FIDA EL CHAMI

Spectre du laplacien sur les formes versus spectre des volumes : le cas des grassmanniennes, 2000

63632

ORSAY
N° D'ORDRE :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

SPECIALITE : MATHEMATIQUE

Par

Fida EL CHAMI

Sujet : **SPECTRE DU LAPLACIEN SUR LES FORMES VERSUS SPECTRE DES VOLUMES : LE CAS DES GRASSMANNIENNES**

Rapporteurs : M. COLBOIS Bruno
M. URAKAWA Hajime

Soutenue le **17 Octobre 2000** devant la Commission d'examen composée de :

M. BESSON Gérard
M. BOURGUIGNON Jean-Pierre
M. COLBOIS Bruno
M. MARGERIN Christophe
M. PANSU Pierre
M. PAULIN Frédéric

Remerciements

C'est un plaisir pour moi d'exprimer ma gratitude et mes remerciements aux personnes qui ont contribué à l'accomplissement et à la réussite de ce travail.

Tout d'abord, je remercie Christophe Margerin qui m'a proposé un sujet de thèse intéressant et m'a dirigé pendant ces années. Je le remercie pour son exigence et la liberté qu'il m'a laissé à creuser mes bonnes (et mauvaises) idées, ce qui a été pour moi très formateur.

Je remercie l'équipe de Topologie d'Orsay qui m'a accueilli parmi ses membres pour faire cette thèse.

Je remercie Bruno Colbois d'avoir accepté de rapporter sur ce travail et pour le temps qu'il a consacré pour discuter avec moi. Il m'a fait des remarques très pertinentes, qui m'ont permis d'améliorer la version finale. Je le remercie pour ce travail ainsi que pour sa présence dans ce jury.

Je remercie également Hajime Urakawa d'avoir accepté d'évaluer ma thèse malgré les charges administratives qu'il avait.

J'adresse mes remerciements à Gérard Besson, Jean-Pierre Bourguignon, Pierre Pansu et Frédéric Paulin qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je ne peux pas exprimer par des mots ma gratitude envers Sophie Lemaire pour le temps qu'elle a passé à lire mon manuscrit et pour les précieux conseils qu'elle m'a donnés sur la rédaction.

Je remercie tous les thésards, particulièrement ceux du bureau 110 pour leur compagnie agréable, leur aide et la gentillesse dont ils ont fait preuve à mon égard.

Je remercie tout le personnel de la bibliothèque, sans oublier les char-

mantes secrétaires, particulièrement Sabine Hoarau, qui ont rendu moins pénibles certaines démarches administratives.

Je tiens aussi à remercier l'équipe modalx de Nanterre de m'avoir accueilli en tant qu'ATER, ce qui m'a permis de finir ma thèse sans souci financier. Je remercie en particulier Salah Mehdi pour l'intérêt qu'il porte à mon travail et pour son amitié sincère.

Je remercie aussi tous mes amis et ma famille de m'avoir aidée tout au long de mes études avec une pensée particulière pour Fida Nassar.

Enfin, je remercie mon mari Toni pour sa présence, sa confiance et le soutien qu'il m'a apporté pendant les périodes difficiles. Je remercie Roland d'être auprès de moi et lui demande pardon pour mon abscence pendant ce dernier mois.

LAPLACE SPECTRA ON FORMS VERSUS VOLUME SPECTRA: THE CASE OF GRASSMANN MANIFOLDS

Abstract:

In this text, we are interested in the relation between the Laplace spectrum on differential forms and the geometric spectrum. We denote by volume spectrum the collection of volumes of minimal submanifolds having a fixed dimension. For one-dimensional submanifolds, it is the length spectrum with several possibilities to define the multiplicity. We define the geometric spectrum to be the volume spectrum in fixed or all dimensions.

First, we explicitly compute the Laplace spectrum on the forms for Grassmann manifolds. This is a generalization of A. Ikeda–Y. Taniguchi and C. Tsukamoto's calculations, based on the representation theory of compact Lie groups and on the "identification" of the Laplace operator with the Casimir operator in symmetric spaces.

Next, we consider examples of isospectral non isometric manifolds constructed by A. Ikeda, and we compute their geometric spectra. We begin with the case of the lens spaces which are isospectral up to a fixed order and not isospectral above that order. We obtain that they have the same geometric spectrum; this shows that the geometric spectrum does not determine the Laplace spectrum on forms. We calculate the length spectra for the example of spherical spaces forms which are isospectral on the forms but not isometric, and we find they are not always identical. Finally we describe the length spectrum for the space forms of the Grassmann manifolds which are isospectral but not isometric. The two last classes of examples satisfy the conditions of Sunada's theorem.

Keywords: Laplace spectrum, differential forms, representation theory, Casimir operator, Grassmann manifold, geometric spectrum, geodesics, minimal submanifolds.

