W(p/q)$  de  $W$  correspond, dans le plan des paramètres, à l'ouvert ne contenant pas l'origine bordé par les rayons qui aboutissent au paramètre  $c_{p/q} \in \partial W$  tel que le multiplicateur de  $\alpha_c$  soit  $e^{2i\pi(p/q)}$ .

Dans le plan dynamique, le déploiement défini au Chapitre 8 de la Partie III et le théorème des fonctions implicites montrent que ces rayons continuent à aboutir en  $\alpha_c$  tant

que  $c$  reste dans le sillage. On définit le  $p/q$ -membre de  $W$  par  $M_W(p/q) = S_W(p/q) \cap M$ . J.C. Yoccoz a montré que, pour toute composante hyperbolique  $W$ ,  $M_W(0) \setminus \overline{W}$  est composé de la réunion de tous les  $p/q$ -membres de  $W$ ,  $0 < p/q < 1$  (voir [Hu]). De plus, le diamètre de ses membres est un  $O(1/q)$ .

**Relation d'ordre.** On définit une relation d'ordre partielle sur  $\mathcal{D}_0$  en utilisant les arguments associés. On rappelle que les arguments associés  $(\theta_-(c), \theta_+(c))$  correspondent aux rayons qui aboutissent à la racine de la composante connexe contenant  $c$  en y étant adjacent. On pose  $m(c) = [\theta_-(c), \theta_+(c)]$ . Soient  $c \neq c'$  dans  $\mathcal{D}_0$ . Ou bien  $m(c) \cap m(c') = \emptyset$ , ou bien l'un est contenu dans l'autre. On définit ainsi la relation d'ordre

$$c < c' \iff \overset{\circ}{m}(c) \supset m(c').$$

Si  $c < c'$ , alors pour tout  $z \in PJ_c$ , il existe un unique  $z' \in PJ_{c'}$  tel que  $arg_c(z) = arg_{c'}(z')$ . En fait, par le théorème des fonctions implicites, il existe même une application holomorphe  $\lambda \mapsto z(\lambda) \in PJ_\lambda$  telle que  $z(c) = z$  et  $z(c') = z'$  définie sur un voisinage connexe de  $c$  et  $c'$ . Le domaine de définition de cette application (qui conserve les mêmes rayons d'aboutissement) est de la forme  $S_W(0) \setminus \overline{W}$  pour une composante hyperbolique  $W$ .

**Remarque.** Si  $c$  est strictement préperiodique ( $c \in \mathcal{D}_2$ ), on peut aussi lui associer des rayons externes et étendre la relation d'ordre. Si l'orbite de  $c$  est disjointe de  $\gamma_c(0)$ , alors on lui associe le plus petit et le plus grand argument dont le rayon aboutit en  $c$ , et  $m(c)$  l'intervalle entre ces points. Sinon, il existe un seul rayon (dyadique) qui aboutit en  $c$ , et  $m(c)$  est réduit au singleton formé par cet angle.

**Chemins combinatoires.** Soit  $c' \in \mathcal{D}_0$ . Son *chemin combinatoire*  $ch(c')$  est l'ensemble des  $c \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  plus petits que  $c'$ . C'est un ensemble totalement ordonné dont l'élément minimal est l'origine et l'élément maximal est  $c'$ . Il y a des points remarquables dans  $ch(c')$ , à savoir les *points de bifurcation* de  $ch(c')$ . Il s'agit des points  $\hat{c}$  tels qu'il existe  $z \in PJ_{\hat{c}}$  avec  $\#arg_{\hat{c}}(z) \geq 3$ , et pour tout  $c < \hat{c}$  ces arguments ont des points d'aboutissement disjoints. Les points de bifurcation appartiennent à  $\mathcal{D}_0$  et ils sont en nombre fini si  $c'$  est primitif.

De plus, si  $c_1, c_2, \dots, c_\nu$  sont les points de bifurcation (ordonnés) de  $ch(c')$ , alors  $k(c_1) < k(c_2) < \dots < k(c_\nu)$ , où  $k(c)$  est la période de  $c \in \mathcal{D}_0$ .

## 9.4 Groupoïdes

Un *groupoïde dilatant* (ou plus simplement *groupoïde*)  $\Gamma$  est une collection finie  $\{U_i, \gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$  où les  $U_i$  sont des quasidisques ouverts du plan, deux à deux disjoints, et  $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$  est une application conforme telle que  $U_i \subset V_i$ . Si  $i \neq j$ , ou bien  $U_i \subset V_j$  ou bien  $U_i \cap V_j = \emptyset$ . À  $\Gamma$  on associe une application éventuellement multivaluée

$$f_\Gamma : \cup \overline{U}_i \rightarrow \mathbb{C} \\ z \in \overline{U}_i \mapsto \gamma_i(z).$$

Pour chaque  $i$ ,  $\gamma_i$  admet un point fixe  $\alpha_i$  parabolique ou répulsif dans  $\overline{U}_i$ . L'ensemble limite  $\Lambda(\Gamma)$  d'un groupoïde est l'ensemble des  $z \in \cup \overline{U}_i$  qui peuvent être itérés une infinité de fois par  $f_\Gamma$  :

$$\Lambda(\Gamma) = \{z \in \cup \overline{U}_i, \forall k \geq 0, \exists i_1, \dots, i_k \text{ tels que } f_\Gamma^k(z) \in \cup \overline{U}_{i_k}\}.$$

Autrement dit,  $\Lambda(\Gamma) = \cap_{n \geq 0} f_\Gamma^{-n}(\cup \overline{U}_i)$ . C'est un ensemble compact qui vérifie  $f_\Gamma^{-1}(\Lambda(\Gamma)) = \Lambda(\Gamma)$ .

Dans la suite, on fera en outre les hypothèses techniques suivantes :

- les points fixes  $\alpha_i$  sont tous répulsifs ;
- les applications  $\gamma_i$  admettent un prolongement univalent à un domaine  $W_i$  contenant  $\overline{U}_i$  ;
- pour tous  $i \neq j$ ,  $\#(\overline{U}_i \cap \overline{U}_j) \leq 1$  ;
- pour tout  $i$ ,  $\gamma_i((\partial U_i \cap \partial V_i) \setminus \Lambda(\Gamma)) \cap (\cup_{j \neq i} \overline{U}_j) = \emptyset$  ;
- si  $U_i \cap V_j = \emptyset$ , alors  $\overline{U}_i \cap \overline{V}_j$  a au plus un point ; ce point est alors un point fixe pour un  $\gamma_k$  et  $U_k \subset V_j$  ;
- $\mathbb{C} \setminus (\cup \overline{U}_i)$  est un domaine de John ; cette condition ne nous servira qu'ultérieurement.

**Proposition 9.4.1** *Soit  $\Gamma$  un groupoïde engendré par  $n$  applications. Il existe un sous-ensemble  $X_\Gamma$  de l'espace des suites infinies d'un alphabet à  $n$  éléments, une application continue  $\chi : X_\Gamma \rightarrow \Lambda(\Gamma)$  surjective qui semi-conjuge le décalage à gauche sur  $X_\Gamma$  à l'application  $f_\Gamma : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)$  associée.*

On rappelle que deux suites sont proches si elles ont beaucoup de leurs premiers éléments en commun.

**DÉMONSTRATION.** Commençons par définir une matrice de transition  $T = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de la manière suivante : si  $U_j \subset V_i$  alors  $a_{i,j} = 1$ , et sinon  $a_{i,j} = 0$ .

On définit  $X_\Gamma$  comme étant l'ensemble des suites  $(i_j)_{j \geq 1}$  de  $\{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$  telles que  $a_{i_j, i_{j+1}} = 1$  pour tout  $j \geq 1$ .

On définit  $\chi : X_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  comme suit.

Soit  $(i_j)_{j \geq 0} \in X_\Gamma$ . Pour tout  $j \geq 1$ , on construit une suite décroissante de compacts connexes. On note  $K_{i_1} = \overline{U}_{i_1}$  et

$$K_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = \gamma_{i_1}^{-1}(K_{i_2 \dots i_{k+1}}).$$

Comme les points fixes sont répulsifs, le diamètre de  $K_{i_2 \dots i_n}$  tend vers zéro, et on pose :

$$\chi(i_j) = \cap_{j \geq 1} K_{i_1 i_2 \dots i_j}.$$

Cette application est continue car si deux suites sont proches, alors elles ont les mêmes premiers termes et leurs images sont dans un même compact  $K_{i_1 \dots i_k}$  dont le diamètre tend vers zéro uniformément avec  $k$ .

Si  $z \in K_{i_1 i_2 \dots i_k}$ , alors  $\gamma_{i_1}(z) \in K_{i_2 i_3 \dots i_k} \subset \overline{U}_{i_2}$ . Par suite, l'image  $z$  d'un point de  $X_\Gamma$  peut être itéré une infinité de fois et  $z \in \Lambda(\Gamma)$ .

Il reste à vérifier que  $\chi$  est surjective. Soit  $z \in \Lambda(\Gamma)$ ; le point  $z$  peut donc être itéré une infinité de fois: on lui associe cet itinéraire: ou bien  $z$  est un point fixe  $\alpha_i$  et on lui associe la suite constante  $i$ ; ou bien, il est dans un  $\overline{U}_i$ . Son image  $z_1 = \gamma_{i_1}(z)$  est aussi dans un  $\overline{U}_{i_2}$ , et ainsi de suite... on obtient donc une suite de  $X_\Gamma$ .

Il est clair que cette application conjugue  $f_\Gamma$  au sous-décalage à gauche définie par  $T$ , i.e. les suites admissibles.

■

Défaut d'injectivité. Soient deux suites  $(i_k)_{k \geq 1}$  et  $(j_k)_{k \geq 1}$  qui ont même image  $z$  par  $\chi$ . Soit  $k_0$  le plus petit entier tel que  $i_k \neq j_k$ . Ceci implique que

$$\zeta = \gamma_{i_{k_0}} \circ \gamma_{i_{k_0-1}} \circ \dots \circ \gamma_{i_1}(z) \in \overline{U}_{i_{k_0}} \cap \overline{U}_{j_{k_0}}.$$

Le point  $\zeta$  admet plusieurs itinéraires, selon que l'on commence par  $\gamma_{i_{k_0}}$  ou  $\gamma_{j_{k_0}}$ .

On note  $S$  l'ensemble des  $z$  qui appartiennent à plusieurs  $\overline{U}_i$ , et  $I(z)$  l'ensemble des itinéraires de  $z$ . On considère la relation d'équivalence suivante sur les suites :

$$(i_k)_{k \geq 1} \asymp (j_k)_{k \geq 1} \text{ si } \exists 1 \leq k_0 \leq \infty \text{ tel que } \begin{cases} \text{Pour } k \leq k_0, i_k = j_k, \\ \exists z \in S, (i_k)_{k > k_0}, (j_k)_{k > k_0} \in I(z). \end{cases}$$

Par suite,  $\Lambda(\Gamma)$  est homéomorphe à  $X_\Gamma / \asymp$ .

**Décomposition d'un groupoïde.** À un groupoïde  $\Gamma$ , on associe un automate fini qui reconnaît les orbites inverses d'éléments de  $\Lambda(\Gamma)$ . On définit la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\{1, \dots, n\}$  par  $i \sim j$  si pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $V_k \supset (U_j \cup U_i)$ , soit  $V_k \cap (U_j \cup U_i) = \emptyset$ . On note  $[i]$  la classe d'équivalence de  $i$ .

Rappelons qu'un automate fini est la donnée d'un quintuplet  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_I, Q_F)$  tel que:

- $Q$  est un ensemble fini appelé l'ensemble des états;
- $\Sigma$  est un alphabet;
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  est la fonction de transition de l'automate;
- $Q_I \subset Q$  l'ensemble des états initiaux;
- $Q_F \subset Q$  l'ensemble des états terminaux.

Le langage reconnu est l'ensemble des mots  $m = a_1 a_2 \dots a_n$  de  $\Sigma$  tels qu'il existe  $q_0, q_1, \dots, q_n \in Q$  vérifiant  $q_i \in \delta(q_{i-1}, a_i)$ ,  $q_0 \in Q_I$  et  $q_n \in Q_F$ . À un automate fini, on associe le graphe  $G(\mathcal{A})$  orienté et étiqueté suivant:

- l'ensemble des sommets du graphe est l'ensemble des états; on symbolise un état initial par une flèche rentrante, et un état final par une flèche sortante;
- l'ensemble  $A$  des arêtes du graphe représente la fonction de transition, i.e.

$$(q, a, q') \in A \Leftrightarrow q' \in \delta(q, a).$$

On définit l'automate suivant:

- les états sont les classes d'équivalence de  $\sim$  ci-dessus;
- chaque état admet un état initial et un état final;
- les transitions sont les éléments de  $\{1, \dots, n\}$ ; il existe une transition de  $[i]$  à  $[j]$ , s'il

existe  $k \in [j]$  tel que  $V_k$  contienne  $U_i$ , autrement dit si  $a_{k,i} = 1$ ; en particulier, pour tout  $j \in [i]$ ,  $j$  est une transition de  $[i]$  à lui-même.

Ces liens nous permettent de décomposer des groupoïdes en sous-groupoïdes dits *irréductibles*.

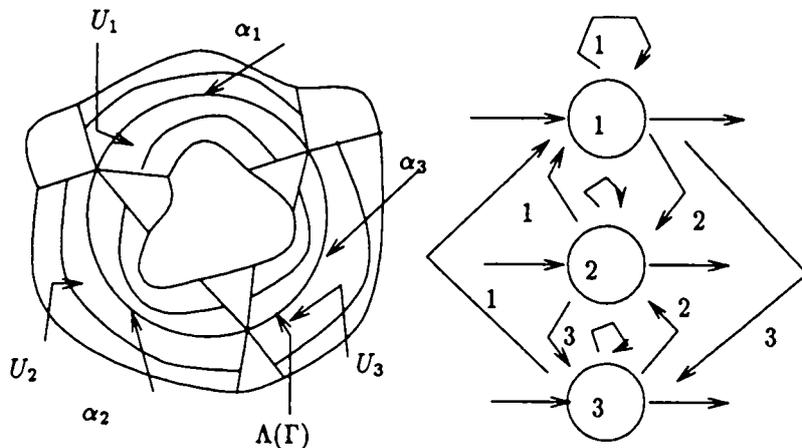


FIG. 9.1 - Groupoïde.

**Définitions.** Un groupoïde est *élémentaire* s'il ne contient qu'un seul état.

Un groupoïde est *irréductible* si pour tout couple d'états  $([i], [j])$ , il existe une suite de transitions reliant  $[i]$  à  $[j]$ .

**Lemme 9.4.2** *Pour tout groupoïde  $\Gamma$ , il existe une unique décomposition en sous-groupoïdes  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$  irréductibles.*

**DÉMONSTRATION.** On définit la relation suivante entre états:  $[i] \approx [j]$ , s'il existe des transitions de  $[i]$  à  $[j]$  et vice-versa. C'est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalences sont des groupoïdes irréductibles. ■

**Définitions.** Étant donné un groupoïde  $\Gamma$  et sa décomposition en groupoïdes irréductibles, on définit la relation d'ordre partielle par  $\Gamma_1 < \Gamma_2$  s'il existe une suite de transitions de tout  $i \in \Gamma_1$  à un élément de  $\Gamma_2$ . Deux sous-groupoïdes sont *indépendants* s'il n'existe pas de relations entre eux.

Pour éviter des cas sans intérêt, un groupoïde est dit *trivial* si tous les états sont indépendants et chacun ne contient qu'un seul élément. En effet, un groupoïde irréductible et non trivial est topologiquement mélangeant, i.e. pour tous ouverts  $U, V$  qui intersectent  $\Lambda(\Gamma)$ , il existe un ouvert  $U' \subset U$  et  $i_1, \dots, i_k$ , tels que  $f_\Gamma^k(U') \cap V \neq \emptyset$ .

Cette relation permet de hiérarchiser les sous-groupoïdes irréductibles de la décomposition d'un groupoïde  $\Gamma$ . Si deux sous-groupoïdes sont indépendants, alors ils n'influenceront pas l'un l'autre. En revanche, si on a une relation entre deux sous-groupoïdes, alors l'ensemble limite du plus petit se retrouvera dans le second.

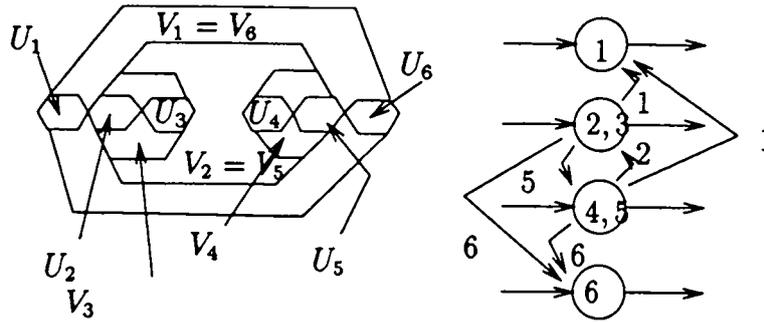


FIG. 9.2 - Exemple de groupoïde.

**Groupoïdes élémentaires.** Commençons par du vocabulaire.

**Définitions.** Une  $p$ -chaîne est un  $p$ -uplet  $(i_1, \dots, i_p)$  tel que  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_{i_{j+1}} \neq \emptyset, 1 \leq j \leq p-1$ . On note  $\{z_j\} = \bar{U}_i \cap \bar{U}_{i_{j+1}}$ . Une  $p$ -chaîne est complète si pour tout  $1 \leq j \leq p-1, \gamma_i(z_j)$  et  $\gamma_{i_{j+1}}(z_j)$  sont dans  $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_p}\}$  ou un autre  $z_j$ .

**Lemme 9.4.3** Soit  $\Gamma$  une chaîne non triviale. Alors,  $\Lambda(\Gamma)$  est connexe si et seulement si  $\Gamma$  est une chaîne complète. Sinon,  $\Lambda(\Gamma)$  est un ensemble de Cantor (compact, totalement discontinu et sans point isolé).

**DÉMONSTRATION.** Notons  $K_0 = \cup \bar{U}_i$  et  $K_n = f_\Gamma^{-n}(K_0)$ . Par définition,  $\Lambda(\Gamma)$  est l'intersection des  $K_n$ .

- Si  $\Gamma$  est complet, alors pour tout  $n \geq 0, K_n$  est connexe.
- Sinon, il existe  $j$  tel que  $\gamma_j(z_j) \notin \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_p}\}$ , ni un autre  $z_j$ . Par suite,  $V_j \setminus K_0$  admet une composante connexe  $\Omega$  telle que son bord contienne  $\gamma_j(z_j)$ . Sa préimage par  $\gamma_j$  nous donne un ouvert qui peut être prolongé pour séparer  $K_1$  en deux. Comme  $\Gamma$  est topologiquement mélangeant, on peut séparer n'importe quelle paire de points distincts de  $\Lambda(\Gamma)$ .

■

**Définitions.** Un arbre est une réunion connexe de chaînes. Il est complet si pour tout  $z_{i,j}$  dans l'intersection  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j, \gamma_i(z_{i,j})$  est soit un point fixe  $\alpha_k$ , soit un autre  $z_{i,j}$ .

On montre comme le Lemme 9.4.3 :

**Proposition 9.4.4** Soit  $\Gamma$  un groupoïde élémentaire non trivial.  $\Lambda(\Gamma)$  est connexe si et seulement si  $\Gamma$  est un arbre complet. Sinon,  $\Lambda(\Gamma)$  est un ensemble de Cantor.

**Groupoïdes irréductibles.** On adapte le paragraphe ci-dessus aux groupoïdes irréductibles non triviaux.

**Définitions.** Une  $G$ -chaîne est un  $p$ -uplet  $(i_1, \dots, i_p)$  tel que  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_{i_{j+1}} \neq \emptyset, 1 \leq j \leq p-1$ . On note  $\{z_j\} = \bar{U}_i \cap \bar{U}_{i_{j+1}}$ . Une  $G$ -chaîne est complète si pour tout  $1 \leq j \leq p-1, \gamma_i(z_j)$  et  $\gamma_{i_{j+1}}(z_j)$  sont dans  $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_p}, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ .

Un  $G$ -arbre est une réunion connexe de  $G$ -chaînes. Il est *complet* si pour tout point de l'intersection de deux  $U_i$ , ses images sont soit des points fixes, soit d'autres  $z_{i,j}$ .

**Proposition 9.4.5** *Soit  $\Gamma$  un groupoïde irréductible non trivial. Si  $\Gamma$  est un  $G$ -arbre complet, alors  $\Lambda(\Gamma)$  est connexe. S'il n'existe pas de sous-arbre complet, alors  $\Lambda(\Gamma)$  est un ensemble de Cantor.*

**DÉMONSTRATION.**  $\Gamma$  est un  $G$ -arbre complet si et seulement si  $K_1$  est connexe. Par suite, on obtient une suite décroissante de compacts connexes non vides de limite  $\Lambda(\Gamma)$ . S'il existe un sous-arbre complet, alors le sous-groupoïde formé de cet arbre donne une composante connexe de  $\Lambda(\Gamma)$  non triviale. Sinon, à l'instar du Lemme 9.4.3, il s'agit d'un ensemble de Cantor. ■

**Théorème 9.4.6** *Soit  $\Gamma$  un groupoïde non trivial. Alors, ou bien*

- (i)  $\Gamma$  est un  $G$ -arbre complet et  $\Lambda(\Gamma)$  est connexe ;
- (ii)  $\Gamma$  ne contient pas de sous-arbre complet et  $\Lambda(\Gamma)$  est un ensemble de Cantor ;
- (iii)  $\Lambda(\Gamma)$  a une infinité de composantes connexes.

**DÉMONSTRATION.** (i) Si  $\Gamma$  est un arbre complet, alors les  $K_n$  forment une suite décroissantes de compacts connexes. En effet,  $K_0$  est connexe par hypothèse ; si  $K_n$  est connexe, alors  $K_{n+1} \cap \bar{U}_i$  est aussi connexe, et si  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset$ , alors le point d'intersection est aussi dans  $K_{n+1}$ , donc  $K_{n+1}$  est connexe.

(ii) Si  $\Gamma$  contient un sous-arbre complet, alors d'après (i), le groupoïde associé a un ensemble limite connexe contenu dans  $\Lambda(\Gamma)$ . Sinon, soient  $z \neq w$  dans  $\Lambda(\Gamma)$ . Quitte à les itérer par les mêmes applications, on peut supposer qu'ils sont dans des  $\bar{U}_i$  disjoints. S'ils ne sont pas dans une chaîne commune, alors ils ne sont pas dans la même composante connexe de  $\Lambda(\Gamma)$ . Sinon, il existe un point d'intersection dans la chaîne dont l'une de ses images n'est pas dans  $\Lambda(\Gamma)$ . On ramène alors une séparatrice locale, que l'on prolonge.

(iii) D'après (ii), si  $\Gamma$  contient un sous-arbre complet, alors  $\Lambda(\Gamma)$  n'est pas un ensemble de Cantor. De même, si ce n'est pas un arbre complet, alors il n'est pas connexe ; et en tirant en arrière les séparatrices, on montre que  $\Lambda(\Gamma)$  admet une infinité de composantes connexes. ■

**Ensemble limite et domaine de John.** Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

**Théorème 9.4.7** *Le complémentaire de l'ensemble limite d'un groupoïde est un domaine de John centré à l'infini.*

Un domaine de John centré à l'infini  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\bar{\mathbb{C}}$  contenant  $\infty$  tel qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe une courbe  $\gamma_{z_0} \subset \Omega$  joignant  $z_0$  à l'infini telle que pour tout  $z \in \gamma_{z_0}$ ,

$$d(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon |z - z_0|.$$

Pour montrer le Théorème 9.4.7, on va d'abord donner une caractérisation de  $\Omega$  à partir de décompositions de Whitney (cf [St]).

**Définition.** Soient  $\Omega$  un ouvert connexe contenant l'infini et  $K = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ . Une *décomposition de Whitney au bord*  $\mathcal{W}$  est une collection dénombrable de domaines de Jordan qui vérifient les conditions suivantes.

(W1) Il existe  $C_0 > 1$  tel que pour tout  $Q \in \mathcal{W}$ ,  $\frac{\text{diam}(Q)}{r(Q)} \leq C_0$ , où  $r(Q)$  est le rayon du plus grand disque contenu dans  $Q$ .

(W2) Il existe  $0 < c_1 < c_2$  telles que pour tout  $Q \in \mathcal{W}$ ,

$$c_1 \leq \frac{\text{dist}(Q, K)}{\text{diam}(Q)} \leq c_2.$$

(W3) Si  $Q \neq Q'$ , alors  $Q \cap Q' = \emptyset$  et  $\Omega \setminus \cup_{Q \in \mathcal{W}} \bar{Q}$  est un domaine de Jordan contenant l'infini.

**Remarque.** En considérant des cubes dyadiques, i.e. de la forme  $Q = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$ , on peut toujours définir une décomposition de Whitney au bord tel que

$$1 \leq \frac{\text{dist}(Q, K)}{\text{diam}(Q)} \leq 4.$$

On peut montrer que si  $z \in Q$ , alors

$$\frac{c_1}{1 + c_2} d(z, K) \leq \text{diam } Q \leq c_2(1 + c_2) d(z, K).$$

Soit  $\lambda > 1$ ; on considère

$$\mathcal{W}_n(\lambda) = \{Q \in \mathcal{W}, \exists z \in Q, \lambda^{-n} \leq d(z, K) \leq \lambda^{1-n}\}$$

et

$$\mathcal{Q}_n(\lambda) = \text{int } \cup_{Q \in \mathcal{W}_n(\lambda)} \bar{Q};$$

pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{Q}_n(\lambda)$  sépare  $K$  de l'infini.

Si  $\gamma$  est une courbe qui traverse  $\mathcal{Q}_n(\lambda)$ , on pose

$$e_n(\lambda, \gamma) = \#\{Q \in \mathcal{W}_n(\lambda), \gamma \cap Q \neq \emptyset\}.$$

On définit l'épaisseur de  $\mathcal{W}$  à l'échelle  $\lambda^{-n}$  par

$$e_n(\lambda) = \sup_{z \in K} \min e_n(\lambda, \gamma_z),$$

où le "min" est pris sur toutes les courbes joignant  $z$  à l'infini.

**Proposition 9.4.8** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\Omega$  est un domaine de John centré à l'infini;
- (ii) pour toute décomposition de Whitney au bord, et pour tout  $\lambda > 1$ , la suite  $(e_n(\lambda))$  est bornée;
- (iii) il existe une décomposition de Whitney au bord et il existe  $\lambda > 1$  tels que  $\mathcal{Q}_n(\lambda)$  soit d'épaisseur uniformément bornée.

DÉMONSTRATION. (i)⇒(ii) : soit  $C > 0$  une grande constante; si  $e_n(\lambda) < C$ , alors c'est fini. Sinon, soit  $z$  sur le bord intérieur de  $Q_n(\lambda)$ . Il existe un arc  $\gamma_z$  joignant  $z$  à l'infini tel que pour tout  $w \in \gamma_z$ ,  $d(w, K) \geq \varepsilon|z - w|$ . On considère le premier point  $w$  de  $\gamma_z$  qui est sur le bord extérieur de  $Q_n(\lambda)$ . Si  $C$  est assez grande, alors

$$|w - z| \geq c'.e_n(\lambda). \min r(Q) \geq c'.e_n(\lambda) \frac{\min \text{diam } Q}{C_0},$$

où  $c' > 0$  est une constante indépendante de  $n$ . Mais,  $(\text{diam } Q) c_1(1 + c_2) \geq \lambda^{-n}$ , donc

$$|w - z| \geq c'.e_n(\lambda) \frac{\lambda^{-n}}{C_0(1 + c_2)c_1}.$$

De plus, comme  $d(w, K) \leq \lambda^{1-n}$ , on en déduit

$$\frac{\lambda C_0(1 + c_2)c_1}{c'.\varepsilon} \geq e_n(\lambda).$$

(iii)⇒(i) : supposons que  $e_n(\lambda) < C$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $z \in Q_{n_1}(\lambda)$ ; il existe un arc  $\gamma_z$  joignant  $z$  à l'infini qui minimise le nombre de  $Q$  traversés. Si  $w \in \gamma_z \cap Q_{n_0}(\lambda)$ , alors

$$|z - w| \leq \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} e_n(\lambda) \text{diam } Q \leq C'\lambda^{-n_0}.$$

De plus,  $d(w, K) \geq \lambda^{-n_0}/c_2$ , donc  $\Omega$  est John. ■

DÉMONSTRATION DE 9.4.7. Soit  $\Gamma$  un groupoïde; au voisinage des points de  $S$  dans  $\overline{C} \setminus (\cup U_i)$ , on considère une décomposition de Whitney au bord (qui vérifie les propriétés de la Proposition 9.4.8 par hypothèses). Ailleurs, on considère un nombre fini de courbes qui, réunies avec  $G$ , découpent  $D_R \setminus (\cup U_i)$  en un nombre fini de domaine de Jordan, où  $D_R$  est un disque de grand rayon.

Par la dynamique, on propage cette partition au voisinage de  $\Lambda(\Gamma)$ . Par le théorème de Kōbe, on en déduit que la forme de ces pièces est uniformément bornée. Il s'agit donc d'une décomposition de Whitney au bord de  $\Omega = \overline{C} \setminus \Lambda(\Gamma)$ .

Pour  $\lambda$ , le plus petit multiplicateur des points fixes de  $\gamma_i$ , on vérifie que  $e_n(\lambda)$  est uniformément borné (en utilisant encore le théorème de Kōbe et l'expansivité des points fixes). Par suite, on conclut par la Proposition 9.4.8 que  $\Omega$  est un domaine de John. ■

**Proposition 9.4.9 (Linéarisation simultanée)** *Soit  $\Gamma$  un groupoïde formé d'une réunion disjointe de  $G$ -chaînes. On suppose qu'il existe une courbe  $\gamma$  qui passe une et une seule fois dans chaque  $\overline{U}_i$  et contient tous les points de  $\Lambda(\Gamma) \cap G$ . Alors, il existe  $\hat{\Gamma}$  quasiconformément conjugué à  $\Gamma$ , formé d'homothéties centrées sur  $\mathbf{R}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{U}_k$  l'ouvert borné bordé par

$$[0, 1 + i] \cup [1 + i, k + i] \cup [k + i, k + 1] \cup [k + 1, k - i] \cup [k - i, 1 - i] \cup [1 - i, 0],$$

où  $k > 1$ .

À l'aide de  $\gamma$ , on construit deux suites finies d'ouverts  $\hat{U}_i$  et  $\hat{V}_i$ , homothétiques de  $\mathcal{U}_k$ , qui vérifient les mêmes propriétés combinatoires que  $U_i$  et  $V_i$ . On s'arrange pour que  $\hat{U}_i$  et  $\hat{V}_i$  soient homothétiques du même  $\mathcal{U}_k$ .

On note  $\hat{\gamma}_i : \hat{U}_i \rightarrow \hat{V}_i$  l'unique application affine qui coïncide avec l'orientation de  $\Gamma$ . On définit alors une application de  $G$  dans  $\hat{G}$  qui commute avec la dynamique. On considère une extension quasiconforme (qui existe à cause l'hypothèse sur  ${}^cK_0$ ) que l'on prolonge par la dynamique. À la limite, on obtient une conjugaison quasiconforme entre  $\Gamma$  et  $\hat{\Gamma}$ . ■

On déduit de cette proposition ou du Théorème 9.4.7 le corollaire suivant.

**Corollaire 9.4.10** *Si  $\Gamma$  vérifie les hypothèses de la Proposition 9.4.9, alors  $\Lambda(\Gamma)$  est supporté par une quasidroite.*

**Dimension de Hausdorff.** Ce paragraphe est consacré à montrer le résultat suivant :

**Théorème 9.4.11** *Soit  $\Gamma$  un grupoïde irréductible et non trivale. La dimension de Hausdorff  $\alpha$  de  $\Lambda(\Gamma)$  vérifie  $0 < \alpha < 2$ . Son  $\alpha$ -mesure associée est finie et non nulle.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\Gamma$  un grupoïde irréductible et non trivale. On note  $\alpha = \dim_H \Lambda(\Gamma)$ . Comme tous les points fixes sont répulsifs et en nombre fini, il existe  $\lambda > 1$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $z \in \Lambda(\Gamma) \cap \bar{U}_i$ ,  $|\gamma_i'(z)| \geq \lambda$ .

Soit en appliquant le formalisme thermodynamique à  $X_\Gamma$  définie à la Proposition 9.4.1 (voir [Bow, Ru]), soit en utilisant les mesures conformes ([Su1, Mc5]), on montre qu'il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_\Gamma$  sur  $\Lambda(\Gamma)$ , proportionnelle à la  $\alpha$ -mesure de Hausdorff, et telle que pour tout ensemble mesurable  $E$  où  $f_\Gamma$  est injective,

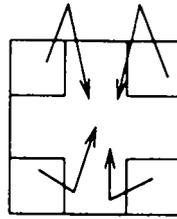
$$\int_{f_\Gamma(E)} d\mu_\Gamma = \int_E |f_\Gamma'|^\alpha d\mu_\Gamma.$$

Le fait que toutes les dimensions dans  $]0, 2[$  soient admises provient de la famille suivante :

soit  $Q = ]0, 1[^2$  ; pour  $0 < \alpha < 1/2$ , on définit  $Q_1^\alpha = ]0, \alpha[^2$ ,  $Q_2^\alpha = ]0, \alpha[ \times ]1 - \alpha, 1[$ ,  $Q_3^\alpha = ]1 - \alpha, 1[ \times ]0, \alpha[$  et  $Q_4^\alpha = ]1 - \alpha, 1[^2$ . On considère l'unique application affine  $\gamma_i^\alpha : Q_i^\alpha \rightarrow Q$  qui fixe le coin. L'ensemble limite est un ensemble de Cantor, et sa dimension de Hausdorff peut être calculée explicitement :

$$\dim_H \Lambda(\Gamma) = \frac{\log 4}{\log 1/\alpha}.$$

Si la dimension est deux, alors  $\Lambda(\Gamma)$  est de mesure positive. Soit  $x \in \Lambda(\Gamma)$ , un point de densité, *i.e.* il existe une suite  $(r_n)$  tendant vers zéro telle que  $\lim \frac{H_2(D(x, r_n) \cap \Lambda(\Gamma))}{r_n^2} = 1$ . Quitte à remplacer ces disques par des composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}_p$ , on peut les gonfler

FIG. 9.3 -  $\dim_H \Lambda(\Gamma) = \log 4 / \log(1/\alpha)$ .

par  $f_\Gamma$  pour avoir des ouverts de taille définie. En prenant une limite de ces ouverts, on obtient un ouvert contenu dans  $\Lambda(\Gamma)$ . Or, ceci est impossible, parce que l'on peut gonfler une composante connexe de cet ouvert jusqu'à ne plus être contenue dans un seul  $U_i$ , et la forme des  $U_i$  ne peut pas le supporter, par hypothèses.

Puisque  $\Gamma$  n'est pas trivial,  $\Lambda(\Gamma)$  admet une infinité de points et  $\alpha > 0$ . ■

## 9.5 Sur la géométrie de l'arbre de Hubbard

L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 5** Soit  $c \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \neq 0$ , primitif; on note  $K = H_c \cap J_c$ .  $K$  est un ensemble de Cantor dont le complémentaire est un domaine de John. Sa dimension de Hausdorff est dans  $]0, 2[$ , et sa mesure associée est finie et non nulle. En particulier, toute "arête" de cette arbre est supportée par une quasidroite.

En utilisant les résultats de [CJY], on sait déjà que  $K$  est John. Le paragraphe précédent nous fournira une autre démonstration.

**Caractérisation dynamique de l'arbre de Hubbard.** Soit  $c \in \mathcal{D}_0$ . À partir du chemin combinatoire de  $c$ , nous allons construire un groupoïde  $\Gamma$  dont l'ensemble limite sera exactement la trace de l'arbre de Hubbard augmenté de  $c$  sur  $J_c$ .

Un paramètre  $c$  sera dit *irréductible* si les seules applications à allure quadratique simple que l'on puisse définir comme restriction d'un itéré  $P_c^n$  sont  $P_c$  et  $z \mapsto z^2$ . L'application à allure polynomiale  $f$  est *simple* si son ensemble de Julia disconnecte celui de  $K_c$  aux préimages de l'unique point fixe extrême de  $f$ .

On suppose donc dans la suite que  $c$  est irréductible, et on extrait de son chemin combinatoire les points de bifurcation irréductibles  $(c_0, c_1, \dots, c_\nu)$ , avec  $c_0 = 0$  et  $c_\nu = c$ . L'origine est  $k_i$ -périodique pour  $c_i$ .

En coordonnée log-Böttcher, on définit des arcs  $L_\pm(\theta) = \{(s, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, s = \pm(t - \theta)\}$ . Les domaines que nous allons construire seront tous bordés par de tels arcs et par des équipotentielles. Plus précisément, un ouvert bordé par  $z, w \in J_c$  prépréulsifs

est le domaine contenant la composante connexe  $C_{z,w}$  de  $K_c \setminus \{z, w\}$  ayant ces points au bord, et dont le bord de ce domaine est une réunion de deux arcs d'équipotentiels et de quatre courbes  $L_{\pm}(\theta)$ ; les arguments sont ceux de  $z$  et  $w$  qui sont adjacents à  $C_{w,z}$ .

On se fixe  $\eta > 0$ ; lorsque sera construit un domaine d'arrivée  $V_i$ , on choisira toujours l'équipotentielle de hauteur  $\eta$ .

Dans un premier temps, on construit un groupoïde qui caractérisera  $[\beta', \beta]_c$ . Ensuite, on l'étendra à l'arbre.

▷ Le point  $c_1$  est un satellite de l'origine. Dans sa dynamique, on a deux points fixes  $\beta$  d'argument nul, et  $\alpha$  de nombre de rotation combinatoire  $p/q$ .

On construit  $V_\beta$  le domaine bordé par  $\alpha' = -\alpha$  et  $\beta$ . On considère sa préimage par  $P_{c_1}$  contenue dans  $V_\beta$ : on obtient  $\gamma_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ . On considère l'application symétrique  $\gamma_{\beta'}$  par  $z \mapsto -z$ , ce qui nous fait  $\hat{\Gamma}_1 = \{\gamma_\beta, \gamma_{\beta'}\}$ . À chaque application, on considèrera toujours son application symétrique.

▷ On considère maintenant  $c_2$ . Comme  $c_2$  est dans le sillage de  $c_1$ , on peut pousser par un mouvement holomorphe  $\hat{\Gamma}_1$  dans le plan dynamique de  $c_2$ . Comme  $c_2$  est irréductible, il existe une préimage  $(q + 1)$ ième  $\alpha_{q+1}$  de  $\alpha$  qui sépare  $\alpha$  de l'origine. Par suite  $U_\alpha$  est le domaine bordé par  $\alpha$  et  $\alpha_{q+1}$ , muni de l'application  $\gamma_\alpha = P_{c_2}^q$ . On définit aussi son symétrique.

