

THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

PIERRE DEL CASTILLO

Étude de champs critiques en théorie de Ginzburg-Landau, 2000

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



63616

ORSAY
n^o d'ordre : 6396

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Pierre DEL CASTILLO

Sujet : Etude de champs critiques en théorie de Ginzburg-Landau

Soutenue le : 20 Décembre 2000 devant la Commission d'examen

Mme	Catherine BOLLEY	
MM.	Thierry GALLAY	
	Bernard HELFFER	Directeur
	Etienne SANDIER	Rapporteur
	Jean-Claude SAUT	Président

Rapporteurs

Etienne SANDIER
Peter STERNBERG

Remerciements

En premier lieu, il me faut évoquer les raisons qui m'ont poussé à reprendre mes études, puis à accomplir ce travail lorsque la chance m'en a été donnée.

Se retrouver à nouveau dans le cadre de l'Université, lieu par excellence très propice à la réflexion, terrain fertile pour effectuer des rencontres, théâtre d'échanges et de confrontation d'idées, justifiait en grande partie mon retour dans le milieu étudiant.

Puis, lorsque j'ai pu entreprendre ce travail, je m'étais fixé divers objectifs : d'une part, tenter de découvrir les différents aspects de la recherche en mathématiques, d'autre part évoluer dans un nouveau milieu, une nouvelle communauté.

Mes interrogations vis-à-vis de la recherche étaient multiples.

Qu'est-ce que faire de la recherche en mathématiques, quelles qualités intellectuelles, psychologiques requiert-elle, quels sont les hommes et femmes qui la composent ?

A des degrés divers, j'ai aujourd'hui répondu à ces interrogations et levé le voile sur les mystères qui entourent cette activité, qui fascine tant, à juste titre.

Cette expérience m'aura donc beaucoup apporté, et cette période se sera révélée comme étant certainement la plus enrichissante de mon existence, à ce jour. Elle m'a assurément marqué d'une empreinte indélébile et influencée dans des proportions considérables, bien au-delà de l'apport scientifique : elle aura eu des répercussions sur bien des aspects de ma vie. Au cours de cette période, j'aurais pu bénéficier d'une liberté telle que j'ai pu élargir ma réflexion à d'autres domaines de connaissance. Ma pensée s'en est trouvée transformée, fortement enrichie, le champ de ma conscience s'est considérablement élargi, et les perspectives qui s'ouvrent à moi désormais sont exaltantes ...

La recherche est une école très formatrice, elle m'a permis d'améliorer mon organisation, d'affiner mes méthodes de travail, de changer mes habitudes de l'esprit. Ainsi, je suis devenu autonome, et je crois que dorénavant, je serais plus créatif, et qu'en toute chose, je m'évertuerai à me montrer plus fécond. Je garderai donc un grand souvenir de ces années, absolument décisives pour mon avenir, dans l'aventure intellectuelle et spirituelle qui est mienne.

C'est donc, Ô combien sincère que j'exprime toute ma gratitude à Bernard Helffer d'avoir accepté de diriger mes travaux de recherche.

Je le remercie, pour l'expérience qu'il m'a apportée, les conseils qu'il m'a prodigués, et la grande disponibilité dont il a fait preuve tout au long de ces années.

Je lui suis très reconnaissant d'avoir compris mon projet. Bernard Helffer m'aura permis de progresser dans de nombreux domaines, d'acquérir par exemple davantage de rigueur et de précision. Travailler aux côtés d'un homme qui vibre de la sorte, dont la flamme, la passion est peu commune, qui donne le meilleur de lui-même pour sa discipline, a été une expérience unique, que je ne peux malheureusement décrire ici en détails.

Me diriger n'était pas toujours chose aisée, je le remercie également pour toutes les qualités humaines dont il a fait preuve au cours de ces années, notamment sa patience.

Grâce à lui, je possède aujourd'hui une idée plus exacte de ce qui constitue la recherche en mathématiques.

Je remercie Etienne Sandier et Peter Sternberg qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et qui ont bien voulu le rapporter.

Catherine Bolley, Thierry Gallay, Etienne Sandier, Jean-Claude Saut me font l'honneur d'être membre de mon jury, je les en remercie très vivement.

Je remercie Fabrice Béthuel et Gilles Lebeau, pour m'avoir accueilli dans le laboratoire d'analyse numérique et EDP, et orienté judicieusement au moment décisif.

Je remercie Catherine Bolley et Amandine Aftalion, pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues autour des équations de Ginzburg-Landau.

Je remercie Etienne Fouvry et Danielle Pesenti qui ont pris ma cause à coeur et qui ont oeuvré afin que je puisse terminer mon travail dans les meilleures conditions.

Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire EDP et analyse numérique, et notamment Séraphin, Maxime et Farid, qui ont souvent répondu à mes questions, pourtant pas toujours des plus lumineuses.

Je remercie Danielle Le Meur pour sa gentillesse et la disponibilité dont elle fait preuve quotidiennement.

Je remercie également Régis, Laurent, Raphael, Mourad, Luc, Emmanuel, Jérôme, Bertrand, Fabrice, Thomas pour tous les bon moments que nous avons pu passer ensemble. Je ne peux évoquer ici tous ceux dont la rencontre fut pour moi une source d'enrichissement, aussi bien sur le plan humain que sur le plan intellectuel : la liste serait bien trop longue. Si je ne peux les évoquer, je tiens néanmoins à les remercier, je crois que la plupart se reconnaîtront.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont accepté de répondre à mon questionnaire sur la recherche : leurs témoignages m'ont beaucoup apporté. Je remercie notamment Stephan et Vincent qui ont fourni une réponse très développée et m'ont donné un témoignage très intéressant de leur propre expérience.

Je remercie Nadine pour le soutien et la sérénité qu'elle m'a apporté au cours de ces derniers mois. Elle aura grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

J'ai souvent trouvé l'inspiration et fait avancer ma thèse alors que je me trouvais au sein de ma chaleureuse famille espagnole. C'est souvent sur les hauteurs d'Alsa que les choses m'apparaissaient tout à coup plus simples et plus claires. Muchas gracias a todos, querida familia ! El ambiente de amor que se encuentra en vuestra casa me ha llenado el alma.

Je remercie mes parents ainsi que mes grand-parents et mes soeurs.

La plupart des feux allumés en moi, toutes les passions qui sont les miennes, sont le fruit de leur éducation et d'une enfance merveilleuse ... C'est également grâce à eux que j'ai pu vivre cet étonnant périple et cette belle période.

ABSTRACT :

In superconductivity, the states of a material submitted to an exterior magnetic field are described as minima of a functional, introduced by Ginzburg-Landau.

In the particular case of an infinite film of thickness d , physical simplifications permit to reduce to the study of a functional

$$(f, A) \mapsto \epsilon_d(f, A) := \int_0^d [\frac{1}{2}f^4 - f^2 + \kappa^{-2}(f')^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2] dx,$$

defined on the pairs (f, A) de $H^1([0, d])^2$ such that $A(d) = 0$.

Here, κ is the Ginzburg-Landau parameter, reflecting the properties of the material, and h is the intensity of the exterior magnetic field.

Furthermore, when d is large, the physicists usually approximate by a limiting problem on the interval $[0, +\infty[$, putting $d = +\infty$ in the definition of the functional ϵ_d after a renormalization obtained by adding the term $(\frac{1}{2} - h^2)d$.

The minimum of the functional ϵ_d satisfy an Euler equation denoted by $(GL)_d$, which is called in this context Ginzburg-Landau equation. We are interested in this thesis by the discussion of the properties of these minima in function of the parameters κ , h and d of the problem. In particular, the analysis shows that there properties change dramatically for some critical value of h . We consider the superheating field, defined as the supremum of the set of the h 's such that there exist positives solutions of $(GL)_d$.

Our thesis is mainly devoted to the analysis of the case $d = +\infty$ in the regime κ small. We show the existence and uniqueness of the solutions of the problem $(GL)_\infty$ for fixed $f(0)$, and for all κ . Furthermore, we show the existence of a non minimizing solution to the problem $(GL)_d$ for κd large and when the exterior magnetic field h is close to the superheating field.

We construct as $\kappa \rightarrow 0$ a formal solution of the problem $(GL)_\infty$ equation which leads to a formal expansion of the corresponding superheating field. We then associate to this formal solution a subsolution and this leads at an accurate version of the De Gennes-Parr Formula.

KEY WORDS :

Nonlinear PDE's, Ginzburg-Landau equation, superconductivity, critical field.

Codes MSC : 34E05, 35B50, 34A34, 35A05

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Présentation physique du problème	3
1.2	Résultats mathématiques	6
1.2.1	Chapitre II	6
1.2.2	Chapitre III	7
1.2.3	Chapitre IV	9
1.2.4	Chapitre V	10
2	Existence et unicité des solutions des équations de Ginzburg-Landau sur un espace semi-infini	17
2.1	Introduction	17
2.2	Propriétés des solutions de $(GL)_d^s$ et $(GL)_\infty$	19
2.2.1	Propriétés des solutions symétriques sur $[0, d]$	19
2.2.2	Propriétés des solutions de $(GL)_\infty$	19
2.3	Unicité de la solution du problème $(GL)_\infty$	20
2.3.1	Rappel	20
2.3.2	Monotonie de la solution de $(GL)_\infty$ à f_0 fixé	21
2.3.3	Preuve de la proposition 2.3.1	24
2.4	Existence d'une solution sur $[0, d]$	24
2.5	Existence d'une solution de $(GL)_\infty$ à f_0 fixé	27
2.5.1	Estimations uniformes	27
2.5.1.1	Quelques rappels	27
2.5.1.2	Majoration de $A'(0)$	28
2.5.1.3	Contrôle des normes $\ 1 - f\ _{H^2([0, d])}$ et $\ A\ _{H^2([0, d])}$	32
2.5.2	Passage à la limite	35
2.6	Problèmes ouverts et perspectives	37
3	Existence d'un développement formel du champ de surchauffe quand κ tend vers zéro	41
3.1	Introduction	41
3.2	Construction d'une solution formelle	45
3.2.1	Construction de la solution extérieure.	45
3.2.2	Construction de la solution intérieure	48

3.2.3	Définition du raccordement des solutions intérieure et extérieure .	54
3.2.4	Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa)$. . .	58
3.3	Existence d'un développement formel du champ de surchauffe en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2	60
3.3.1	Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^2)$. .	60
3.3.2	Calcul d'un développement formel à l'ordre 2 du champ de surchauffe	61
3.3.3	Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^3)$. .	62
3.3.3.1	Détermination des coefficients de κ^2 , $\kappa^3 x^3$, $\kappa^3 x^2$ et $\kappa^3 x$.	62
3.3.3.2	Calcul des réels $\alpha_{1,3}$ et $\beta_{1,3}$	63
3.3.3.3	Raccordement des solutions.	65
3.4	Raccordement à tout ordre	66
3.4.1	Conditions de raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$	66
3.4.2	Notion de solutions formelles des équations de Ginzburg-Landau .	70
3.5	Construction d'un développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe	72
3.5.1	Maximisation d'une série formelle ayant un terme principal admettant un maximum non dégénéré	72
3.5.2	Un premier procédé pour définir le maximum d'une série formelle	73
3.5.3	Un second procédé pour définir le maximum d'une série formelle .	76
3.5.4	Conclusion	81
3.6	Algorithme de calcul du champ de surchauffe.	82
3.6.1	Détermination pratique de $t(\kappa)$	82
3.6.2	Programmation de l'algorithme	83
3.6.3	Résultats numériques	83
3.6.4	Comparaison avec les résultats obtenus par Di Bartolo, Dolgert et Dorsey	84
3.7	Note sur une conjecture due à H. J. Fink, D. S. McLachlan et B. Rothberg-Bibby	85
3.8	Problèmes ouverts et perspectives	86
4	Existence de solutions de $(GL)_d^s$	89
4.1	Introduction	89
4.2	Existence et localisation d'une solution de $(GL)_d^s$	90
4.2.1	Construction d'une sous-solution	90
4.2.2	Localisation d'une solution de $(GL)_d^s$	100
4.3	Application d'un théorème de min-max	102
4.3.1	La fonctionnelle ϵ_d vérifie la condition de Palais-Smale sur C_α . .	105
4.3.2	Preuve du théorème 4.1.2	109
4.4	Problèmes ouverts et perspectives	112

5	Construction d'une sous-solution des équations de Ginzburg-Landau basée sur l'existence de solutions formelles de ces équations	115
5.1	Construction de Van Dyke et objectifs	115
5.1.1	Introduction	115
5.1.2	La solution de Van Dyke	116
5.1.3	Présentation des objectifs	121
5.2	Sous-solution et construction de la solution de Van Dyke modifiée. . . .	122
5.2.1	Présentation de la sous-solution	122
5.2.2	Enoncé du théorème principal	126
5.3	Minoration de A_α^{vdm}	127
5.3.1	Présentation du problème	127
5.3.2	Approximation dans la zone intérieure	127
5.3.3	Approximation dans la zone extérieure	137
5.3.4	Démonstration de la proposition 5.3.1	141
5.4	La fonction f_α est une sous-solution	142
5.4.1	Estimation de l'expression $-\kappa^{-2}f''_\alpha - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$	142
5.4.1.1	Préliminaires	142
5.4.1.2	Estimation dans la région $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$	144
5.4.2	Preuve du théorème 5.2.3	148
5.4.2.1	Etape 1: Obtention du signe dans un intervalle de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$	148
5.4.2.2	Etape 2: Obtention du signe dans la région intérieure.	152
5.4.2.3	Bilan des contraintes obtenues	154
5.5	Problèmes ouverts et perspectives	154

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation physique du problème

Cette thèse porte sur l'étude d'un modèle de physique des supraconducteurs.

La supraconductivité de certains métaux est caractérisée à très faible température par la disparition de la résistance électrique et l'expulsion du champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$ du métal. Un bon modèle pour les phénomènes de transition de phase est la théorie de Ginzburg-Landau, qui décrit les propriétés électromagnétiques du matériel par la donnée d'un potentiel magnétique A ($H = \text{curl } A$ étant le champ magnétique) et une fonction à valeur complexe ψ . Le réel $|\psi|^2$ représente une probabilité de présence. Quand l'échantillon est entièrement normal, $|\psi| \equiv 0$ et le champ magnétique à l'intérieur du matériel est égal au champ magnétique extérieur. D'autre part, quand l'échantillon est entièrement supraconducteur, $|\psi| \equiv 1$ et le champ magnétique à l'intérieur du métal est identiquement nul. Dans la théorie de Ginzburg-Landau, les états de l'échantillon sont complètement déterminés par les minimas d'une énergie qui ne dépend que de ψ et de $\vec{A}$. Dans le cas d'une plaque, on peut décrire le phénomène physique par l'introduction d'une fonctionnelle qui est définie sur $(\psi, \vec{A}) \in H^1(V) \times H^1(V; \mathbb{R}^3)$ où $V =]-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}[\times \Omega$, Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, par :

$$\Theta(\psi, \vec{A}) = \int_V \alpha |\psi(x)|^2 + \beta |\psi(x)|^4 dx + \frac{1}{2m} \int_V |(-i\hbar \nabla - 2e\vec{A})\psi|^2 dx + \frac{1}{2\theta} \int_V |\vec{H}(x) - \vec{H}_e|^2 dx, \quad (1.1)$$

où $\alpha, \beta, m, e, \theta$ sont des constantes qui dépendent de la température. Seul nous intéresse ici le cas où α est strictement négatif et les autres constantes sont positives.

Dans le cas où l'échantillon est une plaque infinie d'épaisseur constante, comprise entre les plans $x = -d$ et $x = d$, il est classique de supposer que le champ magnétique extérieur h est tangent à l'échantillon, donc que $h = (0, 0, h)$. Les physiciens affirment que c'est avantageux énergétiquement. De plus, on suppose alors que ψ et $\vec{A}$ sont uniformes dans les directions y et z . On peut alors choisir la jauge suivante : $\psi = f(x)$, fonction d'une variable réelle, et $\vec{A} = A(x)e_y$, où e_y est le vecteur unitaire le long de la direction

y. Dans ce cas, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau représentant l'énergie est donnée, après renormalisation, par

$$\bar{\epsilon}_d(f, A) = \int_{-d}^d (\kappa^{-2}(f')^2 + (A' - h)^2 + f^2 A^2 + \frac{f^4}{2} - f^2) dx.$$

Le paramètre sans dimension κ est appelé le paramètre de Ginzburg-Landau. Les valeurs de κ déterminent le type de supraconducteur. κ petit décrit ce qui est connu sous le nom de supraconducteur de type 1 et κ grand correspond aux supraconducteurs de type 2. Plus précisément, pour un supraconducteur de type 1, il existe un champ magnétique critique h_c tel que si $h < h_c$, le matériel est entièrement supraconducteur. Cet état où $|f| \approx 1$ est appelé l'état Meissner et les solutions associées de (G.L.) solutions Meissner. Si $h > h_c$, il n'y a plus de supraconductivité et le matériel est dit dans un état normal, c'est-à-dire que $f \equiv 0$ et $A' \equiv h$.

Pour des supraconducteurs de type 2, la transition de phase est différente, et il y a deux valeurs critiques pour le champ, h_{c1} et h_{c2} : pour $h < h_{c1}$, le champ magnétique extérieur est expulsé de l'échantillon, et il se produit un effet de Meissner comme pour les supraconducteurs de type 1. Mais quand h croît depuis h_{c1} la supraconductivité n'est pas détruite, puisque la phase supraconductrice et la phase normale coexistent sous la forme de filaments et de vortex : un vortex est une zone de diamètre ξ , au centre de laquelle f s'annule. Puis, lorsque h croît, les vortex deviennent plus nombreux jusqu'à ce que la valeur critique h_{c2} soit atteinte, valeur pour laquelle la supraconductivité est détruite. Pour $h > h_{c2}$, il n'y a pas supraconductivité, et le matériel est dit dans un état normal.

Nous étudierons particulièrement ici les solutions symétriques, c'est-à-dire les couples (f, A) tels que f est paire et A impaire. Sous cette hypothèse, nous réduisons notre étude à l'intervalle $] -d, 0]$, puis nous renvoyons le domaine d'intégration intervenant dans la définition de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sur $]0, d[$ par translation. La fonctionnelle réduite ϵ_d ainsi obtenue est alors définie par :

$$\epsilon_d(f, A) = \int_0^d [\frac{1}{2}f^4 - f^2 + \kappa^{-2}(f')^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2] dx, \quad (1.2)$$

sur les paires (f, A) de $H^1(]0, d])^2$ telles que $A(d) = 0$.

Un point critique de ϵ_d satisfait les équations de Ginzburg-Landau données par

$$\begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + f A^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \\ -A'' + A f^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A'(0) = h, \quad A(d) = 0. \quad (1.4)$$

Dans tous les chapitres qui suivent, lorsque nous ferons allusion aux solutions $(f, A; h)$ de (1.3) vérifiant les conditions (1.4), nous parlerons de solutions du problème $(GL)_d^s$.

Nous introduisons la notation suivante, utilisée dans tous les chapitres qui suivent.

Notation 1.1.1 *Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.*

Quand l'épaisseur du film est grande, (dans le sens où κd est grand), et que l'on ne considère que des solutions symétriques, on approxime par un modèle limite, légèrement différent, qui a été introduit par V. L. Ginzburg [14] et est appelé actuellement le modèle supraconducteur sur un demi-espace.

Pour obtenir formellement le problème limite sur l'intervalle $[0, +\infty[$, nous posons $d = +\infty$ dans la définition de la fonctionnelle (1.2) après une renormalisation obtenue en ajoutant le terme $(\frac{1}{2} - h^2)d$ (voir [5] ou [8]). Nous obtenons alors la fonctionnelle définie sur l'ensemble des couples (f, A) , tels que $1 - f \in H^1(\mathbb{R}^+)$ et $A \in H^1(\mathbb{R}^+)$, par :

$$\epsilon_\infty(f, A) = \int_0^\infty (\kappa^{-2}(f')^2 + (A')^2 + f^2 A^2 + \frac{(1 - f^2)^2}{2}) dx + 2hA(0) \quad (1.5)$$

où $h \in [0, +\infty[$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

Par ce procédé, nous éliminons les solutions normales (exclues par la condition $(1 - f) \in H^1(\mathbb{R}^+)$), et faisons jouer un rôle particulier aux solutions positives en imposant la condition $f \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow \infty$. Nous éliminons également les solutions comportant des vortex, qui sont analysées dans un contexte proche dans [3]. Une étude plus approfondie a été menée sur le modèle de Ginzburg-Landau bi-dimensionnel par S. Serfaty, dans [24] et [26], puis par E. Sandier et S. Serfaty dans [23].

Une condition nécessaire pour que le couple (f, A) soit un point critique de ϵ_∞ est qu'il soit solution des équations de Ginzburg-Landau :

$$\begin{cases} -\kappa^2 f'' - f + f^3 + f A^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ -A'' + A f^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.6)$$

avec les conditions aux limites :

$$f'(0) = 0, \quad A'(0) = h, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0. \quad (1.7)$$

Posons $H = A'$. On obtient le nouveau système pour le triplet (f, A, H) dans $(1 - H^1(\mathbb{R}^+)) \times (H^1(\mathbb{R}^+))^2$:

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 \\ -A'' + A f^2 = 0 \\ H = A' \end{cases} \quad (1.8)$$

avec les conditions aux limites :

$$f'(0) = 0, \quad H(0) = h, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0. \quad (1.9)$$

Introduisons l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^+$ constitué des réels positifs h tels qu'il existe une solution au problème (1.8) et (1.9).

$$E = \{h \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \exists (f, A, H) \text{ sol. de (1.8) et (1.9)}\}. \quad (1.10)$$

C. Bolley et B. Helffer ont montré d'une part que E est un intervalle borné, de la forme $[0, h^+)$, et que, d'autre part, de tels f sont toujours strictement positifs. (voir [7], proposition 2.1)

Définition 1.1.2 *Le champ de surchauffe, noté $h^{sh}(\kappa)$, est défini comme étant la borne supérieure de l'intervalle E .*

Dans tous les chapitres qui suivent, lorsque nous ferons allusion aux solutions $(f, A; h)$ de (1.6) vérifiant les conditions (1.7), nous parlerons de solution du problème $(GL)_\infty$.

1.2 Résultats mathématiques

1.2.1 Chapitre II

Dans le second chapitre, nous allons en premier lieu rappeler brièvement certaines propriétés des solutions de $(GL)_\infty$ et de $(GL)_d^3$, utiles dans les démonstrations des théorèmes établis dans les chapitres qui suivent.

Puis nous nous intéressons à la question de l'existence et de l'unicité d'un triplet $(f, A; h)$ solution du problème $(GL)_\infty$ et vérifiant de plus la condition $f(0) = f_0$, $f_0 \in]0, 1]$ donné. Précisément, nous établissons le théorème

Théorème 1.2.1 *Pour tout $\kappa > 0$, et pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe une unique solution $(f, A; h)$ de $(GL)_\infty$ telle que*

$$f(0) = f_0.$$

Afin d'établir le théorème 1.2.1, nous procédons en deux étapes. Sur une suggestion de C. Bolley, nous montrons dans un premier temps l'unicité de la solution en nous appuyant sur un principe de comparaison utilisé par Kwong dans [20]. Pour montrer l'existence d'une solution, nous étudions l'existence des solutions du système (1.3) avec les conditions aux limites

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A(d) = 0, \quad (1.11)$$

où $f_0 \in]0, 1[$.

Nous montrons que, quelque soit $f_0 \in]0, 1]$, ce problème admet une solution (f_d, A_d, h_d) , avec $f_d > 0$, puis nous extrayons des sous-suites de (f_d, A_d, h_d) qui convergent sur tout intervalle borné lorsque d tend vers l'infini. Nous obtenons ainsi l'existence d'une solution de $(GL)_\infty$ telle que $f(0) = f_0$. La difficulté du passage à la limite réside dans l'obtention d'estimations a priori des normes dans $H^2(]0, d[)$ des fonctions $1 - f_d$ et A_d . Pour obtenir ces estimations, nous sommes conduits à montrer une estimation a priori de h_d , indépendante de d . Certaines de ces estimations ont été obtenues par C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer dans [10].

Publication

Ce résultat a fait l'objet d'un article en collaboration avec Catherine Bolley, à paraître dans *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*.

1.2.2 Chapitre III

Dans le troisième chapitre, inspirés au départ par le travail de Dorsey, Dolgert et Di Bartolo (voir [19]), nous construisons des solutions en un sens formel du système de Ginzburg-Landau, sous l'hypothèse κ petit. Nous construisons une solution formelle extérieure, qui est constituée d'un triplet (F^e, A^e, H^e) , où

$$F^e(x; \kappa) = \tilde{F}^e(\kappa x; \kappa), \quad A^e(x; \kappa) = \tilde{A}^e(\kappa x; \kappa), \quad H^e(x; \kappa) = \tilde{H}^e(\kappa x; \kappa)$$

avec

$$\tilde{F}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{f}_i(x') \kappa^i, \quad \tilde{A}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{A}_i(x') \kappa^i, \quad \tilde{H}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{H}_i(x') \kappa^i, \quad (1.12)$$

pour $x' \geq 0$.

Le triplet $(\tilde{F}^e, \tilde{A}^e, \tilde{H}^e)$ est solution formelle du système différentiel

$$\begin{cases} -\tilde{F}'' - \tilde{F} + \tilde{F}^3 + \tilde{F} \tilde{A}^2 &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ -\kappa^2 \tilde{A}'' + \tilde{A} \tilde{F}^2 &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \tilde{H} &= \kappa \tilde{A}' \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.13)$$

avec les conditions aux limites à l'infini :

$$\lim_{x' \rightarrow +\infty} \tilde{F}(x') = 1 \text{ et } \lim_{x' \rightarrow +\infty} \tilde{A}(x') = 0. \quad (1.14)$$

Puis on construit une solution nommée intérieure, vérifiant le système et les conditions aux limites en zéro : elle aura comme fonction de bien approcher la solution près de l'origine. On sait d'après la formule de De Gennes (voir [13]), dont la démonstration rigoureuse a été donnée par C. Bolley et B. Helffer dans [5] et [8] que :

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (1.15)$$

Cette égalité suggère de chercher A sous la forme :

$$A(x) = \kappa^{-\frac{1}{2}} Q(x). \quad (1.16)$$

Tenant compte de ce changement de variable, le système (1.8) devient :

$$\begin{cases} f'' - \kappa Q^2 f + \kappa^2 (f - f^3) = 0 \\ Q'' - f^2 Q = 0 \\ \kappa^{\frac{1}{2}} H = Q', \end{cases} \quad (1.17)$$

avec les conditions aux limites :

$$f'(0) = 0, \quad \kappa^{-\frac{1}{2}} Q'(0) = h. \quad (1.18)$$

On cherche la solution intérieure (F^i, Q^i, H^i) sous la forme

$$F^i \sim \sum_0^\infty F_i \kappa^i, \quad Q^i \sim \sum_0^\infty Q_i \kappa^i \quad \text{et} \quad H^i \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty H_i \kappa^i, \quad (1.19)$$

où F_i , Q_i et H_i sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ de classe C^∞ .

L'une des difficultés dans la construction d'une "vraie" solution formelle réside dans le raccordement de la solution extérieure et intérieure. Nous définissons une notion de raccordement des solutions intérieure et extérieure à l'ordre n . La technique utilisée pour effectuer ce raccordement est celle du matching. Elle est due dans un cadre très général à M. van Dyke. (voir ([28])). Nous démontrons que la procédure de recollement proposée est d'une part naturelle et d'autre part conduit à un système infini d'équations algébriques. Nous montrons que ce système admet des solutions, puis nous précisons sous quelles conditions nous pouvons effectuer le raccordement des solutions extérieure et intérieure à l'ordre n . Nous introduisons alors la définition

Définition 1.2.2 *Une solution formelle du système de Ginzburg-Landau (1.8) avec conditions aux limites (1.9), est la donnée d'une paire $((F^e, Q^e, H^e); (F^i, Q^i, H^i))$ composée d'une solution formelle extérieure et intérieure dont on a effectué le raccordement à tout ordre.*

Nous établissons le théorème

Théorème 1.2.3 *Etant donné un réel $t \in]0, 1[$, il existe une unique solution formelle des équations de Ginzburg-Landau vérifiant formellement les conditions aux limites*

$$\begin{aligned} F^i(0, \kappa) &\sim t, \quad (F^i)'(0, \kappa) \sim 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F^e(x, \kappa) &= 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Q^e(x, \kappa) = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

précisément,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x, \kappa) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x, \kappa) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} q_j(x, \kappa) &= 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La condition initiale $H^i(0, \kappa)$, dont la dépendance par rapport au paramètre t est exprimée sous la forme $H^i(0, \kappa; t)$, se représente de manière unique sous forme d'une série formelle en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ à coefficients de classe C^∞ par rapport à t , notés ϕ_i , définis sur $]0, 1[$:

$$H^i(0, \kappa; t) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i. \quad (1.22)$$

De plus, le terme principal ϕ_0 admet un unique maximum sur $]0, 1[$ atteint au point $t = t_0$. Ce maximum est non dégénéré, c'est-à-dire tel que

$$\phi_0'(t_0) = 0, \quad \phi_0''(t_0) < 0.$$

En considérant, par un théorème des fonctions implicites formel, les zéros de $t \rightarrow (\partial_t H^i)(0, \kappa; t)$, nous définissons une notion de maximum d'une série formelle dont

le terme principal admet un unique maximum non dégénéré.

Nous appliquons alors ce théorème de maximisation à la série formelle définie en (1.22), et ainsi nous obtenons un développement formel de $h^{sh}(\kappa)$ en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$, candidat naturel pour constituer le développement asymptotique du champ de surchauffe. Nous répondons ainsi à une question restée en suspens dans l'article de Dorsey, Dolgert et Di Bartolo (voir [19]).

1.2.3 Chapitre IV

Dans ce chapitre, nous montrons en premier lieu un théorème d'existence de solution de $(GL)_d^s$. Nous prouvons le théorème

Théorème 1.2.4 *Soit $\eta > 0$, $\epsilon \in]0, 1[$ et $(\delta_0, \delta_1) \in]0, 1[^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \delta_0 < \delta_1 < 1$.*

Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour $h > 0$ tels que

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (1.23)$$

il existe un couple (f, A) solution de $(GL)_d^s$.

De plus, il existe $C(\delta_0) > 0$ telle que cette fonction f vérifie l'inégalité en zéro

$$|f(0) - f_0| \leq C(\delta_0) \kappa^{\frac{1}{2}}. \quad (1.24)$$

Puis nous montrons que le problème $(GL)_d^s$ admet, pour des valeurs de h comprise entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $2^{-\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{2}}$, pour κd assez grand et κ petit, une solution (f, A) non minimisante.

Nous établissons le théorème

Théorème 1.2.5 *Soit $(\delta_1, \delta_2) \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[^2$ et $\eta > 0$. Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour $f_0 \in [\delta_1, \delta_2]$ et $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tel que $\kappa h^2 = \sqrt{2} f_0^2 (1 - f_0^2)$, il existe une solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ qui ne correspond pas à un minimum local.*

La démonstration du théorème 1.2.4 repose sur la construction de sur et sous-solution. Rappelons la définition d'une sous-solution de $(GL)_d^s$.

Définition 1.2.6 *Un triplet (f, A, h) est nommé sous-solution du problème différentiel $(GL)_d^s$ s'il satisfait les conditions*

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} f'' + f(-1 + f^2 + A^2) \leq 0, & \forall x \in [0, d], \\ f'(0) = 0, & f'(d) = 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

où A est l'unique solution dans $H^2([0, d])$ de

$$\begin{cases} -A'' + f^2 A = 0, \\ A'(0) = h, & A(d) = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Nous dirons plus brièvement (et par abus de langage) que f est une sous-solution de $(GL)_d^s$, si le triplet $(f, A; h)$ avec A solution de (1.26) est sous-solution.

De manière analogue, on dira que (f, A, h) est une sur-solution si (f, A, h) vérifie l'inégalité inverse dans (1.25).

Pour construire une sous-solution et une sur-solution, nous nous appuyons sur une construction de sous-solution obtenue près du champ de surchauffe par C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer (voir [10]). Toutefois, notre sous-solution est construite ici pour permettre d'approcher de manière plus précise la vraie solution.

Pour démontrer le théorème 1.2.5, nous considérons la restriction de la fonctionnelle ϵ_d à un convexe fermé de la forme $C_\alpha = \{(f, A) \in H^1([0, d])^2, \text{ tel que } f \geq \alpha > 0, A(d) = 0\}$, où α est choisi de manière convenable. La restriction de ϵ_d à C_α est semi-bornée inférieurement. Nous montrons alors que ϵ_d admet deux minima locaux dans C_α , d'énergie différentes. Nous montrons également qu'elle vérifie la condition de Palais Smale $(PS)_{C_\alpha}$ sur C_α . Appliquant une variante du lemme du col (voir [27]), nous concluons qu'il existe (f, A) appartenant à C_α , point critique de ϵ_d , qui n'est pas un minimum local. Pour conclure la preuve du théorème 1.2.5, nous montrons que le couple (f, A) est solution de $(GL)_d^s$, en suivant le schéma d'une démonstration due à T. Giorgi, S. Alama, L. Bronsard (voir [22]).

1.2.4 Chapitre V

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude asymptotique du champ de surchauffe quand κ tend vers 0. Rappelons brièvement quel est l'avancement des travaux sur cette question.

C. Bolley et B. Helffer ont établi dans [5] et [8] la formule de de Gennes (voir [13])

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (1.27)$$

Dans [21], H. Parr a proposé sur la base d'arguments heuristiques difficiles à justifier mathématiquement la formule plus générale :

$$h^{sh} = 2^{-\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + o(\kappa)\right). \quad (1.28)$$

En nous appuyant sur une technique de construction de sous et sur-solution, nous établissons dans ce chapitre le théorème suivant.

Théorème 1.2.7 *Il existe $C < 0$ et $\kappa_0 > 0$ tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité*

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) \geq 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + C \kappa^2\right). \quad (1.29)$$

Rappelons la définition d'une sous-solution de $(GL)_\infty$.

Définition 1.2.8 *Un triplet (f, A, h) est nommé sous-solution du problème différentiel $(GL)_\infty$ s'il satisfait les conditions*

$$\begin{aligned} -\kappa^{-2} f'' + f(-1 + f^2 + A^2) &\leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \\ (1 - f) &\in H^2([0, \infty[), \quad f'(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

où A est l'unique solution dans $H^2([0, \infty[)$ de

$$\begin{cases} -A'' + f^2 A = 0, \\ A'(0) = h. \end{cases} \quad (1.31)$$

Par définition, on dira que (f, A, h) est une sur-solution si (f, A, h) vérifie l'inégalité inverse dans (1.30).

Les solutions formelles au sens de Van Dyke construites au chapitre II fournissent des candidats naturels pour construire des sur et sous-solution du problème $(GL)_\infty$.

Pour construire des solutions approchées de $(GL)_\infty$ au sens de Van Dyke, nous suivons la méthode utilisée par Dorsey, Dolgert et Di Bartolo, dite du "matching" (voir [19]). Afin de présenter rapidement cette méthode, introduisons la définition :

Définition 1.2.9 La solution intérieure tronquée à l'ordre n , est définie comme étant égale à $\sum_0^n F_i \kappa^i$, où F_i a été définie en (1.19). Nous la noterons $F^{i,(n)}$. La solution extérieure tronquée à l'ordre n est définie comme étant égale à

$F^{e,(n)}(x; \kappa) = \tilde{F}^{e,(n)}(\kappa x) := \sum_0^n \tilde{f}_i(\kappa x) \kappa^i$ où $\tilde{f}_i$ a été définie en (1.12). Nous la noterons $F^{e,(n)}$. On désigne par $F^{pol,(n)}$ la partie polynomiale de $F^{i,(n)}$.

D'une manière générale, lorsqu'on a effectué le raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ des solutions formelles intérieure et extérieure, on peut construire une solution approchée au sens de Van Dyke, notée $(f^{vd,(n)}, A^{vd,(n)})$, en procédant de la manière suivante. Pour $f^{vd,(n)}$, on considère la fonction obtenue en sommant la fonction $F^{i,(n+1)} := \sum_{i=0}^{n+1} F_i \kappa^i$, à la fonction $F^{e,(n)} := \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{f}_i \kappa^i$, et en retranchant à cette somme la partie polynomiale de $F^{i,(n+1)}$, notée $F^{pol,(n+1)}$.

Pour $A^{vd,(n)}$, étant donné que la solution formelle $A^e(x'; \kappa)$ définie en (1.12) est nulle (ce résultat est démontré dans le chapitre II), on prend pour valeur de $A^{vd,(n)}$ la solution intérieure tronquée à l'ordre n ,

$$A^{vd,(n)} := \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^n Q_i(x) \kappa^i,$$

où Q_i a été défini en (1.19).

Posons la définition

Définition 1.2.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle solution de $(GL)_\infty$ au sens de Van Dyke d'ordre n , le couple de fonctions $(f^{vd,(n)}, A^{vd,(n)})$ définies par

$$f^{vd,(n)}(x; \kappa) := F^{e,(n)}(x; \kappa) + F^{i,(n+1)}(x; \kappa) - F^{pol,(n+1)}(x; \kappa), \quad (1.32)$$

où les fonctions $F^{e,(n)}(x; \kappa)$, $F^{i,(n+1)}(x; \kappa)$ et $F^{pol,(n+1)}$ ont été définies dans la définition 1.2.9, et

$$A^{vd,(n)}(x, \kappa) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^n Q_i(x) \kappa^i, \quad (1.33)$$

où Q_i a été défini en (1.19).

L'essentiel de ce chapitre est consacré à la construction d'une sous-solution de $(GL)_\infty$ à partir du couple $(f^{vd,(2)}, A^{vd,(2)})$. La démonstration du théorème 1.2.7 est un corollaire immédiat de cette construction.

La méthode de Van Dyke s'applique remarquablement dans notre situation, mais avec de réelles difficultés techniques. L'un des aspects cruciaux de cette construction est qu'elle

fournit une fonction explicite qui est une bonne approximation dans une région de la forme $[0, \kappa^{-\beta}]$, $\beta > 0$, de la solution de l'équation $-A'' + Af^2 = 0$. Ceci nous permet d'obtenir une minoration suffisamment précise de A , puis d'en déduire une majoration de A^2f . Obtenir cette majoration est l'une des difficultés majeures qui apparaît dans la construction de la sous-solution.

Pour démontrer la formule de H. Parr donnée en (1.28), il faut établir une majoration du champ de surchauffe. Il faudrait montrer qu'il existe des réels κ_0 et C tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) \leq 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{32} \kappa + C\kappa^2 \right).$$

Ceci reste un problème ouvert.

Bibliographie

- [1] A. Aftalion et W. C. Troy.
On the solutions of the one-dimensional Ginzburg-Landau equations for superconductivity.
Physica D 132, No. 1-2, p. 214-232, 1999.
- [2] A. Aftalion et W. C. Troy.
Uniqueness of solutions of the Ginzburg-Landau system for thin films.
Preprint LMENS, 1999.
- [3] F. Bethuel et T. Rivière.
Vortices for a variational problem related to superconductivity.
Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire 12, No. 3, p. 243-303, 1993.
- [4] C. Bolley et P. Del Castillo
Existence and uniqueness for the half-space Ginzburg-Landau model.
A paraître dans Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.
- [5] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit.
Reviews in Mathematical Physics, vol. 8, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [6] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior magnetic field.
Part I. Nonlinear Studies No. 3, p. 1-29, 1996.
- [7] C. Bolley et B. Helffer.
Upper bound for the solution of the Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting field and applications to the superheating field in the large κ regime.
European Journal of Applied Mathematics, Vol. 8, p. 347-367, 1997.
- [8] C. Bolley et B. Helffer.
Proof of the De Gennes formula for the superheating field in the weak κ limit.
Annales de l'Institut Henri Poincaré (section analyse non linéaire), Vol. 14, No. 5, p. 597-613, 1997.
- [9] C. Bolley et B. Helffer.

- Superheating field in a semi-infinite film in the weak κ limit : numerical results and approximate models.
Mathematical modelling and numerical analysis, Vol. 31, No 1, p. 121-165, Novembre 1997.
- [10] C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer.
 Superheating field for the Ginzburg-Landau equations in the case of a large bounded interval.
 A paraître dans *J. Math. Phys.* (2000) .
- [11] S. J. Chapman.
 Asymptotic analysis of the Ginzburg-Landau model of superconductivity: Reduction to a free boundary model.
Lakshmikantham, 5.(ed), World congress of nonlinear analysts'92. Proceedings of the first world congress, Tampa, FL, USA, August 19-26, 1992.
- [12] S. J. Chapman.
 Superheating field of type II superconductors.
Siam J. Appl. Math., Vol. 55, No 5, p. 1233-1258, 1995.
- [13] P. G. de Gennes.
 Superconductivity: selected topics in solid state physics and theoretical Physics.
Proc. of 8 th Latin american school of physics, Caracas, 1966.
- [14] V.L. Ginzburg.
 "On the theory of superconductivity".
Nuovo Cimento 2, p. 1234, 1955.
- [15] V. L. Ginzburg.
 On the destruction and the onset of superconductivity in a magnetic field.
Soviet Physics JETP 7, 78, 1958.
- [16] V. L. Ginzburg et L.D. Landau.
 "On the theory of superconductivity".
Zh. Eksperim. i teor. Fiz. 20 1950, p. 1064-1082
 English translation in *Men of Physics: L. D. Landau, I, Ed. by D. Ter Harr, Pergamon oxford, 1965, p. 138-167., 1965.*
- [17] The Orsay group.
 Quantum Fluids.
 ed. D. F. Brewer, p.26, Amsterdam, North Holland, 1966.
- [18] D.S. McLachlan, H.J. Fink et B. Rothberg-Bibby.
 First and second order phase transitions of moderately small superconductor in a magnetic field.
North-Holland, 1978.
- [19] T. Dorsey, J. Dolgert et Di Bartolo.
 Superheating fields of superconductors: Asymptotic analysis and numerical results.
Physical Review B, vol. 53, No 9, 1996.
Erratum: Vol. 56, No. 5, 1997.

- [20] M.K. Kwong.
On the one-dimensional Ginzburg-Landau BVPs.
Diff. Int. Equations 8, p. 1395-1405, 1995.
- [21] H. Parr.
Superconductive superheating field for finite κ .
Z. Physik B25, p. 359-361, 1976.
- [22] S. Alama, L. Bronsard et T. Giorgi.
Uniqueness of symmetric vortex solutions in the Ginzburg-Landau model of superconductivity.
J. Funct. Anal. 167, No. 2, p. 399-424, 1999
- [23] E. Sandier et S. Serfaty.
Global minimizers for the Ginzburg-Landau functional below the first critical magnetic field.
Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire
- [24] S. Serfaty.
Stable configurations in superconductivity: uniqueness, multiplicity, and vortex-nucleation.
Archive for Rational Mechanics and Analysis 149, No. 4, p. 329-365, 1999
- [25] S. Serfaty.
Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field:
Part I.
Commun. Contemp. Math. 1, No. 2, p. 213-254, 1999
- [26] S. Serfaty.
Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field:
Part II.
Archive for rational mechanics and analysis, November 1998.
- [27] M. Struwe.
Variational methods.
Springer, Berlin, 1990.
- [28] M. van Dyke.
Perturbation methods in fluid mechanics.
Academic Press, Stanford CA, 1975.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions des équations de Ginzburg-Landau sur un espace semi-infini

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons tout d'abord quelques propriétés des solutions de $(GL)_d^s$ et de $(GL)_\infty$, utiles dans les chapitres suivants, puis nous étudions le problème d'existence et d'unicité des solutions du système $(GL)_\infty$ à $f(0)$ fixé.

L'objectif de ce chapitre est d'établir une conjecture énoncée par C. Bolley et B. Helffer dans [9] sous la forme suivante :

Conjecture 2.1.1 *L'ensemble dans $\bar{\mathbf{R}}^+ \times \bar{\mathbf{R}}^+$ défini par*

$$\Sigma = \{(f(0), A'(0)) \mid (f, A) \text{ solution de } (GL)_\infty\}$$

est le graphe d'une fonction σ de $\bar{\mathbf{R}}^+$ dans $\bar{\mathbf{R}}^+$.

Dans les sections 2.3 et 2.5, afin de prouver la conjecture 2.1.1, nous établissons le théorème

Théorème 2.1.2 *Pour tout $\kappa > 0$, et pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe une unique solution $(f, A; h)$ de $(GL)_\infty$ telle que*

$$f(0) = f_0.$$

Afin d'établir le théorème 2.1.2, nous procédons en deux étapes. Nous montrons dans un premier temps l'unicité de la solution en nous appuyant sur un principe de comparaison utilisé par Kwong dans [10]. Nous montrons que s'il existait deux solutions distinctes, (f_1, A_1, h_1) et (f_2, A_2, h_2) telles que $f_1(0) = f_2(0)$, avec $h_1 < h_2$, alors $f_1 < f_2$ et $f'_1 < f'_2$ sur $\mathbf{R}^+$. Ces inégalités nous conduisent à une contradiction avec le fait que $f_i \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, ($i \in \{1, 2\}$).

Pour montrer l'existence d'une solution, nous étudions l'existence des solutions du système (1.3) avec les conditions aux limites

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A(d) = 0, \quad (2.1)$$

où $f_0 \in]0, 1[$.

Nous montrons que, quelque soit $f_0 \in]0, 1]$, ce problème admet une solution (f_d, A_d, h_d) , avec $f_d > 0$, puis nous extrayons des sous-suites de $(f_{d_n}, A_{d_n}, h_{d_n})$ qui convergent sur tout intervalle borné lorsque n tend vers l'infini. Nous obtenons ainsi l'existence d'une solution de $(GL)_\infty$ telle que $f(0) = f_0$. La difficulté du passage à la limite réside dans l'obtention d'estimations a priori des normes dans $H^2([0, d[)$ des fonctions $1 - f_d$ et A_d bien contrôlées par rapport au paramètre d . Pour obtenir ces estimations, nous sommes conduit à montrer en particulier une estimation a priori de h_d , indépendante de d . Certaines de ces estimations ont été obtenues par C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer dans [3], mais nous avons été conduits à les étendre dans d'autres situations, dans le cas $\kappa \geq 1$.

Rappelons que la courbe de De Gennes a pour équation :

$$h(\kappa) = \kappa^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} f(0) (1 - f(0)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que d'après la proposition 6.2 p.12 dans [9], la courbe de De Gennes et le graphe de σ ont les positions relatives suivantes :

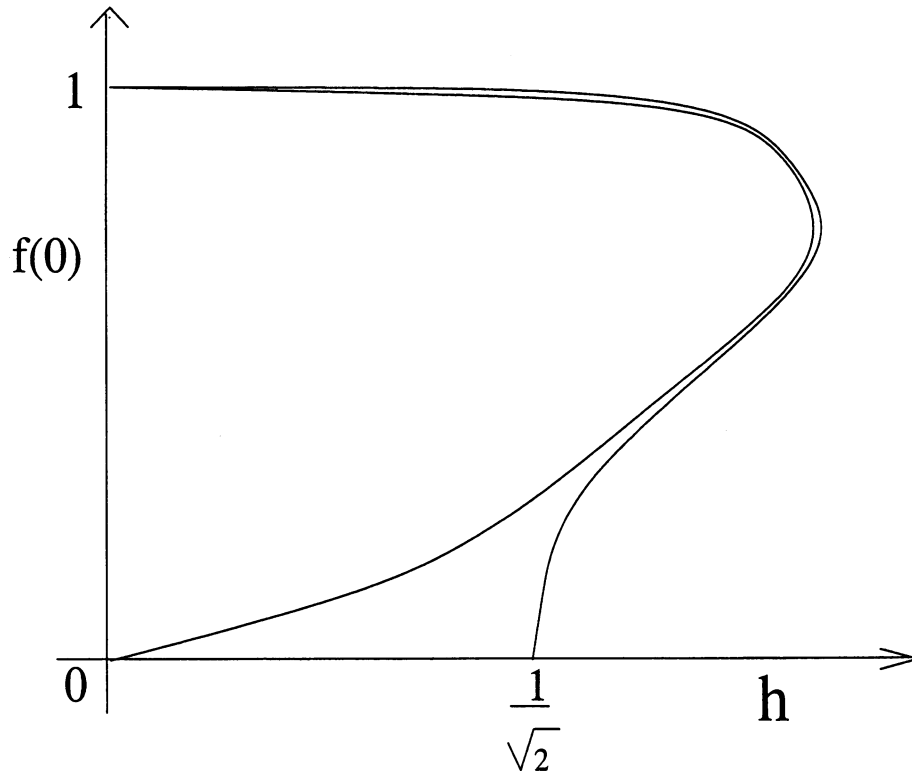


FIG. 2.1 – La courbe de De Gennes et le graphe de σ

2.2 Propriétés des solutions de $(GL)_d^s$ et $(GL)_\infty$

2.2.1 Propriétés des solutions symétriques sur $[0, d]$

Rappelons que C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer ont établi certaines propriétés des solutions de $(GL)_d^s$ (voir [3] et [6]) (dont certaines sont classiques).

Proposition 2.2.1 *Soient $(\kappa, d) \in (]0, +\infty[)^2$.*

Pour toutes solutions (f, A, h) de $(GL)_d^s$, nous avons :

$$|f| \leq 1, \quad \forall x \in [0, d], \quad (2.2)$$

et

$$\kappa^{-1} f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - f^2(x)) + A'(d), \quad \forall x \in [0, d]. \quad (2.3)$$

Si de plus, on suppose que $f > 0$ sur $[0, d]$,

$$\text{alors } f \text{ est décroissante sur } [0, d], \quad (2.4)$$

et la fonction A vérifient les propriétés :

$$h \frac{\sinh(d-x)}{\cosh d} \leq -A(x) \leq \frac{h}{f(0)} \frac{\sinh(f(0)(d-x))}{\cosh(f(0)d)}, \quad \forall x \in [0, d], \quad (2.5)$$

$$-A(x) \leq \frac{2\sqrt{2}h}{\sqrt{3}f(0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}f(0)x\right), \quad \forall x \in [0, d]. \quad (2.6)$$

De plus,

$$A'(x) \leq \frac{2\sqrt{2}h}{\sqrt{3}f(0)} \exp\left(-\frac{1}{2}f(0)x\right), \quad \forall x \in [0, d]. \quad (2.7)$$

2.2.2 Propriétés des solutions de $(GL)_\infty$

Effectuons quelques rappels sur les propriétés des points critiques de la fonctionnelle ϵ_∞ définie en (1.5). Si (f, A) est un infimum de ϵ_∞ , ce couple est solution de (1.6) et vérifie les propriétés suivantes :

1. Les fonctions f et A sont indéfiniment dérivables.
2. Si $h > 0$, on a :

$$0 \leq A'(x) \leq h, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}^+} \quad (2.8)$$

et par conséquent A est strictement négative.