Classification AMS (2000) : 22C05, 53C22, 53C35, 53C40, 58G25, 58G30

Table des matières

Introduction

L'étude du lien entre le spectre du laplacien et la géométrie des variétés (spectre des longueurs, volume, courbure ...) est un sujet qui préoccupe les chercheurs depuis longtemps. Il s'agit de savoir si la connaissance de certaines propriétés d'une variété permet de l'identifier ou d'en donner certaines informations. Par exemple, connaître le spectre du laplacien (sur les fonctions ou même sur les formes différentielles) permet-il d'identifier une variété riemannienne à une isométrie près ? Permet-il de déterminer des invariants de nature géométrique comme le volume de la variété, sa courbure, le spectre des longueurs, les volumes des sous-variétés ... ? Inversement, connaissant certains invariants géométriques, peut-on déterminer le spectre du laplacien ?

Nous commençons par définir les objets dont on parle. Il s'agit du spectre du laplacien et du spectre des longueurs d'une variété riemannienne (M, g).

Spectre du laplacien : On désigne par d l'opérateur de différentiation extérieure, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$, l'espace des p-formes différentielles sur M, et on note δ l'adjoint formel de d relativement au produit scalaire induit par la métrique g. Le laplacien noté Δ ou Δ_p est défini par :

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

C'est un opérateur différentiel elliptique, auto-adjoint, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$. Si M est une variété compacte, l'ensemble des valeurs propres de Δ_p est discret. On notera cet ensemble comme une suite de réels ordonnés dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1^p \leq \lambda_2^p \leq \dots$$

où chacune des valeurs propres λ_i^p sera répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité qui est par définition la dimension de l'espace propre $E_{\lambda_i^p}$ correspondant. L'ensemble des valeurs propres de Δ_p est noté $\mathrm{Spec}^p(M, g)$ et appelé le p-spectre du laplacien de (M, g). Le 0-spectre du laplacien (ou spectre des fonctions) sera noté simplement $\mathrm{Spec}(M, g)$.

On dira que deux variétés sont *p-isospectrales* pour un certain p si elles ont le même p-spectre du laplacien. Si deux variétés ont le même spectre des fonctions, on dit simplement qu'elles sont isospectrales.

Spectre des longueurs : C'est l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées de (M, g). Un nombre ω est donc dans le spectre des longueurs s'il existe une géodésique γ de (M, g)

telle que pour tout nombre réel t on ait $\gamma(t+\omega) = \gamma(t)$. La multiplicité d'une longueur ω peut être définie de plusieurs façons. On peut la définir comme étant le nombre de géodésiques fermées de longueur ω. On peut aussi la définir comme étant le nombre de classes d'homotopie libre dont la plus courte des géodésiques fermées est de longueur ω ; ou aussi comme étant le nombre de classes d'homotopie libre contenant une géodésique fermée de longueur ω. Nous préciserons selon le cas la définition utilisée.

Des exemples particuliers pour lesquels on utilise ces différentes définitions sont donnés dans [21]. On remarque que la deuxième et la troisième définitions sont plus significatives que la première, dans le sens que dans beaucoup d'exemples de variétés isospectrales, le spectre des longueurs n'est pas le même par rapport à la deuxième et troisième définitions. En revanche, il est toujours le même au sens de la première définition.

Comme généralisation de la définition du spectre des longueurs nous introduisons le spectre des volumes.
Spectre des volumes : Le p-spectre des volumes d'une variété M est la collection des volumes des sous-variétés minimales de dimension p de M. La multiplicité d'un volume v est le nombre de fois où v apparaît dans le spectre.

Nous appelons *spectre géométrique* le spectre des p-volumes pour un p donné ou pour tout p.