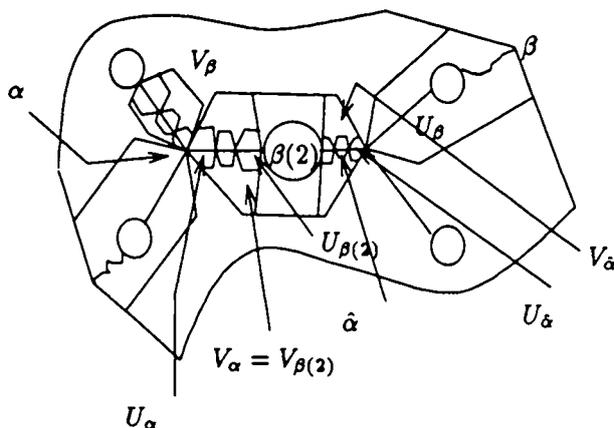


FIG. 9.4 - Caractérisation dynamique de l'arbre de Hubbard.

De plus, il existe un point  $k_2$ -périodique  $\beta(2)$  au bord de la composante contenant 0. Ce point sépare  $\alpha$  ou  $\alpha'$  de l'origine. S'il s'agit du point  $\alpha$ , on considère  $V_{\beta(2)}$  bordé par  $\alpha$  et  $\beta(2)$  (et sinon bordé par  $\alpha'$  et  $\beta(2)$ ). On définit alors  $\gamma_{\beta(2)} = P_{c_2}^{k_2} : U_{\beta(2)} \rightarrow V_{\beta(2)}$ , où  $\beta(2) \in \partial U_{\beta(2)}$ .

Si les domaines  $U_i$  ainsi définis forment une chaîne discontinue seulement en  $\beta(2)$  et son symétrique, alors on passe au paramètre suivant. Sinon, on regarde l'application de premier retour sur l'arête centrale des domaines non encore définis. Cette application s'obtient pour un nombre borné d'itérés. L'image de cette application ne contient pas forcément le domaine de départ, ni son symétrique (voir remarque ci-dessous). Le bord

de ces nouveaux domaines sont des préimages des points marqués précédents. Ceci nous définit  $\hat{\Gamma}_2$ .

**Remarque.** Par rapport à l'étude du paragraphe précédent, on considère ici des groupoïdes pour lesquels il existe des applications sans point fixes, *i.e.* la matrice de transition peut avoir des coefficients nuls sur la diagonale. Cependant, le point important est l'existence d'une métrique pour laquelle  $f_\Gamma$  est fortement dilatante; et tous les résultats du dernier paragraphe se généralisent à ce cadre.

▷ Supposons qu'on ait construit un groupoïde  $\hat{\Gamma}_n$  dont l'ensemble limite est  $[\beta, \beta']_{c_n} \cap J_{c_n}$ . On suppose aussi que les domaines sont du type ci-dessus, et que chaque chaîne est bordée soit par une préimage de  $\beta(n)$ , soit par  $\beta$  ou  $\beta'$ .

Construisons  $\hat{\Gamma}_{n+1}$ . On commence par pousser  $\hat{\Gamma}_n$  au plan dynamique de  $c_{n+1}$ . Ensuite, le point  $c_{n+1}$  nous donne l'existence de deux points fixes  $\alpha(n)$  de période  $k_n$  et de nombre de rotation  $p_n/q_n$ , et  $\beta(n+1)$  au bord de la composante contenant l'origine. L'origine sépare le point  $\alpha(n)$  de  $\beta(n)$ , donc on considère un domaine  $V_{\beta(n)}'$  bordé par  $\beta(n)$  et  $\alpha'(n)$ . On construit aussi un domaine  $V_{\alpha(n)}$  bordé par  $\alpha(n)$  pour l'itéré  $q_n k_n^{\text{ième}}$ , et son symétrique, comme pour  $c_2$ . On complète aussi par l'application de premier retour si nécessaire.

Comme les applications sont toutes des itérés de  $P_c$ ,  $\Lambda(\Gamma) \subset K_c$ . Si on considère un point de l'arête, ses itérés restent toujours dedans (propriété de l'arbre de Hubbard), sauf s'il tombe dans la composante de l'origine (où il ne peut plus être itéré, par construction). Soit  $z \in K_c \cap (\cup \bar{U}_i)$  qui n'est pas sur l'arête; on note  $\hat{z}$  le projeté de  $z$  sur l'arête: c'est une préimage d'un point marqué. Un itéré de  $\hat{z}$  va donc être au bord d'un  $\bar{U}_i$ ; mais comme tous les points fixes sont de nombre de rotation 1 ou 1/2 et le bord de chaque domaine intersecte l'ensemble de Julia uniquement sur l'arête, l'image du point  $z$  ne sera pas sur l'arête, et donc plus dans un  $\bar{U}_i$ . Donc  $z \notin \Lambda(\Gamma)$ .

Afin de définir le groupoïde engendrant l'arbre de Hubbard, il suffit de considérer les premières branches inverses de l'arête le long du cycle critique. S'il n'y a pas d'applications définissant un sous-ensemble de l'arbre, qui n'est pas dans le bassin de l'origine, alors on conjugue les applications de  $\hat{\Gamma}$  par la branche inverse.

**DÉMONSTRATION DE 9.4.11.** Une fois que l'on a défini un groupoïde caractérisant l'arbre de Hubbard de l'application, il suffit d'appliquer les résultats obtenus dans le paragraphe précédent: Théorèmes 9.4.6, 9.4.7, 9.4.11 et le Corollaire 9.4.10. ■

**Remarque.** L'arbre de Hubbard d'un polynôme quadratique peut être de dimension arbitrairement proche de 2. En effet, dans [Sh3], l'auteur définit des groupoïdes ayant des ensembles limites aussi proches de 2 que voulu. La construction de ces ensembles peut être effectuée de façon à être un sous-ensemble d'un arbre de Hubbard.

# Chapitre 10

## Théorème de Modulation

Le but de ce chapitre est de donner la démonstration du Théorème de Modulation d'après A. Douady (cf [Do3] où elle est esquissée).

On considère la famille de polynômes

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

On note  $\left\{ \begin{array}{l} K_c = \{z \in \mathbb{C}, P_c^n(z) \not\rightarrow \infty\} \text{ l'ensemble de Julia rempli, qui est compact plein,} \\ J_c = \partial K_c \text{ l'ensemble de Julia de } P_c. \end{array} \right.$

### Théorème 6 de Modulation (A. Douady & J.H. Hubbard)

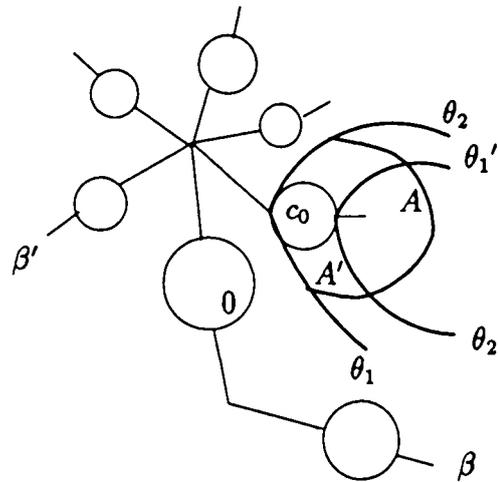
(a) Si  $W$  est une composante primitive de  $M$  de période  $k$ , on peut trouver un voisinage  $\Lambda$  de  $\overline{W}$ , et deux familles d'ouverts  $(U_c', U_c)_{c \in \Lambda}$  tels que les  $f_c = (U_c' \xrightarrow{P_c^k} U_c)$  forment une famille mandelbrotique.

(b) Si  $W$  n'est pas primitive, on peut seulement construire  $\Lambda$ , les  $U_c'$  et les  $U_c$  de façon que  $\Lambda$  soit un voisinage de  $\overline{W} \setminus \{c_1\}$ , racine de  $W$ , et que  $\chi$  induise un homéomorphisme de  $M_f$  sur  $M \setminus \{1/4\}$ . De plus,  $P_{1/4}$  figure de manière rigide dans  $P_{c_1}$ .

Rappelons que "quasiconforme" est à prendre au sens de Mañé-Sad-Sullivan.



Figure 10  $M$  et un zoom.

FIG. 10.1 -  $K_{c_0}$ .

**Corollaire 7** *Si  $W$  est primitive, la petite copie de  $M$  est quasiconforme à  $M$ . Sinon, tout compact de la copie privée de la racine est quasiconforme à un compact de  $M$ .*

La démonstration consiste à construire des ouverts  $U_c'$  et  $U_c$  afin que les  $P_c^k$  soient des applications à allure polynomiale quadratiques. Ensuite, on applique la théorie des applications à allure polynomiale qui est bien adaptée si  $W$  est primitive. Dans le cas non primitif, on n'obtient pas  $M_f \subset \subset \Lambda$  une étude plus détaillée est nécessaire.

## 10.1 Première construction

Soit  $W$  une composante de période  $k$ , de centre  $c_0$  et de racine  $c_1$ . On suppose que  $c_0 \neq 0$  et  $c_1 \neq 1/4$ . Dans ces conditions, il existe deux rayons externes  $\mathcal{R}_M(\theta_1)$  et  $\mathcal{R}_M(\theta_2)$ ,  $\theta_1 < \theta_2$ , qui aboutissent en  $c_1$  (Figure 10.2). D'après la Proposition 1.4.4 de la Partie I,  $\mathcal{R}_{c_0}(\theta_1)$  et  $\mathcal{R}_{c_0}(\theta_2)$  aboutissent en  $y_1$ ,  $k$ -périodique, racine de la composante connexe  $U_1$  de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  contenant  $c_0$  (Figure 10.1).

Soit  $\eta > 0$ . On appelle  $A$  l'ouvert délimité par  $\mathcal{R}_{c_0}(\theta_1) \cup \{y_1\} \cup \mathcal{R}_{c_0}(\theta_2) \cup (G_c = \eta)$  et contenant  $U_1$ .  $U_1$  étant  $k$ -périodique, on note  $A'$  la composante connexe de  $P_{c_0}^{-k}(A)$  contenant  $U_1$ .

**Proposition 10.1.1**  *$A'$  est délimité par quatre rayons externes  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$  et l'équipotentielle de niveau  $\eta' = \eta/2^k$ . De plus,  $A' \subset A$  et  $P_{c_0}^k : A' \rightarrow A$  est propre de degré deux.*

**DÉMONSTRATION.** On pose  $U_i = P_{c_0}^{i-1}(U_1)$ ; tant que  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $P_{c_0}|_{U_i} : U_i \rightarrow U_{i+1}$  est conjugué à l'identité sur  $\mathbf{D}$ , car  $U_i$  ne contient pas de point critique. En revanche,  $P_{c_0}|_{U_k=U_0} : U_0 \rightarrow U_1$  est conjugué à  $z \mapsto z^2$  dans  $\mathbf{D}$ , qui se prolonge au bord. Le point  $y_1$

a donc deux préimages,  $y_1'$  d'argument interne  $1/2$  et lui-même. Comme son argument est dyadique, il existe un filament issu de  $y_1'$  et il existe  $\theta_1' > \theta_2'$  tels que leurs rayons aboutissent en  $y_1'$  et tels que 
$$\begin{cases} 2^k \theta_1' = \theta_1 \pmod{1}, \\ 2^k \theta_2' = \theta_2 \pmod{1}. \end{cases}$$

On définit  $A_1'$  selon l'énoncé. On a :

$$\left. \begin{array}{l} P_{c_0}^k(\partial A_1') = \partial A \\ U_1 \subset P_{c_0}^k(A_1') \\ P_{c_0}^k(A_1') \subset A \end{array} \right| \implies A' = A_1' \text{ et } P_{c_0}^k : A' \rightarrow A \text{ est propre car c'est un polynôme.}$$

Comme  $A$  est connexe,  $P_{c_0}^k|_{A'}$  a un degré qui est le même que  $P_{c_0}^k|_{U_1}$ , i.e. 2. ■

**Proposition 10.1.2** *Il existe un ouvert  $\Lambda_1$ , voisinage de  $\overline{W} \setminus \{c_1\}$ , tel que pour tout  $c \in \Lambda_1$ ,  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$  (resp.  $\mathcal{R}(\theta_s')$ ),  $s = 1, 2$ , aboutissent en un même point  $y_1(c)$   $k$ -périodique (resp.  $y_1'(c)$ , préimage de  $y_1(c)$  par  $P_c^k$ ), ce qui permet de construire  $P_c^k : A'(c) \rightarrow A(c)$  propre de degré deux.*

Commençons par un lemme :

**Lemme 10.1.3** *Pour  $c$  dans  $M$  ou tel que  $\text{Arg}_M c \in ]\theta_1, \theta_2[$ ,  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$  (resp.  $\mathcal{R}(\theta_s')$ ),  $s = 1, 2$ , aboutissent en un point  $y_s(c)$  (resp.  $y_s(c')$ ).*

**DÉMONSTRATION.** En vertu de la Proposition 1.4.2 de la Partie I, il suffit de vérifier que les rayons ne butent pas sur un point précritique de  $P_c$ .

- Si  $c \in M$ , comme  $K_c$  est connexe, la grande orbite de  $c$  est dans  $K_c$  et tout rayon rationnel aboutit.

- Si  $c \notin M$ , supposons que  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$  bute sur un point précritique qui est une préimage de  $c$ . Cela signifie que  $\theta = \text{arg}_M c$  est dans le cycle de  $\theta_s$ .

Soit  $H_{c_0}$ , l'arbre de Hubbard de  $P_{c_0}$ . D'après [DH1],  $c_0$  est une extrémité de  $H_{c_0}$ . Par suite, l'orbite de  $\theta_s$ ,  $s = 1, 2$ , évite l'intervalle  $]\theta_1, \theta_2[$  et  $\theta$  ne peut être dans le cycle de  $\theta_s$ .

Donc  $\mathcal{R}_c(\theta_1)$  et  $\mathcal{R}_c(\theta_2)$  aboutissent.

Si  $\mathcal{R}_c(\theta_s')$  bute, il en est de même pour  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$ . En effet, étant une préimage de  $c$ , le point d'argument  $\theta_s$  et de potentiel égal à celui du point précritique de  $\theta_s'$  est aussi précritique. Or,  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$  aboutit : il en est donc de même pour  $\mathcal{R}_c(\theta_s')$ . ■

**DÉMONSTRATION DE 10.1.2.**

On considère  $\Lambda_1$  l'ouvert délimité par les rayons  $\mathcal{R}_M(\theta_1), \mathcal{R}_M(\theta_2)$  et une équipotentielle  $\eta_1 < \eta$  contenant  $W$  (voir Figure 10.2).

Pour  $c_0$ , on a  $P_{c_0}^k(y_1) = y_1$  et  $(P_{c_0}^k)'(y_1) \neq 1$ , car il n'y a qu'un cycle non répulsif dans  $K_{c_0}$  : celui de 0. Par le théorème des fonctions implicites, on peut définir  $c \mapsto y_1(c)$  au voisinage de  $c_0$ ,  $C$ -analytique, telle que 
$$\begin{cases} P_c^k(y_1(c)) = y_1(c), \\ y_1(c_0) = y_1. \end{cases}$$

D'autre part, par le Lemme 10.1.3, on sait que  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , aboutissent pour  $c$  dans  $\Lambda_1$ . Par suite, on peut définir, pour  $c$  dans  $\Lambda_1$ ,  $\Gamma_s(c) = \lim \varphi_c^{-1}((1/n)e^{2i\pi\theta_s})$  comme

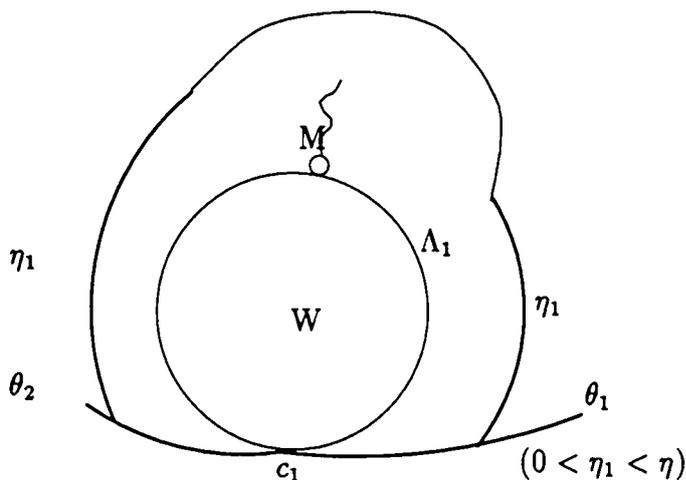


FIG. 10.2 -  $\Lambda_1$ .

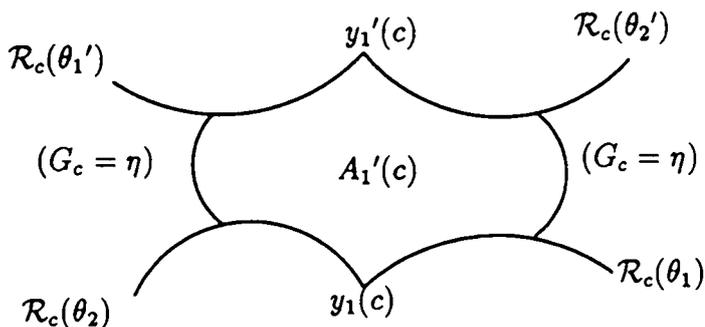


FIG. 10.3 -  $A_1'(c)$ .

limite de fonctions C-analytiques.  $\Gamma_s$  vérifie  $\begin{cases} \Gamma_s(c_0) = y_1 \text{ et} \\ P_c^k(\Gamma_s(c)) = \Gamma_s(c). \end{cases}$  Donc, par l'unicité du théorème des fonctions implicites, on a  $\begin{cases} \Gamma_s = y_1, s = 1, 2 \\ c \text{ au voisinage de } c_0; \end{cases}$  et par prolongement analytique, on a égalité sur tout  $\Lambda_1$ .

Soit  $A(c)$ ,  $c \in \Lambda_1$ , l'ouvert délimité par  $\mathcal{R}_c(\theta_1) \cup \{y_1(c)\} \cup \mathcal{R}_c(\theta_2) \cup \{G_c = \eta\}$  et contenant  $c$ . On note  $A'(c)$  la composante connexe de  $P_c^{-k}(A(c))$  ayant  $y_1(c)$  et  $y_1'(c)$  dans sa fermeture. Soit  $A_1'(c)$  l'ouvert défini comme  $A_1$  dans  $K_\infty$  (voir Figure 10.3).  $P_c^k(\partial A_1'(c)) = \partial A(c)$ , donc  $A_1'(c) = A'(c)$ .

Pour tout  $c \in \Lambda_1$ ,  $P_c^k : A' \rightarrow A$  est holomorphe propre, donc admet un degré ( $A(c)$  connexe) que l'on définit par  $d(c) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial A'(c)} \frac{(P_c^k)'(z)}{P_c^k(z) - c} dz$  qui est holomorphe à valeur entière, donc constante sur  $\Lambda_1$  connexe :  $d(c) = d(c_0) = 2$ . ■

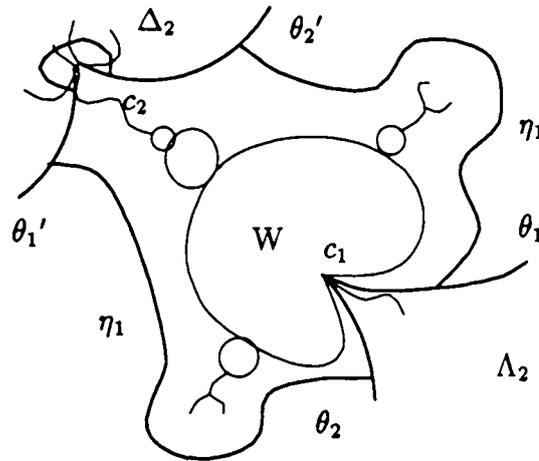


FIG. 10.4 -  $\Lambda_2$ .

**Remarque.** La Proposition 10.1.2 présente une grande analogie avec la Proposition 8.3.1.

**Lemme 10.1.4** Dans le plan des paramètres,  $\mathcal{R}_M(\theta_1')$  et  $\mathcal{R}_M(\theta_2')$  aboutissent en  $c_2$ , point de Misiurewicz (qui correspondra à la fin de la copie de  $M$  commençant en  $W$ ).

**DÉMONSTRATION.** D'après la Proposition 1.4.3 de la Partie I,  $\mathcal{R}_M(\theta_1')$  aboutit en  $c_2 \in \mathcal{D}_2$ . En effet,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant  $k$ -périodiques s'écrivent sous la forme  $p_s/(2^k - 1)$ ,  $s = 1, 2$ ; par conséquent  $\theta_s' = p_s'/2^k(2^k - 1)$ . Dans  $K_{c_2}$ ,  $\mathcal{R}_{c_2}(\theta_1')$  aboutit en  $c_2$  (voir Proposition 1.4.4, Partie I). Or,  $c_2 \in \Lambda_1$ , donc  $\mathcal{R}_{c_2}(\theta_1)$  et  $\mathcal{R}_{c_2}(\theta_2)$  aboutissent en  $P_{c_2}^k(c_2)$ ; on en déduit que  $\mathcal{R}_{c_2}(\theta_2')$  aboutit en  $c_2$ , car  $P_{c_2}^k$  est localement un isomorphisme. En utilisant encore la Proposition 1.4.4, on en déduit que  $\mathcal{R}_M(\theta_2')$  aboutit aussi en  $c_2$ . ■

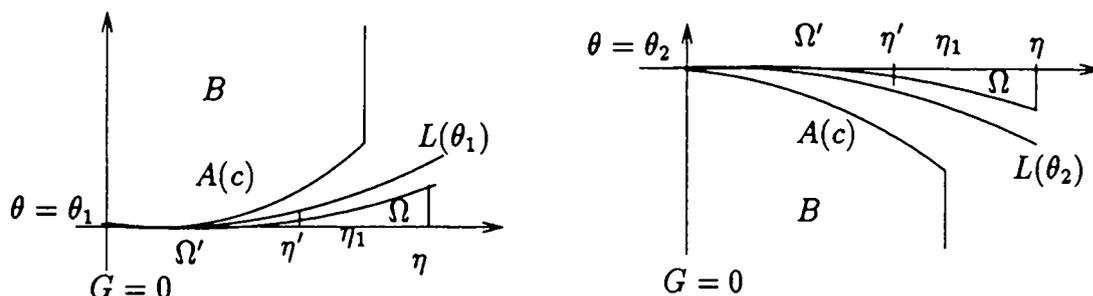
Jusqu'ici, on a défini une famille  $(A'(c) \xrightarrow{P_c^k} A(c))_{c \in \Lambda_2}$  holomorphe propre de degré deux. Ses éléments ne sont pas à allure polynomiale car  $A'(c)$  n'est pas relativement compact dans  $A(c)$ . Il est donc nécessaire de changer un peu leurs définitions, ce que nous ferons en deux temps :

On fixe  $\varepsilon_0 > 0$  et on définit dans le plan des paramètres :

- $L_M(\theta_1) := \{c \in \Lambda_2, \arg_M(c) = \theta_1 + \varepsilon_0 G_M^2(c)\}$ ,
- $L_M(\theta_2) := \{c \in \Lambda_2, \arg_M(c) = \theta_2 - \varepsilon_0 G_M^2(c)\}$ ,
- $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ , l'ouvert contenant  $W$  et délimité par  $L_M(\theta_1)$  et  $L_M(\theta_2)$ .

**Lemme 10.1.5** Soit  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ; pour tout  $c$  dans  $\Lambda_2$ ,

$\left\{ \begin{array}{l} L(\theta_1) = \{ \arg_c(z) = \theta_1 + \varepsilon G_c^2(z), 0 < G_c(z) < \eta \} \\ L(\theta_2) = \{ \arg_c(z) = \theta_2 - \varepsilon G_c^2(z), 0 < G_c(z) < \eta \} \end{array} \right. (\subset A(c))$  sont bien définies jusqu'en  $y_1(c)$ .

FIG. 10.5 - Position des  $L(\theta_s)$ ,  $\Omega'$  et  $\Omega$ ,  $s = 1, 2$  dans  $A(c)$ .

DÉMONSTRATION. Si  $c \in \Lambda_2 \cap M$ , il n'y a pas de problème.

Soit donc  $c \in \Lambda_2 \setminus M$ ;  $L(\theta_1)$  est mal définie si et seulement si il existe une préimage  $\omega$  de  $c$  dont l'argument  $t$  est dans  $]\theta_1, \theta_2 + \varepsilon\eta^2[$  et le potentiel  $s$  est plus grand que  $\sqrt{\frac{t-\theta_1}{\varepsilon}}$ .

Dans le plan dynamique de  $P_{c_0}$ , il revient au même de considérer  $z_0 = \psi_{c_0} \circ \varphi_M(c)$  et d'étudier l'existence d'une préimage  $w_0 = \psi_{c_0}(e^{s+2i\pi t})$  de  $z_0$  par  $P_{c_0}$  telle que  $0 < s < \eta'$  et  $\theta_1 < t < \theta_1 + \varepsilon s^2$ .

Soit  $\Omega' = \{z = \psi_{c_0}(e^{s+2i\pi t}), 0 < s < \eta' \text{ et } \theta_1 < t < \theta_1 + \varepsilon s^2\}$ ; il suffit de montrer que l'orbite d'un point de  $\Omega'$  ne tombe jamais dans le domaine de définition de  $z_0$ , à savoir  $B \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi_{c_0}(e^{s+2i\pi t}), 0 < s < \eta_1 \text{ et } \theta_1 + \varepsilon_0 s^2 < t < \theta_2 - \varepsilon s^2\}$ .

On a  $\Omega' \cap B = \emptyset$ . L'application de premier retour est donnée par  $P_{c_0}^k$  car  $\Omega' \subset A'(c)$ . On note  $\Omega = P_{c_0}^k(\Omega') = \{z = \psi_{c_0}(e^{s+2i\pi t}), 0 < s < \eta \text{ et } \theta_1 < t < \theta_1 + \varepsilon s^2/2^k\}$ ; étant donné que  $\Omega \cap A'(c) \subset \Omega'$  et  $\Omega \cap B = \emptyset$  (voir Figure 10.5),  $L(\theta_1)$  est bien définie. Il en est de même pour  $L(\theta_2)$ . ■

On a choisi  $\varepsilon$  de telle sorte que  $L(\theta_s)$  ne contienne pas de valeurs postcritiques.  $L(\theta_s)$  étant dans  $A'(c)$ , admet deux préimages lisses par  $P_c^k$ , l'une  $L'(\theta_s)$  aboutissant en  $y_1(c)$ , l'autre  $L(\theta_s')$  en  $y_1'(c)$ .

Soit  $z \in L'(\theta_s)$  :  $2^k \text{Arg}_c z = \theta_s \pm \varepsilon 2^{2k} G_c^2(z)$ .

▷  $\text{Arg}_c z > \theta_1 + \varepsilon G_c^2(z)$  et  $L'(\theta_1)$  est au-dessus de  $L(\theta_1)$ .

▷  $\text{Arg}_c z < \theta_2 - \varepsilon G_c^2(z)$  et  $L'(\theta_2)$  est au-dessous de  $L(\theta_2)$ .

On note  $\begin{cases} A_2(c) \text{ l'ouvert contenant } y_1'(c) \text{ limité par } L(\theta_s), s = 1, 2 \text{ et } \{G_c = \eta\}, \\ A_2'(c) = P_c^{-k}(A_1(c) \cap A'(c)) \text{ limité par } L(\theta_s'), L'(\theta_s), s = 1, 2 \text{ et } \{G_c = \eta'\}, \end{cases}$   
(voir Figure 10.6).

On a  $A_2'(c) \subset A_2(c)$ . Maintenant,  $\forall c \in \Lambda_2$ ,  $\partial A_2'(c)$  et  $\partial A_2(c)$  n'ont que  $y_1(c)$  en commun et  $P_c^k : A_2'(c) \rightarrow A_2(c)$  est holomorphe propre de degré deux.

### Second temps

**Lemme 10.1.6**  $\forall c \in \Lambda_2$ ,  $y_1(c)$  est répulsif. Soit  $\Delta_1(c_0)$  un voisinage linéarisable de  $y_1$  et soit  $s > 0$  assez petit pour que  $z_t = \psi_{c_0}(e^{s+2i\pi t})$  appartienne à  $\Delta_1(c_0)$ ,  $t = 1, 2$ .

Alors il existe un mouvement holomorphe  $\iota_\Delta : \Lambda_2 \times \Delta_1(c_0) \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\iota_c(z_t) = \psi_c(e^{s+2i\pi t})$ ,

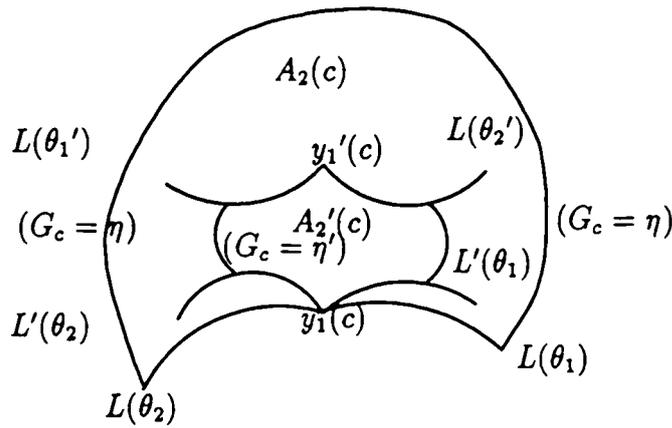


FIG. 10.6 -  $A_2'(c) \subset A_2(c)$ .

et tel que  $\Delta_1(c) = \iota(c, \Delta_{c_0})$  soit un domaine linéarisable de  $y_1(c)$ .

DÉMONSTRATION. D'après [DH1], on sait que  $|(P_c^k)'(y_1(c))| \geq 1$ . On définit donc

$$\begin{aligned} \rho : \Lambda_2 &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \\ c &\mapsto (P_c^k)'(y_1(c)) \end{aligned}$$

holomorphe.

$\rho$  étant ouverte, on a  $\rho : \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ .

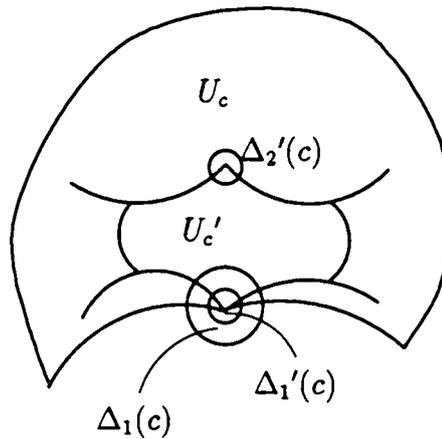
Soit  $c \in \Lambda_2$ . On considère un domaine linéarisable  $V_c$  de  $y_1(c)$  assez grand pour qu'il contienne  $z_t(c) = \psi_c(e^{s+2i\pi\theta_t})$ ,  $t = 1, 2$ . Il existe une détermination du logarithme telle que  $(V_c \setminus \{y_1(c)\})/(P_c^k) \simeq \mathbb{C}/\log \rho(c)\mathbb{Z} \oplus 2i\pi\mathbb{Z}$ . On note  $\pi_c$  la projection du voisinage dans ce tore, et  $\bar{z}_t(c) = \pi_c(z_t(c))$ ; on définit aussi  $\varpi_c$  la projection de  $\mathbb{C}$  dans le tore tel que  $\varpi_c(0) = \bar{z}_1(c)$ , et  $Q_c$  le bord du parallélogramme de sommets  $(0, 2i\pi, \log \rho(c), 2i\pi + \log \rho(c))$ , qui est un domaine fondamental du tore. On note  $\tilde{z}_2(c)$  le relevé de  $\bar{z}_2(c)$  dans ce domaine.

On considère  $H_c : Q_{c_0} \cup \{\tilde{z}_2\} \rightarrow Q_c \cup \{\tilde{z}_2(c)\}$ , tel que  $H_c(\tilde{z}_2) = \tilde{z}_2(c)$  et  $H_c(u \log \rho(c_0) + v2i\pi) = u \log \rho(c) + v2i\pi$  pour  $u \log \rho(c_0) + v2i\pi \in Q_{c_0}$ . C'est un mouvement holomorphe au-dessus de  $\Lambda_2$  qu'on prolonge au parallélogramme, puis au plan par l'action des groupes d'automorphismes des deux tores. Ce mouvement holomorphe descend en un mouvement holomorphe  $j_\Delta$  des tores qui suit  $\bar{z}_t(c)$ ,  $t = 1, 2$ . On le relève en  $\iota_\Delta : \Lambda_2 \times \Delta_1(c_0) \rightarrow \mathbb{C}$  par  $\iota_\Delta(c, z) = \pi_c^{-1} \circ j_\Delta(c, \pi_{c_0}(z))$  où  $\pi_c^{-1}$  est la branche telle que  $\pi_c^{-1}(\bar{z}_1(c)) = z_1(c)$ . ■

Le point  $y_1(c)$  étant répulsif, il existe un petit disque  $\Delta_1'(c)$  centré en  $y_1(c)$  tel que  $\Delta_1'(c) \subset\subset P_c^k(\Delta_1'(c)) = \Delta_1(c)$ . On note  $\Delta_2'$  la composante connexe de  $P_c^{-k}(\Delta_1(c))$  contenant  $y_1'(c)$ . On prend  $\Delta_1'(c)$  assez petit pour que  $\Delta_2'(c) \subset\subset A_2(c)$ .

$$\text{Posons } \begin{cases} U_c' = A_2'(c) \cup \Delta_1'(c) \cup \Delta_2'(c), \\ U_c = A_2(c) \cup \Delta_1(c). \end{cases} \quad (\text{voir Figure 10.7}).$$

On a  $U_c' \subset\subset U_c$ . Donc, pour  $c$  dans  $\Lambda_2$ ,  $f_c = (P_c^k : U_c' \rightarrow U_c)$  est une application à allure polynomiale quadratique.

FIG. 10.7 -  $U'_c \subset\subset U_c$ .

On a même mieux :

On note  $\mathcal{U}_1 = \{(c, z), c \in \Lambda_3, z \in U_c\}$ ,  $\mathcal{U}'_1 = \{(c, z), c \in \Lambda_3, z \in U'_c\}$  et  
 $f : \mathcal{U}'_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$   
 $(c, z) \mapsto (c, f_c(z))$ .

**Proposition 10.1.7**  $f$  est une famille analytique.

**DÉMONSTRATION.** Ceci résulte de l'existence de mouvements holomorphes des ouverts  $U_c$  et  $U'_c$ .

En effet, on définit  $\iota : \Lambda_2 \times (\partial U_{c_0} \cup \partial U'_{c_0}) \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\begin{cases} z \in (\partial A_2 \cup \partial A'_2), & \iota(\lambda, z) = \psi_c \circ \varphi_{c_0}(z), \\ z \in \partial \Delta_1, & \iota(\lambda, z) = \iota_\Delta(\lambda, z), \\ z \in (\partial \Delta'_1 \cup \partial \Delta'_2), & \iota(\lambda, z) = P_c^{-1} \circ \iota(c, P_{c_0}(z)). \end{cases}$$

Par le théorème de Słodkowski, ce mouvement holomorphe se prolonge à  $\mathbb{C}$ , i.e. on a  
 $\iota : \Lambda_2 \times U_{c_0} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\begin{cases} \iota(c, U_{c_0}) = U_c, \\ \iota(c, U'_{c_0}) = U'_c. \end{cases}$

Vérifions maintenant que  $f$  est une famille analytique :

- (i)  $U_{c_0}$  et  $U'_{c_0}$  sont simplement connexes ; donc les mouvements holomorphes associés montrent que  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}'_1$  sont homéomorphes au-dessus de  $\Lambda_2$  à  $\Lambda_2 \times \mathbb{D}$ .
- (ii) On a  $\partial \mathcal{U}'_1 \cap \mathcal{U}_1 = \{(c, z) \in \Lambda_2 \times \mathbb{C}, z \in \partial U'_c\}$  ; il s'ensuit qu'un compact  $L$  de  $\Lambda_2$  se relève dans  $\bar{\mathcal{U}}'_1$  en  $\mathcal{L} = \{(c, z) \in L \times \mathbb{C}, z \in \bar{U}'_c\}$ , qui est compact.
- (iii)  $f$  est polynomiale et  $f^{-1}(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}'_1$ .

■

Si on suppose  $W$  primitive, on peut agrandir  $\Lambda_2$  au voisinage de  $c_1$  pour avoir une famille mandelbrotique. Dans le sous-paragraphe suivant, on termine la preuve pour  $W$  primitive et dans le dernier (sous-paragraphe) on traite le cas  $W$  non primitive.

## 10.2 $W$ primitive

D'après la Proposition 1.4.4 de la Partie I,  $\mathcal{R}_{c_1}(\theta_1)$  et  $\mathcal{R}_{c_1}(\theta_2)$  aboutissent au même point  $y_1(c_1)$  parabolique de vraie période  $k$ , qui est la limite de  $y_1(c)$  quand  $c$  tend vers  $c_1$ ; on construit de la même façon  $A_2'(c_1)$  et  $A_2(c_1)$ . Comme  $c_1$  est la racine de  $W$  primitive,  $y_1(c_1)$  n'a qu'un seul pétale répulsif dont l'axe est contenu dans  $C \setminus A_2'(c_1)$ . On peut donc agrandir  $A_1'(c_1)$  à l'aide de disques  $\Delta_1'(c_1)$  et  $\Delta_2'(c_1)$  centrés en  $y_1(c_1)$  et  $y_1'(c_1)$  respectivement, et  $A_1(c_1)$  avec  $\Delta_1(c_1)$  centré en  $y_1(c_1)$  de telle sorte que  $P_{c_1}^k : U_{c_1}' = A_2'(c_1) \cup \Delta_1'(c_1) \cup \Delta_2'(c_1) \rightarrow U_{c_1} = A_2(c_1) \cup \Delta_1(c_1)$  soit une application à allure polynomiale de degré deux (cf Fig. 10.8).

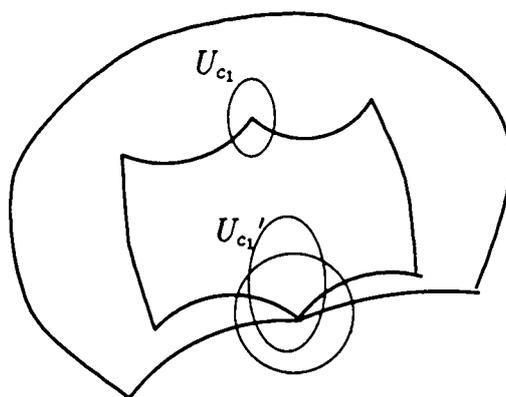


FIG. 10.8 -  $U_{c_1}' \subset\subset U_{c_1}$ .