3. La fonction f est strictement croissante et strictement positive.

On a les inégalités :

$$0 < f < 1. \quad (2.9)$$

4. Les fonctions f et A sont liées en tout point de $\overline{\mathbb{R}^+}$ par l'égalité d'énergie :

$$\kappa^{-2}(f')^2 + (A')^2 = f^2 A^2 + \frac{(1 - f^2)^2}{2}. \quad (2.10)$$

On trouvera la démonstration de ces propriétés dans [4] et [5].

2.3 Unicité de la solution du problème $(GL)_\infty$

C. Bolley¹ a montré l'unicité de la solution du problème $(GL)_\infty$. Plus précisément, cet auteur a établi la proposition suivante, dont nous allons donner une démonstration simplifiée.

Proposition 2.3.1 *Pour tout $\kappa > 0$, et pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe au plus une solution $(f, A; h)$ pour le système $(GL)_\infty$ telle que :*

$$f(0) = f_0.$$

2.3.1 Rappel

Rappelons le lemme de comparaison de Sturm (voir [10]) :

Lemme 2.3.2 *Soient P et Q , deux fonctions continues définies sur $[c, d]$ telles que*

$$P \leq Q, \quad P \neq Q. \quad (2.11)$$

Soit y une fonction solution de $y'' + Py = 0$ dans $[c, d]$ et Y une fonction solution de $Y'' + QY = 0$ dans $[c, d]$.

Supposons Y et y strictement positives, et

$$\frac{y'(c)}{y(c)} \leq \frac{Y'(c)}{Y(c)}. \quad (2.12)$$

Alors on a l'inégalité

$$\frac{y'(d)}{y(d)} \leq \frac{Y'(d)}{Y(d)}. \quad (2.13)$$

Si de plus,

$$y(c) \leq Y(c) \quad (2.14)$$

alors

$$y(d) < Y(d) \quad \text{et} \quad y'(d) < Y'(d). \quad (2.15)$$

Preuve

Soit $x \geq c$.

Multiplions l'équation $y'' + Py = 0$ par Y et l'équation $Y'' + QY = 0$ par y . Intégrons les égalités ainsi obtenues entre c et x et soustrayons-les membre à membre.

On obtient alors:

$$\int_c^x (y''Y - Y''y + (P - Q)yY)dt = 0.$$

On a l'égalité

$$\int_c^x (y''Y - Y''y)dt = (y'Y)(x) - (yY')(x) - (y'Y)(c) + (yY')(c).$$

1. Communication personnelle

Par hypothèse, comme $P \leq Q$, $y \geq 0$ et $Y \geq 0$,

$$\int_c^x ((P - Q)yY) dt \leq 0.$$

On a donc

$$(y'Y)(x) - (yY')(x) - (y'Y)(c) + (yY')(c) \leq 0,$$

et compte-tenu de (2.12), on déduit que

$$(y'Y)(x) - (yY')(x) \leq 0, \quad \forall x \in [c, d]. \quad (2.16)$$

Prenant $x = d$, on obtient la première assertion du lemme 2.3.2.

De (2.16), on déduit que

$$\left(\frac{Y}{y}\right)'(x) = \frac{Y'y - y'Y}{y^2}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [c, d].$$

De (2.14) et du fait que $\frac{Y}{y}$ est croissante, on déduit que

$$\frac{Y(x)}{y(x)} \geq 1, \quad \forall x \in [c, d].$$

De plus, si on avait $y \equiv Y$, alors on obtiendrait $P \equiv Q$. Comme par hypothèse, $P \neq Q$, on a $y \neq Y$. On en déduit l'inégalité $y(d) < Y(d)$.

Ceci achève la preuve du lemme 2.3.2.

2.3.2 Monotonie de la solution de $(GL)_\infty$ à f_0 fixé

Nous allons appliquer le lemme 2.3.2 au système $(GL)_\infty$.

La preuve de la proposition 2.3.1 s'appuie sur un lemme dû à C. Bolley, dont nous donnons ici un énoncé et une démonstration simplifiés.

Lemme 2.3.3 Soient $\kappa > 0$ et $f_0 \in]0, 1]$.

Soient (f_1, A_1, h_1) et (f_2, A_2, h_2) , deux solutions de $(GL)_\infty$ telles que

$$f_1(0) = f_2(0) = f_0.$$

Supposons que $0 < h_1 < h_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a les inégalités

$$f_1(x) < f_2(x), \quad f_1'(x) < f_2'(x), \quad -A_1(x) < -A_2(x). \quad (2.17)$$

Preuve

Utilisant l'égalité d'énergie (2.10) au point $x = 0$ et l'inégalité $h_1 < h_2$, nous déduisons l'inégalité

$$0 < -A_1(0) < -A_2(0). \quad (2.18)$$

Appliquons le lemme de comparaison de Sturm (lemme 2.3.2). Considérons les deux équations

$$y_1'' + Py_1 = 0 \quad (2.19)$$

où

$$P := \kappa^2(-1 + f_1^2 + A_1^2),$$

et

$$y_2'' + Qy_2 = 0 \quad (2.20)$$

où

$$Q := \kappa^2(-1 + f_2^2 + A_2^2).$$

Compte-tenu de (2.18), on déduit qu'il existe $x_0 > 0$ tel que,

$$-A_1(x) < -A_2(x), \quad \forall x \in [0, x_0[. \quad (2.21)$$

De l'inégalité (2.21), et du fait que $f_1(0) = f_2(0)$, on déduit qu'il existe $x_1 > 0$ tel que

$$P(x) < Q(x), \quad \forall x \in [0, x_1[.$$

Appliquons le lemme de Sturm sur l'intervalle $[0, x_1[$. D'après le rappel 2.2.2. (voir la troisième propriété), les fonctions f_1 et f_2 sont strictement positives. Comme $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$ et $f_1(0) = f_2(0) = f_0$, les hypothèses (2.12) et (2.14) du lemme sont vérifiées. Donc, compte-tenu du lemme de Sturm, $\forall x \in]0, x_1[, 0 < f_1(x) < f_2(x)$, et prenant en compte (2.21), on obtient

$$\begin{cases} 0 < f_1(x) < f_2(x), \\ 0 < -A_1(x) < -A_2(x), \end{cases} \quad (2.22)$$

sur $]0, x_1[$.

Différentes éventualités sont alors à considérer.

- i. $f_1(x_1) = f_2(x_1)$, avec $A_1(x_1) \neq A_2(x_1)$,
- ii. $A_1(x_1) = A_2(x_1)$, avec $f_1(x_1) \neq f_2(x_1)$,
- iii. $f_1(x_1) = f_2(x_1)$, avec $A_1(x_1) = A_2(x_1)$.

Les éventualités i. et iii. ne peuvent pas se produire en raison du lemme de Sturm.

En effet, sous les hypothèses i. ou iii., nous pouvons appliquer le lemme de Sturm sur l'intervalle $[0, x_1]$.

Sur cet intervalle, on a l'inégalité $P(x) \leq Q(x)$, et comme $f_1(0) = f_2(0)$, il en résulte que $f_1(x) < f_2(x)$, $\forall x \in]0, x_1]$.

Il reste à écarter l'éventualité ii.

Soit $u := A_1 - A_2$. Alors u satisfait

$$\begin{cases} u'' = f_1^2 u + (f_1^2 - f_2^2) A_2 \text{ sur } \mathbb{R}^+, \\ u(0) = A_1(0) - A_2(0) > 0, \\ u'(0) = h_1 - h_2 < 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

D'après (2.22), la fonction A_2 est négative et comme par ailleurs, $f_1^2 \leq f_2^2$ sur $]0, x_1[$, nous avons

$$u'' \geq f_1^2 u \text{ sur }]0, x_1[.$$

Maintenant, nous savons d'après le rappel sur les propriétés d'une solution de $(GL)_\infty$ (troisième propriété, sous-section 2.2.2), que la fonction f_1 est croissante et par définition de x_1 , u est strictement positive sur $]0, x_1[$. Nous avons donc :

$$u'' \geq f_1^2(0)u \text{ sur }]0, x_1[.$$

Nous pouvons comparer u sur $]0, x_1[$ avec u_1 , la solution de

$$\begin{cases} u_1'' = f_0^2 u_1, \\ u_1(0) = u(0), \\ u_1'(0) = u'(0), \end{cases} \quad (2.24)$$

où $f_0 = f_1(0)$.

Nous avons $u \geq u_1$ sur $[0, x_1]$ (u et u_1 sont continues) avec

$$u_1(x) = u(0) \cosh(f_0 x) + \frac{u'(0)}{f_0} \sinh(f_0 x).$$

Nous allons maintenant prouver que u_1 est une fonction strictement positive sur $[0, +\infty[$. Comme $u'(0) < 0$, il est suffisant de montrer que

$$u(0) > -\frac{u'(0)}{f_0},$$

qui est équivalent à

$$-f_0 A_2(0) + f_0 A_1(0) > h_2 - h_1.$$

Ceci nous conduit à étudier la fonction

$$g : h \mapsto g(h) := \sqrt{h^2 - \frac{1}{2}(1 - f_0^2)^2},$$

pour $f_0 \in]0, 1]$ et définie quand $h \in [\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - f_0^2), +\infty[$.

Nous avons pour $h \in [\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - f_0^2), +\infty[$:

$$g'(h) = \frac{h}{(h^2 - \frac{1}{2}(1 - f_0^2)^2)^{1/2}} > 1.$$

Nous obtenons ainsi $\frac{g(h_2) - g(h_1)}{h_2 - h_1} > 1$ pour $h_2 > h_1$ et donc $u_1 > 0$ sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, on a $u(x_1) > 0$, ce qui démontre que l'égalité $A_1(x_1) = A_2(x_1)$ est impossible. L'éventualité *ii.* est donc écartée et le lemme 2.3.3 est ainsi prouvé.

2.3.3 Preuve de la proposition 2.3.1

Soient (f_1, A_1, h_1) et (f_2, A_2, h_2) deux solutions de $(GL)_\infty$ avec $f_1(0) = f_2(0) = f_0$ et $h_1 < h_2$.

D'après le lemme 2.3.3, on a les inégalités, valables sur $\mathbb{R}^+$

$$(a) f_1 < f_2, \quad (b) f'_1 < f'_2. \quad (2.25)$$

Considérons la fonction $g(x) := (f_1 - f_2)(x)$.

Comme $f_i \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ ($i=1,2$), on en déduit que $g \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, $g(0) = 0$, et, d'après (2.25), $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Il résulte du théorème de Rolle qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit (2.25)_(b) et achève la preuve de la proposition 2.3.1.

2.4 Existence d'une solution sur $[0, d]$

Afin de montrer l'existence d'une solution de $(GL)_\infty$ à f_0 fixé, nous allons montrer dans un premier temps un résultat d'existence de solution positive (c'est-à-dire telle que $f > 0$) du problème $(GL)_d^s$, puis montrer comment construire une solution sur $[0, +\infty[$, en faisant tendre d vers l'infini. Nous allons montrer la proposition :

Proposition 2.4.1 *Soit $(\kappa, d) \in (]0, +\infty[)^2$. Alors, pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe au moins une solution $(f, A; h)$ positive de $(GL)_d^s$ telle que*

$$f(0) = f_0.$$

Pour montrer la proposition 2.4.1, nous allons nous appuyer sur un résultat d'existence des solutions des équations de Ginzburg-Landau dû à M.K. Kwong, établi dans un cadre proche du nôtre.

Dans [10], cet auteur considère le système (1.3) avec les conditions aux limites :

$$f(0) = \beta, \quad f'(0) = 0, \quad A'(0) = \alpha, \quad A(0) = 0. \quad (2.26)$$

Etant donné $(\beta, \alpha) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$, il existe une unique solution maximale de (1.3)-(2.26) définie sur un intervalle de la forme $I(\beta, \alpha) = [0, T_{\max}(\beta, \alpha)[$. Pour $(\beta, \alpha) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$ et $x \in I(\beta, \alpha)$, notons par $(f(x; \beta, \alpha), A(x; \beta, \alpha))$ cette solution. Dans [10], M. K. Kwong prouve le théorème :

Théorème 2.4.2 *Etant donné un réel $\beta \in]0, 1[$, il existe un unique $\alpha > 0$ tel que le système (1.3) admette une solution positive vérifiant (2.26) et la condition $f'(d) = 0$.*

De plus, l'application qui à β associe $\alpha(\beta)$ est une fonction continue et décroissante sur $]0, 1[$, telle que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \alpha(\beta) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \alpha(\beta) = 0. \quad (2.27)$$

Considérons $\beta_0 \in]0, 1[$, et le couple (β_0, α_0) où $\alpha_0 := \alpha(\beta_0)$.

D'après le théorème 2.4.2, $I(\beta_0, \alpha_0) = [0, d]$.

D'après un résultat classique d'existence de solution d'équation différentielle dépendant d'un paramètre, il existe un voisinage $V(\beta_0, \alpha_0)$, tel que, pour tout (β, α) dans ce voisinage, les solutions de (1.3)-(2.26) sont définies sur un intervalle $I(\beta, \alpha) = [0, T_{\max}(\beta, \alpha)]$ tel que $T_{\max}(\beta, \alpha) \geq d$.

Pour $x \in [0, d]$ et pour $(\alpha, \beta) \in V(\beta_0, \alpha_0)$, les applications $x \mapsto f(x; \beta, \alpha)$ et $x \mapsto A(x; \beta, \alpha)$ sont bien définies, et de plus continues au point (β_0, α_0) .

En particulier, l'application $(\beta, \alpha) \rightarrow f(d; \beta, \alpha)$ est continue sur $]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

Afin d'établir la proposition 2.4.1, montrons la proposition

Proposition 2.4.3 *Soit $(f(\cdot, \beta, \alpha(\beta)), A(\cdot, \beta, \alpha(\beta)))$ une solution de (1.3) et (2.26).*

Etant donné $\gamma \in]0, 1[$, il existe un réel $\beta \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité

$$f(d; \beta, \alpha(\beta)) = \gamma. \quad (2.28)$$

Afin d'établir la proposition 2.4.3, montrons la proposition suivante, dont la preuve est analogue à celle de la proposition 6.4 dans [4].

Proposition 2.4.4 *Pour tout $\kappa > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, il existe une solution $(\hat{f}(x; \alpha), \hat{A}(x; \alpha))$ de (1.3) satisfaisant les conditions aux limites*

$$\hat{f}'(0; \alpha) = 0, \quad \hat{f}'(d; \alpha) = 0, \quad \hat{A}'(0; \alpha) = \alpha \quad \text{et} \quad \hat{A}(0; \alpha) = 0.$$

Cette famille de solution est de classe C^1 par rapport à α , et satisfait

$$(\hat{f}(x; 0), \hat{A}(x; 0)) = (1, 0).$$

Preuve

Considérons l'application ϕ définie sur $V_1 \times V_2$ à valeur dans $L^2(]0, +\infty[)^2 \times \overline{\mathbb{R}^+}$, par

$$(f, A) \rightarrow \phi(f, A) = (g, B, \alpha)$$

avec

$$\begin{cases} g = -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f \\ B = -A'' + f^2 A \\ \alpha = A'(0) \end{cases}$$

et avec

$$\begin{aligned} V_1 &= \{f \in H^2([0, d]) \mid f'(0) = 0, f'(d) = 0\} \\ V_2 &= \{A \in H^2([0, d]) \mid A(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Une solution des équations de Ginzburg-Landau telle que $A'(0) = \alpha$ correspond à l'équation :

$$\phi(f, A) = (0, 0, \alpha).$$

Notons que

$$\phi(1, 0) = (0, 0, 0).$$

Dans le but d'appliquer le théorème d'inversion locale, nous avons juste à calculer la dérivée de l'application ϕ au point $(f = 1, A = 0)$, qui est donnée sur $V_1 \times V_2$ par :

$$d\phi_{(1,0)}(\delta f, \delta A) = (-\kappa^{-2}(\delta f)'' + 2\delta f, -(\delta A)'' + \delta A, (\delta A)'(0)).$$

Elle réalise une bijection de $V_1 \times V_2$ sur $L^2(]0, +\infty[)^2 \times \mathbb{R}^+$. Alors, par application du théorème d'inversion locale, on obtient l'existence d'un réel α_0 tel que, pour tout $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$, il existe une solution de (1.3) satisfaisant les conditions aux limites

$$\hat{f}'(0; \alpha) = 0, \quad \hat{f}'(d; \alpha) = 0, \quad \hat{A}'(0; \alpha) = \alpha \quad \text{et} \quad \hat{A}(0; \alpha) = 0.$$

Montrons que $(\hat{f}(x; 0), \hat{A}(x; 0)) = (1, 0)$.

L'unique solution de

$$\begin{cases} -A'' + f^2 A = 0 & \text{sur }]0, d[, \\ A(0) = 0, \quad A'(0) = 0 \end{cases}$$

est la solution

$$\hat{A} \equiv 0.$$

Alors, le problème $(GL)_d^s$ s'écrit

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 = 0 & \text{sur }]0, d[, \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \end{cases}$$

Par unicité de la solution, on obtient $\hat{f} \equiv 1$.

Ceci achève la preuve de la proposition 2.4.4.

Preuve de la proposition 2.4.3

Montrons que l'application $\beta \rightarrow f(d; \beta, \alpha(\beta))$ est continue sur $[0, 1]$.

Montrons d'abord la continuité de cette application sur l'intervalle $]0, 1[$.

D'après le théorème 2.4.2, l'application $\beta \rightarrow f(d; \beta, \alpha(\beta))$ est continue sur $]0, 1[$ comme composée de l'application $\beta \rightarrow (\beta, \alpha(\beta))$ définie et continue sur $]0, 1[$ et $(\beta, \alpha) \rightarrow f(d; \beta, \alpha)$ définie et continue sur $V(\beta, \alpha(\beta))$, pour un voisinage convenable de $(\beta, \alpha(\beta))$.

Montrons la continuité de $\beta \rightarrow f(d; \beta, \alpha(\beta))$ au point $\beta = 0$.

Considérons une suite de réels $\beta_n > 0$, telle que $\beta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors, la fonction f étant décroissante, (voir (2.4)), on a l'inégalité $f(d; \beta_n, \alpha(\beta_n)) \leq \beta_n$. Il en résulte que $f(d; \beta_n, \alpha(\beta_n)) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $f(d; 0, \alpha(0)) = 0$, l'application $\beta \rightarrow f(d; \beta, \alpha(\beta))$ est continue au point $\beta = 0$.

Supposons à présent $\beta = 1$. Comme $\lim_{\beta \rightarrow 1} \alpha(\beta) = 0$ d'après (2.27), on peut prolonger $\beta \rightarrow \alpha(\beta)$ par continuité au point $\beta = 1$ et poser $\alpha(1) = 0$.

Alors, $f(d; 1, \alpha(1)) = 1$ d'après la proposition 2.4.4.

De plus, par application de la proposition 2.4.4 au point $(1, 0; \alpha(0))$, on obtient un prolongement par continuité au point $\beta = 1$ de l'application qui à β associe $f(x; \beta, \alpha(\beta))$.

D'après ce qui précède, elle est donc continue sur $[0, 1]$.

Son image est un intervalle contenant 0 et 1, donc égale à $[0, 1]$. Ceci achève la preuve de la proposition 2.4.3.

Preuve de la proposition 2.4.1.

Soit $f_0 \in]0, 1[$. Soit (f, A) le couple de fonctions défini dans le théorème 2.4.2.

D'après la proposition 2.4.3, il existe $\beta \in]0, 1[$ telle que

$$f(d; \beta, \alpha(\beta)) = f_0.$$

Considérons alors le couple de fonctions $(\tilde{f}, \tilde{A})$ défini par

$$\tilde{f}(x) = f(d - x), \quad \tilde{A}(x) = -A(d - x), \quad \forall x \in]0, d[.$$

Le couple $(\tilde{f}, \tilde{A})$ vérifie le système (1.3) sur $[0, d]$ et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) &= f(d) = f_0, & \tilde{f}'(0) &= -f'(d) = 0, & \tilde{f}'(d) &= -f'(0) = 0, \\ \tilde{A}(d) &= -A(0) = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition 2.4.1.

2.5 Existence d'une solution de $(GL)_\infty$ à f_0 fixé

2.5.1 Estimations uniformes

En vue de démontrer le théorème 2.1.2, nous allons établir la proposition

Proposition 2.5.1 *Soit $\kappa > 0$. Alors pour tout $f_0 \in [0, 1]$, il existe au moins une solution $(f, A; h)$ de $(GL)_\infty$ telle que*

$$f(0) = f_0.$$

Dans le but de démontrer la preuve de la proposition 2.5.1, nous considérons un couple (f, A) solution de $(GL)_d^s$, et vérifiant la propriété

$$f(0) = f_0.$$

Compte tenu de la proposition 2.4.1, nous savons qu'il existe un tel couple.

En vue de faire tendre d vers $+\infty$, nous déterminons des estimations a priori des normes dans $H^1([0, d])$ de f et A .

2.5.1.1 Quelques rappels

C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer ont obtenu dans [3] une majoration a priori de $A'(0)$ lorsque (f, A) est solution de $(GL)_d^s$. Plus précisément, ils ont établi la proposition :

Proposition 2.5.2 *Soit $\kappa > 0$ et $d > 0$. Alors toute solution de $(GL)_d^s$ avec $f > 0$ et $A'(0) > 0$, satisfait*

$$\begin{aligned} A'(0)^2 &\leq \sqrt{2}\kappa^{-1}(1 - f(0)^2)f(0)^2 + (5\sqrt{2} + 6A'(d))f(0)^{-1} \\ &\quad + (\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa^{-1} + 2d)(1 - f(d)^2) + (2d + 1)A'(d)^2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ils ont déduit de la proposition 2.5.2, la proposition :

Proposition 2.5.3 *Pour tout $d \geq 1$, $0 < \kappa \leq 1$, et pour toute solution de $(GL)_d^s$ telle que $f(0) > 0$, nous avons :*

$$\kappa A'(0)^2 \leq \sqrt{2}(1 - f(0)^2)f(0)^2 + hM_1(\kappa, d, f(0)) + h^2M_2(\kappa, d, f(0)), \quad (2.30)$$

où

$$M_1(\kappa, d, t) = 5\sqrt{2}t^{-1}\kappa + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\kappa d\right)t^{-5/2}d^{1/2}\exp(-\tfrac{1}{2}t\kappa d), \quad (2.31)$$

$$M_2(\kappa, d, t) = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t^{-3/2}\kappa\exp(-\tfrac{1}{2}td) + \frac{8(2d+1)}{3}t^{-1}\kappa\exp(-td). \quad (2.32)$$

Enfin, dans [3], ces auteurs ont montré la proposition

Proposition 2.5.4 *Pour tout $d \geq 1$, $\kappa \leq 1$ et pour toute solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ avec $f > 0$:*

$$1 - f(d)^2 \leq \frac{16}{3f(0)^{\frac{5}{2}}}hd^{\frac{1}{2}}\exp(-\tfrac{1}{2}f(0)\kappa d). \quad (2.33)$$

Remarque 2.5.5 *Dans [3], les auteurs ont déduit de la proposition 2.5.3 une majoration de $A'(0)$ indépendamment de d , pour $0 < \kappa \leq 1$. Nous désirons ici avoir une estimation pour $\kappa \in \mathbb{R}^+$. Compte-tenu de (2.29), nous devons contrôler les termes $A'(d)$ et $(1 - f(d)^2)$ indépendamment de d . La proposition 2.2.1, plus précisément (2.6), donne un contrôle satisfaisant du terme $A'(d)$, puisqu'elle permet de majorer $A'(d)$ indépendamment de d pour tout $\kappa > 0$.*

2.5.1.2 Majoration de $A'(0)$

Considérons $(f, A; h)$, une solution de $(GL)_d^s$. Comme nous désirons obtenir une estimation a priori de $h = A'(0)$ indépendante de d , valable pour tout $\kappa > 0$, nous allons examiner la preuve qui conduit à l'estimation (2.33) obtenue dans [3], qui supposait $\kappa \leq 1$. De plus, nous allons obtenir une majoration de la fonction $1 - f$ par une expression dans laquelle ne figure pas le terme $d^{\frac{1}{2}}$.

Nous montrons la proposition :

Proposition 2.5.6 *Pour tous $d \geq 1$, $\kappa \leq 1$ et pour toute solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ avec $f > 0$, on a l'inégalité :*

$$1 - f(x)^2 \leq \frac{32\sqrt{2}h}{3\sqrt{5}f(0)^3}\exp(-\kappa\frac{f(0)x}{4}). \quad (2.34)$$

Preuve

Posons $v = 1 - f$. Partant de l'égalité $-\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + A^2f = 0$, nous pouvons écrire

$$-\kappa^{-2}v'' + Vv = W \quad \text{sur }]0, d[, \quad (2.35)$$

avec

$$\begin{aligned} V &= f(1 + f), \\ W &= A^2f. \end{aligned}$$

Comme la fonction f est positive et croissante, on a l'inégalité :

$$V \geq f(0)^2 \text{ sur }]0, d[. \quad (2.36)$$

Définissons ϕ sur $[0, d]$ par

$$\phi(x) = \frac{f(0)}{4}x. \quad (2.37)$$

Multiplions l'équation (2.35) par $v \exp(2\kappa\phi)$ et intégrons sur $]0, d[$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & - \int_0^d \kappa^{-2} v''(t) v(t) \exp(2\kappa\phi(t)) dt + \int_0^d V(t) v(t)^2 \exp(2\kappa\phi(t)) dt \\ & = \int_0^d W(t) v(t) \exp(2\kappa\phi(t)) dt. \end{aligned}$$

Effectuons une intégration par partie de la première intégrale, et utilisant les égalités $v'(0) = v'(d) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^d \kappa^{-2} (v(t) \exp(\kappa\phi(t)))'^2 dt + \int_0^d (V(t) - \phi'(t)^2) v(t)^2 \exp(2\kappa\phi(t)) dt \\ & = \int_0^d W(t) v(t) \exp(2\kappa\phi(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous majorons le membre de droite de (2.38) de la façon suivante :

$$Wv \exp(2\kappa\phi(t)) = v(1-v)A^2 \exp(2\kappa\phi(t)) \leq A^2 \exp(2\kappa\phi(t)) \text{ sur }]0, d[.$$

Compte-tenu de (2.6) et de la définition de ϕ (voir (2.37)), nous obtenons l'inégalité, pour $\kappa \leq 1$,

$$A^2 \exp(2\kappa\phi(t)) \leq \frac{8h^2}{3f(0)^3} \exp(-f(0)(1 - \frac{\kappa}{2})t) \leq \frac{8h^2}{3f(0)^3} \exp(-f(0)\frac{t}{2}).$$

Minorons $V(t) - \phi'(t)^2$. Pour $\kappa \leq 1$, utilisant (2.36) et (2.37), on obtient l'inégalité

$$V(t) - \phi'(t)^2 \geq \frac{15}{16} f(0)^2.$$

Utilisant que pour $\kappa \leq 1$,

$$\kappa^{-2} \geq \frac{15}{16} f(0)^2,$$

nous déduisons de (2.38) que

$$\frac{15}{16} f(0)^2 \|v \exp(\kappa\phi)\|_{H^1([0,d])}^2 \leq \frac{8h^2}{3f(0)^3} \int_0^d \exp(-f(0)\frac{x}{2}) dx \leq \frac{16h^2}{3f(0)^4}. \quad (2.39)$$

Rappelons que $H^1([0, d])$ s'injecte continuellement dans $C^0([0, d])$ uniformément par rapport à d , c'est-à-dire qu'il existe c_0 telle que, pour tout $d \geq 1$, on a

$$\|u\|_{L^\infty([0,d])} \leq c_0 \|u\|_{H^1([0,d])}, \quad \forall u \in H^1([0, d]). \quad (2.40)$$

La constante c_0 peut être choisie indépendante de d (voir [10], p. 17), et plus précisément prise égale à $c_0 = \sqrt{2}$.

De (2.39) et de (2.40), on déduit l'inégalité

$$v(x) \leq \frac{16\sqrt{2}h}{3\sqrt{5}f(0)^3} \exp(-\kappa \frac{f(0)x}{4}), \quad \forall x \in [0, d]. \quad (2.41)$$

Utilisant l'inégalité $1 - f(x)^2 \leq 2(1 - f(x))$, nous obtenons alors l'inégalité

$$1 - f(x)^2 \leq \frac{32\sqrt{2}h}{3\sqrt{5}f(0)^3} \exp(-\kappa \frac{f(0)x}{4}), \quad \forall x \in [0, d], \quad (2.42)$$

ce qui achève la preuve de la proposition 2.5.6.

Nous pouvons obtenir une estimation analogue à celle donnée en (2.34) pour $\kappa \geq 1$.

Proposition 2.5.7 *Pour tous $d \geq 1$, $\kappa \geq 1$ et pour toute solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ avec $f > 0$, on a l'inégalité :*

$$1 - f(x)^2 \leq \frac{32\sqrt{2}\kappa h}{3f(0)^3} \exp(-\frac{1}{4}f(0)x). \quad (2.43)$$

Preuve

Multiplions l'équation (2.35) par $v \exp(2\phi)$ où ϕ est définie en (2.37) et intégrons sur $]0, d[$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & - \int_0^d \kappa^{-2} v(t)'' v(t) \exp(2\phi(t)) dt + \int_0^d V(t) v(t)^2 \exp(2\phi(t)) dt \\ & = \int_0^d W(t) v(t) \exp(2\phi(t)) dt. \end{aligned}$$

Effectuons une intégration par partie de la première intégrale, et utilisant les égalités $v'(0) = v'(d) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^d \kappa^{-2} (v(t) \exp(\phi(t)))'^2 dt + \int_0^d (V(t) - \kappa^{-2} \phi'(t)^2) v(t)^2 \exp(2\phi(t)) dt \\ & = \int_0^d W(t) v(t) \exp(2\phi(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nous majorons le membre de droite de (2.44) de la façon suivante :

$$Wv \exp(2\phi(t)) = v(1 - v)A^2 \exp(2\phi(t)) \leq A^2 \exp(2\phi(t)) \quad \text{sur }]0, d[.$$

Compte-tenu de (2.6) et de la définition de ϕ (voir (2.37)), nous obtenons l'inégalité

$$A^2 \exp(2\phi(t)) \leq \frac{8h^2}{3f(0)^3} \exp(-\frac{1}{4}f(0)x).$$

Minorons $V(t) - \kappa^{-2}\phi'(t)^2$. Pour $\kappa \geq 1$, en utilisant (2.36), on obtient l'inégalité

$$V(t) - \kappa^{-2}\phi'(t)^2 \geq f(0)^2(1 - \frac{\kappa^{-2}}{16}).$$

De (2.44), on tire l'inégalité

$$\rho(f(0), \kappa) \|(v \exp(\phi(t)))\|_{H^1([0,d])}^2 \leq \frac{8h^2}{3f(0)^3} \int_0^d \exp(-f(0)\frac{x}{2}) dx \leq \frac{16h^2}{3f(0)^4}, \quad (2.45)$$

où

$$\rho(\tau, \kappa) := \min(\kappa^{-2}, \tau^2(1 - \frac{\kappa^{-2}}{16})).$$

On a l'inégalité, pour $\kappa \geq 1$ et $\tau \in]0, 1[$,

$$\min(\kappa^{-2}, \tau^2(1 - \frac{\kappa^{-2}}{16})) \geq \frac{3}{16}\kappa^{-2}\tau^2. \quad (2.46)$$

Nous obtenons alors, d'après (2.45) et utilisant (2.40), l'inégalité

$$v(t) \exp(\phi(t)) \leq \frac{16\sqrt{2}\kappa h}{3f(0)^3}.$$

On en déduit que

$$1 - f(x) \leq \frac{16\sqrt{2}\kappa h}{3f(0)^3} \exp(-\phi(x)), \quad \forall x \in [0, d].$$

Utilisant l'inégalité $1 - f(x)^2 \leq 2(1 - f(x))$, nous obtenons alors l'inégalité

$$1 - f(x)^2 \leq \frac{32\sqrt{2}\kappa h}{3f(0)^3} \exp(-\frac{1}{4}f(0)x),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 2.5.7.

Remarque 2.5.8 Notons que les différences principales entre (2.34) et (2.43) est la disparition de κ dans l'exposant et l'apparition d'une puissance de κ devant l'exposant.

D'après les propositions 2.5.6 et 2.5.7, nous pouvons énoncer la proposition

Proposition 2.5.9 Pour tous $d \geq 1$, pour tous $\kappa > 0$ et pour toute solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ avec $f > 0$; on a l'inégalité :

$$1 - f(x)^2 \leq \frac{32\sqrt{2}h \max(1, \kappa)}{3f(0)^3} \exp(-\frac{\min(\kappa, 1)}{4}f(0)x). \quad (2.47)$$

Nous pouvons énoncer la proposition

Proposition 2.5.10 *Pour tout $d \geq 1$, $\kappa \geq 1$ et pour toute solution de $(GL)_d^s$ avec $f \geq f(0) > 0$, nous avons :*

$$\kappa h^2 \leq \sqrt{2}(1 - f(0)^2)f(0)^2 + hM_1(\kappa, d, f(0)) + h^2M_2(\kappa, d, f(0)), \quad (2.48)$$

où

$$M_1(\kappa, d, t) = 5\sqrt{2}t^{-1}\kappa + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\kappa d\right) \frac{32\sqrt{2}h \max(1, \kappa)}{3t^3} \exp\left(-\frac{\min(\kappa, 1)}{4}td\right),$$

et

$$M_2(\kappa, d, t) = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t^{-3/2}\kappa \exp\left(-\frac{1}{2}td\right) + \frac{8(2d+1)}{3}t^{-1}\kappa \exp(-td).$$

Preuve

Nous partons de l'inégalité (2.29).

Majorons le terme $(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\kappa d)(1 - f(d)^2)$. Utilisant la proposition 2.5.9, on déduit la majoration

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\kappa d\right)(1 - f(d)^2) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\kappa d\right) \frac{32\sqrt{2}h \max(1, \kappa)}{3f(0)^3} \exp\left(-\frac{\min(\kappa, 1)}{4}f(0)d\right).$$

Les autres termes du membre de droite de l'inégalité (2.29) se majorent comme dans la démonstration de la proposition 2.5.3 (voir [10]), en utilisant l'inégalité (2.7).

Ceci achève la preuve de la proposition 2.5.10.

Nous sommes à présent en mesure de donner une majoration de h , sous la condition $f \geq f(0) \geq f_0 > 0$.

Proposition 2.5.11 *Pour tout $\kappa > 0$ et pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe des constantes $\tilde{d}(\kappa) > 0$ et $C(\kappa, f_0) > 0$ telles que, pour tout $d \geq \tilde{d}(\kappa)$, pour toute solution de $(GL)_d^s$ avec $f \geq f(0) \geq f_0$, on ait l'inégalité*

$$h \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.49)$$

Preuve

D'après la proposition 2.5.10, nous obtenons l'inégalité

$$h^2(\kappa - M_2(\kappa, d, f(0))) - M_1(\kappa, d, f(0))h \leq \sqrt{2}(1 - f(0)^2)f(0)^2. \quad (2.50)$$

De plus, d'après (2.31) et (2.32), les quantités $M_1(., d, t)$ et $M_2(., d, t)$ tendent lorsque $d \rightarrow +\infty$ vers zéro, uniformément par rapport à t dans $[t_0, +\infty[$, $t_0 > 0$.

On déduit alors de (2.50) qu'il existe $\tilde{d}(\kappa) > 0$ et $C_0(f_0, \kappa)$ tels que, pour tout $d \geq \tilde{d}(\kappa)$, on ait l'inégalité (2.49), ce qui achève la preuve de la proposition 2.5.11.

2.5.1.3 Contrôle des normes $\|1 - f\|_{H^2([0, d])}$ et $\|A\|_{H^2([0, d])}$

En vue d'effectuer le passage à la limite, nous devons estimer les normes $\|1 - f\|_{H^2([0, d])}$ et $\|A\|_{H^2([0, d])}$, indépendamment de d .

Lemme 2.5.12 *Pour tout $\kappa > 0$ et pour tout $f_0 \in]0, 1]$, il existe des constantes $\tilde{d}(\kappa) > 0$ et $C(\kappa, f_0) > 0$ telles que, pour tout $d \geq \tilde{d}(\kappa)$, pour toute solution de $(GL)_d^s$ avec $f \geq f(0) \geq f_0$, on ait les inégalités*

$$a. \|1 - f\|_{H^2([0, d])} \leq C(\kappa, f_0), \quad b. \|A\|_{H^2([0, d])} \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.51)$$

Preuve

Etape 1 : Contrôle de A dans $H^2([0, d])$

De (2.5), on tire l'inégalité

$$\|A\|_{L^2([0, d])}^2 \leq \frac{h^2}{f(0)^3 \cosh^2(f(0)d)} (\exp(2f(0)d) - 1).$$

Compte-tenu de la proposition 2.5.11, nous déduisons l'existence d'une constante $C(\kappa, f_0)$ et d'un réel $\tilde{d}(\kappa)$ tels que, pour tout $d \geq \tilde{d}(\kappa)$ et toute solution (f, A) de $(GL)_d^s$ avec $f(0) = f_0$, on a l'inégalité

$$\|A\|_{L^2([0, d])}^2 \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.52)$$

De (2.7), on tire une estimation analogue pour $\|A'\|_{L^2([0, d])}$.

On obtient ainsi l'inégalité

$$\|A\|_{H^1([0, d])}^2 \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.53)$$

Compte-tenu de l'égalité $-A'' + f^2 A = 0$, de (2.52) et de $|f| \leq 1$, on obtient, pour $d \geq \tilde{d}(\kappa)$, l'inégalité

$$\|A''\|_{L^2([0, d])} \leq \|A\|_{L^2([0, d])} \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.54)$$

De (2.53) et de (2.54), on déduit (2.51)_b.

Etape 2 : Contrôle de $1 - f$ dans $H^2([0, d])$

De la première équation de Ginzburg-Landau, on tire l'égalité

$$-\kappa^{-2} \frac{f''}{f} + (f^2 - 1 + A^2) = 0.$$

Intégrant alors cette inégalité entre 0 et d , on obtient

$$\kappa^{-2} \int_0^d \left(\frac{f'}{f}\right)^2 dx = \int_0^d (f^2 - 1 + A^2) dx,$$

soit finalement

$$\int_0^d (1 - f^2(x)) dx \leq \int_0^d A^2(x) dx. \quad (2.55)$$

Comme d'après (2.2), $|f| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\int_0^d (1 - f(x))^2 dx \leq \int_0^d (1 - f^2(x)) dx \leq \int_0^d A^2(x) dx. \quad (2.56)$$

De l'inégalité (2.7), et de la proposition 2.5.11, il résulte que

$$dA'(d) \rightarrow 0 \text{ quand } d \rightarrow +\infty.$$

De (2.3) on tire,

$$\kappa^{-2} \int_0^d f'(x)^2 dx \leq \int_0^d (\frac{1}{2}(1 - f^2(x))^2) dx + dA'(d)^2 + \int_0^d \sqrt{2}A'(d)(1 - f^2(x)) dx. \quad (2.57)$$

Utilisant alors (2.56), (2.57) et le fait que $dA'(d) \rightarrow 0$ quand $d \rightarrow +\infty$, on déduit l'inégalité

$$\|1 - f\|_{H^1(0,d)} \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.58)$$

Par ailleurs, on a

$$\kappa^{-4} \int_0^d (f'')^2 dx = \int_0^d f^2(f^2 - 1 + A^2)^2 dx,$$

soit, comme $|f| < 1$,

$$\kappa^{-4} \int_0^d (f'')^2 dx \leq \int_0^d (f^2 - 1 + A^2)^2 dx \leq \int_0^d A^4 dx + \int_0^d (f^2 - 1)^2 dx. \quad (2.59)$$

Compte-tenu de la proposition 2.2.1 (voir (2.5)), la fonction A vérifie l'inégalité :

$$A^2(x) \leq \frac{h^2}{f_0^2}, \quad \forall x \in [0, d].$$

Utilisant (2.49), on déduit l'inégalité :

$$\int_0^d A^4 dx \leq \frac{h^2}{f(0)^2} \int_0^d A^2 dx \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.60)$$

De plus, on a l'inégalité

$$\int_0^d (f^2 - 1)^2 dx \leq \int_0^d (1 - f^2) dx,$$

dont on déduit, utilisant (2.54) et (2.55), l'inégalité

$$\int_0^d (f^2 - 1)^2 dx \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.61)$$

Utilisant (2.59), (2.60) et (2.61), on obtient finalement

$$\|f''\|_{L^2([0,d])} \leq C(\kappa, f_0). \quad (2.62)$$

De (2.58) et de (2.62), on déduit (2.51)_a, ce qui achève la preuve du lemme 2.5.12.

2.5.2 Passage à la limite

Preuve de la proposition 2.5.1

Soit $k > 0$, d_n une suite strictement croissante de réels telle que $d_n \rightarrow +\infty$ et K un compact de $\overline{\mathbf{R}^+}$.

Soit (f_{d_n}, A_{d_n}) , un couple de fonctions définies dans la proposition 2.4.1.

Désignons par F l'espace vectoriel constitué des fonctions $\phi \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}^+})$ telles que le support de ϕ dans $\overline{\mathbf{R}^+}$ soit compact.

Introduisons l'espace $H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+})$ défini par

$$H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+}) = \{u \in D'(\mathbf{R}^+), \forall \phi \in F, \phi u \in H^1(\mathbf{R}^+)\}.$$

Montrons que l'on peut extraire une sous-suite de la suite (f_{d_n}, A_{d_n}) qui converge dans $H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+})$ au sens suivant. Etant donné K , un compact de $\overline{\mathbf{R}^+}$, soit d_{n_0} le plus petit entier tel que $K \subset [0, d_{n_0}]$. Alors, la suite $(f_{d_n}, A_{d_n})_{n \geq n_0}$ converge dans $H^1(K)$.

Afin d'alléger les notations, posons $g_n = f_{d_n}$ et $h_n = A_{d_n}$.

Plaçons-nous sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit m_1 le plus petit entier tel que, pour tout $n \geq m_1$, $d_n \geq 1$. Compte-tenu du lemme 2.5.12, par compacité, on peut extraire de la suite $(g_n)_{n \geq m_1}$ une sous-suite notée $(g^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $g_n^{(1)} := f_{d_{\phi_1(n)}}$, où $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, telle que $g^{(1)}$ converge dans $H^1([0, 1])$.

Soit m_2 le plus petit entier tel que, pour tout $n \geq m_2$, $d_{\phi_1(n)} \geq 2$. De la suite $(g^{(1)})_{n \geq m_2}$, d'après le lemme 2.5.12, par compacité, on peut extraire une sous-suite notée $(g^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $g_n^{(2)} = f_{d_{\phi^{(2)}(n)}}$, où $\phi^{(2)} = \phi_1 \circ \phi_2$ avec $\phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, qui converge dans $H^1([0, 2])$, et ainsi de suite.

Nous obtenons ainsi des suites $g^{(i)}$, telles que $g^{(i)}$ soit une sous-suite extraite de $g^{(i-1)}$ qui converge dans $H^1([0, i])$, $i \in \mathbb{N}$, définie par $g_n^{(i)} = f_{d_{\phi^{(i)}(n)}}$ où $\phi^{(i)} = \phi^{(i-1)} \circ \phi_n$ avec $\phi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Considérons alors la suite "diagonale" $(g_i^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Cette suite converge dans $H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+})$ au sens suivant.

Etant donné K , un compact de $\overline{\mathbf{R}^+}$, soit i le plus petit entier tel que $K \subset [0, i]$. Alors, la suite $(g_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $H^1(K)$, donc à fortiori la suite "diagonale" $(g_k^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, dont les éléments appartiennent à la suite $(g_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ dès que $k \geq i$. Par un raisonnement analogue, on construit une sous-suite $(h_i^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+})$. Notons par (f, A) la limite dans $H_{loc}^1(\overline{\mathbf{R}^+})$ de la suite $(g_i^{(i)}, h_i^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$.

Par abus de langage, nous noterons la sous-suite extraite (f_{d_n}, A_{d_n}) . L'injection de $H^1(K)$ dans $C^0(K)$ est continue, donc la suite (f_{d_n}, A_{d_n}) converge uniformément dans K . Pour tout compact de $\overline{\mathbf{R}^+}$, par construction, la suite construite précédemment vérifie :

$$\begin{aligned} a. & f_{d_n} \rightarrow f, \quad A_{d_n} \rightarrow A \quad \text{dans } C^0(K), \\ b. & f_{d_n} \rightarrow f, \quad A_{d_n} \rightarrow A \quad \text{dans } H^1(K). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Soit n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $K \subset [0, d_{n_0}]$.

Pour tout $n \geq n_0$, on a les égalités

$$-\kappa^{-2} f''_{d_n} - f_{d_n} + f_{d_n}^3 + A_{d_n}^2 f_{d_n} = 0, \text{ dans } D'(K) \quad (2.64)$$

et

$$-A''_{d_n} + A_{d_n} f_{d_n}^2 = 0, \text{ dans } D'(K).$$

De (2.63)_b, en faisant tendre n vers l'infini, on déduit que

$$\begin{aligned} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f &= 0, \text{ dans } D'(K) \\ -A'' + A f^2 &= 0, \text{ dans } D'(K). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Compte tenu de (2.63)_b et de (2.65), $f \in H^3(K)$ et $A \in H^3(K)$. Puis, en itérant, on obtient que $f \in \cap_m H^m(K)$ et $A \in \cap_m H^m(K)$, donc que (f, A) est solution de $(GL)_\infty$ au sens usuel (a priori sans les conditions aux limites).

Compte tenu de (2.63), pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a les inégalités

$$\|1 - f\|_{H^1(K)} \leq \|1 - f_{d_n}\|_{H^1(K)} + \epsilon$$

et

$$\|A\|_{H^1(K)} \leq \|A_{d_n}\|_{H^1(K)} + \epsilon.$$

Compte-tenu du lemme 2.5.12, il existe une constante $C > 0$ indépendante de K telle que,

$$\forall K \subset \mathbb{R}^+, \quad \|1 - f\|_{H^1(K)} \leq C \text{ et } \|A\|_{H^1(K)} \leq C.$$

Il résulte de ces deux inégalités que $1 - f \in H^1(\mathbb{R}^+)$ et $A \in H^1(\mathbb{R}^+)$.

Compte-tenu de (2.63)_a avec $K = [0, 1]$, on déduit que $f_{d_n}(0)$ converge vers $f(0)$. Comme $f_{d_n}(0) = f_0$, il en résulte que $f(0) = f_0$.

Par ailleurs, compte tenu du lemme 2.5.12, par compacité, nous déduisons l'existence d'une sous-suite telle que f_{d_n} converge vers f dans $H_{loc}^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathbb{R}^+)$, où $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}[$. On déduit que $(f_{d_n})'$ converge vers f' dans $H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(]0, 1[)$ (par restriction à $]0, 1[$). Donc, par continuité de l'application trace,

$$\begin{aligned} H_{loc}^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathbb{R}^+) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow g(0), \end{aligned}$$

$f'_{d_n}(0)$ tends vers $f'(0)$. De l'égalité $f'_{d_n}(0) = 0$, on tire l'égalité $f'(0) = 0$.

Le couple (f, A) est donc solution forte de $(GL)_\infty$, et vérifie de plus la condition $f(0) = f_0$, ce qui achève la preuve de la proposition 2.5.1.

Le théorème 2.1.2 découle immédiatement des propositions 2.3.1 et 2.5.1.

2.6 Problèmes ouverts et perspectives

Dans la proposition 2.4.1, nous avons montré l'existence d'une solution de $(GL)_d^s$ telle que $f(0) = f_0$ ($f_0 \in [0, 1]$), mais nous n'avons pas abordé le problème de l'unicité de la solution.

Les résultats numériques obtenues par A. Aftalion et W. C. Troy dans [1] nous conduisent à poser la conjecture

Conjecture 2.6.1 *Pour tout $\kappa > 0$, il existe $\beta_0(\kappa) \in]0, 1[$ et $d_0(\kappa) > 0$ tels que, pour tout $\beta \in]\beta_0(\kappa), 1[$, pour tout $d \geq d_0(\kappa)$, il existe un unique triplet $(f, A; h)$ solution de*

$$\begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + f A^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \\ -A'' + A f^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \end{cases} \quad (2.66)$$

avec les conditions aux limites

$$f(0) = \beta, \quad f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A(d) = 0, \quad A'(0) = h. \quad (2.67)$$

Nous avons établi dans le théorème 2.1.2 l'existence d'une application σ définie sur $]0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ qui à f_0 associe $A'(0)$. Il serait très intéressant d'étudier les variations de cette fonction.

Rappelons que C. Bolley et B. Helffer ont montré dans [9] que

$$\lim_{f_0 \rightarrow 0} \sigma(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il est raisonnable de penser que l'application σ , qui à f_0 associe la valeur de A' en 0 est continue sur $]0, 1]$.

Un des problèmes qui se pose alors est d'étudier la stabilité des solutions (f, A, h) définies dans le théorème 2.1.2. Des résultats formels et numériques obtenus par Dorsey, Dolgert et Di Bartolo dans [19] nous conduisent à poser la conjecture :

Conjecture 2.6.2 *Pour tout $\kappa \in \mathbf{R}^+$, pour tout $f_0 \in]0, 1[$, soit $(f_\kappa, A_\kappa, h_\kappa)$ l'unique solution de $(GL)_\infty$ telle que*

$$f_\kappa(0) = f_0. \quad (2.68)$$

Il existe $\kappa_0 > 0$ et une application θ de classe C^∞ , définie sur $]0, \kappa_0]$ et vérifiant $\theta(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, la solution $(f_\kappa, A_\kappa, h_\kappa)$ de $(GL)_\infty$ vérifiant (2.68) avec $f_0 < \theta(\kappa)$ est instable, pour tout $f_0 > \theta(\kappa)$, la solution est stable.

Bibliographie

- [1] A. Aftalion et W. C. Troy.
On the solutions of the one-dimensionnal Ginzburg-Landau equations for superconductivity.
Physica D 132, No. 1-2, p. 214-232, 1999.
- [2] C. Bolley et P. Del Castillo
Existence and uniqueness for the half-space Ginzburg-Landau model.
A paraître dans Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.
- [3] C. Bolley., F. Foucher et B. Helffer
Superheating field for the Ginzburg-Landau equations in the case of a large bounded interval.
A paraître dans *J. Math. Phys.* (2000) .
- [4] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit.
Reviews in Mathematical Physics, Vol. 8, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [5] C. Bolley et B. Helffer.
Upper bound for the solution of the Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting field and applications to the superheating field in the large κ regime.
European Journal of Applied Mathematics, Vol. 8, p. 347-367, 1997.
- [6] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior magnetic field.
Part I. Nonlinear Studies No. 3, p. 1-29, 1996.
- [7] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior parallel magnetic field.
Part II. Nonlinear Studies, Vol. 3, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [8] C. Bolley et B. Helffer.
Superheating field in a semi-infinite film in the weak κ limit: numerical results and approximate models.
Mathematical modelling and numerical analysis, Vol. 31, No. 1, p. 121 à 165, Novembre 1997.

- [9] C. Bolley et B. Helffer.
A priori estimates for Ginzburg-Landau solutions.
Contribution pour Cargèse, 1999. A paraître dans NATO Science Series.
- [10] M.K. Kwong.
On the one-dimensional Ginzburg-Landau BVPs.
Diff. Int. Equations 8, p. 1395-1405, 1995.