A propos des relations entre le spectre du laplacien et le spectre géométrique, plusieurs réponses ont été apportées jusqu'à présent. Les premiers exemples ont été donnés par J. Milnor qui a construit en 1964 des tores plats de dimension 16 isospectraux et non isométriques (voir par exemple [5]) montrant ainsi que le spectre du laplacien d'une variété ne la détermine pas. Néanmoins, la formule de Poisson montre que le spectre du laplacien d'un tore plat détermine complètement son spectre des longueurs et inversement ([5], [2]). D'autre part, on sait que le spectre du laplacien d'une variété compacte détermine son volume et sa courbure totale (voir par exemple [5]). Une généralisation de ce résultat a été faite pour les surfaces de Riemann. On a obtenu une formule des traces montrant que le spectre du laplacien de ces surfaces détermine leur spectre des longueurs et inversement. A ce propos, il y a eu des travaux de H. Huber, A. Selberg, H. P. McKean, I. M. Singer ... Pour une étude détaillée de cette formule, on pourra consulter les références [8] et [9]. Une sorte de généralisation de ce dernier résultat a été faite en 1973 par Y. Colin de Verdière [12]. Il a établi une formule des traces qui permet de montrer que sur une surface compacte à courbure strictement négative, le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs. Plus généralement, il montre que ce résultat est valable dans un cas générique. C'est le cas d'une variété compacte dont les géodésiques périodiques sont isolées, non dégénérées et de longueurs deux à deux distinctes. Dans ce cas, le spectre du laplacien détermine en plus les indices modulo 4 des géodésiques périodiques. Avec les mêmes conditions, il obtient aussi des résultats concernant le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles : la connaissance du p-spectre pour tout p permet d'avoir les longueurs des géodésiques périodiques, leurs indices modulo 4 et le transport parallèle le long de chaque géodésique périodique. On rappelle qu'une géodésique de longueur l est non dégénérée si l'ensemble des points critiques de la fonction énergie ayant l^2 comme valeur critique, est une réunion finie de sous-variétés compactes connexes et non dégénérées. Son calcul repose sur une approximation du noyau de la chaleur sur ces variétés.

Des travaux similaires, sur le lien entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs ont été effectués par J. Chazarain [10], J. Duistermaat et V. Guillemin [17] en utilisant l'équation des ondes.

Beaucoup d'exemples de variétés isospectrales pour le laplacien et non isométriques ont été construits par la suite. La majorité de ces exemples est donnée par des variétés localement isométriques (i.e. ayant le même revêtement universel). Ce sont des quotients d'une variété par des groupes d'isométries discrets co-compacts agissant librement sur la variété. On cite les travaux de M. F. Vignéras [44] en 1980 sur des variétés hyperboliques, ceux de D. M. DeTurck, C. S. Gordon, E. N. Wilson, ... sur des variétés nilpotentes et ceux de A. Ikeda sur des variétés à courbure positive. A. Ikeda a commencé par quotienter les sphères de dimension impaire par des groupes d'isométries cycliques finis sans point fixe [26]. Les quotients sont des espaces lenticulaires isospectraux pour les k-formes différentielles jusqu'à un certain ordre p mais non isospectraux pour les $(p+1)$-formes [28]. Ensuite, dans [27], il a donné d'autres exemples qui sont des quotients des sphères de dimension impaire par des groupes d'isométries finis, non cycliques, sans point fixe et de «type 1». Les espaces obtenus dans ce cas sont isospectraux pour les fonctions et les formes différentielles de tout ordre. Pour construire des exemples de quotients de la grassmannienne, il a utilisé la bijection entre les classes d'isométries des espaces sphériques et celles des quotients de la grassmannienne, et il a obtenu des familles de variétés isospectrales pour les fonctions mais non isométriques [29]. On ne sait pas si ces dernières sont isospectrales ou non pour les formes différentielles. La classification de ces variétés et la bijection entre les classes d'isométries des quotients de la sphère et ceux de la grassmannienne est décrite dans la référence [45]. L'utilité d'avoir ces exemples n'est plus de savoir qu'ils existent mais de déterminer les quantités géométriques que deux variétés isospectrales peuvent avoir en commun et celles qui changent avec le changement de la métrique. A titre d'exemples, C. S. Gordon dans [21] compare les spectres des longueurs de plusieurs familles de variétés isospectrales. Pour toutes ces familles, le spectre des longueurs, au sens de la première définition, est le même. L'une de ces familles est formée de variétés p-isospectrales pour tout p et non isométriques, n'ayant pas le même spectre des longueurs au sens de la deuxième définition.

Des résultats relativement généraux ont été découverts par T. Sunada [40] à ce sujet. Il donne des conditions qui assurent que deux variétés ont même spectre du laplacien et même spectre des longueurs. Si G est un groupe de Lie et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G, on désigne par π_Γ^G la représentation de G dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$ définie par $\pi_\Gamma^G(g)\phi(x) = \phi(xg)$. Une généralisation du résultat de T. Sunada est la suivante :

Soit G un groupe d'isométries d'une variété riemannienne (M, g) où g est la métrique *correspondante. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets sans point fixe de G tels que $\Gamma_1\backslash M$ et $\Gamma_2\backslash M$ soient des variétés compactes. Si l'on munit ces deux variétés de la métrique induite par g et si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes, alors :*

1. *Les variétés $\Gamma_1\backslash M$ et $\Gamma_2\backslash M$ ont même spectre du laplacien.*
2. *L'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de ces deux variétés est le même. Si de plus G est compact, il existe une bijection qui préserve les longueurs entre l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_1\backslash M$ et l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_2\backslash M$.*

Cette généralisation a été faite par D. M. DeTurck et C. S. Gordon [13]. Une autre preuve a été donnée par P. Bérard [3] (voir aussi [4]). En fait, l'énoncé initial de T. Sunada suppose que G, Γ_1 et Γ_2 sont finis.