Il s'agit maintenant de prolonger cette famille au voisinage de  $c_1$ . Le théorème suivant est démontré dans le Chapitre 6 de la Partie III :

**Théorème 10.2.1** *Quand on est dans un voisinage de  $c_1$  dans le plan des paramètres du type de la Figure 10.9, la dynamique devient une dynamique de "bateur à œufs" :*

- *dédoublément du point parabolique  $y_1(c_1)$  en  $y_1, y_2$  répulsifs,*
- *présence de cylindres de Fatou-Ecalle d'extrémités  $y_1$  et  $y_2$ , sur lesquels  $f_c$  est conjuguée à  $z \mapsto z + 1$  sur  $C/Z$ . Si  $c$  est assez proche de  $c_1$ ,  $c$  est attiré par le "bateur" (voir Figure 10.10).*

Pour  $c \in \mathcal{R}_M(\theta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , on ne peut pas faire la même construction que précédemment car  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$  bute sur un point précritique. Cependant,  $\{G_c = \eta\}$  (pour  $c \in \Delta_1$ ) coupe  $\mathcal{R}_c(\theta_s)$ , car  $G_c(\omega_c) < G_c(c) < \eta$  et l'on définit  $U_c$  comme étant l'ouvert contenant  $y_1$  et  $y_2$  et limité par  $\{G_c = \eta\}$  avec le bord d'un relevé du cylindre. Soit  $U_c'$  la composante connexe de  $P_c^{-k}(U_c)$  contenant aussi  $y_1$  et  $y_2$  (voir Fig. 10.11).  $U_c'$  est limité par  $\{G_c = \eta'\}$  et l'autre bord du cylindre. On a  $U_c' \subset\subset U_c$  car  $P_c^{-k}$  est strictement contractante sur  $C \setminus K_c$  et sur le cylindre.

On a donc défini  $P_c^k : U_c' \rightarrow U_c$ , application à allure polynomiale de degré deux,  $c \in \Delta_1$ .

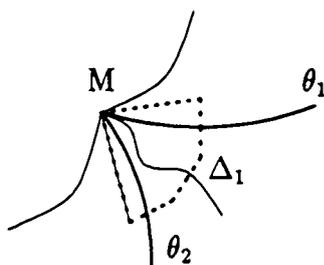


FIG. 10.9 - Déploiement parabolique.

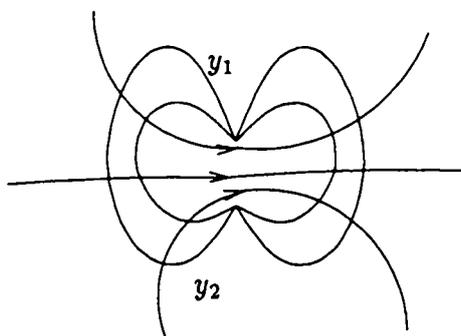


FIG. 10.10 - "Batteur à œufs".

On pose  $\Lambda = \Lambda_2 \cup \Delta_1$  (voir Figure 10.12).

Finalement, on a construit une famille  $(U_c' \xrightarrow{f_c} U_c)_{c \in \Lambda}$  d'applications à allure polynomiale quadratiques. Il faut donc vérifier qu'on peut appliquer la théorie exposée dans [DH2], i.e. montrer que cette famille est analytique.

On note  $\mathcal{U} = \{(c, z), c \in \Lambda, z \in U_c\}$ ,  $\mathcal{U}' = \{(c, z), c \in \Lambda, z \in U_c'\}$  et

$$f: \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U} \\ (c, z) \mapsto (c, f_c(z)).$$

On va changer un peu la définition des ouverts pour obtenir des mouvements holomorphes de  $U_c'$  et  $U_c$ :

Dans un premier temps, on va montrer que  $\iota_\Delta$  (cf Lemme 10.1.6) admet un prolongement à  $\Delta_1$ , afin d'obtenir un mouvement holomorphe pour les  $\partial U_c$ ,  $c \in \Lambda$ ; ensuite, on le prolongera à  $U_c$ . On considère  $\gamma \subset \partial \Delta_1(c_1)$  d'extrémités  $\psi_{c_1}(e^{s+2i\pi\theta_1})$  et  $\psi_{c_1}(e^{s+2i\pi\theta_2})$ . Soit  $\gamma' = P_{c_1}^{-1}(\gamma)$ . D'après la Proposition 6.1.5 (voir Partie III), il existe un mouvement holomorphe au-dessus d'un voisinage de  $c_1$  du quadrilatère  $(\gamma', \gamma)$  tel que l'image pour chaque  $c$  soit un quadrilatère dont les côtés images de  $\gamma'$  et  $\gamma$  se correspondent par  $P_c$ . Quitte à composer à gauche par une application holomorphe de  $(c, z)$ , affine à  $c$  fixé, on peut supposer que l'image de  $\psi_{c_1}(e^{s+2i\pi\theta_1})$  est  $\psi_c(e^{s+2i\pi\theta_1})$  et que celle de  $\psi_{c_1}(e^{s+2i\pi\theta_2})$  est

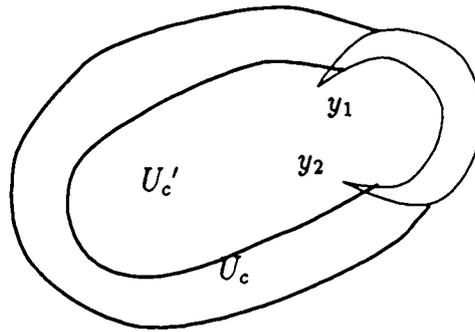


FIG. 10.11 -  $U_c' \subset\subset U_c, c \in \Lambda \setminus M_{c_0}$ .

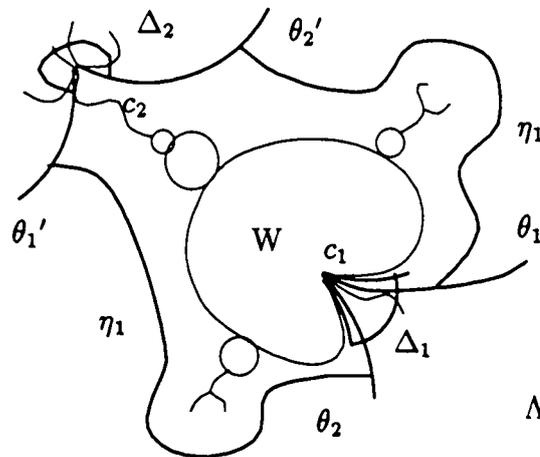


FIG. 10.12 -  $\Lambda$ .

$$\psi_c(e^{s+2i\pi\theta_2}).$$

On définit  $U_c$  bordé par  $A_2(c)$  et  $\iota(c, \gamma)$ . Ceci induit donc une famille analytique (voir Proposition 10.1.7).

D'après la Proposition 5.1.3 de la Partie II, on peut définir  $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f_c \sim_{hyb} P_{\chi(c)}$ ,  $\chi$  continue sur  $\Lambda$  et analytique sur  $\overset{\circ}{M}_{c_0}$  où  $M_{c_0} = \{c \in \Lambda, K(f_c) \text{ connexe}\}$ .

Montrons que  $M_{c_0}$  est un compact de  $\Lambda$ :

▷  $M_{c_0}$  est fermé dans  $\Lambda$  car  $M_{c_0} = \bigcap_{n \geq 0} \{c \in \Lambda, f^n(c, c) \in \overline{U'}\}$ .

▷ Afin de montrer que  $M_{c_0} \subset\subset \Lambda$ , on va montrer que pour tout  $c$  assez proche de  $\partial\Lambda$ ,  $K(f_c)$  est un Cantor.

- Si  $c \in \Delta_1$ , alors d'après le Théorème 10.2.1,  $c$  (valeur critique de  $f_c$ ) est attiré par le batteur et s'échappe, donc  $K(f_c)$  est un Cantor.

- Le reste de  $\partial\Lambda$  est dans  $\mathbb{C} \setminus M$ , donc pour un point  $c$  proche,  $K_c$  est un Cantor et comme

$K(f_c) \subset K_c$ , on en déduit que  $K(f_c)$  est un Cantor.

Donc,  $M_{c_0} \subset\subset \Lambda$ .

**Remarque.**  $\chi(c_1) = 1/4$ .

En effet, soit  $c \in W$ ; il existe  $\tilde{\varphi}_c$  tel que  $f_c \sim_{hyb} P_{\chi(c)}$  et il existe  $z_a(c) \in U_c'$  fixe attractif tel que  $f_c'(z_a(c)) = \rho_W(c)$ . Soit  $U$  un voisinage relativement compact dans le bassin immédiat de  $z_a(c)$ :  $\tilde{\varphi}_c : U \rightarrow \tilde{\varphi}_c(U)$  est biholomorphe. Donc,  $\tilde{\varphi}_c(z_a(c))$  est un point fixe de  $P_{\chi(c)}$  et  $P_{\chi(c)}'(\tilde{\varphi}_c(z_a(c))) = f_c'(z_a(c))$ .

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \chi : W &\rightarrow W_0 \\ c &\mapsto \rho_{W_0}^{-1} \circ \rho_W(c), \end{aligned}$$

et comme  $\chi$  est continue,  $\chi(c_1) = 1/4$ .

D'après la Proposition 5.1.3 de la Partie II,  $\chi : M_{c_0} \rightarrow M$  a un degré  $d$  égal au nombre de tours de  $f_c(\omega_c) - \omega_c = c - \omega_c$  quand  $c$  parcourt une fois un lacet qui tourne (une fois) autour de  $M_{c_0}$ .

Les figures suivantes illustrent les positions du vecteur  $c - \omega_c$  quand  $c$  parcourt  $\partial\Lambda$ : voir Figures 10.13.

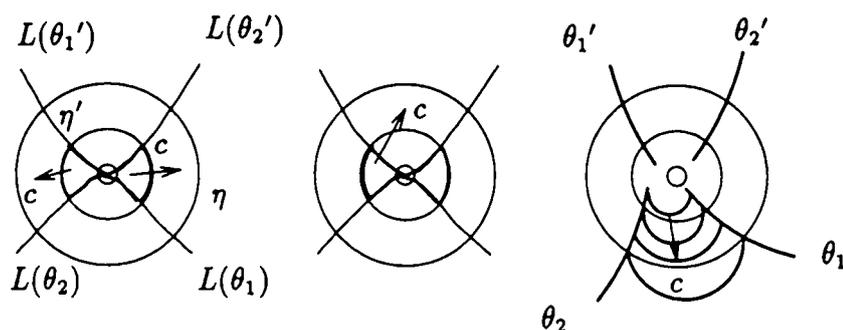


FIG. 10.13 - Degré de  $\chi$ .

Par suite,  $d = 1$  et la famille est mandelbrotique.

### 10.3 $W$ non primitive

On choisit  $\Lambda = \Lambda_2$  (voir Figure 10.14). D'après la Proposition 10.1.7,  $(f_c)_{c \in \Lambda}$  est une famille analytique d'applications à allure polynomiale. D'après la Proposition 5.1.3 de la Partie II, il existe  $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle que  $\forall c \in \Lambda$ ,  $f_c \sim_{hyb} P_{\chi(c)}$ .

**Lemme 10.3.1** Pour  $c \in M_{c_0}$ , on a  $\lim_{c \rightarrow c_1} \chi(c) = 1/4$ .

**Remarque.** Par la construction de  $\Lambda$ , l'adhérence dans  $\mathbb{C}$  de  $M_{c_0}$  est  $c_1$ .

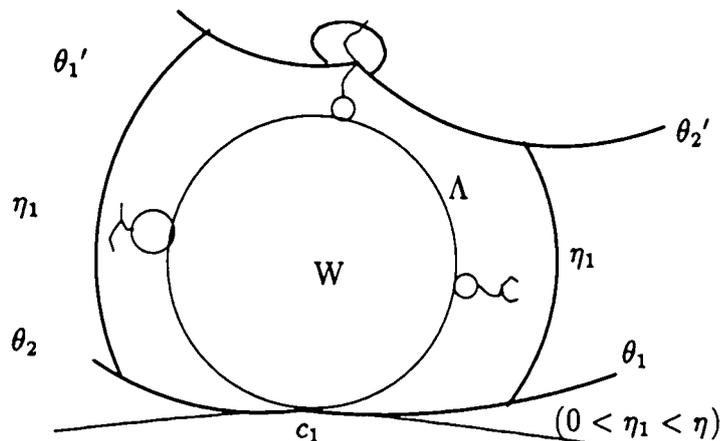


FIG. 10.14 -  $\Lambda$ .

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que  $\chi|_W = \rho_{\bar{W}_0}^{-1} \circ \rho_W$ . Il s'ensuit que le lemme est vrai sur  $W$ , et même sur  $\bar{W}$ .

On considère une suite  $(c_n)$  de  $M_{c_0}$  de limite  $c_1$ . Par un corollaire des inégalités de Yoccoz (voir e.g. [Hu]), les  $\chi(c_n)$  appartiennent à des membres de diamètres tendant vers zéro, i.e. ils ont même limites que les racines de ces membres, à savoir  $1/4$ . ■

D'après le Théorème 4 de [DH2],  $\chi$  restreint à  $M_{c_0}$  est un revêtement ramifié de degré  $\delta \geq 1$ . D'après la remarque ci-dessus, on peut considérer un lacet basé à la racine  $c_1$  qui fait une fois le tour de  $M_{c_0}$  dans  $\Lambda \cup \{c_1\}$ . En adaptant la Proposition 5.1.3, on montre que le degré de  $\chi$  est égal au nombre de tours de  $(c - \omega_c)$  quand  $c$  parcourt une fois ce lacet (l'extension de  $\chi$  à la racine est encore un revêtement ramifié). Comme dans le cas primitif, lorsque l'on parcourt ce lacet,  $c - \omega_c$  parcourt à la limite un seul tour. Par conséquent,  $\chi$  prend au plus une valeur par point: c'est donc un homéomorphisme. On en déduit que  $(f_c)_{c \in \Lambda}$  est une famille semi-mandelbrotésque. De plus,  $\chi$  se prolonge continûment à  $M$  tout entier en posant  $\chi(c_1) = 1/4$ .

Bien qu'on ne puisse pas définir d'application à allure polynomiale à la racine  $c_1$ , on a cependant la

**Proposition 10.3.2** *Le polynôme  $P_{1/4}$  figure de manière rigide dans  $P_{c_1}$ .*

DÉMONSTRATION. D'après [CJY], les composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}_{c_1}$  sont des quasidisques. On note  $U_1$  celle qui contient  $c_1$ . Il existe deux ouverts  $U_{c_1}'$  et  $U_{c_1}$  contenant  $\bar{U}_1$  tels que  $(P_{c_1}^k, U_{c_1}', U_{c_1}, \bar{U}_1)$  soit une silhouette quadratique. Sa classe externe n'admet qu'un point marqué, à savoir un point fixe parabolique.

Soit  $\varphi : U_1 \rightarrow \mathbf{D}$  une application conforme tel que  $\begin{cases} \varphi(y_1(c_1)) = 1, \\ \varphi(\omega_{c_1}) = 0. \end{cases}$

Cette application conjugue  $P_{c_1}^k$  à

$$B : z \mapsto \frac{z^2 + 3}{1 + 3z^2}.$$

Comme  $U_1$  est un quasidisque,  $\varphi$  se prolonge quasiconformément à  $\bar{C}$ , et il ne reste plus qu'à montrer que  $P_{1/4}$  figure dans  $B$ . Pour cela, on procède à la même décomposition que dans la démonstration de la Proposition 5.5.1 de la Partie II.

Notons  $S_0$  un secteur invariant issu du chou-fleur, que l'on découpe en domaines fondamentaux  $D_n$ , et soit  $T_0$  un secteur issu de  $B$  correspondant à  $S_0$ . On note  $S_n$  l'image réciproque de  $S_0$  issu de  $P_{1/4}^{-n}(1/2)$ . Sur une réunion de quadrilatères, on construit une application quasiconforme  $\psi$  par *pull-back*. Sur les secteurs restant, on prolonge par des arcs de cercles.

La restriction de  $\psi$  à un domaine  $D_n$  a une excentricité  $K_\psi \asymp \left| \log \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right|^{-1} \asymp n$ . Pour conclure, montrons :

**Lemme 10.3.3** *On a  $\psi \in W^{1,\nu}$  pour tout  $\nu \in ]1, 2[$ .*

DÉMONSTRATION.

$$\|\psi\|_{L^\nu}^\nu \asymp \int (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} = \sum_n \int_{S_n} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} + C.$$

Or

$$\int_{S_n} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} = \int_{S_0} (K_\psi(P^{-n}) \text{Jac} \psi(P^{-n}))^{\nu/2} |(P^{-n})'|^2 = \int_{S_0} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} |(B^{-n})'|^\nu |(P^{-n})'|^{2-\nu}$$

car  $\text{Jac} \psi(P^{-n}) |(P^{-n})'|^2 = \text{Jac} \psi |(B^{-n})'|^2$ .

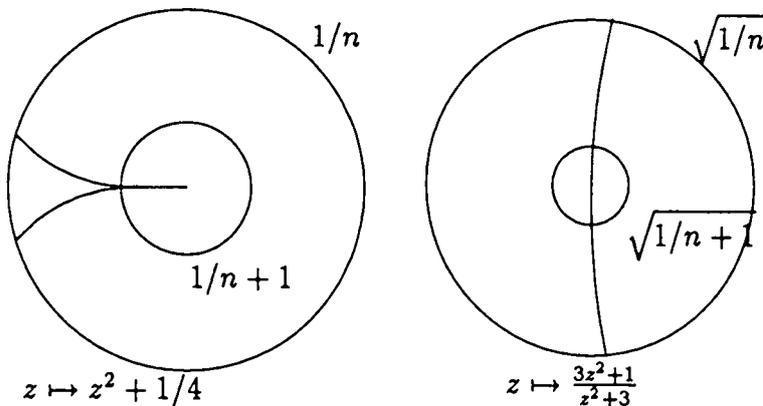


FIG. 10.15 - Estimation des distances.

Notons  $\alpha \in ]1, 2[$  la dimension de Hausdorff de  $J_P$  et soit  $p \in ]1, \frac{\alpha}{\alpha+\nu-2}[$ . Par le théorème de Kōbe et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^\nu}^\nu &\leq C \int_{S_0} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} \sum |(B^{-n})'(1)|^\nu |(P^{-n})'(1/2)|^{2-\nu} \\ &\leq C \int_{S_0} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} \left( \sum |(B^{-n})'(1)|^{p\nu} \right)^{1/p} \left( \sum |(P^{-n})'(1/2)|^{\frac{2-\nu}{1-1/p}} \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

D'après [Mc5], comme  $p\nu > 1$  et  $\frac{2-\nu}{1-1/p} > \alpha$ , les deux sommes sont finies. De plus,

$$\int_{S_0} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} \leq C \sum_n n^{\nu/2} (\text{Aire } D_n)^{1-\nu/2} \left( \int_{D_n} \text{Jac} \psi \right)^{\nu/2}.$$

On trouve

$$\int_{S_0} (K_\psi \text{Jac} \psi)^{\nu/2} \leq C \sum_n (1/n)^{4-(3/2)\nu} < \infty.$$

Par suite, l'application est dans  $W^{1,\nu}$  et  $P_{1/4}$  figure de manière rigide dans  $B$ . ■

**Remarque.** Réciproquement,  $\psi^{-1} \in W^{1,2}$  car  $\|\psi\|_{L^2}^2 \asymp \int K_\psi \text{Jac} \psi \asymp \sum n \int_{\psi(D_n)} \text{Jac} \psi^{-1} \asymp \sum 1/n^3 < \infty$ .



# Chapitre 11

## Opération de Modulation

Soient  $c_0 \in \mathcal{D}_0$  de période  $k \geq 1$ , et  $W$  sa composante hyperbolique. On considère  $\chi_{c_0} : M_{c_0} \rightarrow M$ . Si  $W$  n'est pas primitive, on prolonge  $\chi_{c_0}$  par continuité en posant  $\chi_{c_0}(c_1) = 1/4$ .

On définit alors

$$\begin{aligned} c_0 \perp . . : M &\rightarrow M_{c_0} \\ c &\mapsto c_0 \perp c = \chi^{-1}(c). \end{aligned}$$

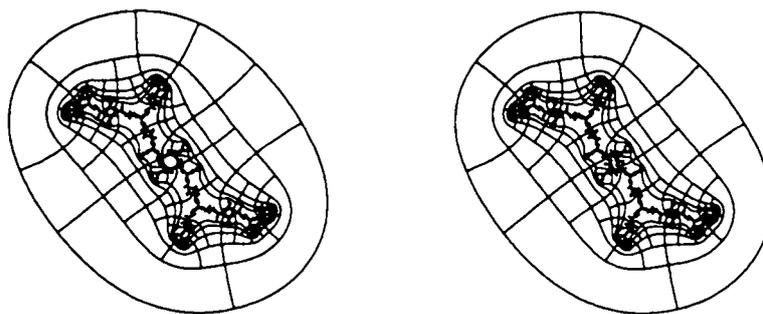


Figure 11 Deux ensembles de Julia de la même copie.

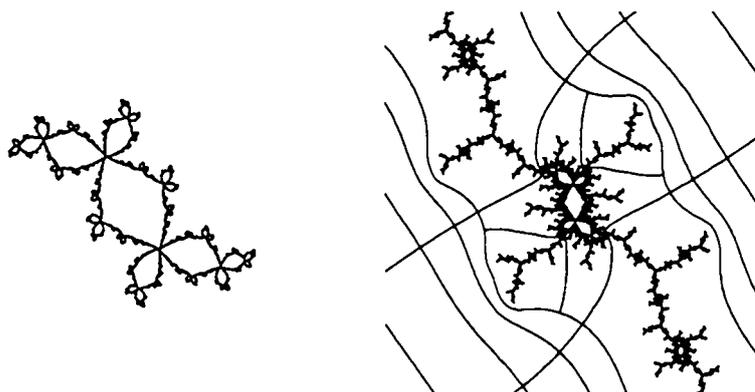


Figure 12 *Modulateur et zoom d'un polynôme modulé.*

Dans ce chapitre, nous allons analyser l'opération de modulation afin d'obtenir des liens de caractère topologique ou/et combinatoire entre les différents ensembles de Julia. Le théorème principal est le suivant :

**Théorème 8** *L'opération de modulation agit sur les ensembles de Julia remplis comme suit :  $K_{c_0 \perp c}$  est homéomorphe à  $K_{c_0}$  dans lequel on a remplacé les composantes connexes de l'intérieur par des "copies" de  $K_c$ .*

Pour sa démonstration, on va construire  $\chi^{-1}$  par chirurgie. Par ailleurs, on va définir un modèle topologique du compact obtenu en remplaçant des composantes connexes de l'intérieur par d'autre(s) compact(s). Ceci permettra de généraliser la notion de modulation.

Une fois le théorème démontré, on énoncera quelques corollaires immédiats.

Le but est de comprendre la combinatoire et la géométrie de l'ensemble de Julia modulé à partir de celles de l'ensemble de départ et de  $c_0$ . A cette fin, on va étudier des *puzzles* associés à la copie  $M_{c_0}$  isolant les *petits* ensembles de Julia ; du coup, on pourra définir un modèle topologique du modulé (polynôme topologique sur une sphère) ainsi qu'un modèle combinatoire de l'ensemble de Julia.

Du chapitre précédent, on n'utilise essentiellement que la construction de l'application à allure polynomiale faite pour les centres des copies, et, dans la première section, l'existence de ces copies.

## 11.1 Puzzle associé à une copie $M_{c_0}$

La copie  $M_{c_0}$  de  $M$  diffère essentiellement de  $M$  en ce que les rayons dyadiques qui aboutissaient de manière unique à un point de  $M$ , ne sont plus les seuls qui aboutissent dans la copie. Plus précisément :

**Définition.** Soit  $\hat{\mathcal{D}}_2 = \{c \in M_{c_0}, \exists n \geq 1, P_c^n(c) = y_1(c)\}$ .

Cet ensemble comprend exactement les paramètres de  $M_{c_0}$  qui représentent les points d'aboutissement des rayons dyadiques dans  $M$ .

Commençons par une proposition préliminaire, qui va nous permettre de définir les puzzles :

**Proposition 11.1.1** *Il existe  $\Lambda_\infty \subset \mathbb{C}$  tel que :*

(i)  $\Lambda_\infty \cap M = M_{c_0} \setminus (\hat{D}_2 \cup \{c_1\})$  ;

(ii)  $\forall z_0 \in P_{c_0}^{-n}(y_1)$ ,  $\exists ! z : \Lambda_\infty \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que

$$\begin{cases} P_c^n(z(c)) = y_1(c) \text{ avec } z(c_0) = z_0, \\ \exists ! (t_1, t_2) \text{ préimages de } \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ par } 2^{nk} \text{ telles que } \gamma_c(t_1) = \gamma_c(t_2) = z(c); \end{cases}$$

(iii) si  $c \in \hat{D}_2$ , alors il existe  $n_0 \geq 0$  tel que la propriété (ii) soit vraie pour  $n \leq n_0$  ; sinon, pour  $n > n_0$ , il existe exactement deux couples préimages de  $(\theta_1, \theta_2)$  qui vérifient (ii).

Le principe de la démonstration consiste à construire une suite décroissante d'ouverts  $(\Lambda_n)_{n \geq 0}$  vérifiant (ii) et (iii) jusqu'au rang  $(n+1)k$ , et dont  $\Lambda_\infty$  sera l'intersection.

DÉMONSTRATION.

▷ Soit  $\Lambda_0$  l'ouvert contenant  $c_0$  délimité par  $\mathcal{R}_M(\theta_1) \cup \{c_1\} \cup \mathcal{R}_M(\theta_2)$  et l'équipotentielle  $(G_M = \eta)$ ,  $\eta > 0$ . D'après la Proposition 10.1.2, on sait que l'application de  $\Lambda_0$ ,  $y_1 : c \mapsto y_1(c)$  est bien définie et vérifie les propriétés (ii) et (iii). De plus,  $\mathcal{R}_c(\theta_1')$  et  $\mathcal{R}_c(\theta_2')$  aboutissent au même point pour  $c \in \Lambda_0$ . Par conséquent, on peut appliquer la Proposition 8.3.1 à tout point  $z_0$  tel que  $P_{c_0}^i(z_0) = y_1$ ,  $k \geq i \geq 0$ , car, sinon, on aurait deux points précritiques sur lesquels  $\mathcal{R}_c(\theta_1')$  et  $\mathcal{R}_c(\theta_2')$  buteraient.

▷ Soit  $\Lambda_1 \subset \Lambda_0$  contenant  $c_0$  et bordé par  $\mathcal{R}_M(\theta_1') \cup \{c_2\} \cup \mathcal{R}_M(\theta_2')$  (cf Lemme 10.1.4). Soit  $A_1$  l'ouvert correspondant dans le plan de  $P_{c_0}$ . On note  $A_1'$  la composante connexe de  $P_{c_0}^{-k}(A_1)$  contenue dans  $A_1$ . Alors,  $A_1' \xrightarrow{P_{c_0}^k} A_1$  est un revêtement quadratique. On note  $y_2$  et  $y_2'$  les images réciproques de  $y_1'$  par cette application. Il existe  $t_1, t_2, t_1', t_2'$  des rayons qui aboutissent à  $y_2$  et  $y_2'$  respectivement. Ils y aboutissent aussi pour tout  $c$  dans  $\Lambda_1$ . En effet, si l'un d'eux, e.g.  $t$ , butait, alors, comme  $c$  est dans  $\Lambda_1$ , cela impliquerait que  $c$  serait d'argument  $2^k t$  ou  $2^{2k} t$ , ce qui est impossible puisque ces rayons ne sont pas dans  $A_1$ . De ce fait, les rayons préimages intermédiaires aboutissent aussi, et on conclut par la Proposition 8.3.1. Cependant, ces rayons aboutissent tous les quatre au même point pour  $c_2 = \gamma_M(\theta_1')$ . De plus, par la Proposition 1.4.4 de la Partie I, on sait que  $\mathcal{R}_M(t_1)$  et  $\mathcal{R}_M(t_2)$  (respectivement  $\mathcal{R}_M(t_1')$  et  $\mathcal{R}_M(t_2')$ ) aboutissent en un même point de  $\hat{D}_2$  dans le plan des paramètres. Ceci nous permet de construire  $\Lambda_2$ .

▷ On suppose  $\Lambda_n$  construit. Soit  $A_n (= A_{n-1}')$  l'ouvert correspondant dans le plan dynamique de  $c_0$ . On note  $A_n'$  la composante connexe de  $P_{c_0}^{-k}(A_n)$  contenue dans  $A_n$ . On considère  $y_n \in \partial A_n \cap P_{c_0}^{-kn}(y_1)$ . Ce point a deux rayons préimages de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui y aboutissent. Soient  $y_{n+1}$  et  $y_{n+1}'$  ses images réciproques par  $A_n' \xrightarrow{P_{c_0}^k} A_n$ . Elles ont chacun deux rayons  $(t_1, t_2)$  et  $(t_1', t_2')$  qui y aboutissent. Elles aboutissent aussi à un même point pour tout  $c$  dans  $\Lambda_n$ . Sinon,  $c$  serait d'argument un itéré  $k^{\text{ième}}$  de ces rayons. Or, ces rayons ne sont pas dans  $\Lambda_n$  (cf ci-dessus). On montre de la même façon que les rayons intermédiaires aboutissent eux aussi, en vertu de la Proposition 8.3.1. De plus,  $\gamma_M(t_1) = \gamma_M(t_2)$

et  $\gamma_M(t_1') = \gamma_M(t_2')$ , ce qui permet de construire  $\Lambda_{n+1}$  comme ouvert de  $\Lambda_n$  contenant  $c_0$  et bordé par  $\mathcal{R}_M(t_1) \cup \{\gamma_M(t_1)\} \cup \mathcal{R}_M(t_2)$  et  $\mathcal{R}_M(t_1') \cup \{\gamma_M(t_1')\} \cup \mathcal{R}_M(t_2')$  (et les autres rayons provenant des autres préimages).

On note  $\Lambda_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \Lambda_n$ . La vérification des points de la proposition est directe.

La seule différence combinatoire entre  $c_0$  et un point de  $\hat{\mathcal{D}}_2$  concerne les points précritiques du polynôme de Misiurewicz : le nombre de rayons qui aboutissent est double.

De plus,  $P_{c_1}$  et  $P_{c_0}$  sont topologiquement conjugués sur leurs ensembles de Julia, donc ce résultat vaut aussi pour  $c_1$ . ■

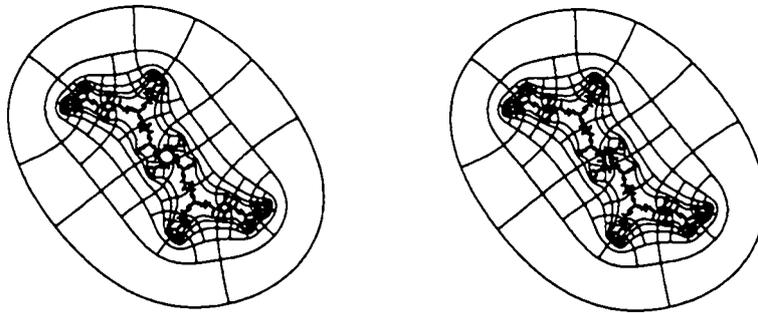


Figure 13 *Puzzles associés.*

**Définitions.** En suivant l'idée des puzzles de Branner-Hubbard et Yoccoz (voir [BH], [Hu]), on considère la suite de partitions définies comme suit, pour  $c \in \Lambda_\infty$  :

- on fixe  $\eta > 0$  et on pose  $\Gamma_0 = \bigcup_{0 \leq n \leq k} (\mathcal{R}_c(2^n \theta_1) \cup \{P_c^n(y_1)\} \cup \mathcal{R}_c(2^n \theta_2)) \cup (G_c = \eta)$ , dont la partition définit le puzzle de niveau 0, noté  $\mathcal{P}_0$ ; la fermeture des composantes connexes bornées du complémentaire sont les pièces de  $\mathcal{P}_0$ . On définit par récurrence  $\Gamma_n = P_c^{-1}(\Gamma_{n-1})$ , qui induit le puzzle  $\mathcal{P}_n$  de niveau  $n$ .  $P_c$  envoie une pièce de  $\mathcal{P}_n$  sur une pièce de  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

- un bout  $x = (X_0 \supset X_1 \supset \dots)$  est une suite décroissante de pièces telle que  $\forall n \geq 0$ ,  $X_n \in \mathcal{P}_n$ .  $P_c$  agit sur les bouts. On note  $\mathcal{E}_P$  l'ensemble des bouts.

- on définit enfin l'impression du bout  $x$  par  $I(x) = \bigcap X_n$ , compact connexe.

On munit  $\mathcal{P}_n$  de la métrique suivante : soient  $P, Q \in \mathcal{P}_n$  ; si  $P = Q$ , on pose  $d_n(P, Q) = 0$ . Sinon, il existe une chaîne  $P_0, P_1, \dots, P_k$  telle que  $P_0 = P$ ,  $P_k = Q$  et  $\bigcup P_i$  est connexe ; on pose alors  $d_n(P, Q) = \min\{k, \text{tel que } P_0, P_1, \dots, P_k \text{ soit un chemin de } P \text{ à } Q\}$ .

On munit alors  $\mathcal{E}_P$  de la topologie produit, qui en fait un espace compact, et dont une métrique est, pour  $x = (X_0 \supset X_1 \supset \dots)$  et  $y = (Y_0 \supset Y_1 \supset \dots)$ ,  $d(x, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n(X_n, Y_n)}{2^{n+1}}$ .

À tout  $z \in K_c$  qui n'est pas dans la grande orbite de  $y_1(c)$ , on associe le bout  $N(z) = (X_0 \supset X_1 \supset \dots)$  tel que  $\forall n \geq 0$ ,  $z \in X_n$ . Cette application est continue et vérifie  $z \in I \circ N(z)$ .

La Proposition 11.1.1 entraîne le résultat suivant :

-  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \iota_n &: \Lambda_n \times \bigcup_{0 \leq p \leq n} \Gamma_p(c_0) \rightarrow \mathbb{C} \\ (c, z) &\mapsto \psi_c \circ \varphi_{c_0}(z) \end{aligned}$$

est un mouvement holomorphe de point base  $c_0$  tel que  $\iota_n(\Gamma_p(c_0)) = \Gamma_p(c)$ .

- ces mouvements holomorphes induisent un homéomorphisme  $\iota_c : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(c_0) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(c)$  (c'est en fait une isométrie) conjugant  $P_{c_0}$  à  $P_c$ .

**Proposition 11.1.2** Soit  $c \in M_{c_0} \setminus \hat{\mathcal{D}}_2$ , alors pour tout bout  $x$  de  $P_c$ , soit  $I(x)$  est un point, soit  $I(x)$  est homéomorphe à  $K_{x_{c_0}(c)}$

**Remarque.** Si  $c \in \hat{\mathcal{D}}_2$ , alors l'impression de tout bout est un point. D'une part, les rayons aboutissant aux points précritiques vont morceler les petites copies du Julia ; d'autre part, comme le polynôme est sous-hyperbolique, il existe une métrique telle que  $P_c$  soit fortement dilatante, et par conséquent les pièces ont un diamètre qui décroît exponentiellement ( $\overset{\circ}{K}_c = \emptyset$ ).

**DÉMONSTRATION.**  $\triangleright$  On commence par examiner le cas de  $c_0$  et on note  $c = (C_0 \supset C_1 \supset \dots)$  le bout contenant la point critique. D'après la preuve du Théorème de Modulation, on a  $I(c) = \bar{U}_0$ , adhérence de la composante de Fatou contenant l'origine.

On considère maintenant un bout  $x$  qui n'est pas dans l'orbite de  $c$ , i.e.  $\forall n \geq 0, \exists p \geq 0$  tel que  $P_{c_0}^n(\overset{\circ}{X}_{p+n}) \cap C_p = \emptyset$ . La méthode consiste à rechercher s'il existe une sous-suite  $(X_{n_k})$  telle que  $(X_{n_{k+1}} \setminus X_{n_k})$  soit un anneau non dégénéré. Si c'est le cas, des estimations sur les modules d'anneaux (voir [BH], [Hu]) permettent de conclure que l'impression est un point.

Comme le bout critique est périodique ( $P_{c_0}^k(C_{k+n}) = C_n$ ), on en déduit l'existence de  $m$  tel que pour tout  $n, P_{c_0}^n(X_{m+n}) \neq C_m$ , i.e. on en déduit que  $x$  ne devient pas arbitrairement proche du bout critique, sinon il devrait être périodique, et donc critique. Par conséquent, il existe  $(n_p)$  telle que  $P_{c_0}^{n_p}(X_{m+n_p}) \neq C_m$  et  $P_{c_0}^{n_p}(X_{n_p}) = C_0$ . L'anneau  $C_0 \setminus P_{c_0}^{n_p}(X_{n_p+m})$  est non dégénéré, donc  $X_{n_p} \setminus X_{n_p+m}$  est lui-même non dégénéré. Comme on a un nombre fini d'anneaux à la profondeur  $m$ , que le bout  $x$  passe un nombre fini de fois vers le point critique, d'une part les anneaux  $C_0 \setminus P_{c_0}^{n_p}(X_{n_p+m})$  sont de module uniformément minoré, et d'autre part l'application retour-inverse à  $x$  est de degré majoré, donc l'impression est un point.

Cette preuve est une adaptation directe de résultats des articles cités en référence.

$\triangleright$  Soit  $c \in M_{c_0} \setminus \hat{\mathcal{D}}_2$ . Le transport des pièces par les  $\iota_n$  nous assure d'une part que les partitions sont identiques, avec la même action sur les bouts et, d'autre part, que les anneaux non dégénérés s'envoient sur des anneaux non dégénérés. ■

**Remarque.** La propriété fondamentale qui a été utilisée est ce qu'on appelle dans la littérature, le cas *hors-critique* (*off critical*). Elle correspond au fait que le bout considéré n'est pas une préimage d'un bout contenant un point critique. Cette démonstration est donc valable en tout degré, dès qu'on examine un bout hors-critique.

**Corollaire 11.1.3** *Pour tout  $c$  dans  $M_{c_0}$ , l'ensemble de Julia  $J_c$  est localement connexe en tout point qui n'appartient pas à une petite copie.*

**Corollaire 11.1.4** *Si  $c \in M_{c_0} \setminus \hat{\mathcal{D}}_2$ , on note  $S_c = \{z \in K_c, \text{ tel que } \{z\} \text{ soit l'impression d'un bout}\}$ ; alors,  $P_{c_0}$  et  $P_c$  sont conjugués de  $S_{c_0}$  sur  $S_c$ .*

**Remarque.** Si  $c \in \hat{\mathcal{D}}_2$ , alors on a à faire à une semi-conjugaison de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(c)$  dans  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(c_0)$ , injective au-dessus de  $S_{c_0}$ .

## 11.2 Modèle topologique de la modulation

▷ Soit  $c_0 \in \mathcal{D}_0(k)$ ,  $k > 1$ . On définit des voisinages  $U_{c_0}' \subset\subset U_{c_0}$  de la composante de Fatou contenant  $c_0$ , comme cela a été fait dans la démonstration du Théorème de Modulation. On considère le puzzle associé, bordé par une équipotentielle pour que la première pièce  $X_1'$  contenant la valeur critique soit contenue dans  $U_{c_0}$ . On note  $X_0 = P_{c_0}^{-1}(X_1')$ ,  $X_i = P_{c_0}^{-(k-i)}(X_0)$ ,  $i > 0$ , entourant une composante du cycle, et  $h_{c_0}$  la classe externe de  $P_{c_0}^k : U_{c_0}' \rightarrow U_{c_0}$ .