Chapitre 3

Existence d'un développement formel du champ de surchauffe quand κ tend vers zéro

3.1 Introduction

Dans un article (voir [12]) consacré à l'étude du champ de surchauffe, Dorsey, Di Bartolo et Dolgert construisent par une procédure de recollement une famille de solutions formelles du système de Ginzburg-Landau. Les auteurs en déduisent un développement formel du champ de surchauffe à l'ordre 4. Nous nous proposons de montrer dans ce chapitre qu'il est effectivement possible d'obtenir un développement formel à tout ordre du champ de surchauffe, comme conséquence de la construction de solutions formelles de $(GL)_\infty$.

Rappelons qu'une condition nécessaire pour que le couple (F, A) soit un point critique de la fonctionnelle ϵ_∞ , définie en (1.5), est qu'il soit solution des équations de Ginzburg-Landau :

$$\begin{cases} -\kappa^2 F'' - F + F^3 + F A^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ -A'' + A F^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$F'(0) = 0, \quad A'(0) = h_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0. \quad (3.2)$$

Posons $H = A'$. On obtient le nouveau système :

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} F'' - F + F^3 + A^2 F = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ -A'' + A F^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ H = A' & \text{sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$F'(0) = 0, \quad H(0) = h_0, \quad (3.4)$$

à l'origine et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0, \quad (3.5)$$

à l'infini.

On note dans ce chapitre l'égalité au sens des séries formelles par le symbole $\sim$.

Dans la section 3.2, sous l'hypothèse κ petit, on construit des solutions formelles du système de Ginzburg-Landau, qu'on cherche à déterminer sous forme d'un développement formel en puissances de κ .

On construit tout d'abord une solution formelle nommée extérieure, vérifiant le système (3.3) et les conditions aux limites à l'infini (3.4): elle aura donc comme fonction de bien approcher la solution à l'infini. On cherche une solution formelle (F^e, Q^e, H^e) , en puissances de κ du système (3.3) sous la forme

$$F^e(x') \sim \sum_0^\infty f_i(x')\kappa^i, \quad Q^e(x') \sim \sum_0^\infty q_i(x')\kappa^i \text{ et } H^e(x') \sim \sum_0^\infty h_i(x')\kappa^i$$

où f_i , q_i et h_i sont des fonctions définies sur $\overline{\mathbf{R}^+}$ et de classe C^∞ . Puis on construit une solution nommée intérieure, vérifiant le système et les conditions aux limites en zéro: elle aura comme fonction de bien approcher la solution près de l'origine. On sait d'après la formule de De Gennes que:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (3.6)$$

Cette égalité suggère de chercher A sous la forme:

$$A(x) = \kappa^{-\frac{1}{2}} Q(x). \quad (3.7)$$

Tenant compte de ce changement de variable, le système (3.3) devient:

$$\begin{cases} F'' - \kappa Q^2 F + \kappa^2 (F - F^3) = 0 \\ Q'' - F^2 Q = 0 \\ \kappa^{\frac{1}{2}} H = Q'. \end{cases} \quad (3.8)$$

avec les conditions aux limites:

$$F'(0) = 0, \quad \kappa^{-\frac{1}{2}} Q'(0) = h_0. \quad (3.9)$$

On cherche la solution intérieure (F^i, Q^i, H^i) sous la forme

$$F^i \sim \sum_0^\infty F_i \kappa^i, \quad Q^i \sim \sum_0^\infty Q_i \kappa^i \text{ et } H^i \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty H_i \kappa^i,$$

où F_i , Q_i et H_i sont des fonctions définies sur $\overline{\mathbf{R}^+}$ de classe C^∞ .

L'une des difficultés réside dans le raccordement de la solution extérieure et intérieure. Nous définissons également dans cette section une notion de raccordement des solutions

intérieure et extérieure à l'ordre n . La technique utilisée pour effectuer ce raccordement est celle du matching. Elle est due à M. van Dyke. (voir ([15])).

Dans la section 3.3, nous retrouvons la formule de H. Parr ([14]) en suivant les calculs formels menés dans [12]. Nous donnons également les conditions de raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^2)$ et $\mathcal{O}(\kappa^3)$ des solutions intérieure et extérieure.

Dans la section 3.4, nous démontrons que la procédure de recollement proposée dans la section 3.2 est d'une part naturelle et d'autre part conduit à un système infini d'équations algébriques. Nous montrons que ce système admet des solutions, puis nous précisons sous quelles conditions peut s'effectuer le raccordement des solutions extérieure et intérieure à l'ordre n .

Nous introduisons alors la définition

Définition 3.1.1 *Une solution formelle du système de Ginzburg-Landau (3.3), est la donnée d'une paire $((F^e, Q^e, H^e); (F^i, Q^i, H^i))$ composée d'une solution formelle extérieure et intérieure dont on a effectué le raccordement à tout ordre.*

La question majeure abordée dans ce chapitre est de savoir si la procédure de recollement permet d'obtenir un développement formel du champ de surchauffe à tout ordre. Nous montrons que la procédure utilisée permet d'exprimer $A'(0)$ sous forme d'un développement en série formelle.

Afin d'obtenir ce développement, nous établissons dans la section 3.4 le théorème :

Théorème 3.1.2 *Etant donné un réel $t \in]0, 1[$, il existe une unique solution formelle en puissances de κ des équations de Ginzburg-Landau (3.3) vérifiant formellement les conditions aux limites*

$$\begin{aligned} F^i(0, \kappa) &\sim t, \quad (F^i)'(0, \kappa) \sim 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F^e(x, \kappa) &= 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Q^e(x, \kappa) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

précisément,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x, \kappa) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x, \kappa) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} q_j(x, \kappa) &= 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De plus,

$$(A^i)'(0) := \kappa^{-\frac{1}{2}}(Q^i)'(0) \quad (3.12)$$

se représente de manière unique sous forme d'une série formelle en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ à coefficients de classe C^∞ sur $]0, 1[$.

Nous notons dans ce qui suit la dépendance de la série formelle H^i et de ces coefficients H_i par rapport au paramètre t de la façon suivante : $H^i(x; t, \kappa)$ et $H_i(0; t)$.

Par ailleurs, nous posons

$$h(t, \kappa) := H^i(0; t, \kappa) \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \kappa^i. \quad (3.13)$$

Dans la section 3.5, nous déterminons un développement formel du champ de surchauffe, $h^{sh}(\kappa)$, en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$.

Afin de déterminer un développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe, nous sommes conduits à définir le maximum par rapport à t d'une série formelle en puissances de κ , à coefficients C^∞ définis pour $t \in]0, 1[$.

Lorsque le terme principal ϕ_0 admet un maximum sur $]0, 1[$, non dégénéré, en un point $t_0 \in]0, 1[$, on montre qu'il existe une notion naturelle de maximum pour la série ϕ . La définition de maximum de la série formelle ϕ par rapport à la variable t est donnée dans la sous-section 3.5.3.

On établit dans cette sous-section le résultat suivant :

Théorème 3.1.3 *Soit ϕ une série formelle en puissances de κ , à coefficients de classe C^∞ définis sur $]0, 1[$, telle que*

$$\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i.$$

Supposons que la partie principale ϕ_0 admette un unique maximum au point $t_0 \in]0, 1[$ et qu'il est de plus non dégénéré, c'est-à-dire tel que

$$\phi'_0(t_0) = 0 \text{ et } \phi''_0(t_0) < 0.$$

Alors la série formelle ϕ admet un unique maximum "formel" sur $]0, 1[$.

Lors de la construction de H^i , nous constatons que $H_0(0, t)$ admet un unique maximum non dégénéré au point $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Appliquant alors le théorème 3.1.3, on en déduit le résultat majeur de ce chapitre

Théorème 3.1.4 *Considérons la série formelle*

$$\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i \text{ et } \phi(t, \kappa) \sim \kappa^{\frac{1}{2}} h(t, \kappa),$$

définie dans le théorème 3.1.2.

La série formelle ϕ admet un unique maximum sur $]0, 1[$.

Ce maximum correspond à un développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe.

Pratiquement, pour déterminer ce maximum, on remplace t par $t(\kappa) \sim \sum_0^\infty t_i \kappa^i$ dans la série formelle ϕ . Puis, quelque soit l'entier naturel i , on effectue un développement de Taylor de ϕ_i au point t_0 et on réordonne l'expression obtenue en puissances de κ . On montre alors que pour tout entier naturel n , il est possible de maximiser le coefficient de κ^n par rapport aux variables t_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. On montre qu'il est équivalent de maximiser $\phi(t, \kappa)$ par rapport à la variable t et $\phi(t(\kappa), \kappa)$ en maximisant chaque coefficient de κ par rapport aux variables t_i .

Dans la section 3.6, nous donnons l'algorithme de calcul du champ de surchauffe formel et nous récapitulons les résultats numériques obtenus que nous comparons à ceux obtenus par Dorsey, Dolgert et Di Bartolo dans [12].

Dans la section 3.7, nous discutons une conjecture due à H. J. Fink, D. S. McLachlan et B. Rothberg-Bibby (voir [11]). Nous montrons que les développements formels obtenus dans les sections précédentes mettent en défaut la conjecture de ces auteurs.

Notation 3.1.5 On note par $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées, par $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$ le corps des fractions à n indéterminées et par $\mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles à n indéterminées.

Afin d'alléger les notations, on pose :

$$\bar{A}_n := (A_0, \dots, A_n), \quad \bar{B}_n := (B_0, \dots, B_n) \quad \text{et} \quad \bar{C}_n := (C_0, \dots, C_n), \quad (3.14)$$

et

$$\tilde{A}_n := (A_1, \dots, A_n), \quad \tilde{B}_n := (B_1, \dots, B_n) \quad \text{et} \quad \tilde{C}_n := (C_1, \dots, C_n). \quad (3.15)$$

Pour $i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on pose

$$\begin{aligned} |i|_{0,n} &:= i_0 + i_1 + \dots + i_n, & |i|_{1,n} &:= i_1 + i_2 + \dots + i_n, \\ |i|_{2,n} &:= i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 Construction d'une solution formelle

3.2.1 Construction de la solution extérieure.

Introduisons la variable extérieure $x' = \kappa x$. Effectuons le changement de variable dans le système (3.3) avec cette nouvelle variable. Posons

$$F^e(x', \kappa) := F(x, \kappa), \quad Q^e(x', \kappa) := A(x, \kappa), \quad H^e(x', \kappa) := H(x, \kappa).$$

Le système (3.3) devient :

$$\begin{cases} (F^e)'' - (Q^e)^2 F^e + F^e - (F^e)^3 = 0 \\ \kappa^2 (Q^e)'' - Q^e (F^e)^2 = 0 \\ H^e = \kappa (Q^e)', \end{cases} \quad (3.17)$$

où la différenciation s'exprime par rapport à la variable x' .

Définition 3.2.1 On appelle solution formelle extérieure, la donnée de trois séries formelles (F^e, Q^e, H^e) , en puissances de κ , à coefficients C^∞ sur $\overline{\mathbf{R}}^+$,

$$F^e \sim \sum_0^\infty f_i \kappa^i, \quad Q^e \sim \sum_0^\infty q_i \kappa^i \quad \text{et} \quad H^e \sim \sum_0^\infty h_i \kappa^i, \quad (3.18)$$

qui sont solutions formelles du système (3.17), et dont les coefficients vérifient

$$f_0 \rightarrow 1, \quad f_j \rightarrow 0, \quad q_i \rightarrow 0, \quad h_i \rightarrow 0 \quad i \in \mathbb{N}$$

quand x' tend vers $+\infty$.

Soit $C \in \mathbb{R}$. Notons par $S(x', C)$ et $C(\kappa)$ les séries formelles définies par

$$S(x', C) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{C^j}{j!} f_0^{(j)}(x'), \quad C(\kappa) \sim \sum_1^\infty C_n \kappa^n, \quad (3.19)$$

où

$$f_0(x') := \tanh\left(\frac{x' + C_0}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.20)$$

Proposition 3.2.2 *Toute solution formelle extérieure est égale à*

$$\begin{cases} F^e(x', \kappa) \sim S(x', C(\kappa)), \\ Q^e(x', \kappa) \sim 0, \\ H^e(x', \kappa) \sim 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

où $S(x', C(\kappa))$ est la série formelle en κ obtenue en substituant dans $S(x', C)$ l'indéterminée C par $C(\kappa)$ et en redéveloppant et réordonnant l'expression en puissances de κ .

De plus,

$$f_n = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{|i|_{2,n} = n \\ |i|_{1,n} = m}} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} \prod_{k=1}^n C_k^{i_k} f_0^{(m)}, \quad (3.22)$$

où f_0 est définie en (3.20).

Preuve

Remplaçons F^e , Q^e et H^e par leur développement respectif dans le système (3.17).

Les égalités ainsi obtenues sont vraies au premier ordre si et seulement si :

$$\begin{cases} f_0'' - q_0^2 f_0 + f_0 - f_0^3 = 0 \\ -f_0^2 q_0 = 0 \\ h_0 = 0. \end{cases}$$

Supposons que q_0 soit non nulle sur un intervalle, alors f_0 serait identiquement nulle sur cet intervalle et finalement identiquement nulle par Cauchy-Lipschitz. Puisque f_0 tend vers 1 en $+\infty$, f_0 ne peut être identiquement nulle, et on a donc $q_0 = 0$.

Réolvons alors l'équation :

$$f_0'' + f_0 - f_0^3 = 0. \quad (3.23)$$

Il est naturel de supposer, compte-tenu de la propriété 3 (voir (2.9)) que

$$f_0' > 0, \quad 0 \leq f_0 < 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_0'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x) = 0. \quad (3.24)$$

On a :

$$f_0' f_0'' + f_0' f_0 - f_0' f_0^3 = 0$$

d'où, pour une constante c :

$$\frac{(f_0')^2}{2} + \frac{f_0^2}{2} - \frac{f_0^4}{4} + c = 0.$$

En utilisant les conditions à l'infini sur f_0 et f'_0 données en (3.24), on obtient :

$$c = -\frac{1}{4}.$$

Il en résulte que

$$(f'_0)^2 = \frac{1}{2}(1 - f_0^2)^2.$$

On peut alors écrire en utilisant (3.24) que :

$$f'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - f_0^2) \quad (3.25)$$

d'où, par intégration élémentaire, il existe une constante réelle C_0 telle que

$$f_0(x') = \tanh\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{C_0}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.26)$$

Par récurrence, montrons que d'une façon générale :

$$q_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le résultat est vrai pour $n = 0$, d'après ce qui précède.

Supposons que $q_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme Q^e est solution formelle de :

$$\kappa^2 (Q^e)'' - Q^e (F^e)^2 = 0,$$

la fonction q_{n+1} vérifie :

$$q_{n+1} f_0^2 = 0,$$

d'où la propriété

$$q_{n+1} = 0,$$

pour les mêmes raisons que précédemment.

Ceci achève la récurrence, et montre que la série formelle de Q^e en puissances de κ est nulle. Il en va de même pour la série formelle H^e . Il en résulte que F^e vérifie en un sens formel l'équation (3.23), et que

$$F^e(x', \kappa) \sim \tanh\left(\frac{x' + C_0 + C(\kappa)}{\sqrt{2}}\right) \sim f_0(x' + C(\kappa)). \quad (3.27)$$

Comme on cherche une solution F^e s'écrivant sous la forme (3.18), on définit $C(\kappa)$ de la façon suivante

$$C(\kappa) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \kappa^n. \quad (3.28)$$

Effectuant un développement en série entière de tangente hyperbolique au point $\frac{x'+C_0}{\sqrt{2}}$, on peut alors écrire que :

$$F^e(x', \kappa) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{C(\kappa)^j}{j!} f_0^{(j)}(x'). \quad (3.29)$$

Le coefficient de κ^n dans (3.18), pour $n \geq 1$ est égal à la somme des coefficients de κ^n dans $f_0^{(m)} \frac{C(\kappa)^m}{m!}$ pour m variant de 1 à n . Il est donné par :

$$f_n = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{|i|_{2,n} = n \\ |i|_{1,n} = m}} \frac{m!}{i_1! \cdots i_n!} \prod_{k=1}^n C_k^{i_k} f_0^{(m)}. \quad (3.30)$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.2.2.

Remarque 3.2.3 Cette solution ne satisfait pas la condition $(F^e)'(0, \kappa) = 0$. On pourra seulement l'utiliser au voisinage de l'infini.

Notons également qu'aucune condition ne porte sur les réels C_j , $j \in \mathbb{N}$, introduits en (3.28).

3.2.2 Construction de la solution intérieure

Construisons de même un développement de F , A , H en puissances de κ , avec pour but que (F, A, H) soit solution formelle de (3.3) et que F vérifie la condition $F'(0, \kappa) = 0$. On souhaite en effet utiliser cette solution au voisinage de zéro.

C. Bolley et B. Helffer ont montré dans [5] et [8] que :

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (3.31)$$

Cette égalité suggère de chercher A sous la forme :

$$A(x) = \kappa^{-\frac{1}{2}} Q(x). \quad (3.32)$$

Le système (3.3) devient :

$$\begin{cases} F'' - \kappa Q^2 F + \kappa^2 (F - F^3) = 0 \\ Q'' - F^2 Q = 0 \\ \kappa^{\frac{1}{2}} H = Q', \end{cases} \quad (3.33)$$

avec les conditions aux limites :

$$F'(0) = 0, \quad \kappa^{-\frac{1}{2}} Q'(0) = h_0. \quad (3.34)$$

Définition 3.2.4 On appelle solution formelle intérieure la donnée de trois séries formelles (F^i, Q^i, H^i) en puissances de κ , à coefficients C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, telles que

$$F^i \sim \sum_0^\infty F_i \kappa^i, \quad Q^i \sim \sum_0^\infty Q_i \kappa^i \quad \text{et} \quad H^i \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty H_i \kappa^i, \quad (3.35)$$

et qui sont solutions formelles des équations de Ginzburg-Landau (3.33), F^i vérifiant formellement la condition de Neumann en 0, ce qui signifie que $F_i'(0) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Si l'on considère les séries formelles

$$A(\kappa) \sim \sum_0^\infty A_n \kappa^n, \quad B(\kappa) \sim \sum_0^\infty B_n \kappa^n, \quad D(\kappa) \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty D_n \kappa^n,$$

on parlera de solution formelle intérieure à données initiales $(A(\kappa), B(\kappa), D(\kappa))$, si

$$F^i(0, \kappa) \sim A(\kappa), \quad Q^i(0, \kappa) \sim B(\kappa), \quad H^i(0, \kappa) \sim D(\kappa).$$

En vue de faire le raccordement de la solution intérieure et extérieure, on incorpore la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^i(x, \kappa) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_j(x) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Déterminons explicitement la solution intérieure.

Remplaçons F^i , Q^i , H^i par leur développement respectif dans le système précédent. On obtient pour chacune des trois équations de (3.33) un développement dont l'annulation au sens des séries formelles se traduit par celle de chacun des coefficients de κ^j dans ces développements.

Annulation du coefficient de κ^0 .

Le coefficient de κ^0 est nul dans chaque développement, si on a les trois égalités suivantes :

$$F_0'' = 0, \quad Q_0'' - F_0^2 Q_0 = 0, \quad H_0 = Q_0'. \quad (3.37)$$

Tenant compte de la condition aux limites $F_0'(0) = 0$ et de (3.36), on obtient :

$$F_0(x, A_0) = A_0, \quad (3.38)$$

$$Q_0(x, A_0, B_0) = B_0 \exp(-A_0 x), \quad (3.39)$$

et

$$H_0(x, A_0, B_0) = -A_0 B_0 \exp(-A_0 x). \quad (3.40)$$

Compte-tenu des rappels (2.8) et (2.10) il semble naturel de supposer que :

$$0 < A_0 < 1 \text{ et } B_0 < 0. \quad (3.41)$$

On obtient ainsi une solution approchée (F_0, Q_0, H_0) qui dépend de deux paramètres A_0 et B_0 avec $(A_0, B_0) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_-$.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse (3.41).

Annulation du coefficient de κ .

Le coefficient de κ est nul dans chaque développement si et seulement si :

$$F_1'' = Q_0^2 F_0, \quad (3.42)$$

$$Q_1'' - F_0^2 Q_1 = 2F_0 Q_0 F_1, \quad (3.43)$$

et

$$H_1 = Q_1'. \quad (3.44)$$

Tenant compte des conditions aux limites $F_1'(0) = 0$ et $Q_1(0) = B_1$, et de (3.36), on obtient :

$$F_1(x, \bar{A}_1, B_0) = A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} + \frac{B_0^2}{2}x + \frac{B_0^2}{4A_0} \exp(-2A_0x) \quad (3.45)$$

$$Q_1(x, \bar{A}_1, \bar{B}_1) = \frac{B_0^3}{16A_0^2} \exp(-3A_0x) + (B_1 - \frac{B_0^3}{16A_0^2} - B_0A_1x - \frac{B_0^3}{4}x^2) \exp(-A_0x), \quad (3.46)$$

et

$$H_1(x, \bar{A}_1, \bar{B}_1) = \frac{-3B_0^3}{16A_0} \exp(-3A_0x) + (-B_0A_1 - A_0B_1) \exp(-A_0x) + (\frac{B_0^3}{16A_0} + (A_0B_0A_1 + \frac{B_0^3}{2})x + \frac{A_0B_0^3}{4}x^2) \exp(-A_0x). \quad (3.47)$$

Annulation du coefficient de κ^2 .

Le coefficient de κ^2 est nul dans chaque développement si et seulement si :

$$F_2'' = -F_0 + F_0^3 + 2Q_0Q_1F_0 + Q_0^2F_1, \quad (3.48)$$

$$Q_2'' - A_0^2Q_2 = F_1^2Q_0 + 2F_0F_1Q_1 + 2F_0F_2Q_0, \quad (3.49)$$

et

$$H_2 = Q_2'. \quad (3.50)$$

La solution de la première équation est donnée par :

$$F_2(x, \bar{A}_2, \bar{B}_1) = P_1(x) + P_2(x) \exp(-2A_0x) + \frac{3}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} \exp(-4A_0x), \quad (3.51)$$

où

$$P_1(x) = \frac{17}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4} \frac{B_0^2A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0B_1}{A_0} + A_2 + (B_0B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2})x - \frac{1}{2}A_0(1 - A_0^2)x^2, \quad (3.52)$$

et

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \frac{B_0B_1}{A_0} - \frac{1}{4} \frac{B_0^2A_1}{A_0^2} - \frac{5}{32} \frac{B_0^4}{A_0^3} - (\frac{1}{8} \frac{B_0^4}{A_0^2} + \frac{1}{2} \frac{B_0^2A_1}{A_0})x - \frac{1}{8} \frac{B_0^4}{A_0}x^2. \quad (3.53)$$

Le second membre de l'équation (3.49) est une somme de produits d'exponentielles polynômes d'après (3.45), (3.46) et (3.51), donc la fonction Q_2 a une structure de ce type. De plus, cette fonction dépend de six paramètres, A_0 , A_1 , A_2 et B_0 , B_1 , B_2 . Compte tenu de la définition de H_2 , cette fonction présente la même structure que Q_2 .

Annulation du coefficient de κ^n

Précisons la structure des fonctions F_n , Q_n et H_n pour $n \geq 2$.

Le coefficient de κ^n est nul dans chaque développement si et seulement si :

$$F_n'' = -F_{n-2} + I_n + J_n, \quad (3.54)$$

$$Q_n'' - A_0^2 Q_n = \sum_{\substack{\ell + |i|_{2,n} = n, \ell \leq n-1 \\ |i|_{0,n} = 2}} \frac{2!}{i_0! \cdots i_n!} Q_\ell \prod_{k=0}^n F_k^{i_k} \quad (3.55)$$

et

$$H_n = Q_n'. \quad (3.56)$$

Les fonctions I_n et J_n désignent le coefficient de κ^n respectivement dans l'expression de $\kappa^2 F^3$ et de $\kappa Q^2 F$ développées en puissances de κ .

On a

$$I_n = \sum_{\substack{|i|_{0,n-2} = 3 \\ |i|_{2,n-2} = n-2}} \frac{3!}{i_0! \cdots i_{n-2}!} \prod_{\ell=0}^{n-2} F_\ell^{i_\ell} \quad (3.57)$$

et

$$J_n = \sum_{\substack{\ell + |i|_{2,n-1} = n-1, \\ |i|_{0,n-1} = 2}} \frac{2!}{i_0! \cdots i_{n-1}!} F_\ell \prod_{k=0}^{n-1} Q_k^{i_k}. \quad (3.58)$$

Rappelons le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.2.5 Soient n scalaires a_i ($0 \leq i \leq n-1$) dans $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et b une application continue de I dans $\mathbb{C}$. Considérons l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b \quad (L).$$

Lorsque le second membre de (L) est du type $b(x) = \exp(rx)c(x)$ où $r \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}[X]$, l'équation (L) admet une solution particulière du type $y = \exp(rx)q(x)$, où $q \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg q = \deg c$ si r n'est pas racine de l'équation caractéristique de (L) et $\deg q = \deg c + \alpha$ si r est racine d'ordre α de cette équation.

Proposition 3.2.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n solution de (3.54) est égale à une somme de produits d'exponentielles polynômes. Plus précisément,

$$F_n = F_n^{\text{pol}} + \psi(\cdot)P_n(\cdot, \psi(\cdot)), \quad (3.59)$$

où F_n^{pol} est un polynôme de degré n , où $P_n \in \mathbb{R}[x, y]$ et $\psi(x) = \exp(-2A_0 x)$, A_0 étant définie en (3.41).

La fonction Q_0 solution de (5.31) vérifie :

$$Q_0(x) = B_0 \exp(-A_0 x).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n , solution de (3.55) vérifie

$$Q_n = \phi(\cdot) R_n(\cdot, \phi(\cdot)) \quad (3.60)$$

où $R_n \in \mathbb{R}[x, y]$, et où $\phi(x) = \exp(-A_0 x)$.

Quant à la fonction H_n , elle présente la même structure que Q_n .

Preuve

Montrons (3.59) et (3.60). Le résultat est vrai pour $n = 0, 1$, d'après (3.38), (3.45) et (3.39), (3.46).

Soit $n \geq 2$. Montrons le résultat par récurrence.

Supposons qu'il soit vrai pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Compte-tenu de (3.57) et de l'hypothèse de récurrence, la fonction I_n est égale à la somme d'un polynôme de degré $n-2$ et d'exponentielles polynômes.

Plus précisément, on a l'égalité :

$$I_n = P_n^{pol} + \psi(\cdot) P_n(\cdot, \psi(\cdot)), \quad (3.61)$$

où $P_n \in \mathbb{R}[x, y]$, et où P_n^{pol} est un polynôme de degré $n-2$.

La fonction J_n est, quant à elle, compte tenu de (3.58) et de l'hypothèse de récurrence, égale à

$$\phi(\cdot) S_n(\cdot, \phi(\cdot)), \quad (3.62)$$

où $S_n \in \mathbb{R}[x, y]$.

L'égalité (3.55) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant en l'inconnue Q_n . Le second membre de cette équation est, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, de la forme (3.62). D'après le lemme 3.2.5 et d'après (3.61) et (3.62), les égalités (3.59) et (3.60) sont vérifiées. Ceci achève la preuve de la proposition 3.2.6.

Corollaire 3.2.7 *Etant donné les séries formelles en puissances de κ , à coefficients dans $\mathbb{R}$, $A(\kappa), B(\kappa)$, il existe une unique série formelle $D(\kappa)$ et une unique solution formelle intérieure de données initiales $(A(\kappa), B(\kappa), D(\kappa))$ vérifiant la condition (3.36). Pour $n \geq 1$, la fonction F_n dépend de $2n-1$ paramètres, $\bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}$, définis en (3.14). Plus précisément, pour $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité*

$$F_n^{pol}(x, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}) \equiv A_n \quad (3.63)$$

modulo un élément de $\mathbb{R}[\tilde{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}](A_0)$, avec $A_0 = 0$ pour unique pole. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P_n(x, y, \bar{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}) \in \mathbb{R}[\tilde{A}_n, \bar{B}_{n-1}](A_0), \quad (3.64)$$

avec $A_0 = 0$ pour unique pole.

De même, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions Q_n et H_n dépendent de $2n$ paramètres, $\bar{A}_n, \bar{B}_n$. Plus précisément, pour $n \geq 1$, on a l'égalité

$$Q_n(\cdot, \bar{A}_n, \bar{B}_n) = \phi(\cdot)(B_n + \tilde{R}_n(\cdot, \phi(\cdot), \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1})), \quad (3.65)$$

où, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{R}_n(x, y, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}) \in \mathbb{R}[\tilde{A}_n, \bar{B}_{n-1}](A_0)$, avec $A_0 = 0$ pour unique pole.

Preuve

Montrons le résultat par récurrence sur n .

D'après (3.38), (3.45), (3.39) et (3.46), la donnée de A_0, B_0, A_1, B_1 détermine complètement les fonctions F_0, F_1, Q_0, Q_1, H_0 et H_1 . De plus, lorsque $n = 1$, (3.63) et (3.65) sont vérifiées avec

$$F_1^{pol}(x, \bar{A}_1, B_0) = A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} + \frac{B_0^2}{2}x, \quad P_1(x, y, A_0, B_0) = \frac{B_0^2}{4A_0}y$$

et

$$\tilde{R}_1(x, y, \bar{A}_1, \bar{B}_0) = \frac{B_0^3}{16A_0^2}y^3 + \left(-\frac{B_0^3}{16A_0^2} - B_0A_1x - \frac{B_0^3}{4}x^2\right).$$

Soit $n \geq 2$.

Supposons (3.63), (3.64) et (3.65) vérifiées pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

La fonction F_n est déterminée de manière unique par la donnée de l'équation différentielle (3.54) et des conditions aux limites :

$$F'_n(0) = 0, \quad \text{et} \quad F_n(0) = A_n. \quad (3.66)$$

Compte-tenu de (3.57), (3.58), (3.61), (3.62) et d'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions $I_n(\cdot)$ et $S_n(\cdot, \cdot)$ dépendent uniquement de $\bar{A}_{n-2}, \bar{B}_{n-2}$, et on a

$$I_n(\cdot) \in \mathbb{R}[\bar{A}_{n-2}, \bar{B}_{n-2}](A_0) \quad \text{et} \quad S_n \in \mathbb{R}[\bar{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}](A_0).$$

Compte-tenu de ce qui précède, de (3.54) et des conditions aux limites (3.66), la fonction F_n^{pol} dépend uniquement de $\bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}$, et on a $F_n^{pol}(\cdot, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}) \equiv A_n$ modulo un élément de $\mathbb{R}[\bar{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}](A_0)$, avec $A_0 = 0$ pour unique pole.

De même, on a $P_n(\cdot, \bar{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}) \in \mathbb{R}[\bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}](A_0)$, avec $A_0 = 0$ pour unique pole.

On obtient ainsi (3.63) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Quant à la fonction Q_n , elle vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre, donnée en (3.55). D'après la proposition 3.2.6, ce second membre est une somme d'exponentielles polynômes, tendant vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, il dépend uniquement de $\bar{A}_{n-1}$ et $\bar{B}_{n-1}$.

Comme par hypothèse (voir (3.36)), $\lim_{x \rightarrow \infty} Q_n(x) = 0$, on a l'égalité

$$Q_n(x) = c_1 \exp(-A_0x) + \exp(-A_0x)g(x, \exp(-A_0x)),$$

où la fonction g dépend uniquement de $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_{n-1}$, et plus précisément, où

$$g(x, y, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}) \in \mathbb{R}[\bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}](A_0), \quad \text{avec} \quad A_0 = 0 \quad \text{pour unique pole.}$$

Compte-tenu de la condition aux limites $Q_n(0) = B_n$, la fonction Q_n est entièrement déterminée par la donnée de $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_n$. Elle s'exprime sous la forme

$$Q_n(x) = \exp(-A_0x)(B_n + \tilde{R}_n(x, \exp(-A_0x))),$$

où $\tilde{R}_n$ dépend de $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_{n-1}$. De plus, $\tilde{R}_n(x, y, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}) \in \mathbb{R}[\bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}](A_0)$, avec $A_0 = 0$ pour unique pole. Enfin, comme $H_n = Q'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(0) = D_n$, la série formelle D_n est entièrement déterminée par la donnée de $A(\kappa)$ et de $B(\kappa)$. Ceci achève la preuve du corollaire 3.2.7.

3.2.3 Définition du raccordement des solutions intérieure et extérieure

Avant de définir le raccordement de la solution intérieure et extérieure, énonçons quelques définitions :

Définition 3.2.8 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$ et deux réels strictement positifs δ_1 et δ_2 , tels que $\delta_1 < \delta_2$.

On appellera région intérieure (respectivement région extérieure), la région définie par l'intervalle $[0, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}]$ (respectivement par l'intervalle $[\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}, +\infty[$).

On appellera région de recollement l'intervalle de la forme

$$I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa) = [\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}]. \quad (3.67)$$

Définition 3.2.9 Soit κ_0 un réel positif, et pour tout $\kappa \in]0, \kappa_0]$, soit $I(\kappa)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $u(x, \kappa)$ et $v(x, \kappa)$, deux fonctions définies sur $I(\kappa)$. On suppose que $v(x, \kappa) \geq 0$, $\forall (x, \kappa) \in I(\kappa) \times]0, \kappa_0]$.

On dira que

$$u(x, \kappa) = \mathcal{O}(v(x, \kappa)) \text{ sur } I(\kappa) \text{ quand } \kappa \rightarrow 0,$$

si il existe $C > 0$ et $\tilde{\kappa}_0 > 0$ tels que

$$|u(x, \kappa)| \leq C v(x, \kappa), \quad \forall x \in I(\kappa) \text{ et } \forall \kappa \leq \tilde{\kappa}_0.$$

On dira que

$$u(x, \kappa) = o(v(x, \kappa)) \text{ sur } I(\kappa) \text{ quand } \kappa \rightarrow 0,$$

si il existe $\kappa \rightarrow \theta(\kappa)$ et $\tilde{\kappa}_0 > 0$ tels que

$$|u(x, \kappa)| \leq \theta(\kappa) v(x, \kappa), \quad \forall x \in I(\kappa) \text{ et } \forall \kappa \leq \tilde{\kappa}_0,$$

avec $\theta(\kappa) \rightarrow 0$ quand $\kappa \rightarrow 0$.

Définition 3.2.10 On appellera solution intérieure tronquée à l'ordre n (respectivement solution extérieure tronquée à l'ordre n), le triplet de fonctions définie par

$(\sum_0^n F_i \kappa^i, \sum_0^n Q_i \kappa^i, \sum_0^n H_i \kappa^i)$ qu'on notera $(F^{i,(n)}, Q^{i,(n)}, H^{i,(n)})$ (respectivement $(\sum_0^n f_i \kappa^i, \sum_0^n q_i \kappa^i, \sum_0^n h_i \kappa^i)$ notée $(F^{e,(n)}, Q^{e,(n)}, H^{e,(n)})$).

Définition 3.2.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $(F^{i,(n)}, Q^{i,(n)}, H^{i,(n)})$ et $(F^{e,(n)}, Q^{e,(n)}, H^{e,(n)})$ les triplets de fonctions introduits dans la définition 3.2.10.

On dira que les solutions intérieure et extérieure se raccordent modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$ donné en (3.67) si et seulement si

$$\begin{aligned} F^{i,(n)}(x, \kappa) - F^{e,(n-1)}(\kappa x, \kappa) &= \mathcal{O}(\kappa^n), \\ Q^{i,(n)}(x, \kappa) - Q^{e,(n-1)}(\kappa x, \kappa) &= \mathcal{O}(\kappa^n), \\ H^{i,(n)}(x, \kappa) - H^{e,(n-1)}(\kappa x, \kappa) &= \mathcal{O}(\kappa^n), \end{aligned} \quad (3.68)$$

au sens de la définition 3.2.9.

Proposition 3.2.12 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

Les séries formelles Q^i et Q^e se raccordent modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ au sens de la définition 3.2.11. Il en va de même des séries formelles H^i et H^e .

Preuve

Compte-tenu de la structure exponentielle polynôme des fonctions Q_j et H_j décrite dans la proposition 3.2.6, et plus précisément de (3.60), on a, quelque soit l'entier naturel j , l'estimation suivante sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$:

$$Q_j = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{m_j}{n+1}}) \cdot \exp(-\delta_1 \cdot A_0 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}) \text{ et } H_j = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{m_j}{n+1}}) \cdot \exp(-\delta_1 \cdot A_0 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}),$$

où $m_j \in \mathbb{N}$.

On en déduit l'estimation

$$Q_j = \mathcal{O}(\kappa^n) \text{ et } H_j = \mathcal{O}(\kappa^n).$$

D'après la proposition 3.2.2, $Q^e \sim 0$ et $H^e \sim 0$, donc, sur $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$,

$$\begin{aligned} Q^{i,(n)}(x, \kappa) - Q^{e,(n-1)}(\kappa x, x) &= Q^{i,(n)}(x, \kappa) = \mathcal{O}(\kappa^n) \\ H^{i,(n)}(x, \kappa) - H^{e,(n-1)}(\kappa x, x) &= H^{i,(n)}(x, \kappa) = \mathcal{O}(\kappa^n) \end{aligned}$$

au sens de la définition 3.2.9, ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.12.

Cherchons à présent une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions intérieure et extérieure se raccordent modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$.

Proposition 3.2.13 *Soient les fonctions $F^{i,(n)}$ et $F^{e,(n)}$, introduits dans la définition 3.2.10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'estimation sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$:*

$$F^{i,(n)}(x, \kappa) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \alpha_{i,j} \kappa^j x^i + \mathcal{O}(\kappa^n), \quad (3.69)$$

où

$$\alpha_{i,j} \text{ désigne le coefficient de } x^i \text{ dans } F_j^{pol}. \quad (3.70)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'estimation sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$:

$$F^{e,(n-1)}(\kappa x, \kappa) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \beta_{i,j} \kappa^j x^i + \mathcal{O}(\kappa^n), \quad (3.71)$$

où

$$\beta_{i,j} := \frac{f_{j-i}^{(i)}(0)}{i!}. \quad (3.72)$$

Preuve

Sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, d'après la proposition 3.2.6, précisément (3.59), la fonction F_n est égale à un polynôme de degré n modulo $\mathcal{O}(\kappa^\infty)$.

Pour $x \in I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, on a donc l'estimation

$$F^{i,(n)}(x, \kappa) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \alpha_{i,j} \kappa^j x^i + \mathcal{O}(\kappa^n). \quad (3.73)$$

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, effectuons un développement en série entière de la fonction $x \rightarrow f_k(\kappa x)$ où la fonction f_k est définie en (3.30) au point $x = 0$. Comme $x \in I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, et compte-tenu de l'analyticité de f_k dans un voisinage de zéro, les développements en série entière sont convergents.

Nous pouvons exprimer $F^{e,(n-1)}(\kappa x; \kappa)$ sous la forme

$$F^{e,(n-1)}(\kappa x; \kappa) = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_k^{(i)}(0)}{i!} \kappa^i x^i.$$

Posons $j = i + k$.

On peut alors écrire la somme précédente sous la forme :

$$F^{e,(n-1)}(\kappa x; \kappa) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ j - n + 1 \leq i \leq j}} \beta_{i,j} \kappa^j x^i, \quad (3.74)$$

où $\beta_{i,j}$ a été défini en (3.72).

Comme $x \in I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, pour (i, j) tels que $j \geq n + 1$ et $i \leq j$, on a l'estimation

$$\kappa^j x^i = \mathcal{O}(\kappa^{j - \frac{i}{n+1}}) = \mathcal{O}(\kappa^n).$$

On en déduit l'estimation :

$$F^{e,(n-1)}(\kappa x, \kappa) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \beta_{i,j} \kappa^j x^i + \mathcal{O}(\kappa^n), \quad (3.75)$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.13.

En vue de préciser les conditions de raccordement des solutions intérieure et extérieure, montrons la proposition :

Proposition 3.2.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Soit une famille de réels $\gamma_{i,j}$, où $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq i \leq j \leq n$.

Soit la fonction S définie sur $[0, \kappa_0] \times [\delta_1, \delta_2]$ par

$$S(\kappa, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \gamma_{i,j} \kappa^{j - \frac{i}{n+1}} y^i + \mathcal{O}(\kappa^n). \quad (3.76)$$

Alors

$$S(\kappa, y) = 0 \text{ sur } [0, \kappa_0] \times [\delta_1, \delta_2] \quad (3.77)$$

implique

$$\gamma_{i,j} = 0, \quad \forall (i, j) \text{ tels que } 0 \leq i \leq j \leq n.$$

Preuve

Faisant tendre κ vers zéro dans (3.77), on obtient

$$\gamma_{0,0} = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k < n - 1$.

Supposons que

$$\gamma_{i,j} = 0, \quad \forall j \in \{0, \dots, k\} \text{ et } \forall i \leq j.$$

Montrons qu'alors

$$\gamma_{i,k+1} = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, k+1\}. \quad (3.78)$$

Divisons les deux membres de (3.77) par $\kappa^{k+1-\frac{k+1}{n+1}}$, puis faisons tendre κ vers zéro, on obtient :

$$\gamma_{k+1,k+1} = 0.$$

Supposons que

$$\gamma_{l,k+1} = 0, \quad \forall l \in \{m, \dots, k+1\} \text{ où } m \in \{1, \dots, k+1\}.$$

Divisant les deux membres de l'égalités (3.77) par $\kappa^{k+1-\frac{m-1}{n+1}}$, puis faisant tendre κ vers zéro, on obtient

$$\gamma_{m-1,k+1} = 0.$$

Il reste alors à montrer que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{i,n} y^i \kappa^{n-\frac{i}{n+1}} = 0.$$

En tenant un raisonnement analogue au précédent, on montre que $\gamma_{l,n} = 0$ pour tout l dans $\{1, \dots, n\}$. Ceci achève la preuve de la proposition 3.2.14.

On déduit de ces calculs la proposition :

Proposition 3.2.15 *Le raccordement des solutions intérieure et extérieure peut s'effectuer modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ au sens de la définition 3.2.11 si et seulement si*

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \text{ tels que } 0 \leq i \leq j \leq n, (i, j) \neq (0, n),$$

où $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j}$ ont été définis en (3.70) et (3.72).

Preuve

En effet, d'une part, d'après la proposition 3.2.12, les séries formelles Q^i et Q^e se raccordent modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$, sans aucune contrainte sur les différents paramètres. D'autre part, compte-tenu de la proposition 3.2.13, $F^{i,(n)}(x) - F^{e,(n-1)}(\kappa x) = \mathcal{O}(\kappa^n)$ dans $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$ si et seulement si

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} (\alpha_{i,j} - \beta_{i,j}) \kappa^j x^i + \mathcal{O}(\kappa^n) = 0 \text{ sur }]0, \kappa_0] \times I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa). \quad (3.79)$$

Posons

$$S(\kappa, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (0,n)}} \gamma_{i,j} \kappa^{j - \frac{i}{n+1}} y^i + \mathcal{O}(\kappa^n),$$

où

$$\gamma_{i,j} := \alpha_{i,j} - \beta_{i,j}.$$

L'égalité (3.79) s'écrit alors

$$S(\kappa, y) + \mathcal{O}(\kappa^n) = 0 \text{ sur }]0, \kappa_0] \times [\delta_1, \delta_2]. \quad (3.80)$$

Alors, d'après la proposition 3.2.14, on en déduit que

$$\gamma_{i,j} = 0, \quad \forall (i,j) \text{ tels que } 0 \leq i \leq j \leq n, (i,j) \neq (0,n).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.2.15.

Remarque 3.2.16 Notons que, d'après la proposition 3.2.15, le raccordement des solutions intérieure et extérieure modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^{n+1})$ implique leur raccordement modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^n)$.

Remarque 3.2.17 La règle de Van Dyke (voir [15]) consiste à effectuer un développement limité de la solution intérieure tronquée à l'ordre n et de la solution extérieure tronquée à l'ordre $n-1$, puis à effectuer une identification des coefficients de $\kappa^j x^i$ pour tous couples (i,j) tels que $0 \leq i \leq j \leq n$, $(i,j) \neq (0,n)$. Nous avons montré dans cette section qu'elle est équivalente à la définition 3.2.11 que nous avons donnée du raccordement.

3.2.4 Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa)$

L'objectif est maintenant de déterminer les différentes constantes d'intégration dans le but d'effectuer le raccordement de la solution intérieure et de la solution extérieure modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa)$. Plaçons-nous dans l'intervalle $I_1(\delta_1, \delta_2, \kappa)$ défini par $I_1(\delta_1, \delta_2, \kappa) = [\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{2}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{2}}]$ où δ_1 et δ_2 sont deux réels strictement positifs tels que $\delta_1 < \delta_2$.

Proposition 3.2.18 *Le raccordement des solutions intérieure et extérieure peut s'effectuer modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa)$ si et seulement si :*

$$A_0 = f_0(0), \quad (3.81)$$

$$\frac{B_0^2}{2} = f'_0(0), \quad (3.82)$$

où la fonction f_0 est définie en (3.26), et les paramètres A_0 et B_0 sont définis en (3.38) et (3.39).

De plus, on a les égalités

$$B_0 = -2^{\frac{1}{4}}(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.83)$$

et

$$C_0 = \sqrt{2}(\tanh)^{-1}(A_0), \quad (3.84)$$

qui permettent d'exprimer B_0 et C_0 comme fonction de A_0 .

Preuve

Le raccordement formel de la solution extérieure et intérieure est trivial pour les séries formelle Q^e (respectivement H^e) et Q^i (respectivement H^i) comme on l'a démontré dans la proposition 3.2.12.

Observant que, pour $x \in I_1(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, on a $|\kappa^2 x^2| \leq \delta_2 \kappa$, on obtient l'estimation

$$f_0(\kappa x) = f_0(0) + f'_0(0)\kappa x + \mathcal{O}(\kappa).$$

D'où on déduit que :

$$F^{e,(0)}(\kappa x, \kappa) = f_0(0) + f'_0(0)\kappa x + \mathcal{O}(\kappa).$$

Par ailleurs, d'après (3.45), on obtient pour $x \in I_1(\delta_1, \delta_2, \kappa)$,

$$F^{i,(1)}(x, \kappa) = A_0 + \frac{B_0^2}{2}\kappa x + \mathcal{O}(\kappa).$$

D'après la proposition 3.2.15, une condition nécessaire et suffisante pour que le raccordement puisse s'effectuer est que

$$A_0 = f_0(0), \quad (3.85)$$

$$\frac{B_0^2}{2} = f'_0(0). \quad (3.86)$$

Comme B_0 est cherché négatif (voir (3.41)), on a, compte-tenu des égalités (3.25), (3.85) et (3.86) l'égalité

$$B_0 = -2^{\frac{1}{4}}(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.87)$$

De plus, de (3.85) et de (3.86), on déduit que

$$C_0 = \sqrt{2}(\tanh)^{-1}(A_0). \quad (3.88)$$

On peut donc exprimer C_0 et B_0 en fonction de A_0 , ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.18.

3.3 Existence d'un développement formel du champ de surchauffe en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2

3.3.1 Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^2)$

On se place sur l'intervalle $I_2(\delta_1, \delta_2, \kappa)$ défini par

$$I_2(\delta_1, \delta_2, \kappa) = [\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{3}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{3}}],$$

où $(\delta_1, \delta_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, tels que $\delta_1 < \delta_2$.

Proposition 3.3.1 *Le raccordement des solutions intérieure et extérieure peut s'effectuer modulo $\mathcal{O}(\kappa^2)$ si et seulement si les équations (3.85) et (3.86) sont satisfaites, et si de plus, on a les égalités :*

$$A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} = C_1 f'_0(0), \quad (3.89)$$

$$B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2} = C_1 f''_0(0), \quad (3.90)$$

où f_0 est définie en (3.26).

De plus, on peut exprimer B_1 et C_1 en fonction de A_0 et A_1 .

Preuve

Le raccordement formel de la solution extérieure et intérieure est trivial pour les séries formelle Q^e (respectivement H^e) et Q^i (respectivement H^i) comme on l'a démontré dans la proposition 3.2.12.

De l'expression de F^e (voir (3.27)), on déduit que

$$f_1 = C_1 f'_0.$$

Effectuant comme précédemment un développement limité de f_0 et de $C_1 f'_0$ à l'ordre 2 dans l'intervalle $I_2(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, on obtient :

$$F^e(\kappa x, \kappa) = P_1(\kappa, x) + \mathcal{O}(\kappa^2)$$

où

$$P_1(\kappa, x) = f_0(0) + f'_0(0)\kappa x + C_1 \kappa f'_0(0) + C_1 f''_0(0)\kappa^2 x + \frac{f''_0(0)}{2}(\kappa x)^2. \quad (3.91)$$

Le seul terme à prendre en compte provenant de $\kappa^2 F_2(x)$ est, compte-tenu de (3.51) :

$$-\frac{1}{2}A_0(1 - A_0^2)\kappa x^2 + (B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2})\kappa^2 x$$

puisque dans l'intervalle $I_2(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, $\exp(-2A_0 x)$ est négligeable devant κ^2 . D'où,

$$F^i(x, \kappa) = P_2(\kappa, x) + \mathcal{O}(\kappa^2)$$

où

$$P_2(\kappa, x) = A_0 + \kappa(A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0}) + \frac{B_0^2}{2}\kappa x - \frac{1}{2}A_0(1 - A_0^2)\kappa^2 x^2 + (B_0B_1 - \frac{3}{32}\frac{B_0^4}{A_0^2})\kappa^2 x. \quad (3.92)$$

D'après la proposition 3.2.15, le raccordement peut s'effectuer modulo $\mathcal{O}(\kappa^2)$ si et seulement si (3.85) et (3.86) sont vérifiées, ainsi que

$$A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} = C_1 f_0'(0) \quad (3.93)$$

$$-\frac{1}{2}A_0(1 - A_0^2) = \frac{f_0''(0)}{2} \quad (3.94)$$

$$B_0B_1 - \frac{3}{32}\frac{B_0^4}{A_0^2} = C_1 f_0''(0). \quad (3.95)$$

L'équation (3.94) est vérifiée compte tenu de (3.85). Notons que, d'après les équations (3.93) et (3.95), on peut exprimer B_1 et C_1 en fonction de A_0 et A_1 . Pour B_1 , puisque B_0 est non nul, on trouve :

$$B_1 = -\sqrt{2}\frac{A_0A_1}{B_0} + \frac{3}{32}\frac{B_0^3}{A_0^2} + \frac{1}{2}\frac{1 - A_0^2}{B_0}, \quad (3.96)$$

où

$$B_0 = -2^{\frac{1}{4}}(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Quant à C_1 , comme $f_0''(0)$ est non nul, il vaut

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{1 - A_0^2}(A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0}). \quad (3.97)$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.3.1.

3.3.2 Calcul d'un développement formel à l'ordre 2 du champ de surchauffe

Par définition, on a $H^i(0) = h_0$, ce qui fournit un développement de $\kappa^{\frac{1}{2}}h_0$ en puissances de κ . L'objectif principal est de calculer un développement formel de $\kappa^{\frac{1}{2}}h^{sh}(\kappa)$ en puissances de κ .