Dans le cas particulier où G est compact, les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes si et seulement si pour tout $g \in G$, l'intersection de $[g]_G$ (la classe de conjugaison de g dans G) avec Γ_1 a le même nombre d'éléments que son intersection avec Γ_2. Cette condition est aussi équivalente au fait qu'il existe une bijection $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ telle que pour tout $\sigma \in \Gamma_1$, $\phi(\sigma)$ est conjugué à σ, par un élément de G qui dépend de σ.

Plusieurs exemples parmi ceux déjà cités vérifient les conditions du résultat de T. Sunada, mais pas tous : les espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques construits par A. Ikeda ne satisfont pas aux conditions du résultat. Nous étudierons le spectre géométrique de ces exemples au début du chapitre 4.

Dans [14], [15] et [16], les auteurs étudient des exemples de variétés nilpotentes isospectrales (pour les fonctions) et non isométriques. Dans certains de ces exemples, les volumes des cycles dans les classes d'homologie sont distincts. Dans d'autres où ce n'est pas le cas, les positions relatives des 1-cycles changent avec la métrique. Dans tous les exemples traités, les cycles du groupe d'homologie détectent le changement de la métrique.

Dans certains cas, la connaissance du spectre du laplacien permet d'avoir des informations sur le lien entre le spectre du laplacien sur les fonctions ou sur les formes, et le spectre géométrique d'une variété riemannienne. En effet, on peut construire des quotients isospectraux d'une variété dont on connaît le spectre du laplacien sur les fonctions ou les formes propres, selon le cas. Cette méthode a été utilisée pour construire certains exemples parmi ceux déjà cités. Pour cette raison, nous nous intéressons au calcul explicite du spectre du laplacien. Nous allons citer certains travaux dans cette direction. Sur un espace symétrique on sait calculer *théoriquement* le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles de tout ordre (en particulier les fonctions). Dans la pratique, ce calcul est parfois compliqué et technique. La méthode fait appel à certains outils de la théorie des représentations. Elle est décrite dans le premier chapitre de cette thèse et on en parlera brièvement plus loin dans cette introduction. Cette méthode a été utilisée par B. L. Beers et R. S. Millman [1] en 1977 pour déterminer le spectre du laplacien d'un groupe de Lie compact semi-simple. Plus tard, en 1978, A. Ikeda et Y. Taniguchi [30] s'en servent pour calculer le p-spectre du laplacien, pour tout p, et les fonctions propres sur la sphère et sur l'espace projectif complexe. On note que le 0-spectre du laplacien sur la sphère était connu (voir par exemple [5]) et le p-spectre a été déterminé en 1975 par S. Gallot et D. Meyer [20] par une méthode différente. Il y a eu aussi en 1981 l'article de L. Paquet [39] sur ce sujet. Ensuite, en 1981, C. Tsukamoto [43] a calculé le p-spectre des espaces $\mathrm{SO}(n+2)/(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(2))$ et $\mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1))$ pour tout p. Peu de temps après, en 1983, E. Kaneda [33] et [34] a calculé le spectre des 1-formes des espaces symétriques compacts simplement connexes et irréductibles. En général, on n'a pas explicitement le spectre d'un espace symétrique donné. La même méthode sert aussi à calculer le spectre d'un espace symétrique de type non compact qui lui est un spectre continu. Si on s'intéresse à un quotient compact d'un espace symétrique de type non compact, les multiplicités des valeurs propres sont données en fonctions des multiplicités de la représentation régulière droite du groupe G sur l'espace $L^2(\Gamma\backslash G)$ dans la représentation adjointe. On ne sait pas calculer explicitement ces multiplicités et on n'a que quelques formules asymptotiques (voir [37] et [36]).

L'objectif initial de cette thèse était de trouver une formule des traces du style de celle obtenue par Y. Colin de Verdière [12], reliant le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles et le spectre des volumes. Une telle formule n'est pas facile à obtenir, on traite partiellement le problème en étudiant la correspondance entre le spectre du laplacien sur les formes et le spectre des volumes pour des exemples particuliers de variétés isospectrales et non isométriques.