▷ Soit  $c \in M$ ,  $c \neq 1/4$ ; on considère son accouplement avec  $h_{c_0}$ , et on obtient  $f_c : U_c' \rightarrow U_c$ . Il existe donc une application  $\psi_1 : U_{c_0} \setminus K(P_{c_0}^k) \rightarrow U_c \setminus K(f_c)$  conforme qui conjugue les applications. Pour  $1 < i \leq k$ , on définit  $\psi_i = \psi_1 \circ P_{c_0}^{i-1}$ . Par suite,  $\partial X_0$  est dans le domaine de  $\psi_k$ . On note  $X_0(c)$  la pièce bordée par  $\psi_k(\partial X_0)$ . Le bord de ces deux pièces sont des quasicerclles, car s'ils ne sont pas  $\mathbf{R}$ -analytiques en un point, ce point est prérepulsif, donc l'application y est quasisymétrique.

On prolonge  $\psi_k|_{\partial X_0}$  par l'extension barycentrique en  $\varphi : X_0 \rightarrow X_0(c)$  qui est quasiconforme.

▷ On définit  $\mu_0 = \frac{\varphi_{\bar{z}}}{\varphi_z}$  sur  $X_0$  qu'on prolonge par  $P_{c_0}^*$  sur le cycle et par zéro ailleurs. Soit  $\phi_0$  l'unique solution de cette équation, tangente à l'identité à l'infini. On pose  $C_0 = \phi : \bar{\mathcal{C}} \setminus (\cup X_i) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  et  $C_i : X_0(c) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  par  $C_i = \phi \circ P_{c_0}^{-i+1} \circ \varphi^{-1}$ . Ces applications sont conformes, et montrent que

$$\Sigma_0 = (\bar{\mathcal{C}} \setminus (\cup X_i)) \cup (\cup X_i(c)) / (\psi_i|_{\partial X_i(c)})$$

est une sphère conforme qui hérite des structures complexes de chaque composante.

▷ On définit  $F_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$  comme suit :

- si  $z \in \bar{\mathcal{C}} \setminus P_{c_0}^{-1}(\cup X_i)$ ,  $F_0(z) = P_{c_0}(z)$ ,
- si  $z \in X_0(c)$ ,  $F_0(z) = f_c : X_0(c) \rightarrow X_1(c)$ ,
- si  $z \in X_i(c)$ ,  $F_0(z) = id^{ité} : X_i(c) \rightarrow X_{i+1}(c)$ ,
- si  $z \in \cup P_{c_0}^{-1}(X_i)$ ,  $F_0(z) = \varphi \circ P_{c_0}^{n_x} \in X_i(c)$ .

Cette application est un revêtement ramifié quadratique quasirégulier.

▷ On définit sur  $\Sigma_0$  la forme  $\mu_1 = \frac{(F_0)_{\bar{z}}}{(F_0)_z}$ . Comme elle est intégrable, on peut définir la sphère  $\Sigma_1$  comme étant  $\Sigma_0$  où  $P_{c_0}^{-1}(\cup X_i)$  a été remplacé par des copies de  $X_0(c)$ . De plus,

on définit  $\pi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  comme étant l'identité, là où il n'y a pas de changement, et sinon, par  $F_0^{-1} \circ \varphi^{-1}$ . Cette application est un homéomorphisme quasiconforme et on pose  $F_1 = \pi_1^{-1} \circ F_0 \circ \pi_1$ , qui est aussi quasirégulière.

▷ De proche en proche, on définit  $\Sigma_n, \pi_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$  comme étant l'identité, là où il n'y a pas de changement, et sinon, par  $F_{n-1}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ . Cette application est un homéomorphisme quasiconforme et on pose  $F_n = \pi_n^{-1} \circ F_{n-1} \circ \pi_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ .

On pose

$$\Sigma_\infty = \varinjlim (\Sigma_n, \pi_n) \text{ et } F_\infty : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty \\ (z_n)_{n \geq 0} \mapsto (F_n(z_n))_{n \geq 0}.$$

$F_\infty : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$  est un revêtement ramifié quadratique représentant le modulé de  $c_0$  par  $c$ .

**Remarque.** Quand  $c = 1/4$ , on peut effectuer la même construction topologique — ce qu'on perdra est la quasiconformité des applications. Cependant, il est possible de montrer que les applications  $\pi_n$  sont, à chaque étape, des  $\mu$ -homéomorphismes au sens de G. David (voir [Da]).

## 11.3 Construction par chirurgie quasiconforme

Soit  $c_0 \in \mathcal{D}_0$  le centre d'une composante hyperbolique de période  $k$ . On se propose de construire à partir de la dynamique de  $c_0$  n'importe lequel de ses modulés. Une conséquence immédiate sera :

**Corollaire 11.3.1** *Si  $\hat{c} = c_0 \perp c$  et  $F$  est le modulé topologique de  $c_0$  par  $c$  défini ci-dessus, alors  $P_{\hat{c}}$  et  $F$  sont topologiquement conjugués.*

Dans la suite, on distinguera le cas primitif du cas non primitif afin de pouvoir construire le modulé de  $c_0$  par  $1/4$  dans le cas primitif.

### 11.3.1 Cas primitif

On suppose ici que  $c_0$  est primitif.

On considère d'abord le plan du centre  $c_0$ . Rappelons qu'il existe  $f_{c_0} : U_{c_0}' \rightarrow U_{c_0}$ , application à allure polynomiale hybridement équivalente à  $z \mapsto z^2$  au voisinage de l'origine. On choisit  $U_{c_0}$  pour que  $\partial U_{c_0} \cap K_{c_0}$  consiste exactement en deux points  $x_1$  et  $x_2$  strictement prérepulsifs.

On définit le pseudo-cycle de  $P_{c_0}$  comme étant l'ouvert  $\cup_{1 \leq n \leq k} P_{c_0}^n(U_{c_0}')$  (et de façon équivalente pour  $F_0$  et  $P_{\hat{c}}$ ,  $\hat{c} \in M_{c_0}$ ). Quitte à choisir  $U_{c_0}'$  assez petit, le pseudo-cycle aura  $k$  composantes connexes et sera disjoint de sa préimage.

Nous serons aussi amené à utiliser le domaine  $X$  suivant. Soit  $V$  une composante de la préimage du pseudo-cycle, disjoint du pseudo-cycle. C'est un quasidisque dont l'adhérence

est disjointe de l'ensemble postcritique de  $P_{c_0}$ . On peut alors considérer l'ensemble  $\mathcal{I}(V)$  des branches inverses de  $P_{c_0}$  à valeurs dans  $U_{c_0}$ , et  $X \subset U_{c_0}$  la réunion des images.

**Construction d'un modulé.** On suit d'abord la construction du modèle topologique.

▷ Soit  $c \in M$ . On considère  $f_c : U_c' \rightarrow U_c$  l'application à allure polynomiale hybridement équivalente à  $P_c$  de même classe externe que  $f_{c_0}$ . Il existe une application conforme,  $\psi_0 : U_c \setminus K_c \rightarrow U \setminus \bar{U}_0$ , qui conjugue  $f_c$  à  $f_{c_0}$ .

▷ On définit  $\Sigma_0$  comme étant la sphère de Riemann pour laquelle on a remplacé le cycle de  $\bar{U}_0$  par des copies de  $K_c$ . Plus précisément, on définit une application de collage  $\psi$  du pseudo-cycle sur  $U_c$  en précomposant par un itéré de  $P_{c_0}$  l'équivalence externe  $\psi_0$ . Enfin, on note

$$\Sigma_0 = (\bar{C} \setminus \cup_{n \geq 0} P_{c_0}^n(\bar{U}_0)) \cup (\cup U_c(i)) / (\psi).$$

On définit alors  $F_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$  comme suit :

- si  $z \in \bar{C} \setminus P_{c_0}^{-1}(\text{pseudo-cycle}) \cup (\text{pseudo-cycle})$ , alors  $F_0(z) = P_{c_0}(z)$ ,
- si  $z \in U_c'(0)$ , alors  $F_0(z) = f_c(z) \in U_c(1)$ ,
- si  $z \in U_c(i)$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , alors  $F_0(z) = z \in U_c(i+1) \text{ mod } k$ ,
- sinon, on considère l'extension barycentrique de Douady et Earle de  $\psi \circ P_{c_0}$  définie sur le bord de la préimage du pseudo-cycle de  $P_{c_0}$ .  $F_0$  est un revêtement ramifié quadratique quasirégulier, dès que  $U_{c_0}$  et  $U_c$  sont des quasidisques.

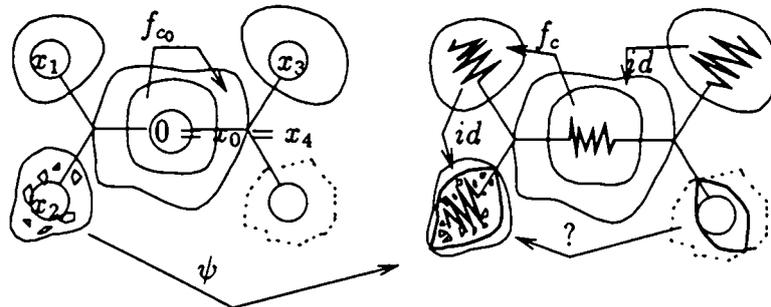


FIG. 11.1 - Construction de la modulation.

**Théorème 11.3.2** Soit  $\hat{c} = c_0 \perp c$ .  $F_0$  est isotope à une application  $\hat{F}$  qui est quasiconformément conjuguée à  $P_{\hat{c}}$ . L'isotopie peut être choisie de façon telle qu'elle fixe le complémentaire de la préimage du pseudo-cycle.

La preuve comprend deux étapes : la première consiste à montrer que si l'extension quasiconforme considérée dans la construction de  $F_0$  était convenablement choisie, alors  $F_0$  serait quasiconformément à un polynôme quadratique. Ensuite, sachant d'une part que la dynamique "globale" de  $\hat{F}$  est celle de  $c_0$  et que celle-ci ressemble à celle de  $\hat{c}$ , et d'autre part que la dynamique "locale" de  $\hat{F}$  est celle de  $c$ , i.e. proche de celle de  $\hat{c}$ , on construit une équivalence combinatoire (et quasiconforme) entre  $\hat{F}$  et  $\hat{c}$ , qui est promue en conjugaison conforme.

DÉMONSTRATION. On travaille dans  $\Sigma_0$  et on note  $\hat{X} = U_c \setminus X$ . Les composantes de  $X$  s'accumulent sur  $\partial U_c$  en deux points  $x_1$  et  $x_2$  (correspondant à l'intersection de ce bord avec  $K_{c_0}$ ) et dans un secteur. Soit  $V$  une préimage du pseudo-cycle, *i.e.* l'ensemble des points où  $F_0$  n'est pas holomorphe. Il existe  $k > 0$  tel que  $F_0^k(V) = U_c$ , et on note  $y_i = F_0^{-k}(x_i)$ ,  $x_i = 1, 2$ .

**Proposition 11.3.3** *Il existe une application quasirégulière  $\hat{F}$  isotope à  $F_0$ , dont le support de la forme de Beltrami associée soit dans  $\hat{F}^{-1}(\hat{X})$ .*

DÉMONSTRATION. On considère  $g : \partial U_c \rightarrow \partial V$  l'inverse de  $F_0^k$ . On se propose de prolonger  $g$  afin que son extension soit holomorphe sur  $X$ . Vue la géométrie de  $X$ , on peut partager  $U_c$  en trois quasidisques tels que l'un contienne  $X$  et dont le bord n'intersecte  $\partial U_c$  qu'aux deux points  $x_1$  et  $x_2$ .

Soit  $h : U_c \rightarrow V$  une application conforme telle que  $h(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2$ . On restreint cette application au quasidisque contenant  $X$ , et on la prolonge quasiconformément à  $U_c$ , de manière à respecter  $g$ . L'isotopie provient du lemme suivant (voir aussi [EM]).

■

**Lemme 11.3.4** *Soient  $f, g : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  deux applications quasiconformes telles que  $f|_{\mathbf{R}} = g|_{\mathbf{R}}$ . Alors  $f$  et  $g$  sont isotopes relativement à  $\mathbf{R}$ .*

DÉMONSTRATION. On note  $\omega_1 = g^{-1} \circ f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  qui vérifie  $\omega_1 = id^{\text{té}}$  sur  $\mathbf{R}$ . Soit  $\mu$  la forme de Beltrami associée à  $\omega_1$  sur  $\mathbf{H}$ , que l'on prolonge à  $\mathbf{C}$  par la conjugaison complexe  $z \mapsto \bar{z}$ . On définit  $\mu_t = t\mu$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . D'après le Théorème 4.1.2 de la Partie II, il existe  $h_t : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  qui intègre  $\mu_t$ , continue en  $t$  et qui fixe  $\mathbf{H}$ . On considère l'extension barycentrique  $\alpha_t$  de  $h_t^{-1}$  restreinte à  $\mathbf{R}$ , et l'on pose  $\omega_t = \alpha_t \circ h_t$  sur  $\mathbf{H}$ . Ces applications nous définissent l'isotopie.

■

Au total, on a modifié  $F_0^k$  sur  $V$  pour qu'il devienne holomorphe sur  $\hat{F}^{-1}(X)$ . Soit  $\hat{F} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$  le revêtement ramifié ainsi obtenu. Par le procédé usuel de chirurgie, nous pouvons alors trouver une forme de Beltrami  $\hat{F}$ -invariante et intégrable au sens d'Ahlfors et Bers. En effet, l'isotopie permet de s'assurer qu'en tirant la forme de Beltrami en arrière, sa norme infinie sera la même que celle associée à  $\hat{F}$ . On obtient donc un polynôme quadratique  $P_{\hat{c}}$ . Il reste à vérifier que  $\hat{c} = \hat{c}$ .

Cette seconde étape se déroule en deux temps. On commence par montrer que  $\hat{F}$  et  $\hat{c}$  sont combinatoirement et quasiconformément équivalents, *i.e.* il existe deux homéomorphismes quasiconformes  $\phi_0, \phi_1 : \Sigma_0 \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$ , isotopes relativement à leurs ensembles postcritiques, tels que  $\hat{F} \circ \phi_0 = \phi_1 \circ P_{\hat{c}}$ . Ensuite, par un argument de *pull-back*, cette équivalence est promue en conjugaison holomorphe.

On note  $X_1$  le complémentaire de la réunion de toutes les préimages de  $\hat{X}$  et du cycle des petits Julia. On considère  $\psi_0 : X_1 \setminus \cup K_c(i) (\subset \Sigma_0) \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$  définie par la composée des coordonnées de Böttcher de  $c_0$  et  $\hat{c}$ . Cette application se prolonge au bord de  $X_1$ , sauf peut-être sur les petits Julia, de manière quasismétrique. On considère alors une

extension quasiconforme à  $\Sigma_0$  privé du pseudo-cycle. On s'arrange pour que  $\psi_1$  conjugue  $F_0$  et  $P_{\hat{c}}^k$  sur  $U_c \setminus K_c$ .

D'autre part,  $f_c$  et  $P_{\hat{c}}^k$  sont hybridement équivalentes au voisinage de l'origine : il existe  $\chi : U_c \rightarrow U_{\hat{c}}$  quasiconforme qui réalise cette équivalence, et qui coïncide avec  $\psi_0$  au bord de  $U_c$ .

Il s'agit maintenant de recoller quasiconformément ces deux applications le long du cycle des petits Julia. En reprenant la preuve du Lemme 1 de [DH2], on montre que  $\chi^{-1} \circ \psi_0$  tend vers l'identité quand on tend vers  $K_c(0)$ . Par suite, en utilisant le Lemme 2 de [DH2], on en déduit que  $\psi_0$  se prolonge quasiconformément au travers de  $K_c(0)$  par  $\chi$ . Cette application induit une équivalence combinatoire entre  $\hat{F}$  et  $P_{\hat{c}}$ , qui est uniformément quasiconforme et de  $\bar{\delta} = 0$  pp. sur  $\cup K_c(i)$ .

Cette équivalence peut être promue en une conjugaison quasiconforme (cf appendice de [Mc4]) et finalement conforme entre  $\hat{c}$  et  $c'$ . En effet, en définissant  $\phi_n$  telle que  $\hat{F} \circ \phi_{n-1} = \phi_n \circ P_{\hat{c}}$ ,  $\phi_n$  prenant les mêmes valeurs que  $\phi_0$  sur l'ensemble postcritique, on obtient une suite normale d'applications quasiconformes dont la dilatation tend vers 1 en norme  $L^1$ . Quitte à extraire une sous-suite, on obtient une limite 1-quasiconforme i.e. conforme. ■

**Remarque.** Cette démonstration ne peut se généraliser que dans la mesure où il existe une application conforme entre  $U_{c_0}$  et  $U_c$  qui respecte les points d'accumulation sur le bord de  $X$  et qui admet un prolongement quasiconforme.

### 11.3.2 Cas non primitif

Soit  $c_0 \in \mathcal{D}_0(k)$  non primitif. La principale différence avec le cas précédent est qu'on ne peut plus choisir des voisinages disjoints de l'orbite critique tels que l'application retour soit à allure polynomiale. De ce fait, la construction de la sphère est changée. On note  $\alpha_{c_0}$  le point fixe de nombre de rotation  $p/k$ .

Soit  $c \in M \setminus \{1/4\}$ . On considère aussi  $f_c : U_c' \rightarrow U_c$  l'accouplement du polynôme quadratique  $P_c$  avec la classe externe de  $f_{c_0}$ . Soit  $\mathcal{P}_{c_0}$  l'ouvert borné simplement connexe bordé par une équipotentielle  $\eta > 0$  et les rayons aboutissant aux points  $\beta$  et  $\beta'$  de la petite copie du disque contenant l'origine. Soit  $\psi_0$  l'équivalence externe entre  $f_{c_0}$  et  $f_c$ . On note  $\mathcal{P}_c$  l'ouvert borné de  $U_c$  bordé par  $\psi(\partial\mathcal{P}_{c_0})$ . Comme  $c$  est différent de  $1/4$ ,  $\mathcal{P}_c$  est un quasidisque (dont la constante de dilatation tend vers l'infini quand  $\beta_c$  tend à être parabolique). Via  $P_{c_0}$ , on peut définir un recollement quasimétrique de  $k$  copies de  $\mathcal{P}_c$ , afin de remplacer les composantes de Fatou contenant l'orbite de l'origine (cf le modèle topologique). On obtient donc une sphère conforme  $\Sigma$ , munie d'une application  $F_0 : \Sigma \rightarrow \Sigma$  bien définie (et holomorphe) sauf sur la préimage du pseudo-cycle de  $\mathcal{P}_{c_0}$ . Comme précédemment, le but est de prolonger cette application quasiconformément afin que chaque point ne passe qu'une fois dans une zone non conforme. On remarque que, comme dans le cas primitif, les images réciproques du pseudo-cycle s'accumulent en deux points du bord de la pièce critique, et ce, dans un secteur. Par conséquent, le reste de la construction ne change pas.

**Remarque.** Le nombre de rotation de  $\alpha$  et le multiplicateur du point fixe  $\beta_c$  de  $P_c$  influent

énormément sur la dilatation des différentes applications quasiconformes considérées.

## 11.4 Modulation de compacts du plan

Soient  $K \subset \mathbb{C}$  un compact connexe, localement connexe, plein, d'intérieur non vide et  $L \subset \mathbb{C}$  compact connexe, plein. On se propose de définir  $K_L$  comme étant  $K$  auquel on a remplacé les composantes connexes de son intérieur par des copies de  $L$  (Figure 11.2).

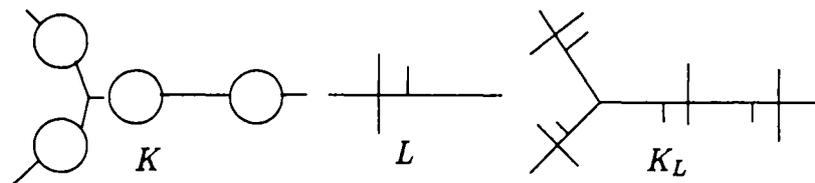


FIG. 11.2 - Modulation de compacts.

### 11.4.1 Introduction

D'après [DH1, Do5], si  $K$  est compact, connexe, localement connexe et plein,  $\overset{\circ}{K}$  a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \pi_0(\overset{\circ}{K})$ ; chacune est un domaine de Jordan, et l'intersection des fermetures de deux d'entre elles contient au plus un point. Pour chaque  $U_i$ , on choisit un centre  $x_i$ . On considère aussi des uniformisantes  $\varphi_i : \mathbb{D} \rightarrow U_i$  telles que  $\varphi_i(0) = x_i$  et  $\varphi_i'(0) > 0$ . Ceci nous permet de définir des arcs réglementaires (cf Chap. 9).

- ▷ Pour chaque  $U \in \pi_0(\overset{\circ}{K})$ , on définit  $\pi_U : K \rightarrow \bar{U}$  continue surjective par :
- si  $x \in \bar{U}$ ,  $\pi_U(x) = x$ ,
  - sinon,  $\exists ! y \in \bar{U}$  tq  $\begin{cases} y \in [x, x_U]_K \\ ]x, y[_{K \cap U} = \emptyset \end{cases}$  et on pose  $\pi_U(x) = y$ .

$\pi_U$  est localement constante sur  $K \setminus \bar{U}$ .

- ▷ On définit sur  $K$  la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par :

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } \exists U \in \pi_0(\overset{\circ}{K}) \text{ tq } x, y \in \bar{U},$$

ce qui induit  $g : K \rightarrow K \stackrel{\text{def}}{=} K / \sim$  continue surjective pour la topologie quotient. Les fibres sont soit des points, soit des réunions connexes de fermetures de composantes de  $\overset{\circ}{K}$ ; en particulier, les fibres sont connexes.

On définit l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi : K &\rightarrow K \times \Pi \bar{U}; \\ x &\rightarrow (g(x), (\pi_i(x))). \end{aligned}$$

$\varphi$  est injective : soient  $x \neq y$ ,  
- si  $]x, y[_K \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$  alors  $g(x) \neq g(y)$  ;  
- si  $]x, y[_K \cap \pi_0(\overset{\circ}{K}) \neq \emptyset$ , alors soit il existe  $U$  telle que  $x, y \in \bar{U}$  et  $x = \pi_U(x) \neq \pi_U(y) = y$  ;  
soit il existe  $U$  telle que  $]x, y[_K \setminus \bar{U}$  n'est pas connexe, donc  $x_U \in ]x, y[_K$  et  $\pi_U(x) \neq \pi_U(y)$ .

Par suite, on peut plonger  $K$  dans  $K. \times \Pi \bar{U}_i$  ; à l'aide de  $\varphi$  :  
 $\varphi(K) = \tilde{K} = \{(\xi, \xi_i) \in K. \times \Pi \bar{U}_i, \xi_i = \pi_i(g^{-1}(\xi)) \text{ si } g(U_i) \neq \xi, \text{ et sinon}$   
 $\exists k \text{ tq } g(U_k) = \xi \text{ et } \xi_i = \pi_i(x_k) \text{ pour } i \neq k\}$ .

**Remarque.** Si  $x \in \bar{U} \cap \bar{V}$ , alors on peut aussi bien choisir  $x_U$  que  $x_V$  comme centre.

Ce modèle de  $K$  fournit une façon de définir  $K_L$  dans  $K. \times \Pi L_i$  tel que les  $L_i$  soient des copies de  $L$ .

### 11.4.2 Lemme et définition

Pour chaque composante  $U$  de l'intérieur de  $K$ , on considère  $\gamma_U : \mathbb{T} \rightarrow \partial U$  l'extension de  $\varphi_i$  au bord, qui est un homéomorphisme.

Soit  $L \subset \mathbb{C}$  un compact connexe plein, on considère son lacet de Carathéodory  $\gamma_L$ , bien défini pp. (d'après P. Fatou).

Pour chaque composante  $U$ , on suppose que l'application

$$\begin{aligned} \psi_U : \pi_U(K \setminus \bar{U}) &\rightarrow \partial L \\ z &\mapsto \gamma_L \circ \gamma_U^{-1}(z) \end{aligned}$$

est bien définie.

**Lemme 11.4.1** On pose  $K_L = \{(\xi, \xi_i) \in K. \times \Pi L_i, \xi_i = \psi_i \pi_i(g^{-1}(\xi)) \text{ si } g(U_i) \neq \xi, \text{ et sinon}$   
 $\exists k \text{ tq } g(U_k) = \xi \text{ et } \xi_i = \psi_i \pi_i(x_k) \text{ pour } i \neq k\}$ .

Alors  $K_L$  est compact et on l'appelle "K modulé par L".

**DÉMONSTRATION.**  $K. \times \Pi L_i$  étant un espace métrique compact, il suffit de vérifier que  $K_L$  est fermé par les suites : soit  $\tilde{\xi}^n = (\xi^n, (\xi_i^n)_{i \geq 0})$ ,  $n \geq 0$ , une suite de  $K_L$  convergeant vers  $\tilde{\xi}^\infty = (\xi^\infty, (\xi_i^\infty)_{i \geq 0})$ .

On définit  $\Omega := \cup_{i \geq 0} \{g(x_i)\}$ , qui correspond aux classes d'équivalence ayant plus d'un élément.

À chaque  $n \geq 0$ , on associe un point  $y_n \in K$  comme suit : ou bien  $\xi^n \notin \Omega$ , et on pose  $y_n = g^{-1}(\xi^n)$  ; ou bien  $\xi^n \in \Omega$ , alors il existe  $k_n$  tel que  $g(x_{k_n}) = \xi^n$  et pour tout  $i \neq k_n$ ,  $\xi_i^n = \psi_i \pi_i(x_{k_n})$ , et dans ce cas on pose  $y_n = x_{k_n}$ .

On extrait une sous-suite  $(y_{n_k})$  convergeant vers  $y_\infty \in K$ . En particulier,  $\xi^n = g(y_n) \rightarrow g(y_\infty) = \xi^\infty$ .

On considère les deux cas suivants :

premier cas :  $g(y_\infty) \notin \Omega$ . Comme  $g$  est continue, la suite  $y_n$  est convergente. Pour chaque  $i$ , il existe un voisinage connexe de  $y_\infty$  disjoint de  $\bar{U}_i$ . Par suite, pour  $n$  assez grand,  $\pi_i(y_n) = \pi_i(y_\infty)$  et  $\xi_i^\infty = \psi_i \pi_i(y_\infty)$ .

Donc  $\xi^\infty \in K_L$ .

second cas:  $g(y_\infty) \in \Omega$ .

On note  $\mathcal{U} = \{U \text{ composante connexe de } \mathring{K} \text{ telle que } U \cap ]y_\infty, y_n[ \neq \emptyset \text{ pour une infinité de } n \text{ ou } y_n = y_\infty\}$ .

L'ensemble  $\mathcal{U}$  est contenu dans  $\{U, y_\infty \in \bar{U}\}$ .

· Supposons que  $\mathcal{U} = \emptyset$ . Il existe  $x_k$  tel que  $g(x_k) = g(y_\infty)$  et pour  $i \neq k$ ,  $\xi_i^\infty = \psi_i \pi_i(x_k)$ . Soit  $U$  une composante connexe telle que  $y_\infty \in \bar{U}$ ; pour  $n$  assez grand,  $y_n$  est dans un voisinage connexe de  $y_\infty$  disjoint de  $U$ , donc  $\pi_U(y_n) = \pi_U(y_\infty) = y_\infty$  et  $\xi_U^\infty = \psi_U \circ \pi_U(x_k)$ .

· Supposons que  $\mathcal{U} = \{U\}$ . Pour tout  $U_i \neq U$ ,  $\pi_i(x_U) = \pi_i(y_\infty)$  car  $y_\infty \in \bar{U}$ ; par suite, d'après ci-dessus,  $\xi_i^\infty = \psi_i \circ \pi_i(x_U)$ .

· Sinon, on choisit  $U$  dans  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $V \notin \mathcal{U}$ , on montre que  $\xi_V^\infty = \psi_V \circ \pi_V(x_U)$  comme ci-dessus. Soit  $V \in \mathcal{U}$  différente de  $U$ ; on considère la sous-suite maximale  $(y_{n_k})$  telle que  $U \cap ]y_\infty, y_{n_k}[ \neq \emptyset$  ou  $y_{n_k} = y_\infty$ . Par conséquent,  $\pi_V(y_\infty) = \pi_V(y_{n_k})$  et comme  $\xi_V^{n_k} \rightarrow \xi_V^\infty$ , on en déduit que  $\psi_V \pi_V(y_\infty) = \xi_V^\infty$ . ■

**Remarque.**  $K_L$  est bien le modèle que l'on cherchait en ce sens qu'on peut définir les injections suivantes :

$$\begin{aligned} \varpi : K \setminus (\cup_{i \geq 0} \bar{U}_i) &\rightarrow K_L \\ x &\mapsto (g(x), \psi_i \pi_i(x)) \end{aligned}$$

(voir Figure 11.2)

$$\begin{aligned} \varpi_i : L &\rightarrow K_L \\ x &\mapsto g(U_i), \left| \begin{array}{l} \psi_j \pi_j(x_i), \text{ pour } j \neq i \\ x \in L_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{et } K_L = (\cup \varpi_i(L)) \cup \varpi(K \setminus (\cup_{i \geq 0} \bar{U}_i)).$$

## 11.5 Théorème 8

Soit  $c_0 \in \mathcal{D}_0 \cap W$  de période  $k$  et soit  $c \in M$ ; on note  $\tilde{c} = c_0 \perp c$ ,  $K_{c_0}$ ,  $K_c$ ,  $K_{\tilde{c}}$  les ensembles de Julia remplis de  $c_0$ ,  $c$ ,  $\tilde{c}$  respectivement.

Alors,  $K_{\tilde{c}} \approx K_{c_0 K_c}$ .

**DÉMONSTRATION.** D'après le Corollaire 11.3.1, il suffit de le montrer pour la modulation topologique.

Par construction,  $K_F$  est  $K_{c_0}$  dans lequel on a remplacé les composantes connexes de l'intérieur par des petites copies de  $K(f_c)$ .

On définit  $\tilde{g} : K_{\tilde{c}} \rightarrow K_{c_0}$  par :

si  $x \in K_c(i)$ ,  $\tilde{g}(x) = g(x_i)$  |  
 si  $x \in K_{c_0}$ ,  $\tilde{g}(x) = g(x)$  |  $\implies \tilde{g}$  est continue surjective.

et  $\tilde{\varphi} : K_F \rightarrow K_{c_0 K_c}$  par

si  $x \in K_{c_0}$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \xi = \tilde{g}(x), \\ \xi_j = \psi_j \pi_j(x); \end{array} \right.$  et si  $x \in K_c(i)$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \xi = \tilde{g}(x), \\ \xi_i = x, \\ \forall j \neq i, \xi_j = \psi_j \pi_j(x_i). \end{array} \right.$

Montrons que  $\tilde{\varphi}$  est un homéomorphisme.

▷ Continuité: il s'agit d'une adaptation de la démonstration du Lemme 11.4.1. On considère une suite  $(x_n)$  de  $K_{\tilde{c}}$  convergente. On lui associe une suite  $(y_n)$  de  $K_{c_0}$  en s'appuyant sur la Proposition 11.1.1, puis on procède au même type de discussion, selon la position d'un point d'accumulation de  $(y_n)$ .

▷ Surjectivité: soit  $\tilde{\xi} = (\xi, \xi_i) \in K_{c_0 K_c}$ ;

· si  $\xi \notin \{g(U_i)\}_i$ ,  $\tilde{g}$  est injective et  $\tilde{g}^{-1}(\tilde{\xi})$  répond à la question.

· si  $\xi = g(U_j)$ ,  $\exists k$  tel que  $g(U_k) = \xi$  et  $\xi_i = \psi_i \pi_i(x_k)$ ,  $i \neq k$ ; d'où  $\tilde{\varphi}(\xi_k) = \tilde{\xi}$  avec  $\xi_k \in K_c(k)$ .

▷ Injectivité: soient  $x, y$  tels que  $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y) = (\xi, \xi_i)$ ;

· si  $\xi \notin \{g(U_i)\}_i$  alors  $x, y \in K_c \setminus (\cup K_c(i))$  où  $\tilde{g}$  est injective sur  $K_{c_0} \setminus \{g(U_i)\}_i$  d'où  $x = y$ .

· sinon,  $\exists k_x, k_y$  tels que  $\left\{ \begin{array}{l} x = \tilde{\varphi}(x)_{k_x} \in K_c(k_x), \\ y = \tilde{\varphi}(y)_{k_y} \in K_c(k_y). \end{array} \right.$

- Si  $k_x = k_y$ ,  $x = \tilde{\varphi}(x)_{k_x} = \tilde{\varphi}(y)_{k_y} = y$ .

- sinon si  $y \notin K_c(k_x)$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} x = \psi_{k_x} \pi_{k_x}(y), \\ y = \psi_{k_y} \pi_{k_y}(x). \end{array} \right.$

Or,  $\tilde{g}^{-1}(\tilde{\xi})$  est connexe, donc il existe  $j$  tel que  $U_j \cap ]x, y[_{K_{c_0}} \neq \emptyset$  d'où  $\psi_j \pi_j(x) \neq \psi_j \pi_j(y)$ : il y a donc contradiction. ■

## 11.6 Corollaires

**Corollaire 11.6.1** Soient  $c_0 \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$ ; on note  $\tilde{c} = c_0 \perp c$ ,  $H_{c_0}$ ,  $H_c$ ,  $H_{\tilde{c}}$  les arbres de Hubbard de  $c_0$ ,  $c$ ,  $\tilde{c}$  respectivement.  $H_{\tilde{c}}$  s'obtient en remplaçant les composantes connexes de  $\overset{\circ}{H}_{c_0}$  par  $H_c$  en recollant par  $\beta$ ,  $\beta'$ . Les points marqués sont alors déterminés comme suit:

-  $x_0 = 0$ ;

- si  $x_i \in H_c(j)$  est défini,  $\left\{ \begin{array}{l} j \neq 0, x_{i+1} = x_i \text{ dans } H_c(j+1), \\ j = 0, x_{i+1} = P_c(x_i) \text{ dans } H_c(1). \end{array} \right.$

**Corollaire 11.6.2** Soient  $c_0 \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \in \mathcal{D}_2$ ; on note  $\tilde{c} = c_0 \perp c$ ;  $c$  a des arguments externes  $t_1, \dots, t_\nu$  dans  $M$ . Les arguments externes de  $\tilde{c}$  dans  $M$  sont les arguments dans  $K_{c_0}$  des points de  $\partial U_1$  d'arguments internes  $t_1, \dots, t_\nu$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathcal{R}_M(t)$  aboutissant à  $\tilde{c}$ , alors  $\mathcal{R}_{\tilde{c}}(t)$  aboutit aussi à  $\tilde{c}$  ( $\tilde{c} \in \mathcal{D}_2$ ).

Or,  $t \in \gamma_{\tilde{c}}^{-1}(\tilde{c}) = \gamma_{c_0}^{-1}(\gamma_{U_1}(\gamma_c^{-1}(c)))$  par construction car  $\gamma_{U_1} = \gamma_c$  sur  $\Sigma$ .

On conclut du fait que  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_c^{-1}(c) = \gamma_M^{-1}(c), \\ \gamma_{\tilde{c}}^{-1}(\tilde{c}) = \gamma_M^{-1}(\tilde{c}). \end{array} \right.$

■

**Corollaire 11.6.3** Soient  $c_0 \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \in \mathcal{D}_1$ ; on note  $\tilde{c} = c_0 \perp c$ ;  $c$  a deux arguments externes  $t_1$  et  $t_2$  dans  $M$ . Les arguments externes de  $\tilde{c}$  dans  $M$  sont les arguments dans  $K_{c_0}$  des points de  $\partial U_1$  d'arguments internes  $t_1$  et  $t_2$ .

**DÉMONSTRATION.** On suppose que  $\mathcal{R}_M(t)$  aboutit à  $\tilde{c}$ , alors  $\mathcal{R}_{\tilde{c}}(t)$  aboutit à  $y_1(\tilde{c})$ .

Or,  $t \in \gamma_{\tilde{c}}^{-1}(y_1(\tilde{c})) = \gamma_{c_0}^{-1}(\gamma_{U_1}(\gamma_c^{-1}(y_1(c))))$  par construction car  $\gamma_{U_1} = \gamma_c$  sur  $\Sigma$ .

On conclut du fait que  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_c^{-1}(y_1(c)) \supset \gamma_M^{-1}(c), \\ \gamma_{\tilde{c}}^{-1}(y_1(\tilde{c})) \supset \gamma_M^{-1}(\tilde{c}). \end{array} \right.$

■

**Définition.** Soient  $\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 < \theta_2 \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ t \in \mathbf{T} \end{array} \right.$  qu'on décompose en base deux :

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0.\overline{u_1^i \dots u_k^i}, \quad i = 1, 2 \text{ et} \\ t &= 0.t_1 \dots t_n \dots; \end{aligned}$$

alors  $(\theta_1, \theta_2) \perp t := u_1^{t_1} \dots u_k^{t_1} u_1^{t_2} \dots u_k^{t_2} u_1^{t_3} \dots$

**Théorème 11.6.4** Soient  $c_0 \in \mathcal{D}_0$ ,  $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ; on note  $\tilde{c} = c_0 \perp c$ ; soit  $t$  un argument externe de  $c$  dans  $M$ , alors il lui correspond un argument externe  $\tilde{t}$  de  $\tilde{c}$  dans  $M$ , à savoir  $\tilde{t} = (\theta_1, \theta_2) \perp t$ .

**Lemme 11.6.5** Soit  $z \in \partial U_1$  d'argument interne  $t$ ;  $\mathcal{R}_{c_0}(\theta_1), \mathcal{R}_{c_0}(\theta_2)$  adjacents à  $U_1$  en  $y_1$ , alors  $\text{Arg}_{c_0} z = (\theta_1, \theta_2) \perp t$ .

La preuve du lemme est incluse dans la démonstration de la Proposition 1, Section 7 de [Do2]. Le théorème est un corollaire immédiat de ce qui précède.

**Remarque.** Étant donné qu'en base deux, les nombres dyadiques ont deux écritures, on obtient deux valeurs de  $\tilde{t}$ . Ceci est dû au fait que  $M$  s'étend au-delà de  $M_{c_0}$  en  $\tilde{c}$  (présence de filament(s)).

## 11.7 Modulation généralisée

L'objet de ce paragraphe est de définir la modulation dans un contexte plus général, comme une opération inverse de la renormalisation.

Considérons une fraction rationnelle  $f : \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  de degré  $d \geq 2$ . On suppose que son ensemble de Julia  $J_f$  est connexe localement connexe. On suppose en outre que  $f$  admet un cycle attractif  $\xi_0, \dots, \xi_k$  tel que tous les points critiques de son bassin d'attraction

soient localisés dans une seule composante connexe (qu'on demande simplement connexe). La fraction rationnelle restreinte au bassin immédiat de ce cycle est de degré  $1 < d' < d$ .