Montrons qu'à ce stade des calculs, on peut obtenir un développement du champ de surchauffe à l'ordre 2.

On a l'égalité

$$H^i(0) = \kappa^{-\frac{1}{2}}(H_0(0, A_0, B_0) + \kappa H_1(0, \bar{A}_1, \bar{B}_1) + \mathcal{O}(\kappa^2)).$$

Par définition de $h^{sh}(\kappa)$ (voir la définition 1.1.2), il est naturel de regarder quelles conditions on obtient en maximisant $H_0(0, A_0, B_0)$, puis $H_1(0, \bar{A}_1, \bar{B}_1)$, que l'on peut

déterminer à ce stade des calculs. Compte tenu de (3.40) et (3.83), on peut exprimer $H_0(0, A_0, B_0)$ en fonction de A_0 . Notons par $h_0(A_0)$ la nouvelle fonction ainsi obtenue. D'après (3.83), on a l'égalité

$$h_0(A_0) = 2^{\frac{1}{4}} A_0 (1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.98)$$

Maximisant $h_0(A_0)$, on obtient alors :

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.99)$$

De (3.83), on déduit que

$$B_0 = -2^{-\frac{1}{4}} \quad (3.100)$$

et

$$h_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (3.101)$$

On a l'égalité

$$H_1(0, \bar{A}_1, \bar{B}_1) = -\frac{1}{8} \frac{B_0^3}{A_0} - A_0 B_1 - A_1 B_0.$$

Exprimons $H_1(0, \bar{A}_1, \bar{B}_1)$ en fonction de A_0 et A_1 grâce aux égalités (3.83) et (3.96). Notons $h_1(A_0, A_1)$ la fonction ainsi exprimée. On obtient alors :

$$h_1(A_0, A_1) = \frac{2^{\frac{3}{4}} (2A_0^2 + 14)(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}}{64 A_0} - \frac{2^{\frac{1}{4}} (2A_0^2 - 1)}{(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}} A_1. \quad (3.102)$$

Pour $A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouve :

$$h_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, A_1\right) = 2^{\frac{3}{4}} \frac{15}{64}. \quad (3.103)$$

Il n'y a donc pas à maximiser par rapport à A_1 puisque $h_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, A_1)$ est indépendant de A_1 .

Finalement, compte-tenu de (3.101) et (3.103), on obtient l'égalité

$$h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + \mathcal{O}(\kappa^2)\right). \quad (3.104)$$

Cette formule a été proposée par H. Parr (voir [14]), et on l'a obtenue ici formellement en suivant les calculs de Dorsey, Dolgert et Di Bartolo (voir [12]).

3.3.3 Raccordement des solutions modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^3)$

3.3.3.1 Détermination des coefficients de κ^2 , $\kappa^3 x^3$, $\kappa^3 x^2$ et $\kappa^3 x$

Compte-tenu de la proposition 3.2.15, et d'après la remarque 3.2.16, pour obtenir le raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^3)$, il faut vérifier les quatre équations

$$\alpha_{0,2} = \beta_{0,2}, \quad \alpha_{3,3} = \beta_{3,3}, \quad \alpha_{2,3} = \beta_{2,3}, \quad \text{et} \quad \alpha_{1,3} = \beta_{1,3}.$$

Déterminons A_1 et C_1 afin d'avoir un développement plus précis du champ de surchauffe. Pour y parvenir, il est nécessaire de poursuivre les calculs des développements de F et de Q .

Annulation du coefficient de κ^3 .

D'après (3.54) et (3.55) pour $n = 3$, le coefficient de κ^3 est nul si on a :

$$F_3'' = Q_1^2 F_0 + 2Q_0 Q_2 F_0 + 2Q_0 Q_1 F_1 + Q_0^2 F_2 + 3F_0^2 F_1 - F_1, \quad (3.105)$$

$$Q_3'' - A_0^2 Q_3 = 2F_0 F_3 Q_0 + 2F_1 F_2 Q_0 + F_1^2 Q_1 + 2F_0 F_1 Q_2 + 2F_0 F_2 Q_1. \quad (3.106)$$

Notons que les termes $Q_1^2 F_0$, $2Q_0 Q_2 F_0$, $Q_0^2 F_2$ et $2Q_0 Q_1 F_1$ dans (3.105) sont négligeables devant n'importe quelle puissance de κ dès lors que l'on choisit x de l'ordre de $\kappa^{-\frac{1}{n}}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et κ petit, compte-tenu de la structure exponentielle polynôme de Q_0 , Q_1 et Q_2 . Donc, pour déterminer les coefficients recherchés, seul le terme ne comportant pas de (Q_j) , c'est-à-dire $(3F_0^2 - 1)F_1$ est à prendre en compte.

Primitivons deux fois de suite la fonction $(3F_0^2 - 1)F_1$.

On obtient la fonction

$$d_2 + d_1 x + (3A_0^2 - 1)\left(\left(\frac{A_1}{2} - \frac{B_0^2}{8A_0}\right)x^2 + \frac{B_0^2}{12}x^3 + \frac{B_0^2}{16A_0^3}\exp(-2A_0 x)\right), \quad (3.107)$$

où $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$.

3.3.3.2 Calcul des réels $\alpha_{1,3}$ et $\beta_{1,3}$

Pour déterminer $\alpha_{1,3}$ et $\beta_{1,3}$, il faut calculer complètement F_3 , ce qui nécessite de calculer préalablement Q_2 . Pour y parvenir, nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Maple 5. Dans la solution extérieure, le réel $\beta_{1,3}$ est égal à $f_2'(0)$.

D'après (3.30), on a l'égalité

$$f_2 = \frac{C_1^2}{2} f_0'' + C_2 f_0', \quad (3.108)$$

d'où

$$f_2'(0) = C_2 f_0''(0) + \frac{C_1^2}{2} f_0^{(3)}(0).$$

Utilisant alors le fait que f_0 vérifie (3.23),

on déduit que :

$$f_0'''(0) = -f_0'(0) + 3f_0'(0)f_0^2(0). \quad (3.109)$$

On déduit de (3.109) l'égalité

$$\beta_{1,3} = f_0''(0)C_2 + \frac{C_1^2}{2}(3f_0(0)^2 - 1)f_0'(0). \quad (3.110)$$

Le coefficient $\alpha_{1,3}$ est égal à la constante dans l'expression polynômiale de F_3' .

Compte tenu des égalités (3.25), (3.93) et (3.95), on peut exprimer ce coefficient en fonction de A_0 , A_1 et A_2 . Il vaut :

$$B_0 B_2 + \frac{A_0^2}{B_0^2} A_1^2 + \left(\frac{-A_0}{2} + \sqrt{2} \frac{9}{32} \frac{B_0^2}{A_0} + \frac{3}{16} \frac{B_0^4}{A_0^2}\right) A_1 + g(A_0, B_0) \quad (3.111)$$

où $g \in \mathbb{R}(A_0, B_0)$ et où B_0 est donné par (3.83). Pour effectuer ce calcul, nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Maple 5.

Calcul de $\alpha_{2,3}$ et de $\beta_{2,3}$

Le réel $\alpha_{2,3}$ vaut, d'après (3.107) :

$$(3A_0^2 - 1)\left(\frac{A_1}{2} - \frac{B_0^2}{8A_0}\right). \quad (3.112)$$

Le réel $\beta_{2,3}$ est égal à

$$\beta_{2,3} = \frac{f_1^{(2)}(0)}{2}.$$

Compte-tenu de (3.109), il vaut :

$$(3f_0(0)^2 - 1)f_0'(0)\frac{C_1}{2}. \quad (3.113)$$

Calcul de $\alpha_{3,3}$ et $\beta_{3,3}$

Calculons $\alpha_{3,3}$.

Il vaut, d'après (3.107)

$$\frac{B_0^2}{12}(3A_0^2 - 1). \quad (3.114)$$

D'après (3.72), on a l'égalité

$$\beta_{3,3} = \frac{1}{6}f_0'''(0).$$

Le coefficient cherché est donc égal à :

$$-\frac{1}{6}f_0'(0) + \frac{1}{2}f_0'(0)f_0^2(0). \quad (3.115)$$

Calcul de $\alpha_{0,2}$ et $\beta_{0,2}$

Regardons maintenant le coefficient de κ^2 dans les développements respectifs de la solution intérieure et de la solution extérieure.

Dans la solution intérieure, d'après (3.52), $\alpha_{0,2}$ est égal à :

$$\left(\frac{17}{128}\frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4}\frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2}\frac{B_0 B_1}{A_0} + A_2\right). \quad (3.116)$$

Calculons à présent $\beta_{0,2}$.

Par définition, (voir (3.72)), $\beta_{0,2} = f_2(0)$.

Par conséquent, on a l'égalité :

$$\beta_{0,2} = \frac{C_1^2}{2}f_0''(0) + C_2f_0'(0). \quad (3.117)$$

3.3.3.3 Raccordement des solutions.

Plaçons-nous dans l'intervalle défini par :

$$I_3(\delta_1, \delta_2, \kappa) = [\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{4}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{4}}].$$

Proposition 3.3.2 *Le raccordement des solutions intérieure et extérieure peut s'effectuer modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^3)$ sur $I_3(\delta_1, \delta_2, \kappa)$ si et seulement si les équations (3.85), (3.86), (3.93) et (3.95) sont satisfaites, et si de plus, on a les égalités :*

$$\frac{17}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4} \frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0 B_1}{A_0} + A_2 = \frac{C_1^2}{2} f_0''(0) + C_2 f_0'(0), \quad (3.118)$$

et

$$\begin{aligned} B_0 B_2 + \frac{A_0^2}{B_0^2} A_1^2 + \left(-\frac{A_0}{2} + \sqrt{2} \frac{9}{32} \frac{B_0^2}{A_0} + \frac{3}{16} \frac{B_0^4}{A_0^2}\right) A_1 + g(A_0, B_0) \\ = f_0''(0) C_2 + f_0'(0) (3f_0^2(0) - 1) \frac{C_1^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

où $g \in \mathbf{R}(A_0, B_0)$.

De plus, on peut exprimer B_2 et C_2 en fonction de A_0 , A_1 et A_2 .

Preuve

Lorsqu'on effectue le raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^3)$, on obtient, d'après la proposition 3.2.15, les équations supplémentaires résultant respectivement de l'identification des coefficients de κ^2 , $\kappa^3 x^3$, $\kappa^3 x^2$ et $\kappa^3 x$ dans les solutions intérieure et extérieure exprimées sous la forme (3.69) et (3.71).

D'après (3.116) et (3.117), on a l'égalité

$$\frac{17}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4} \frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0 B_1}{A_0} + A_2 = \frac{C_1^2}{2} f_0''(0) + C_2 f_0'(0). \quad (3.120)$$

D'après (3.114) et (3.115), on a l'égalité

$$\frac{B_0^2}{12} (3A_0^2 - 1) = \frac{1}{6} f_0'(0) (-1 + 3f_0^2(0)). \quad (3.121)$$

D'après (3.112) et (3.113), on a l'égalité

$$(3A_0^2 - 1) \left(\frac{A_1}{2} - \frac{B_0^2}{8A_0} \right) = \frac{C_1}{2} f_0'(0) (3f_0^2(0) - 1). \quad (3.122)$$

D'après (3.110) et (3.111), on a l'égalité

$$\begin{aligned} B_0 B_2 + \frac{A_0^2}{B_0^2} A_1^2 + \left(-\frac{A_0}{2} + \sqrt{2} \frac{9}{32} \frac{B_0^2}{A_0} + \frac{3}{16} \frac{B_0^4}{A_0^2}\right) A_1 + g(A_0, B_0) = \\ f_0''(0) C_2 + f_0'(0) (3f_0^2(0) - 1) \frac{C_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Compte-tenu des égalités (3.86) et (3.93), les équations (3.121) et (3.122) sont vérifiées. En définitive, seules les équations (3.120) et (3.123) sont à prendre en compte. Elles permettent d'exprimer C_2 et B_2 comme fonction de A_0 , A_1 , A_2 . Pour B_2 , on trouve :

$$B_2 = -\frac{A_0 \sqrt{2}}{B_0} A_2 - \left(\frac{A_0^2}{B_0^3} + \frac{\sqrt{2}}{2B_0} \right) A_1^2 - \left(\frac{A_0}{2B_0} + \frac{3}{16} \frac{B_0^3}{A_0^3} + \frac{9}{32} \frac{B_0}{A_0} \sqrt{2} \right) A_1 + g(A_0, B_0) \quad (3.124)$$

où

$$g(A_0, B_0) = \frac{1}{16} B_0 - \frac{1}{8} \frac{B_0}{A_0^2} - \frac{129}{2048} \frac{B_0^5}{A_0^5} - \frac{3}{64} \sqrt{2} \frac{B_0^3}{A_0^2} - \frac{\sqrt{2} A_0}{B_0}$$

et B_0 est donné par (3.83). Ceci achève la preuve de la proposition 3.3.2.

3.4 Raccordement à tout ordre

3.4.1 Conditions de raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$

Considérons la série formelle $F^{i,\infty}$ définie par

$$F^{i,\infty}(x, \kappa) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{pol}(x) \kappa^j, \quad (3.125)$$

où F_j^{pol} a été définie dans la proposition 3.2.6.

Rappelons que F_j^{pol} est un polynôme de degré j ,

$$F_j^{pol}(x) := \sum_{i=0}^j \alpha_{i,j} x^i.$$

On peut réécrire (3.125) sous la forme

$$F^{i,\infty}(x, \kappa) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i,i+\ell} x^i \kappa^{i+\ell}, \quad (3.126)$$

en envisageant $F^{i,\infty}$ comme un élément de $\mathbf{R}[[X, Y]]$. Posons

$$\phi_\ell(x') \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i,i+\ell} x'^i. \quad (3.127)$$

Alors, compte-tenu de (3.125), on peut écrire :

$$F^{i,\infty}(x, \kappa) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_\ell(\kappa x) \kappa^\ell.$$

Remarquons que $F^{i,\infty}$ vérifie formellement l'équation

$$-\kappa^{-2} F'' - F + F^3 = 0.$$

Posons

$$G(x', \kappa) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_\ell(x') \kappa^\ell, \quad (3.128)$$

où $x' = \kappa x$ désigne la variable extérieure.

La série formelle en puissances de κ , G , vérifie formellement l'équation :

$$G'' = -G + G^3. \quad (3.129)$$

Rappelons que d'après la proposition 3.2.15, le raccordement peut s'effectuer modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ si et seulement si

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i,j}, \quad \forall (i,j) \text{ tels que } 0 \leq i \leq j \leq n, (i,j) \neq (0,n). \quad (3.130)$$

Afin d'établir les égalités (3.130), montrons le lemme

Lemme 3.4.1 *Soient S_1 et S_2 deux séries formelles en puissances de κ à coefficients dans $\mathbf{R}[[X]]$ définies par*

$$S_1(x', \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(x') \kappa^i \quad \text{et} \quad S_2(x', \kappa) \sim \sum_0^\infty \psi_i(x') \kappa^i.$$

Supposons que S_1 et S_2 satisfassent formellement l'équation différentielle

$$y''(x') = -y(x') + y(x')^3, \quad (3.131)$$

et que de plus, on ait les égalités :

$$\phi_i(0) = \psi_i(0) \quad \text{et} \quad \phi'_i(0) = \psi'_i(0), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.132)$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$\phi_i^{(n)}(0) = \psi_i^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve

Montrons dans un premier temps que $\phi_0^{(n)}(0) = \psi_0^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Etant donné que la série formelle ϕ_0 vérifie formellement l'équation différentielle (3.131), la suite $(\phi_0^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence, pour $n \geq 2$,

$$u_n = u_{n-2} + P(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}),$$

où $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_{n-2}]$.

Comme la série formelle ψ_0 satisfaisait également (3.131), la suite $(\psi_0^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence. Il en résulte, d'après l'hypothèse (3.132), que

$$\phi_0^{(n)}(0) = \psi_0^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $m \geq 1$.

Pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$, supposons que $\phi_k^{(n)}(0) = \psi_k^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Compte-tenu de (3.131), la série formelle ϕ_m vérifie formellement l'équation différentielle

$$-\phi_m'' - \phi_m + \sum_{\substack{|i|_{0,m}=3 \\ |i|_{1,m}=m}} \frac{3!}{i_0! \dots i_m!} \prod_{\ell=0}^m \phi_\ell^{i_\ell} = 0, \quad \text{sur } \mathbf{R}^+. \quad (3.133)$$

De (3.133), on déduit que la suite $(\phi_m^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, satisfaisant la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-2} + Q(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}),$$

où $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n-2}]$. Compte-tenu du fait que la série formelle ψ_m satisfaisait également formellement (3.133), et de l'hypothèse de récurrence, la suite $(\psi_m^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\phi_m^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$. Il en résulte, d'après l'hypothèse (3.132), que

$$\phi_m^{(n)}(0) = \psi_m^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.4.1.

Admettons provisoirement que l'on puisse poser (ce qui sera l'objet de la proposition 3.4.4) :

$$(H) \quad \alpha_{0,i} = \beta_{0,i} \text{ et } \alpha_{1,i+1} = \beta_{1,i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.134)$$

On peut alors montrer la proposition

Proposition 3.4.2 *Le raccordement des solutions formelles intérieure et extérieure peut s'effectuer modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^n)$, si et seulement si le système linéaire constitué des $2n$ équations à $3n$ inconnues*

$$\alpha_{0,i} = \beta_{0,i} \quad \alpha_{1,i+1} = \beta_{1,i+1}, \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (3.135)$$

admet des solutions.

Preuve

Considérons les séries formelles G définie en (3.128) et F^e définie en (3.18).

Exprimons F^e sous la forme $F^e \sim \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x') \kappa^i$ où (ψ_i) est la série formelle dans $\mathbb{R}[[X]]$ définie par

$$\psi_i(x') \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_i^{(j)}(0)}{j!} (x')^j \sim \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j,i+j} (x')^j.$$

L'hypothèse (3.134) est équivalente à

$$\phi_i(0) = \psi_i(0) \text{ et } \phi'_i(0) = \psi'_i(0), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme 3.4.1 appliqué aux séries formelles G et F^e , il résulte que

$$\phi_i^{(n)}(0) = \psi_i^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que le système (3.130) admet des solutions.

On peut donc raccorder les solutions modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$, sous la seule condition (3.135). Ceci achève la preuve de la proposition 3.4.2.

Afin de montrer qu'il est possible de poser (3.134), regardons quelle est la dépendance vis-à-vis des constantes A_i , B_i et C_i de $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j}$ définies en (3.70) et (3.72).

Lemme 3.4.3 *On a les égalités*

$$\alpha_{0,0} = A_0, \quad \alpha_{1,1} = A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0}. \quad (3.136)$$

De plus

$$\beta_{0,0} = f_0(0), \quad \beta_{1,1} = f'_0(0). \quad (3.137)$$

Pour $i \in \mathbb{N}^$, les réels $\alpha_{0,i}$ et $\alpha_{1,i+1}$ sont égaux modulo un élément de $\mathbf{R}(\bar{A}_{i-1}, \bar{B}_{i-1})$ à :*

$$\alpha_{0,i} \equiv A_i, \quad \alpha_{1,i+1} \equiv -B_0 B_i. \quad (3.138)$$

Quant aux réels $\beta_{0,i}$ et $\beta_{1,i+1}$, pour $i \in \mathbb{N}^$, ils sont égaux modulo un élément de $\mathbf{R}[\bar{C}_{i-1}]$ à :*

$$\beta_{0,i} \equiv C_i f'_0(0), \quad \beta_{1,i+1} \equiv C_i f''_0(0). \quad (3.139)$$

Preuve.

Compte-tenu de (3.38) et (3.45), on a les égalités (5.131).

Par définition, (voir (3.72)), on a les égalités $\beta_{0,0} = f_0(0)$, $\beta_{1,1} = f'_0(0)$.

Le réel $\alpha_{0,i}$ est égal au coefficient de x^0 dans l'expression de F_i^{pol} .

D'après le corollaire 3.2.7, il est égal à A_i modulo un élément de $\mathbf{R}(\bar{A}_{i-1}, \bar{B}_{i-1})$.

Le réel $\alpha_{1,i+1}$ est égal au coefficient de x dans l'expression de F_{i+1}^{pol} . Il est égal à la constante d'intégration obtenue après quadrature de la fonction F_{i+1}'' avec la condition aux limites $F_{i+1}'(0) = 0$.

Le seul terme où apparaît le paramètre B_i dans l'expression de F_{i+1}'' est donné par $2F_0 Q_0 Q_i$, d'après (3.54) et (3.58).

Utilisant alors (3.65), ce terme vaut $-B_0 B_i$ modulo un élément de $\mathbf{R}(\bar{A}_{i-1}, \bar{B}_{i-1})$.

D'après (3.72), le réel $\beta_{0,i}$ est égal à $f_i(0)$ et $\beta_{1,i+1} = f'_i(0)$. Compte-tenu de (3.30), le coefficient $\beta_{0,i}$ est égal à $C_i f'_0(0)$ modulo $\mathbf{R}[\bar{C}_{i-1}]$. De plus, le réel $\beta_{1,i+1}$ est égal à $f'_i(0)$. Il vaut $C_i f''_0(0)$ modulo un élément de $\mathbf{R}[\bar{C}_{i-1}]$. Ceci achève la preuve du lemme 3.4.3.

Compte-tenu du lemme 3.4.3, on peut énoncer la proposition :

Proposition 3.4.4 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Considérons le système de $2n$ équations à $3n$ inconnues, $\bar{A}_{n-1}, \bar{B}_{n-1}, \bar{C}_{n-1}$ constitué par les égalités

$$\alpha_{0,i} = \beta_{0,i}, \quad \alpha_{1,i+1} = \beta_{1,i+1} \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (3.140)$$

Pour tout $\bar{A}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, tel que $A_0 \in]0, 1[$, le système (3.140) admet une unique solution dans $\mathbf{R}^{2n}$ telle que $B_0 < 0$.

Preuve

Le résultat est vrai pour $n = 1$. Le système est alors constitué des deux équations (3.85) et (3.86), et peut être résolu en choisissant pour inconnues principales B_0 et C_0 comme nous l'avons montré dans la proposition 3.2.18. De plus, si on suppose $B_0 < 0$, la solution du système est unique.

Soit $n \geq 2$.

Supposons que le résultat soit vrai pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, donc que $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$,

$B_0, \dots, B_{n-1}$ s'expriment de façon unique en fonction de $A_0, \dots, A_{n-1}$.

D'après le lemme 3.4.3 et par hypothèse de récurrence, l'égalité $\alpha_{0,n} = \beta_{0,n}$ se traduit par l'égalité

$$A_n = f'_0(0)C_n, \text{ modulo } \mathbf{R}[\bar{A}_{n-1}]. \quad (3.141)$$

Quant à l'égalité $\alpha_{1,n+1} = \beta_{1,n+1}$, elle se traduit par l'égalité

$$-B_0B_n = f''_0(0)C_n, \text{ modulo } \mathbf{R}[\bar{A}_{n-1}]. \quad (3.142)$$

D'après (3.86) et (3.83), on a les égalités

$$f'_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - A_0^2) \text{ et } f''_0(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}A_0(1 - A_0^2). \quad (3.143)$$

On peut alors résoudre le système constitué des deux égalités précédentes en considérant B_n et C_n comme inconnues principales et $A_0, \dots, A_n$ comme paramètres, ce qui achève la preuve de la proposition 3.4.4.

Compte-tenu de la proposition 3.4.4, il résulte que l'hypothèse (3.134) est vérifiée, et par conséquent, la preuve de la proposition 3.4.2 est complète. Afin d'introduire une notion de raccordement à tout ordre, introduisons la définition :

Définition 3.4.5 *On dira que le raccordement des solutions intérieure et extérieure s'effectue à tout ordre, si on peut effectuer le raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$, quelque soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.*

Compte-tenu des propositions 3.4.2 et 3.4.4, et de la définition 3.4.5, on peut énoncer le théorème

Théorème 3.4.6 *Le raccordement des solutions formelles intérieure et extérieure peut s'effectuer à tout ordre au sens de la définition 3.4.5.*

3.4.2 Notion de solutions formelles des équations de Ginzburg-Landau

Les résultats qui précèdent nous conduisent à introduire la définition :

Définition 3.4.7 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

On appellera solution à l'ordre n de $(GL)_\infty$, un couple constitué d'une solution formelle intérieure tronquée à l'ordre n et d'une solution extérieure tronquée à l'ordre $n - 1$ au sens de la définition 3.2.10, dont on a effectué le raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ au sens de la définition 3.2.11.

On appellera solution formelle des équations de Ginzburg-Landau (3.3) avec conditions aux limites (3.10), un couple constitué d'une solution formelle intérieure au sens de (3.2.4) et extérieure au sens de (3.2.2) dont on a effectué le raccordement à tout ordre au sens de (3.4.5).

Dans les sections suivantes, lorsque nous ferons allusion aux solutions formelles de (3.3) vérifiant les conditions (3.4), nous parlerons de solutions du problème $(GL)_\infty^f$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

Théorème 3.4.8 *Etant donné la série formelle en puissances de κ , $A(\kappa)$, il existe une unique solution formelle des équations de Ginzburg-Landau (3.3) vérifiant les conditions aux limites*

$$\begin{aligned} F^i(0, \kappa) &= A(\kappa), \quad (F^i)'(0, \kappa) = 0, \\ \lim_{x' \rightarrow \infty} F^e(x', \kappa) &= 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x' \rightarrow \infty} Q^e(x', \kappa) = 0. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Preuve

– Existence.

On a construit dans la proposition 3.2.2 une solution formelle extérieure, et dans la proposition 3.2.6 une solution formelle intérieure, puis nous avons effectué leur raccordement à tout ordre au sens de la définition 3.4.5 dans la proposition 3.4.2.

– Unicité.

D'après la proposition 3.4.4, dès que $A(\kappa)$ est donnée, alors $B(\kappa)$ et $D(\kappa)$ sont entièrement déterminées. Or, d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.6, la donnée de $A(\kappa)$, $B(\kappa)$ et $D(\kappa)$ détermine complètement les coefficients de la solution formelle extérieure et intérieure, d'où, par définition d'une solution formelle, son unicité. Ceci achève la preuve du théorème 3.4.8.

Remarque 3.4.9 *Notons que le théorème 3.4.8 est une version série formelle (par rapport à κ), dans le cadre κ petit, du théorème 2.1.2 sous la forme la plus générale établi au chapitre 2.*

Notation 3.4.10 *Dans les sous-sections suivantes, compte-tenu de la proposition 3.4.2, nous supposons que les fonctions $F_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1})$, $Q_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_n)$ et $H_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_n)$ sont exprimées en fonction des seuls paramètres A_i , pour $i \in \{0, \dots, n\}$.*

Posons

$$\begin{aligned} \check{F}_n(x; \bar{A}_n) &:= F_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_{n-1}(\bar{A}_{n-1})), \quad \check{Q}_n(x; \bar{A}_n) := Q_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_n(\bar{A}_n)), \\ \check{H}_n(x; \bar{A}_n) &:= H_n(x, \bar{A}_n, \bar{B}_n(\bar{A}_n)). \end{aligned} \quad (3.145)$$

Nous désignerons par $\check{F}^i$, $\check{Q}^i$ et $\check{H}^i$ les séries formelles

$$\check{F}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \check{F}_n(x; \bar{A}_n) \kappa^i, \quad \check{Q}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \check{Q}_n(x; \bar{A}_n) \kappa^i \quad \text{et} \quad \check{H}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \check{H}_n(x; \bar{A}_n) \kappa^i. \quad (3.146)$$

Si nous introduisons comme choix particulier

$$A_0 = t \quad \text{et} \quad A_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad (3.147)$$

nous posons

$$\hat{F}_n(x, t) = \check{F}_n(x; \bar{A}_n), \quad \hat{Q}_n(x, t) = \check{Q}_n(x; \bar{A}_n) \quad \text{et} \quad \hat{H}_n(x, t) = \check{H}_n(x; \bar{A}_n). \quad (3.148)$$

Corollaire 3.4.11 *Etant donné un réel $t \in]0, 1[$, il existe une unique solution formelle des équations de Ginzburg-Landau (3.3) vérifiant les conditions aux limites (3.144) avec $A(\kappa) = t$. La condition initiale $(A^i)'(0)$ définie en (3.12) se représente de manière unique sous forme d'une série formelle :*

$$(A^i)'(0) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \phi(t, \kappa) := \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \kappa^i, \quad (3.149)$$

où

$$\phi_i(t) := \hat{H}_i(0, t), \quad (3.150)$$

$\hat{H}_i(0, t)$ étant défini en (3.148).

Preuve

Le résultat découle immédiatement du théorème 3.4.8 et de l'hypothèse faite sur les $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, (voir (3.147)).

Compte-tenu de (3.32), (3.33) et (3.35), on a l'égalité :

$$(A^i)'(0) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \kappa^i.$$

Ceci achève la preuve du corollaire 3.4.11.

3.5 Construction d'un développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe

Le problème principal qui se pose à présent, en vue de déterminer un développement formel du champ de surchauffe, est de maximiser par rapport à $t \in]0, 1[$ la série formelle $\phi(t, \kappa)$ définie en (3.149). Bien entendu, cette notion de "maximum" doit être défini en un sens formelle que nous préciserons dans les sous-sections suivantes.

Le problème de maximisation de cette série formelle demeurerait en suspens dans [12].

3.5.1 Maximisation d'une série formelle ayant un terme principal admettant un maximum non dégénéré

Soit f une fonction d'une variable réelle, de classe C^∞ . Dans ce qui suit, $DT(f)$ désigne le développement de Taylor de f au point $x = 0$,

$$DT(f)(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i. \quad (3.151)$$

Nous considérons dans les sous-sections suivantes une série formelle à coefficients de classe C^∞ sur $]0, 1[$, ayant une partie principale admettant un unique maximum atteint

en $t_0 \in]0, 1[$, non dégénéré, c'est-à-dire une série formelle telle que :

$$\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i, \quad (3.152)$$

où ϕ_0 vérifie

$$\phi_0'(t_0) = 0 \text{ et } \phi_0''(t_0) < 0. \quad (3.153)$$

Afin de définir le maximum de la série formelle (3.152), rappelons le résultat classique suivant :

Lemme 3.5.1 *Soit ψ une fonction définie sur $]0, 1[\times] - \kappa_0, \kappa_0[$ de classe C^∞ . Supposons qu'il existe une fonction t définie sur un voisinage de zéro $V(0) \subset] - \kappa_0, \kappa_0[$, à valeur dans $]0, 1[$ de classe C^∞ telle que*

$$\psi(t(\kappa), \kappa) = 0, \quad \forall \kappa \in V(0).$$

Supposons que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t(\kappa), \kappa) \neq 0, \quad \forall \kappa \in V(0).$$

Alors la dérivée $n^{\text{ième}}$ de t au point $\kappa \in V(0)$ est égale à

$$t^{(n)}(\kappa) = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t(\kappa), \kappa)\right)^{-1} \sum \frac{n!}{\ell! i_1! \dots i_{n-1}!} \left(\frac{\partial^{\ell+|i|_{1,n-1}} \psi}{\partial \kappa^\ell \partial t^{|i|_{1,n-1}}} \right) (t(\kappa), \kappa) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t^{(k)}(\kappa)}{k!} \right)^{i_k}, \quad (3.154)$$

où la sommation $\sum$ porte sur les $(\ell, i_1, \dots, i_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\ell + |i|_{2,n-1} = n$.

Nous allons dans les sous-sections suivantes donner deux procédés équivalents pour définir le maximum d'une série formelle. Ceci nous permettra d'identifier la définition la plus naturelle de maximum formel avec la définition permettant un calcul numérique des coefficients du développement formel du champ de surchauffe, en utilisant le logiciel de calcul formel Maple 5.

3.5.2 Un premier procédé pour définir le maximum d'une série formelle

On dispose du procédé suivant pour définir le maximum d'une série formelle vérifiant (3.152) et (3.153).

Enonçons un lemme du à Borel :

Lemme 3.5.2 *Soit ϕ une série formelle à coefficients C^∞ définis sur $]0, 1[$, dont l'expression est donnée par : $\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i$. Alors, il existe une fonction ψ de classe C^∞ sur $]0, 1[\times] - \kappa_0, \kappa_0[$, telle que le développement en série de Taylor de $\kappa \rightarrow \psi(., \kappa)$ au point $\kappa = 0$ de ψ coïncide avec ϕ .*

Définition 3.5.3 *Une fonction vérifiant la conclusion du lemme 3.5.2 est appelée un représentant de la série formelle ϕ .*

Lemme 3.5.4 Soit $\bar{\phi}_1$ un représentant de ϕ . Supposons que $\bar{\phi}_1$ admette en t_0 un unique maximum sur $]0, 1[$, de plus non dégénéré, c'est-à-dire tel que

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial t}(t_0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}(t_0, 0) < 0. \quad (3.155)$$

Alors, il existe un réel positif, κ_0 , tel que, quelque soit $|\kappa| \leq \kappa_0$, l'application $t \rightarrow \bar{\phi}_1(t, \kappa)$ admette un maximum $t_1(\kappa)$ sur $]0, 1[$ tel que $t_1(0) = t_0$. De plus, sur $] -\kappa_0, \kappa_0[$, l'application $\kappa \rightarrow t_1(\kappa)$ est de classe C^∞ .

Soit $\bar{\phi}_2$ un autre représentant de ϕ et soit $t_2(\kappa)$ un maximum de $t \rightarrow \bar{\phi}_2(t, \cdot)$ tel que $t_2(0) = t_0$. Alors

$$DT(t_1) \sim DT(t_2), \quad (3.156)$$

où DT est défini en (3.151).

Preuve

Compte tenu de l'hypothèse (3.155), on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $(t, \kappa) \rightarrow \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial t}(t, \kappa)$ dans un voisinage du point $(t_0, 0)$. Il existe une fonction t_1 de classe C^∞ , définie sur un voisinage de zéro noté $] -\kappa_1, \kappa_1[$, a valeur dans un voisinage de t_0 telle que

$$t_1(0) = t_0, \quad (3.157)$$

et

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial t}(t_1(\kappa), \kappa) = 0, \quad \forall \kappa \in] -\kappa_1, \kappa_1[. \quad (3.158)$$

De plus, comme $\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}(t_0, 0) < 0$, par continuité de $(t, \kappa) \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}(t, \kappa)$, on a l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}(t_1(\kappa), \kappa) \leq 0, \quad \forall \kappa \in V(0) \subset] -\kappa_2, \kappa_2[,$$

ce qui assure que $t_1(\kappa)$ est un maximum de $t \rightarrow \bar{\phi}_1(t, \cdot)$ sur $]0, 1[$, pour $\kappa \in V(0)$ fixé.

Pour établir (3.156), nous allons montrer que $DT(t_1)$ ne dépend que des coefficients de la série formelle ϕ , donc est indépendant du représentant choisi.

La fonction $\bar{\phi}_1$ étant un représentant de ϕ , par définition, on a l'égalité

$$\frac{\partial^m \bar{\phi}_1}{\partial \kappa^m}(t, 0) = m! \phi_m(t),$$

d'où

$$\frac{\partial^{\ell+m} \bar{\phi}_1}{\partial t^\ell \partial \kappa^m}(t_0, 0) = m! \phi_m^{(\ell)}(t_0). \quad (3.159)$$

Compte-tenu de (3.158) et (3.159), on a l'égalité

$$t_1^{(1)}(0) = -\left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}(t_0, 0)\right)^{-1} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t \partial \kappa}(t_0, 0) = -\phi_0^{(2)}(t_0)^{-1} \phi_1^{(1)}(t_0).$$

Soit $n \geq 2$.

Supposons que $t_1^{(k)}(0)$ ne dépendent que des coefficients de la série formelle ϕ , pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$.

Le réel $t_1^{(n)}(0)$ s'obtient en dérivant successivement n fois l'expression (3.158) par rapport à κ , puis en évaluant le résultat au point $\kappa = 0$.

Compte-tenu de (3.158) et du lemme 3.5.1 (voir (3.154)), on a l'égalité

$$t_1^{(n)}(0) = -\left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2}\right)(t(0), 0)^{-1} \sum \frac{n!}{\ell! i_1! \dots i_{n-1}!} \left(\frac{\partial^{\ell+|i|_{1,n-1}+1} \bar{\phi}_1}{\partial \kappa^\ell \partial t^{|i|_{1,n-1}+1}} \right) (t(0), 0) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t_1^{(k)}(0)}{k!} \right)^{i_k}, \quad (3.160)$$

où la somme $\sum$ porte sur les (ℓ, i) dans $\mathbb{N}^n$ tels que $\ell + |i|_{2,n-1} = n$.

Or, d'après (3.159)

$$\left(\frac{\partial^{\ell+|i|_{1,n-1}+1} \bar{\phi}_1}{\partial \kappa^\ell \partial t^{|i|_{1,n-1}+1}} \right) (t(0), 0) = \ell! \phi_\ell^{(|i|_{1,n-1}+1)}(t_0),$$

d'où

$$t_1^{(n)}(0) = (\phi_0''(t_0))^{-1} \sum_{\ell+|i|_{2,n-1}=n} \frac{n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} \phi_\ell^{(|i|_{1,n-1}+1)}(t_0) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t_1^{(k)}(0)}{k!} \right)^{i_k}. \quad (3.161)$$

De (3.161), et de l'hypothèse de récurrence, il résulte que $t_1^{(n)}(0)$ dépend uniquement des coefficients de la série formelle ϕ .

Le résultat est donc vrai pour n quelconque, ce qui achève la preuve du lemme 3.5.4.

On peut alors définir le maximum de la série formelle définie en (3.152) et vérifiant l'hypothèse (3.153) en utilisant les lemmes 3.5.2 et 3.5.4.

Ces lemmes permettent de poser la définition :

Définition 3.5.5 Soit ϕ une série formelle en puissances de κ à coefficients de classe C^∞ sur $]0, 1[$ définie par

$$\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i,$$

et vérifiant (3.153). Soit $\bar{\phi}$ un représentant de ϕ au sens de la définition (3.5.2). On dira que la série formelle ϕ atteint son maximum sur $]0, 1[$ en l'unique série formelle définie par le développement en série de Taylor au point $\kappa = 0$ de la fonction $t(\kappa)$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_i := \frac{t^{(i)}(0)}{i!}, \quad (3.162)$$

où $t^{(i)}(0)$ est défini en (3.161).

Par hypothèse, les fonctions ϕ_i étant de classe C^∞ , on peut effectuer un développement de Taylor au point t_0 de la fonction $\phi_i(t)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, puis substituer à t la

série formelle $\sum_0^\infty t_i \kappa^i$. Réordonnons l'expression ainsi obtenue en puissances de κ , et sommons sur $i \in \mathbb{N}$. On peut alors poser la définition

Définition 3.5.6 *Le maximum de $t \rightarrow \phi(t, \kappa)$ sur $]0, 1[$ au point $t(\kappa)$ défini en (3.5.5) est égal à :*

$$\max_{t \in]0, 1[}^f \phi(t, \kappa) := \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\bar{t}_n) \kappa^n,$$

où

$$D_n(\bar{t}_n) := \sum_{\ell + |i|_{2,n} = n} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \phi_{\ell}^{(|i|_{1,n})}(t_0) \prod_{k=1}^n t_k^{i_k}, \quad (3.163)$$

où $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$ avec t_i défini en (3.162).

3.5.3 Un second procédé pour définir le maximum d'une série formelle

Considérons la série formelle définie en (3.152) et (3.153). Une manière naturelle pour définir le maximum de cette série formelle est de procéder de la manière suivante : on effectue un développement de Taylor au point t_0 de la fonction $\phi_i(t)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, puis on remplace t par $\sum_0^\infty t_i \kappa^i$. Réordonnant l'expression ainsi obtenue en puissances de κ , la série formelle $\phi(t, \kappa)$ s'exprime alors sous la forme

$$\phi(t(\kappa), \kappa) \sim \sum_0^\infty D_n(\bar{t}_n) \kappa^n,$$

où D_n a été définie en (3.163). Puis, on maximise successivement chaque coefficient de κ^n . Montrons maintenant que l'on peut procéder de la sorte, c'est-à-dire maximiser successivement chaque coefficient de κ^n . Montrons tout d'abord la proposition :

Proposition 3.5.7 *Soit D_n définie en (3.163).*

On a les égalités suivantes :

$$D_{2n-1}(\bar{t}_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial D_{2k}}{\partial t_k}(\bar{t}_{2k}) t_{2n-1-k} + g(t_0, \dots, t_{n-1}) \quad (3.164)$$

$$D_{2n}(\bar{t}_{2n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial D_{2k}}{\partial t_k}(\bar{t}_{2k}) t_{2n-k} + L(t_0, \dots, t_n) \quad (3.165)$$

où $g \in \mathbb{R}(t_0, \dots, t_{n-1})$ et L est un polynôme de degré deux en t_n , dont le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à $\phi_0''(t_0)$.

Preuve

D'après (3.163), on a les égalités :

$$D_1(\bar{t}_1) = \phi_0'(t_0) t_1 + \phi_1(t_0) \quad (3.166)$$

et

$$D_2(\bar{t}_2) = \phi'_0(t_0)t_2 + \frac{\phi''_0(t_0)}{2}t_1^2 + \phi'_1(t_0)t_1 + \phi_2(t_0). \quad (3.167)$$

Comme $D_0(t) := \phi_0(t)$, les égalités (3.164) et (3.165) sont vérifiées pour $n = 1$, avec

$$g(t_0) = \phi_1(t_0)$$

et

$$L(t_0, t_1) = \frac{\phi''_0(t_0)}{2}t_1^2 + \phi'_1(t_0)t_1 + \phi_2(t_0).$$

De plus, d'après l'hypothèse (3.153), on a $\phi''_0(t_0) < 0$.

Supposons (3.164) et (3.165) vraies pour $k \in \{1, \dots, n\}$, où $n \geq 1$.

Soit $(\ell, i) = (\ell, i_1, \dots, i_j, \dots, i_{2n+1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2n+1}$ tel que $\ell + |i|_{2,2n+1} = 2n + 1$.

D'après (3.163), remarquons que, pour $t_0 \in]0, 1[$,

$$(\tilde{t}_{2n+1}) \rightarrow D(t_0, \tilde{t}_{2n+1}) \in \mathbb{R}[\tilde{t}_{2n+1}].$$

Soit $j \in \{n + 2, \dots, 2n + 1\}$ et supposons $i_j = 1$.

Alors, pour $k \neq j$, $k \in \{n, \dots, 2n + 1\}$, $i_k = 0$.

Il résulte de (3.163) que $D(\tilde{t}_{2n+1})$ s'écrit sous la forme

$$D(\tilde{t}_{2n+1}) = \sum_{j=n+2}^{2n+1} \rho_j t_j + G(t_0, \dots, t_{n+1}), \quad (3.168)$$

où ρ_j ne dépend que de $\bar{t}_{n-1}$ et où $G \in F(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$.

Remarquons que pour $j \in \{n + 2, \dots, 2n + 1\}$, le coefficient de t_j dans l'expression de D_{2n+1} donnée en (3.163) est égal au coefficient de t_{j-1} dans l'expression de D_{2n} .

En effet, compte-tenu de l'expression de D_n (voir (3.163)), le coefficient de t_j dans $D_{2n+1}(\tilde{t}_{2n+1})$ tout comme celui de t_{j-1} dans $D_{2n}(\tilde{t}_{2n})$ est égal à

$$\sum_{\ell + |\tilde{i}|_{2,n-1} = 2n+1-j} \frac{1}{i_1! \dots i_{n-1}!} \phi_{\ell}^{(|\tilde{i}|_{1,n-1}+1)}(t_0) \prod_{k=1}^{n-1} t_k^{i_k}, \quad (3.169)$$

où $\tilde{i} \in \mathbb{N}^{n-1}$.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, pour $j \in \{n + 2, \dots, 2n + 1\}$,

$$\rho_j = \frac{\partial D_{4n+2-2j}}{\partial t_{2n+1-j}}. \quad (3.170)$$

Notons ρ_{n+1} le coefficient de t_{n+1} dans $D_{2n+1}(\tilde{t}_{2n+1})$. Montrons que

$$\rho_{n+1} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t_n}(\bar{t}_{2n}). \quad (3.171)$$

Supposons que $i_{n+1} = 1$ et soit $i \in \mathbb{N}^{2n}$ tel que $\ell + |i|_{2,2n} = 2n$.

Si $i_n = 2$, l'expression comportant l'indéterminée t_n dans $D_{2n}(\bar{t}_{2n})$ vaut

$$\phi_0^{(2)}(t_0) \frac{t_n^2}{2}.$$

Si $i_n = 1$, l'expression comportant l'indéterminée t_n est égale à

$$\left(\sum_{|i|_{2,n-1}=n} \frac{1}{i_1! \cdots i_{n-1}!} \phi_\ell^{(|i|_{1,n-1}+1)}(t_0) \prod_{k=1}^{n-1} t_k^{i_k} \right) t_n.$$

Il en résulte que $D_{2n}(\bar{t}_{2n})$ est un polynôme de degré deux en t_n dont les deux monômes de plus haut degré sont donnés par

$$\phi_0^{(2)}(t_0) \frac{t_n^2}{2} + \sum_{|i|_{2,n-1}=n} \frac{1}{i_1! \cdots i_{n-1}!} \phi_\ell^{(|i|_{1,n-1}+1)}(t_0) \prod_{k=1}^{n-1} t_k^{i_k} t_n. \quad (3.172)$$

Or, d'après (3.163), le coefficient de t_{n+1} dans D_{2n+1} est égal à la dérivée de l'expression (3.172) par rapport à t_n , d'où l'égalité (3.171).

Posons

$$g(t_0, \dots, t_n) := \sum_{\ell+|i|_{2,n}=2n+1} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \phi_\ell^{(|i|_{1,n})}(t_0) \prod_{k=1}^n t_k^{i_k}. \quad (3.173)$$

Compte-tenu de (3.168), (3.170), (3.171) et (3.173), on obtient alors l'égalité (3.164) pour l'entier $n+1$.

De manière analogue, on montre l'égalité (3.165). En effet, on a l'égalité

$$D_{2n+2}(\bar{t}_{2n+2}) = \sum_{j=n+2}^{2n+2} \rho_j t_j + L(t_0, \dots, t_{n+1}),$$

où

$$L(t_0, \dots, t_{n+1}) = \sum_{\ell+|i|_{2,n+1}=2n+2} \frac{1}{i_1! \cdots i_{n+1}!} \phi_\ell^{(|i|_{1,n+1})}(t_0) \prod_{k=1}^{n+1} t_k^{i_k}. \quad (3.174)$$

Le coefficient de t_j pour $j \geq n+2$ dans D_{2n+2} est égal au coefficient de t_{j-1} dans D_{2n+1} , donc

$$\rho_j = \frac{\partial D_{4n+4-2j}}{\partial t_{2n+2-j}}.$$

Enfin, L est un polynôme de degré 2 en t_{n+1} , dont le coefficient de t_{n+1}^2 est égal à $\phi_0^{(2)}(t_0)$, donc est de signe négatif.

On obtient alors l'égalité (3.165) pour l'entier $n+1$.

Ceci achève la récurrence et la preuve de la proposition 3.5.7.

Notation

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Dans la suite, nous noterons par $[x]$ l'unique entier naturel tel que $[x] - 1 \leq x \leq [x]$.

Proposition 3.5.8 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

L'équation $D'_0(t) = 0$ admet une unique solution sur $]0, 1[$.

Pour tout $(t_{n+1}, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{R}^n$, le système d'équations à $n + 1$ inconnues $(t_0, \dots, t_n)$

$$\frac{\partial D_{2k}}{\partial t_k}(\bar{t}_{2k}) = 0, \text{ pour } k \in \{0, \dots, n\}, \quad (3.175)$$

admet dans $\mathbb{R}^{n+1}$ une unique solution, indépendante de $(t_{n+1}, \dots, t_{2n})$.

Pour cette valeur $(t_0, \dots, t_n)$, $D_{2n+1}(\bar{t}_{2n+1})$ est indépendant de $(t_{n+1}, \dots, t_{2n+1})$.

De plus, $D_{2n+2}(\bar{t}_{2n+2})$ est un polynôme de degré 2 en t_{n+1} , indépendant de $(t_{n+2}, \dots, t_{2n+2})$, dont le coefficient du monôme de plus haut degré est négatif.

Preuve

Montrons que le système (3.175) admet une unique solution par récurrence sur n .

Supposons $n = 0$. Par construction, $D_0(t) := \phi_0(t)$. Donc, compte-tenu de l'hypothèse faite sur la fonction ϕ_0 (voir (3.153)), la fonction D_0 admet un unique maximum sur $]0, 1[$ atteint en $t = t_0$. Le réel t_0 est caractérisé comme étant l'unique solution de l'équation $D'_0(t) = 0$.

Soit $n \geq 0$.

Supposons le résultat vrai pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Par hypothèse de récurrence, $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ sont déterminés comme unique solution du système d'équations

$$\frac{\partial D_{2k}}{\partial t_k}(\bar{t}_{2k}) = 0, \text{ pour } k \in \{0, \dots, n\},$$

et ne dépendent pas de $(t_{n+1}, \dots, t_{2n})$.

Considérons alors le système (3.175) pour $k \in \{0, \dots, n + 1\}$.

D'après la proposition 3.5.7 et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$D_{2n+2}(\bar{t}_{2n+2}) = \frac{\partial D_0}{\partial t_0}(t_0)t_{2n+2} + \frac{\partial D_2}{\partial t_1}(\bar{t}_2)t_{2n+1} + \dots + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t_n}(\bar{t}_{2n})t_{n+2} + L(t_0, \dots, t_{n+1}),$$

où L est défini en (3.174).

Par hypothèse de récurrence, $D_{2n+2}(\bar{t}_{2n+2})$ est égal à

$$L(t_0, \dots, t_{n+1}),$$

où L est un polynôme de degré 2 en t_{n+1} , dont le coefficient du monôme de plus haut degré est négatif. Donc, quelque soit $(t_{n+2}, \dots, t_{2n+2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'équation $\frac{\partial D_{2n+2}}{\partial t_{n+1}}(\bar{t}_{2n+2}) = 0$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, t_{n+1} , indépendante de $(t_{n+2}, \dots, t_{2n+2})$.

Le système (3.175), pour $k \in \{0, \dots, n+1\}$, admet donc une unique solution $(t_0, \dots, t_{n+1})$ indépendante de $(t_{n+2}, \dots, t_{2n+2})$.

Ceci achève la récurrence.

D'après la proposition 3.5.7

$$D_{2n+1}(\bar{t}_{2n+1}) = \frac{\partial D_0}{\partial t_0}(t_0)t_{2n+1} + \frac{\partial D_2}{\partial t_1}(\bar{t}_2)(t_{2n}) + \cdots + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t_n}(\bar{t}_{2n})t_{n+1} + g(t_0, \dots, t_n),$$

où g est donnée explicitement en (3.173).