Cette thèse est formée de deux parties. La première partie est constituée de deux chapitres. Le premier chapitre consiste à rappeler les notations, définitions et résultats qui vont permettre de calculer le spectre du laplacien d'un espace symétrique $M = G/K$, où G est un groupe de Lie compact semi-simple et K un sous-groupe fermé de G. Tout d'abord, nous rappelons certains résultats de la théorie des représentations des groupes compacts, essentiellement la formule des caractères de Weyl et la formule de la décomposition d'un produit tensoriel en sous-modules irréductibles due à Steinberg. Un autre résultat important est celui de «l'égalité» entre le laplacien et l'opérateur de Casimir :

$$\Delta = \mathcal{C}.$$

Nous présentons en détail sa démonstration. La connaissance des valeurs propres de l'opérateur de Casimir sur les représentations irréductibles permet alors de calculer les valeurs propres du laplacien. En fait, il suffit de décomposer l'espace des formes différentielles sur M en représentations irréductibles. Ce problème n'est pas simple, on utilise alors le théorème de la réciprocité de Frobenius qui permet de réduire le problème de la décomposition d'un G-module en sous-modules irréductibles à celui de la décomposition d'un G-module irréductible en sous-K-modules irréductibles et à celui de la décomposition de l'espace des p-èmes puissances extérieures de $\mathfrak{m}$, l'espace tangent à M en K, pour tout p, en sous-K-modules irréductibles. En utilisant la formule des caractères de Weyl, la décomposition d'un G-module irréductible en sous-K-modules irréductibles se réduit à un calcul algébrique.

Dans le deuxième chapitre, on applique la méthode proposée dans le chapitre précédent pour calculer le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles des variétés grassmanniennes. C'est le cas où $G = \mathrm{SO}(n)$ et $K = \mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$. Ce calcul est une généralisation des calculs du spectre du laplacien effectués par A. Ikeda et Y. Taniguchi [30] sur les sphères et C. Tsukamoto [43] sur les grassmanniennes des 2-plans, aux variétés grassmanniennes des k-plans de $\mathbb{R}^n$ pour tout k. Il faut noter que le calcul est très technique et local. Sa difficulté dépend de l'espace en question. Pour faire ce calcul, on fixe le choix d'un tore maximal T_G (resp. T_K) de $G = \mathrm{SO}(n)$ (resp. $K = \mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$) et on désigne par $\mathfrak{t}_G$ (resp. $\mathfrak{t}_K$) l'algèbre de Lie de T_G (resp. T_K). On note qu'on peut les choisir de sorte que $\mathfrak{t}_K \subset \mathfrak{t}_G$. On détermine un système des racines Δ_G (resp. Δ_K) de G (resp. K) relativement à T_G (resp. T_K) et le groupe de Weyl W_G (resp. W_K) de ce système des racines. On considère un G-module irréductible quelconque V qu'on décompose en une somme de sous-K-modules irréductibles. Les modules irréductibles sont complètement définis par leurs caractères, ou leurs poids dominants, on a donc à décomposer un caractère irréductible de G en une somme de caractères irréductibles de K. On définit la fonction :

$$\xi(\lambda) : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}, \quad \text{avec} \quad \xi(\lambda)(H) = \sum_{w \in W} \det(w).e(\lambda(w(H))), \ \forall H \in \mathfrak{t},$$

pour G et pour K où W est le groupe de Weyl de G ou de K, selon le cas, et on désigne par δ_G (resp. δ_K) la demi-somme des racines positives de G (resp. de K). Soit Λ le plus grand poids du G-module V. D'après la formule des caractères de Weyl, le caractère de ce module est donné par :

$$\chi_G(\Lambda) = \frac{\xi_G(\Lambda + \delta_G)}{\xi_G(\delta_G)}. \tag{1}$$

Sa décomposition en sous-K-modules irréductibles revient à trouver un ensemble de poids dominants Λ' de K tel que :

$$\frac{\xi_G(\Lambda + \delta_G)}{\xi_G(\delta_G)}\Big|_{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}} = \sum_{\Lambda' \in E} \frac{\xi_K(\Lambda' + \delta_K)}{\xi_K(\delta_K)}. \tag{2}$$

Le premier résultat fondamental dans ce chapitre consiste à effectuer cette décomposition (théorèmes 2.2.5 et 2.2.6). La technique utilisée est de nature itérative partant des travaux de C. Tsukamoto [43].

Pour ce qui est de la décomposition des puissances extérieures de la représentation adjointe, on utilise certaines propriétés connues pour écrire l'espace de la représentation comme la somme de produits tensoriels de représentations irréductibles. On utilise ensuite la formule de Steinberg et un programme informatique pour déterminer les multiplicités des composantes irréductibles intervenant dans la décomposition d'un produit tensoriel de représentations irréductibles.