Dans ces conditions, on peut définir une modulation, dans un premier temps topologique, de  $f$  comme suit : soit  $P$  un polynôme de degré  $d'$  d'ensemble de Julia connexe. On note  $C_\infty$ , le plan compactifié par un cercle à l'infini. On peut construire un modèle topologique de  $f \perp P$  en identifiant les points selon les arguments. On contracte alors les rayons. Si les composantes connexes du cycle de  $f$  admettent des courbes de Jordan comme bord (comme les polynômes), on obtient toujours une sphère et l'existence d'un modulé devient équivalente à ce que le modèle topologique soit conjugué à une fraction rationnelle sur  $\bar{C}$ . Dans un cadre plus général, le recollement n'est pas toujours une sphère : en effet, il existe une classe importante d'exemples déjà étudiés qui montre différentes possibilités. Il s'agit de l'accouplement de polynômes (voir [TL1], [Do3], [Sh2] et [STL]). On considère deux polynômes de même degré d'ensembles de Julia connexes et localement connexes. L'infini est un point fixe superattractif vérifiant les bonnes hypothèses pour le remplacer par l'autre ensemble de Julia. Si les polynômes sont dans des membres conjugués de  $M$  ([TL1]), alors le recollement ne donne pas une sphère, sinon, les polynômes sont accouplables. En degré supérieur ([STL]), il ne suffit pas d'avoir une sphère pour s'assurer du résultat.

Dans le cas de polynômes, on peut définir une modulation topologique comme dans le Paragraphe 2. Si on peut définir une application à allure polynomiale au voisinage du bassin attractif de  $f$ , alors la réalisation du modulé (par un polynôme complexe) ne semble être liée qu'à l'existence d'une application conforme qui préserve un nombre fini de points.

## V. Chirurgie croisée

Soient deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degrés  $d_P$  et  $d_Q \geq 2$  respectivement, ayant chacun un point fixe  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  ; on se propose de fabriquer par chirurgie un polynôme

$$R = P \underline{\chi} Q$$

de degré  $d = d_P + d_Q - 1$ , tel que son ensemble de Julia soit un *croisement* de ceux de  $P$  et  $Q$ .

**Exemple 1.**

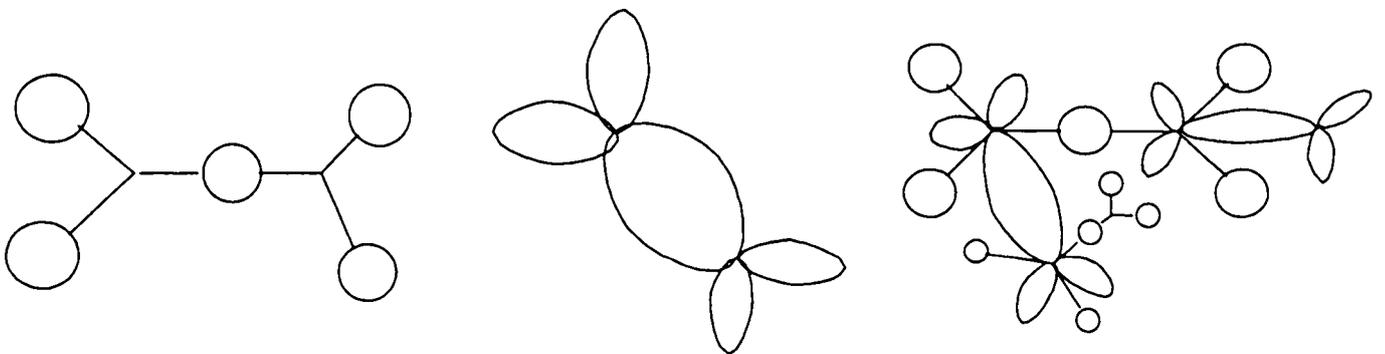


FIG. 11.3 -  $K(P)$ ,  $K(Q)$ ,  $K(P \underline{\chi} Q)$ .

**Définition.** Un polynôme  $P$  ayant un ensemble de Julia connexe *figure de manière rigide* dans une fraction rationnelle  $f$  (voir Chap.5 de la Partie II) s'il existe une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un voisinage de  $K(P)$ , continue, telle que :

- $\varphi \in W^{1,p}(U)$ ,  $p > 1$ ,
- $\bar{\partial}\varphi = 0$  pp. sur  $K(P)$ ,
- $\varphi|_{K(P)}$  est injective, préserve l'orientation et satisfait  $\varphi \circ P = f \circ \varphi$  sur  $K(P)$ .

Soient deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degrés  $d_P, d_Q \geq 2$ , ayant leur ensemble de Julia connexe; on note  $\alpha_P$  (resp.  $\alpha_Q$ ) un point fixe répulsif ou parabolique de  $P$  (resp.  $Q$ ).

**Définition.** Un polynôme  $(R, \alpha)$  réalise le croisement de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  si les conditions suivantes sont satisfaites:

(C1) les polynômes  $P$  et  $Q$  figurent de manière rigide dans  $R$  par  $\varphi_P$  et  $\varphi_Q$  respectivement,

(C2)  $\varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\}$  et le noyau  $N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$  est homéomorphe à  $K(P) \cup K(Q)/\alpha_P \sim \alpha_Q$ ,

(C3) les degrés sont reliés par la formule  $d_R = d_P + d_Q - 1$ .

Le premier résultat est un théorème d'existence:

**Théorème 9** (i) *Si  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  sont répulsifs et ont même nombre de rotation, alors un croisement de  $P$  et  $Q$  est réalisable par chirurgie quasiconforme.*

(ii) *Si  $\alpha_P$  est répulsif sans appartenir à l'ensemble  $\omega$ -limite d'un point critique de  $P$ , si  $\alpha_Q$  est parabolique et qu'ils ont même nombre de rotation, alors leur croisement est réalisable.*

(iii) *Le croisement de polynômes géométriquement finis est toujours réalisable en des points fixes ayant même nombre de rotation.*

La preuve de ce théorème utilise de façon essentielle la méthode des secteurs de [BD], tout en remarquant que l'on dispose de plus de souplesse en travaillant sur des applications à allure polynomiale (cf Chapitre 5 de la Partie II).

Le croisement est bien compris lorsqu'il se situe en un point répulsif; lorsqu'il est parabolique, les outils sont moins développés, bien que la plupart des résultats obtenus dans le cas répulsif restent sans doute valables. Pour établir le point (ii), on montre qu'on peut utiliser le théorème de G. David qui étend le théorème d'intégrabilité d'Ahlfors-Bers.

À partir de la définition des croisements, on montre que les points fixes  $\alpha, \alpha_P$  et  $\alpha_Q$  ont tous même nombre de rotation  $p/q$  et qu'on peut associer un invariant combinatoire  $\kappa$  au croisement  $R$ . Cet invariant caractérise  $R$ :

**Théorème 10** *Le croisement de deux polynômes est unique, à combinatoire fixée et à conjugaison affine près.*

Étant donné que le Théorème 9 n'assure pas l'existence de tout croisement, on généralise la notion de croisement en construisant un modèle topologique du croisement de deux polynômes complexes. Cette construction est calquée sur celle d'un ensemble de Julia d'un polynôme sous-hyperbolique à partir de son arbre de Hubbard (voir [DH1]).

Les hypothèses faites sur  $P$  et  $Q$  en introduction de la définition d'un croisement sont maintenues dans la suite.

**Définition.** Un revêtement ramifié  $f : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$  est un polynôme topologique si  $f^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$ .

**Définition.** Soient  $f : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$  un polynôme topologique de degré  $d \geq 3$ , et  $\alpha$  un point fixe de  $f$ ;  $(f, \alpha)$  réalise un croisement topologique de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  si les conditions

suivantes sont satisfaites :

(CT1) il existe deux applications continues  $\varphi_P : U_P \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\varphi_Q : U_Q \rightarrow \mathbb{C}$ , injectives sur  $K(P)$  et  $K(Q)$  respectivement et qui conjuguent  $P$  à  $f$  sur  $K(P)$  et  $Q$  sur  $K(Q)$  respectivement ;

(CT2)  $\varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\}$  et le noyau  $N_f = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$  est homéomorphe à  $K(P) \cup K(Q)/\alpha_P \sim \alpha_Q$  ;

(CT3) les degrés sont reliés par la formule  $d_f = d_P + d_Q - 1$  ;

(CT4) l'ensemble  $K(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(N_f)}$  est un compact plein de  $\mathbb{C}$  et  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}, f^n(z) \rightarrow \infty\}$  ;

(CT5) il existe une suite  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  de nombres positifs tendant vers zéro telle que pour toute composante  $L$  de  $K(f) \setminus \overline{f^{-n}(N_f)}$ ,  $\text{diam } L \leq \eta_n$ .

On établit alors le

**Théorème 11** (i) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est toujours réalisable dès qu'il est effectué en des points fixes de même nombre de rotation.*

(ii) *Si  $R$  est un croisement (holomorphe) de deux polynômes  $P$  et  $Q$ , alors il est topologiquement conjugué à son modèle topologique.*

(iii) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est unique, à combinatoire fixée et à conjugaison topologique près sur  $K(f)$ .*

Un corollaire du premier point sera :

**Corollaire 12** *Soit  $R = P_1 \underset{\lambda}{\times} P_2$ . Alors  $K(R)$  est localement connexe si et seulement si  $K(P_1)$  et  $K(P_2)$  le sont.*

Inversement, soit  $R$  un polynôme de degré  $d \geq 3$  dont l'ensemble de Julia est connexe et qui possède un point fixe avec plusieurs cycles de rayons qui aboutissent à  $\alpha$ . On cherche à reconnaître si  $R$  réalise le croisement de polynômes complexes. On fabrique une suite emboîtée de partitions de  $K(R)$ , dont le but est d'isoler différentes dynamiques de  $R$ . Ces partitions jouent le même rôle que les puzzles de Branner-Hubbard-Yoccoz (voir [BH], [Hu]). Ceci nous permet de repérer les croisements :

**Théorème 13** (i) *Si  $R$  réalise un croisement, alors il existe plusieurs cycles de rayons aboutissant à  $\alpha$  et tous les points critiques se trouvent dans  $\tilde{Q}(0)$  (domaine du plan défini dynamiquement).*

(ii) *Si  $\alpha$  est répulsif, la condition (i) est nécessaire et suffisante.*

On considère une famille analytique  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de polynômes ayant un point fixe répulsif de nombre de rotation fixé. Supposons que  $\Lambda$  soit de dimension complexe 1. On effectue leur croisement avec un polynôme fixe  $Q$  et on étudie la dépendance des croisements obtenus par rapport aux paramètres, dans l'espace  $Pol_d(\mathbb{C})/Aut(\mathbb{C})$  des polynômes de degré fixé et à automorphisme du plan près.

**Théorème 14** *L'opération de croisement est continue si, pour chaque polynôme  $P_\lambda$ , ses déformations quasiconformes se trouvent dans  $\Lambda$ , et si les croisements se font sur des points répulsifs.*

**Remarque.** Les phénomènes d'implosions paraboliques étudiés par P. Lavaurs dans sa thèse excluent, en général, une dépendance continue lorsque le croisement se fait en un point parabolique et qu'on a plusieurs paramètres. En particulier, et de façon indépendante, A. Epstein et M. Yampolsky ([EY]) montrent, en exploitant ces discontinuités, que le lieu de connexité des polynômes cubiques n'est pas localement connexe.

La suite de cette partie est organisée de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, on présente la construction des croisements par la méthode des secteurs et quelques unes de leurs propriétés sont établies. On en déduit les points (i) et (ii) du Théorème 9.
- Dans le chapitre suivant, on démontre que les croisements sont essentiellement uniques (Théorème 10).
- Ensuite, on définit le croisement topologique de deux polynômes et on montre le Théorème 11. On en déduit aussi le Corollaire 12.
- Le chapitre suivant est consacré au problème inverse : quand est-ce qu'un polynôme est un croisement ? Et montre le Théorème 13.
- Le dernier chapitre traite de la dépendance des croisements par rapport à des paramètres, établit le Théorème 14 et complète la preuve du Théorème 9.

# Chapitre 12

## Croisement de polynômes par chirurgie

Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

- Dans la section 1, on traite un exemple afin d'analyser l'enchaînement des différentes étapes qui interviennent dans la construction d'un croisement, et ce en vue de la démonstration du Théorème 9.
- Le cas général de l'existence de croisements en un point répulsif est traité dans la section 2.
- La section 3 montre comment effectuer la même chirurgie en utilisant la géométrie des ensembles de Julia, lorsqu'elle n'est pas trop mauvaise. Ces méthodes peuvent être, et sont appliquées dans d'autres chirurgies (voir *e.g.* [BD, BF, W1]).
- La partie (ii) du Théorème 9 est démontré dans la section 4.
- Enfin, on établit quelques propriétés immédiates des croisements en fonction des polynômes croisés.

### 12.1 Chirurgie croisée en degré deux : un exemple

On considère les polynômes quadratiques suivants :  $f : z \mapsto z^2$  et  $g : z \mapsto z^2 - 1$ . Ces deux polynômes ont un ensemble de Julia connexe et localement connexe ( $K_f$  est le disque unité fermé). On note  $\beta_f$  (resp.  $\beta_g$ ) le point répulsif d'argument zéro de  $f$  (resp.  $g$ ). Ces deux points fixes ont pour nombre de rotation 1. Nous allons procéder au croisement de  $f$  et  $g$  en  $\beta$ .

Pour ce faire, nous procéderons par étape :

- nous construirons un revêtement ramifié de degré trois  $F : V' \rightarrow V$  qui intègre la dynamique de  $f$  et  $g$  ;
- nous établirons une condition suffisante pour que  $F$  soit quasiconformément conjugué à une application à allure polynomiale de degré trois  $\hat{F} : W' \rightarrow W$ , à l'aide du Théorème de Morrey-Ahlfors-Bers d'intégration des structures presque-complexes ;
- en fait, on peut toujours s'arranger pour que cette condition soit vérifiée ;
- par la théorie des applications à allure polynomiale de A. Douady et J.H. Hubbard, nous

montrons que cette application est hybridement conjuguée à un polynôme cubique  $R$ , au voisinage de son ensemble de Julia rempli. Ce polynôme réalise le croisement de  $f$  et  $g$ .



Figure 14 Croisement du disque et de la basilique.

### 12.1.1 Chirurgie topologique

On commence par définir des voisinages des ensembles de Julia remplis  $K_f$  et  $K_g$ , à l'aide de leurs potentiels respectifs  $G_f$  et  $G_g$ . Soit  $\eta > 0$ , on note

$$\begin{cases} U_f = (G_f < \eta), U'_f = f^{-1}(U_f) = (G_f < \eta/2), \\ U_g = (G_g < \eta), U'_g = g^{-1}(U_g) = (G_g < \eta/2). \end{cases}$$

▷ Les rayons d'argument nul  $\mathcal{R}_f(0)$  et  $\mathcal{R}_g(0)$  de  $f$  et de  $g$  sont tous deux des intervalles de  $\mathbb{R}$ . En considérant par exemple une branche inverse de  $z \mapsto (z - \beta_f)^2$  (resp.  $z \mapsto (z - \beta_g)^2$ ) définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_f(0)$  (resp.  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_g(0)$ ), on éclate  $\mathcal{R}_f(0)$  (resp.  $\mathcal{R}_g(0)$ ) en deux rayons  $\mathcal{R}_f^\pm$  (resp.  $\mathcal{R}_g^\pm$ ). On considère l'espace topologique  $V$  obtenu à partir de  $U_f \cup U_g$  en recollant  $\mathcal{R}_f^+$  à  $\mathcal{R}_g^-$  (resp.  $\mathcal{R}_f^-$  à  $\mathcal{R}_g^+$ ) de la manière suivante: un point de  $\mathcal{R}_f^+$  est identifié à un point de  $\mathcal{R}_g^-$  s'ils ont même potentiel. En fait,  $V$  est muni d'une structure de surface de Riemann simplement connexe. De même, on considère  $V'$  obtenu de la même manière en recollant  $U'_f$  à  $U'_g$  ( cf Figure 12.1).

▷ Soit  $\tilde{F} : V' \rightarrow V$  défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} - \text{si } z \in U'_f, \tilde{F}(z) = f(z), \\ - \text{si } z \in U'_g, \tilde{F}(z) = g(z). \end{cases}$$

On remarque que  $f^{-1}(U_f \setminus \mathcal{R}_f(0)) = U'_f \setminus (\mathcal{R}_f(0) \cup \mathcal{R}_f(1/2))$  et  $g^{-1}(U_g \setminus \mathcal{R}_g(0)) = U'_g \setminus (\mathcal{R}_g(0) \cup \mathcal{R}_g(1/2))$ . Par suite,  $\tilde{F}$  est bien défini (même holomorphe) sur  $V' \setminus (\mathcal{R}_f(1/2) \cup \mathcal{R}_g(1/2) \cup \mathcal{R}_f^\pm \cup \mathcal{R}_g^\pm)$ .

- Le recollement au voisinage de  $\beta = \beta_f = \beta_g$  est tel que  $\tilde{F}$  se prolonge holomorphiquement au voisinage de  $\beta$ , qui devient un point fixe répulsif de  $\tilde{F}$ .

- En revanche,  $\tilde{F}$  ne se prolonge même pas continûment au travers des rayons  $\mathcal{R}_{f,g}(1/2)$ . En effet, si  $z$  est un point d'argument plus petit que  $1/2$  pour  $f$ , alors, quand  $z$  tend vers

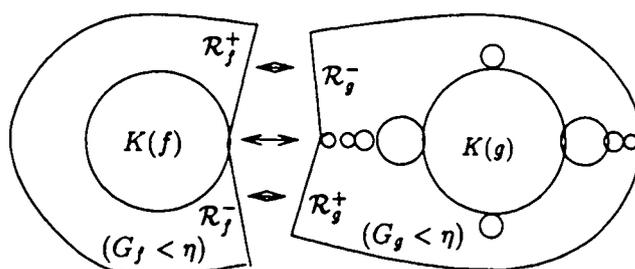


FIG. 12.1 - Construction de  $V$ .

le rayon  $1/2$ ,  $f(z)$  tend vers le rayon  $\mathcal{R}_f^-(0)$  et si  $z$  est d'argument plus grand que  $1/2$  pour  $f$ , alors, quand  $z$  tend vers le rayon  $1/2$ ,  $f(z)$  tend vers le rayon  $\mathcal{R}_f^+(0)$ . Le phénomène est le même pour  $g$ .

▷ Soit  $F : V' \setminus (S' \cup S'') \rightarrow V$  une restriction de  $\tilde{F}$ , où  $S'$  et  $S''$  sont des secteurs centrés en  $\mathcal{R}_f(1/2)$  et  $\mathcal{R}_g(1/2)$ .

La suite consiste à montrer que  $F$  se prolonge convenablement et est conjugué à un polynôme cubique. Pour cela, nous utiliserons les notions de secteurs invariants et de modules d'ouverture (cf Chapitre 5 de la Partie II). La fin de la construction est effectuée dans le prochain paragraphe.

### 12.1.2 Passage à l'holomorphe

Avant de continuer la construction, nous allons décrire des secteurs invariants canoniques pour les polynômes.

**Secteurs invariants et polynômes.** On suppose que  $h$  est un polynôme de degré  $d \geq 2$  d'ensemble de Julia rempli  $K(h)$  connexe et que  $\alpha$  est un point  $k$ -répulsif ou parabolique de  $h$ . On note  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\nu < 1$  les rayons externes qui aboutissent à  $\alpha$ .

Secteur  $S_a(\theta)$  centré en  $\mathcal{R}(\theta)$  aboutissant en  $\gamma(\theta) \in \partial K(h)$

Soient  $\varphi : \mathbb{C} \setminus K(h) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$  la coordonnée de Böttcher de  $K(h)$ , et  $\psi = \log \circ \varphi : \mathbb{C} \setminus K(h) \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . L'application  $\psi$  conjugue  $h$  à  $z \mapsto dz$ .

Pour  $a > 0$ , on pose  $\tilde{S}_a(\theta) = \{(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times 2\pi\mathbb{R}, |t - \theta| < as\}$  et  $S_a(\theta) = \psi^{-1}(\tilde{S}_a(\theta))$ .

**Proposition 12.1.1** *Pour tout  $a > 0$ , les secteurs  $S_a(t_i)$  définissent des secteurs  $f^{k\nu}$ -invariants et*

$$\operatorname{mod}(S_a(t_i)) = \frac{2\arctan(a)}{k\nu \log d}$$

**DÉMONSTRATION.** La relation  $k\nu t_i = t_i \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$  implique  $\tilde{S}_a(t_i) = \tilde{S}_a(k\nu t_i) \pmod{2i\pi\mathbb{Z}}$  et  $h^{k\nu}(S_a(t_i)) = S_a(t_i)$ .

Pour calculer le module de ces secteurs, on considère le domaine fondamental  $A$  (Figure 12.2) délimité par deux segments et deux arcs de cercles. Après le changement de variable par  $z \mapsto \log(z - t_i)$ , le domaine  $A$  devient un rectangle de module

$$\frac{2 \arctan a}{k\nu \log d}.$$

■

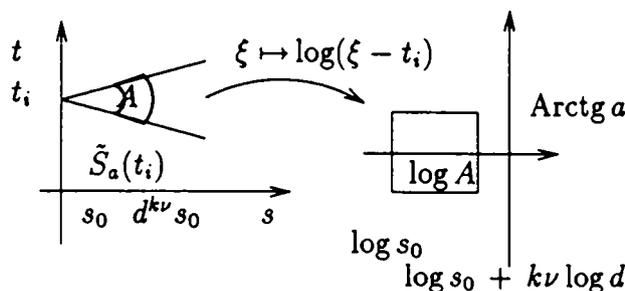


FIG. 12.2 - Module d'ouverture.

**Remarque.** Si  $a$  est fixé, les secteurs  $S_a(t_i)$  ont même module d'ouverture quel que soit  $i$ .

Si  $\alpha$  n'est pas une valeur postcritique de  $h$  et si  $\alpha' \in h^{-n}(\{\alpha\})$ , on peut définir des secteurs invariants au voisinage de  $\alpha'$  de la manière suivante : comme le point n'est pas critique, le polynôme  $h^n$  induit un difféomorphisme local de  $\alpha'$  sur  $\alpha$ . Si on pose  $\tilde{h} = h^{-n} \circ h^{k\nu} \circ h^n$  au voisinage de  $\alpha'$ ,  $\alpha'$  est un point fixe répulsif pour  $\tilde{h}$  de même multiplicateur que  $\alpha$ . Par suite, on peut définir des secteurs  $\tilde{h}$ -invariants au voisinage des rayons aboutissant à  $\alpha'$  de même module que leurs homologues au voisinage de  $\alpha$ , grâce à la conjugaison holomorphe.

Si  $\alpha$  est une valeur critique (plus généralement postcritique),  $h$  est alors un revêtement ramifié au-dessus de  $\alpha$ . Chaque secteur invariant de  $\alpha$  se relève en plusieurs copies de secteurs de sa (ses) préimage(s) de même module. L'application reste tout de même un isomorphisme entre ces secteurs.

On a construit un revêtement ramifié  $F : (V' \setminus (S' \cup S'')) \rightarrow V$ , où  $S'$  (resp.  $S''$ ) est un secteur  $\tilde{f}$ - (resp.  $\tilde{g}$ -) invariant centré sur  $\mathcal{R}_f(1/2)$  (resp.  $\mathcal{R}_g(1/2)$ ). Les applications  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont définies comme des conjuguées de  $f$  et  $g$  restreints à des voisinages linéarisables de  $\beta_f$  et  $\beta_g$ ; ici, on trouve  $\tilde{f} = -f$  et  $\tilde{g} = -g$ .

**Plan du passage au monde holomorphe.** La stratégie est la suivante :

- on montre que l'on peut construire une extension de  $F$  quasirégulière. On note  $\mu$  la forme de Beltrami induite par  $F$  ;
- on définit la suite  $\mu_n = (F^n)^* \mu$  ; on montre qu'elle est convergente dans  $L^\infty$  et que sa norme est plus petite que 1. Pour cela, il suffit de s'assurer qu'un point ne passe au plus qu'une fois dans une zone où  $F$  n'est pas holomorphe. A cette fin, on va faire en sorte pour que  $F$  soit holomorphe au voisinage des points qui devraient être dans l'ensemble

de Julia de  $F$ , ce qui montrera même que la forme de Beltrami limite aura même norme que  $\mu$  ;

- par le Théorème 4.1.2 de la Partie II, on en déduit que  $F$  est quasiconformément conjugué à une application à allure polynomiale  $\hat{F} : W' \rightarrow W$ , et que la conjugaison est de  $\bar{\partial} = 0$  pp. sur  $K(\hat{F})$  ;

- par le Théorème 5.1.1 de la Partie II, on obtient un polynôme cubique  $R$  et une conjugaison avec  $F$  : on peut alors vérifier que  $R$  est un croisement de  $f$  et  $g$ .

**Prolongement sur  $S'$ .** L'image des bords de  $S'$  par  $F$  est bien définie et borde un secteur  $S$   $F$ -invariant dans un voisinage  $\Delta$  du point répulsif  $\beta$  et contenant une composante connexe de  $K_g \cap \Delta$ . On le coupe en trois secteurs invariants  $S_-, S_+$  et  $\Xi$  tels que  $\Xi$  contienne  $K_g$  (voir Figure 12.3).

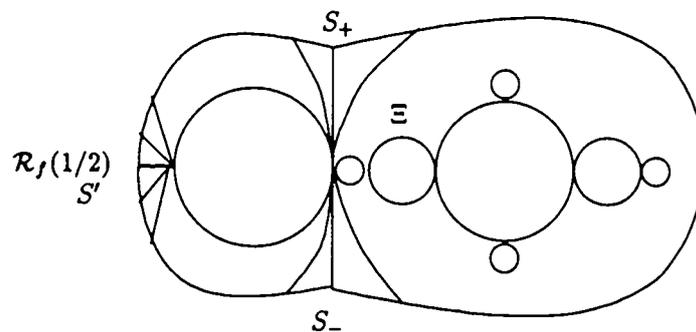


FIG. 12.3 - Extension sur des secteurs.

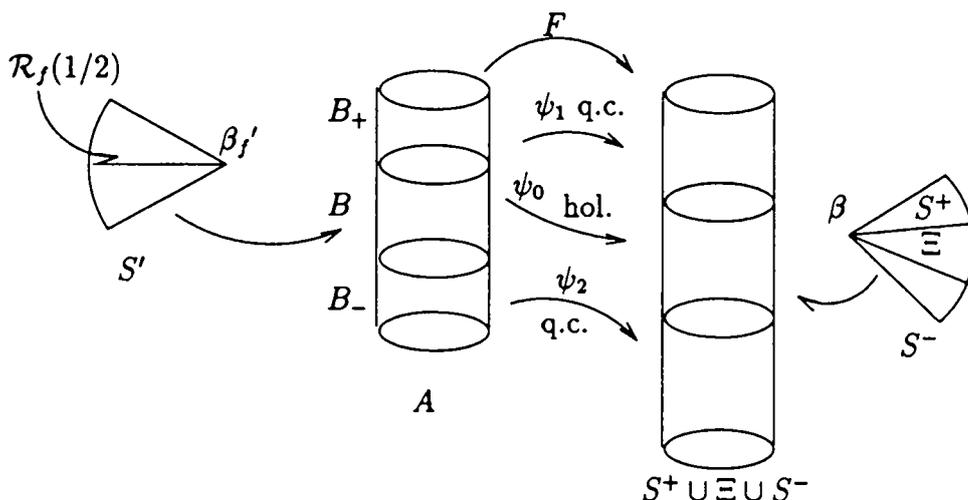
La proposition suivante est la clef de voûte de cette construction (voir [BD]) :

**Proposition 12.1.2** *Si  $\text{mod}(S(t')) > \text{mod}(\Xi)$  alors il existe  $f_1 : V_1' = (V' \setminus S') \rightarrow V$  quasirégulière telle que  $f_1|_{V_1' \setminus S'} = F$  et  $f_1$  est holomorphe sur un voisinage  $S_1$  de  $\mathcal{R}_f(1/2) \setminus \{\beta\}$  vérifiant  $f_1(S_1) \supset \Xi$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\tilde{\xi} : S' \rightarrow \tilde{\xi}(S')$  la coordonnée log-Böttcher de  $\tilde{f}$  au voisinage de  $\beta_{f'}$  conjugant  $\tilde{f}$  à  $z \mapsto 2z$ . Cette application induit un isomorphisme entre  $S'/(f)$  et un cylindre droit  $A$  de module égal à  $\text{mod } S'$ . On note  $B$  le sous-anneau droit de  $A$  de module  $\text{mod}(\Xi)$  centré en l'image de  $\mathcal{R}_f(1/2)$  dans  $A$ , qui induit deux sous-anneaux  $B_-$  et  $B_+$  tels que  $A = B_- \cup B \cup B_+$  (Figure 12.4). Soient  $\bar{\psi} : B \xrightarrow{\sim} \Xi/(F)$  un isomorphisme conforme, et  $\bar{\psi}_{\pm} : B_{\pm} \xrightarrow{\sim} S_{\pm}/(F)$  des applications quasiconformes telles que  $\bar{\psi}_{\pm}|_{\partial B} = \bar{\psi}|_{\partial B}$  et  $\bar{\psi}_{\pm} = F$  sur les composantes du bord de  $A$ .

L'existence de ces fonctions résultent des sous-lemmes de [BD] de leur Lemme 5 (voir §2, Chap. 4, Partie II). Soit  $\psi : S' \rightarrow S$  un relèvement de  $\bar{\psi}$  tel que  $F^{-n}\psi(\tilde{f}^n(z)) = \psi(z)$  pour  $z$  et  $\tilde{f}^n(z)$  dans  $S'$ .

L'application  $\psi$  est en particulier holomorphe au voisinage de  $\mathcal{R}_f(1/2)$ .

FIG. 12.4 - Définition de  $f$ .

Soit  $f_1 : V_1' \rightarrow V$  définie par

$$\begin{cases} f_1|_{S'} = \psi, \\ f_1|_{V_1' \setminus S'} = F. \end{cases}$$

L'application  $f_1$  est quasirégulière, holomorphe sur  $V_1' \setminus S'$  et au voisinage de  $\mathcal{R}_f(1/2) \setminus \{\beta_{f'}\}$ . ■

**Réalisation de la condition suffisante.** D'après la Proposition 5.6.3 de la Partie II la condition portant sur les modules d'ouvertures pour les deux secteurs  $S'$  et  $S''$  peut être réalisée simultanément. En fin de compte, on a construit une application  $F : V' \rightarrow V$  quasirégulière, holomorphe sur  $V' \setminus (S' \cup S'')$  et au voisinage de  $\mathcal{R}_f(1/2) \setminus \{\beta_{f'}\}$  et  $\mathcal{R}_g(1/2) \setminus \{\beta_{g'}\}$ .

**Réalisation du croisement.** Nous allons modifier la structure complexe sur  $V$  pour rendre  $F$  holomorphe.

À partir de la structure complexe standard  $\sigma_0$ , on définit la structure presque-complexe  $\sigma$  de la façon suivante :

- sur  $V' \setminus \bigcup F^{-n}(S' \cup S'')$ ,  $\sigma := \sigma_0$ ;
- sur  $F^{-n}(S')$ ,  $\sigma := F^{n+1} * \sigma_0$ .

En restreignant un peu  $V'$ , on peut faire en sorte que toutes les préimages des secteurs  $S_{\pm}'$  et  $S_{\pm}''$  soient disjointes deux à deux. Pour cela, il faut s'assurer d'une part que ces secteurs peuvent être disjointes pour chaque polynôme  $f$  et  $g$ , et d'autre part, lorsque l'un reentre dans  $S' \cup S''$ , il se trouve dans le relevé de l'anneau centrale (où  $\bar{\psi}$  est holomorphe).

Par suite,  $\sigma$  est à ellipticité bornée car chaque point ne passe au plus qu'une fois dans une région dans laquelle  $F$  n'est pas holomorphe. Par conséquent,  $\sigma$  définit une structure complexe (Théorème d'Ahlfors-Bers) pour laquelle  $F$  est holomorphe ( $F^* \sigma = \sigma$  pp.). On note  $\hat{F} : W' \rightarrow W$  l'application holomorphe ainsi obtenue. Comme  $V' \subset\subset F(V')$  par

construction,  $\hat{F} : W' \rightarrow \hat{F}(W')$  est une application à allure polynomiale hybridement équivalente à un polynôme  $R$  (cf Théorème de Redressement 5.1.1).

La construction ci-dessus permet de vérifier que  $R$  est le croisement de  $f$  et  $g$  en  $\beta$ .

## 12.2 Cas général (croisement répulsif)

On se donne  $(U'_f \xrightarrow{f} U_f)$  et  $(U'_g \xrightarrow{g} U_g)$  deux applications à allure polynomiale de degré  $d_f \geq 2$  et  $d_g \geq 2$  ayant leurs ensembles de Julia connexes. On suppose que  $f$  (resp.  $g$ ) possède un point fixe répulsif  $\alpha_f$  (resp.  $\alpha_g$ ) de nombre de rotation  $p/q$ . On va construire par chirurgie quasiconforme le croisement de  $f$  et  $g$  en  $\alpha_f = \alpha_g$ .

**Première étape.** On considère d'abord les tores quotients  $\mathbb{T}_f = (\Delta_f \setminus \{\alpha_f\})/(f^q)$  et  $\mathbb{T}_g = (\Delta_g \setminus \{\alpha_g\})/(g^q)$  de  $\alpha_f$  et  $\alpha_g$  respectivement, où  $\Delta_f$  et  $\Delta_g$  sont des voisinages linéarisables. On note  $\pi_f : \Delta_f \setminus \{\alpha_f\} \rightarrow \mathbb{T}_f$  et  $\pi_g : \Delta_g \setminus \{\alpha_g\} \rightarrow \mathbb{T}_g$  les projections. Les applications  $f$  et  $g$  agissent sur les tores comme une rotation d'angle  $2\pi(p/q)$ . Pour  $f$  (resp.  $g$ ), on considère un accès de  $U_f \setminus K_f$  (resp.  $U_g \setminus K_g$ ) à  $\alpha_f$  (resp.  $\alpha_g$ ). Dans sa classe, il contient au moins un arc invariant  $\gamma_f$  (resp.  $\gamma_g$ )  $q$ -périodique. L'orbite de son projeté  $\pi_f(\gamma_f)$  (resp.  $\pi_g(\gamma_g)$ ) découpe le tore quotient en  $q$  composantes connexes. Dans chaque composante, on considère  $m = \inf(\text{mod } A)$ , où  $A \subset \mathbb{T}$  est un anneau contenant la trace de  $\pi_f(K_f)$  (resp.  $\pi_g(K_g)$ ). Ils sont tous égaux, car les anneaux sont permutés par l'action holomorphe de  $f$  (resp.  $g$ ); on note  $m_f$  et  $m_g$  ces nombres. De même, on note  $\hat{m}_f$  et  $\hat{m}_g$  les modules d'ouvertures des secteurs invariants maximaux qui accèdent à  $\alpha_f$  et  $\alpha_g$  respectivement, par l'extérieur de  $K(f)$  et  $K(g)$ .

D'après la Proposition 5.6.3 de la Partie II, on peut supposer que

$$\hat{m}_g > m_f \text{ et } \hat{m}_f > m_g.$$

Ayant ainsi choisi les représentants de  $f$  et de  $g$ , nous allons construire le premier revêtement ramifié  $(V' \xrightarrow{F} V)$ .

On note  $\gamma_f$  et  $\gamma_g$  les accès invariants aux points  $\alpha_f$  et  $\alpha_g$ , et  $\gamma_*(i)$  le  $i^{\text{ème}}$  itéré de  $\gamma_*$ . A l'instar de la section précédente, on éclate chaque "rayon" en deux rayons  $\gamma_*(i)^\pm$ ,  $0 \leq i < q$ . D'autre part, les actions de  $f$  et de  $g$  sont uniformément quasisymétriquement conjugués sur les arcs au voisinage des points répulsifs. Ces applications permettent le recollement de  $\gamma_f^+(i)$  à  $\gamma_g^-(i)$  et de  $\gamma_f^-(i+1)$  à  $\gamma_g^+(i)$ , avec  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . On obtient ainsi une surface de Riemann  $V$  isomorphe à  $\mathbb{D}$ . On peut alors définir  $F : V' \rightarrow V$  par des restrictions de  $f$  et  $g$ , sauf sur les préimages des  $\gamma_*(i)$ , où le prolongement ne peut pas être continu.

**Seconde étape.** Il s'agit maintenant de changer  $F$  sur des secteurs voisinages des discontinuités pour rendre  $F$  quasirégulière et laissant invariant une structure presque-complexe intégrable.

Soit  $\gamma'_f$  une préimage de  $\gamma_f$ . Si les classes externes ont été bien choisies, nous trouverons un secteur  $S'$ , voisinage de  $\gamma'_f$  tel que, d'une part, ses préimages soient toutes deux à deux

distinctes et, d'autre part, mod  $S' > m_g$ . On applique alors la Proposition 12.1.2 qui définit  $F : V' \rightarrow V$  (on traite de la même manière toutes les discontinuités).

**Troisième étape.** On note  $\sigma_0$  la structure complexe standard, et on définit la structure presque-complexe  $\sigma$  de la façon suivante :

- sur  $V \setminus \bigcup F^{-n}(S')$ ,  $\sigma := \sigma_0$ ,
- sur  $F^{-n}(S')$ ,  $\sigma := F^{n+1} * \sigma_0$ .

Comme précédemment,  $\sigma$  est à ellipticité bornée car chaque point ne passe au plus qu'une fois dans une région dans laquelle  $F$  n'est pas holomorphe. Il s'ensuit que  $\sigma$  définit une structure complexe (Théorème d'Ahlfors-Bers) pour laquelle  $F$  est holomorphe. Comme  $V' \subset\subset F(V')$  par construction,  $\hat{F} : W' \rightarrow \hat{F}(W')$  est une application à allure polynomiale hybridement équivalente à un polynôme  $R$  (Théorème de Redressement).

On vérifie enfin que  $R$  est le croisement de  $f$  et  $g$  en  $\alpha$ .

## 12.3 Estimations de modules d'ouvertures

Dans cette section, on va montrer qu'on peut effectuer cette chirurgie dans certains cas particuliers, sans avoir à passer au préalable à des applications à allure polynomiale pour avoir l'estimation de la Proposition 12.1.2.

### 12.3.1 $\alpha$ non au bord de composante de Fatou bornée

**Proposition 12.3.1** *Si  $\alpha$  n'est pas dans l'adhérence d'une composante de Fatou bornée et périodique, en choisissant  $a$  assez grand, on obtient  $\text{mod}(\Xi') < \text{mod}(S(t'))$ .*

La preuve s'appuie sur le lemme suivant :

**Lemme 12.3.2** *Si  $\alpha$  n'est pas dans l'adhérence d'une composante de Fatou bornée et périodique, alors  $\forall \theta \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ,  $\forall V$  (voisinage de  $\alpha$ ),  $\exists x \in J(f) \cap V$  tel que  $\gamma(\theta)$  et  $\alpha$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $J(f) \setminus \{x\}$ .*

**DÉMONSTRATION.** On va montrer la contraposée : si  $\left\{ \begin{array}{l} \exists \theta \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \\ \exists V \text{ voisinage de } \alpha, \end{array} \right.$  tels que  $\forall x \in J(f) \cap V$ ,  $\gamma(\theta)$  et  $\alpha$  sont dans la même composante connexe de  $J(f) \setminus \{x\}$ , alors  $\alpha$  est dans l'adhérence d'une composante de Fatou bornée et périodique.