Compte-tenu de cette égalité, pour la valeur $(t_0, \dots, t_n)$ solution du système (3.175), $D_{2n+1}(\bar{t}_{2n+1})$ est égal à

$$g(t_0, \dots, t_n).$$

Il est donc entièrement déterminé par la donnée de $t_0, \dots, t_n$ et ne dépend pas de $(t_{n+1}, \dots, t_{2n+1})$.

Ceci achève la preuve de la proposition 3.5.8.

Remarque 3.5.9 *A noter que, compte-tenu de l'égalité (3.172), on a l'égalité*

$$t_n = -(\phi_0''(t_0))^{-1} \sum_{l+|i|_{2,n-1}=n} \frac{1}{i_1! \cdots i_{n-1}!} \phi_l^{(|i|_{1,n-1}+1)}(t_0) \prod_{k=1}^{n-1} t_k^{i_k}. \quad (3.176)$$

On a donc établi le théorème suivant :

Théorème 3.5.10 *Soit ϕ une série formelle en puissances de κ , à coefficients de classe C^∞ définis sur $]0, 1[$, telle que*

$$\phi(t, \kappa) \sim \sum_0^\infty \phi_i(t) \kappa^i.$$

Supposons que la partie principale ϕ_0 admette un unique maximum sur $]0, 1[$, non dégénéré, atteint au point $t = t_0$, c'est-à-dire tel que

$$\phi_0'(t_0) = 0 \text{ et } \phi_0''(t_0) < 0.$$

Alors la série formelle ϕ admet un unique maximum sur $]0, 1[$, au sens de la définition 3.5.5.

Remarque 3.5.11 *Compte-tenu de (3.161), (3.162) et (3.176), les deux procédés utilisés dans les sous-sections 3.5.2 et 3.5.3 pour définir le maximum d'une série formelle sont équivalents.*

Proposition 3.5.12 *La série formelle définie en (3.149), par $\phi := \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty \phi_i \kappa^i$ admet un unique maximum formelle sur $]0, 1[$.*

Preuve

En effet, la partie principale de cette série, compte-tenu de (3.150), est égale à

$$\phi_0(t) = H_0(t) = 2^{\frac{1}{4}} t (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette fonction admet un unique maximum sur $]0, 1[$ atteint en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, ce maximum est non dégénéré. D'après le théorème 3.5.10, la série formelle ϕ admet un unique maximum formel sur $]0, 1[$. Ceci achève la preuve de la proposition 3.5.12.

3.5.4 Conclusion

Nous sommes maintenant en mesure de répondre par l'affirmative à la question soulevée dans l'article de Dorsey, Dolgert et Di Bartolo [12] :

- Pouvons-nous obtenir un développement formel du champ de surchauffe à tout ordre en utilisant la construction formelle présentée en section 3.2, 3.3 et 3.4?

La réponse à cette question fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.5.13 *Soit la série formelle H^i définie par*

$$H^i := \sum_0^\infty \check{H}_i(0, \bar{A}_i) \kappa^i, \quad (3.177)$$

où $\check{H}_i(0, \bar{A}_i)$ est introduit à la définition 3.4.10.

On peut maximiser successivement chaque coefficient de κ^n de la série formelle (3.177).

Preuve

Remarquons que d'après (3.141), (3.142) et (3.143), sous l'hypothèse (3.147), pour $i \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$, $B_i(t) \in \mathbf{R}(t)$ avec pour uniques poles zéro et un.

Pour $x \in \mathbf{R}^+$ et $t \in]0, 1[$, d'après le corollaire 3.2.7, les applications définies en (3.148) par

$$t \mapsto \hat{F}_n(x, t) \quad t \mapsto \hat{Q}_n(x, t) \quad t \mapsto \hat{H}_n(x, t), \quad (x \in \mathbf{R}^+)$$

appartiennent à $\mathbf{R}(t)$, avec pour uniques poles zéro et un, donc, elles sont de classe C^∞ sur $]0, 1[$.

Effectuons-en un développement en série de Taylor au point $A_0 \in]0, 1[$, et remplaçons t par $\sum_0^\infty A_j \kappa^j$.

Réordonnons l'expression obtenue en puissances de κ et sommons sur i .

Notons $\tilde{F}^i$, $\tilde{Q}^i$ et $\tilde{H}^i$ les séries formelles ainsi obtenues.

Par construction des séries formelles $\tilde{F}^i$, $\tilde{Q}^i$ et $\tilde{H}^i$, on a les égalités

$$\tilde{F}^i(0, \kappa) \sim A(\kappa), \quad \tilde{Q}^i(0, \kappa) \sim B(\kappa) \quad \text{et} \quad \tilde{H}^i(0, \kappa) \sim D(\kappa).$$

De plus, le triplet $(\tilde{F}^i, \tilde{Q}^i, \tilde{H}^i)$ est solution formelle du système de Ginzburg-Landau. Par unicité de la solution intérieure de condition initiale $(A(\kappa), B(\kappa), D(\kappa))$, d'après le corollaire 3.2.7, on a les égalités

$$\tilde{F}^i \sim \check{F}^i, \quad \tilde{Q}^i \sim \check{Q}^i \quad \text{et} \quad \tilde{H}^i \sim \check{H}^i,$$

où les séries formelles $\check{F}^i, \check{Q}^i, \check{H}^i$ sont définies en (3.146).

D'après la proposition 3.5.8, on peut maximiser la série formelle $\check{H}^i(0) = \sum_0^\infty D_n(\bar{A}_n) \kappa^n$. Il en résulte que l'on peut maximiser $\sum_0^\infty \check{H}_i(0, \bar{A}_i) \kappa^i$ par le procédé ayant permit de maximisé la série formelle $\check{H}^i(0)$. Ceci achève la preuve de la proposition 3.5.13.

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui constitue une synthèse des résultats précédents.

Théorème 3.5.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit la série formelle correspondant à $A'(0)$ définie en (3.149). Elle admet un unique maximum "formel" sur $]0, 1[$, noté $\kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \kappa^i$.

Pratiquement, les réels h_i pour $i \in \mathbb{N}$ sont calculés de la façon suivante.

Le réel h_0 est donné par

$$h_0 := \sup_{A_0 \in \mathbb{R}} \check{H}_0(0; A_0) < +\infty,$$

où $\check{H}_0(0, A_0)$ est défini dans les notations 3.4.10.

Pour $(A_{n+1}, \dots, A_{2n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on résoud le système d'équations à $n+1$ inconnues

$$\frac{\partial \check{H}_{2k}}{\partial A_k}(0; \bar{A}_k) = 0, \text{ pour } k \in \{0, \dots, n\}, \quad (3.178)$$

qui admet dans $\mathbb{R}^{n+1}$ une unique solution $(A_0, \dots, A_n)$, indépendante de $(A_{n+1}, \dots, A_{2n})$.

Pour cette valeur $(A_0, \dots, A_n)$, $\check{H}_{2n}(0; \bar{A}_{2n})$ est indépendant de $(A_{n+1}, \dots, A_{2n})$ et

$$h_{2n} := \check{H}_{2n}(0, \bar{A}_{2n}). \quad (3.179)$$

De plus, $\check{H}_{2n+1}(0; \bar{A}_{2n+1})$ est indépendant de $(A_{n+1}, \dots, A_{2n+1})$, et

$$h_{2n+1} = \check{H}_{2n+1}(0; \bar{A}_{2n+1}). \quad (3.180)$$

Preuve

Le fait que la série formelle définie en (3.149) admette un unique maximum découle de la proposition 3.5.12.

De plus, on a l'égalité $D_n(\bar{A}_n) = \check{H}_n(0, \bar{A}_n)$. Utilisant alors la proposition 3.5.8, on obtient les deux assertions (3.179) et (3.180). Ceci achève la preuve du théorème 3.5.14.

Introduisons alors la définition :

Définition 3.5.15 On appellera champ de surchauffe formel, la série formelle notée $h^{sh,f}(\kappa)$ définie en (3.149) :

$$h^{sh,f}(\kappa) := \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \kappa^i,$$

où les réels h_i sont définis en (3.179) et (3.180).

3.6 Algorithme de calcul du champ de surchauffe.

3.6.1 Détermination pratique de $t(\kappa)$.

Précisons l'algorithme qui permet de parvenir à calculer numériquement le développement formel du champ de surchauffe obtenu dans la section précédente.

Sur le plan numérique, on suivra le troisième procédé de maximisation de la série formelle ϕ , défini dans la sous-section 3.1.3.

3.6.2 Programmation de l'algorithme

Pratiquement, pour calculer le champ de surchauffe à l'ordre n , on procède de la manière suivante :

– Etape 1.

Initialisation des fonctions $F_0, Q_0, F_1, H_0(0, A_0, B_0)$ et f_0 , définies respectivement en (3.38), (3.39), (3.45), (3.40), et (3.20).

Calculs de $\alpha_{0,0}, \beta_{0,0}, \alpha_{1,1}$ et $\beta_{1,1}$ définis en (3.70) et (3.72) pour $n = 0$.

Matching : on exprime $H_0(0, A_0, B_0)$ uniquement en fonction de A_0 en utilisant (3.83).

On maximise $\check{H}_0(0, A_0)$ sur $]0, 1[$, ce qui détermine A_0 . On en déduit B_0 et C_0 .

– Etape $n + 1$, ($n \geq 1$).

Supposons avoir calculé les fonctions F_k pour $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions Q_j et f_j pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$, et les constantes $A_0, \dots, A_{[\frac{n}{2}]}, B_0, \dots, B_{[\frac{n}{2}]}$ et $C_0, \dots, C_{[\frac{n}{2}]}$.

Dans un premier temps, on calcule F_{n+1}, Q_n, H_n et f_n définies respectivement en (3.54), (3.55), (3.56) et (3.30). Puis on calcule $\alpha_{0,i}, \beta_{0,i}, \alpha_{1,i+1}$ et $\beta_{1,i+1}$ définis en (3.70) et (3.72).

On exprime alors B_n et C_n en fonction de $A_{[\frac{n}{2}]}, \dots, A_n$, en utilisant la proposition 3.4.4.

On en déduit alors $H_n(0, \bar{A}_n, \bar{B}_n)$ en fonction de $A_{[\frac{n}{2}]}, \dots, A_n$. D'après le corollaire 3.5.8, on a alors les deux éventualités suivantes.

n est impair: $\check{H}_n(0, \bar{A}_n)$ est entièrement déterminé.

n est pair: $\check{H}_n(0, \bar{A}_n)$ est un polynôme de degré 2 en $A_{\frac{n}{2}}$ indépendant de $A_{\frac{n}{2}+1}, \dots, A_n$, dont le coefficient du monôme de plus haut degré est négatif. On maximise $\check{H}_n(0, \bar{A}_n)$ sur $\mathbf{R}$, ce qui détermine $A_{\frac{n}{2}}$. On en déduit $B_{\frac{n}{2}}$ et $C_{\frac{n}{2}}$.

3.6.3 Résultats numériques

Pour effectuer les calculs qui suivent, nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Maple 5. Compte-tenu des égalités (3.83), (3.96) et (3.124), on peut exprimer $H_2(0, \bar{A}_2, \bar{B}_2)$ en fonction de A_0, A_1 et A_2 . On trouve

$$\begin{aligned} \check{H}_2(0, \bar{A}_2) = & (-B_0 + \frac{\sqrt{2}A_0^2}{B_0})A_2 + (\frac{3}{2}\frac{A_0}{B_0}\sqrt{2} + \frac{A_0^3}{B_0^3})A_1^2 \\ & + (\frac{13}{32}\sqrt{2}B_0 + \frac{7}{32}\frac{B_0^3}{A_0^2} + \frac{A_0^2}{2B_0})A_1 + D(A_0, B_0) \end{aligned} \quad (3.181)$$

où

$$D \in \mathbf{R}(A_0, B_0) \text{ et } B_0 = -2^{\frac{1}{4}}(1 - A_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Faisant $A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans $\check{H}_2(0, \bar{A}_2)$ en vue de calculer le coefficient de κ^2 dans le champ de surchauffe, on trouve que

$$\check{H}_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, A_1, A_2) = -2^{\frac{5}{4}}A_1^2 - \frac{7}{8}2^{\frac{1}{4}}A_1 - \frac{521}{2048}2^{\frac{1}{4}}. \quad (3.182)$$

Maximisons $\check{H}_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, A_1, A_2)$ par rapport à A_1 et A_2 . Le maximum est atteint en

$$A_1 = -\frac{7}{32}. \quad (3.183)$$

On déduit de (3.96) l'égalité

$$B_1 = -\frac{9}{16}2^{-\frac{1}{4}} \quad (3.184)$$

et de (3.97) l'égalité

$$C_1 = -\frac{15}{16}2^{\frac{1}{2}}. \quad (3.185)$$

Enfin, on a l'égalité

$$\check{H}_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{32}, A_2) = -\frac{325}{2048}2^{\frac{1}{4}}. \quad (3.186)$$

Finalement, d'après (3.104) et (3.186), formellement et modulo $\mathcal{O}(\kappa^3)$, on obtient pour le champ de surchauffe la formule suivante :

$$h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}}\kappa^{-\frac{1}{2}}[1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa - \frac{325}{1024}\kappa^2 + \mathcal{O}(\kappa^3)]. \quad (3.187)$$

On retrouve le résultat obtenu par Dorsey, Dolgert et Di Bartolo dans [12].

3.6.4 Comparaison avec les résultats obtenus par Di Bartolo, Dolgert et Dorsey

Dans un premier temps, dans [12], ces auteurs avaient cherché la fonction f sous la forme $\tanh(\frac{\kappa x + c_0 + c_1 \kappa}{\sqrt{2}})$, supposant que $C_i = 0, \forall i \geq 2$. Cela impliquait, compte-tenu du lemme 3.4.4, que dès lors que C_1 était fixée, les constantes A_i et B_i étaient déterminées pour tout $i \geq 2$, et par conséquent, $H_i(\bar{A}_i)$, pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux. Ils n'effectuaient donc qu'une seule maximisation, lors de la détermination de $H_2(\bar{A}_2)$.

D'après la proposition 3.5.7, $H_{2n}(\bar{A}_{2n})$ est un polynôme de degré deux en A_n , dont le coefficient du monôme de plus haut degré est strictement négatif.

Pour calculer $H_4(\bar{A}_4)$, on a maximisé le polynôme

$$-\frac{76814767}{62914560}2^{\frac{1}{4}} + \frac{395}{512}2^{\frac{3}{4}}A_2 - 2^{\frac{5}{4}}A_2^2.$$

On trouve pour A_2 le résultat suivant

$$A_2 = \frac{395}{2048}\sqrt{2},$$

et pour $H_4(\bar{A}_4)$ la valeur suivante

$$-\frac{67453227}{62914560}2^{\frac{1}{4}},$$

différente de celle trouvée initialement par ces auteurs, mais corrigée depuis, sur notre remarque.

Ils ont en effet publié un erratum ([13]), et déterminé des valeurs numériques maintenant identiques aux nôtres. Récapitulons les résultats numériques obtenus.

n	A_n	B_n	C_n	$H_n(0)$
0	$2^{-\frac{1}{2}}$	$-2^{-\frac{1}{4}}$	1	$2^{-\frac{3}{4}}$
1	$-\frac{7}{32}$	$-\frac{9}{16}2^{\frac{1}{4}}$	$-\frac{15}{16}2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{15}{64}2^{\frac{3}{4}}$
2	$-\frac{395}{2048}2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{147}{512}2^{\frac{3}{4}}$	$\frac{429}{512}$	$\frac{325}{2048}2^{\frac{1}{4}}$
3				$\frac{14191}{65536}2^{\frac{3}{4}}$
4				$-\frac{67453227}{62914560}2^{\frac{1}{4}}$
5				$\frac{110796086153}{30198988800}2^{\frac{3}{4}}$

3.7 Note sur une conjecture due à H. J. Fink, D. S. McLachlan et B. Rothberg-Bibby

Dans [11], H.J. Fink, D. S. McLachlan et B. Rothberg-Bibby ont conjecturé que lorsque h est égal au champ de surchauffe, la solution (f_κ, A_κ) de $(GL)_\infty$ vérifie :

$$-\frac{A_\kappa(0)}{A'_\kappa(0)} = \sqrt{2}.$$

Dans le cadre κ petit, regardons si la conjecture est vérifiée d'un point de vue formel. Nous avons déterminé dans les sections précédentes un développement formel de $A'_\kappa(0)$ et de $A_\kappa(0)$ en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$.

Lorsque h est égal au champ de surchauffe, on obtient compte-tenu de (3.39), (3.99) et (3.100), les égalités

$$Q_0(0) = -2^{-\frac{1}{4}} \text{ et } Q'_0(0) = 2^{-\frac{3}{4}}. \quad (3.188)$$

D'où, au premier ordre, on a l'égalité :

$$-\frac{Q_0(0)}{Q'_0(0)} = \sqrt{2}.$$

Mais, au second ordre, nous avons obtenu les égalités

$$Q_1(0) = -\frac{9}{16}2^{\frac{1}{4}} \text{ et } Q'_1(0) = \frac{15}{64}2^{\frac{3}{4}},$$

d'où l'égalité

$$-\frac{Q_1(0)}{Q'_1(0)} = \frac{6}{5}\sqrt{2}.$$

La conjecture est donc en défaut dès le deuxième ordre.

$$-\frac{A_\kappa(0)}{A'_\kappa(0)} = \sqrt{2} + \frac{3}{16}\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2).$$

Lorsque κ est grand, d'après une construction également formelle due à J. Chapman ([8]) (voir également [4]), analogue à celle de Dolgert-Di Bartolo-Dorsey (voir [12]), la solution satisfait, au champ de superchauffe "formel"

$$A_\kappa(0) = -1 + \frac{D}{\sqrt{2}}\kappa^{-\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{4}{3}}),$$

$$A'_\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{4}{3}}).$$

La constante D peut-être estimée proche de $-0,3$. Donc, dans le cadre κ grand, on a :

$$-\frac{A_\kappa(0)}{A'_\kappa(0)} = \sqrt{2} - D\kappa^{-\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{4}{3}}).$$

La conjecture est donc également en défaut dans ce cas.

Même s'il ne s'agit pas d'une preuve mathématique puisque les développements obtenus sont formels, on peut penser que la conjecture est fausse.

3.8 Problèmes ouverts et perspectives

Dans [6], C. Bolley et B. Helffer soulevait le problème de l'existence d'un développement asymptotique à tout ordre en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe, pour κ petit.

Le théorème 3.5.14 suggère de poser la conjecture :

Conjecture 3.8.1 *Soit $h^{sh}(\kappa)$, le champ de surchauffe, introduit à la définition 1.1.2 dans le chapitre 1.*

Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour $\kappa \leq \kappa_0$, $\kappa^{\frac{1}{2}}h^{sh}(\kappa)$ admet un développement de Taylor en $\kappa = 0$ tel que

$$DT(h^{sh})(\kappa) := h^{sh,f}(\kappa), \quad (3.189)$$

où $h^{sh,f}(\kappa)$ est défini en (3.5.15).

Une autre question en suspens est de regarder si à partir des solutions formelles construites précédemment, on peut obtenir par une technique de construction de sur et sous-solution, une localisation d'une solution de $(GL)_\infty$. Pour obtenir un tel encadrement de la solution, cela suppose de construire une sur-solution de $(GL)_\infty$, plus précise que la fonction $f \equiv 1$, couramment utilisée.

Enfin, compte-tenu de la section 3.7 et de la construction formelle qui précède, on peut poser la conjecture :

Conjecture 3.8.2 *Au champ de surchauffe, on a la limite quand $\kappa \rightarrow 0$:*

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} -\frac{A_\kappa(0)}{A'_\kappa(0)} = \sqrt{2}. \quad (3.190)$$

Bibliographie

- [1] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit.
Reviews Mathematical Physics, Vol. 8, No.1, p. 43-83, 1996.
- [2] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior magnetic field.
Part I. Nonlinear Studies No.3, p. 1-29, 1996.
- [3] C. Bolley et B. Helffer.
Proof of the De Gennes formula for the superheating field in the weak κ limit.
Annales de l'Institut Henri Poincaré (section analyse non linéaire), Vol. 14, No. 5, p. 597-613, 1997.
- [4] B. Helffer et Fred B. Weissler.
On a family of solutions of the second painlevé equation related to superconductivity.
European Journal of Applied Mathematics, Vol. 9, No.3, p. 223-243, 1998.
- [5] C. Bolley et B. Helffer.
Upper bound for the solution of the Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting field and applications to the superheating field in the large κ regime.
European Journal of Applied Mathematics, Vol. 8, p. 347-367, 1997.
- [6] C. Bolley et B. Helffer.
A priori estimates for Ginzburg-Landau solutions.
Contribution pour Cargèse, 1999. A paraître dans NATO Science Series.
- [7] S. J. Chapman.
Asymptotic analysis of the Ginzburg-Landau model of superconductivity: Reduction to a free boundary model.
Lakshmikantham, 5.(ed), World congress of nonlinear analysts'92. Proceedings of the first world congress, Tampa, FL, USA, August 19-26, 1992.
- [8] S. J. Chapman.
Superheating field of type ii superconductors.
Siam J. Appl. Math., vol. 55, No. 5, p. 1233-1258, 1995.

- [9] P. G. de Gennes.
Superconductivity: selected topics in solid state physics and theoretical Physics.
Proc. of 8 th Latin american school of physics, Caracas, 1966.
- [10] The Orsay group.
Quantum Fluids.
ed. D. F. Brewer, p. 26, Amsterdam, North Holland, 1966.
- [11] B. Rothberg-Bibby, H. J. Fink et D. S. McLachlan.
First and second order phase transitions of moderately small superconductor in a magnetic field.
North-Holland, 1978.
- [12] T. Dorsey, J. Dolgert et Di Bartolo.
Superheating fields of superconductors: Asymptotic analysis and numerical results.
Physical Review B, vol. 53, No. 9, 1996.
- [13] T. Dorsey, J. Dolgert et Di Bartolo.
Erratum : Superheating fields of superconductors : Asymptotic analysis and numerical results.
Physical Review B, vol. 56, No. 5, 1997.
- [14] H. Parr.
Superconductive superheating field for finite κ .
Z. physik B25, p. 359-361, 1976.
- [15] M. van Dyke.
Perturbation Methods in fluid mechanics.
Academic Press, Stanford CA, 1975.

Chapitre 4

Existence de solutions de $(GL)_d^s$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les points critiques de la fonctionnelle réduite ϵ_d définie en (1.2) par :

$$\epsilon_d(f, A) = \int_0^d [\frac{1}{2}f^4 - f^2 + \kappa^{-2}(f')^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2] dx, \quad (4.1)$$

sur les paires (f, A) de $H^1(]0, d[)^2$ telles que $A(d) = 0$.

Un point critique de ϵ_d satisfait les équations de Ginzburg-Landau données par

$$\begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + f A^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \\ -A'' + A f^2 &= 0 \text{ sur }]0, d[, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec les conditions aux limites :

$$f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A'(0) = h, \quad A(d) = 0. \quad (4.3)$$

Nous noterons par $\tilde{H}^1(]0, d[)$ le sous-espace vectoriel de $H^1(]0, d[)$ défini par

$$\tilde{H}^1(]0, d[) = \{A \in H^1(]0, d[), \quad A(d) = 0\}. \quad (4.4)$$

Dans un premier temps, nous établissons un théorème qui fournit une localisation des solutions de $(GL)_d^s$. Précisément, nous montrons le théorème

Théorème 4.1.1 *Soit $\eta > 0$, $\epsilon \in]0, 1[$ et $(\delta_0, \delta_1) \in]0, 1[^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \delta_0 < \delta_1 < 1$.*

Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour $h > 0$ tels que

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (4.5)$$

il existe un couple (f, A) solution de $(GL)_d^s$.

De plus, il existe $C > 0$ telle que f vérifie l'inégalité en zéro

$$|f(0) - f_0| \leq C \kappa^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

Puis nous montrons un théorème qui fournit l'existence d'une solution de $(GL)_d^s$ qui ne minimise pas ϵ_d .

Théorème 4.1.2 *Soit $(\delta_1, \delta_2) \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]^2$ et $\eta > 0$. Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_1, \delta_2]$ et pour $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tels que*

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (4.7)$$

il existe une solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ qui ne correspond pas à un minimum local de ϵ_d .

La démonstration du théorème 4.1.1 repose sur la construction de sur et sous-solution dont la définition a été donnée en 1.2.6. Pour construire une sous-solution et une sur-solution, nous nous appuyons sur une construction de sous-solution obtenue près du champ de surchauffe par C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer (voir [5]).

Pour démontrer le théorème 4.1.2, nous suivons une démarche analogue à celle utilisée par S. Alama, L. Bronsard et T. Giorgi (voir [7]).

Nous considérons la restriction de la fonctionnelle ϵ_d à un convexe fermé de la forme $C_\alpha = \{(f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[), \text{ tel que } f \geq \alpha > 0\}$. La restriction de ϵ_d à C_α est semi-bornée inférieurement. Nous montrons alors que ϵ_d admet deux minima locaux dans C_α . Nous montrons également qu'elle vérifie la condition de Palais-Smale $(PS)_{C_\alpha}$ sur C_α . Pour conclure, nous appliquons le théorème (voir [8]) :

Théorème 4.1.3 *Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert V , $\varepsilon \in C^1(V)$ satisfaisant $(PS)_C$ sur C , et supposons que ε admette deux minima locaux distincts u_1 et u_2 dans C .*

Soit

$$\beta := \inf_{p \in P} \sup_{t \in [0,1]} \varepsilon(p(t)),$$

où

$$P := \{p \in C^0([0,1], C) : p(0) = u_1, p(1) = u_2\}.$$

Alors, soit

1. $\varepsilon(u_1) = \varepsilon(u_2) = \beta$ et u_1 et u_2 peuvent être reliés dans n'importe quel voisinage de l'ensemble des minima locaux de E dans C tels que $\varepsilon(u) = \beta$,

ou

2. Il existe un point critique $\bar{u}$ de ε dans C , qui n'est pas un minimum local de ε .

Nous prenons $V = \{(f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)\}$, $\varepsilon = \epsilon_d$, $C = C_\alpha$.

Nous écartons alors la première éventualité du théorème 4.1.3, ce qui nous permet de conclure la démonstration du théorème 4.1.2.

4.2 Existence et localisation d'une solution de $(GL)_d^s$

4.2.1 Construction d'une sous-solution

Rappelons le lemme classique, utile pour mener les calculs au cours de ce chapitre.

Lemme 4.2.1 Soit C une fonction bornée sur $]0, d[$ telle que :

$$C(x) \geq 0, \quad \forall x \in]0, d[,$$

et soit $u \in C^2([0, d])$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} -u'' + Cu \leq 0 & \text{sur }]0, d[, \\ u'(0) \geq 0, \quad u(d) \leq 0 \\ \text{où} \\ u(0) \leq 0, \quad u'(d) \leq 0; \end{cases} \quad (4.8)$$

alors :

$$u \leq 0 \quad \text{sur }]0, d[.$$

Rappelons le résultat suivant, dû à C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer (voir [5]).

Théorème 4.2.2 Soit $\rho \in]0, 1[$, et $\eta > 0$. Il existe une constante $C_{\rho, \eta} > 0$ et $\kappa_1 > 0$ telles que pour (κ, d) satisfaisant les conditions

$$d \geq 1, \quad 0 < \kappa < \kappa_1, \quad \kappa d \geq \kappa^{-\eta} \quad (4.9)$$

alors, pour toute solution (f, A) du système de Ginzburg-Landau satisfaisant $f(0) \geq \rho$, nous avons

$$|\kappa h^2 - \sqrt{2}f(0)^2(1 - f(0)^2)| \leq C_{\rho, \eta} \kappa^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Rappelons également le lemme, utile pour mener les calculs qui suivent (voir [1], p. 75 pour la démonstration) :

Lemme 4.2.3 Soit la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \alpha \exp(-\beta x) + \tanh(\gamma x + \delta)$$

où

$$\delta \geq 0, \quad \beta > 2\gamma > 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0. \quad (4.11)$$

Supposons que

$$\phi'(0) = 0,$$

alors, la fonction ϕ est strictement croissante.

Nous allons à présent établir la proposition :

Proposition 4.2.4 Soit $\eta > 0$, $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et $(\delta_0, \delta_1) \in]0, 1]^2$.

Soit E une fonction de classe C^∞ définie par

$$E(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } y \geq \frac{3}{4}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Il existe $\kappa_0 > 0$ et $\bar{C}_0$ telle que pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour h tels que

$$\kappa h^2 \leq 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2) + \bar{C}_0 \kappa^{1-\epsilon}, \quad (4.13)$$

alors, il existe une constante C_1 telle que, la fonction

$$f(x) = \tanh\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1 + C_1\kappa^{1-\epsilon})x + x_{\kappa,h}\right) + \kappa^2 \frac{h^2}{4f_0^3}(1 + C_1\kappa^{1-\epsilon}) \exp(-2f_0x) + \lambda_{d,\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x))E\left(\frac{x}{d}\right), \quad (4.14)$$

où les constantes $x_{\kappa,h}$ et $\lambda_{d,\kappa,h}$ sont déterminées par les conditions :

$$f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad (4.15)$$

soit une sous-solution des équations de Ginzburg-Landau $(GL)_d^s$.

De plus, il existe $\bar{D} > 0$ tel que

$$|f(0) - f_0| \leq \bar{D}\kappa^{1-\epsilon}. \quad (4.16)$$

Remarque 4.2.5 *C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer ont établi dans l'article [5] la proposition 4.2.4 pour une valeur particulière de f_0 égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'objectif est ici d'obtenir une sous-solution plus précise que celle obtenue par ces auteurs, pour $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$, avec (δ_0, δ_1) dans $]0, 1[^2$.*

Preuve de la proposition 4.2.4

Rappelons que lorsqu'on possède une sous-solution pour une valeur de h_0 donnée, cette fonction fournit une sous-solution pour des valeurs de $h \leq h_0$ (voir [1], p. 66).

Nous traiterons donc dans la suite le cas d'égalité,

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2) + \bar{C}_0 \kappa^{1-\epsilon}. \quad (4.17)$$

Introduisons les notations suivantes,

$$\nu = 1 - \epsilon, \quad (4.18)$$

$$\tilde{f}_1(x) := \tanh\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1 + C_1\kappa^\nu)x + x_{\kappa,h}\right), \quad (4.19)$$

$$\tilde{f}_2 := f - \tilde{f}_1, \quad (4.20)$$

et

$$z_{\kappa,h} := \exp(-2x_{\kappa,h}). \quad (4.21)$$

Introduisons également

$$f_1(x) := \tanh\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1 + C_1\kappa^\nu)x + x_{\kappa,h}\right) + \kappa^2 \frac{h^2}{4f_0^3}(1 + C_1\kappa^\nu) \exp(-2f_0x), \quad (4.22)$$

et

$$f_2(x) := \lambda_{d,\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x))E\left(\frac{x}{d}\right). \quad (4.23)$$

Etape 1 : Estimation pour $x_{\kappa,h}$, $z_{\kappa,h}$ et $\lambda_{d,\kappa,h}$.

La constante $x_{\kappa,h}$ est déterminée par la condition $f'(0) = 0$; donc elle satisfait

$$(1 - \tanh^2(x_{\kappa,h})) - \frac{\sqrt{2}\kappa h^2}{2f_0^2} = 0.$$

Comme h satisfait (4.17), nous obtenons

$$\tanh^2(x_{\kappa,h}) = f_0^2 - \frac{\bar{C}_0 \kappa^\nu}{\sqrt{2} f_0^2}.$$

On en déduit pour κ assez petit l'égalité :

$$\tanh(x_{\kappa,h}) = f_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}f_0^3} \bar{C}_0 \kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa^{2\nu}). \quad (4.24)$$

Il en résulte que

$$z_{\kappa,h} = \frac{1 - \tanh(x_{\kappa,h})}{1 + \tanh(x_{\kappa,h})} = \frac{1 - f_0}{1 + f_0} + \bar{C}_0 \frac{1}{\sqrt{2}f_0^3(1 + f_0)^2} \kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa^{2\nu}). \quad (4.25)$$

Remarquons que, d'après (4.25), il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on a l'encadrement, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$,

$$\frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1} + \mathcal{O}(\kappa^\nu) \leq z_{\kappa,h} \leq 1. \quad (4.26)$$

La constante $\lambda_{d,\kappa,h}$ est telle que $f'(d) = 0$, donc telle que

$$\lambda_{d,\kappa,h} = -\frac{f'_1(d)}{\sqrt{2}\kappa}.$$

Utilisant l'égalité

$$\frac{4}{(\exp(\alpha + \beta) + \exp(-(\alpha + \beta)))^2} = \frac{4 \exp(-2(\alpha + \beta))}{(1 + \exp(-2(\alpha + \beta)))^2},$$

et en prenant $\alpha = x_{\kappa,h}$ et $\beta = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1 + \kappa^\nu)d$, on obtient

$$\lambda_{d,\kappa,h} = (1 + C_1 \kappa^\nu) \frac{\kappa h^2}{2f_0^2 \sqrt{2}} \exp(-2f_0 d) - 2(1 + C_1 \kappa^\nu) \frac{z_{\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa d(1 + C_1 \kappa^\nu))}{(1 + z_{\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa d(1 + C_1 \kappa^\nu)))^2}. \quad (4.27)$$

Par conséquent, d'après (4.26) et (4.27), il existe une constante κ_0 telle que, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$, pour $\kappa \leq \kappa_0$ et κd grand, nous obtenons l'égalité

$$\lambda_{d,\kappa,h} = -2(1 + C_1 \kappa^\nu) z_{\kappa,h} \cdot \exp(-\sqrt{2}(1 + C_1 \kappa^\nu)\kappa d) \cdot (1 + \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{2}\kappa d(1 + C_1 \kappa^\nu)))) . \quad (4.28)$$

Nous avons en particulier

$$\lambda_{d,\kappa,h} = \mathcal{O}\left(\exp(-\sqrt{2}(1 - \mathcal{O}(\kappa^\nu))\kappa d)\right), \text{ avec } \lambda_{d,\kappa,h} < 0. \quad (4.29)$$

Etape 2 : Majoration de f' , f'' et f

D'après (4.14), nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{-\frac{1}{2}}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu) \cosh^{-2}(2^{-\frac{1}{2}}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)x + x_{\kappa,h}) \\ &\quad - (1 + C_1\kappa^\nu) \frac{\kappa^2 h^2}{2f_0^2} \exp(-2f_0 x) \\ &\quad + \kappa \lambda_{d,\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x))(\sqrt{2}E(\frac{x}{d}) + \frac{1}{\kappa d}E'(\frac{x}{d})). \end{aligned}$$

Imposons la condition

$$C_1 < 0. \quad (4.30)$$

Comme $\lambda_{d,\kappa,h} < 0$ (voir (4.29)), et comme $E \geq 0$ et $E' \geq 0$, il en résulte que, pour $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$ et κ assez petit :

$$-\mathcal{O}(\kappa) \leq f'(x) \leq 2^{\frac{3}{2}}\kappa \exp(-2x_{\kappa,h}). \quad (4.31)$$

Compte-tenu de (4.25), $\forall f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$, $\forall x \in [0, d]$, on obtient :

$$-\mathcal{O}(\kappa) \leq f'(x) \leq 2^{\frac{3}{2}}\kappa \left(\frac{1-f_0}{1+f_0} + \bar{C}_0 \frac{1}{\sqrt{2}f_0^3(1+f_0)^2} \kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa^{2\nu}) \right). \quad (4.32)$$

Il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$, on a l'inégalité

$$\frac{1-f_0}{1+f_0} + \bar{C}_0 \frac{1}{\sqrt{2}f_0^3(1+f_0)^2} \kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa^{2\nu}) < 1.$$

D'après (4.32), on obtient alors

$$f'(x) \leq 2^{\frac{3}{2}}\kappa, \quad \forall x \in [0, d]. \quad (4.33)$$

Dérivant f' , nous obtenons pour κ petit et κd grand :

$$\forall x \in [0, d], \quad -\mathcal{O}(\kappa^2) \leq f''(x) \leq \sqrt{2}f_0(1-f_0^2)\kappa + \mathcal{O}(\kappa^{1+\nu}). \quad (4.34)$$

Majoration et minoration de f

Notons que, d'après le lemme 4.2.3, la fonction f_1 est croissante. En effet, il existe κ_0 , tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$, on a les inégalités :

$$x_{\kappa,h} > 0, \quad 2f_0 \geq 2\delta_0 > \sqrt{2}(1 + C_1\kappa^\nu) > 0, \quad \kappa^2 \frac{h^2}{4f_0^3}(1 + C_1\kappa^\nu) > 0.$$

De plus, d'après (4.15), on a $f'(0) = f'_1(0) = 0$. Les hypothèses du lemme 4.2.3 sont bien vérifiées, donc f_1 est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et a fortiori sur $[0, d]$.

Comme $\lambda_{d,\kappa,h} < 0$, on a les inégalités

$$\forall x \in [0, d], \quad f(x) \leq f_1(x) \leq f_1(d).$$

De plus, utilisant le fait que

$$\tanh(y) = 1 - 2 \exp(-2y) + \mathcal{O}(\exp(-4y)), \quad (4.35)$$

lorsque $y \rightarrow +\infty$, on obtient, pour $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$ avec κ assez petit et pour $x \in [0, d]$:

$$f(x) \leq 1 - 2z_{\kappa,h} \exp(-\sqrt{2}\kappa d(1 + C_1\kappa^\nu))(1 + \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{2}\kappa d)(1 + C_1\kappa^\nu))). \quad (4.36)$$

On déduit en particulier de (4.36) l'inégalité, pour tout $x \in [0, d]$ et pour κ assez petit:

$$f(x) \leq 1. \quad (4.37)$$

Passons maintenant à l'étude de la minoration de f .

Pour $x \in [0, \frac{d}{2}]$, comme $f_2(x) = 0$ et f_1 est croissante, nous avons l'inégalité

$$f(x) \geq f_1(0). \quad (4.38)$$

Utilisant (4.24), et le fait que $\nu \geq \frac{1}{2}$ (car par hypothèse, $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}]$), on obtient

$$f_1(0) = \tanh(x_{\kappa,h}) + (1 + C_1\kappa^\nu)\kappa^2 \frac{h^2}{4f_0^3} = f_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}f_0^3}\bar{C}_0\kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.39)$$

Sur l'intervalle $[\frac{d}{2}, d]$, nous remarquons, utilisant le fait que f_1 est croissante et f_2 est décroissante que

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f_1(d/2) + f_2(d) \\ &= \lambda_{d,\kappa,h} + \tanh\left(\frac{\kappa d}{2\sqrt{2}}(1 + C_1\kappa^\nu) + x_{\kappa,h}\right) + \kappa^2 \frac{h^2}{4f_0^3}(1 + C_1\kappa^\nu) \exp(-f_0 d). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Utilisant (4.35), on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} &\tanh\left(\frac{\kappa d}{2\sqrt{2}}(1 + C_1\kappa^\nu) + x_{\kappa,h}\right) \\ &= 1 - 2z_{\kappa,h} \exp(-2^{-1/2}\kappa d(1 + C_1\kappa^\nu)) + \mathcal{O}(\exp(-2^{1/2}\kappa d(1 + C_1\kappa^\nu))). \end{aligned}$$

On déduit alors de (4.28) et de (4.40) l'estimation, sous l'hypothèse $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$ et pour κ assez petit, pour $x \in [\frac{d}{2}, d]$

$$f(x) \geq 1 - 2z_{\kappa,h} \exp(-2^{-1/2}\kappa d(1 + C_1\kappa^\nu)) + \mathcal{O}(\exp(-2^{1/2}\kappa d(1 + C_1\kappa^\nu))).$$

Il en résulte, compte-tenu de (4.38) qu'il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour tout $x \in [0, d]$, on ait l'inégalité

$$f(x) \geq f_1(0).$$

Finalement, d'après (4.39), pour κ assez petit et pour tout $x \in [0, d]$, nous obtenons

$$f(x) \geq f_1(0) = f_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}f_0^3}\bar{C}_0\kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa). \quad (4.41)$$

On suppose désormais que

$$\bar{C}_0 < 0. \quad (4.42)$$

Ceci implique l'inégalité, d'après (4.41),

$$f(x) \geq f_0, \quad \forall x \in [0, d]. \quad (4.43)$$

Il résulte également de (4.24) et de (4.42), l'inégalité, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$,

$$\tanh(x_{\kappa, h}) \geq \delta_0. \quad (4.44)$$

Etape 3 : Majoration de $A^2 f$

Etape 3.1 : Préliminaires

Pour majorer le terme $A^2 f$, nous ne procédons pas comme dans [5], où la majoration avait été obtenue en comparant les solutions de deux équations différentielles par utilisation du principe du maximum sur $\mathbb{R}^+$. Comme $d \geq \kappa^{-\epsilon}$ dans le régime où l'on travaille, nous allons partitionner l'intervalle $[0, d]$ en deux sous-intervalles $[0, \kappa^{-\epsilon}]$ et $[\kappa^{-\epsilon}, d]$, puis obtenir deux majorations différentes de $A^2 f$ sur ces deux sous-intervalles.

Utilisant l'inégalité

$$\sinh u \leq \frac{\exp u}{2} \leq \cosh u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+,$$

et l'inégalité (2.5) énoncée au chapitre 2, il résulte que l'on peut écrire, pour $x \in [0, d]$,

$$\begin{aligned} -A(x) &\leq \frac{h}{f(0)} \frac{\sinh(f(0)(d-x))}{\cosh(f(0)d)} \leq \frac{h}{f(0)} \frac{\exp(f(0)(d-x))}{2} \cdot 2 \exp(-f(0)d) \\ &= \frac{h}{f(0)} \exp(-f(0)x). \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité pour $x \in [0, d]$:

$$A^2(x)f(x) \leq \frac{h^2}{f^2(0)} \exp(-2f(0)x)f(x). \quad (4.45)$$

Etape 3.2 : Majoration sur $[0, \kappa^{-\epsilon}]$

Pour $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$ et pour κ assez petit, nous avons $\frac{d}{2} \geq \frac{\kappa^{-\eta-1}}{2} > \frac{\kappa^{-\epsilon}}{2}$.

Or, f est croissante sur $[0, \frac{d}{2}]$, donc elle est croissante sur $[0, \kappa^{-\epsilon}]$.

Par conséquent, nous avons l'inégalité

$$0 \leq f(x) - f(0) = xf'(\delta),$$

avec $\delta \in]0, x[$.

Compte-tenu de (4.33), on a

$$f'(\delta) \leq 2^{\frac{3}{2}} \kappa. \quad (4.46)$$

D'après (4.45) et (4.46), on obtient sur $[0, \kappa^{-\epsilon}]$, l'inégalité

$$A^2(x)f(x) \leq \frac{h^2}{f^2(0)} (f(0) + xf'(\delta)) \exp(-2f(0)x) \leq \left(\frac{h^2}{f(0)} + \frac{h^2}{f^2(0)} 2^{\frac{3}{2}} \kappa^\nu \right) \exp(-2f(0)x).$$

De (4.41), on déduit

$$\frac{h^2}{f(0)} \leq h^2 \left(\frac{1}{f_0} + \frac{\bar{C}_0 \kappa^\nu}{2\sqrt{2}f_0^5} + \mathcal{O}(\kappa) \right), \quad (4.47)$$

et

$$\frac{h^2}{f^2(0)} 2^{\frac{3}{2}} \kappa^\nu \leq \frac{h^2}{f_0} \left(\frac{2^{\frac{3}{2}} \kappa^\nu}{f_0} + \mathcal{O}(\kappa) \right). \quad (4.48)$$

Finalement, d'après (4.47) et (4.48), nous obtenons l'inégalité

$$A^2(x)f(x) \leq \frac{h^2}{f_0} (1 + c_2(f_0)\kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa)) \exp(-2f(0)x), \quad (4.49)$$

où

$$c_2(f_0) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{f_0} + \frac{1}{2\sqrt{2}f_0^4} \bar{C}_0. \quad (4.50)$$

Etape 3.3 : Majoration sur $[\kappa^{-\epsilon}, d]$

Pour $x \in [\kappa^{-\epsilon}, d]$, de (4.37), (4.43) et (4.45), on tire l'inégalité

$$A^2(x)f(x) \leq \frac{h^2}{f_0^2} \exp(-2f_0x). \quad (4.51)$$

Etape 4 : La fonction f est une sous-solution

Etape 4.1 : Préliminaires

Revenant à la définition de $\tilde{f}_1$ (voir (4.19)), on obtient l'égalité

$$-\kappa^{-2} \tilde{f}_1'' - \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^3 = (1 - (1 + C_1 \kappa^\nu)^2) \tilde{f}_1 (-1 + \tilde{f}_1^2) = (2C_1 \kappa^\nu + C_1^2 \kappa^{2\nu}) \tilde{f}_1 (1 - \tilde{f}_1^2). \quad (4.52)$$

De (4.14) et (4.52), nous déduisons l'égalité :

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2} f'' + (-1 + f^2 + A^2) f \\ &= (2C_1 \kappa^\nu + C_1^2 \kappa^{2\nu}) \tilde{f}_1 (1 - \tilde{f}_1^2) \\ & - \frac{h^2}{f_0} (1 + C_1 \kappa^\nu) \exp(-2f_0x) \\ & - \lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [2E(\frac{x}{d}) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa d} E'(\frac{x}{d}) + \frac{1}{(\kappa d)^2} E''(\frac{x}{d})] \\ & + \tilde{f}_2 \cdot (-1 + f^2 + f \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^2) + A^2 f. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nous allons maintenant prouver que le second membre de (4.53) est négatif quand κ est petit et $C_1 < 0$.

Etape 4.2 : Etude sur l'intervalle $[0, \kappa^{-\epsilon}]$

Compte-tenu de (4.30), comme $\tilde{f}_1 > 0$, le membre de droite de (4.52) est négatif.

Sous les hypothèses (4.30) et (4.42), utilisant (4.49) et (4.53), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2} f'' + (-1 + f^2 + A^2) f \\ & \leq -\frac{h^2}{f_0} (1 + C_1 \kappa^\nu) \exp(-2f_0x) \\ & - \lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [2E(\frac{x}{d}) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa d} E'(\frac{x}{d}) + \frac{1}{(\kappa d)^2} E''(\frac{x}{d})] \\ & + \tilde{f}_2 \cdot (-1 + f^2 + f \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^2) + \frac{h^2}{f_0} (1 + c_2(f_0)\kappa^\nu + \mathcal{O}(\kappa)) \exp(-2f_0x). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Le signe du membre de droite de (4.54) dépend du signe du coefficient du terme en $h^2\kappa^\nu$. En effet, remarquons que

$$E\left(\frac{x}{d}\right) = 0 \text{ sur } [0, \kappa^{-\epsilon}]. \quad (4.55)$$

Il en résulte que

$$\tilde{f}_2 \cdot (-1 + f^2 + f\tilde{f}_1 + \tilde{f}_1^2) = \mathcal{O}(\tilde{f}_2) = \mathcal{O}(\kappa^2 h^2) \cdot \exp(-2f_0 x). \quad (4.56)$$

De plus, d'après (4.55),

$$-\lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [2E\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa d} E'\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{1}{(\kappa d)^2} E''\left(\frac{x}{d}\right)] = 0. \quad (4.57)$$

Finalement, d'après (4.54), (4.56) et (4.57), on obtient l'inégalité

$$-\kappa^{-2} f'' + (-1 + f^2 + A^2)f \leq \frac{h^2}{f_0} \kappa^\nu (c_2(f_0) - C_1 + \mathcal{O}(\kappa^{1-\nu})). \quad (4.58)$$

Le coefficient de $h^2\kappa^\nu$ dans (4.58) est égal à $\frac{c_2(f_0) - C_1}{f_0}$ et est négatif pour tout $f_0 \in [\delta_1, \delta_2]$ sous la condition

$$c_2(f_0) < C_1, \quad \forall f_0 \in [\delta_0, \delta_1] \Leftrightarrow \bar{C}_0 < 2\sqrt{2}f_0^4 C_1 - 8f_0^2, \quad \forall f_0 \in [\delta_0, \delta_1]. \quad (4.59)$$

Compte-tenu du choix du signe de C_1 , ($C_1 < 0$), la condition (4.59) est remplie pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ si

$$\bar{C}_0 < 2\sqrt{2}\delta_1^4 C_1 - 8\delta_1^2. \quad (4.60)$$

Etape 4.3 : Etude sur l'intervalle $[\kappa^{-\epsilon}, d]$

Sur cet intervalle, pour contrôler convenablement le signe de l'expression $-\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f$, nous allons utiliser le terme $(2C_1\kappa^\nu + C_1^2\kappa^{2\nu})\tilde{f}_1(1 - \tilde{f}_1^2)$. D'après (4.19), on a l'inégalité

$$\tilde{f}_1(1 - \tilde{f}_1^2) \geq \tilde{f}_1(0) \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot \exp(-2^{1/2}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)x). \quad (4.61)$$

Utilisant (4.51), (4.53) et (4.61), nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2} f'' + (-1 + f^2 + A^2)f \\ & \leq (2C_1\kappa^\nu + C_1^2\kappa^{2\nu}) \cdot \tanh(x_{d,h,\kappa}) \cdot z_{d,h,\kappa} \exp(-2^{1/2}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)x) \\ & \quad - \frac{h^2}{f_0} (1 + C_1\kappa^\nu) \exp(-2f_0 x) \\ & \quad - \lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [3E\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa d} E'\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{1}{(\kappa d)^2} E''\left(\frac{x}{d}\right)] \\ & \quad + f^3 - \tilde{f}_1^3 + \frac{h^2}{f_0^2} \cdot \exp(-2f_0 x). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Déterminons quel est le terme dominant dans l'expression $f^3 - \tilde{f}_1^3$.