La deuxième partie de la thèse est formée des chapitres 3 et 4. Dans le troisième chapitre, nous décrivons des résultats obtenus par A. Ikeda dans [28], [27] et [29]. Ce sont des variétés à courbure positive, isospectrales (pour les fonctions ou pour les formes différentielles) et non isométriques. Nous rappelons le résultat concernant les espaces lenticulaires isospectraux pour les formes différentielles jusqu'à un certain ordre $p \geq 0$, mais non $(p+1)$-isospectraux et nous en donnons la preuve. D'autres variétés p-isospectrales pour tout p et non isométriques sont obtenues comme des quotients de la sphère par des groupes d'isométries finis, à deux générateurs, sans point fixe et de type 1. Les quotients de la grassmannienne par le même type de groupes donnent aussi des variétés p-isospectrales pour tout p. Dans le cas des quotients par des groupes de type 1, on n'utilise pas exactement la preuve de A. Ikeda de l'isospectralité pour les formes différentielles mais nous montrons que ces variétés vérifient les hypothèses du théorème de T. Sunada (généralisé).

Dans le quatrième chapitre, nous effectuons le calcul des spectres géométriques (spectre des longueurs, spectre des volumes ...) des espaces considérés dans le troisième chapitre. Nous commençons par calculer le spectre des longueurs des espaces lenticulaires isospectraux jusqu'à un certain ordre p et non $(p+1)$-isospectraux en considérant la première et la troisième définitions de la multiplicité. En comparant les spectres de deux espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques quelconques, on trouve qu'ils sont identiques indépendamment de l'ordre d'isospectralité. Cette propriété n'est pas une conséquence du résultat de T. Sunada décrit précédemment. Les résultats de Y. Colin de Verdière [12], qui exigent que les longueurs des géodésiques fermées soient simples (i.e. ayant pour multiplicité 1) ne s'appliquent pas non plus dans ce cas. On a ainsi le résultat :
Le spectre des longueurs ne détermine pas le spectre des p-formes différentielles pour $p \geq 1$.

Nous reprenons la même démarche pour le spectre des volumes. Nous calculons les volumes des sous-variétés totalement géodésiques et les volumes d'une partie de sous-variétés minimales, non totalement géodésiques. La comparaison nous mène au résultat suivant :
La partie du spectre des volumes formée par les volumes de ces sous-variétés ne détermine pas le spectre des formes différentielles d'ordre supérieur à un.

On rappelle qu'il existe des espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques de la famille décrite, qui n'ont pas le même type d'homotopie (A. Ikeda [26]). On note aussi que ces espaces non isométriques ne peuvent pas avoir le même spectre marqué (R. Gornet [22]).

On considère ensuite les quotients de la sphère et de la grassmannienne par des groupes d'isométries finis, sans point fixe, non cycliques et de type 1 qui sont irréductibles et isomorphes.

Les quotients de la sphère sont isospectraux pour les formes différentielles de tout ordre et non isométriques. Ce sont en fait des exemples qui vérifient les hypothèses du théorème de T. Sunada. Ils ont donc le même spectre des longueurs au sens de la première définition. Pour un tel quotient, on calcule le spectre des longueurs au sens de la première et de la troisième définition. Le calcul des multiplicités est plus technique que dans le cas des espaces lenticulaires car le groupe fondamental n'est plus cyclique. On montre que deux variétés de cette famille, qui sont isospectrales et non isométriques, n'ont pas toujours

le même spectre des longueurs pour la troisième définition (théorème 4.6.10), bien qu'ils vérifient le théorème de T. Sunada. On peut donc énoncer :
La connaissance du p-spectre du laplacien pour tout p ne détermine pas le spectre des longueurs au sens de la troisième définition.

Malheureusement, il n'a pas été possible de calculer le spectre des volumes de telles variétés, la difficulté est d'étudier l'invariance des sous-variétés par les éléments du groupe fondamental, difficulté due à la forme de ces éléments.

Les variétés quotients de la grassmannienne $\Gamma\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sont elles aussi isospectrales pour les formes différentielles de tout ordre. Deux telles variétés, isospectrales et non isométriques, ont le même spectre des longueurs, au sens de la première définition, d'après le théorème de T. Sunada. Pour ces variétés, on caractérise les nombres réels strictement positifs appartenant au spectre des longueurs (au sens de la première définition) en fonction du spectre des matrices du groupe Γ. Dans ce cas, on n'effectue pas non plus le calcul du spectre des volumes.

On signale que le calcul du spectre des longueurs effectué pour les formes d'espaces sphériques $\Gamma\backslash S^n$ avec $\Gamma \subset \mathrm{O}(n+1)$ se ramène au calcul des valeurs propres des matrices du groupe Γ, ce qui s'applique à tous les quotients de la sphère et pas seulement aux exemples traités dans ce chapitre.

Pour avoir un résumé des résultats obtenus dans le quatrième chapitre, on pourra voir le tableau 4.1 de la page 106.

Première partie

Spectre du laplacien : calcul explicite

Chapitre 1

Rappels sur les représentations des groupes compacts et sur les espaces symétriques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle les notions qui permettent de calculer le spectre du laplacien agissant sur l'espace des formes différentielles de certains espaces symétriques de type compact. On utilise des outils de la théorie de la représentation.