On note  $\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \{z \in f^{-n}(\alpha), \gamma^{-1}(\{z\}) \cap [t_1, \theta] \neq \emptyset\}, \\ A_2 = \{z \in f^{-n}(\alpha), \gamma^{-1}(\{z\}) \cap [\theta, t_2] \neq \emptyset\}. \end{array} \right.$

Montrons que  $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \{\alpha, \gamma(\theta)\}$ .

En effet, si  $x$  est un point de l'intersection et s'il était différent de  $\alpha$  et  $\gamma(\theta)$ , il séparerait ces deux points, car des rayons éloignés de  $\theta$  s'accumuleraient sur  $x$  par deux accès différents.

Par suite, il existe un arc  $l$  joignant  $\alpha$  à  $\gamma(\theta)$  tel que  $\mathcal{R}(\theta) \cup l$  sépare  $A_1$  de  $A_2$ . Or, comme  $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = J(f) \cap V$ , on en déduit  $l \subset \overset{\circ}{K}(f)$  et donc  $\alpha$  appartient à l'adhérence

d'une composante de Fatou bornée qui est périodique, car  $\alpha$  est fixe et admet un nombre fini d'accès. ■

**DÉMONSTRATION DE 12.3.1.** Par le lemme ci-dessus, il existe  $y_1^n(s), y_2^n(s) \notin K(f)$  tels que  $\arg(y_1^n) < \theta < \arg(y_2^n)$  et  $y_i^n(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} x^n$  où  $x^n \rightarrow \alpha$ .

Si on choisit  $a$  assez grand, alors, à  $s$  fixé, les points  $y_i^n$  appartiennent aux secteurs  $S(t_i)$  respectivement (quitte à réduire  $\eta$ , pour qu'ils n'aient pas de point commun). On note  $\varpi$  la projection sur le quotient ;  $\varpi(y_i^n)$  tend vers  $\varpi(x^n)$ . L'anneau induit par  $\Xi'$  est entre ces points et son équateur se situe dans une classe d'homotopie fixe de lacets du tore.

On se donne une métrique euclidienne telle que les géodésiques dans cette classe soient de longueur 1. On note  $\delta$  la distance entre  $\varpi(y_1^n)$  et  $\varpi(y_2^n)$ . L'équateur de  $\Xi'/(F^q)$  a une longueur euclidienne supérieure à 1 et passe à une distance  $\leq \delta/2$  des points  $\varpi(y_1^n)$  et  $\varpi(y_2^n)$ . Par le Théorème du quart de Koebe, on montre que  $\text{mod}(\Xi') \leq \frac{\pi}{\log(1/\delta)}$ . Par conséquent, le module de  $\Xi'$  tend vers zéro quand  $s$  tend vers zéro, alors que celui de  $S(t')$  est croissant : on peut faire en sorte que l'inégalité sur les modules soit satisfaite. ■

### 12.3.2 $\alpha$ au bord de composante(s) de Fatou bornée(s)

**Proposition 12.3.3** *Si  $\alpha$  est répulsif et au bord d'une composante de Fatou bornée, on a  $\text{mod}(\Xi') < \text{mod}(S(t'))$  si  $|q \log f^q'(\alpha) - 2i\pi p| \geq \frac{\log d \sin \theta}{q}$ , où  $\theta$  est l'angle orienté entre les vecteurs  $2i\pi$  et  $\log(f^q)'(\alpha) - 2i\pi p/q$ .*

**DÉMONSTRATION.** En reprenant les mêmes notations que précédemment, on peut décomposer le tore  $T_\alpha$  induit par  $\alpha$  en  $2q$  anneaux dont une moitié est relevée dans  $K(f)$  et l'autre moitié dans son complémentaire. On note  $\Xi_1, \dots, \Xi_q$  les premiers, et  $S(t_1), \dots, S(t_q)$  les seconds.

Ces derniers correspondent à la limite des secteurs  $S_a(t_i)$  quand  $a$  va à l'infini et sont donc tous de même module, à savoir  $\frac{\pi}{q \log(d)}$ .

De même, les  $\Xi_i$  se correspondent par  $f$ , donc ont tous même module.

En éclatant le tore  $T_\alpha$ , on obtient un cylindre de module  $x := \frac{2\pi \sin \theta}{q|q \log f^q'(\alpha) - 2i\pi p|}$  (voir [Pe1]). Dans ce système de coordonnées, la somme de tous les modules doit être inférieure ou égale à celui-ci, d'après l'inégalité de Grötzsch ; on peut donc majorer  $\text{mod} \Xi \leq \frac{\pi}{q} - \text{mod} S(t)$ . Ce qui nous intéresse ici est le signe de la différence de  $\text{mod} S(t) - \text{mod} \Xi$ .

En rassemblant les différents résultats, on obtient l'inégalité cherchée. ■

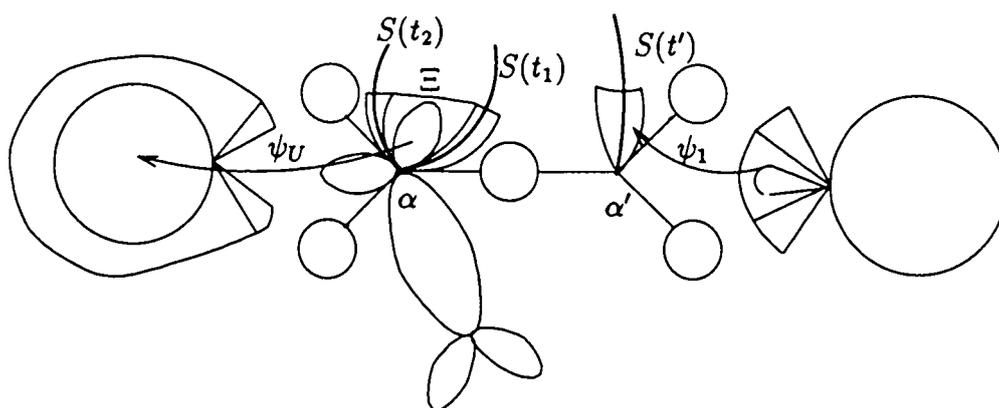


FIG. 12.5 - Chirurgie avec un quasidisque.

### 12.3.3 $\alpha$ au bord de quasidisque(s)

On suppose maintenant que  $\alpha_g$  est au bord d'une composante de Fatou bornée qui est un quasidisque  $U$  périodique. On va modifier un peu la construction afin d'obtenir un revêtement ramifié équivalent à un polynôme.

$\Sigma$  est définie de la même façon que dans la section précédente, mais la manière de définir  $F$  sur les secteurs préimages de  $\alpha_f$  sera revue.

$U$  étant un quasidisque, il existe  $\psi_U : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  quasiconforme envoyant  $U$  sur  $\mathbb{D}$ , holomorphe sur le complémentaire. On considère aussi  $\psi_1 : \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus K(f)$ , la coordonnée de Böttcher de  $f$ . Comme précédemment, on considère trois secteurs droits issus d'une préimage de  $\alpha_f$ , et on définit dans le secteur du milieu une "langue" faisant un angle plus petit. D'autre part, dans la coordonnée  $\psi_U$ , on définit aussi trois secteurs issus de  $\alpha_g$ , celui du milieu faisant le tour du disque (voir Fig. 12.5).

On définit  $F$  holomorphe sur les secteurs du milieu, envoyant la préimage de  $\alpha_f$  sur  $\alpha_g$  (et équipotentielle sur équipotentielle). Si les angles de ces secteurs sont bien proportionnés (voir Proposition 4.2.8 de la Partie II), alors on peut prolonger quasiconformément  $F$  de la langue sur  $\mathbb{D}$ . De même, on prolonge  $F$  quasiconformément sur les deux secteurs de façon à ce que  $F$  se recolle avec  $P_1$ . Le reste de la chirurgie est standard, et on obtient le croisement voulu.

### 12.3.4 Autres cas ( $\alpha$ répulsif)

**Lemme 12.3.4** Soient  $f$  un polynôme d'ensemble de Julia connexe et  $\alpha$  un point fixe répulsif au bord d'une composante de Fatou  $\Omega$  fixe, de bord localement connexe en  $\alpha$ ; alors il existe un quasidisque  $U \subset \Omega$  tel que  $\partial U \cap \partial \Omega = \{\alpha\}$ .

**DÉMONSTRATION.** On note  $\rho$  le multiplicateur de  $\alpha$ . On définit alors un logarithme sur un voisinage linéarisable de  $\alpha$ , en prenant un rayon externe fixé par  $f$ . Dans la coordonnée

log-linéarisante, la trace du bord du bassin  $\Omega$  est invariante au voisinage de  $-\infty$  par la translation de vecteur  $\log\rho$ . Comme il admet un domaine fondamental compact,  $\Omega$  est d'une épaisseur consistante et on peut y inclure un sous-domaine fondamental qui soit un quasidisque de bord lisse disjoint de  $\partial\Omega$ . On prolonge ce domaine par la translation de vecteur  $\log\rho$ . On ramène ce domaine sur un voisinage de  $\alpha$  par notre carte, que l'on note  $U$ . C'est un secteur invariant issu de  $\alpha$ . Ce domaine est un quasidisque car il est invariant par un germe répulsif.

■

$U$  étant un quasidisque, il existe  $\psi_U : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  quasiconforme envoyant  $U$  sur  $\mathbb{D}$ , holomorphe sur le complémentaire. On considère aussi  $\psi_1 : \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus K(f)$ , la coordonnée de Böttcher de  $f$ . Comme précédemment, on considère trois secteurs droits issus d'une préimage de  $\alpha_f$ , et on ajoute dans celui du milieu une "langue" faisant un angle plus petit. La construction reste donc la même, excepté qu'on a remplacé le bassin par un quasidisque inclus dans le bassin.

On a montré :

**Proposition 12.3.5** *Lorsque  $\alpha$  est au bord d'une composante de Fatou dans laquelle il existe un quasidisque dont le bord ne contient que  $\alpha$  de  $J$ , le croisement est constructible par chirurgie.*

## 12.4 Croisement répulsif/parabolique

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré supérieur à deux, d'ensembles de Julia connexes, et tels que  $P$  (resp.  $Q$ ) ait un point fixe  $\alpha_P$  parabolique (resp.  $\alpha_Q$  répulsif) de même nombre de rotation  $p/q$ , alors :

**Théorème 12.4.1** *Si  $\alpha_Q$  n'est pas dans l'ensemble  $\omega$ -limite d'un point critique de  $P$  alors leur croisement est réalisable par chirurgie.*

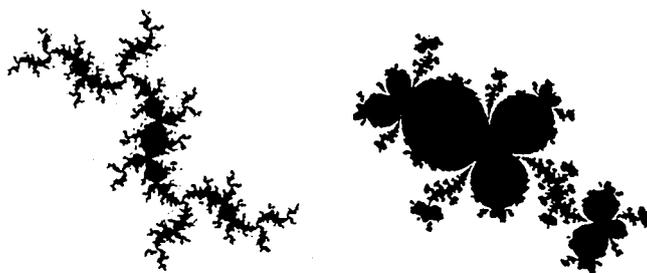


Figure 15 Exemple de croisement répulsif/parabolique.

**ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION.** On procède en deux étapes : dans un premier temps, on s'arrange pour récupérer une bonne géométrie, puis, on effectue la chirurgie comme dans le cas purement répulsif.

Ainsi, la première étape consiste, à l'aide du Théorème 2 de la Partie II, à définir une silhouette polynomiale  $\hat{Q}$  qui remplace le point répulsif  $\alpha_Q$  par un point parabolique de même nombre de rotation telle que  $Q$  y figure de façon rigide.

Ensuite, on suit exactement la méthode des paragraphes précédents pour :

- construire une nouvelle surface de Riemann, croisement de voisinages de  $K_P$  et  $K_{\hat{Q}}$  ;
- définir une nouvelle dynamique quasirégulière qui lisse les singularités ;
- jouer sur les modules d'ouverture des points paraboliques afin de prolonger sur les secteurs le revêtement ramifié par une application conforme, dans le domaine de l'image qui comprend du Julia rempli ; remarquons que l'une des extensions holomorphes du secteur du milieu se fait sans estimation sur les modules. En effet, pour toute paire de *cusps*  $\mathbb{R}$ -analytiques, il existe une application conforme d'un voisinage de l'un qui le transforme en l'autre ;
- définir une structure presque-complexe invariante et intégrable afin d'obtenir une application à allure polynomiale puis un polynôme réalisant le croisement de  $P$  et  $Q$  en  $\alpha_P = \alpha_Q$ .

■

## 12.5 Propriétés et généralisations

Le but de cette section est d'établir les premières propriétés des croisements et de procéder aux généralisations naturelles de cette opération.

**Propriétés.** Soit  $(R, \alpha)$  le croisement de deux polynômes  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  de degré  $d_P$  et  $d_Q \geq 2$  respectivement et ayant leur ensemble de Julia connexe. On note  $N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$  le noyau de  $R$ .

**Proposition 12.5.1** *Le compact  $K(R)$  est connexe.*

**DÉMONSTRATION.** D'après un théorème de Fatou et Julia,  $K(R)$  est connexe si et seulement si tous ses points critiques sont dans  $K(R)$ . Les ensembles de Julia de  $P$  et  $Q$  sont tous les deux connexes, donc contiennent  $d_P - 1$  et  $d_Q - 1$  points critiques comptés avec multiplicité. Par la figuration, tous ces points critiques sont aussi critiques pour  $R$ , et sont dans  $K(R)$ . Or, d'après la condition (C3) de la définition d'un croisement,  $R$  admet exactement  $d_P + d_Q - 2$  points critiques comptés avec multiplicité : tous les points critiques de  $R$  sont dans  $K(R)$ , et  $K(R)$  est connexe.

■

**Proposition 12.5.2 (Nature des points fixes)**

(i) *Le point  $\alpha$  est un point fixe de  $R$  répulsif si  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  le sont ; sinon c'est un point parabolique.*

- (ii) Les points  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  ont même nombre de rotation que  $\alpha$ .
- (iii) Le point  $\alpha$  a autant d'accès de l'infini que  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  réunis.

DÉMONSTRATION. La figuration implique immédiatement que  $\alpha$  est un point fixe de  $R$ .

Soient  $p_P/q_P$  le nombre de rotation de  $\alpha_P$  et  $\Delta_P$  un petit voisinage de  $\alpha_P$ . On note  $L$  l'intersection d'une composante connexe de  $K(P) \setminus \{\alpha_P\}$  avec  $\Delta_P$ , qui soit connexe (si  $\Delta$  est bien choisi). Ce compact est un "accès" à  $\alpha_P$   $q_P$ -périodique qui admet pour nombre de rotation  $p_P/q_P$ . Par suite, l'image par la figuration de  $L$  est aussi  $q_P$ -périodique, et comme la figuration respecte l'orientation, on obtient un nombre de rotation pour  $\alpha$  égal à  $p_P/q_P$ . Ceci prouve (ii).

Si  $\alpha_P$  est parabolique, alors il existe une composante  $q_P$ -périodique  $\Omega$  de  $\mathring{K}(P)$  adjacente à  $\alpha_P$  telle que  $\hat{\Omega} := \Omega \setminus \{\text{grande orbite des points critiques}\}$  soit conforme à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  avec un nombre fini de points marqués. Comme la figuration est univalente sur  $\mathring{K}(P)$ ,  $\varphi_P(\hat{\Omega})/(R^{q_P})$  est aussi du même type conforme, donc  $\alpha$  est aussi parabolique. D'autre part, si  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  sont tous les deux répulsifs, la limite sur le nombre de points critiques de  $R$  impliquent que  $\alpha$  ne peut être parabolique. Par suite, comme  $\alpha$  admet un nombre de rotation, il est répulsif. Ceci prouve (i).

La condition (C2) du croisement et ce qui précède impliquent que  $\alpha$  a au moins autant d'accès que  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  réunis. Supposons que  $\alpha$  ait plus d'accès. Il existerait alors une composante connexe  $L$  de  $K(R) \setminus \{\alpha\}$  disjointe de  $\varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$ . Soit  $\zeta \in L$  une préimage de  $\alpha$ . Comme  $K(R)$  est connexe et plein, le Lemme 12.5.3 ci-après conduit à une contradiction. On obtient (iii). ■

**Lemme 12.5.3** *Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$  une préimage de  $\alpha$  qui n'est pas dans le noyau de  $R$ , il existe un nombre fini de préimages du noyau  $(N_0)_{0 \leq i \leq n}$  telles que  $\zeta \in N_n$  et que  $\cup_{0 \leq i \leq n} N_i$  soit connexe.*

DÉMONSTRATION. On pose  $K_0 = N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$ , et pour  $n \geq 1$ ,  $K_n = R^{-n}(K_0)$ . Montrons par récurrence sur  $n$  que  $K_n$  est connexe et contient  $R^{-(n+1)}(\{\alpha\})$ .

- $K_0$  est connexe par définition car  $K_0 \approx K(P) \cup K(Q)/(\alpha_P \sim \alpha_Q)$ , et par suite de la condition (C3), il contient  $R^{-1}(\{\alpha\})$ .

- si  $K_n$  est connexe, comme il contient  $R^{-n-1}(\alpha)$ ,  $K_{n+1}$  est composé de  $K_n$  et de copies de  $K_0$  recollées sur les points de  $R^{-n-1}(\alpha)$ . Donc  $K_{n+1}$  est connexe. De plus, il contient aussi  $R^{-(n+2)}(\{\alpha\})$ . ■

**Proposition 12.5.4** *Si  $\alpha$  est répulsif, alors il existe  $U_*' \subset\subset U_*$ ,  $*$  =  $f, g$ , voisinages de  $\phi_*(K(*))$  tels que  $(U_*' \xrightarrow{R} U_*) \sim_{\text{hyb}} *$ .*

DÉMONSTRATION. On considère les rayons externes aboutissant à  $\alpha$  bordant  $\phi_*(K(*))$  qu'on referme par une équipotentielle  $\eta$ . On note la composante intérieure  $A_*$ . Comme  $\alpha$

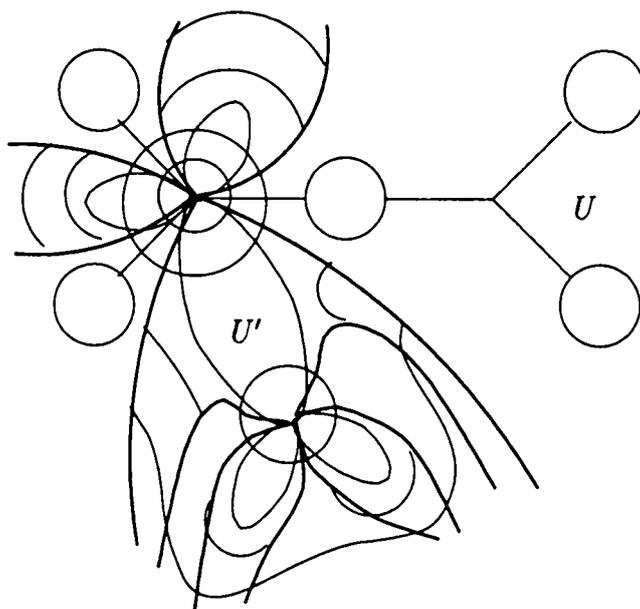


FIG. 12.6 - Application à allure polynomiale.

est répulsif, il existe  $\Delta$ , voisinage de  $\alpha$ , sur lequel  $R$  est linéarisable. On pose  $U_* = A_* \cup \Delta$  et  $U_*'$  la composante de  $R^{-1}(U_*)$  contenant  $\alpha$ . Quitte à prendre  $\eta > 0$  assez petit, on obtient :  $U_*' \subset\subset U_*$  et  $R : U_*' \rightarrow U_*$  définit une application à allure polynomiale de degré  $d_*$ . On note  $K_* = \cap R^{-n}(U_*')$  (voir Figure 12.6).

D'après le Théorème de Redressement 5.1.1, cette application est hybridement équivalente à un polynôme  $\hat{f}$  de même degré que  $f$ . Comme  $f$  figure dans  $\hat{f}$ ,  $J_f \subset J_{\hat{f}}$  est totalement invariant et minimal, donc  $f = \hat{f}$ . ■

**Remarque.** La condition nécessaire et suffisante de l'hybride équivalence est qu'on puisse définir une application à allure polynomiale au voisinage de  $\phi_i(K(P_i))$  : c'est possible aussi si  $\alpha_i$  est le seul point fixe parabolique, en considérant des cylindres de Fatou-Ecalle sur les pétales répulsifs.

**Invariant combinatoire  $\kappa$ .** D'après la Proposition 12.5.2, on peut associer à tout croisement une donnée combinatoire symbolisée dans la suite par  $\kappa$ .

On suppose toujours que  $(R, \alpha)$  est un croisement de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  d'ensemble de Julia connexe et on note  $p/q$  leur nombre de rotation. On considère l'ensemble  $(L_i^P)_{1 \leq i \leq \nu_P}$  (resp.  $(L_i^Q)_{1 \leq i \leq \nu_Q}$ ,  $(L_i^R)_{1 \leq i \leq \nu_R}$ ) des composantes connexes de  $K(P) \setminus \{\alpha_P\}$  (resp.  $K(Q) \setminus \{\alpha_Q\}$ ,  $K(R) \setminus \{\alpha\}$ ) numérotées dans l'ordre cyclique, qui sont en nombre fini et forment localement des cycles de même période. On définit une application  $\kappa : \{L_i^P \text{ et } L_j^Q, 1 \leq i \leq \nu_P, 1 \leq j \leq \nu_Q\} \rightarrow \{L_k^R, 1 \leq k \leq \nu_R\}$  par  $\kappa(L_i^P) = L_k^R$  si  $\varphi_P(L_i^P) \subset L_k^R$  et  $\kappa(L_j^Q) = L_k^R$  si  $\varphi_Q(L_j^Q) \subset L_k^R$ . D'après la Proposition 12.5.2,  $\nu_R = \nu_P + \nu_Q$  et  $\kappa$  est une bijection qui ne dépend pas des diverses numérotations possibles.

L'application  $\kappa$  représente un invariant combinatoire de  $R$  vu comme croisement de  $P$  et  $Q$ . On verra dans le paragraphe suivant qu'il caractérise  $R$ .

**Exemple :** On considère les polynômes quadratiques représentant le lapin maigre et le lapin gras :

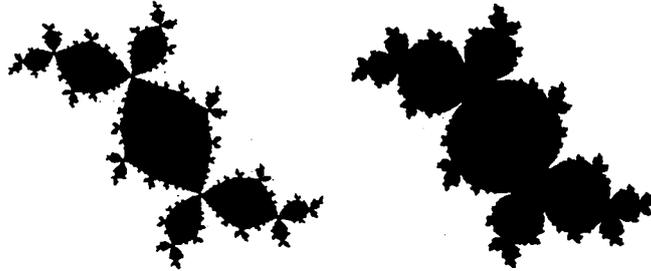


Figure 16 *Lapin "usuel" et lapin "gras".*

On veut croiser ces polynômes entre eux pour obtenir un polynôme de degré trois et de nombre de rotation  $1/3$ . On voit sur la figure suivante que l'on peut définir trois polynômes non conjugués, selon le décalage que l'on impose entre les quartiers lors de la construction de  $\Sigma_0$ .



Figure 17 *Trois types de croisements pour les lapins !*

**Proposition 12.5.5** *Soit  $R$  le croisement de deux polynômes  $P$  et  $Q$ . On note  $N_R$  le noyau de  $R$ . Alors  $X = K(R) \setminus (\cup R^{-n}(N_R))$  est de mesure nulle.*

**DÉMONSTRATION.** Il est clair que  $X \subset J_R$ . Montrons qu'aucun point de  $X$  n'est un point de densité de  $X$ .

Soit  $z \in X$  et notons  $z_n = R^n(z)$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et une sous-suite  $n_k$  tel que  $d(z_{n_k}, N_R) > \varepsilon_0$ . En effet, soit  $\psi$  l'uniformisante de  $\overline{C} \setminus N_R$  sur  $\overline{C} \setminus \overline{D}$ . Le polynôme  $R$  est conjugué à une application  $h$ , sauf sur des secteurs issus des préimages de  $\alpha$ . Par réflexion de Schwarz, on obtient une application holomorphe au voisinage de  $S^1$  privé d'un nombre fini de points. Il est clair que si l'orbite de  $\psi(z)$  ne rentre pas dans les secteurs dans lesquels  $h$  n'est pas défini, alors le point s'échappe. Sinon, l'itéré de  $z$  se trouve dans un domaine dilatant pour la dynamique de  $R$ : domaine linéarisable de  $\alpha$  si celui-ci est répulsif ou pétale répulsif s'il est parabolique.

Pour chaque  $k \geq 0$ , il existe  $r_k > 0$  tel que la famille de courbes homotopes au cercle de centre  $z_{n_k}$  et de rayon  $r_k$  dans  $\overline{C} \setminus (Post(R) \cup D(z_{n_k}, r_k))$  ait une longueur extrémale  $m > 0$ , où  $m$  est une constante à déterminer. Ces rayons sont uniformément minorés par un  $\rho > 0$  car les  $z_{n_k}$  sont loin des orbites critiques. Par suite, d'après le théorème de Kôbe, il existe  $c_m > 1$  tel que pour tout  $k \geq 0$ , on ait

$$\frac{\text{Aire}(X \cap R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k)))}{\text{diam}^2 R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k))} \leq c_m \frac{\text{Aire}(X \cap D(z_{n_k}, r_k))}{r_k^2},$$

car  $X$  est totalement invariant. On a  $c(m) \rightarrow 1$  quand  $m \rightarrow 0$ .

Comme les disques sont disjoints de l'ensemble postcritique et de domaines de rotation, on a

$$\text{diam } R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k)) \rightarrow 0.$$

De plus, les rayons  $r_k$  étant minorés et comme  $X \subset J_R$ , il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que, quitte à extraire une sous-suite,

$$\frac{\text{Aire}(X \cap D(z_{n_k}, r_k))}{r_k^2} \leq 1 - \varepsilon_1.$$

Sinon,  $J_R$  aurait de l'intérieur.

Par conséquent,

$$\liminf \frac{\text{Aire } X \cap D(z, r)}{r^2} \leq c_m \liminf \frac{\text{Aire}(X \cap D(z_{n_k}, r_k))}{r_k^2} \leq c_m(1 - \varepsilon_1).$$

Si  $m$  est assez petit, alors on montre que  $z$  n'est pas un point de densité de  $X$ . ■

**Déformation quasiconforme de croisements.** Dans le Chapitre 4 de la Partie II, on a rappelé les principales propriétés des espaces de Teichmüller de fractions rationnelles. Ici, on montre :

**Proposition 12.5.6** *Soit  $R$  le croisement de deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degré  $\geq 2$ . Alors,*

$$\text{Teich}(R) \simeq \text{Teich}(P) \times \text{Teich}(Q).$$

**DÉMONSTRATION.** Comme  $P$  et  $Q$  figurent dans  $R$ , on sait immédiatement que les différents espaces s'injectent dans  $\text{Teich}(R)$ . Pour montrer la surjectivité, il suffit de remarquer que tous les modules sont liés aux points critiques, et comme ceux-ci sont dans le noyau

$N_R$ , ils proviennent nécessairement de  $P$  ou (exclusif) de  $Q$ . De plus, il ne peut y avoir création de champ de droites invariants d'après la Proposition 12.5.5.

■

Dynamique de  $R$  :

À partir de ces propositions, on peut analyser la dynamique de  $R$  comme suit :

- Dans  $\overline{C} \setminus K(R)$ ,  $R$  est conjugué à  $z \mapsto z^{d_R}$ .

Dans  $K(R)$ , on peut distinguer deux parties, en fonction de la figuration des polynômes de départ; on pose  $N_R = \phi_P(K(P)) \cup \phi_Q(K(Q))$ . De plus, en notant  $J_R = \partial N_R$ , on a  $J_R \subset J(R)$ .

- Dans  $\phi_P(K(P))$  (resp.  $\phi_Q(K(Q))$ ), on retrouve la dynamique de  $P$  (resp. de  $Q$ ) par la figuration.

- Dans  $K(R) \setminus N_R$ ,  $R$  agit comme un revêtement de degré  $d_R - 1$  sur  $K(R)$ , et donc, localement  $K(R)$  est isomorphe à  $N_R$ .

**Généralisations.**

▷ **Cas non connexe**

Il existe dans le sillage de  $M$  de  $p/q$  des points pour lesquels  $q$  rayons aboutissent à  $\alpha$  et ses préimages avec même nombre de rotation  $p/q$ . La construction de  $F$  se fait de la même façon et on obtient alors un polynôme de degré trois dont l'un des points s'échappe à l'infini et l'autre reste dans un domaine borné. On retrouve alors le fait que les composantes connexes de  $K(R)$  sont soit des points, soit quasiconformes à un ensemble de Julia de degré deux ([BH]).

Ce résultat reste valable quel que soit le degré du polynôme.

▷ **Cas  $\alpha_g$  périodique**

Le résultat ressemble un peu à la modulation: on suppose  $\alpha_f$  fixe et  $\alpha_g$  périodique de même nombre de rotation  $p/q$ . On coupe les rayons qui aboutissent à ces points, ainsi qu'au cycle de  $\alpha_g$ , et on insère des copies de  $K(f)$  dans  $K(g)$  en respectant la dynamique locale de  $g$  sur le cycle de  $\alpha_g$ . Puis, on définit localement la dynamique du croisement comme étant  $g$  sur  $K(g)$ ,  $f$  de la copie en  $\alpha_g$  sur celle en  $g(\alpha_g)$ , et l'identité sur le reste. Par les méthodes de chirurgie, on obtient un polynôme  $R$  vérifiant les propriétés voulues.

▷ **Cas de plusieurs polynômes**

On peut croiser plusieurs polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_m$  ayant chacun un point fixe répulsif  $\alpha_i$  de même nombre de rotation  $p/q$ , un par un ou tous à la fois, en utilisant la même méthode. Le point important est de respecter l'ordre cycle au voisinage du point répulsif où s'effectue le croisement. Il en résulte un polynôme de degré  $\sum(d_i - 1) + 1$  muni d'un point fixe de nombre de rotation  $p/q$ .



# Chapitre 13

## Rigidité des croisements à combinatoire fixée

L'objet de ce paragraphe est de montrer que, quand il existe, le croisement de deux polynômes est essentiellement unique.

Rappelons qu'un polynôme  $P$  de degré  $d \geq 2$  ayant un ensemble de Julia connexe figure de manière rigide dans une fraction rationnelle  $f$  (voir Chap. 5, Partie II) s'il existe une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un voisinage de  $K(P)$ , continue injective, telle que :

- $\varphi \in W^{1,p}(U)$ ,  $p > 1$ ,
- $\bar{\partial}\varphi = 0$  pp. sur  $K(P)$ ,
- $\varphi|_{K(P)}$  préserve l'orientation, et  $\varphi \circ P = f \circ \varphi$  sur  $K(P)$ .

Soient deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degré  $d_P, d_Q \geq 2$ , ayant leur ensemble de Julia connexe ; on note  $\alpha_P$  (resp.  $\alpha_Q$ ) un point fixe répulsif ou parabolique de  $P$  (resp.  $Q$ ).

**Définition.** On dit qu'un polynôme  $(R, \alpha)$  réalise le croisement de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (C1) les polynômes  $P$  et  $Q$  figurent de manière rigide dans  $R$  par  $\varphi_P$  et  $\varphi_Q$  respectivement,
- (C2)  $\varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\}$  et le noyau  $N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$  est homéomorphe à  $K(P) \cup K(Q)/\alpha_P \sim \alpha_Q$ ,
- (C3) les degrés sont reliés par la formule  $d_R = d_P + d_Q - 1$ .

On a vu qu'alors  $\alpha$ ,  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  étaient des points fixes répulsif(s) ou parabolique(s) de même nombre de rotation  $p/q$  (cf Prop. 12.5.2). On considère l'ensemble  $(L_i^P)_{1 \leq i \leq \nu_P}$  (resp.  $(L_i^Q)_{1 \leq i \leq \nu_Q}$ ,  $(L_i^R)_{1 \leq i \leq \nu_R}$ ) des composantes connexes de  $K(P) \setminus \{\alpha_P\}$  (resp.  $K(Q) \setminus \{\alpha_Q\}$ ,  $K(R) \setminus \{\alpha\}$ ) numérotées dans l'ordre cyclique, qui sont en nombre finis et forment localement des cycles de même période. L'application  $\kappa : \{L_i^P, L_j^Q, 1 \leq i \leq \nu_P, 1 \leq j \leq \nu_Q\} \rightarrow \{L_k^R, 1 \leq k \leq \nu_R\}$  définie par  $\kappa(L_i^P) = L_k^R$  si  $\varphi_P(L_i^P) \subset L_k^R$  et  $\kappa(L_j^Q) = L_k^R$  si  $\varphi_Q(L_j^Q) \subset L_k^R$ , est une bijection.

**Définition.** Étant donnés deux croisements  $(R_1, \alpha_1, \kappa_1)$  et  $(R_2, \alpha_2, \kappa_2)$  de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$ , on dit que  $\kappa_1 \sim \kappa_2$ , si  $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$  agit comme une permutation circulaire dans  $\mathbb{Z}/(\nu_P + \nu_Q)\mathbb{Z}$ .

Le résultat principal de ce chapitre peut alors s'énoncer comme suit :

**Théorème 14** *Soient  $(R_1, \alpha_1, \kappa_1)$  et  $(R_2, \alpha_2, \kappa_2)$  deux croisements de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$ . Si  $\kappa_1 \sim \kappa_2$ , alors  $R_1$  et  $R_2$  sont conformément conjugués.*

La preuve s'effectue en deux temps, que le point de croisement soit répulsif ou parabolique. La première étape consiste à construire une application quasiconforme qui conjugue les polynômes croisés au voisinage de leur noyau respectif, afin d'obtenir une équivalence combinatoire quasiconforme entre ces polynômes. Ensuite, cette équivalence est promue en une conjugaison quasiconforme qui s'avère être isotope à une conjugaison holomorphe.

Bien que le déroulement de la preuve soit le même, on distinguera dans la suite le cas "répulsif" du cas "parabolique". On considère  $R_1$  et  $R_2$  deux polynômes de même degré réalisant le croisement en un point  $\alpha_i$  de deux autres polynômes  $P$  et  $Q$ . On suppose que la combinatoire des croisements est la même, c'est-à-dire que les rayons de  $P$  et  $Q$  sont recollés de la même manière pour  $R_1$  et  $R_2$ , autrement dit  $\kappa_1 \sim \kappa_2$ .

### 13.1 Cas répulsif

Si  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont répulsifs, alors les points fixes  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  sont aussi répulsifs, et pour  $i = 1, 2$ , il existe des quasidisques  $U_i' \subset\subset U_i$ ,  $V_i' \subset\subset V_i$ , des applications quasiconformes  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$  qui conjuguent hybridement les restrictions de  $R_i$  à  $P$  et  $Q$  respectivement (voir Figure 13.1).

En considérant  $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  et  $\psi := \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ , on obtient deux conjugaisons locales entre  $R_1$  et  $R_2$  au voisinage de leur ensemble postcritique. Cependant, bien qu'elles coïncident en  $\alpha_1$ , ce n'est sans doute pas le cas sur son voisinage. Mais, le fait que  $\kappa_1 \sim \kappa_2$  fera qu'il sera possible de considérer des restrictions disjointes de ces applications afin de trouver une extension quasiconforme au voisinage de  $\alpha_1$ .

Nos conjugaisons descendent en des homéomorphismes quasiconformes  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$  respectivement entre les tores  $\mathbb{T}_1$  et  $\mathbb{T}_2$  associés aux points fixes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (voir Figure 13.2). La trace des ensembles de Julia de  $P$  et  $Q$  sont inclus – dans  $\mathbb{T}_1$  – dans des réunions d'anneaux disjoints  $A_{P,1}$  et  $A_{Q,1}$ . On note

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(A_{P,1}) = A_{P,2}, \\ \bar{\psi}(A_{Q,1}) = A_{Q,2}. \end{cases}$$

Quitte à les restreindre, on peut supposer que  $\bar{\varphi}(A_{1,P}) = A_{2,P}$  est disjoint de  $A_{2,Q}$ ,  $\bar{\psi}(A_{1,Q}) = A_{2,Q}$  est disjoint de  $A_{2,P}$ , et qu'ils sont à bord quasisymétrique (i.e. des quasicerclles). L'équivalence combinatoire de  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  se traduit par :

- ▷  $\bar{\varphi}(A_{Q,1})$  est homotope à  $\bar{\psi}(A_{Q,1}) = A_{Q,2}$  relativement à  $A_{P,1}$  et  $\bar{\varphi}(A_{P,1}) = A_{P,2}$ , et
- ▷  $\bar{\psi}(A_{P,1})$  est homotope à  $\bar{\varphi}(A_{P,1}) = A_{P,2}$  relativement à  $A_{Q,1}$  et  $\bar{\psi}(A_{Q,1}) = A_{Q,2}$ , composante par composante.

On définit un homéomorphisme quasiconforme  $\bar{\chi} : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$  de la façon suivante :

- sur  $A_{P,1}$ , on pose  $\bar{\chi} = \bar{\varphi}$ ,
- sur  $A_{Q,1}$ , on pose  $\bar{\chi} = \bar{\psi}$ ,

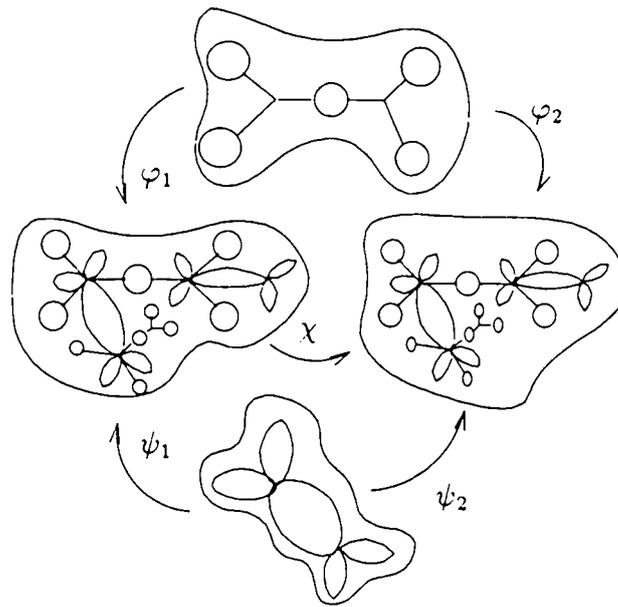


FIG. 13.1 - Notation.

- sur le complémentaire, qui est constitué de  $\nu_P + \nu_Q$  anneaux disjoints à bord quasimétrique, on considère une extension quasiconforme de ces applications.