On a l'inégalité

$$\begin{aligned} & f^3 - \tilde{f}_1^3 \\ & \leq 3\tilde{f}_1^2 \lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot E\left(\frac{x}{d}\right) + 3\frac{\kappa^2 h^2}{4f_0^2} \exp(-2f_0 x) \\ & \quad + 3\frac{\kappa^4 h^4}{16f_0^4} \exp(-4f_0 x) + \lambda_{d,h,\kappa}^2 \exp(-2\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot E^2\left(\frac{x}{d}\right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Notons que, pour tout $x \in [\kappa^{-\epsilon}, d]$ et pour κ assez petit, on a l'inégalité

$$-\frac{h^2}{f_0}(1 + C_1\kappa^\nu)\exp(-2f_0x) + 3\frac{\kappa^2h^2}{4f_0^2}\exp(-2f_0x) + 3\frac{\kappa^4h^4}{16f_0^4}\exp(-4f_0x) \leq 0.$$

Il en résulte, utilisant par ailleurs (4.62), (4.63) et le fait que $f_0 \geq \delta_0$, l'inégalité :

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2}f'' + (-1 + f^2 + A^2)f \\ & \leq (2C_1\kappa^\nu + C_1^2\kappa^{2\nu}) \cdot \tanh(x_{d,h,\kappa}) \cdot z_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)x) \\ & - \lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [3(1 - \tilde{f}_1^2)E(\frac{x}{d}) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa d}E'(\frac{x}{d}) + \frac{1}{(\kappa d)^2}E''(\frac{x}{d})] \\ & + \frac{h^2}{\delta_0^2} \cdot \exp(-2\delta_0x) + \lambda_{d,h,\kappa}^2 \exp(-2\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot E^2(\frac{x}{d}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Remarquons que d'après (4.12), le support des fonctions E' et E'' est inclus dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

On obtient pour tout (κ, d) tel que $\kappa \leq \kappa_0$, $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$ et pour tout $x \in [\kappa^{-\epsilon}, d]$, les inégalités :

$$\begin{aligned} & \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [\frac{2\sqrt{2}}{\kappa d}E'(\frac{x}{d}) + \frac{1}{(\kappa d)^2}E''(\frac{x}{d})] \leq (2\sqrt{2}\kappa^\eta\|E'\|_\infty + \kappa^{2\eta}\|E''\|_\infty) \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) \\ & \leq 4\kappa^\eta\|E'\|_\infty \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $x \in [\kappa^{-\epsilon}, d]$, on ait l'inégalité :

$$-\lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot [\frac{2\sqrt{2}}{\kappa d}E'(\frac{x}{d}) + \frac{1}{(\kappa d)^2}E''(\frac{x}{d})] \leq -4\|E'\|_\infty \lambda_{d,h,\kappa} \kappa^\eta \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}). \quad (4.65)$$

De plus, comme $\|E\|_\infty \leq 1$, pour tout $x \in [\kappa^{-\epsilon}, d]$, on a l'inégalité

$$\lambda_{d,h,\kappa}^2 \exp(-2\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot E^2(\frac{x}{d}) \leq \lambda_{d,h,\kappa}^2.$$

Utilisant le fait que $C_1 < 0$ et (4.44), on déduit l'inégalité, pour κ assez petit :

$$(2C_1\kappa^\nu + C_1^2\kappa^{2\nu}) \cdot \tanh(x_{d,h,\kappa}) \cdot z_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)x) \leq \delta_0 \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot C_1\kappa^\nu \exp(-\sqrt{2}\kappa d).$$

De plus, utilisant l'inégalité $\cosh^{-1}(x) \leq 2\exp(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, et le fait que $\lambda_{d,h,\kappa} < 0$, on a l'inégalité

$$-\lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot 3(1 - \tilde{f}_1^2)E(\frac{x}{d}) \leq -12\lambda_{d,h,\kappa} \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot \exp(-\sqrt{2}(1 + C_1\kappa^\nu)\kappa x).$$

Comme $\text{supp } E \subset [\frac{1}{2}, 1]$, on obtient :

$$-\lambda_{d,h,\kappa} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \cdot 3(1 - \tilde{f}_1^2)E(\frac{x}{d}) \leq -12\lambda_{d,h,\kappa} \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot \exp(-\frac{\kappa(1 + C_1\kappa^\nu)d}{\sqrt{2}}).$$

Enfin, utilisant (4.13) et le fait que $\bar{C}_0 < 0$, on obtient l'inégalité, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$

$$\frac{h^2(f_0)}{\delta_0^2} \cdot \exp(-2\delta_0x) \leq \frac{2^{-3/2}}{\delta_0^2} \kappa^{-1} \cdot \exp(-2\delta_0x).$$

Il résulte de ces inégalités, l'inégalité

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2} f'' + (-1 + f^2 + A^2) f \\ & \leq \delta_0 \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot C_1 \kappa^\nu \exp(-\sqrt{2}\kappa d) - 12\lambda_{d,h,\kappa} \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot \exp(-\frac{\kappa(1+C_1\kappa^\nu)d}{\sqrt{2}}) \\ & - 4\|E'\|_\infty \lambda_{d,h,\kappa} \kappa^\eta \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) + \lambda_{d,h,\kappa}^2 + \frac{2^{-3/2}}{\delta_0^2} \kappa^{-1} \cdot \exp(-2\delta_0 x). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Montrons que pour $C_1 < 0$ et pour κ assez petit, le membre de droite de (4.66) est négatif.

On a l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \delta_0 \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot C_1 \kappa^\nu \exp(-\sqrt{2}\kappa d) - 12\lambda_{d,h,\kappa} \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) \\ & - 4\|E'\|_\infty \lambda_{d,h,\kappa} \kappa^\eta \exp(-\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) + \lambda_{d,h,\kappa}^2 + \frac{2^{-3/2}}{\delta_0^2} \kappa^{-1} \cdot \exp(-2\delta_0 x) \\ & \leq \kappa^\nu \exp(-\sqrt{2}\kappa d) (\delta_0 \cdot z_{d,h,\kappa} \cdot C_1 - 12\lambda_{d,h,\kappa} z_{d,h,\kappa} \kappa^{-\nu} \exp(\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) \exp(-\frac{C_1 \kappa^{1+\nu} d}{\sqrt{2}}) \\ & + \frac{2^{-3/2}}{\delta_0^2} \kappa^{-1-\nu} \cdot \exp(-2\delta_0 \kappa^{-\epsilon} + \mathcal{O}(\kappa)) - \lambda_{d,h,\kappa} \kappa^{\eta-\nu} \exp(\frac{\kappa d}{\sqrt{2}}) + \kappa^{-\nu} \exp(\sqrt{2}\kappa d) \lambda_{d,h,\kappa}^2). \end{aligned} \quad (4.67)$$

D'après (4.26), on a

$$z_{d,h,\kappa} \geq \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} + \mathcal{O}(\kappa^\nu).$$

Utilisant alors (4.29) et (4.30), et prenant en compte la condition $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, on déduit que le second membre de (4.67) est négatif, pour κ choisit assez petit.

Finalement, d'après les étapes 4.1 et 4.2, la fonction f est une sous-solution de $(GL)_d^s$ si les paramètres $\bar{C}_0$ et C_1 satisfont les inégalités (4.30) et (4.60), pour κ choisit suffisamment petit.

Ceci achève la preuve de la proposition 4.2.4.

4.2.2 Localisation d'une solution de $(GL)_d^s$

Nous déduisons de la proposition 4.2.4, le théorème

Théorème 4.2.6 Soit $\eta > 0$, et $(\delta_0, \delta_1) \in]0, 1]^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \delta_0 < \delta_1 < 1$.

Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, $\forall f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour $h > 0$ tels que

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (4.68)$$

il existe un couple (f, A) tel que $(f, A) \in (GL_d)^s$, solution du système (4.2) et satisfaisant les conditions aux limites

$$f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \quad A'(0) = h.$$

De plus, la fonction f vérifie l'inégalité :

$$|f(0) - f_0| \leq C(\delta_0) \kappa^{\frac{1}{2}}. \quad (4.69)$$

Preuve

Notons que la fonction $f \equiv 1$ est une sur-solution du problème $(GL)_d^s$ au sens de la définition 1.2.8. Dans [3], C. Bolley et B. Helffer ont prouvé que l'existence d'une solution symétrique positive des équations de Ginzburg-Landau sur $] -d, d[$ est une conséquence de l'existence d'une sous-solution f_{sous} et d'une sur-solution f_{sur} , telles que $f_{sous} \leq f_{sur}$. Soit $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$.

Soit $(\kappa, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$ un couple tel que

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2). \quad (4.70)$$

Considérons les solutions dans $]\delta_0, \delta_1[$ de l'équation

$$y^2(1 - y^2) + \bar{C}_0 \kappa^\nu = f_0^2(1 - f_0^2),$$

où $\bar{C}_0$ désigne une constante définie dans la proposition 4.2.4, solutions que nous noterons $y_1(\kappa, f_0)$ et $y_2(\kappa, f_0)$. On peut supposer $y_1(\kappa, f_0) < \frac{1}{\sqrt{2}} < y_2(\kappa, f_0)$.

D'après la proposition 4.2.4, pour κ assez petit, il existe deux sous-solutions du système de Ginzburg-Landau de la forme

$$\begin{aligned} f_{sous}^{(i)}(x) = & (1 + C_1 \kappa^\nu)^{\frac{\kappa^2 h^2}{4y_i^3}} \exp(-2y_i x + \tanh(\frac{(1+C_1 \kappa^\nu)\kappa x}{\sqrt{2}} + x_{\kappa, h})) \\ & + \lambda_{d, \kappa, h}^{(i)} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x))E(\frac{x}{d}), \end{aligned} \quad (4.71)$$

telles que

$$|f_{sous}^{(i)}(0) - y_i(\kappa, f_0)| \leq C \kappa^\nu, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.72)$$

De plus, nous avons montré que, pour tout $x \in [0, d]$, ces sous-solutions vérifient les propriétés

$$f_{sous}^{(i)} \leq 1, \quad i \in \{1, 2\},$$

et

$$f_{sous}^{(i)}(x) \geq f_{sous}^{(i)}(0).$$

Afin d'appliquer le théorème 4.2.2, nous allons utiliser la fonction $f_{sous}^{(2)}$.

On a

$$f_{sous}^{(2)}(x) \geq f_{sous}^{(2)}(0) = y_2(\kappa, f_0) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comme $f_{sous}^{(2)} < 1$, nous en déduisons qu'il existe une solution (f, A) de $(GL)_\infty$, telle que

$$f_{sous}^{(2)} \leq f \leq 1. \quad (4.73)$$

Evaluons à présent la différence $|f(0) - f_0|$.

Compte-tenu du théorème 4.2.2, avec $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a l'inégalité

$$|\kappa h^2 - \sqrt{2} f^2(0)(1 - f^2(0))| \leq C_\rho \kappa^{\frac{1}{2}}.$$

Par hypothèse, $\kappa h^2 = \sqrt{2}f_0^2(1 - f_0^2)$, d'où on déduit que

$$|f_0^2(1 - f_0^2) - f^2(0)(1 - f^2(0))| \leq \frac{C_\rho}{\sqrt{2}}\kappa^{\frac{1}{2}}.$$

De l'égalité

$$|-f_0^2(1 - f_0^2) + f^2(0)(1 - f^2(0))| = |f^2(0) - f_0^2| \cdot |1 - (f^2(0) + f_0^2)|,$$

on déduit que

$$2\delta_0|1 - 2\delta_0^2| \cdot |f(0) - f_0| \leq |f^2(0) - f_0^2| \cdot |1 - (f^2(0) + f_0^2)| \leq \frac{C_\rho}{\sqrt{2}}\kappa^{\frac{1}{2}}. \quad (4.74)$$

Posons $C(\delta_0, \rho) = \frac{C_\rho}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\delta_0^2|1 - 2\delta_0^2|}$.

De (4.74), on déduit que

$$|f(0) - f_0| \leq C(\delta_0, \rho)\kappa^{\frac{1}{2}},$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.2.6.

4.3 Application d'un théorème de min-max

Dans le but de prouver qu'il existe une solution non minimisante, nous allons montrer qu'il existe des éléments (f, A) de $H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)$ d'énergie très petite, tels que $f > 0$, la fonction f pouvant être choisie arbitrairement petite.

Donnons une variante d'une proposition due à C. Bolley et B. Helffer (voir [6], proposition 2.1, p. 126).

L'idée de la proposition établie par ces auteurs est de découpler le problème $(GL)_\infty$ en deux problèmes aux limites plus simples. Dans l'un de ces problèmes, f est supposée constante sur l'intervalle $]0, D[$, $D > 0$, et dans l'autre problème, sur l'intervalle $]D, +\infty[$, la fonction A est supposée identiquement nulle (ce qui signifie que l'effet Meissner est satisfait).

Proposition 4.3.1 *Soit $(\tilde{f}_0, d, h) \in]0, 1] \times [0, \infty[^2$.*

Posons $U(\tilde{f}_0, d) := \{(f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[); f = \tilde{f}_0 \text{ sur }]0, d[)\}$. La restriction de la fonctionnelle ϵ_d à l'ensemble $U(\tilde{f}_0, d)$ admet un minimum global et

$$\epsilon_0(\tilde{f}_0, d) := \inf_{(f, A) \in U(\tilde{f}_0, d)} \epsilon_d(f, A),$$

est donné par

$$\epsilon_0(\tilde{f}_0, d) = \frac{d}{2}(1 - \tilde{f}_0^2)^2 - \frac{h^2}{\tilde{f}_0} \tanh(\tilde{f}_0 d). \quad (4.75)$$

Preuve

Pour tout $(f, A) \in U(\tilde{f}_0, D)$, on a l'égalité

$$\epsilon_d(\tilde{f}_0, A) = \frac{d}{2}(1 - \tilde{f}_0^2)^2 + e_1(A),$$

où

$$e_1(A) = \int_0^d (\tilde{f}_0^2 A^2 + (A')^2) dx + 2hA(0).$$

La fonctionnelle $A \rightarrow e_1(A)$ est strictement convexe sur le domaine $\tilde{H}^1(]0, d[)$. Son minimum est atteint en un point A tel que

$$-A'' + \tilde{f}_0^2 A = 0 \text{ sur }]0, d[\quad (4.76)$$

avec $A'(0) = h$ et $A(d) = 0$.

Nous obtenons une solution unique donnée par

$$A_{\tilde{f}_0}(x) = -\frac{h}{\tilde{f}_0 \cosh(\tilde{f}_0 d)} \sinh(\tilde{f}_0(d-x)) \text{ pour } x \in [0, d]. \quad (4.77)$$

Le minimum de e_1 est égal à :

$$\inf_{A \in U_1} e_1(A) = -\frac{h^2}{\tilde{f}_0} \tanh(\tilde{f}_0 d), \text{ quand } \tilde{f}_0 \neq 0.$$

Par conséquent, la restriction de ϵ_d à $U(\tilde{f}_0, D)$ admet un unique minimum atteint en $(\tilde{f}_0, A_{\tilde{f}_0})$ et égal à

$$\epsilon_0(\tilde{f}_0, d) = \frac{d}{2}(1 - \tilde{f}_0^2)^2 - \frac{h^2}{\tilde{f}_0} \tanh(\tilde{f}_0 d), \quad (4.78)$$

ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.1.

Proposition 4.3.2 *Pour tout $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il existe $a > 0$ tel que, pour tout $\beta < 0$, il existe $d_0 > 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0$, pour tout $0 < \tilde{f}_0 \leq \frac{a}{d}$, $\exists (f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)$ tel que*

$$f > 0, \quad f \equiv \tilde{f}_0 \text{ et } \epsilon_d(f, A) \leq \beta. \quad (4.79)$$

Preuve

Pour $\tilde{f}_0 \in]0, 1[$, utilisant l'inégalité $\tanh(x) \geq x - \frac{x^3}{3}$ pour $x \geq 0$ et (4.75), nous obtenons

$$\epsilon_0(\tilde{f}_0, d) \leq \frac{d}{2}(1 - 2h^2 + \frac{2}{3}(\tilde{f}_0 d)^2 h^2) - \frac{d\tilde{f}_0}{2}(2 - \tilde{f}_0^2). \quad (4.80)$$

Pour tout $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il existe un réel $a > 0$ tel que $1 - 2h^2 + \frac{2}{3}a^2 h^2 < 0$. Soit d_0 le réel défini par

$$d_0 := \frac{2\beta}{1 - 2h^2 + \frac{2}{3}a^2 h^2}.$$

Alors, pour tout $d \geq d_0$ et pour tout $\tilde{f}_0 \leq \frac{a}{d}$, on a l'inégalité

$$\epsilon_0(\tilde{f}_0, d) \leq \beta.$$

Soit $(f, A) \in U(\tilde{f}_0, D)$ où la fonction A est définie en (4.76).

Alors, pour tout $d \geq d_0$, on a l'inégalité

$$\epsilon_d(f, A) \leq \beta.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 4.3.2.

Proposition 4.3.3 *Il existe $\kappa_0 > 0$, tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout $d \geq \kappa^{-1-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tels que*

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (4.81)$$

il existe un couple (f, A) solution de $(GL)_d^s$ et un couple $(\tilde{f}, \tilde{A}) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)$ tels que

$$\epsilon_d(\tilde{f}, \tilde{A}) < \epsilon_d(f, A) \quad (4.82)$$

et

$$0 < \tilde{f}(0) < f(0). \quad (4.83)$$

Preuve

Considérons la solution (f, A) obtenue dans le théorème 4.2.6. Elle vérifie la condition

$$f(0) > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.84)$$

De l'égalité $-A'' + Af^2 = 0$ et de la condition $A'(0) = h$, on déduit l'égalité

$$\int_0^d [(A')^2 + A^2 f^2] dt = -h A(0). \quad (4.85)$$

En un point critique de ϵ_d , compte-tenu de (4.1) et (4.85), l'énergie de cette solution peut s'exprimer sous la forme :

$$\epsilon_d(f, A) = \int_0^d [\kappa^{-2} (f')^2 + \frac{(1 - f^2)^2}{2}] dx + h A(0) + (h^2 - \frac{1}{2})d. \quad (4.86)$$

Compte-tenu de la proposition 4.3.1 (voir (2.5)), de (4.84), (4.86) et du fait que $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il résulte que

$$\epsilon_d(f, A) \geq h A(0) \geq -\frac{h^2}{f(0)} \geq -\sqrt{2} h^2. \quad (4.87)$$

Appliquons alors la proposition 4.3.2, en prenant

$$\beta = -\sqrt{2} h^2 = -2\kappa^{-1} \tilde{f}_0^2 (1 - \tilde{f}_0^2), \quad a = 2$$

et κ assez petit.

Il existe $d_0(\kappa) > 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0(\kappa)$, il existe un couple $(\tilde{f}, \tilde{A})$, tel que

$$\epsilon_d(\tilde{f}, \tilde{A}) < -\sqrt{2} h^2 \leq \epsilon_d(f, A)$$

et tel que

$$0 < \tilde{f}(0) < f(0).$$

On peut prendre $d_0(\kappa) = \mathcal{O}(\kappa^{-1})$.

Ceci achève la preuve de la proposition 4.3.3.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}^+$. La proposition 4.3.3 nous conduit à introduire l'ensemble convexe fermé de $H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)$ défini par

$$C_\alpha := \{(f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[), \text{ tels que } 0 < \alpha \leq f \leq 1\}. \quad (4.88)$$

4.3.1 La fonctionnelle ϵ_d vérifie la condition de Palais-Smale sur C_α

En vue d'utiliser un théorème de min-max, nous introduisons les définitions suivantes. Soit C un convexe fermé inclus dans un espace de Hilbert V , $\varepsilon : C \rightarrow \mathbf{R}$ une application possédant une extension $\varepsilon \in C^1(V; \mathbf{R})$ sur V . Pour $u \in C$, nous définissons

$$g(u) = \sup_{\substack{v \in C \\ \|u - v\| < 1}} \langle D\varepsilon(u), u - v \rangle, \quad (4.89)$$

où $D\varepsilon$ désigne la différentielle de ε .

Lorsque C est un espace vectoriel, nous retrouvons la définition de la dérivée au sens usuel.

Définition 4.3.4 Nous dirons qu'un point $u \in C$ est un point critique pour ε si $g(u) = 0$.

Définition 4.3.5 La fonction ε satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_C$ sur C si la condition suivante est satisfaite :

Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de C telles que $(\varepsilon(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ soit uniformément bornée dans $\mathbf{R}$ et telle que $g(u_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ est relativement compacte dans V .

Dans ce qui suit, nous prendrons $V = \{(f, A) \in H^1(]0, d[) \times \tilde{H}^1(]0, d[)\}$, $\varepsilon = \epsilon_d$, $C = C_\alpha$. Pour $(f, A) \in H^1(]0, d[)^2$ et pour $(u, v) \in H^1(]0, d[)^2$, on a l'égalité

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (u, v) \rangle = \int_0^d (\kappa^{-2} f' u' - f u + f^3 u + A^2 f u + A' v' + A f^2 v) dx. \quad (4.90)$$

Proposition 4.3.6 La fonctionnelle ϵ_d vérifie la condition de Palais-Smale sur C_α .

Preuve

Rappelons que les injections

$$H^1(]0, d[) \hookrightarrow C^0([0, d]), \quad H^1(]0, d[) \hookrightarrow L^2([0, d]) \quad (4.91)$$

sont compactes.

Soit $(f_n, A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans C_α telle qu'il existe $D \in \mathbf{R}$ vérifiant

$$\epsilon_d(f_n, A_n) \leq D, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (4.92)$$

et telle que

$$g(f_n, A_n) \rightarrow 0 \quad (4.93)$$

quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrons dans un premier temps que les suites sont uniformément bornées dans $H^1([0, d])$.

On a l'inégalité (tenant compte de la propriété $A_n(d) = 0$)

$$A_n^2(0) = -2 \int_0^d A_n(t) A_n'(t) dt \leq 2 \|A_n\|_{L^2([0, d])} \|A_n'\|_{L^2([0, d])}. \quad (4.94)$$

On en déduit, compte-tenu de la définition de ϵ_d (voir (4.1)), que

$$\epsilon_d(f_n, A_n) \geq \|A_n'\|_{L^2([0, d])}^2 + \|A_n f_n\|_{L^2([0, d])}^2 - 2\sqrt{2}h \|A_n'\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \|A_n\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} + (h^2 - \frac{1}{2})d.$$

Comme $f_n \geq \alpha > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon_d(f_n, A_n) \\ \geq \|A_n'\|_{L^2([0, d])}^2 + \alpha^2 \|A_n\|_{L^2([0, d])}^2 - 2\sqrt{2}h \|A_n'\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \|A_n\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} + (h^2 - \frac{1}{2})d. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Pour $a > 0$, $b > 0$ et $\alpha > 0$, on a l'inégalité

$$\alpha^2 a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\alpha}{2} \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{2}{\alpha}. \quad (4.96)$$

Posons

$$B_n = \frac{A_n}{h}.$$

D'après (4.95), on peut écrire

$$\begin{aligned} \epsilon_d(f_n, A_n) \\ \geq h^2 \left(\|B_n'\|_{L^2([0, d])}^2 + \alpha^2 \|B_n\|_{L^2([0, d])}^2 - 2\sqrt{2} \|B_n'\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \|B_n\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \right) + (h^2 - \frac{1}{2})d. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Compte-tenu de (4.96) et de (4.97), on a l'inégalité

$$\epsilon_d(f_n, A_n) \geq \frac{\alpha}{2} \frac{\|A_n'\|_{L^2([0, d])}^2 + \|A_n\|_{L^2([0, d])}^2}{2} - \frac{2h^2}{\alpha} + (h^2 - \frac{1}{2})d. \quad (4.98)$$

On en déduit, compte-tenu de (4.92), qu'il existe $E > 0$ telle que

$$\|A_n\|_{H^1([0, d])} \leq E. \quad (4.99)$$

Par ailleurs,

$$\kappa^{-2} \|f_n'\|_{L^2([0, d])}^2 + \|1 - f_n\|_{L^2([0, d])}^2 - 2\sqrt{2}h \|A_n'\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \|A_n\|_{L^2([0, d])}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_d(f_n, A_n) \leq D.$$

Compte-tenu de (4.99), il résulte qu'il existe $\bar{E} > 0$ telle que

$$\|1 - f_n\|_{H^1([0, d])} \leq \bar{E}. \quad (4.100)$$

Il résulte de (4.91), (4.99), (4.100) et de la compacité faible de la boule unité qu'on peut extraire des sous-suites, qu'on notera encore f_n et A_n telles que, d'une part,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } H^1(]0, d[) \text{ et } A_n \rightharpoonup A \text{ dans } \tilde{H}^1(]0, d[). \quad (4.101)$$

et d'autre part,

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^2(]0, d[) \text{ et } A_n \rightarrow A \text{ dans } L^2(]0, d[). \quad (4.102)$$

En vue d'utiliser le fait que $g(f_n, A_n)$ tend vers 0, posons

$$t_{m,n} = \begin{cases} 2\|f_n - f_m\|_{H^1(]0, d[)}, & \text{si } \|f_n - f_m\|_{H^1(]0, d[)} \geq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \|f_n - f_m\|_{H^1(]0, d[)} < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

D'après (4.100), on en déduit que

$$1 \leq t_{m,n} \leq 4\bar{E}. \quad (4.103)$$

Maintenant, choisissons

$$\bar{f}_{m,n} = f_n + \frac{1}{t_{m,n}}(f_m - f_n).$$

Puisque C_α est convexe, $(\bar{f}_{m,n}, A_n) \in C_\alpha$, et

$$\|(f_n, A_n) - (\bar{f}_{m,n}, A_n)\|_{H^1(]0, d[)}^2 = \|f_n - \bar{f}_{m,n}\|_{H^1(]0, d[)}^2 < 1$$

compte-tenu du choix de $t_{m,n}$.

D'après (4.93) et (4.103), $t_{m,n} g(f_n, A_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Se rappelant de la définition 4.89, il en résulte alors que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq A$, on obtient l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(f_n - f_m, 0) \rangle = t_{m,n} \langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(f_n - \bar{f}_{m,n}, 0) \rangle \leq t_{m,n} g(f_n, A_n) \leq \epsilon. \quad (4.104)$$

Inversant les rôles de m et n , nous obtenons également, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geq A$, l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f_m, A_m)(f_m - f_n, 0) \rangle = t_{n,m} \langle D\epsilon_d(f_m, A_m)(f_m - \bar{f}_{n,m}, 0) \rangle \leq t_{n,m} g(f_m, A_m) \leq \epsilon. \quad (4.105)$$

Par ailleurs, on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(f_n - f_m, 0) \rangle - \langle D\epsilon_d(f_m, A_m)(f_n - f_m, 0) \rangle \\ &= \int_0^d \{ \kappa^{-2}(f'_n - f'_m)^2 + (f_n - f_m)(A_n^2 f_n - A_m^2 f_m) \\ & \quad - [(1 - f_n^2)f_n - (1 - f_m^2)f_m](f_n - f_m) \} dx. \end{aligned} \quad (4.106)$$

De (4.104), (4.105) et (4.106), on déduit l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(f_n - f_m, 0) \rangle - \langle D\epsilon_d(f_m, A_m)(f_n - f_m, 0) \rangle \leq 2\epsilon. \quad (4.107)$$

Compte-tenu de (4.91), (4.99) et (4.100), f_n et A_n sont bornées en norme C^0 et $f_n \rightarrow f$ dans $C^0([0, d])$ quand $n \rightarrow +\infty$. On en déduit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{A} > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geq \tilde{A}$ et $n \geq \tilde{A}$, on a

$$\left| \int_0^d \{(f_n - f_m)(A_n^2 f_n - A_m^2 f_m) - [(1 - f_n^2)f_n - (1 - f_m^2)f_m](f_n - f_m)\} dx \right| \leq \epsilon.$$

Il en résulte, revenant à (4.106) et (4.107) que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq B$, $m \geq B$

$$\int_0^d \kappa^{-2} (f'_n - f'_m)^2 dx \leq \epsilon. \quad (4.108)$$

De (4.102) et (4.108), on déduit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1([0, d])$. Il en résulte que $f \in H^1([0, d])$ et

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{dans } H^1([0, d]).$$

On a l'égalité

$$\begin{aligned} & \langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(0, A_n - A_m) \rangle - \langle D\epsilon_d(f_m, A_m)(0, A_n - A_m) \rangle \\ &= \int_0^d \{(A'_n - A'_m)^2 - (A_n f_n^2 - A_m f_m^2)\} dx. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Compte-tenu de (4.93) et (4.99), pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, on a l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f_n, A_n)(0, A_n - A_m) \rangle \leq 2\|A_n - A_m\|_{H^1([0, d])} g(f_n, A_n) \leq \epsilon.$$

On obtient une inégalité analogue en inversant les rôles de n et de m .

Utilisant (4.109), il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_1 tel que, pour tout $m \geq n_1$, pour tout $n \geq n_1$,

$$\int_0^d \{(A'_n - A'_m)^2 - (A_n f_n^2 - A_m f_m^2)\} dx \leq 2\epsilon.$$

Par ailleurs, d'après (4.91) et (4.99)

$$A_n \rightarrow A \quad \text{dans } C^0([0, d]).$$

Il en résulte que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_2 > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geq n_2$ et $n \geq n_2$

$$\left| \int_0^d (A_n f_n^2 - A_m f_m^2) dx \right| \leq \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_3 > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq n_3$, $m \geq n_3$

$$\int_0^d (A'_n - A'_m)^2 dx \leq 3\epsilon. \quad (4.110)$$

On peut alors conclure, utilisant (4.102) et (4.110) que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(]0, d[)$. Il en résulte que $A \in H^1(]0, d[)$ et

$$A_n \rightarrow A, \text{ dans } H^1(]0, d[),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.6.

4.3.2 Preuve du théorème 4.1.2

Proposition 4.3.7 *La restriction de ϵ_d à l'ensemble convexe C_α admet un minimum global.*

Preuve

Nous avons montré au cours de la preuve de la proposition 4.3.6 (voir en (4.98)) que la restriction de ϵ_d à l'ensemble convexe C_α est semi-bornée inférieurement. Soit (f_n, A_n) , une suite minimisante de ϵ_d . Compte-tenu du fait que f_n et A_n sont bornées en norme $H^1(]0, d[)$, on peut en extraire des sous-suite telles que

$$f_n \rightharpoonup f, \quad A_n \rightharpoonup A \text{ dans } H^1(]0, d[).$$

Comme la fonctionnelle ϵ_d est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, on obtient

$$\epsilon_d(f, A) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_d(f_n, A_n),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.7.

Montrons maintenant qu'un point critique de ϵ_d au sens de la définition 4.3.4 est une solution de $(GL)_d^s$. Nous suivons ici une démonstration due à T. Giorgi, S. Alama, L. Bronsard (voir [7]).

Proposition 4.3.8 *Supposons que $(f, A) \in C_\alpha$ avec $g(f, A) = 0$. Alors (f, A) est une solution de $(GL)_d^s$.*

Preuve

Soit $\phi, \psi \in C_0^\infty(]0, d[)$ et $\epsilon > 0$.

Compte-tenu de (4.90) et de la définition de g (voir (4.89)), on a l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (0, \frac{\psi}{\|\psi\|}) \rangle \leq g(f, A),$$

soit, comme $g(f, A) = 0$,

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (0, \psi) \rangle \leq 0.$$

Appliquant cette inégalité à $-\psi$, on obtient :

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (0, \psi) \rangle = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty([0, d]), \quad (4.111)$$

d'où on déduit que

$$-A'' + Af^2 = 0, \quad \text{dans } D'([0, d]). \quad (4.112)$$

Posons

$$\phi_\epsilon = -(f + \epsilon\phi - \alpha)_- \geq 0, \quad \phi^\epsilon = (f + \epsilon\phi - 1)_+ \geq 0,$$

et

$$w_\epsilon = f + \epsilon\phi + \phi_\epsilon - \phi^\epsilon.$$

Alors $(w_\epsilon, A) \in C_\alpha$, d'où nous obtenons

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (f - w_\epsilon, 0) \rangle \leq 0, \quad (4.113)$$

pour $\epsilon > 0$.

Nous posons

$$\Omega_\epsilon := \{x : f + \epsilon\phi \leq \alpha\}, \quad \Omega^\epsilon := \{x : f + \epsilon\phi \geq 1\}.$$

De (4.113), on déduit l'inégalité

$$0 \leq \epsilon \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi, 0) \rangle - \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle + \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi_\epsilon, 0) \rangle,$$

d'où

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi, 0) \rangle \geq \frac{1}{\epsilon} [\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle - \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi_\epsilon, 0) \rangle].$$

Nous avons l'égalité

$$\langle D\epsilon_d(1, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle = \int_{\Omega^\epsilon} A^2 \phi^\epsilon dx.$$

On en déduit que

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle \geq \langle D\epsilon_d(f, A) - D\epsilon_d(1, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle &\geq \int_{\Omega^\epsilon} (\kappa^{-2} f'(\phi^\epsilon)' + f(-1 + f^2)\phi^\epsilon + A^2(f - 1)\phi^\epsilon dx \\ &\geq \int_{\Omega^\epsilon} [\kappa^{-2}(f - 1)'(f - 1 + \epsilon\phi)' \\ &\quad + A^2(f - 1)(f - 1 + \epsilon\phi) + f(-1 + f^2)(f - 1 + \epsilon\phi)] dx \\ &\geq \epsilon \int_{\Omega^\epsilon} (\kappa^{-2} f' \phi' + f(-1 + f^2)\phi + A^2(f - 1)\phi) dx. \end{aligned}$$

Comme $mes(\Omega^\epsilon) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi^\epsilon, 0) \rangle \geq o(\epsilon). \quad (4.114)$$

De manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned} \langle D\epsilon_d(f, A), (\phi_\epsilon, 0) \rangle &= \int_{\Omega_\epsilon} (\kappa^{-2} f' \phi'_\epsilon + f(-1 + f^2 + A^2) \phi_\epsilon) dx \\ &\leq -\epsilon \int_{\Omega_\epsilon} \kappa^{-2} f' \phi' + A^2 f \phi dx \\ &= o(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.115)$$

On déduit de (4.114) et (4.115) l'inégalité

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi, 0) \rangle \geq \frac{1}{\epsilon} o(\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0, \quad (4.116)$$

d'où on déduit que

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi, 0) \rangle \geq 0. \quad (4.117)$$

Comme nous pouvons effectuer des calculs semblables en remplaçant ϕ par $-\phi$, nous obtenons l'égalité

$$\langle D\epsilon_d(f, A), (\phi, 0) \rangle = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0, d[), \quad (4.118)$$

soit

$$-\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0, \quad \text{dans } D'([0, d[). \quad (4.119)$$

On déduit de (4.112) et (4.119) que $f \in H^2([0, d])$ et $A \in H^2([0, d])$, puis, en itérant, que $f \in \cap_{m \in \mathbb{N}} H^m([0, d])$ et $A \in \cap_{m \in \mathbb{N}} H^m([0, d])$.

Les fonctions f et A sont de classe C^∞ et vérifient les équations de Ginzburg-Landau au sens usuel.

Montrons maintenant que (f, A) vérifie les conditions aux limites (4.3).

Soit $\tilde{\phi} \in C_0^1([0, d])$.

Compte-tenu de (4.111), on a l'égalité

$$\int_0^d (A' f' + A f^2 \tilde{\phi}) dx + h \tilde{\phi}(0) = 0. \quad (4.120)$$

Par ailleurs,

$$\int_0^d A'' \tilde{\phi} dx = [A' \tilde{\phi}]_0^d - \int_0^d A' \tilde{\phi}' dx,$$

d'où, en prenant en compte (4.120), et le fait que $-A'' + f^2 A = 0$, on déduit que

$$\tilde{\phi}(0)(A'(0) - h) = 0, \quad \forall \tilde{\phi} \in C_0^1([0, d]).$$

Il en résulte que

$$A'(0) = h.$$

D'une manière analogue, en utilisant (4.118), on montre que

$$f'(0) = 0.$$

Pour montrer que $f'(d) = 0$, on effectue des calculs similaires avec des fonctions test $\tilde{\psi} \in C^1([0, d])$. Le couple (f, A) vérifie les conditions aux limites, ce qui achève la preuve de la proposition 4.3.8.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème

Théorème 4.3.9 *Soit $(\delta_1, \delta_2) \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]^2$ et $\eta > 0$. Il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour (κ, d) satisfaisant $\kappa \leq \kappa_0$ et $\kappa d \geq \kappa^{-\eta}$, pour tout $f_0 \in [\delta_0, \delta_1]$ et pour $h > \frac{1}{\sqrt{2}}$ tels que*

$$\kappa h^2 = 2^{\frac{1}{2}} f_0^2 (1 - f_0^2), \quad (4.121)$$

il existe une solution $(f, A; h)$ de $(GL)_d^s$ qui ne correspond pas à un minimum local de ϵ_d .

Preuve

Compte-tenu de la proposition 4.3.3, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout $d \geq \kappa^{-1-\eta}$, il existe un couple (f, A) solution de $(GL)_d^s$ et un couple $(\tilde{f}, \tilde{A}) \in H^1([0, d]) \times \tilde{H}^1([0, d])$ tels que $\epsilon_d(\tilde{f}, \tilde{A}) < \epsilon_d(f, A)$, et $f(0) > \tilde{f}(0) > 0$. Considérons alors la restriction de ϵ_d à C_α , où on choisit α égal à $\tilde{f}(0)$.

Envisageons les deux cas de figure suivants; ou bien la solution (f, A) n'est pas un minimum local, et le théorème est vrai, ou bien il s'agit d'un minimum local.

Dans ce deuxième cas de figure, d'après la proposition 4.3.7, la restriction de ϵ_d à C_α admet un minimum global, par conséquent, ϵ_d admet deux minima locaux distincts $(\tilde{f}, \tilde{A})$ et (f, A) tels que

$$\epsilon_d(\tilde{f}, \tilde{A}) < \epsilon_d(f, A).$$

Par ailleurs, d'après la proposition 4.3.6, la fonctionnelle ϵ_d vérifie la condition de Palais-Smale sur C_α .

Nous sommes alors sous les hypothèses du théorème 4.1.3. On en déduit l'existence d'un point critique (f, A) de ϵ_d appartenant à C_α qui n'est pas un minimum local de ϵ_d .

Enfin, d'après la proposition 4.3.8, ce couple est solution de $(GL)_d^s$.

Ceci achève la preuve du théorème 4.3.9.

Remarque 4.3.10 *Notons que l'alternative la plus probable est que le couple (f, A) déterminé dans le théorème 4.2.6 est un minimum local de ϵ_d .*

4.4 Problèmes ouverts et perspectives

La première question qui se pose est d'étudier la stabilité de la solution localisée dans le théorème 4.2.6. Posons la conjecture :

Conjecture 4.4.1 *Soit (f_κ, A_κ) , la solution du système $(GL)_d^s$ déterminée dans le théorème 4.2.6. Elle est stable, dans le sens où au point (f_κ, A_κ) , $D^2\epsilon_d(f_\kappa, A_\kappa)$ est définie positive.*

Le théorème 4.3.9 donne l'existence d'une solution non minimisante, mais l'approche variationnelle ne permet pas de déterminer une localisation de cette solution. L'un des

problèmes ouverts est de déterminer une localisation de la solution dont nous venons d'établir l'existence.

Bibliographie

- [1] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit.
Reviews in Mathematical Physics, Vol. 8, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [2] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior magnetic field.
Part I. Nonlinear Studies No. 3, p. 1-29, 1996.
- [3] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to a exterior parallel magnetic field.
Part II. Nonlinear Studies, Vol. 3, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [4] C. Bolley et B. Helffer.
Superheating field in a semi-infinite film in the weak κ limit: numerical results and approximate models.
Mathematical modelling and numerical analysis, Vol. 31, No. 1, p. 121-165, Novembre 1997.
- [5] C. Bolley, F. Foucher et B. Helffer.
Superheating field for the Ginzburg-Landau equations in the case of a large bounded interval.
A paraître dans *J. Math. Phys.* (2000) .
- [6] C. Bolley et B. Helffer.
Superheating in a semi-infinite film in the weak κ limit: numerical results and approximate models
Mathematical modelling and numerical analysis, Vol. 31, No. 1, p. 121-165 , 1997.
- [7] S. Alama, L. Bronsard et T. Giorgi.
Uniqueness of symmetric vortex solutions in the Ginzburg-Landau model of superconductivity.
J. Funct. Anal. 167, No. 2, p. 399-424, 1999
- [8] M. Struwe.
Variational methods.
Springer, Berlin, 1990.

Chapitre 5

Construction d'une sous-solution des équations de Ginzburg-Landau basée sur l'existence de solutions formelles de ces équations

5.1 Construction de Van Dyke et objectifs

5.1.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons construit des solutions formelles des équations de Ginzburg-Landau en dimension un, dans le cadre κ petit. Partant de cette construction, nous en avons déduit l'existence d'un développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$ du champ de surchauffe. Nous nous proposons ici de construire une sous-solution de $(GL)_{\infty}$ en nous appuyant sur la construction de ces solutions formelles obtenue dans ce chapitre. Nous réalisons une avancée supplémentaire dans la démonstration de la formule de H. Parr [?], notamment en déterminant une minoration du champ de surchauffe à l'ordre 2.

Rappelons que la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, définie sur l'ensemble des couples (F, A) , tels que $1 - F \in H^1(\mathbb{R}^+)$ et $A \in H^1(\mathbb{R}^+)$, est donnée par :

$$\epsilon_{\infty}(F, A) = \int_0^{\infty} \left(\kappa^{-2}(F')^2 + (A')^2 + F^2 A^2 + \frac{(1 - F^2)^2}{2} \right) dx + 2hA(0) \quad (5.1)$$

où $h \in \mathbb{R}^+$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

Les équations de Ginzburg-Landau associées sont données par :

$$\begin{cases} -\kappa^{-2}F'' - F + F^3 + F A^2 & = 0 \\ -A'' + AF^2 & = 0 \\ H & = A' \end{cases} \quad (5.2)$$

avec les conditions aux limites :

$$F'(0) = 0, \quad H(0) = h, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0. \quad (5.3)$$

Rappelons que H. Parr a conjecturé la formule (voir [?]) :

Conjecture 5.1.1 *On a, dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, l'asymptotique*

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) = 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{32} \kappa + \mathcal{O}(\kappa^2) \right), \quad (5.4)$$

où $h^{sh}(\kappa)$ a été introduit dans la définition 1.1.2.

En vue de démontrer partiellement cette conjecture, nous allons démontrer le théorème :

Théorème 5.1.2 *Il existe κ_0 et $C < 0$ telles que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité*

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) \geq 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + C \kappa^2 \right). \quad (5.5)$$

Comme au chapitre 4, ce résultat résultera de la construction de sous-solutions.

5.1.2 La solution de Van Dyke

Dans le chapitre 3, nous avons construit une solution formelle, définie comme étant la donnée d'une paire constituée d'une solution formelle extérieure, et d'une solution formelle intérieure, raccordées au sens de Van Dyke.

Une solution formelle extérieure est constituée d'un triplet (F^e, A^e, H^e) , où

$$F^e(x; \kappa) = \tilde{F}^e(\kappa x; \kappa), \quad A^e(x; \kappa) = \tilde{A}^e(\kappa x; \kappa), \quad H^e(x; \kappa) = \tilde{H}^e(\kappa x; \kappa)$$

avec

$$\tilde{F}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{f}_i(x') \kappa^i, \quad \tilde{A}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{A}_i(x') \kappa^i, \quad \tilde{H}^e(x'; \kappa) = \sum_0^\infty \tilde{H}_i(x') \kappa^i,$$

pour $x' \geq 0$.

La triplet $(\tilde{F}^e, \tilde{A}^e, \tilde{H}^e)$ est solution formelle du système différentiel

$$\begin{cases} -\tilde{F}'' - \tilde{F} + \tilde{F}^3 + \tilde{F} \tilde{A}^2 & = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ -\kappa^2 \tilde{A}'' + \tilde{A} \tilde{F}^2 & = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \tilde{H} & = \kappa \tilde{A}' \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.6)$$

avec les conditions aux limites à l'infini :

$$\lim_{x' \rightarrow +\infty} \tilde{F}(x') = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x' \rightarrow +\infty} \tilde{A}(x') = 0. \quad (5.7)$$

Nous posons

$$f_i(x; \kappa) := \tilde{f}_i(\kappa x), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Notons $S(x', C)$ et $C(\kappa)$ les séries formelles définies par

$$S(x', C) \sim \sum_0^{+\infty} \frac{C_j^j}{j!} \tilde{f}_0^{(j)}(x'), \quad C(\kappa) \sim \sum_1^\infty C_n \kappa^n, \quad (5.9)$$

où

$$\tilde{f}_0(x') := \tanh\left(\frac{x' + C_0}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.10)$$

Notons que, compte-tenu de (5.9), $\tilde{f}_1$ est donnée sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\tilde{f}_1(x') := C_1 \tilde{f}_0' = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x' + C_0}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (5.11)$$

Nous avons montré qu'une solution formelle extérieure est décrite par :

Proposition 5.1.3 *Toute solution formelle extérieure est égale à*

$$\begin{cases} \tilde{F}^e(x'; \kappa) \sim S(x', C(\kappa)), \\ \tilde{A}^e(x'; \kappa) \sim 0, \\ \tilde{H}^e(x'; \kappa) \sim 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

où $S(x', C(\kappa))$ est la série formelle en κ obtenue en substituant dans $S(x', C)$ l'indéterminée C par $C(\kappa)$ et en redéveloppant et réordonnant l'expression en puissances de κ .

Puis nous avons construit une solution nommée intérieure, vérifiant le système et les conditions aux limites en zéro. Elle a comme fonction de bien approcher la solution près de l'origine.

La solution intérieure est constituée par un triplet (F^i, Q^i, H^i) tel que

$$F^i(., \kappa) := \sum_0^\infty F_k(.) \kappa^k, \quad Q^i(., \kappa) := \sum_0^\infty Q_k(.) \kappa^k, \quad H^i(., \kappa) := \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty H_k(.) \kappa^k, \quad (5.13)$$

solution formelle de (5.2) et vérifiant

$$(F^i)'(0) = 0, \quad \kappa^{-\frac{1}{2}}(Q^i)'(0) = h. \quad (5.14)$$

Sa structure était, quant à elle, décrite dans la proposition :

Proposition 5.1.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est égale à une somme de produits d'exponentielles polynômes. Plus précisément,*

$$F_n = F_n^{\text{pol}} + \psi(.) P_n(., \psi(.)), \quad (5.15)$$

où F_n^{pol} est un polynôme de degré n , où $P_n \in \mathbb{R}[x, y]$ et $\psi(x) = \exp(-2A_0 x)$, $A_0 \in]0, 1[$. La fonction Q_0 solution de (5.31) vérifie :

$$Q_0(x) = B_0 \exp(-A_0 x).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n vérifie

$$Q_n = \phi(.) R_n(., \phi(.)) \quad (5.16)$$

où $R_n \in \mathbb{R}[x, y]$, et où $\phi(x) = \exp(-A_0 x)$.

Les fonctions $x \rightarrow F_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) sont données par

$$F_0 = A_0, \quad (5.17)$$

$$F_1(x, A_1, B_0) = A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} + \frac{B_0^2}{2}x + \frac{B_0^2}{4A_0}\exp(-2A_0x) \quad (5.18)$$

et

$$F_2(x, A_1, A_2, B_1) = P_1(x) + P_2(x)\exp(-2A_0x) + \frac{3}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3}\exp(-4A_0x) \quad (5.19)$$

où

$$P_1(x) = \frac{17}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4} \frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0 B_1}{A_0} + A_2 + (B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2})x - \frac{1}{2} A_0(1 - A_0^2)x^2 \quad (5.20)$$

et

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \frac{B_0 B_1}{A_0} - \frac{1}{4} \frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{5}{32} \frac{B_0^4}{A_0^3} - (\frac{1}{8} \frac{B_0^4}{A_0^2} + \frac{1}{2} \frac{B_0^2 A_1}{A_0})x - \frac{1}{8} \frac{B_0^4}{A_0} x^2, \quad (5.21)$$

où

$$A_0 \in]0, 1[, \quad B_0 < 0. \quad (5.22)$$

Afin d'alléger par la suite certaines expressions, introduisons les notations suivantes. Pour $i = (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on pose

$$|i|_{0,n} := i_0 + i_1 + \dots + i_n, \quad |i|_{1,n} := i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n. \quad (5.23)$$

Rappelons que F_0 , F_1 et F_2 satisfont les équations différentielles

$$F_0'' = 0, \quad (5.24)$$

$$F_1'' = Q_0^2 F_0, \quad (5.25)$$

$$F_2'' = -F_0 + F_0^3 + 2Q_0 Q_1 F_0 + Q_0^2 F_1. \quad (5.26)$$

Dans les sections suivantes, nous utiliserons également les équations différentielles vérifiées par F_3 et F_4 . Par construction de la solution formelle, on a

$$F_3'' = (3F_0^2 - 1)F_1 + Q_1^2 F_0 + 2Q_0 Q_2 F_0 + 2Q_0 Q_1 F_1 + Q_0^2 F_2, \quad (5.27)$$

et

$$F_4'' = (3F_0^2 - 1)F_2 + 3F_0 F_1^2 + \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,3} = 2, \\ |i|_{0,3} = 2}} \frac{2!}{i_0! \dots i_3!} F_\ell \prod_{k=0}^3 Q_k^{i_k}. \quad (5.28)$$

Par ailleurs, Q_0 et Q_1 sont données par

$$Q_0(x, A_0, B_0) = B_0 \exp(-A_0 x), \quad (5.29)$$

et

$$Q_1(x, A_0, A_1, B_0, B_1) = (B_1 - \frac{B_0^3}{16A_0^2} - B_0A_1x - \frac{B_0^3}{4}x^2) \exp(-A_0x) + \frac{B_0^3}{16A_0^2} \exp(-3A_0x). \quad (5.30)$$

Ces deux fonctions sont solutions des équations différentielles

$$Q_0'' - F_0^2 Q_0 = 0, \quad (5.31)$$

et

$$Q_1'' - F_0^2 Q_1 = 2F_0 F_1 Q_0. \quad (5.32)$$

Rappelons que nous avons raccordé les solutions intérieure et extérieure à l'ordre 2, en choisissant d'abord une zone de raccordement de la forme $[\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{3}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ ($0 < \delta_1 < \delta_2$), puis en imposant dans cette zone le raccordement modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^2)$, ce qui se traduit par des conditions sur les paramètres A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 et C_1 . Plus précisément, nous avons montré la proposition :

Proposition 5.1.5 *Soit $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $0 < \delta_1 < \delta_2$.*

La solution intérieure et extérieure se raccordent sur l'intervalle $[\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{3}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, modulo une erreur de taille $\mathcal{O}(\kappa^2)$ sous les conditions :

$$A_0 = \tilde{f}_0(0), \quad \frac{B_0^2}{2} = \tilde{f}_0'(0), \quad (5.33)$$

$$A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} = C_1 \tilde{f}_0'(0), \quad (5.34)$$

et

$$B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2} = C_1 \tilde{f}_0''(0). \quad (5.35)$$

Au champ de surchauffe "formel", nous avons trouvé pour valeurs de A_0, B_0, A_1, B_1 et C_1 les valeurs

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B_0 = -2^{-\frac{1}{4}}, \\ A_1 &= -\frac{7}{32}, \quad B_1 = -\frac{9}{16} 2^{-\frac{1}{4}}, \quad C_1 = -\frac{15}{16} 2^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Notons que les conditions (5.36) sont indépendantes de la zone de raccordement $[\delta_1 \kappa^{-\frac{1}{3}}, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ ($0 < \delta_1 < \delta_2$) choisie.

Nous supposons dans la suite, tout en gardant l'usage des lettres A_j, B_j, C_j que ces constantes ont pour valeurs les valeurs données en (5.36).

La constante A_2 qui apparaît dans (5.20) est libre pour réaliser ce raccordement. Nous choisissons de la prendre égale à

$$A_2 = -\left(\frac{17}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} + \frac{1}{4} \frac{B_0^2 A_1}{A_0^2} - \frac{1}{2} \frac{B_0 B_1}{A_0}\right), \quad (5.37)$$

de sorte que P_1 défini en (5.20) vérifie :

$$P_1(0) = 0. \quad (5.38)$$

Prenant en compte (5.38), on peut donc réécrire (5.20) sous la forme

$$P_1(x) = (B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2})x - \frac{1}{2} A_0 (1 - A_0^2) x^2. \quad (5.39)$$

Introduisons la définition suivante, utile pour la suite.