On décrit la méthode utilisée. Soit $M = G/K$ une variété riemannienne homogène, où G est un groupe d'isométries agissant transitivement sur M et K un sous-groupe fermé de G. On désigne par Δ le laplacien agissant sur les formes différentielles de M. L'opérateur Δ est un opérateur différentiel G-invariant, donc ses espaces propres sont des G-modules.

On suppose que M est un espace symétrique et on désigne par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G et par $\mathfrak{k}$ celle de K. Le laplacien «s'identifie» à «l'opérateur de Casimir» du groupe G [30]. D'autre part, on sait déterminer les valeurs propres de l'opérateur de Casimir sur les G-modules irréductibles, utilisant la formule de Freudenthal [6]. Ainsi, pour calculer les valeurs propres du laplacien, il suffit de décomposer l'espace des formes différentielles, en sous-modules irréductibles. Cette décomposition n'est pas immédiate. Néanmoins, en utilisant le théorème de réciprocité de Frobenius, elle se réduit à :

1. la décomposition d'un G-module irréductible (considéré comme un K-module par restriction) en sous-K-modules irréductibles.

2. la décomposition de la p-ème puissance extérieure de la représentation adjointe du groupe K,

$$\mathrm{Ad}^{*p} : K \to \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}},$$

en composantes K-irréductibles.

1.2 Rappels sur les représentations des groupes

Cette partie est destinée à introduire certains notions et résultats de la théorie de la représentation dont on va se servir par la suite. On commence par définir les poids d'une représentation, en particulier, les racines d'un groupe compact relativement à un tore maximal. On introduit ensuite les chambres de Weyl et les formes entières. La formule des caractères de Weyl permet d'identifier les représentations irréductibles par leurs caractères ou leurs plus grands poids (qui sont des formes entières appartenant à une chambre de Weyl fixée). Ceci permettra de réduire le problème de décomposition d'une représentation donnée en une somme de représentations irréductibles, à un calcul algébrique utilisant les caractères. Finalement, la formule de multiplicité de Steinberg sert dans la décomposition de la puissance extérieure de la représentation adjointe en composantes irréductibles.

Les preuves des résultats décrits se trouvent dans la référence [7].

1.2.1 Poids et racines

On décrit dans ce paragraphe les propriétés des représentations des groupes compacts et des tores. Les représentations d'un groupe compact sont complètement réductibles, celles d'un tore se décomposent en somme des sous-espaces primaires. En particulier, on obtient la décomposition de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact en espaces de racines.

On désigne par V un espace vectoriel sur un corps F, par $\mathrm{End}(V)$ l'espace vectoriel des applications F-linéaires et par $GL(V)$ le groupe des applications F-linéaires et inversibles, de V dans lui-même. On munit $\mathrm{End}(V)$ d'une structure d'algèbre de Lie sur F, notée $\mathfrak{gl}(V)$, en posant :

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f, \quad \text{pour } f,g \in \mathrm{End}(V).$$

Définition 1.2.1

(i) Une représentation d'un groupe de Lie G dans l'espace vectoriel V, est un homomorphisme continu de groupes $\rho : G \to GL(V)$.

(ii) Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (sur F) dans l'espace vectoriel V, est un homomorphisme de F-algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

On dit que (ρ, V) (resp. (ϕ, V)) est une représentation de G (resp. $\mathfrak{g}$) et que V est l'espace de la représentation. La dimension de la représentation est celle de l'espace vectoriel V.

Définition 1.2.2

- *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une structure complexe sur V est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire J de V tel que $J^2 = -1_V$. Un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure complexe peut être considéré comme un espace vectoriel $\tilde{V}$ sur $\mathbb{C}$ par :*

$$(a+ib)v = av + bJ(v) \quad \textit{où } a,b \in \mathbb{R} \textit{ et } v \in V.$$

- *Soit W un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On munit $W \times W$ de la structure complexe $J(u,v) = (-v,u)$ pour $u, v \in W$. L'espace $\widetilde{W \times W}$ est noté $W_{\mathbb{C}}$ et dit le complexifié de W.*

Propriétés 1.2.3

- *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'espace vectoriel réel sous-jacent $E^{\mathbb{R}}$ a une structure complexe qui consiste à multiplier par i. On a : $E = \widetilde{E^{\mathbb{R}}}$.*
- *Soit W un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a $\dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} W$. Comme $(u,v) = (u,0) + (0,v) = (u,0) + J(v,0)$, pour u, v dans W, on note les éléments (u,v) de $W_{\mathbb{C}}$ par $u + iv$. La multiplication par les nombres complexes est :*

$$(a+ib)(u+iv) = a(u,v) + bJ(u,v) = (au, av) + (-bv, bu) = au - bv + i(av + bu).$$