Par la combinatoire, on en déduit que  $\bar{\chi}(\varphi_1(K(P))) = \varphi_2(K(P))$  et  $\bar{\chi}(\psi_1(K(Q))) = \psi_2(K(Q))$ . D'après les Propositions 4.2.6 et 4.2.7 de la Partie II, cette application se relève en une application quasiconforme d'un voisinage de  $\alpha_1$  sur un voisinage de  $\alpha_2$  qui conjugue  $R_1$  à  $R_2$ . Quitte à diminuer  $U_1$  et  $V_1$ , on peut supposer que toutes les images réciproques des domaines sujets à l'extension sont deux à deux disjointes. En utilisant les branches inverses de  $R_1$  et  $R_2$ , on peut changer les applications  $\varphi$  et  $\psi$  par des conjugués de  $\chi$  afin d'obtenir une application quasiconforme définie sur des voisinages des noyaux de  $R_1$  et  $R_2$  et de  $\bar{\partial}$  nul pp. sur  $N_{R_1}$ .

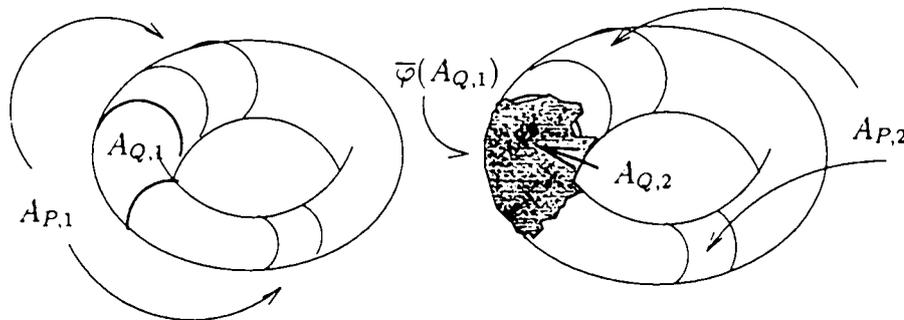


FIG. 13.2 - Applications entre tores.

On définit  $\chi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  comme étant une extension quasiconforme au plan de  $\chi$ , et  $\chi_1$  par  $R_2^{-1} \circ \chi_0 \circ R_1$  qui coïncide avec  $\chi_0$  au voisinage des ensembles postcritiques. Les applications  $\chi_0$  et  $\chi_1$  ont même constante de quasiconformité. Ceci marque la fin de la première étape.

On définit la suite  $(\chi_n)_{n \geq 0}$  d'homéomorphismes quasiconformes par récurrence de telle sorte que  $\chi_n$  coïncide avec  $\chi_0$  au voisinage des ensembles postcritiques, et que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\chi_{n-1}} & \overline{\mathbb{C}} \\ R_1 \uparrow & & \uparrow R_2 \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\chi_n} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Ces applications, ayant une dilatation uniformément majorée, admettent une sous-suite convergente vers une application quasiconforme  $\chi_\infty : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , qui coïncide avec  $\chi_0$  au voisinage des noyaux. Comme les ensembles de Julia de  $R_1$  et  $R_2$  sont connexes, par isotopie, on peut se ramener à une application conforme sur les bassins de l'infini. Mais alors, d'après la Proposition 12.5.5, cette conjugaison quasiconforme est de  $\bar{\delta}$  nul pp. sur  $\overline{\mathbb{C}}$  : c'est une conjugaison conforme.

## 13.2 Cas parabolique

Pour pouvoir effectuer la même démonstration que ci-dessus, il faut d'abord s'assurer qu'on a des conjugaisons quasiconformes au voisinages des copies de  $K(P)$  et de  $K(Q)$ , même en l'absence d'applications à allure polynomiale sur les plans de  $R_1$  et  $R_2$ .

Supposons que  $\alpha_Q$  soit parabolique, ce qui implique qu'aucune restriction de  $R_i$  sur un voisinage de  $K(P)$  n'est à allure polynomiale. On considère l'uniformisante  $\phi_i : \overline{\mathbb{C}} \setminus K(P) \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Elle conjugue  $R_i$  à un revêtement ramifié  $h_i$  sur un voisinage extérieur de  $\mathbb{S}^1$ . Par le principe de réflexion de Schwarz, cette application s'étend sur un vrai voisinage annulaire de  $\mathbb{S}^1$  en une application C-analytique, qui fixe le cercle unité. Cette application a tous ses points périodiques sur le cercle. De plus, ils sont tous répulsifs, sauf un  $q$ -cycle de nombre de rotation combinatoire  $p/q$  qui est parabolique.

On considère un lacet  $\gamma_0$  situé à l'extérieur de  $\mathbb{D}$  qui appartient au domaine de  $h_i$  et tangent uniquement aux points du cycle parabolique et sinon disjoint du cercle unité (Figure 13.3). Par images réciproques de  $h_i$ , on définit une suite  $\gamma_n$  de lacets tangents à  $\mathbb{S}^1$  uniquement sur les  $n$  premières préimages du cycle parabolique et sinon qui sont deux à deux disjoints.

On obtient une image similaire à la fois pour  $h_1$  et pour  $h_2$ . On construit alors une application quasiconforme entre les domaines bordés par  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , qui conjugue  $h_1$  à  $h_2$  sur le bord et qui est lipschitzienne. On considère aussi l'application obtenue par la réflexion. En utilisant les dynamiques de  $h_1$  et  $h_2$ , on construit une conjugaison quasiconforme  $\hat{\chi}$  entre  $h_1$  et  $h_2$  au voisinage de  $\mathbb{S}^1$ . Cette construction est une adaptation de la preuve de la Proposition 6.8 de [Mc1].

On considère la forme de Beltrami  $\mu$  induite par  $\hat{\chi}$  ramenée dans le plan dynamique de  $R_1$ . On la prolonge par 0 sur  $K(P)$  et on l'intègre : on obtient une application propre

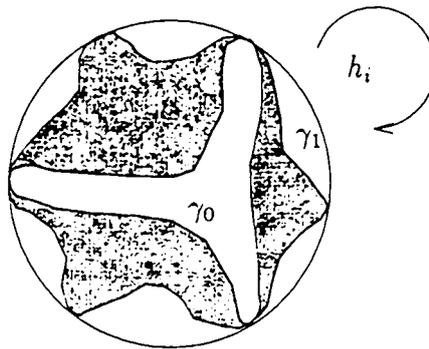


FIG. 13.3 - Action de  $h_i$  au voisinage de  $S^1$ .

$\hat{P} : \hat{U}' \rightarrow \hat{U}$ , hybridement équivalente à  $R_1$ . En suivant la preuve du Théorème de Redressement des applications à allure polynomiale (voir [DH2]), on montre que  $\hat{P}$  est conformément conjugué à une restriction de  $R_2$  (unicité du couple classe interne - classe externe).

Une fois les conjugaisons locales obtenues, le reste de la preuve se déroule comme dans le cas répulsif.

■



# Chapitre 14

## Croisement topologique

Bien qu'il ne semble pas y avoir de véritables obstructions, la chirurgie quasiconforme ne semble pas permettre de montrer l'existence de croisements en des points paraboliques. On va relâcher un peu la définition d'un croisement afin de pouvoir définir une bonne classe topologique dans tous les cas. Cette nouvelle approche permettra, dans un prochain chapitre, de montrer l'existence de croisements pour des polynômes géométriquement finis, *i.e.* ayant leur ensemble postcritique fini sur leur ensemble de Julia (non rempli).

On se donne deux polynômes  $P$  et  $Q$  d'ensemble de Julia connexe et ayant chacun un point fixe  $\alpha_P$  et  $\alpha_Q$  de même nombre de rotation  $p/q$ .

**Définition.** Soient  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  un polynôme topologique de degré  $d \geq 3$  et  $\alpha$  un point fixe de  $f$ ;  $(f, \alpha)$  réalise un croisement topologique de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

(CT1) il existe deux applications continues  $\varphi_P : U_P \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\varphi_Q : U_Q \rightarrow \mathbb{C}$ , injectives sur  $K(P)$  et  $K(Q)$  respectivement, et qui conjuguent  $P$  et  $Q$  à  $f$  sur  $K(P)$  et  $K(Q)$  respectivement ;

(CT2)  $\varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\}$  et le noyau  $N_f = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$  est homéomorphe à  $K(P) \cup K(Q)/\alpha_P \sim \alpha_Q$  ;

(CT3) les degrés sont reliés par la formule  $d_f = d_P + d_Q - 1$  ;

(CT4) l'ensemble  $K(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(N_f)}$  est un compact plein de  $\mathbb{C}$  et  $\bar{\mathbb{C}} \setminus K(f) = \{z \in \bar{\mathbb{C}}, f^n(z) \rightarrow \infty\}$  ;

(CT5) il existe une suite  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  de nombre positifs tendant vers zéro telle que pour toute composante  $L$  de  $K(f) \setminus f^{-n}(N_f)$ ,  $\text{diam } L \leq \eta_n$ .

On montre alors

### **Théorème 11**

(i) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est toujours réalisable dès qu'il est effectué en des points fixes de même nombre de rotation.*

(ii) *Si  $R$  est un croisement (holomorphe) de deux polynômes  $P$  et  $Q$ , alors il est topologiquement conjugué à son modèle topologique.*

(iii) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est unique à combinatoire fixée et à conjugaison topologique près sur  $K(f)$ .*

Le plan de ce chapitre est le suivant.

- On rappelle brièvement quelques propriétés des limites projectives d'espaces topologiques qui nous permettront de construire ce modèle.
- On construit explicitement ce modèle, ce qui démontrera le point (i).
- On analyse le revêtement ramifié obtenu en fonction des polynômes  $P$  et  $Q$ .
- Ensuite, on vérifie que ce modèle est bien conjugué au croisement holomorphe quand il existe (point (ii)).
- On montre alors que la définition du croisement topologique est bien définie à homéomorphisme près (point (iii)).
- Enfin, la construction topologique du croisement permet aussi d'obtenir quelques résultats sur la connexité locale des polynômes impliqués.

## 14.1 Limites projectives d'espaces topologiques

**Définition.** Soit  $\{X_n, \pi_n\}$ , une suite d'espaces topologiques, munis d'applications  $\pi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ , continues surjectives : on définit alors la limite projective de ce système par

$$X_\infty = \varprojlim (X_n, \pi_n) = \{\{x_n\} \in \prod X_n, \forall n, \pi_n(x_n) = x_{n-1}\}.$$

On munit  $X_\infty$  de la topologie induite par la topologie produit.

**Proposition 14.1.1** (i) Si  $X_n$  est compact pour tout  $n$ , alors  $X_\infty$  est compact.  
(ii) Si, pour tout  $n$ ,  $X_n$  est compact connexe, alors  $X_\infty$  est compact connexe.  
(iii) Si, pour tout  $n$ ,  $X_n$  est compact connexe et localement connexe et  $\pi_n$  est à fibres connexes, alors  $X_\infty$  est compact, connexe et localement connexe.

**DÉMONSTRATION.** (i)  $X_\infty$  est inclus dans  $\prod X_n$ , qui est compact par le Théorème de Tychonoff : il suffit de vérifier que  $X_\infty$  est fermé, ce qui le cas (continuité des  $\pi_n$ ).

(ii) On suppose dans un premier temps que les compacts sont connexes. Montrons que la limite projective s'écrit comme intersection décroissante de compacts connexes non vide dans  $\prod X_n$ .

On pose  $Y_n = \{(x_i) \in \prod X_i \text{ telle que pour } 0 < i \leq n, \pi_i(x_i) = x_{i-1}\}$ . On a  $Y_n \approx \prod_{i \geq n} X_i$  qui est compact connexe non vide et  $\bigcap Y_n = X_\infty$ .

**Remarque.** Il suffit de supposer les  $X_n$  connexes à partir d'un certain rang.

(iii) Dans un second temps, on suppose de plus que les  $X_n$  sont localement connexes et que les projections sont à fibres connexes.

On se donne  $V = \prod V_i$ , un voisinage dans  $\prod X_i$  de  $x \in X_\infty$ . Montrons qu'il existe un voisinage connexe de  $X_\infty$  inclus dans  $V$  :

$$\exists U_0 \subset V_0 \cap X_0 \text{ voisinage connexe compact de } x_0.$$

D'une part  $\pi_1^{-1}(U_0)$  est compact connexe et c'est un voisinage de  $x_1$ , et d'autre part

$$\left| \begin{array}{l} \exists U_1 \subset V_1 \cap \pi_1^{-1}(U_0), \\ U_1 \text{ voisinage compact connexe de } x_1, \end{array} \right.$$

tel que  $\pi_1 : U_1 \rightarrow U_0$  soit surjective.

De proche en proche, on construit

$$\left| \begin{array}{l} U_n \subset V_n \text{ connexe compact,} \\ U_n \text{ voisinage de } x_n, \end{array} \right. \text{ tel que } \pi_n : U_n \rightarrow U_{n-1} \text{ surjective.}$$

On note  $U = \varprojlim (U_n, \pi_n) : U$  est compact connexe voisinage de  $x$  dans  $X_\infty$  inclus dans la trace de  $V$ .

■

**Proposition 14.1.2** *Soit  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ , une suite de surfaces de Riemann homéomorphes à  $S^2$ . On suppose que  $\forall n \geq 1, \exists \pi_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$  continue surjective, et à fibres contractiles. Alors,  $S = \varprojlim (S_n, \pi_n)$  est homéomorphe à  $S^2$ .*

DÉMONSTRATION. voir [Mo].

## 14.2 Construction de $(\Sigma_\infty, F)$

On considère, pour simplifier un peu les notations, deux polynômes quadratiques  $P_1$  et  $P_2$  ayant chacun un point fixe répulsif ou parabolique, de même nombre de rotation  $p/q$  (et avec ensembles de Julia connexes).

On va définir le système dynamique par récurrence sur  $n$ , en construisant, à chaque rang, (i) une surface  $\Sigma_n$ , (ii) deux applications  $\pi_n, F_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$  et (iii) un compact  $K_n \subset \Sigma_n$ .

$\alpha_i$  admet  $q$  rayons externes  $\mathcal{R}_i(t_1^i), \dots, \mathcal{R}_i(t_q^i)$  avec  $0 < t_1^i < t_2^i < \dots < t_q^i < 1$ . On note  $Q_j^i(0), i = 1, 2, j = 1, \dots, q$ , le quartier ouvert bordé par  $\mathcal{R}_i(t_j^i) \cup \mathcal{R}_i(t_{j+1}^i)$ , avec  $q+1 = 1$ , et ne contenant aucun des rayons précités (voir Figure 14.1). Par  $P_i^{-n}$ , on définit une suite de pavages  $Q^i(n)$  de plus en plus fins de la sphère en quartiers de sommets l'infini et une préimage de  $\alpha_i$ , ou l'infini lui-même.

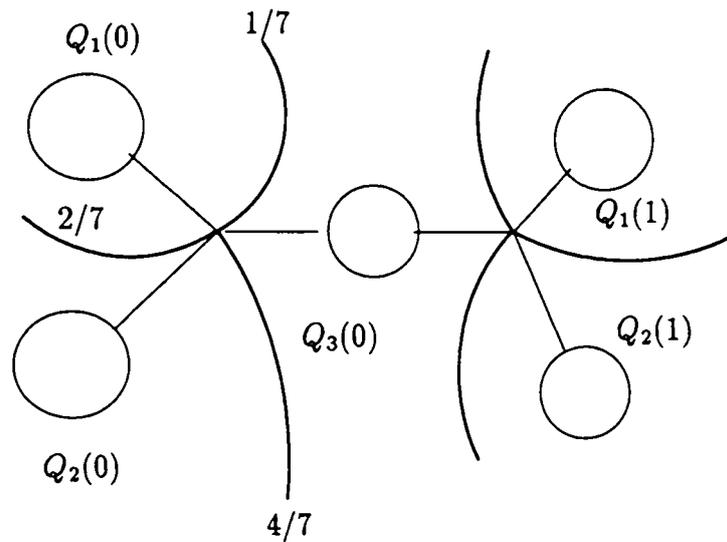
On note  $\tilde{Q}_j^i(n), Q_j^i(n)$  dont on a ôté les quartiers de rang plus grand :  $\tilde{Q}_j^i(n) = \overline{Q_j^i(n)} \setminus \cup_{p > n} Q_j^i(p)$ .

▷  $\Sigma_0$  est définie en éclatant les rayons externes des points fixes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , et en identifiant les points de même potentiel : on obtient ainsi une surface homéomorphe à  $\bar{\mathbb{C}}$ .

On définit  $F_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$  par  $F_0|_{Q^i(0)} = P_i$ . Cette application est bien définie et continue sauf sur les rayons aboutissant à  $P_i^{-1}(\alpha) - \{\alpha\}$ .

On pose  $K_0 = K(P_1) \cup K(P_2) \approx (K(P_1) \cup K(P_2)) / (\alpha_1 \sim \alpha_2)$ .

▷ On éclate les rayons qui aboutissent à  $\alpha_i'$  (préimage de  $\alpha_i$ ) dans  $\Sigma_0$  et on recolle une copie de  $Q^{1-i}(0)$  de telle sorte que les voisinages de  $\alpha$  et  $\alpha_i'$  soient homéomorphes. Si  $s_0$  et  $s_1$  sont les potentiels dans  $Q^i(0)$  et  $Q^{1-i}(1)$  respectivement, on identifie sur les bords  $s_0$  à  $s_1/2$ .

FIG. 14.1 - Partition de  $\bar{C}$ .

- On obtient ainsi une surface  $\Sigma_1$  homéomorphe à  $\bar{C}$ .
- Définissons  $\pi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  continue surjective par

$$\begin{cases} \pi_1 |_{\bar{Q}(0)} = id, \\ \pi_1 |_{\bar{Q}(1)}(s_1, \theta) = (s_0, t_1), \end{cases}$$

où  $t_1$  est l'angle qu'on a éclaté pour insérer ce quartier.

De plus,  $\pi_1 |_{\bar{Q}(0)}$  est injective sauf sur les rayons éclatés, donc on peut parler de  $\Sigma_0 \subset \Sigma_1$ .

- Définissons  $F_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  continue surjective par  $\begin{cases} F_1 |_{\Sigma_0} = F_0, \\ F_1 |_{\bar{Q}(1)} = id : \bar{Q}_j^i(1) \rightarrow \bar{Q}_j^i(0). \end{cases}$

Cette application définit un revêtement ramifié de degré 3.

- On pose  $K_1 = F_1^{-1}(K_0) \approx K_0 \cup (\cup K(P_i) / (\alpha_i' \sim \alpha_i))$ .
- $\pi_1 : K_1 \rightarrow K_0$  est surjective.

▷ Supposons  $(\Sigma_{n-1}, \pi_{n-1}, F_{n-1}, K_{n-1})$  construit pour un  $n > 0$  fixé.

$F_{n-1}^{-1}(\{\alpha\})$  est composé de  $3^n$  points dont  $2 \cdot 3^{n-1}$  sont nouveaux. Soit  $\alpha_n$  l'un d'eux. Il existe un unique  $i$  tel que  $\alpha_n \in Q^i$ . Il y a  $q$  rayons qui y aboutissent. On les éclate en deux pour y insérer une copie de  $Q^{1-i}(0)$  de telle sorte que les voisinages de  $F_{n-1}(\alpha_n)$  et  $\alpha_n$  soient homéomorphes. Ces nouveaux quartiers font partie de  $Q(n) = Q^i(n) \cup Q^{1-i}(n)$ . On les recolle de la façon suivante: si on doit coller  $Q(n)$  à  $Q(n-p)$ ,  $0 < p \leq n$ , on paramètre les rayons par leur potentiel; si  $s_n$  et  $s_{n-p}$  sont des potentiels qui vivent dans  $Q(n)$  et  $Q(n-p)$  respectivement, alors on identifie sur les bords  $s_n/2^n$  à  $s_{n-p}/2^{n-p}$ .

- Cette procédure conduit à une surface  $\Sigma_n$  homéomorphe à  $S^2$ .
- Définissons  $\pi_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$  continue surjective par

$$\begin{cases} \pi_n |_{\Sigma_{n-1}} = id, \\ \pi_n |_{\bar{Q}(n)}(s_n, \theta) = (s_{n-p}, t_n), \end{cases}$$

où  $t_n$  est l'angle qui a été éclaté pour insérer ce quartier.

De plus,  $\pi_n |_{\Sigma_{n-1}}$  est injective sauf sur les rayons éclatés, donc on peut parler de  $\Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n$ .

- Définissons  $F_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$  continue surjective par  $\begin{cases} F_n |_{\Sigma_{n-1}} = F_{n-1}, \\ F_n |_{\overline{Q}(n)} = id : \overline{Q}_j^i(n) \rightarrow \overline{Q}_j^i(n-1). \end{cases}$

Cette application définit un revêtement ramifié de degré 3.

De plus, on a la relation suivante :  $\pi_{n-1} \circ F_n = F_{n-1} \circ \pi_n$ .

- On pose  $K_n = F_{n-1}^{-1}(K_{n-1}) \approx K_{n-1} \cup (\cup K(P_i) / (\alpha_n \sim \alpha_i))$ .

$\pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$  est surjective.

On pose  $\Sigma_\infty = \varprojlim (\Sigma_n, \pi_n)$ .

D'après la Proposition 14.1.2,  $\Sigma_\infty$  est homéomorphe à  $S^2$ .

On définit  $\left\{ \begin{array}{l} F : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty \text{ par } F(\{x_n\}_{n \geq 0}) = \{F_{n+1}(x_{n+1})\} \\ K = \varprojlim (K_n, \pi_n) (\subset \Sigma_\infty) \end{array} \right.$

L'application  $F$  est bien définie car  $\pi_{n-1} \circ F_n = F_{n-1} \circ \pi_n$ . De même, l'existence de  $K$  provient de ce que  $\pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$  est continue surjective.

$F$  est donc un revêtement ramifié de degré trois.

**Proposition 14.2.1** *L'application  $F : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$  est un croisement topologique en  $\alpha$  des  $P_i$  en  $\alpha_i$ .*

DÉMONSTRATION. Les conditions (CT1), (CT2) et (CT3) sont automatiquement satisfaites par construction. La condition (CT5) peut être vérifiée comme suit. On considère sur  $\Sigma_0$  la métrique induite par la métrique sphérique sur chaque partie. Si on dispose d'une métrique sur  $\Sigma_{n-1}$ , alors on la reporte sur  $\Sigma_n$  là où  $\Sigma_{n-1}$  est bien définie, et sur chaque portion rajoutée, on considère la métrique sphérique divisée par  $2^n$ .

Le dernier point résulte de la Proposition 14.3.1. ■

On peut étendre cette définition à des polynômes de degrés différents en lissant les discontinuités apparues au voisinage des rayons de  $\alpha$  du fait de la différence de degré : on se ramène ainsi à une application  $F : \Sigma_0 \setminus \{\text{rayons aboutissant en } F^{-1}(\alpha)\} \rightarrow \Sigma_0$ .

## 14.3 Propriétés

**Proposition 14.3.1** *On note  $K(F) = \{x \in \Sigma_\infty, F^p(x) \not\rightarrow \infty\}$ .*

*Alors  $K(F) = K$ .*

DÉMONSTRATION.

· On a  $F(K) \subset K$  par définition, donc  $K \subset K(F)$ .

· Réciproquement, soit  $x = \{x_n\} \in \Sigma_\infty \setminus K$ .

$\forall n, x_n \notin K_n : \exists n_0 \leq n$  tel que  $x_n \in \overline{Q}(n_0) \Rightarrow F_n^{n_0}(x_n) \in \overline{Q}(0) \setminus K_0$ .

Par suite,  $\forall p, (F^{p+1}(x))_0$  est de potentiel double que  $(F^p(x))_0$ , donc  $F^p(x) \rightarrow \infty$ . ■

**Proposition 14.3.2** *Le compact  $K(F)$  est localement connexe si et seulement si  $K(P_1)$  et  $K(P_2)$  le sont.*

DÉMONSTRATION.

· Si  $K(F)$  est localement connexe, alors  $K(P_1)$  et  $K(P_2)$  le sont aussi car ils s'injectent dans  $K(F)$  par la figuration, et donc leurs bords sont inclus dans celui de  $K(F)$ .

· Réciproquement, on suppose que  $K(P_1)$  et  $K(P_2)$  sont localement connexes. Dans ce cas,  $K_0$  est aussi localement connexe, et on peut montrer que  $\forall n > 0$ ,  $K_n$  est localement connexe.  $K(F)$  étant la limite projective des  $K_n$  qui sont compacts connexes et localement connexes, il s'ensuit qu'il est aussi localement connexe. ■

**Invariant combinatoire.** Comme le cas de croisements holomorphes, on peut associer à un croisement topologique une application  $\kappa$  qui conserve l'ordre dans lequel les composantes de  $K(P_1) \setminus \{\alpha_1\}$  et  $K(P_2) \setminus \{\alpha_2\}$  au voisinage de  $\alpha$  sont alternées.

## 14.4 Classe topologique des croisements

On se donne  $(f, \alpha_f, \kappa_f)$  et  $(g, \alpha_g, \kappa_g)$ , deux revêtements ramifiés sur la sphère de Riemann qui vérifient la définition du croisement topologique de  $(P, \alpha_P)$  et  $(Q, \alpha_Q)$ . Montrons que

**Proposition 14.4.1** *Si  $\kappa_f \sim \kappa_g$ , alors il existe  $\varphi : K_f \rightarrow K_g$ , homéomorphisme qui conjugue  $f$  et  $g$ .*

On commencera par montrer que l'existence d'un croisement implique une conjugaison avec son croisement topologique. On verra que la démonstration ne fait intervenir que les conditions (CT1) – (CT5), ce qui démontrera la Proposition 14.4.1.

**Proposition 14.4.2** *Soit  $R = P_1 \times P_2$ , on note*

$$\left| \begin{array}{l} K_0 = \phi_1(K(P_1)) \cup \phi_2(K(P_2)), \\ K_n = R^{-n}(K_0). \end{array} \right.$$
*Alors,  $\forall n > 0$ ,  $\exists \pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$  continue surjective et à fibres connexes tel que  $K(R)$  soit homéomorphe à  $\varprojlim (K_n, \pi_n)$ .*

On commence par un lemme :

**Lemme 14.4.3** *Sous les hypothèses de la Proposition 14.4.2,  $(K_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante de compacts connexes de  $K(R)$ .*

La preuve de 14.4.3 est contenue dans celle du Lemme 12.5.3.

DÉMONSTRATION (14.4.2). On a déjà vu que les  $K_n$  étaient connexes (Lemme 14.4.3). On définit  $\pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_n|_{K_{n-1}} = id, \\ \pi_n|_{K_n \setminus K_{n-1}} = \alpha_n \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n \in P^{-n}(\alpha) \setminus P^{-n+1}(\alpha), \\ \text{la composante connexe de } z \text{ dans } K_n \setminus \{\alpha_n\} \text{ n'intersecte pas } K_{n-1}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction  $\pi_n$  vérifie les propriétés requises et on pose  $K = \varprojlim (K_n, \pi_n)$ .

**Remarque.** La définition des  $\pi_n$  se généralise à  $K(R)$  tout entier, et ce, de la façon suivante: pour  $z \in K(R) \setminus K_{n-1}$ , on pose  $\pi_n(z) = \alpha_p \in R^{-p}(\alpha) \cap K_{n-1}$  tel que  $\alpha_p$  sépare  $z$  de  $K_{n-1}$  et où  $p$  est choisi minimal.

On définit

$$\begin{aligned} \varpi : K(R) &\rightarrow K \\ x &\mapsto \{\pi_n(x)\}. \end{aligned}$$

▷  $\varpi$  est continue. Ceci découle du lemme suivant :

**Lemme 14.4.4** *Les applications  $\pi_n : K(R) \rightarrow K_{n-1}$  sont continues.*

DÉMONSTRATION. Pour  $n \geq 1$ , posons  $L_n = \overline{K(R) \setminus K_{n-1}}$  et appelons  $L_n(z)$  la composante connexe de  $L_n$  contenant  $z$ .  $\pi_n$  est localement constante sur  $L_n$ . Considérons une suite  $\{z_p\}$  de  $K(R)$  convergeant vers  $z$ . Supposons que  $\pi_n(z_p)$  ne converge pas vers  $\pi_n(z)$ . Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut se ramener à l'un des trois cas suivants : soit la suite est incluse dans une composante connexe de  $L_n$ , soit elle est dans  $K_{n-1}$ , soit chaque élément est dans une composante connexe différente de  $L_n$ . On va aboutir à une contradiction en montrant que, dans ces trois cas, la suite converge vers  $\pi_n(z)$ .

Dans le premier cas, on a  $z \in L_n(z_p)$  car  $L_n(z_p)$  est compact, et comme l'application  $y$  est constante, on a la continuité. Dans le second cas,  $z \in K_{n-1}$  et  $\pi_n(z_p) = z_p \rightarrow z = \pi_n(z)$ . Enfin, dans le dernier cas, on montre que  $\text{diam}(L_n(z_p)) \rightarrow 0$  car ils se déduisent tous d'un nombre fini de compacts par isomorphisme, et ils ne sont pas contenus dans un domaine de rotation (voir Proposition 14.4.6). Par suite,  $|z_p - \pi_n(z_p)| \rightarrow 0$ , et on est ramené au cas précédent. ■

▷ Pour montrer l'injectivité, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 14.4.5**  $\forall z \in K(R), \pi_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ .

L'injectivité est alors immédiate car la suite ne converge qu'en un seul point.

▷ Pour la surjectivité, on considère  $i_n : K_n \rightarrow K$  telle que  $\begin{cases} y_p = y, & n < p, \\ y_p = \pi_p^n(y). \end{cases}$

On a  $\pi_n \circ i_n = id_{K_n}$  et  $\cup i_n(K_n)$  est dense dans  $K$ .

En effet, si  $x = \{x_n\}$ ,  $i_n(x_n) \rightarrow x$ .

Par suite,  $\varpi(K(R)) \supset \cup_i K_n$  qui est dense et  $\varpi(K(R))$  est fermé, d'où la surjectivité.

On a donc montré la proposition modulo le Lemme 14.4.5. ■

**DÉMONSTRATION DE 14.4.5.** Si  $z \in \cup K_n$ , alors la suite est constante à partir d'un certain rang.

Supposons maintenant que  $z$  soit dans l'adhérence. On note  $L_n(z)$  la composante connexe de  $z$  dans  $K(R) \setminus K_{n-1}$  avec le point  $\{\pi_n(z)\}$ , ce qui le rend compact. La suite  $\{L_n(z)\}$  est une suite décroissante de compacts connexes, donc  $\cap L_n(z)$  est un compact connexe. Il reste à montrer que c'est  $\{z\}$ , i.e. les diamètres de  $L_n(z)$  tendent vers zéro. Ceci provient d'un résultat de Yin ([TLY]). En effet, pour chaque  $n$ ,  $L_n$  provient d'un nombre fini de composantes connexes de  $L_1$  par des itérés de  $R$  qui sont des homéomorphismes. De plus, ils ne sont pas dans un domaine de rotation, car ils évitent  $K_0$ . ■

La proposition suivante nous fournit la propriété (CT5) pour les croisements complexes.

**Proposition 14.4.6 (Yin, [TLY])** *Soient  $f$  une fraction rationnelle et  $K$  un compact disjoint de la fermeture de l'ensemble postcritique de  $f$ . Si  $f^n$  envoie  $K_n$  sur  $K$  par un homéomorphisme pour  $n \geq 1$ , alors soit (a)  $\text{diam } K_n \rightarrow 0$ , soit (b)  $K$  est contenu dans un domaine de rotation périodique de  $f$ .*

**Corollaire 14.4.7** *On note  $R$  le croisement de  $P_1$  et  $P_2$ . Le croisement topologique de  $P_1$  et  $P_2$  est conjugué à  $R$ .*

**DÉMONSTRATION.** En effet, on peut conjuguer  $R$  avec son modèle de limite projective qui, par construction, est lui-même conjugué au croisement topologique. ■

**Proposition 14.4.8**  *$K(R)$  est localement connexe si et seulement si  $K(P_1)$  et  $K(P_2)$  le sont eux-mêmes.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $K(R)$  est localement connexe, alors les  $K(P_i)$  le sont car ils y figurent par une injection.

Réciproquement, on montre de proche en proche que la suite  $\{K_n\}$  est composée de compacts connexes et localement connexes. Par suite, leur limite projective vérifie les mêmes propriétés (voir Proposition 14.1.1), ainsi que  $K(R)$  qui lui est homéomorphe (Proposition 14.4.2). ■

## 14.5 Conséquence sur la connexité locale

On suppose dans ce paragraphe que  $K(R)$  est localement connexe, ce qui implique que les  $K(P_i)$  le sont aussi.

### Modèle du disque pincé

Tous les ensembles de Julia étant localement connexes, on peut les représenter par leur disque pincé (voir [Do5]). En fait, il existe un algorithme pour obtenir celui de  $R$  à partir des deux autres.

**Exemple.** Reprenons notre premier exemple : nous avons montré que le croisement est réalisable, et que son ensemble de Julia est localement connexe car il s'agit d'un polynôme à ensemble postcritique fini.

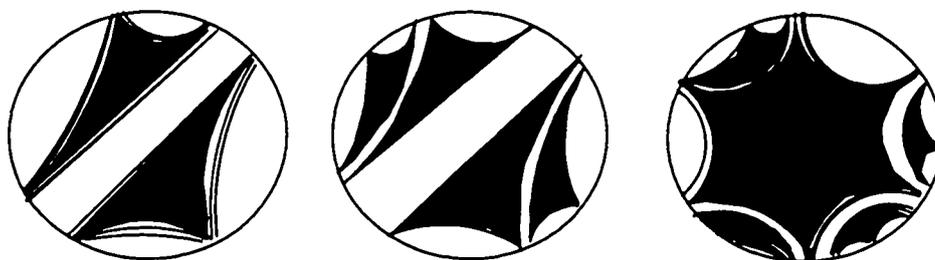


FIGURE : CROISEMENT DE DISQUES PINCÉS.

Pour chaque  $i = 1, 2$ , on partitionne  $\bar{D}/\sim_i$  en  $q + 1$  parties selon les géodésiques de Poincaré reliant  $t_j^i$  à  $t_{j+1}^i$  du tore  $\mathbb{T}$ . On remplace  $[\alpha_i]$  par l'enveloppe convexe (par rapport à la métrique de Poincaré) de  $2q$  points de  $\mathbb{T}$ . Cette partie correspond à  $[\alpha]$ . Les parties de  $\bar{D}/\sim_i$  sont mises alternativement dans le complémentaire : ceci correspond au compact  $K_0$ .

Pour chaque préimage de  $\alpha$ , on réitère le processus en remplaçant sa classe par l'enveloppe convexe de  $2q$  points. On remet les classes d'équivalence dans le complémentaire (une sur deux) et on remplit le reste par les relations d'équivalence de l'autre polynôme, et ainsi de suite...

Plus précisément, en fixant la combinatoire sur les polynômes, on peut trouver un algorithme donnant le nouvel argument externe d'un point de la figuration, en considérant ses développements en base  $d_f$  et  $d_R$ .

On a bien toutes les classes d'équivalence de  $R$ , car en considérant la multiplication de l'angle par  $\deg(R)$  sur  $\mathbb{T}$ , les classes sont de taille croissante et, pour un certain rang, elles seraient trop grandes pour ne pas être l'une de celles de départ.

### Arbres de Hubbard

On suppose maintenant que les polynômes sont à ensemble postcritique fini, et sont donc munis d'arbres de Hubbard.

L'arbre de Hubbard de  $R$  s'obtient à partir des autres en les croisant sur  $\alpha$ , la dynamique étant celle induite par les polynômes de départ sur chaque sous-arbre.

**Remarque.** En définissant une dynamique sur l'arbre croisé, il est possible de montrer directement l'existence d'un polynôme complexe ayant le même arbre (voir [Po]).

**Exemple.**

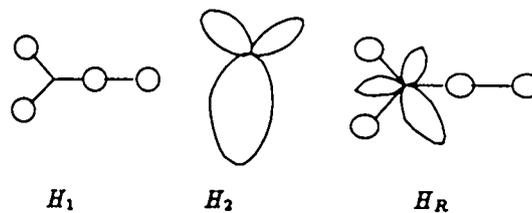


FIG. 14.2 - Croisement d'arbres de Hubbard.

**Remarque.** Il existe une généralisation du Théorème de Thurston ([CJS]) qui fournit un critère pour savoir si un revêtement ramifié de la sphère dont l'ensemble postcritique a un nombre fini de points d'accumulation est Thurston-équivalent à une fraction rationnelle. Seulement, la preuve du théorème montre plutôt l'existence d'une fraction rationnelle sous-hyperbolique équivalente, ce qui ne nous intéresse pas ici.

# Chapitre 15

## Critère de dévissage

Dans ce chapitre, nous allons chercher à suivre un chemin inverse de celui suivi dans les chapitres précédents : on se donne un polynôme  $R$  (avec  $K(R)$  connexe) et on étudie l'existence d'autres polynômes dont il serait le croisement. Il est nécessaire de supposer que  $R$  admet un point fixe  $\alpha$  de nombre de rotation  $p/q$  avec  $m$  cycles de rayons. Il s'agit alors de trouver des polynômes figurant dans  $R$  de façon distincte et d'examiner si leur croisement définit  $R$ . En fait, on montrera que ce critère constitue une condition nécessaire pour être un croisement, et qu'il constitue aussi une condition suffisante dans le cas où le point de croisement est répulsif.

### 15.1 Partition associée à un polynôme

Étant donné un polynôme  $R$ , on lui associe une suite de partitions de  $\overline{\mathbb{C}}$  de la façon suivante :

▷ Les  $mq$  rayons aboutissant à  $\alpha$  induisent une partition  $Q(0)$  dont les éléments font partie alternativement de  $Q^1(0)$ ,  $Q^2(0)$ , ...,  $Q^m(0)$ . On notera  $\Sigma_0$  la sphère de Riemann munie de cette partition.

▷ On suppose que  $Q(k)$ ,  $\Sigma_k$ , ... sont définies pour  $0 \leq k < n$  et on notera  $\alpha_k$  une vraie préimage  $k^{\text{ième}}$  générique de  $\alpha$ . On construit  $Q(n)$  comme suit.

On considère  $\alpha_n \in R^{-1}(\{\alpha_{n-1}\})$ ; il existe  $k$  et  $i$  tels que  $\alpha_n \in Q^i(k)$ .

- Si c'est le seul point à être dans cette composante connexe, alors on considère les rayons préimages de ceux de  $\alpha_{n-1}$  aboutissant à  $\alpha_n$  : ils subdivisent  $Q^i(k)$  en "quartiers" dont un seul contient une préimage de  $\alpha$  de rang  $< n$ . On lui attribue le même nom (i.e.  $Q^i(k)$ ). Puis, on note les autres parties alternativement  $Q^{i+1}(n)$ ,  $Q^{i+2}(n)$ , ...,  $Q^{i-1}(n)$ ,  $Q^i(k)$ , ..., dans l'ordre cyclique.

- S'il y a plusieurs  $\alpha_n$  dans la même composante connexe de  $Q^i(k)$ , on définit la relation d'ordre partiel suivante : on dit que  $\alpha_n' < \alpha_n$  s'il existe deux rayons aboutissant en  $\alpha_n$  séparant  $\alpha_n'$  de  $\alpha$  (on peut aussi poser que  $\alpha_k < \alpha_{k'}$  avec  $k \neq k'$ ). On commence alors à numéroter les éléments maximaux comme dans le premier cas, et on poursuit de proche

en proche cette numérotation dans l'ordre décroissant des  $\alpha_n$ .