Définition 5.1.6 *La solution intérieure tronquée à l'ordre n , est définie comme étant égale à $\sum_0^n F_i \kappa^i$; nous la noterons $F^{i,(n)}$.*

La solution extérieure tronquée à l'ordre n est définie comme étant égale à $F^{e,(n)}(x; \kappa) = \tilde{F}^{e,(n)}(\kappa x) := \sum_0^n \tilde{f}_i(\kappa x) \kappa^i$; nous la noterons $F^{e,(n)}$.

On désigne par $F^{pol,(n)}$ la partie polynomiale de $F^{i,(n)}$.

Nous introduisons également la notation

Notation 5.1.7 *Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \leq j$, nous noterons par*

$$\alpha_{i,j} \text{ le coefficient de } x^i \text{ dans } F_j^{pol}, \quad (5.40)$$

où F_j^{pol} est défini en (5.15).

Pour $i \in \mathbb{N}$, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ et $\bar{C}_i$ désigneront

$$\bar{A}_i = (A_0, \dots, A_i), \quad \bar{B}_i = (B_0, \dots, B_i) \text{ et } \bar{C}_i = (C_0, \dots, C_i). \quad (5.41)$$

Nous posons

$$\beta_{i,j} := \frac{\tilde{f}_{j-i}^{(i)}(0)}{i!}, \quad (5.42)$$

et

$$\hat{F}_i := F_i - F_i^{pol}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (5.43)$$

La fonction $\hat{F}_i$ désigne la partie exponentielle polynôme de la fonction F_i .

D'une façon générale, rappelons que dans le troisième chapitre, nous avons défini une notion de raccordement modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ des solutions formelles intérieure et extérieure (voir la définition 3.2.11). Nous avons également montré dans ce chapitre que le raccordement des solutions intérieure et extérieure modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$ a lieu sous les conditions définies dans la proposition 3.2.15. Nous avons alors donné dans la proposition 3.4.4 une condition nécessaire et suffisante pour que le raccordement puisse s'effectuer modulo $\mathcal{O}(\kappa^n)$.

D'une manière générale, lorsqu'on a effectué le raccordement à $\mathcal{O}(\kappa^n)$ près, sur l'intervalle $I_n(\delta_1, \delta_2, \kappa)$, des solutions intérieure et extérieure, on peut construire la solution au sens de Van Dyke à l'ordre n (voir [19]).

Rappelons que la procédure imaginée par Van Dyke consiste à sommer la fonction $F^{i,(n)}$ et la fonction $F^{e,(n-1)}$, puis à retrancher à cette somme la partie polynomiale de $F^{i,(n)}$, $F^{pol,(n)}$. On applique la formule

$$f^{vd,(n)}(x; \kappa) := \tilde{F}^{e,(n-1)}(\kappa x; \kappa) + F^{i,(n)}(x; \kappa) - F^{pol,(n)}(x; \kappa). \quad (5.44)$$

Comme solution approchée de A , on considère

$$A^{vd,(n)}(x; \kappa) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_0^n Q_i(x) \kappa^i, \quad (5.45)$$

où Q_i est définie en (5.16).

Remarque 5.1.8 *Cette méthode n'est pas la méthode appropriée en règle générale et n'est d'une certaine manière pas complètement naturelle. Pour raccorder les solutions intérieure et extérieure, on aurait pu avoir une préférence pour le procédé plus naturel qui consiste à considérer la fonction*

$\tilde{F}^{e,(n-1)}(\kappa x; \kappa) \chi_1(x) + \chi_2(x) F^{i,(n)}(x; \kappa)$, pour une partition de l'unité convenable, avec $\text{supp } \chi_1 \subset [0, \delta_2 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}[$ et $\text{supp } \chi_2 \subset [\delta_2 \kappa^{-\frac{1}{n+1}}, +\infty[$.

Il se trouve que la formule (5.44) va conduire à des calculs plus explicites.

Rappelons une version classique du principe du maximum, utile pour mener les calculs qui suivent

Lemme 5.1.9 *Soit C une fonction bornée sur $]0, +\infty[$ telle que :*

$$C(x) \geq 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[,$$

et soit $u \in C^2([0, +\infty[)$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} -u'' + Cu \leq 0 & \text{sur }]0, +\infty[, \\ u'(0) \geq 0, \\ u \rightarrow 0 & \text{quand } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (5.46)$$

alors :

$$u \leq 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[.$$

5.1.3 Présentation des objectifs

Nous allons utiliser la construction formelle présentée précédemment pour déterminer une sous-solution du système de Ginzburg-Landau. Nous en déduirons une minoration du champ de surchauffe.

C. Bolley et B. Helffer ont montré dans [5], qu'il existait des constantes $\tilde{C}_0$ ($\tilde{C}_0 \leq 0$) et κ_0 , telles que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout h tels que

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h = 2^{-\frac{3}{4}} + \tilde{C}_0 \kappa,$$

la fonction

$$f_{\text{sous}}(x) = \kappa^2 h^2 2^{-\frac{1}{2}} ((1 + \tilde{C}_1 \kappa) \exp -(\sqrt{2} - \tilde{C}_2 \kappa)x + \tanh(\frac{\kappa x + C_0}{\sqrt{2}})),$$

où C_0 est déterminée par la condition $f'_{\text{sous}}(0) = 0$, est une sous-solution de (5.2) pour des constantes $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ bien choisies.

Nous nous proposons de montrer que la construction formelle fournit un candidat naturel

pour construire une sous-solution du système de Ginzburg-Landau. Nous donnons ainsi une autre démonstration du résultat obtenu par C. Bolley et B. Helffer, qui permet de relacher la contrainte sur la constante $\tilde{C}_0$, qu'on espère très proche de celle intuitée par H. Parr, égale à $\frac{15}{32}2^{-\frac{1}{4}}$. L'objectif est également de dégager une méthode générale dans le but de construire une sous-solution permettant de donner une minoration du champ de surchauffe au second ordre, ce qui constitue une partie de la démonstration de la formule de H. Parr (voir [?]). La construction formelle exposée précédemment va nous fournir un candidat naturel pour construire une sous-solution.

Remarque 5.1.10 *Notons que pour $n = 2$, la méthode de Van Dyke permet de retrouver très naturellement la fonction utilisée par C. Bolley et B. Helffer (voir [5]) pour construire une sous-solution du système de Ginzburg-Landau, leur permettant d'obtenir une minoration du champ de surchauffe. De plus, elle a l'énorme avantage de fournir aussi une approximation de la fonction A . Ce point est la clé de la démonstration du théorème 5.1.2.*

5.2 Sous-solution et construction de la solution de Van Dyke modifiée.

5.2.1 Présentation de la sous-solution

Pour construire une sous-solution au sens de la définition 1.2.8, nous allons partir d'une fonction obtenue par la règle de Van Dyke, présentée en (5.44)

$$\begin{aligned} f^{vd}(x; \kappa) &:= \tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) + F^{i,(2)}(x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \\ &= \tilde{f}_0(\kappa x) + \kappa \tilde{f}_1(\kappa x) + \sum_0^2 F_i(x) \kappa^i - F^{pol,(2)}(x; \kappa), \end{aligned} \quad (5.47)$$

où $\tilde{F}^{e,(1)}$, $F^{i,(2)}$ et $F^{pol,(2)}$ ont été introduits dans la définition 5.1.6.

Compte-tenu de (5.19) et (5.20), la fonction $F^{pol,(2)}$ est donnée explicitement par

$$F^{pol,(2)}(x) = A_0 + \frac{B_0^2}{2} \kappa x + \kappa \left(A_1 - \frac{B_0^2}{4A_0} \right) + \kappa^2 x \left(B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2} \right) - \frac{1}{2} A_0 (1 - A_0^2) \kappa^2 x^2, \quad (5.48)$$

où nous rappelons que A_0 , A_1 , B_0 , B_1 ont été données en (5.36). Notons que la fonction f^{vd} vérifie la condition de Neumann en zéro :

$$(f^{vd})'(0) = 0.$$

En effet, compte-tenu de (5.33) et (5.35), on a

$$(f^{vd})'(0) = \kappa(\tilde{f}'_0(0) + \kappa \tilde{f}'_1(0) - \left(\frac{B_0^2}{2} + (B_0 B_1 - \frac{3}{32} \frac{B_0^4}{A_0^2}) \kappa \right)) = 0.$$

En vue d'obtenir un signe négatif de l'expression $-\kappa^{-2} f'' + f(-1 + f^2 + A^2)$ dans une région de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$, on est amené à modifier modulo κ certains coefficients

dans la solution extérieure, et plus précisément dans la fonction $\tilde{f}_1$, définie en (5.11). Dans ce qui suit, $\bar{f}_1$ désignera la fonction

$$x' \mapsto \bar{f}_1(x') := \tilde{f}_1((1 + \alpha\kappa)x') = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{(1+\alpha\kappa)x' + C_0}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (5.49)$$

où α est une constante à débattre.

Le choix de α ne pourra être fait qu'à la fin d'une série de calculs. Une des difficultés va donc être de contrôler tous les restes par rapport au paramètre "libre" α et par rapport au paramètre asymptotique κ .

Nous posons

$$\bar{f}_0(x') := \tilde{f}_0((1 + \alpha\kappa)x'). \quad (5.50)$$

Par construction, (voir (5.6) qui est développé en puissances de κ), la fonction $\tilde{f}_1$ vérifie l'équation différentielle

$$-\tilde{f}_1'' - \tilde{f}_1 + 3\tilde{f}_0^2\tilde{f}_1 = 0, \text{ sur } \overline{\mathbf{R}^+}. \quad (5.51)$$

Il en résulte que la fonction $\bar{f}_1$ vérifie l'équation différentielle

$$-\bar{f}_1'' - \bar{f}_1 + 3\bar{f}_0^2\bar{f}_1 = \kappa(2\alpha + \alpha^2\kappa)\bar{f}_1(-3\bar{f}_0^2 + 1) \text{ sur } \overline{\mathbf{R}^+}. \quad (5.52)$$

Nous noterons par $\tilde{F}^{e,(1),M}$ la solution extérieure ainsi modifiée

$$\tilde{F}^{e,(1),M} := \tilde{f}_0 + \kappa\bar{f}_1. \quad (5.53)$$

En vue d'obtenir la condition de Neumann et de contrôler convenablement les restes, ajoutons à f^{vd} modifiée la fonction $\kappa^3 G$. La fonction G est cherchée sous la forme

$$G(x) := P(x) \exp -2A_0 x, \quad (5.54)$$

où P est une fonction polynôme à déterminer, a priori de degré 4 et où A_0 est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (comme indiqué en (5.36)). Ce choix de P est motivé par la structure de la solution formelle. Nous chercherons P sous la forme

$$P(x) = a(x^4 + x). \quad (5.55)$$

Nous supposons dans la suite que les équations obtenues lors du raccordement de la solution intérieure et extérieure à $\mathcal{O}(\kappa^2)$, données en (5.33), (5.34) et (5.35) sont satisfaites, et nous faisons toujours l'hypothèse (5.36).

Rappelons que, d'après (5.33) et (5.36), la constante C_0 est déterminée par la condition :

$$\tilde{f}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.56)$$

soit

$$\tanh\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.57)$$

Dans les sections suivantes, la fonction f^{vdm} désigne la fonction obtenue après les modifications données ci-dessus de la fonction f^{vd} définie en (5.47). Précisément, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{vdm}(x; \kappa) &= \tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) + F^{i,(2)}(x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \\ &= \tilde{f}_0(\kappa x) + \kappa \tilde{f}_1(\kappa x) + \sum_{k=0}^2 F_k(x) \kappa^k + \kappa^3 G(x) - F^{pol,(2)}(x). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Comparée à la solution dite de Van Dyke à l'ordre 2, construite au chapitre 3, nous avons "dilaté" $\tilde{f}_1$ et introduit une fonction $\kappa^3 G$. Traduisons la condition $(f^{vdm})'(0) = 0$. Elle fournit une égalité liant le paramètre de dilatation α et le coefficient a de x^4 dans P (voir (5.55)).

Compte-tenu de (5.58), on a l'égalité

$$(f^{vdm})'(0) = (f^{vd})'(0) + \kappa^2 \tilde{f}_1'(0)((1 + \alpha\kappa - 1) + \kappa^3 G'(0) = 0,$$

soit

$$\alpha = -\frac{G'(0)}{\tilde{f}_1'(0)}. \quad (5.59)$$

Compte-tenu de (5.55), on obtient :

$$a = -\tilde{f}_1'(0)\alpha \quad (5.60)$$

où a est introduit en (5.55).

Soit A^{vdm} l'unique solution dans $H^2([0, \infty[)$ de

$$\begin{cases} -A^{vdm''} + (f^{vdm})^2 A^{vdm} = 0, \\ A^{vdm'}(0) = h, \quad h > 0. \end{cases} \quad (5.61)$$

Dans le but de rendre négative l'expression

$-\kappa^{-2} f^{vdm''} + f^{vdm}(-1 + f^{vdm^2} + (A^{vdm})^2)$ dans une région de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$, nous sommes conduit à faire l'hypothèse

$$\alpha < 0. \quad (5.62)$$

Un tel choix tient au fait que nous désirons rendre négative l'expression

$\kappa(2\alpha + \alpha^2 \kappa)(-\tilde{f}_1)(3\tilde{f}_0^2 - 1)$ (voir (5.52)) dans une région de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$. Comme, d'après (5.49) et (5.36), $\tilde{f}_1 < 0$, et comme $\tilde{f}_0 \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, le signe de $\kappa(2\alpha + \alpha^2 \kappa)(-\tilde{f}_1)(3\tilde{f}_0^2 - 1)$ est négatif pour κ assez petit si $\alpha < 0$. Notons que, sous l'hypothèse (5.62), compte-tenu de la relation (5.60), et du fait que $\tilde{f}_1'(0) > 0$ (voir (5.36) et (5.49)), nous avons la propriété :

$$a > 0. \quad (5.63)$$

Remarque 5.2.1 *Compte-tenu de la relation (5.60), nous pouvons exprimer a en fonction de α , et donc, d'après (5.54) et (5.55), la fonction G en fonction de α . Finalement, le couple (f^{vdm}, A^{vdm}) dépend d'un unique paramètre α . Nous exprimerons la dépendance des fonctions G , f^{vdm} et A^{vdm} par rapport au paramètre α en les notant G_α , f_α^{vdm} et A_α^{vdm} . Bien sur, tous ces choix peuvent apparaître un peu "magiques", mais ils sont la conséquence de nombreux tâtonnements ou de très nombreux paramètres étaient introduits a priori.*

Il est naturel d'espérer que la solution approchée garde les propriétés de la solution. La solution de $(GL)_\infty$ vérifie la propriété $0 < f < 1$. Montrons que f_α^{vdm} vérifie la même propriété.

Proposition 5.2.2 *Soit f_α^{vdm} , la fonction définie en (5.58). Alors, pour tout α , il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, $\forall \kappa \leq \kappa_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on ait l'inégalité*

$$0 < f_\alpha^{vdm}(x) \leq 1. \quad (5.64)$$

Preuve

Notons que $f_\alpha^{vdm} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Compte-tenu de (5.11), la fonction $f_1(x')$ est négative, car, comme vu en (5.36), on a $C_1 < 0$.

On en déduit l'inégalité

$$f_\alpha^{vdm}(x; \kappa) \leq \tanh\left(\frac{\kappa x + C_0}{\sqrt{2}}\right) + \kappa \hat{F}_1 + \kappa^2 \hat{F}_2 + \kappa^3 G_\alpha.$$

Compte-tenu de (5.19) et de (5.21), $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} f_\alpha^{vdm}(x; \kappa) &\leq \tanh\left(\frac{\kappa x + C_0}{\sqrt{2}}\right) + \kappa \frac{B_0^2}{4A_0} \exp(-\sqrt{2}x) \\ &+ \kappa \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \left(\kappa P_2(x) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \kappa \frac{3}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} \exp\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}x\right) \right) \\ &- \alpha \tilde{f}'_1(0) \kappa^3 (x^4 + x) \exp(-\sqrt{2}x). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Montrons maintenant que, pour tout $\alpha < 0$, il existe un réel $\kappa_0 > 0$, tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a l'inégalité

$$f_\alpha^{vdm}(x; \kappa) \leq \tanh\left(\frac{\kappa x + C_0}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\kappa}{2} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right). \quad (5.66)$$

En effet, comme d'après (5.36), $\frac{B_0^2}{4A_0} = \frac{1}{4}$, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 , tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} &\frac{B_0^2}{4A_0} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \kappa \left(P_2(x) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \frac{3}{128} \frac{B_0^4}{A_0^3} \exp\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}x\right) \right) \\ &- \kappa^2 \alpha \tilde{f}'_1(0) (x^4 + x) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

De (5.65) et de (5.67), il résulte (5.66).

Posons

$$\phi(x) = \tanh\left(\frac{\kappa x + C_0}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\kappa}{2} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right).$$

La fonction ϕ vérifie, compte-tenu de (5.57), la propriété

$$\phi'(0) = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{C_0}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

De plus, pour κ assez petit, elle vérifie les hypothèses (4.11) du lemme 4.2.3 énoncé au chapitre 4.

On a donc l'inégalité

$$\phi(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

On déduit alors que le membre de droite de (5.66) est, pour tout $\alpha < 0$, inférieur à 1, dès que κ est choisi assez petit, d'où

$$f_{\alpha}^{vdm} \leq 1. \quad (5.68)$$

Par ailleurs, d'après (5.18), (??), (5.43) et (5.54), on a les estimations

$$\hat{F}_1 = \mathcal{O}(1), \quad \hat{F}_2 = \mathcal{O}(1), \quad G_{\alpha} = \mathcal{O}(1). \quad (5.69)$$

Compte-tenu de (5.52) et (5.58), on déduit qu'il existe une constante $C > 0$, telle que l'on puisse minorer f_{α}^{vdm} par

$$f_{\alpha}^{vdm}(x) \geq \tilde{f}_0(0) - C\kappa, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Il résulte de (5.56), que, pour κ assez petit,

$$f_{\alpha}^{vdm}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - C\kappa > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (5.70)$$

D'après (5.68) et (5.70), on obtient (5.64).

Ceci achève la preuve de la proposition 5.2.2.

5.2.2 Énoncé du théorème principal

La démonstration du théorème 5.1.2 est une conséquence directe du théorème suivant, que nous démontrerons dans les sections suivantes :

Théorème 5.2.3 *Il existe C , α et $\kappa_0 > 0$ telles que, pour $\kappa \leq \kappa_0$ et pour :*

$$h = \kappa^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + C\kappa^2 \right), \quad (5.71)$$

la fonction f_{α}^{vdm} définie dans la remarque (5.2.1) vérifie

$$(f_{\alpha}^{vdm})'(0) = 0,$$

et

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} (f_{\alpha}^{vdm})'' + f_{\alpha}^{vdm} \left(-1 + (f_{\alpha}^{vdm})^2 + A_{\alpha}^{vdm2} \right) \leq 0 \\ (1 - f_{\alpha}^{vdm}) \in H^2([0, \infty[), \end{cases} \quad (5.72)$$

où A_{α}^{vdm} est solution dans $H^2([0, \infty[)$ de

$$\begin{cases} -(A_{\alpha}^{vdm})'' + (f_{\alpha}^{vdm})^2 A_{\alpha}^{vdm} = 0 \\ (A_{\alpha}^{vdm})'(0) = h. \end{cases} \quad (5.73)$$

Remarque 5.2.4 *Dans toutes les propositions, lemmes ou théorèmes qui seront énoncés dans les sections suivantes, à chaque fois que l'on introduira l'assertion " $\exists \kappa_0 > 0$ telle que ...", il est implicite que la constante considérée est plus petite ou égale à celles introduites dans les propositions, lemmes ou théorèmes qui précèdent. Notons que nous ne faisons cette opération qu'un nombre fini de fois.*

5.3 Minoration de A_α^{vdm} .

5.3.1 Présentation du problème

Soient f_α^{vdm} défini en (5.58) et A_α^{vdm} l'unique solution dans $H^2(]0, +\infty[)$ de (5.73). En vertu du lemme 5.1.9, la fonction A_α^{vdm} est négative.

En vue de construire une sous-solution (voir (1.2.6)), il est utile de bien minorer la fonction A_α^{vdm} afin de nous permettre de majorer $(A_\alpha^{vdm})^2 f_\alpha^{vdm}$. Ceci constitue l'une des difficultés majeures lors de la construction de cette sous-solution. Nous allons chercher à montrer que la fonction A_α^{vdm} peut être approchée convenablement par $A^{vd,(1)}$, où $A^{vd,(1)}$ est définie en (5.45), dans une zone de la forme $[0, \kappa^{-\beta}]$, $\beta > 0$.

Remarquons que $A^{vd,(1)}$ ne peut donner une bonne approximation de la fonction A_α^{vdm} au voisinage de l'infini, car, étant donné que f_α^{vdm} tend vers 1 quand $x \rightarrow +\infty$, A_α^{vdm} se comporte en $-\exp(-x)$ à l'infini, alors que $A^{vd,(1)}$ se comporte en $-x^2 \cdot \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x)$. Notons par ailleurs que f_α^{vdm} reste essentiellement constant dans la région $[0, \kappa^{-\beta}]$, ce qui justifie notre choix d'approximation.

Proposition 5.3.1 *Il existe des réels $(r_i)_{i \in \{1, \dots, 4\}}$ tels que, pour tout $r_0 \in \mathbb{R}$, il existe $C(r_0)$ et une fonction J définie par*

$$J(x) := \left(\sum_{k=1}^4 r_k x^k + r_0 \right) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right), \quad (5.74)$$

telles que, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C(r_0)\kappa^2\right), \quad (5.75)$$

la solution A_α^{vdm} de (5.73) vérifie l'inégalité

$$A^{vd,(1)}(x; \kappa) + \kappa^{\frac{3}{2}}J(x) \leq A_\alpha^{vdm}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (5.76)$$

où $A^{vd,(1)}$ est définie en (5.45).

Notons qu'ici nous avons introduit un nouveau paramètre r_0 et que κ_0 dépend de α et de r_0 .

5.3.2 Approximation dans la zone intérieure

Afin d'établir la proposition 5.3.1, nous allons préalablement montrer quelques lemmes. Afin d'alléger les notations, nous noterons les fonctions f_α^{vdm} et A_α^{vdm} dont les définitions sont données en (5.58) avec $G = G_\alpha$ et en (5.61) par f_α et A_α . Nous posons également :

$$Z_\alpha(x) := A^{vd,(1)}(x; \kappa) - A_\alpha(x), \quad (5.77)$$

où $A^{vd,(1)}$ est définie en (5.45).

Lemme 5.3.2 *Il existe un polynôme de degré 3, $R_1(x)$, tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait dans l'intervalle $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ l'inégalité :*

$$-Z''_\alpha + f_\alpha^2 Z_\alpha \leq \kappa^{\frac{3}{2}} R_1(x) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right). \quad (5.78)$$

Les contrôles d'uniformité des restes par rapport aux paramètres, en particulier α , sont cruciaux. A cette fin, il nous semble utile d'introduire des notations suffisantes explicitant précisément les situations rencontrées.

Notation 5.3.3 *Soit une fonction g définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, $(\alpha, \kappa) \rightarrow g(\alpha, \kappa)$.*

On dira que

$$g(\alpha, \kappa) = \mathcal{O}_\alpha(\kappa^n) \Leftrightarrow \forall \alpha, \exists C_\alpha, \exists \kappa_0(\alpha), \text{ tel que } \forall \kappa \leq \kappa_0(\alpha), |g(\alpha, \kappa)| \leq C_\alpha \kappa^n,$$

$$g(\alpha, \kappa) = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^n) \Leftrightarrow \exists C, \forall \alpha, \exists \kappa_0(\alpha), \text{ tel que } \forall \kappa \leq \kappa_0(\alpha), |g(\alpha, \kappa)| \leq C \kappa^n,$$

$$g(\alpha, \kappa) = \mathcal{O}(\kappa^n) \Leftrightarrow \exists C, \exists \kappa_0, \forall \alpha, \forall \kappa \leq \kappa_0, |g(\alpha, \kappa)| \leq C \kappa^n.$$

Pour établir le lemme 5.3.2, il nous faut évaluer la différence $\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x) - F^{pol,(2)}(x; \kappa)$ sur l'intervalle $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ et montrer qu'elle est également de l'ordre de $\mathcal{O}(\kappa^2)$.

Sous-Lemme 5.3.4 *Soit $\tilde{F}^{e,(1)}$ introduit à la définition 5.1.6, et $F^{pol,(2)}$ en (5.48).*

Alors, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, $\forall \kappa \leq \kappa_0$, $\forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on ait l'estimation

$$\begin{aligned} & \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x + \frac{1}{2} \tilde{f}_0^{(2)}(0) \kappa^2 x^2 + \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa + \tilde{f}_1^{(3)}(0) \kappa^2 x + \mathcal{O}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (5.79)$$

De plus, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, $\forall \kappa \leq \kappa_0$, $\forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on ait l'estimation

$$\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) = \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (5.80)$$

Preuve

Par définition de $F^{pol,(2)}$ (voir la définition 5.1.6), on a l'égalité

$$F^{pol,(2)}(x; \kappa) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} \alpha_{i,j} \kappa^j x^i. \quad (5.81)$$

Pour $k \in \{0, 1\}$, effectuons un développement en série entière de la fonction $x \rightarrow \tilde{f}_k(\kappa x)$ au point $x = 0$. Comme $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, avec κ petit, les développements en série entière sont convergents.

Pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'égalité :

$$\tilde{f}_k(\kappa x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_k^{(n)}(0)}{n!} \kappa^n x^n.$$

Nous pouvons exprimer $\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa)$ sous la forme

$$\tilde{F}^{e,(n)}(\kappa x; \kappa) = \sum_{k=0}^1 \kappa^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_k^{(n)}(0)}{n!} \kappa^n x^n.$$

On peut alors écrire la somme précédente sous la forme

$$\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ j-1 \leq i \leq j}} \beta_{i,j} \kappa^j x^i, \quad (5.82)$$

où $\beta_{i,j}$ a été défini en (5.42).

On déduit de (5.81), (5.82) et de la proposition 3.2.15, l'estimation, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) = \sum_{2 \leq j-1 \leq i \leq j} \beta_{i,j} \kappa^j x^i \quad (5.83)$$

De (5.83), on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \sum_{2 \leq j-1 \leq i \leq j \leq 4} i(i-1) \beta_{i,j} \kappa^{j-2} x^{i-2} \\ &+ \sum_{4 \leq j-1 \leq i \leq j} i(i-1) \beta_{i,j} \kappa^{j-2} x^{i-2}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Or, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation

$$\sum_{4 \leq j-1 \leq i \leq j} i(i-1) \beta_{i,j} \kappa^{j-2} x^{i-2} = \mathcal{O}(\kappa^3) x^2 (1+x).$$

D'où, utilisant (5.84), l'égalité

$$\begin{aligned} & \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \sum_{2 \leq j-1 \leq i \leq j \leq 4} \beta_{i,j} \kappa^{j-2} x^{i-2} + x^2 (1+x) \mathcal{O}(\kappa^3). \end{aligned} \quad (5.85)$$

De la définition de $\beta_{i,j}$ donnée en (5.42), du fait que $x = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{3}})$ et de l'expression (5.85), on déduit l'estimation (5.79).

De manière analogue, compte-tenu de (5.83), on obtient également l'estimation

$$\begin{aligned} & \tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \\ &= \sum_{2 \leq j-1 \leq i \leq j \leq 4} \beta_{i,j} \kappa^j x^i + x^4 (1+x) \mathcal{O}(\kappa^5). \end{aligned} \quad (5.86)$$

De plus, pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$j \in \{3, 4\}, j - 1 \leq i \leq j,$$

$$\kappa^j x^i = \mathcal{O}(\kappa^2).$$

En effet, si $j = 3$, alors $2 \leq i \leq 3$ et comme $x = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{3}})$,
 $\kappa^3 x^i = \mathcal{O}(\kappa^2)$.

Si $j = 4$, alors $3 \leq i \leq 4$ et $\kappa^4 x^i = \mathcal{O}(\kappa^{\frac{8}{3}})$.

On obtient ainsi (5.80) et ceci achève la preuve du sous-lemme 5.3.4.

Effectuons à présent le calcul correspondant avec $\tilde{F}^{e,(1),M}$ à la place de $\tilde{F}^{e,(1)}$.

Sous-Lemme 5.3.5 *Pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$, tel que pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation*

$$\begin{aligned} & \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x + \frac{1}{2} \tilde{f}_0^{(4)}(0) \kappa^2 x^2 + \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa + 2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa^2 + \tilde{f}_1^{(3)}(0) \kappa^2 x + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (5.87)$$

De plus, on a l'estimation

$$\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2), \quad (5.88)$$

pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$.

Preuve

Evaluons $\tilde{F}^{e,(1),M} - \tilde{F}^{e,(1)}$.

Pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} & (\tilde{F}^{e,(1),M} - \tilde{F}^{e,(1)})(\kappa x) = \kappa \left(\tilde{f}_1((1 + \alpha\kappa)\kappa x) - \tilde{f}_1(\kappa x) \right) \\ &= \alpha \kappa^3 x \int_0^1 \tilde{f}_1'(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) dt. \end{aligned} \quad (5.89)$$

De (5.89), on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1} \left(\tilde{f}_1((1 + \alpha\kappa)\kappa x) - \tilde{f}_1(\kappa x) \right)'' = 2\alpha \kappa^2 \int_0^1 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) \cdot (1 + t\alpha\kappa) dt \\ &+ \alpha \kappa^3 x \int_0^1 \tilde{f}_1^{(3)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) \cdot (1 + t\alpha\kappa)^2 dt. \end{aligned} \quad (5.90)$$

On a l'égalité

$$\tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) = \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) + \int_0^1 \tilde{f}_1^{(3)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x s t) (\alpha \kappa^2 x t) ds.$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & 2\alpha \kappa^2 \int_0^1 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) \cdot (1 + t\alpha\kappa) dt = 2\alpha \kappa^2 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) + \alpha^2 \kappa^3 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) \\ &+ 2\alpha \kappa^2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}_1^{(3)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x s t) \alpha \kappa^2 x t (1 + \alpha t \kappa) ds dt. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0(\alpha)$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0(\alpha)$, pour tout $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a les estimations

$$\alpha \kappa^3 x \int_0^1 \tilde{f}_1^{(3)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x t) (1 + t \alpha \kappa)^2 dt = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2), \quad (5.91)$$

et

$$\alpha^2 \kappa^3 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) + 2\alpha \kappa^2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}_1^{(3)}(\kappa x + \alpha \kappa^2 x s t) \alpha \kappa^2 x t (1 + \alpha t \kappa) ds dt = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.92)$$

De (5.89), (5.90), (5.91) et (5.92), on déduit l'estimation, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$\kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1),M} - \tilde{F}^{e,(1)} \right)''(\kappa x) = 2\alpha \kappa^2 \tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.93)$$

D'autre part,

$$\tilde{f}_1^{(2)}(\kappa x) = \tilde{f}_1^{(2)}(0) + \tilde{f}_1^{(3)}(0) \kappa x + \mathcal{O}(\kappa^2 x^2). \quad (5.94)$$

De (5.93) et (5.94), on déduit que pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0(\alpha)$, tel que pour tout $\kappa \leq \kappa_0(\alpha)$, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation

$$\kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1),M} - \tilde{F}^{e,(1)} \right)''(\kappa x) = 2\alpha \kappa^2 \tilde{f}_1^{(2)}(0) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.95)$$

On déduit alors de (5.95) et du sous-lemme 5.3.4 l'estimation

$$\begin{aligned} & \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - \tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) \right)'' - \kappa^{-2} \left(\tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \right)'' \\ &= \tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x + \frac{\tilde{f}_0^{(4)}(0)}{2!} \kappa^2 x^2 + \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa + 2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa^2 + \tilde{f}_1^{(3)}(0) \kappa^2 x + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (5.96)$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) \\ &= (\tilde{F}^{e,(1),M} - \tilde{F}^{e,(1)})(\kappa x) + \tilde{F}^{e,(1)}(\kappa x) - F^{pol,(2)}(x; \kappa). \end{aligned}$$

Compte-tenu du sous-lemme 5.3.4 et de (5.89), on déduit que pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$, tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation

$$\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa) = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2),$$

ce qui achève la preuve du sous-lemme 5.3.5.

Nous pouvons à présent démontrer le lemme 5.3.2.

Preuve du lemme 5.3.2

On a l'égalité

$$\begin{aligned} & -Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha = \\ & -(A^{vd,(1)})'' + \left(\sum_{i=0}^2 \kappa^i F_i + \kappa^3 G_\alpha \right)^2 (A^{vd,(1)}) \\ & + 2 \left(\sum_{i=0}^2 \kappa^i F_i + \kappa^3 G_\alpha \right) (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa)) (A^{vd,(1)}) \\ & + (A^{vd,(1)}) (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa))^2. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Posons

$$B(x) = -(A^{vd,(1)})''(x) + \left(\sum_{i=0}^2 \kappa^i F_i(x) + \kappa^3 G_\alpha(x) \right)^2 (A^{vd,(1)})(x), \quad (5.98)$$

$$C(x) = 2 \left(\sum_{i=0}^2 \kappa^i F_i(x) + \kappa^3 G_\alpha(x) \right) (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa)) (A^{vd,(1)})(x), \quad (5.99)$$

et

$$D(x) = (A^{vd,(1)})(x) (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa))^2(x). \quad (5.100)$$

Etape 1 : Majoration de B(x) sur $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

Compte-tenu de la proposition 5.1.4, F_i^{pol} est un polynôme de degré i . Par conséquent, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$F_i^{pol} = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{3}}). \quad (5.101)$$

De plus, la fonction $\hat{F}_i$ étant égale à un produit d'exponentielles polynômes, on a l'estimation

$$\hat{F}_i = \mathcal{O}(1) \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}. \quad (5.102)$$

Par ailleurs, d'après (5.29) et (5.30), on a

$$Q_1 = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{2}{3}}) Q_0.$$

On en déduit les estimations

$$\kappa F_1 = \mathcal{O}(\kappa^{\frac{2}{3}}), \quad \kappa^2 F_2 = \mathcal{O}(\kappa^{\frac{4}{3}}), \quad \kappa Q_1 = Q_0 \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{3}}). \quad (5.103)$$

De plus, d'après (5.54), (5.55) et (5.60), pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'estimation

$$\kappa^3 G_\alpha = \mathcal{O}(\alpha \kappa^3) = \mathcal{O}^{un}(\kappa^2). \quad (5.104)$$

Il suffit en effet de prendre $\kappa_0 \leq \frac{1}{\alpha}$.

Prenant en compte les équations différentielles vérifiées par Q_0 et Q_1 en (5.29) et (5.30), on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} & -(A^{vd,(1)})'' + \left(\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i + \kappa^3 G_\alpha \right)^2 (A^{vd,(1)}) \\ &= \kappa^6 G_\alpha^2 A^{vd,(1)} \\ &+ 2\kappa^3 \left(\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i \right) G_\alpha A^{vd,(1)} \\ &+ \kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=2}^5 \sum_{\substack{|i|_{0,2}=2 \\ \ell + |i|_{1,2} = m, \ell \in \{0,1\}}} \frac{2!}{i_0! \dots i_2!} Q_\ell \prod_{k=0}^2 F_k^{i_k} \kappa^m. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Estimons les trois termes qui apparaissent dans le membre de droite de l'égalité (5.105).

Estimation du terme $\kappa^6 G_\alpha^2 A^{vd,(1)}$

De (5.29), (5.45) et (5.103), pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on déduit l'estimation

$$A^{vd,(1)}(x; \kappa) = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{2}}) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right). \quad (5.106)$$

Compte-tenu de (5.104) et de (5.106), on a l'estimation

$$\begin{aligned}\kappa^6 G_\alpha^2 A^{vd,(1)} &= \alpha^2 \mathcal{O}(\kappa^{\frac{11}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x) \\ &= \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{7}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x),\end{aligned}$$

et donc a fortiori, l'estimation

$$\kappa^6 G_\alpha^2 A^{vd,(1)} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{3}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.107)$$

Estimation du terme $2\kappa^3(\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i) G_\alpha A^{vd,(1)}$

D'après (5.54) (5.103) et (5.106), on déduit l'estimation

$$\kappa^3(\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i) G_\alpha A^{vd,(1)} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{3}{2}})(x^4 + 1) \exp(-\frac{3}{\sqrt{2}}x),$$

donc a fortiori

$$\kappa^3(\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i) G_\alpha A^{vd,(1)} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{3}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.108)$$

Estimation du terme

$$\begin{aligned}\kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=2}^5 \sum_{\substack{|i|_{0,2}=2 \\ \ell + |i|_{1,2} = m, \ell \in \{0,1\}}} \frac{2!}{i_0! \dots i_2!} Q_\ell \prod_{k=0}^2 F_k^{i_k} \kappa^m.\end{aligned} \quad (5.109)$$

Considérons les couples $(\ell, i) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}^3$ tels que $\ell + |i|_{1,2} = m$. Compte-tenu de la proposition 5.1.4, précisément (5.16), la partie polynomiale associée à la fonction $Q_\ell \prod_{k=0}^2 F_k^{i_k}$ est de degré $2\ell + |i|_{1,2}$.

Les couples $(\ell, i) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}^3$ tels que $\ell + |i|_{1,2} = m$ et $2\ell + |i|_{1,2}$ soit maximum sont tels que $\ell = 1$ et $|i|_{1,2} = m - 1$. Pour un tel couple, le degré du polynôme associé est égal à $m + 1$. Donc, on a l'estimation

$$\sum_{\substack{|i|_{0,2}=2 \\ \ell + |i|_{1,2} = m, \ell \leq 1}} \frac{2!}{i_0! \dots i_2!} Q_\ell \prod_{k=0}^2 F_k^{i_k} = \mathcal{O}(x^{m+1} + 1) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.110)$$

Pour $m \geq 2$, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation

$$\kappa^m(x^{m+1} + 1) = \mathcal{O}(\kappa^2)(x^3 + 1).$$

Nous en déduisons qu'il existe $\tilde{p} > 0$ tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}\kappa^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=2}^5 \sum_{\substack{|i|_{0,2}=2 \\ \ell + |i|_{1,2} = m, \ell \in \{0,1\}}} \frac{2!}{i_0! \dots i_2!} Q_\ell \prod_{k=0}^2 F_k^{i_k} \kappa^m &\leq \kappa^{\frac{3}{2}} \tilde{p}(1 + x^3) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x).\end{aligned} \quad (5.111)$$

En définitive, d'après (5.107), (5.108) et (5.111), il existe $\bar{p}$, tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité

$$-(A^{vd,(1)})'' + (\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i + \kappa^3 G_\alpha)^2 (A^{vd,(1)}) \leq \bar{p} \kappa^{\frac{3}{2}} (x^3 + 1) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.112)$$

Etape 2 : Majoration de $C(x)$ sur $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

Rappelons que $C(x)$ est définie en (5.99).

De (5.88), (5.103), (5.104) et (5.106), on tire l'estimation

$$C(x) = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{3}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.113)$$

On en déduit qu'il existe une constante $\tilde{q}$ telle que l'on ait la majoration

$$C(x) \leq \kappa^{\frac{3}{2}} \tilde{q} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.114)$$

Etape 3 : Majoration de $D(x)$ sur $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

Rappelons que $D(x)$ est définie en (5.100).

De (5.105) et (5.106), on déduit l'estimation

$$D(x) = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{7}{2}}) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x), \quad (5.115)$$

On déduit de (5.115) l'existence d'une constante $\bar{q}$ telle que

$$D(x) \leq \bar{q} \kappa^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.116)$$

Finalement, compte-tenu de (5.112), (5.114) et (5.116), on a montré qu'il existait un polynôme R_1 de degré 3, tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe un réel κ_0 tel que, pour $\kappa \leq \kappa_0$, on obtient l'inégalité

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha \leq \kappa^{\frac{3}{2}} R_1(x) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.117)$$

Le polynôme R_1 est choisi égal à

$$R_1(x) = \bar{p}x^3 + \bar{r}. \quad (5.118)$$

où

$$\bar{r} := \bar{p} + \bar{q} + \tilde{q}, \quad (5.119)$$

avec $\bar{p}$ défini en (5.112), $\tilde{q}$ défini en (5.114) et $\bar{q}$ défini en (5.116).

Ceci achève la preuve du lemme 5.3.2.

Lemme 5.3.6 *Il existe un polynôme R_2 de degré 4, défini par*

$$R_2(x) := \sum_{i=1}^4 r_{2,i} x^i,$$

tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait :

$$(-Z''_\alpha + f_\alpha^2 Z_\alpha) - \kappa^{\frac{3}{2}}(J''_2 - f_\alpha^2 J_2) \leq -\kappa^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x), \quad \forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}], \quad (5.120)$$

avec $J_2(x) = R_2(x) \exp -\frac{1}{\sqrt{2}}x$.

De plus, le coefficient du monôme de plus haut degré de R_2 , noté $r_{2,4}$, peut être choisi arbitrairement négatif.

Preuve

Prenant en compte la conclusion du lemme 5.3.2, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & -Z''_\alpha + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}}(J''_2 - f_\alpha^2 J_2) \\ & \leq \kappa^{\frac{3}{2}} (R_1 - R''_2 + \sqrt{2}R'_2 + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})R_2) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Majorons donc :

$$R_1 - R''_2 + \sqrt{2}R'_2 + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})R_2. \quad (5.122)$$

Explicitons $f_\alpha(x)^2 - \frac{1}{2}$ dans la zone $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$.

On a l'égalité

$$(F^{i,(2)} - F^{pol,(2)}) = \kappa \hat{F}_1 + \kappa^2 \hat{F}_2, \quad (5.123)$$

où $\hat{F}_i$ est définie en (5.43).

De (5.102), il résulte l'estimation

$$F^{i,(2)} - F^{pol,(2)} = \mathcal{O}(\kappa). \quad (5.124)$$

D'après (5.49), il existe $C > 0$, telle que, pour tout $\alpha < 0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on ait l'inégalité

$$\kappa |\tilde{f}_1((1 + \alpha\kappa)\kappa x)| \leq C\kappa. \quad (5.125)$$

De plus, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a l'estimation

$$\tilde{f}_0(\kappa x) = \tilde{f}_0(0) + \mathcal{O}(\kappa x). \quad (5.126)$$

Il en résulte, d'après (5.53), (5.125) et (5.126) l'estimation

$$\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) = \tilde{f}_0(0) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}), \quad \forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]. \quad (5.127)$$

De (5.124), (5.127) et de (5.58), il résulte que

$$f_\alpha(x)^2 - \frac{1}{2} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}). \quad (5.128)$$

Utilisant (5.128), on peut écrire (5.122) sous la forme

$$\begin{aligned} & R_1 - R''_2 + \sqrt{2}R'_2 + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})R_2 \\ & = (4\sqrt{2}r_{2,4} + \bar{p} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}).r_{2,4}x)x^3 + (3\sqrt{2}r_{2,3} - 12r_{2,4} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}).r_{2,3}x)x^2 \\ & + (2\sqrt{2}r_{2,2} - 6r_{2,3} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}).r_{2,2}x)x + (\sqrt{2}r_{2,1} - 2r_{2,2} + \bar{r} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}}).r_{2,1}x). \end{aligned} \quad (5.129)$$

Dans le but de rendre l'expression $R_1 - R_2'' + \sqrt{2}R_2' + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})R_2$ négative, nous supposons que

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}r_{2,4} + \bar{p} < -2, & r_{2,3} - 2\sqrt{2}r_{2,4} < -2, \\ r_{2,2} - \frac{3}{\sqrt{2}}r_{2,3} < -2, & \sqrt{2}r_{2,1} - 2r_{2,2} + \bar{r} < -2, \end{cases} \quad (5.130)$$

où $\bar{p}$ et $\bar{r}$ sont définis en (5.119).

Le système (5.130) admet des solutions.

En effet, on peut choisir successivement $r_{2,4}$, $r_{2,3}$, $r_{2,2}$ et $r_{2,1}$ de façon à satisfaire les quatre équations du système (5.130). Notons que $r_{2,4}$ peut être choisi arbitrairement négatif, ce qui justifie la dernière assertion de lemme 5.3.6.

Par ailleurs, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

$$\mathcal{O}_\alpha^{un}.r_{2,i}x \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\}. \quad (5.131)$$

Prenant en compte (5.130) et (5.131), on déduit que pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$R_1 - R_2'' + \sqrt{2}R_2' + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})R_2 \leq -\kappa^{\frac{3}{2}}(\sum_0^3 x^i). \quad (5.132)$$

Utilisant (5.132), l'inégalité (5.121) devient

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}}(J_2'' - f_\alpha^2 J_2) \leq -\kappa^{\frac{3}{2}}(\sum_0^3 x^i) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x) \leq -\kappa^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x).$$

Notons que R_2 est bien choisi indépendant de α , ce qui achève la preuve du lemme 5.3.6.

Lemme 5.3.7 Pour $r_0 \in \mathbb{R}$, soit J la fonction donnée par

$$J := J_2 + r_0 \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x), \quad (5.133)$$

où J_2 désigne la fonction déterminée dans le lemme 5.3.6.

Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$, tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité

$$(-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha) - \kappa^{\frac{3}{2}}(J'' - f_\alpha^2 J) \leq 0, \quad \forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]. \quad (5.134)$$

Preuve

D'après le lemme 5.3.6, on a, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, l'inégalité

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}}(J'' - f_\alpha^2 J) \leq \kappa^{\frac{3}{2}}(-1 + (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})r_0) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x).$$

De (5.128), on déduit que, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}}(J'' - f_\alpha^2 J) \leq \kappa^{\frac{3}{2}}(-1 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}})r_0) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.135)$$

Pour tout r_0 , pour tout $\alpha < 0$, il existe donc $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$,

$$-1 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{2}{3}})r_0 < 0. \quad (5.136)$$

Alors (5.135) et (5.136) impliquent clairement (5.134).

Notons que J comme J_2 est indépendant de α . Ceci achève la preuve du lemme 5.3.7.

5.3.3 Approximation dans la zone extérieure

Lemme 5.3.8 *Pour $(r_{3,j})_{j \in \{0, \dots, 4\}} \in \mathbf{R}^5$, soit $R_3(x)$ un polynôme de degré 4, défini par*

$$R_3(x) = \sum_{j=0}^4 r_{3,j} x^j, \quad (5.137)$$

et J_3 la fonction associée définie par

$$J_3(x) = R_3(x) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right).$$

Alors, il existe $\tilde{C} < 0$ telle que, pour tout $r_{3,4} < \tilde{C}$, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour tout $0 < \kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité

$$-(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_3)'' + f_\alpha^2(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_3) < 0, \quad \forall x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, +\infty[. \quad (5.138)$$

Preuve

Pour des raisons techniques, nous devons faire des estimations différentes dans l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$ et l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Etape 1: Contrôle dans l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$

Dans une région de la forme $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, compte-tenu de la structure de F_1 , F_2 et G_α , (voir (5.18), (5.19) et (5.54)), on a l'égalité

$$\sum_{i=0}^2 F_i \kappa^i + \kappa^3 G_\alpha - F^{pol,(2)} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa)(x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.139)$$

Pour $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, on l'estime

$$\kappa \tilde{f}_1((1 + \alpha\kappa)\kappa x) = \kappa \tilde{f}_1(0) + \tilde{f}_1'(0)\kappa^2 x + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2).$$

Pour $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, compte-tenu de (5.58), il en résulte que l'on peut écrire

$$f_\alpha(x) = \tilde{f}_0(0) + \tilde{f}_0'(0)\kappa x + \frac{1}{2}\tilde{f}_0''(0)\kappa^2 x^2 + \frac{1}{3}\tilde{f}_0^{(3)}(0)\kappa^3 x^3 + \tilde{f}_1(0)\kappa + \tilde{f}_1'(0)\kappa^2 x + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2).$$

Compte-tenu des hypothèses (5.33), (5.34) et (5.35), on peut écrire cette égalité sous la forme

$$f_\alpha(x) = F_0 + \kappa F_1^{pol} + \kappa^2 F_2^{pol} + \frac{1}{3}\tilde{f}_0^{(3)}(0)\kappa^3 x^3 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2), \quad (5.140)$$

où F_i^{pol} est défini en (5.15).

Utilisant cette expression pour représenter la fonction f_α , on tire l'égalité

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha = -(A^{vd,(1)})'' + (A^{vd,(1)}). \left(F_0 + \kappa F_1^{pol} + \kappa^2 F_2^{pol} + \frac{1}{3}\tilde{f}_0^{(3)}(0)\kappa^3 x^3 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \right)^2, \quad (5.141)$$

où $A^{vd,(1)}$ est définie en (5.45).

Compte-tenu des équations différentielles vérifiées par Q_0 et Q_1 (cf. (5.31) et (5.32)), on a les égalités

$$-Q_0'' + F_0^2 Q_0 = 0, \quad -Q_1'' + F_0^2 Q_1 + 2F_0 Q_0 F_1^{pol} = -2F_0 Q_0 (F_1 - F_1^{pol}) = \mathcal{O}(\exp(-\sqrt{2}x)).$$

Compte-tenu de ces égalités et de (5.141), on tire l'égalité

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha = \kappa^{\frac{3}{2}} \left(2F_0 F_2^{pol} + (F_1^{pol})^2 + \frac{2}{3} F_0 \tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x^3 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(1) \right) (Q_0 + \kappa Q_1). \quad (5.142)$$

De (5.142), il résulte l'égalité

$$\begin{aligned} & -(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_3)'' + f_\alpha^2 (Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_3) \\ &= \kappa^{\frac{3}{2}} \left[(2F_0 F_2^{pol} + (F_1^{pol})^2 + \frac{2}{3} F_0 \tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x^3 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(1)) (Q_0 + \kappa Q_1) \right. \\ & \quad \left. + ((f_\alpha^2 - \frac{1}{2}) R_3 - R_3'' + \sqrt{2} R_3') \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}} x) \right]. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Sur l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, on déduit de (5.140) l'égalité :

$$f_\alpha^2 - \frac{1}{2} = 2F_0 \kappa F_1^{pol} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2)(x^2 + 1).$$

Comme F_1^{pol} a le signe de $B_0^2 x$ dans la région considérée, on en déduit que, d'une part, pour tout $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, on a

$$f_\alpha^2 - \frac{1}{2} > 0,$$

et d'autre part, comme $\deg F_1^{pol} = 1$,

$$f_\alpha^2 - \frac{1}{2} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^{\frac{1}{2}}).$$

Supposons

$$r_{3,4} < 0. \quad (5.144)$$

On peut alors majorer chaque terme du second membre de (5.143).

Notons que sous l'hypothèse (5.144), le polynôme R_3 est négatif pour $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$ et κ assez petit. On a alors l'inégalité, pour $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$ et κ assez petit :

$$((f_\alpha^2 - \frac{1}{2}) R_3 - R_3'' + \sqrt{2} R_3') \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}} x) \leq r_{3,4} x^3 \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}} x).$$

De plus, comme $\deg F_1^{pol} = 1$ et $\deg F_2^{pol} = 2$, pour tout $\alpha < 0$, il existe $d > 0$ et $\kappa_0 > 0$, tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout $x \in [\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}]$, on a l'inégalité

$$(2F_0 F_2^{pol} + F_1^{pol2} + 2F_0 \frac{\tilde{f}_0^{(3)}(0)}{3!} \kappa x^3 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(1)) (Q_0 + \kappa Q_1) \leq dx^2 \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}} x).$$

Par conséquent, sous l'hypothèse (5.144), pour tout $\alpha < 0$, dès lors que κ est assez petit, le second membre de (5.143) est négatif sur $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, \kappa^{-\frac{1}{2}}[$.

Etape 2 : Contrôle dans l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$

Nous continuons de supposer que la condition (5.144) est satisfaite.

De plus, rappelons que d'après (5.36)

$$B_0 = -2^{-\frac{1}{4}}. \quad (5.145)$$

Dans cette région, compte-tenu de la définition de Q_1 donnée en (5.30), on a les égalités

$$Q_1'' = (\tilde{P}_1'' - \sqrt{2}\tilde{P}_1' + \frac{1}{2}\tilde{P}_1 + \mathcal{O}(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x))). \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x)$$

et

$$Q_1 = (\tilde{P}_1 + \mathcal{O}(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x))). \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x),$$

où $\tilde{P}_1$ désigne le polynôme

$$\tilde{P}_1(x) = B_1 - \frac{B_0^3}{16A_0^2} - B_0A_1x - \frac{B_0^3}{4}x^2.$$

On en déduit l'égalité

$$-Q_1'' + f_\alpha^2 Q_1 = \left((f_\alpha^2 - \frac{1}{2})\tilde{P}_1 + \sqrt{2}\tilde{P}_1' - \tilde{P}_1'' + \mathcal{O}(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x)) \right) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x).$$

Prenant en compte cette égalité, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & -(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}}J_3)'' + f_\alpha^2(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}}J_3) \\ &= (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})\kappa^{-\frac{1}{2}}Q_0 - (\kappa^{\frac{1}{2}}Q_1 + \kappa^{\frac{3}{2}}J_3)'' + f_\alpha^2(\kappa^{\frac{1}{2}}Q_1 + \kappa^{\frac{3}{2}}J_3) \\ &= (f_\alpha^2 - \frac{1}{2})\kappa^{-\frac{1}{2}}(B_0 + \kappa\tilde{P}_1 + \kappa^2R_3) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x) \\ &+ \kappa^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\tilde{P}_1' - \tilde{P}_1'' + \kappa(\sqrt{2}R_3' - R_3'')) + \mathcal{O}(\exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x)). \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \end{aligned} \quad (5.146)$$

Dans la région $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, $f_\alpha^2 - \frac{1}{2}$ est positif, pour κ assez petit dépendant de α .

En effet, d'après (5.58), (5.139) et le fait que $C_1 < 0$ (voir (5.36)), il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, on a la minoration

$$f_\alpha(x) \geq \tanh(\frac{\kappa^{\frac{1}{2}} + C_0}{\sqrt{2}}) + \frac{C_1}{\sqrt{2}}\kappa + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa)(x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x) > 0.$$

Utilisant alors (5.57), il en résulte l'inégalité, pour tout $x \in [\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$:

$$f_\alpha^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{2} + o(\kappa^{\frac{1}{2}}) > 0.$$

Compte-tenu des degrés de $\tilde{P}_1$ et R_3 et de (5.145), sur $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, et pour κ assez petit, on peut majorer $B_0 + \kappa\tilde{P}_1 + \kappa^2 R_3$ par

$$B_0 - \frac{B_0^3}{2}\kappa x^2 + \kappa^2 \frac{r_{3,4}}{2}x^4.$$

Compte-tenu de (5.144) et (5.145), le polynôme $P(x) = B_0 - \frac{B_0^3}{2}\kappa x^2 + \kappa^2 \frac{r_{3,4}}{2}x^4$ décroît sur l'intervalle $[\sqrt{\frac{B_0^3}{2r_{3,4}}}\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Si on suppose que

$$r_{3,4} \leq \frac{B_0^3}{2}, \quad (5.147)$$

alors P décroît sur $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Le polynôme P est négatif sur $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ dès que $P(\kappa^{-\frac{1}{2}}) \leq 0$, soit encore :

$$r_{3,4} < -2B_0 + B_0^3. \quad (5.148)$$

Compte-tenu de (5.145) et de (5.147), l'inégalité (5.148) est vérifiée. Par conséquent, le polynôme P est négatif sur $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, pour κ assez petit, sous l'unique condition (5.147).

Regardons maintenant le terme

$$\kappa^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}\tilde{P}'_1 - \tilde{P}''_1 + \kappa(\sqrt{2}R'_3 - R''_3)).$$

On peut le majorer sur l'intervalle $[\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ par

$$\sqrt{2}(-B_0^3 x + 2r_{3,4}\kappa x^3). \quad (5.149)$$

Il décroît sur l'intervalle $[\sqrt{\frac{B_0^3}{6r_{3,4}}}\kappa^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Supposons

$$r_{3,4} \leq \frac{B_0^3}{6}. \quad (5.150)$$

Sous la condition (5.150), le terme (5.149) est de signe négatif, pour κ assez petit.

Par conséquent, sous la condition (5.150), $\sqrt{2}\tilde{P}'_1 - \tilde{P}''_1 + \kappa(\sqrt{2}R'_3 - R''_3)$ est négatif pour κ assez petit.

Finalement, d'après (5.147) et (5.150), le second membre de (5.146) est négatif sous l'unique condition :

$$r_{3,4} \leq \min\left(\frac{B_0^3}{2}, \frac{B_0^3}{6}\right) = \frac{B_0^3}{6}. \quad (5.151)$$

En conclusion, l'inégalité (5.138) est vérifiée sur $[\kappa^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$, pour κ assez petit, sous les conditions (5.144) et (5.151), donc sous l'unique condition (5.151). On peut donc prendre comme constante $\tilde{C}$,

$$\tilde{C} := \frac{B_0^3}{2}, \quad (5.152)$$

ce qui achève la preuve du lemme 5.3.8.

Nous sommes à présent en mesure d'établir la proposition 5.3.1.

5.3.4 Démonstration de la proposition 5.3.1

Montrons qu'il existe un polynôme $R_0(x) := \sum_{i=1}^4 r_{0,i}x^i$ tel que la fonction J_0 associée définie par $R_0(x) \exp(-\sqrt{2}x)$ satisfasse les lemmes 5.3.6 et 5.3.8. Dans le lemme 5.3.8, nous avons montré que l'unique condition sur le polynôme R_3 permettant d'obtenir l'estimation cherchée était que $r_{3,4} \leq \tilde{C}$, où $\tilde{C}$ est donnée en (5.152). Compte-tenu des conditions (5.130) obtenues dans le lemme 5.3.6, le polynôme $R_2 = \sum_{i=1}^4 r_{2,i}x^i$ recherché dans la région $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ doit satisfaire la condition $r_{2,4} < 0$. Il en résulte que l'on peut prendre R_3 égal à R_2 .

Par conséquent, le polynôme R_0 défini par $R_0 := R_2$, avec $r_{2,4} < \tilde{C}$, est tel que la fonction J_0 associée satisfasse (5.120) et (5.138).

Nous souhaitons maintenant imposer la condition

$$(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_0)'(0) = (A^{vd,(1)} - A_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_0)'(0) \geq 0.$$

D'après (5.29), (5.30), (5.73) et (5.75), cette condition se traduit par l'inégalité

$$2^{-\frac{3}{4}}(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa) - 2^{-\frac{3}{4}}(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C\kappa^2) + \kappa^2 J_0'(0) \geq 0,$$

équivalente à l'inégalité

$$-C + 2^{\frac{3}{4}} J_0'(0) \geq 0. \quad (5.153)$$

Supposons

$$C \leq 2^{\frac{3}{4}} J_0'(0). \quad (5.154)$$

Finalement, sous l'hypothèse (5.154), nous avons obtenu

$$\begin{cases} -Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}} J_0'' + f_\alpha^2 \kappa^{\frac{3}{2}} J_0 \leq 0, & \forall x \in \mathbf{R}^+, \\ (Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_0)'(0) \geq 0, \\ Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_0 \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Par application du lemme 5.1.9, on obtient l'inégalité

$$Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J_0 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Enfin, la conclusion du lemme 5.3.7 permet de conclure la preuve de la proposition 5.3.1.

D'une part, la fonction J définie dans ce lemme satisfait l'inégalité

$$-Z_\alpha'' + f_\alpha^2 Z_\alpha - \kappa^{\frac{3}{2}} J'' + f_\alpha^2 \kappa^{\frac{3}{2}} J \leq 0 \text{ dans la région } [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}], \text{ ainsi que dans la région } [\kappa^{-\frac{1}{3}}, +\infty[.$$

D'autre part, $Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et la condition $(Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}} J)'(0) \geq 0$ est équivalente, d'après (5.74), à la condition

$$C \leq 2^{\frac{3}{4}} (J_0'(0) - \frac{r_0}{\sqrt{2}}). \quad (5.155)$$

Sous l'hypothèse (5.155), qui renforce la condition (5.154), et d'après le lemme 5.1.9, on peut conclure que, pour tout $r_0 \in \mathbf{R}$, il existe $C(r_0)$ vérifiant (5.155), par exemple

$C(r_0) = 2^{\frac{3}{4}}(J'_0(0) - \frac{r_0}{\sqrt{2}})$ et une fonction J définie en (5.133), telles que, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et h vérifiant (5.75), on a l'inégalité

$$Z_\alpha + \kappa^{\frac{3}{2}}J \leq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 5.3.1.

5.4 La fonction f_α est une sous-solution

Montrons à présent que l'on peut construire à partir de la fonction f_α une sous-solution du système de Ginzburg-Landau au sens de la définition 1.2.6, en choisissant convenablement le paramètre α et du même coup la fonction correctrice G_α . Rappelons que jusqu'à présent, nous n'avons rencontré aucune condition sur le paramètre α (autre que $\alpha < 0$). Par ailleurs, nous gardons disponible un autre paramètre r_0 , apparaissant dans l'énoncé de la proposition 5.3.1.

5.4.1 Estimation de l'expression $-\kappa^{-2}f''_\alpha - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$

5.4.1.1 Préliminaires

Afin de construire un couple (f_α, A_α) sous-solution de $(GL)_\infty$, il nous faut évaluer l'expression $-\kappa^{-2}f''_\alpha - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$ sur $[0, +\infty[$. Dans un premier temps, nous allons estimer cette expression dans une région de la forme $[0, \kappa^{-\beta}]$, $\beta > 0$. La constante β peut être choisie arbitrairement petite. Nous montrerons dans les calculs qui suivent que l'on peut choisir β dans l'intervalle $]0, \frac{1}{3}]$.

Dans un second temps, nous allons évaluer la fonction $-\kappa^{-2}f''_\alpha - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$ dans une région de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$. Lors de l'évaluation de l'expression $-\kappa^{-2}f''_\alpha - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$, nous utiliserons le lemme :

Lemme 5.4.1 Soient F_0 , F_1 et F_2 les fonctions définies en (5.17), (5.18) et (5.19). Soient $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$ les fonctions définies en (5.10) et (5.11).

On a les égalités

$$-\tilde{f}_0^{(3)}(0)x - \tilde{f}_1^{(2)}(0) + (3F_0^2 - 1)F_1 = (3A_0^2 - 1)\frac{B_0^2}{4A_0} \exp(-2A_0x), \quad (5.156)$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{f}_1^{(3)}(0)x - \tilde{f}_0^{(4)}(0)x^2/2 + (3F_0^2 - 1)F_2 + 3F_0F_1^2 \\ & = 2\alpha_{2,4} + \bar{P}(x, \exp(-2A_0x)) \exp(-2A_0x), \end{aligned} \quad (5.157)$$

où $\bar{P} \in \mathbf{R}[X, Y]$, avec $\deg_X \bar{P} = 2$, et où $\alpha_{2,4}$ est défini en (5.40).

Preuve

En prenant la partie polynomiale de (5.27), on obtient

$$(3F_0^2 - 1)F_1^{pol} = (F_3^{pol})'',$$

soit (avec les notations introduites en (5.40))

$$(3F_0^2 - 1)F_1^{pol} = \sum_{i=2}^3 i(i-1)\alpha_{i,3}x^{i-2}. \quad (5.158)$$

Par ailleurs, compte-tenu de la proposition 3.2.15 et du théorème 3.4.6, on a :

$$\tilde{f}_0^{(3)}(0) = 3! \beta_{3,3} = 3! \alpha_{3,3}, \quad \tilde{f}_1^{(2)}(0) = 2! \beta_{2,3} = 2! \alpha_{2,3}.$$

Il en résulte, en utilisant (5.158), que

$$-\tilde{f}_0^{(3)}(0)x - \tilde{f}_1^{(2)}(0) + (3F_0^2 - 1)F_1^{pol} = \sum_{i=2}^3 i(i-1)(\alpha_{i,3} - \beta_{i,3})x^{i-2} = 0. \quad (5.159)$$

On en déduit

$$-\tilde{f}_0^{(3)}(0)x - \tilde{f}_1^{(2)}(0) + (3F_0^2 - 1)F_1 = (3A_0^2 - 1)\frac{B_0^2}{4A_0} \exp(-2A_0x), \quad (5.160)$$

ce qui démontre (5.156).

De même, en prenant la partie polynomiale de (5.28), on obtient

$$(3F_0^2 - 1)F_2^{pol} + 3F_0(F_1^{pol})^2 = (F_4^{pol})''.$$

On peut écrire cette égalité sous la forme

$$(3F_0^2 - 1)F_2^{pol} + 3F_0(F_1^{pol})^2 = \sum_{i=3}^4 i(i-1)\alpha_{i,4}x^{i-2} + 2\alpha_{2,4}.$$

De plus, compte-tenu de la proposition 3.2.15 et du théorème 3.4.6,

$$\tilde{f}_1^{(3)}(0) = 3! \beta_{3,4} = 3! \alpha_{3,4}, \quad \tilde{f}_0^{(4)}(0) = 4! \beta_{4,4} = 4! \alpha_{4,4}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & -\tilde{f}_1^{(3)}(0)x - \tilde{f}_0^{(4)}(0)x^2/2 + (3F_0^2 - 1)F_2^{pol} + 3F_0(F_1^{pol})^2 \\ &= \sum_{i=3}^4 i(i-1)(\alpha_{i,4} - \beta_{i,4})x^{i-2} + 2\alpha_{2,4} \\ &= 2\alpha_{2,4}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & -\tilde{f}_1^{(3)}(0)x - \tilde{f}_0^{(4)}(0)x^2/2 + (3F_0^2 - 1)F_2 + 3F_0F_1^2 \\ &= 2\alpha_{2,4} + \bar{P}(x, \exp(-2A_0x)) \exp(-2A_0x), \end{aligned} \quad (5.162)$$

où $\bar{P} \in \mathbf{R}[X, Y]$. De plus, le degré en l'indéterminée X de $\bar{P}$ est égal à 2. Ceci implique (5.157) et achève la preuve du lemme 5.4.1.

Remarque 5.4.2 Notons que, compte-tenu de (5.28), du corollaire 3.2.7 et de la proposition 3.4.4 énoncés au chapitre 3, la constante $\alpha_{2,4}$ définie en (5.40) dépend uniquement de A_0 , A_1 et A_2 données en (5.36) et (5.37).

5.4.1.2 Estimation dans la région $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

Estimons à présent la fonction $-\kappa^{-2}f''_\alpha + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2)$ dans la région $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$.

Lemme 5.4.3 *Il existe des constantes p_0 et p_1 , et pour tout $r_0 > 0$, une constante $C(r_0)$, telles que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$, telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour h tels que :*

$$h = \kappa^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{32} \kappa + C(r_0) \kappa^2\right), \quad (5.163)$$

le couple (f_α, A_α) vérifie, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, l'inégalité

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2}f''_\alpha + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \\ & \leq (-2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) + p_0) \kappa^2 + \kappa(p_1(1 + x^4) - r_0) \exp -\sqrt{2}x - \kappa G''_\alpha. \end{aligned} \quad (5.164)$$

Preuve

Dans le but d'utiliser le sous-lemme 5.3.5, écrivons f_α sous la forme

$$f_\alpha = [\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x; \kappa)] + F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha. \quad (5.165)$$

Utilisant l'écriture (5.165), compte-tenu du sous-lemme 5.3.5 (cf. (5.87)), nous déduisons l'estimation

$$\begin{aligned} -\kappa^{-2}f''_\alpha &= -\tilde{f}_0^{(3)}(0)\kappa x - \tilde{f}_0^{(4)}(0)\kappa^2 x^2/2 - \tilde{f}_1^{(2)}(0)\kappa - \tilde{f}_1^{(3)}(0)\kappa^2 x \\ &- 2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0)\kappa^2 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) - \kappa^{-1}F_1'' - F_2'' - \kappa G''_\alpha. \end{aligned} \quad (5.166)$$

De (5.88) et (5.165), on déduit l'estimation

$$-f_\alpha = -F_0 - \kappa F_1 - \kappa^2 F_2 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.167)$$

Compte-tenu des équations différentielles vérifiées par F_0 , F_1 et F_2 données en (5.24) et (5.26), on a l'égalité

$$-\kappa^{-2}(F^{i,(2)})'' - F_0 + F_0^3 + \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1 \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}} = 0. \quad (5.168)$$

D'après (5.166), (5.167) et (5.168), on déduit l'égalité, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2}f''_\alpha + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \\ &= -\tilde{f}_0^{(3)}(0)\kappa x - \tilde{f}_0^{(4)}(0)\kappa^2 x^2/2 - \tilde{f}_1^{(2)}(0)\kappa - \tilde{f}_1^{(3)}(0)\kappa^2 x \\ &- \kappa G''_\alpha - 2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0)\kappa^2 - \kappa F_1 - \kappa^2 F_2 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \\ &+ f_\alpha^3 - F_0^3 \\ &+ A_\alpha^2 f_\alpha - \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1 \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}}. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Le terme de droite de l'égalité (5.169) est composé d'une somme de trois termes dont les deux derniers vont être analysés successivement.

Evaluation du terme $A_\alpha^2 f_\alpha - \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1 \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}}.$

D'après la proposition 5.3.1, il existe une fonction J telle que, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité

$$A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J \leq A_\alpha < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (5.170)$$

De (5.170), on déduit l'inégalité

$$A_\alpha^2 f_\alpha \leq (A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 f_\alpha. \quad (5.171)$$

D'après (5.167), on a l'estimation

$$(A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 f_\alpha = (A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 (F^{i,(2)} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2)). \quad (5.172)$$

On a l'égalité

$$(A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 F^{i,(2)} = (A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 F^{i,(1)} + \kappa^2 (A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 F_2.$$

D'après la proposition 5.1.4 avec $n = 2$, plus précisément (5.19), on a l'estimation

$$F_2 = \mathcal{O}(x^2 + 1).$$

De (5.16), (5.45), et compte-tenu de la structure exponentielle-polynôme de la fonction J (voir (5.74)), on a pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$ et pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, les estimations

$$A^{vd,(1)} = \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{2}}) Q_0, \quad J = (\mathcal{O}(x^4 + 1) + r_0) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x). \quad (5.173)$$

On a l'égalité

$$\kappa^2 (A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 F_2 = \kappa^2 A^{vd,(1)2} F_2 + 2\kappa^{\frac{7}{2}} A^{vd,(1)} J F_2 + \kappa^5 J^2 F_2.$$

D'après (5.173), pour tout $r_0 > 0$, il existe κ_0 , tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a les estimations

$$\kappa^2 A^{vd,(1)2} F_2 = \mathcal{O}(\kappa)(x^2 + 1) \exp(-\sqrt{2}x),$$

$$2\kappa^{\frac{7}{2}} A^{vd,(1)} J F_2 = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa^3)(x^6 + r_0) \exp(-\sqrt{2}x),$$

et

$$\kappa^5 J^2 F_2 = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa^5)(x^{10} + r_0^2) \exp(-\sqrt{2}x),$$

où le $\mathcal{O}_{r_0}^{un}$ est à considérer au sens de la définition 5.3.3.

Alors, il existe $\kappa_0(r_0) > 0$, ($\kappa_0 \leq \frac{1}{\sqrt{r_0}}$), tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on a les estimations

$$2\kappa^{\frac{7}{2}} A^{vd,(1)} J F_2 = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^2 + 1) \exp(-\sqrt{2}x),$$

et

$$\kappa^5 J^2 F_2 = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^2 + 1) \exp(-\sqrt{2}x).$$

On en déduit l'estimation

$$(A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 (\kappa^2 F_2) = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^2 + 1) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.174)$$

Par ailleurs, on a l'égalité

$$(A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 F^{i,(1)} = A^{vd,(1)^2} F^{i,(1)} + 2F^{i,(1)} A^{vd,(1)} \kappa^{\frac{3}{2}} J + \kappa^3 J^2 F^{i,(1)}.$$

Pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, d'après (5.17) et (5.18), on a l'estimation

$$F^{i,(1)} = F_0 + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{3}{4}}). \quad (5.175)$$

Rappelons que d'après (5.36), on a l'égalité $2B_0 F_0 = 2B_0 A_0 = -2^{\frac{1}{4}}$.

De (5.173) et de (5.175), on en déduit alors l'estimation

$$\begin{aligned} & 2F^{i,(1)} A^{vd,(1)} \kappa^{\frac{3}{2}} J \\ &= (2F_0 + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{3}{4}})) \kappa^{-\frac{1}{2}} (B_0 + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}})) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x) \kappa^{\frac{3}{2}} (\mathcal{O}(x^4 + 1) + r_0) \exp(-\frac{1}{\sqrt{2}}x) \\ &= (\mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^4 + 1) - 2^{\frac{1}{4}} r_0 \kappa (1 + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}})) \exp(-\sqrt{2}x)). \end{aligned} \quad (5.176)$$

De plus, de (5.74), on déduit l'estimation

$$\kappa^3 J^2 F^{i,(1)} = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa^3)(x^8 + r_0^2) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.177)$$

Comme $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, il existe $\kappa_0(r_0)$ telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0(r_0)$, on ait l'estimation

$$\kappa^3 J^2 F^{i,(1)} = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.178)$$

Evaluons à présent la différence

$$A^{vd,(1)^2} F^{i,(1)} - \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1, \ell \in \{0,1\} \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}}.$$

D'après (5.45), on a l'estimation, pour $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$

$$\begin{aligned} & A^{vd,(1)^2} F^{i,(1)} - \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1 \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}} \\ &= \kappa^2 Q_1^2 F_1 = \mathcal{O}(\kappa)(x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x). \end{aligned} \quad (5.179)$$

On déduit de (5.172), (5.174), (5.176), (5.178) et (5.179) l'estimation

$$(A^{vd,(1)} + \kappa^{\frac{3}{2}} J)^2 f_\alpha = \mathcal{O}_{r_0}^{un}(\kappa)(x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x) - 2^{\frac{1}{4}} r_0 \kappa (1 + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}})) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.180)$$

En conclusion, compte-tenu de (5.171) et (5.180), il existe un réel p tel que, pour tout $r_0 > 0$, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0(\alpha, r_0)$, tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0(\alpha, r_0)$, on a l'inégalité

$$A_\alpha^2 f_\alpha - \sum_{\substack{\ell + |i|_{1,1} \leq 1 \\ |i|_{0,1} = 2}} \frac{2!}{i_0! i_1!} F_\ell \prod_{k=0}^1 Q_k^{i_k} \kappa^{\ell + |i|_{1,1}} \leq \kappa(\tilde{P}(x) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x), \quad (5.181)$$

où

$$\tilde{P}(x) = p.(x^4 + 1). \quad (5.182)$$

Evaluation du terme $f_\alpha^3 - F_0^3$

On a l'égalité

$$\begin{aligned} f_\alpha^3 - F_0^3 &= (F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha)^3 + 3(F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha)^2 (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x)) \\ &\quad + 3(F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha) (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x))^2 \\ &\quad + (\tilde{F}^{e,(1),M}(\kappa x; \kappa) - F^{pol,(2)}(x))^3 - F_0^3. \end{aligned} \quad (5.183)$$

Evaluons $(F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha)^3 - F_0^3$.

Utilisant (5.104), on obtient l'estimation

$$(F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha)^3 - F_0^3 = 3\kappa F_0^2 F_1 + \kappa^2 (3F_0^2 F_2 + 3F_0 F_1^2) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.184)$$

Notons que $F^{i,(2)} + \kappa^3 G_\alpha = \mathcal{O}_\alpha^{un}(1)$.

Utilisant le sous-lemme 5.3.5, plus précisément (5.88), et (5.184), (5.183) devient

$$f_\alpha^3 - F_0^3 = 3\kappa F_0^2 F_1 + \kappa^2 (3F_0^2 F_2 + 3F_0 F_1^2) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.185)$$

Simplifications de (5.169)

Utilisant (5.181) et (5.185), l'égalité (5.169) devient

$$\begin{aligned} &-\kappa^{-2} f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \\ &\leq -\tilde{f}_0^{(3)}(0) \kappa x - \tilde{f}_0^{(4)}(0) \kappa^2 x^2 / 2 - \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa - \tilde{f}_1^{(3)}(0) \kappa^2 x \\ &\quad + \kappa(3F_0^2 - 1)F_1 + \kappa^2((3F_0^2 - 1)F_2 + 3F_0 F_1^2) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \\ &\quad - \kappa G_\alpha'' - 2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa^2 \\ &\quad + \kappa(\tilde{P}(x) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x). \end{aligned} \quad (5.186)$$

D'après le lemme 5.4.1, précisément (5.156) et (5.157), et de (5.186), on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} &-\kappa^{-2} f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \\ &\leq -2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) \kappa^2 - \kappa G_\alpha'' + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \\ &\quad + (3A_0^2 - 1) \frac{B_0^2}{4A_0} \kappa \exp(-\sqrt{2}x) + 2\alpha_{2,4} \kappa^2 + \tilde{P}(x, \exp(-\sqrt{2}x)) \kappa^2 \exp(-\sqrt{2}x) \\ &\quad + \kappa(\tilde{P}(x) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x), \end{aligned} \quad (5.187)$$

où $\bar{P}$ et $\tilde{P}$ sont deux polynômes définis respectivement en (5.157) et (5.182).

Le membre de droite de (5.187) peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes distincts,

$$-2\alpha\tilde{f}_1^{(2)}(0)\kappa^2 + 2\alpha_{2,4}\kappa^2 + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2),$$

et

$$\begin{aligned} & -\kappa G_\alpha'' + (3A_0^2 - 1)\frac{B_0^2}{4A_0}\kappa \exp(-\sqrt{2}x) + \bar{P}(x, \exp(-\sqrt{2}x))\kappa^2 \exp(-\sqrt{2}x) \\ & + \kappa(\tilde{P}(x) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x). \end{aligned}$$

D'après la remarque 5.4.2, il existe p_0 tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$,

$$-2\alpha\tilde{f}_1^{(2)}(0) + 2\alpha_{2,4} + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \leq -2\alpha\tilde{f}_1^{(2)}(0) + p_0. \quad (5.188)$$

D'après (5.182), et compte-tenu du fait que $\deg_X \bar{P} = 2$, on déduit qu'il existe p_1 tel que, pour tout $r_0 > 0$, il existe κ_0 , tel que, $\forall \kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$,

$$\begin{aligned} & \bar{P}(x, \exp(-\sqrt{2}x))\kappa^2 \exp(-\sqrt{2}x) + (3A_0^2 - 1)\frac{B_0^2}{4A_0}\kappa \exp(-\sqrt{2}x) \\ & + \kappa(\tilde{P}(x) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x) \\ & \leq (P(x) - r_0)\kappa \exp(-\sqrt{2}x), \end{aligned} \quad (5.189)$$

où

$$P(x) = p_1 \cdot (1 + x^4). \quad (5.190)$$

Utilisant (5.188) et (5.189), l'inégalité (5.187) s'écrit

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2}f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \\ & \leq (-2\alpha\tilde{f}_1^{(2)}(0) + p_0)\kappa^2 + \kappa(p_1 \cdot (1 + x^4) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x) - \kappa G_\alpha'', \end{aligned} \quad (5.191)$$

ce qui achève la preuve du lemme 5.4.3.

5.4.2 Preuve du théorème 5.2.3

La stratégie de la démonstration est la suivante. Dans une région de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$, on obtient le signe escompté en utilisant la dilatation de la fonction $\tilde{f}_1$ dans la solution extérieure. En revanche, dans une région de la forme $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, on utilise l'inégalité (5.76) obtenue dans le lemme 5.3.1, qui traduit le fait que la solution intérieure tronquée à l'ordre 2, $A^{vd,(1)}$, approche convenablement A_α dans cette région.

5.4.2.1 Etape 1 : Obtention du signe dans un intervalle de la forme $[-\ln \kappa, +\infty[$

Proposition 5.4.4 *Il existe $\theta > 0$ et $c > 0$, telles que, pour tout $\alpha < -\theta$, pour $h > 0$ tels que :*

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C(\alpha)\kappa^2), \quad (5.192)$$

il existe $\kappa_0 > 0$, tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, le couple (f_α, A_α) , vérifie l'inégalité

$$-\kappa^{-2}f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \leq 0, \quad \forall x \in [-c \ln \kappa, +\infty[. \quad (5.193)$$

Commençons par énoncer un lemme, utile dans les calculs qui suivent :

Lemme 5.4.5 Soit $(\rho, \gamma) \in \mathbb{N}^2$, et $\delta \in \mathbb{R}$.

Considérons les fonctions g_1 et g_2 , définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g_1(x) := \exp(-\varepsilon \kappa x), \quad g_2(x) := \kappa^{-\rho} (x^\gamma + 1) \exp(-\sqrt{2}x).$$

Il existe $\kappa_0 > 0$, et $c > 0$, tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$,

$$g_2(x) \leq g_1(x). \quad (5.194)$$

Preuve

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, pour tout $\gamma > 0$, il existe x_0 tels que,

$$\forall x \geq x_0, \quad \ln(x^\gamma + 1) \leq \varepsilon x.$$

On choisit $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour tout $x \geq x_0$, on a l'inégalité

$$\ln(g_2(x)) = -\rho \ln \kappa + \ln(x^\gamma + 1) - \sqrt{2}x \leq -\rho \ln \kappa - \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Réolvons l'inégalité

$$-\rho \ln \kappa - \frac{\sqrt{2}}{2}x \leq -\varepsilon \kappa x.$$

Pour κ assez petit, elle équivaut à

$$x \geq -\frac{\rho}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \kappa} \ln \kappa.$$

Il en résulte qu'il existe $\kappa_0 > 0$ et $c > 0$, tels que, pour tout $\kappa < \kappa_0$, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$, on ait l'inégalité (5.194), ce qui achève la preuve du lemme 5.4.5.

Preuve de la proposition 5.4.4

On pose

$$\hat{f}_0(x; \kappa) = \bar{f}_0(\kappa x), \quad (5.195)$$

$$\hat{f}_1(x; \kappa) = \bar{f}_1(\kappa x; \kappa), \quad (5.196)$$

où $\bar{f}_0$ et $\bar{f}_1$ ont été définies en (5.50) et (5.49).

Soit $\delta \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

D'après (5.70), la fonction f_α est minorée par $\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\kappa)$, pour κ assez petit. On a donc en particulier l'inégalité $f_\alpha > \delta > 0$.

Utilisant le principe du maximum (cf. la proposition 2.4 dans [5]), comme $f_\alpha \geq \delta > 0$, on a l'inégalité

$$-A_\alpha(x) \leq \frac{h}{\delta} \exp -\delta x. \quad (5.197)$$

D'après la proposition 5.2.2, $0 < f_\alpha \leq 1$, d'où

$$A_\alpha^2(x)f_\alpha(x) \leq \frac{h^2}{\delta^2} \exp -2\delta x. \quad (5.198)$$

Rappelons que f_0 (définie en (5.82)) est solution dans $\overline{\mathbf{R}^+}$ de :

$$-\kappa^{-2}f_0'' - f_0 + f_0^3 = 0. \quad (5.199)$$

Par ailleurs, compte-tenu de la définition de $\bar{f}_1$, on a l'égalité

$$-\kappa^{-2}\hat{f}_1'' - \hat{f}_1 + 3\hat{f}_0^2\hat{f}_1 = \kappa\hat{f}_1(1 - 3\hat{f}_0^2)(2\alpha + \alpha^2\kappa). \quad (5.200)$$

Remarquons que d'après (5.36) et (5.49), la fonction $\hat{f}_1$ est négative sur $\overline{\mathbf{R}^+}$. De plus, d'après (5.195), pour κ assez petit, on a l'inégalité, pour tout $x \in \overline{\mathbf{R}^+}$, $1 - 3\hat{f}_0^2 < -\frac{1}{3}$. Il en résulte, compte-tenu de l'hypothèse $\alpha < 0$ faite en (5.62), que le membre de droite de (5.200) est négatif sur $\overline{\mathbf{R}^+}$ pour κ assez petit.

Compte-tenu de (5.52), il existe $\hat{C}_1 > 0$ et $\hat{C}_2 > 0$ telles que, pour tout $\alpha < 0$, pour tout $x \in \overline{\mathbf{R}^+}$, on ait les inégalités

$$\hat{C}_2 \exp(-\frac{\sqrt{2}}{2}\kappa x) \geq -\hat{f}_1 \geq \hat{C}_1 \exp(-\sqrt{2}(1 + \alpha\kappa)x) \geq \hat{C}_1 \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \quad (5.201)$$

On en déduit qu'il existe $\hat{C} > 0$ telle que, pour tout $\alpha < 0$, pour κ assez petit, on ait l'inégalité sur $\overline{\mathbf{R}^+}$:

$$-\hat{f}_1(2 + \alpha\kappa)(-1 + 3\hat{f}_0^2) \geq \hat{C} \cdot \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \quad (5.202)$$

Compte-tenu de (5.198), (5.199), (5.200) et (5.202), pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que pour $\kappa \leq \kappa_0$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-2}f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \leq \\ & -\kappa^{-1}\hat{F}_1'' - \hat{F}_2'' - \kappa G_\alpha'' + \hat{C} \cdot \alpha \kappa^2 \exp(-\sqrt{2}\kappa x) \\ & -\kappa\hat{F}_1 - \kappa^2\hat{F}_2 + \kappa^3G_\alpha + f_\alpha^3 - f_0^3 - 3\kappa\hat{f}_0^2\hat{f}_1 + \frac{h^2}{\delta^2} \exp -2\delta x, \end{aligned} \quad (5.203)$$

où $\hat{F}_i$ est définie en (5.43).

Estimation du terme $f_\alpha^3 - f_0^3 - 3\kappa\hat{f}_0^2\hat{f}_1$

Posons

$$K_{\kappa,\alpha} = \kappa\hat{F}_1 + \kappa^2\hat{F}_2 + \kappa^3G_\alpha. \quad (5.204)$$

Notons que, d'après le lemme 5.4.5 et (5.43), il existe $c > 0$ telle que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ telle que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$, on a les estimations

$$\begin{aligned} \kappa\hat{F}_1 &= \mathcal{O}(\kappa^2) \exp(-2\sqrt{2}\kappa x), \quad \kappa^2\hat{F}_2 = \mathcal{O}(\kappa^2) \exp(-2\sqrt{2}\kappa x), \\ \kappa^3G_\alpha &= \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-2\sqrt{2}\kappa x). \end{aligned} \quad (5.205)$$

De (5.204) et de (5.205), on déduit que

$$K_{\kappa,\alpha} = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-2\sqrt{2}\kappa x). \quad (5.206)$$

On a l'égalité

$$\begin{aligned} f_\alpha^3 &= (f_0 + \kappa \hat{f}_1 + K_{\kappa,\alpha})^3 \\ &= (f_0 + \kappa \hat{f}_1)^3 + 3(f_0 + \kappa \hat{f}_1)^2 K_{\kappa,\alpha} + 3(f_0 + \kappa \hat{f}_1) K_{\kappa,\alpha}^2 + K_{\kappa,\alpha}^3. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Compte-tenu de (5.206), on déduit l'existence d'un réel $c > 0$, tel que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$, tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$, on a l'estimation

$$3(f_0 + \kappa \hat{f}_1)^2 K_{\kappa,\alpha} + 3(f_0 + \kappa \hat{f}_1) K_{\kappa,\alpha}^2 + K_{\kappa,\alpha}^3 = \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-2\sqrt{2}\kappa x).$$

De plus, utilisant (5.201), on a l'estimation

$$\begin{aligned} &(f_0 + \kappa \hat{f}_1)^3 - f_0^3 - 3\kappa \hat{f}_0^2 \hat{f}_1 \\ &= 3\kappa \hat{f}_1 (f_0^2 - \hat{f}_0^2) + 3f_0 \kappa^2 \hat{f}_1^2 + \kappa^3 \hat{f}_1^3 \\ &= 3\kappa \hat{f}_1 (f_0^2 - \hat{f}_0^2) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \end{aligned} \quad (5.208)$$

De (5.207) et (5.208), on déduit l'estimation

$$f_\alpha^3 - f_0^3 - 3\kappa \hat{f}_0^2 \hat{f}_1 = 3\kappa \hat{f}_1 (f_0^2 - \hat{f}_0^2) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \quad (5.209)$$

Compte-tenu du choix du signe de α , ($\alpha < 0$), et de la monotonie de la fonction $\tanh$, on a $f_0^2 - \hat{f}_0^2 > 0$.

Comme $\hat{f}_1 < 0$ (cf. (5.36) et (5.49)), on en déduit que

$$3\kappa \hat{f}_1 (f_0^2 - \hat{f}_0^2) < 0. \quad (5.210)$$

De (5.209) et (5.210), il résulte que, pour tout $\alpha < 0$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$,

$$f_\alpha^3 - f_0^3 - 3\kappa \hat{f}_0^2 \hat{f}_1 \leq \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \quad (5.211)$$

Utilisant (5.211), (5.203) devient

$$\begin{aligned} &-\kappa^{-2} f_\alpha'' + f_\alpha (-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \leq \\ &-\kappa^{-1} \hat{F}_1''' - \hat{F}_2''' - \kappa G_\alpha'' - \kappa \hat{F}_1 - \kappa^2 \hat{F}_2 - \kappa^3 G_\alpha + \hat{C} \cdot \alpha \kappa^2 \exp(-\sqrt{2}\kappa x) \\ &+ \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-\sqrt{2}\kappa x) + \frac{h^2}{\delta^2} \exp(-2\delta x). \end{aligned} \quad (5.212)$$

Compte-tenu du fait que d'après (5.54) et (5.60), on a l'égalité

$$G_\alpha = -\alpha \tilde{f}_1'(0)(x^4 + x) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.213)$$

De (5.18), (5.19) et (5.213) on déduit qu'il existe une constante $d > 0$ indépendante de α , telle que, pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$, et pour κ assez petit,

$$-\kappa^{-1} \hat{F}_1''' - \hat{F}_2''' - \kappa G_\alpha'' - \kappa \hat{F}_1 - \kappa^2 \hat{F}_2 - \kappa^3 G_\alpha \leq d|\alpha| \kappa^{-1} (x^4 + 1) \exp(-\sqrt{2}x). \quad (5.214)$$

Utilisant (5.192), (5.214) et le fait que $\delta \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, on obtient

$$-\kappa^{-1}\hat{F}_1'' - \hat{F}_2'' - \kappa G_\alpha'' - \kappa\hat{F}_1 - \kappa^2\hat{F}_2 - \kappa^3 G_\alpha + \frac{h^2}{\delta^2} \exp(-2\delta x) \leq d|\alpha|\kappa^{-1}(x^4 + 1) \exp(-2\delta x).$$

Utilisant cette inégalité, (5.212) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} -\kappa^{-2}f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) &\leq d|\alpha|\kappa^{-1}(x^4 + 1) \exp(-2\delta x) \\ + \hat{C}.\alpha\kappa^2 \exp(-\sqrt{2}\kappa x) + \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2) \exp(-\sqrt{2}\kappa x). \end{aligned} \quad (5.215)$$

Appliquons le lemme 5.4.5, en prenant pour g_1 la fonction

$$g_1(x) := -\frac{\hat{C}}{2}.\alpha\kappa^2 \exp(-\sqrt{2}\kappa x),$$

et pour g_2 la fonction

$$g_2(x) := d|\alpha|\kappa^{-1}(x^4 + 1) \exp(-2\delta x).$$

D'après le lemme 5.4.5, avec $\varepsilon = 2\delta$, $\rho = 3$, $\gamma = 4$, il existe $c > 0$, telle que, pour tout $\alpha < 0$, il existe $\kappa_0 > 0$ telle que pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$,

$$g_2(x) \leq g_1(x). \quad (5.216)$$

Par ailleurs, se souvenant de la définition de $\mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2)$, comme $\hat{C} > 0$ (voir (5.202)), il existe $\theta > 0$ tel que, pour tout $\alpha \leq -\theta$,

$$-\frac{\hat{C}}{2}.\alpha\kappa^2 \geq \mathcal{O}_\alpha^{un}(\kappa^2). \quad (5.217)$$

On déduit de (5.216) et (5.217), qu'il existe $\theta > 0$ et $c > 0$ telles que, pour tout $\alpha \leq -\theta$, il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et pour tout $x \in [-c \ln \kappa, +\infty[$, le membre de droite de (5.215) est négatif.

Ceci achève la preuve de la proposition 5.4.4.

5.4.2.2 Etape 2 : Obtention du signe dans la région intérieure.

Proposition 5.4.6 *Il existe $\bar{\theta} > 0$, telle que, pour tout $\alpha \in]-\infty, -\bar{\theta}]$, il existe $r_0(\alpha)$, $C(\alpha)$ et $\kappa_0(\alpha) > 0$, tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour $h > 0$ tels que :*

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C(\alpha)\kappa^2), \quad (5.218)$$

le couple (f_α, A_α) , vérifie l'inégalité

$$-\kappa^{-2}f_\alpha'' + f_\alpha(-1 + f_\alpha^2 + A_\alpha^2) \leq 0, \quad \forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]. \quad (5.219)$$

Preuve

Analysons la structure du membre de droite de l'inégalité (5.191), obtenue dans le lemme 5.4.3.

Le signe du membre de droite de (5.191) est négatif si l'on peut montrer que :

$$-2\alpha \tilde{f}_1^{(2)}(0) + p_0 < 0, \quad (5.220)$$

et

$$(p_1(1+x^4) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x) - G_\alpha'' < 0, \quad \forall x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]. \quad (5.221)$$

Notons que $\tilde{f}_1^{(2)}(0) < 0$. En effet, d'après (5.11), (5.36), (5.51)) et (5.56), on obtient

$$\tilde{f}_1^{(2)}(0) = \tilde{f}_1(0)(3\tilde{f}_0(0)^2 - 1) = \frac{C_1}{4\sqrt{2}} < 0.$$

On observe alors, que pour $\theta_1 := \frac{|p_0|}{2\tilde{f}_1^{(2)}(0)}$, l'inégalité (5.220) est vérifiée dès que $\alpha < -\theta_1$.

Il existe un réel $\rho > 0$ tel que

$$H_1'' \exp(\sqrt{2}x) > (1+x^4) - \rho,$$

où

$$H_1(x) := (x^4 + x) \exp(-\sqrt{2}x).$$

Comme $\tilde{f}_1'(0) > 0$ (voir (5.11)), et $G_\alpha = -\alpha \tilde{f}_1'(0) H_1$ d'après (5.55) et (5.60), on déduit qu'il existe $\theta_2 > 0$, tel que, pour tout $\alpha < -\theta_2$,

$$G_\alpha'' > -\tilde{f}_1'(0)\alpha((1+x^4) - \rho) \exp(-\sqrt{2}x) > (p_1(1+x^4) + \rho \tilde{f}_1'(0)\alpha) \exp(-\sqrt{2}x).$$

Soit $\alpha \leq -\bar{\theta} := \min(-\theta_1, -\theta_2)$.

Considérons alors r_0 tel que

$$\eta(\alpha) < r_0, \quad (5.222)$$

où on a posé

$$\eta(\alpha) = -\rho \tilde{f}_1'(0)\alpha. \quad (5.223)$$

On peut prendre par exemple

$$r_0(\alpha) = \rho \tilde{f}_1'(0)|\alpha|. \quad (5.224)$$

Un tel choix est possible, puisque le lemme 5.4.3 est vrai quelque soit $r_0 > 0$ et $\alpha < 0$. Avec un tel choix de r_0 , on a l'inégalité

$$G_\alpha'' > (p_1(1+x^4) - r_0) \exp(-\sqrt{2}x).$$

En conclusion, nous avons montré qu'il existe $\bar{\theta} > 0$, tel que, pour tout $\alpha < -\bar{\theta}$, pour $r_0(\alpha)$ défini en (5.224), pour tout $C(\alpha)$ vérifiant (5.155), il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, et pour $h > 0$ tels que :

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C(\alpha)\kappa^2),$$

la fonction $-\kappa^{-2}f_\alpha'' - f_\alpha + f_\alpha^3 + A_\alpha^2 f_\alpha$ est négative pour tout $x \in [0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$.

Ceci achève la preuve de la proposition 5.4.6.

5.4.2.3 Bilan des contraintes obtenues

Preuve du théorème 5.2.3

Faisons le bilan des conditions obtenues et précisons la façon dont les constantes vont être choisies.

Notons que $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}] \cap [-c \ln \kappa, +\infty[\neq \emptyset$ pour κ assez petit. Par conséquent, les deux régions définies dans les propositions 5.4.4 et 5.4.6 se recouvrent.

Dans la région $[0, \kappa^{-\frac{1}{3}}]$, nous avons montré dans la proposition 5.4.6, que sous les conditions $\alpha < -\bar{\theta}$, où $\bar{\theta} > 0$, et (5.222), il existe $r_0(\alpha)$, $C(\alpha)$ et $\kappa_0(\alpha)$ tels que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0(\alpha)$, et pour $h > 0$ tels que

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C(\alpha)\kappa^2\right),$$

la fonction $-\kappa^{-2}f''_{\alpha} - f_{\alpha} + f_{\alpha}^3 + A_{\alpha}^2f_{\alpha}$ est négative.

Dans la région $[-c \ln \kappa, +\infty[$, nous avons montré dans la proposition 5.4.4, que sous la condition

$$\alpha < -\theta, \tag{5.225}$$

il existe κ_0 tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, la fonction $-\kappa^{-2}f''_{\alpha} - f_{\alpha} + f_{\alpha}^3 + A_{\alpha}^2f_{\alpha}$ est négative. Par conséquent, pour tout réel α tels que, $\alpha < -\max(\theta, \bar{\theta})$, pour tout $r_0(\alpha)$ défini en (5.224) et $C(\alpha)$ vérifiant (5.155), il existe $\kappa_0(\alpha) > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0(\alpha)$, f_{α} soit une sous-solution de $(GL)_{\infty}$. Ceci achève la preuve du théorème 5.2.3.

Nous notons à présent la fonction f_{α} par f_{sous} .

La preuve du théorème 5.1.2 découle immédiatement du théorème 5.2.3.

Preuve du théorème 5.1.2

Remarquons que la fonction $f_{\text{sur}} \equiv 1$ est une sur-solution de $(GL)_{\infty}$.

D'après la proposition 5.2.2, $f_{\text{sous}} \leq 1$. D'après [5] (voir la proposition 6.5 de cet article) et le théorème 5.2.3, on déduit qu'il existe C et $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, pour tout h tels que

$$\kappa^{\frac{1}{2}}h = 2^{-\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{15}{32}\sqrt{2}\kappa + C\kappa^2\right),$$

il existe une solution (f_{κ}, A_{κ}) de $(GL)_{\infty}$ telle que

$$f_{\text{sous}} \leq f_{\kappa} \leq f_{\text{sur}}.$$

Revenant à la définition de $h^{sh}(\kappa)$ (voir la définition 3.8.2), on obtient alors l'inégalité (5.5), ce qui achève la preuve du théorème 5.1.2.

5.5 Problèmes ouverts et perspectives

La question fondamentale concernant le champ de surchauffe est de déterminer s'il est possible de généraliser les calculs effectués précédemment, afin de montrer que le champ de surchauffe est minoré par le développement formel en puissances de $\kappa^{\frac{1}{2}}$, dont

l'existence a été établi dans le chapitre 3.

Il semble que la démarche empruntée précédemment puisse se généraliser, notamment pour établir la proposition 5.3.1. La difficulté pour démontrer le cas général se situe dans le contrôle dans la région extérieure du signe de la fonction $-\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + A^2f$.

Le deuxième point important est de déterminer une majoration du champ de surchauffe pour prouver la conjecture de H. Parr. Pour l'heure, le principal résultat a été établi par C. Bolley et B. Helffer qui ont montré dans [8], par une technique d'estimations a priori, le théorème

Théorème 5.5.1 *Il existe κ_0 et C tels que $\forall \kappa \in]0, \kappa_0]$, pour tout $h \in E$, où E est défini en (1.10), l'estimation suivante, quand $\kappa \rightarrow 0$, est vraie*

$$\kappa h^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}}).$$

Pour démontrer la formule de H. Parr, il faudrait prouver la conjecture suivante.

Conjecture 5.5.2 *Il existe $\kappa_0 > 0$ et C telles que, pour tout $\kappa \leq \kappa_0$, on ait l'inégalité*

$$\kappa^{\frac{1}{2}} h^{sh}(\kappa) \leq 2^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{15}{32} \sqrt{2} \kappa + C \kappa^2\right). \quad (5.226)$$

Bibliographie

- [1] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ limit.
Reviews in Mathematical Physics, Vol. 8, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [2] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior magnetic field.
Part I. Nonlinear Studies No. 3, p. 1-29, 1996.
- [3] C. Bolley et B. Helffer.
Rigorous results on the Ginzburg-Landau models in a film submitted to an exterior parallel magnetic field.
Part II. Nonlinear Studies, Vol. 3, No. 1, p. 43-83, 1996.
- [4] C. Bolley et B. Helffer.
Proof of the De Gennes formula for the superheating field in the weak κ limit.
Annales de l'Institut Henri Poincaré (section analyse non linéaire), Vol. 14, No. 5, p. 597-613, 1997.
- [5] C. Bolley et B. Helffer.
A priori estimates for Ginzburg-Landau solutions.
Contribution pour Cargèse, 1999.
- [6] C. Bolley et B. Helffer.
Superheating field in a semi-infinite film in the weak κ limit: numerical results and approximate models.
Mathematical modelling and numerical analysis, Vol. 31, No. 1, p. 121-165, Novembre 1997.
- [7] V.L. Ginzburg et L.D. Landau.
"On the theory of superconductivity".
Zh. Eksperim. i teor. Fiz. 20 1950, p. 1064-1082
English translation in *Men of Physics: L. D. Landau, I*, Ed. by D. Ter Harr, Pergamon Oxford, 1965, p. 138-167, 1965.
- [8] Di Bartolo, T. Dorsey et J. Dolgert.
Superheating fields of superconductors: Asymptotic analysis and numerical results.
Physical Review B, Vol. 53, No. 9, 1996.

- [9] H. Parr.
Superconductive superheating field for finite κ .
Z. Physik B25, p. 359-361, 1976.
- [10] M. Van Dyke.
Perturbation Methods in fluid mechanics.
Academic Press, Stanford CA, 1975.