Ces partitions respectent la dynamique de  $R$  en ce sens que :

$$R : Q(n) (\subset \Sigma_n) \rightarrow Q(n-1) (\subset \Sigma_{n-1}) \text{ si } n \geq 1.$$

$$R : Q^i(k) \rightarrow Q^i(k-1) \text{ si } k \geq 1.$$

$$R : Q^i(0) \rightarrow Q^i(0).$$

**Remarque.** Cette partition est fondée sur les mêmes idées que les *puzzles* de Branner-Hubbard-Yoccoz (voir [BH, Hu]).

## 15.2 Condition nécessaire

**Proposition 15.2.1** *Soit  $R$  un polynôme de degré  $d_R \geq 3$ . Si  $R$  réalise un croisement, alors tous les points critiques se trouvent dans  $\tilde{Q}(0)$ , où*

$$\tilde{Q}(0) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{1 \leq i \leq m} \overline{Q^i(0)} (\subset \Sigma_n).$$

**DÉMONSTRATION.** Par construction,  $\tilde{Q}(0)$  contient le noyau  $N_R$  qui, lui, contient tous les points critiques. ■

## 15.3 Obtention de figurants

Pour trouver des candidats à un croisement, une méthode consiste à faire des collages  $R$ -analytiques le long des rayons aboutissant sur  $\alpha_k$  : on part de  $\Sigma_0$  et on recolle les rayons adjacents qui bordent les parties qui ne sont pas dans  $Q^i(0)$ , en identifiant les potentiels égaux. On obtient  $\Sigma_0^i$ . De proche en proche, on recolle sur  $\Sigma_n$  les rayons d'ordre plus élevé en faisant disparaître les  $Q^j(k)$ ,  $j \neq i$  pour former une suite de sphères de Riemann  $\Sigma_n^i$  que l'on peut munir de projections  $\pi_n$ . En notant  $\Sigma^i = \varinjlim (\Sigma_n^i, \pi_n)$ , ou bien la limite inductive est dégénérée et  $R$  est semi-conjugué à une dilatation, ou bien c'est une sphère et alors  $R$  est semi-conjugué à un polynôme  $P_i$  topologique qui figure dans  $R$ .

Le projeté de  $\alpha$  est alors un point fixe de nombre de rotation  $p/q$ .

Si  $\alpha$  est parabolique, il est difficile de montrer que nos polynômes topologiques sont effectivement de vrais polynômes complexes. En revanche, si  $\alpha$  est répulsif, on peut trouver des restrictions de  $R$  qui soient des applications à allure polynomiale au voisinage de  $\alpha$ , ces applications étant conjuguées aux polynômes topologiques des quotients ci-dessus.

On se fixe un  $i$  et on considère la restriction  $R : Q^i(1) \rightarrow Q^i(0)$ . C'est un revêtement ramifié de degré fini, qui n'est pas à allure polynomiale. Pour le rendre à allure polynomiale, il faut changer un peu la définition des domaines de  $R$ . On commence par couper ces domaines par des équipotentielles pour les rendre bornés (et  $R$  reste toujours propre). En suivant la démonstration du Théorème de Modulation (voir Chap. 10 de la Partie IV), on remplace les bouts de rayons par des branches quadratiques en coordonnée

log-Böttcher du type  $\{(s, t) \in [0, \eta] \times \mathbb{T}, s^2 = t\}$ , pour que ces domaines ne contiennent plus que  $\alpha$  dans leur bord commun. Soient  $A'_i$  et  $A_i$  ces domaines (tels que  $R : A'_i \rightarrow A_i$ ,  $A'_i \subset A_i$  et  $\partial A_i \cap \partial A'_i = \{\alpha\}$ ). Ceci étant, comme  $\alpha$  est répulsif, on considère un petit disque linéarisable  $\Delta$  au voisinage de  $\alpha$  et on note  $\Delta'$ , l'image réciproque de  $\Delta$  contenant  $\alpha$ . On a  $\Delta' \subset \subset \Delta$  et si on note  $U_i = A_i \cup \Delta$ ,  $U'_i$  la composante de  $R^{-1}(U_i)$  contenant  $A'_i$ , alors  $(U'_i \xrightarrow{R} U_i)$  est une application à allure polynomiale hybridement équivalente à un polynôme  $P_i$ . Si son ensemble de Julia n'est pas connexe, alors  $R$  ne peut pas être un croisement.

On peut alors construire la même limite inductive pour l'application à allure polynomiale, ce qui montre que ces objets sont les mêmes (cas connexe).

## 15.4 Figurants/figuré

Le paragraphe précédent définit des polynômes  $P_1, \dots, P_m$  figurant dans  $R$  à des "endroits différents", en tout cas lorsque  $\alpha$  est répulsif. On supposera dans la suite que leurs ensembles de Julia sont connexes.

On cherche maintenant à savoir sous quelle(s) condition(s)  $R$  est le croisement de ces polynômes ou, dans des cas moins favorables, sous quelle(s) condition(s) des croisements de ces polynômes figurent dans  $R$ . On peut aussi se demander si  $K(R)$  est homéomorphe à un croisement de polynômes.

Rappelons les propriétés des croisements :

- les  $P_i$  figurent de manière rigide par des  $\phi_i$  dans  $R$ ;
- $\cup \phi_i(K(P_i)) \approx \cup K(P_i)/\alpha_i \sim \alpha_j$  et  $\cap \phi_i(K(P_i)) = \{\alpha\}$ .

Il ne reste donc qu'une condition sur les degrés, pour être sûr d'avoir à faire à un croisement : il faut  $\sum(\deg P_i - 1) = \deg R - 1$ , i.e., pour chaque point critique, la suite constante figure dans une des limites inductives données précédemment, autrement dit, que tous les points critiques appartiennent à  $\cap_{n \geq 0} (\overline{Q^i(0)}) (\subset \Sigma_n)$ .

**Corollaire 15.4.1** *Les conditions suivantes sont suffisantes.*

(i) Soient  $R$  un polynôme de degré  $d_R \geq 3$  muni de sa partition en  $\alpha$  et  $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$  des polynômes figurant en  $\alpha$ . Si la relation d'ordre sur les préimages de  $\alpha$  ne classe que des points de rang différent, alors  $R$  est un croisement.

(ii) Soit  $R$  un polynôme de degré  $d_R \geq 3$ ,  $R^{\circ n}$  n'est jamais un croisement.

**Remarque.** Il ne s'agit pas d'équivalence (voir l'exemple ci-dessous).

**DÉMONSTRATION.** (i) Supposons qu'il existe  $k, i$  ( $k > 0$ ) tels qu'une composante connexe de  $Q^i(k)$  contienne un point critique. Alors,  $R|_{Q^i(k)}$  est un revêtement ramifié de degré au moins deux.  $R$  se prolonge continûment au bord, et donc son bord contient au moins deux préimages de chaque point du bord de  $R(Q^i(k))$ ; par suite, il contient deux préimages de  $\alpha$  de même rang, qui sont forcément ordonnés.

Supposons maintenant que tous les points critiques soient dans  $\tilde{Q}(0)$ . Si  $R$  n'est pas un

croisement alors il existe un point critique *parasite*  $\omega$  de  $R$  sur  $\partial N_R$ . Ce point appartient à la figuration d'un seul polynôme  $P$  de la décomposition.

Or, la décomposition est construite de telle sorte que si  $\omega$  est un point critique de degré  $d_\omega \geq 2$ , sur  $\partial N_R$ , alors :

- soit, à chaque étape,  $\omega$  est dans l'intérieur de  $Q(0)$ , et alors à la limite, chaque pièce dans un voisinage admet  $d_\omega - 1$  pièces symétriques par rapport à  $\omega$  de même rang, et  $R_{\tilde{Q}(0)}$  restreint à un voisinage de  $\omega$  est de degré  $d_\omega$  ;
- soit, à partir d'un certain rang,  $\omega$  est au bord d'une pièce : c'est une préimage de  $\alpha$ . De même, la numérotation des pièces est telle que  $R_{\tilde{Q}(0)}$  restreint à un voisinage de  $\omega$  est de degré  $d_\omega$ .

(ii) On considère deux cycles de rayons  $q$ -périodiques aboutissant à  $\alpha$ . Chacun d'eux est contenu dans  $1/d^{\text{ième}}$  de tour (sinon, ces cycles n'auraient pas de nombre de rotation). Ils découpent le cercle (et le disque) en  $2q$  composantes connexes dont la plus grande est de longueur (de diamètre)  $\geq 1 - 2/d$ . On la note  $I_1^1$ , et on numérote les autres alternativement  $I_1^2, I_2^1, I_2^2, \dots$ . Il existe un point critique dans  $I^2$  (ou dans une composante connexe bordée par  $I^2$ ). Ses images réciproques sont équiréparties sur le cercle (et on en a a priori  $d$ ), donc il y en a au moins une dans  $I_1^1$ . Par suite, elle est séparée de  $I^2$ , i.e. de  $Q^2(0)$ , et comme elle est un point critique de  $R^n$ ,  $n > 1$ ,  $R^n$  ne peut être un croisement. ■

**Proposition 15.4.2** Soient  $P_1$  et  $P_2$  figurant dans  $R$  tels qu'il n'y ait pas de points critiques dans  $Q^{1,2}(k)$ ,  $k > 0$ . Alors  $P_1 \underline{\chi} P_2$  figure dans  $R$ .

DÉMONSTRATION. On note  $\left\{ \begin{array}{l} K_0 = \phi_1(K(P_1)) \cup \phi_2(K(P_2)), \\ K_n \in \pi_0(R^{-n}(K_0)) \text{ contenant } K_{n-1}. \end{array} \right.$

On définit  $\pi_n : \overline{UK_n} \rightarrow K_{n-1}$  comme dans la Prop. 14.4.2. Les  $\pi_n$  sont continues surjectives et à fibres contractiles. Comme il n'y a pas de points critiques mal placés, par une preuve analogue à 14.4.2, on peut montrer d'une part que  $R$  défini sur  $\varprojlim (K_n, \pi_n)$  est conjugué au croisement  $P_1 \underline{\chi} P_2$  sur son ensemble de Julia et, d'autre part, qu'il est aussi conjugué à lui-même sur  $\overline{UK_n}$ . ■

**Conjecture.**  $K(R) \approx K(\underline{\chi} P_i)$  ssi aucune des  $\Sigma^i$  n'est dégénérée.

**Conclusion.**  $R$  réalise un croisement ssi tous les points critiques sont dans  $\tilde{Q}(0)$ .

**Exemple.** Soit  $c$  super-attractif de période 4 et de nombre de rotation  $1/4$ . On considère  $R = P_c^2$ , polynôme de degré 4 (voir figure ci-dessous). La chirurgie montre que  $P_{-1}$  figure deux fois dans  $R$ . Cependant, si  $R$  était le croisement de  $-1$  par lui-même, il serait de degré 3, et non 4. On remarque que l'un des points critiques n'est pas dans  $\tilde{Q}(0)$ .

En définitive, si  $R$  réalisait un croisement, il s'agirait de  $P_{-1} \underline{\chi} P_{-1}$ , ce qui n'est pas le cas.

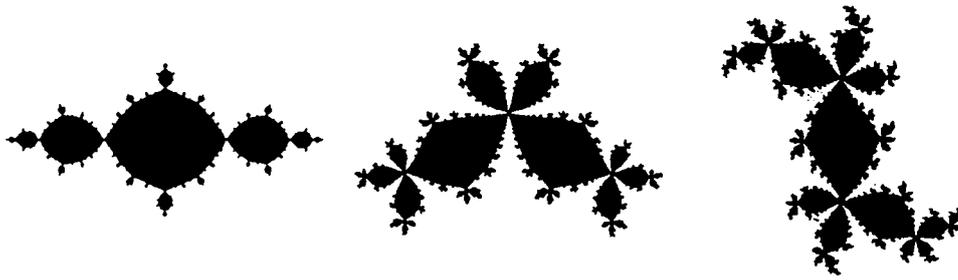


Figure 18 *Auto-croisement de la basislique et le lapin à 3 oreilles.*



# Chapitre 16

## Dépendance par rapport aux paramètres

### 16.1 Cas géométriquement fini

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'en déformant continûment des croisements de polynômes sous-hyperboliques, on peut obtenir des polynômes géométriquement finis (*i.e.* les orbites critiques sont finies sur l'ensemble de Julia - non rempli).

#### 16.1.1 Motivation et exemples

La chirurgie semble être difficile dans le cas parabolique, mais il est facile de construire des exemples de polynômes de degré trois qui sont des croisements de polynômes quadratiques paraboliques.

**Exemple 1 :** On considère le polynôme  $P : z \mapsto z^3 + \frac{4}{3}z + \frac{2i}{27}$ . Il admet deux points fixes ( $2i/3$ , superattractif, et  $-i/6$ , parabolique). Le point parabolique n'admet qu'un seul pétale attractif et, de plus, il est situé au bord de la composante superattractrice de Fatou. On peut montrer que les polynômes  $z \mapsto z^2$  et  $z \mapsto z^2 + 1/4$  figurent dans  $P$  sur chacun des domaines périodiques de  $K(P)$ . De plus, tous les points critiques de  $P$  se trouvent dans ces composantes, donc  $P$  réalise le croisement de ces deux polynômes (voir figure ci-dessous).



Figure 19 *Croisement du disque et du choufleur.*

On note  $P_0 : z \mapsto z^3 + \frac{3}{2}z$ . On montre de façon similaire que  $P_0$  réalise le croisement de  $z \mapsto z^2$  avec lui-même.

Ces deux polynômes appartiennent à la famille  $R_a : z \mapsto z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a$  pour  $a = 2i/3$  et  $i/\sqrt{2}$  respectivement. Faisons varier  $a$  entre ces deux valeurs. Pour  $a > 2/3$ ,  $R_a$  admet trois points fixes dont un superattractif ( $a$ ), un répulsif et un attractif. Le point répulsif est au bord des deux bassins et réalise le croisement de  $z \mapsto z^2$  et  $z \mapsto z^2 + c$ ,  $c \in [0, 1/4]$ . En effet, pour chaque valeur de  $a$ , il existe un unique polynôme quadratique qui est hybridement équivalent à  $R_a$ . Lorsque  $c$  tend vers  $1/4$ ,  $a$  tend vers  $2i/3$  et les ensembles de Julia étant structurellement stables ne changent pas. Par conséquent, à la limite, on retrouve le croisement de  $0$  avec  $1/4$  (à comparer avec le Chap. 7 de la Partie III).

**Exemple 2 :** On considère  $z \mapsto z^3 + z$ . Ce polynôme admet un seul point fixe parabolique de multiplicateur 1. Les points critiques sont tous deux attirés par ce point dans des pétales différents :  $1/4$  figure deux fois dans ce polynôme (qui réalise son croisement avec lui-même).

En considérant le déploiement  $Q_a : z \mapsto z^3 + az$ , pour  $a$  variant de  $3/2$  à  $1$ , on obtient des polynômes ayant deux points fixes attractifs dont les bassins sont adjacents au point fixe répulsif.  $Q_a$  réalise alors le croisement carré d'un polynôme de la grande cardioïde. Quand  $a$  s'approche de  $1$ , les points fixes attractifs deviennent de moins en moins attractifs et finissent par se confondre, et l'on obtient le croisement carré de  $1/4$ .



Figure 20 *Croisement du chou-fleur avec lui-même.*

### 16.1.2 Cas général

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes géométriquement finis. En les déformant un peu, on peut les approcher par des polynômes sous-hyperboliques  $(P_\mu)_{\mu \in ]0, \mu_0]}$  et  $(Q_\nu)_{\nu \in ]0, \nu_0]}$  respectivement (cf Théorème 4 de la Partie III). On peut effectuer leur croisement pour obtenir une famille continue  $\{R_{\mu, \nu}\}$ . En appliquant le Théorème 2 de la Partie III, on obtient le croisement voulu.

## 16.2 Sur les familles de croisements

On considère  $\tilde{\Lambda}$  et  $\tilde{M}$  deux surfaces de Riemann simplement connexes,  $(P_\lambda)_{\lambda \in \tilde{\Lambda}}$  et  $(Q_\mu)_{\mu \in \tilde{M}}$  deux familles analytiques de polynômes de degré fixé, définies à  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  près. Si un point répulsif appartient à un ensemble de Julia non connexe, on dira qu'il a pour nombre de rotation  $p/q$  s'il a un cycle de  $q$  rayons qui aboutit en ce point et si l'application de premier retour au voisinage de ce point fait permuter les rayons par une rotation combinatoire d'angle  $p/q$ .

On note alors  $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \in \pi_0(\{\lambda \in \tilde{\Lambda}, \exists \alpha_\lambda \text{ fixe répulsif pour } P_\lambda \text{ et de nombre de rotation } p/q\}), \\ M \in \pi_0(\{\mu \in \tilde{M}, \exists \alpha_\mu \text{ fixe répulsif pour } Q_\mu \text{ et de nombre de rotation } p/q\}), \end{array} \right.$

et  $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_\Lambda = \{\lambda \in \Lambda, K(P_\lambda) \text{ soit connexe}\}, \\ \mathcal{C}_M = \{\mu \in M, K(Q_\mu) \text{ soit connexe}\}. \end{array} \right.$

On suppose que ces derniers sont relativement compacts dans leur espace ambiant respectif.

On définit  $R_{\lambda, \mu}$  le croisement de  $P_\lambda$  et  $Q_\mu$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_M$ . En chaque point l'application qui, à un polynôme associe un point répulsif, est holomorphe et unique, et les croisements sont faits en respectant la combinatoire. De plus,  $R_{\lambda, \mu}$  vit dans un espace de polynômes de degré fixé et à  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  près.

Le résultat le plus général qu'on puisse obtenir est sans doute le suivant :

**Proposition 16.2.1** (i) Si  $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$  sont dans des composantes stables de  $\Lambda$  et  $M$  respectivement, alors le croisement est holomorphe au voisinage de  $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ .

(ii) Sinon, tout point d'accumulation  $R$  de  $R_{\lambda, \mu}$  quand  $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda_\infty, \mu_\infty)$  est le croisement de polynômes  $P$  et  $Q$  quasiconformément conjugués à  $P_{\lambda_\infty}$  et  $Q_{\mu_\infty}$  respectivement.

Soit  $(\lambda_\infty, \mu_\infty) \in \mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_M$  et  $(\lambda_n, \mu_n)$  une suite de  $\mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_M$  convergeant vers  $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ . Soit  $R$  un point d'accumulation de  $R_n$ .

▷ DÉMONSTRATION DE (i) : On note  $X$  et  $Y$  les composantes stables de  $P_{\lambda_\infty}$  et  $Q_{\mu_\infty}$  respectivement. On considère tout d'abord  $X'$  (resp.  $Y'$ ) l'ouvert dense de polynômes ayant mêmes relations critiques au sens de [MSS] (voir aussi Chap. 4, Partie II). Chaque composante de  $X'$  (resp.  $Y'$ ) est paramétrée par une variété holomorphe. Comme chaque espace est de dimension 1, et comme les  $X \setminus X'$  (resp.  $Y \setminus Y'$ ) représentent une singularité effaçable pour les applications conformes, on obtient des paramétrages sur  $X$  et  $Y$  holomorphes. En ce qui concerne l'espace des croisements, on peut décomposer l'espace

des déformations de  $R_{\lambda_\infty, \mu_\infty}$  en produit provenant de  $P_{\lambda_\infty}$  et  $Q_{\mu_\infty}$  (cf Proposition 12.5.6) : on obtient ainsi des paramétrages holomorphes avec des bases communes, ce qui permet d'obtenir, par composition, la dépendance holomorphe.

▷ DÉMONSTRATION DE (ii) : Cette preuve suit la méthode employée par B. Branner et N. Fagella pour démontrer la continuité de chirurgies dans [BF].

D'après la construction des croisements, les dilatations des applications quasiconformes dépendent essentiellement de la nature des points fixes  $\alpha_\lambda$  et  $\alpha_\mu$ . En effet, sur un voisinage de  $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ , les différents modules d'ouverture des ensembles de Julia remplis sont uniformément majorés, on peut donc trouver deux classes externes pour lesquelles la construction du croisement pourra être effectuée sur un voisinage produit de  $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ .

Il résulte du choix des classes externes que celui des extensions peut être fait de telle sorte que les dilatations soient uniformément majorées.

$$\forall n, \exists \begin{cases} \varphi_n : \text{vois}(K(P_n)) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_n \circ P_n = R_n \circ \varphi_n, \\ \psi_n : \text{vois}(K(Q_n)) \rightarrow \mathbb{C}, \psi_n \circ Q_n = R_n \circ \psi_n. \end{cases}$$

On peut alors appliquer les résultats de compacité des applications quasiconformes de dilatations uniformément majorées, en normalisant les polynômes (e.g. monique centré). En passant à la limite dans les semi-conjugaisons, on montre que  $R$  est le croisement de deux polynômes  $P$  et  $Q$  quasiconformément conjugués à  $P_{\lambda_\infty}$  et  $Q_{\mu_\infty}$ . ■

**Remarque.** Pour s'assurer de la continuité, il faut vérifier que la conjugaison peut être promue en application conforme, ce qui est rarement vrai, voir par exemple le Chap. III de [DH2].

### Proposition 16.2.2 (Conditions suffisantes pour la continuité)

(a) En plus des hypothèses faites dans l'introduction de ce paragraphe précédant la Proposition 16.2.1, on suppose que pour chaque famille de polynômes  $P_\lambda$  et  $Q_\mu$ , les espaces de modules associés soient contenus dans  $\Lambda$  et  $M$  respectivement. Alors les croisements varient continûment.

(b) On suppose qu'il existe une application holomorphe  $\mu(\lambda)$  et une famille analytique de polynômes  $(R_\nu)_{\nu \in N}$  telles que les croisements  $R_{\lambda, \mu(\lambda)}$  soient contenus dans  $N$  ; si  $N$  est de dimension complexe 1 alors  $\lambda \mapsto R_{\lambda, \mu(\lambda)}$  est continue.

(c) Si  $Q$  est fixé, et  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  vérifie (a), alors le croisement est continu.

DÉMONSTRATION. (a) D'après la Proposition 16.2.1, il suffit de vérifier la continuité pour des polynômes instables. En effet, si l'un des polynômes est stable, e.g.  $P_{\lambda_\infty}$ , on peut définir une composante holomorphe (de dimension 1), et il suffit de montrer que la seconde application à allure polynomiale de  $R$  est hybride équivalente à  $Q_{\mu_\infty}$ . Ceci découle du fait que  $Q_\infty$  est instable, donc unique dans  $\mathcal{C}_M$ , et quasiconformément conjugué à une restriction de  $R$ . Si les deux sont instables, l'argument ci-dessus permet aussi de conclure.

(b) De même, pour les composantes stables de  $R_\nu$ , on peut définir une application holomorphe (cf Proposition 16.2.1). Pour les autres polynômes, il suffit de remarquer que si  $R_{\lambda_\infty, \mu_\infty}$  est instable dans  $N$ , alors toute conjugaison quasiconforme avec un polynôme limite dans  $N$  implique que ces polynômes sont affinement conjugués.

(c) Il suffit de vérifier que  $Q$  est toujours dans la dynamique du croisement, ce qui est le cas puisque la conjugaison est hybride et que la base, *i.e.*  $K_Q$ , ne change pas. ■

**Proposition 16.2.3** *On suppose qu'il existe  $\lambda_0 \in \partial\Lambda \cap \overline{\mathcal{C}_\Lambda}$  géométriquement fini, et on fixe  $\mu \in \mathcal{C}_M$  pour que  $Q_\mu$  soit aussi géométriquement fini. Alors l'application  $\lambda \mapsto R_{\lambda,\mu}$  est continue en  $\lambda_0$  et vaut  $R_{\lambda_0,\mu}$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après le Théorème 4 de la Partie III, on peut déformer  $P_{\lambda_0}$  dans  $\mathcal{C}_\Lambda$  de façon  $J$ -équivalente. On note  $W$  cette composante stable. Elle est naturellement paramétrée par le multiplicateur du cycle attractif créé. Par suite, les bifurcations de  $W$  n'ont lieu qu'en des points paraboliques. A l'aide de l'inégalité de Pommerenke-Levin-Yoccoz (voir [Pel]), on en déduit que le diamètre des membres attachés à  $W$  tend vers zéro quand  $\lambda$  tend vers  $\lambda_0$  (voir [Hu] pour le cas de l'ensemble de Mandelbrot).

On détermine le croisement de  $P_{\lambda_0}$  par  $Q_\mu$ , en prenant la limite de  $R_{\lambda,\mu}$  pour  $\lambda \in W$ . Le multiplicateur paramètre aussi  $(R_{\lambda,\mu})_{\lambda \in W}$ , donc les bifurcations sont du même type que celles de  $W$ , et le diamètre des membres tend vers zéro quand on tend vers  $R_{\lambda_0,\mu}$ . La continuité induite par les multiplicateurs sur  $W$  se prolonge à  $\mathcal{C}_\lambda$ , car les membres de  $W$  et de son image se correspondent, et les limites de suites dans les membres de  $W$  se ramènent à celles de suites sur  $\overline{W}$ . ■

**Remarque.** Si on choisit  $\mu$  tel qu'il ait des propriétés similaires à  $\lambda_0$ , on pourra établir l'existence de leur croisement, mais on n'aura peu de chance d'obtenir la continuité par rapport aux deux variables (voir les contre-exemples de [DH2]).

### 16.3 Application au degré trois

Soit  $P_c : z \mapsto z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , la famille quadratique. On considère le croisement de  $P_0$  avec  $P_c$ ,  $c \in M$ .

Pour fixer les notations, on considère les polynômes de degré 3 ayant un point fixe superattractif. On a à faire à la famille  $Q_a : z \mapsto z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a$ . On note  $C_0(3) = \{a \in \mathbb{C}, K(Q_a) \text{ connexe}\}$ . Il s'agit de la famille étudiée par Faught dans sa thèse ([F]).

**Proposition 16.3.1** *L'ensemble  $M$  s'injecte deux fois dans  $C_0(3)$  par croisements.*

**DÉMONSTRATION.** On note  $\varphi_0$  l'application induite par les croisements. Il est clair que  $\varphi_0$  est injective, car deux valeurs différentes de  $c$  conduisent à des polynômes différents.

Si on cherche pour quelle(s) valeur(s) de  $a$ ,  $Q_a$  admet deux points fixes superattractifs, on obtient exactement deux valeurs opposées :  $\pm i$ . En effet, on peut remarquer que  $Q_a$  et  $Q_{-a}$  sont conjugués par  $z \mapsto -z$ . Par conséquent, en fixant un point base, on peut obtenir deux fonctions  $\varphi_0$ .

En appliquant la Proposition 16.2.2, on en déduit que  $\varphi_0$  est continue sur  $M \setminus \{1/4\}$ , et par la Proposition 16.2.3,  $\varphi_0$  admet un prolongement continu à  $M$  en un homéomorphisme. ■

En fait, la Proposition 16.2.2 permet de montrer que tant que l'on considère des croisements en des points répulsifs, on a une dépendance continue par rapport aux paramètres, et  $\varphi_0$  se prolonge en une injection continue  $\varphi$  de  $M \setminus \{1/4\} \times M \setminus \{1/4\}$  dans l'ensemble des polynômes cubiques à ensemble de Julia connexe.

On note  $\varphi_c$  la restriction de  $\varphi$ , i.e. des croisements de  $P_c$  par  $M \setminus \{1/4\}$ ; si  $c$  est géométriquement fini alors  $\varphi_c$  se prolonge à  $M$ .

On peut aussi étudier  $\varphi_{1/4}$ , définie sur les polynômes géométriquement finis; cette application est à valeur dans la famille  $z \mapsto z + bz^2 + z^3$ . Bien que l'on puisse "voir" qu'il y a bien deux copies de  $M$  sur le plan des paramètres qui doivent correspondre aux croisements en  $\beta$ , il est difficile de définir un homéomorphisme, parce que la trace du second polynôme dans le croisement n'est pas à allure polynomiale: la manière de reconnaître les croisements ne semble pas impliquer la continuité par rapport aux paramètres. ■

**Remarque.** On peut aussi montrer que pour tout membre  $M_{p/q}$  de  $M$ ,  $M_{p/q} \setminus \{racine\} \times M_{p/q} \setminus \{racine\}$  s'injecte par croisements au-dessus du point fixe répulsif de nombre de rotation  $p/q$  (voir aussi [EY]).

# Bibliographie

- [Ah1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, 1966.
- [Ah2] L. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, 1973.
- [Ber] L. Bers, *Finite-dimensional Teichmüller spaces and generalizations*, Bull. of the AMS, vol. 5, pp. 131-172, 1981.
- [BR] L. Bers & H.L. Royden, *Holomorphic families of imjections*, Acta Math., vol. 157, pp. 259-286, 1986.
- [Beu] A. Beurling, *Collected works*, Birkäuser, 1989.
- [Bi1] B. Bielefeld, *Changing the order of critical points of polynomials using quasiconformal surgery*, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1989.
- [Bi2] B. Bielefeld (editor), *Conformal dynamics problem list*, preprint IMS at Stony Brook, 1990.
- [Bow] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. No. 470, 1975.
- [BD] B. Branner & A. Douady, *Surgery on complex polynomials*, proc. symp. of dyn. syst., Mexico (1986), Lecture Notes in Math. No. 1345, pp. 11-72, 1988.
- [BF] B. Branner & N. Fagella, *Homeomorphisms between limbs of the Mandelbrot set*, preprint MSRI, 1995.
- [BH] B. Branner & J.H. Hubbard, *The iteration of cubic polynomial, part II: Patterns and parapatterns*, Acta Math., vol. 169, pp. 229-325, 1992.
- [Br] A.D. Brjuno, *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*, Dokl. Akad. Nauk. URSS, vol. 165, pp. 987-989, 1965.
- [Bu] X. Buff, *Points fixes de renormalisation*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, 1996.
- [BS] S. Bullett & P. Sentenac, *Ordered orbits of the shift, square roots and the devil's staircase*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 155, pp. 451-481, 1994.
- [CG] L. Carleson & T.W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

- [CJY] L. Carleson, P. Jones & J.C. Yoccoz, *Julia & John*, Bol. Soc. Brasil. Mat., vol. 25, pp. 1-30, 1994.
- [CJS] G. Cui, Y. Jiang & D. Sullivan, *On the dynamics of geometrically finite maps*, preprint 1996.
- [Da] G. David, *Solutions de l'équation de Beltrami avec  $\|\mu\|_\infty = 1$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math., 13, pp. 25-70, 1988.
- [Do1] A. Douady, *Systèmes dynamiques holomorphes*, Sémin. Bourbaki No. 499, nov. 1982.
- [Do2] A. Douady, *Algorithms for computing angles in the Mandelbrot set*, in Chaotic Dynamics and Fractals, Atlanta 1985, Notes Rep. Math. Sci. Engrg., vol. 2, pp. 155-168, 1986.
- [Do3] A. Douady, *Applications de la chirurgie holomorphe*, proc. Int. Congr. Math., Berkeley, pp. 724-738, 1986.
- [Do4] A. Douady, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, Sémin. Bourbaki No. 677, 1986-87.
- [Do5] A. Douady, *Descriptions of compact sets of  $\mathbb{C}$* , Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, 1991), pp. 429-465, 1993.
- [Do6] A. Douady, *Prolongements de mouvements holomorphes [d'après Ślodkowski et autres]*, Sémin. Bourbaki No. 775, nov. 1993.
- [Do7] A. Douady, Notes manuscrites.
- [DE] A. Douady & C.J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math., vol. 157, pp. 23-48, 1986.
- [DH1] A. Douady & J.H. Hubbard, *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*, pub. math. d'Orsay 84-02 et 85-05, 1984/85.
- [DH2] A. Douady & J.H. Hubbard, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. ENS Paris, vol. 18, pp. 287-343, 1985.
- [DH3] A. Douady & J.H. Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational functions*, Acta Math., vol. 171, pp. 263-297, 1993.
- [EM] C.J. Earle & C.T. McMullen, *Quasiconformal isotopies*, proc. MSRI "Holomorphic functions and moduli I" (1986), pp. 143-154, Berkeley, 1988.
- [EY] A. Epstein & M. Yampolsky, *Geography of the cubic connected locus I: intertwining surgery*, preprint IMS at Stony Brook, 1996.
- [dF] A. de Faria, *Asymptotic rigidity of scaling ratios for critical circle mappings*, preprint IMS at Stony Brook, 1996.
- [F] D. Faught, *Local connectivity in a family of cubic polynomials*, Ph.D. Thesis, Cornell, 1992.

- [Ge] F.W. Gehring, *Characterizations of quasidisks*, preprint 1997.
- [Gh] E. Ghys, *Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 298, 1984.
- [Go] L.R. Goldberg, *Fixed points of polynomial maps. I Rotation subsets of the circle*, Ann. Sci. ENS Paris, vol. 25, pp. 679-685, 1992.
- [He] M. Herman, *Are there critical points on the boundary of a Siegel disk?*, Comm. Math. Phys, vol. 99, pp. 593-612, 1985.
- [Hu] J.H. Hubbard, *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.C. Yoccoz*, Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, 1991), pp. 467-511, 1993.
- [HS] J.H. Hubbard & D. Schleicher, *The spider algorithm*, Complex dyn. syst. (Cincinnati, 1994), Proc. Symp. Appl. Math. vol. 49, pp. 155-180, 1994.
- [Jo] P. Jones, *On removable sets for Sobolev spaces in the plane*, Essays on Fourier analysis in honour of E. Stein (Princeton 1991), Princeton Math. Series 42, pp. 250-267, 1995.
- [La1] P. Lavaurs, *Une description combinatoire de l'involution définie par  $M$  sur les rationnels à dénominateur impair*, C.R.A.S., vol. 303, pp. 143-146, 1986.
- [La2] P. Lavaurs, *Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points paraboliques*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1989.
- [Lev] S. Levy, *Critically finite rational maps*, Ph.D. Thesis, Princeton, 1985.
- [LV] O. Lehto & K. Virtanen, *Quasiconformal maps in the plane*, Springer, 1973.
- [Ly1] M. Lyubich, *On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial*, preprint IMS at Stony Brook, 1991.
- [Ly2] M. Lyubich, *Feigenbaum-Coulet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture*, preprint IHES, 1996.
- [Ly3] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials I & II*, Acta Math., vol. 178, pp. 185-297, 1997.
- [Mc1] C.T. McMullen, *Automorphisms of rational maps*, proc. MSRI "Holomorphic functions and moduli I" (1986), pp. 31-60, Berkeley, 1988.
- [Mc2] C.T. McMullen, *Complex dynamics and renormalization*, Ann. of Math. Studies, No. 134, Princeton, 1994.
- [Mc3] C.T. McMullen, *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, Ann. of Math. Studies, No. 142, Princeton, 1996.
- [Mc4] C.T. McMullen, *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*, preprint, 1996.

- [Mc5] C.T. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics I & II*, preprint, 1997.
- [McS] C.T. McMullen & D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphism & dynamics III: the Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*, preprint, 1996.
- [Mk1] P. Makienko, *Unboundedness of hyperbolic components in parameter space*, ICTP Trieste preprint IC/93/84, 1993.
- [Mk2] P. Makienko, *Pinching and Plumbing*, ICTP Trieste preprint, 1993.
- [Mk3] P. Makienko, *Totally disconnected Julia sets*, Berkeley preprint 1995-042, 1995.
- [MSS] R. Mañé, P. Sad & D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. ENS Paris, pp. 193-217, 1983.
- [Ms] B. Maskit, *Kleinian groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [Mi] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures*, preprint IMS at Stony Brook, 1990.
- [Mo] R.L. Moore, *Concerning upper semi-continuous collections of compacta*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 27, pp. 416-428, 1925.
- [Pe1] C.L. Petersen, *On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality*, Erg. Th. & Dyn. Sys., vol. 13, pp. 785-806, 1993.
- [Pe2] C.L. Petersen, *Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation*, Acta Math., vol. 177, pp. 163-224, 1996.
- [Pe3] C.L. Petersen, *No elliptic limits for quadratic maps*, to appear in Erg. Th. & Dyn. Sys.
- [Pi] K. Pilgrim, *Noncompactness of hyperbolic components*, preprint, 1993.
- [PM] R. Perez-Marco, *Topology of Julia sets and hedgehogs*, prépublication d'Orsay, 1994.
- [PTL] K. Pilgrim & Tan L., *Surgery on postcritically finite rational maps by blowing up an arc*, à paraître dans Erg. Th. & Dyn. Sys.
- [Po] A. Poirier, *Hubbard Trees*, preprint IMS at Stony Brook, 1994.
- [Ru] D. Ruelle, *Repellers for real analytic maps*, Erg. Th. and Dyn. Syst., vol. 2, pp. 99-107, 1982.
- [Sh1] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. de l'ENS, vol. 20, pp.1-29, 1987.
- [Sh2] M. Shishikura, *On a theorem of M. Rees for the matings of polynomials*, preprint IHES, juin 1990.
- [Sh3] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, preprint IMS at Sony Brook, 1991.

- [STL] M. Shishikura & Tan L., *A family of cubic rational maps & matings of cubic polynomials*, preprint.
- [Sl] Z. Ślodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proc. AMS, vol. 111, pp. 347-355, 1991.
- [St] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Series No. 30, 1970.
- [SN] S. van Strien & T. Nowicki, *Polynomials maps with a Julia set of positive measure*, preprint IMS at Stony Brook, 1994.
- [Su1] D. Sullivan, *Conformal dynamical systems*, Lecture Notes in Math., No. 1007, pp. 725-752, 1984.
- [Su2] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou/Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math., vol. 122, pp. 401-418, 1985.
- [Su3] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology and geometry*, proc. Int. Congr. Math., Berkeley, pp. 1216-1228, 1986.
- [Su4] D. Sullivan, *Bounds, quadratic differentials and renormalization conjectures*, Math. in the 21<sup>st</sup> century: 1988 Centennial Symp., pp. 417-466, 1992.
- [ST] D. Sullivan & W.P. Thurston, *Extending holomorphic motions*, Acta Math., vol. 157, pp. 243-257, 1986.
- [Sw] G. Świątek, *Rational rotation numbers for maps of the circle*, Comm. Math. Phys, vol. 119, pp. 109-128, 1988.
- [TL1] Tan L., *Accouplements de polynômes complexes*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, 1987.
- [TL2] Tan L., *Branched coverings and cubic Newton maps*, Fund. Math., vol. 154, pp. 207-260, 1997.
- [TLY] Tan L. & Y. Yongcheng, *Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps*, Science in China, vol. 39, pp. 39-47, 1996.
- [Th] W.P. Thurston, *The combinatorics of iterated rational maps*, Princeton preprint, 1983.
- [Wl] P. Willumsen, *Holomorphic surgery on the Basilica*, preprint.
- [Wt] B. Wittner, *On the bifurcation loci of rational maps of degree two*, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1986.
- [Yo] J.C. Yoccoz, *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque No. 231, 1995.