- *Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\{e_i\}$ est une base de E, telle que $E = \sum \mathbb{C}e_i$, alors E est isomorphe à $W_{\mathbb{C}}$, où W est l'espace vectoriel réel donné par $W = \sum \mathbb{R}e_i$.*

Définition 1.2.4

- *Soit $\mathfrak{v}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. Une structure complexe J sur $\mathfrak{v}$ est une structure complexe sur l'espace vectoriel $\mathfrak{v}$ telle que :*

$$[X, J(Y)] = J([X,Y]) \quad pour \ X, Y \in \mathfrak{v}.$$

$\tilde{\mathfrak{v}}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ avec la structure de crochet induite par celle de $\mathfrak{v}$.

- *Soit $\mathfrak{l}_0$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)_{\mathbb{C}}$. On munit $\mathfrak{l}$ de la structure de crochet donnée par :*

$$[X+iY, Z+iT] = [X,Z] - [Y,T] + i([Y,Z] + [X,T]) \quad pour \ X,Y,Z,T \in \mathfrak{l}_0.$$

Cette structure est $\mathbb{C}$-bilinéaire et $(\mathfrak{l}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. Elle s'appelle l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{l}_0$.

Propriétés 1.2.5

- *Soit $\mathfrak{e}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. $\mathfrak{e}^{\mathbb{R}}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ avec structure complexe J qui est la multiplication par i. En effet :*

$$[X, J(Y)] = [X, iY] = i[X,Y] = J([X,Y]) \quad pour \ X, Y \in \mathfrak{e}^{\mathbb{R}}.$$

- *Si $\mathfrak{l}_0$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)_{\mathbb{C}}$, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ est munie d'une structure complexe qui est la multiplication par i.*

Remarque 1.2.6

- *Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle ou complexe) et V un espace vectoriel.*
  - *Si V est un espace vectoriel réel, on désigne par $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Toute représentation de G (ou de $\mathfrak{g}$) dans V s'étend en une représentation dans $V_{\mathbb{C}}$.*

  - *Si V est un espace vectoriel complexe, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ son complexifié, toute représentation de $\mathfrak{g}$ dans V s'étend en une représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans V.*
- *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une représentation ρ de G dans un espace vectoriel V induit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V, notée ρ_{*e} ou ρ (e est l'élément neutre de G). La représentation ρ_{*e} est définie par :*

$$\rho_{*e}(X)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\rho(\exp(tX))v - v), \quad \text{pour } X \in \mathfrak{g} \text{ et } v \in V.$$

- *On note parfois V les représentations (ρ, V) de G et (ϕ, V) de $\mathfrak{g}$.*
- *Si F est le corps des nombres complexes (resp. réels), on dit que V est une représentation complexe (resp. réelle).*
- *Par abus de langage, on dit que (ρ, V) est un G-module et que (ϕ, V) est un $\mathfrak{g}$-module.*
- *On désigne parfois par gv ou $l_g(v)$ l'élément $\rho(g)v$ de V et par Xv l'élément $\phi(X)v$ de V.*

Exemple 1.2.7 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tout élément g de G, on désigne par $c(g)$ l'automorphisme intérieur qui associe à un x de G, l'élément gxg^{-1}. Ainsi, $c(g) = L_g \circ R_{g^{-1}}$, où L_g est la translation à gauche par g et R_g la translation à droite par g. L'automorphisme $c(g)$ s'appelle aussi la conjugaison par l'élément g de G. On désigne alors par Ad l'homomorphisme :*

$$\begin{array}{rcccl} Ad & : & G & \to & Aut(\mathfrak{g}) \\ & & g & \mapsto & (c(g))_{*e}, \end{array}$$

où $(c(g))_{*e}$ est l'application tangente à $c(g)$ en l'élément neutre. Le groupe $Aut(\mathfrak{g})$ est le sous-groupe de $GL(\mathfrak{g})$ formé des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On appelle Ad la représentation adjointe du groupe G. L'homomorphisme Ad induit un homomorphisme d'algèbres de Lie :

$$ad = (Ad)_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

définie par $ad(X)Y = [X, Y]$, le crochet de Lie de X et Y. On appelle ad la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 1.2.8 *Soit V et W deux espaces vectoriels sur F. Un morphisme de G-modules V et W est une application F-linéaire $f : V \to W$ qui est G-équivariante, i.e. pour tout $g \in G$ et $v \in V$, $f(gv) = gf(v)$. On désigne par $Hom_G(V, W)$ l'ensemble de ces morphismes. Ceci définit une catégorie. Un isomorphisme est un morphisme inversible. Deux représentations isomorphes sont dites équivalentes.*

Définition 1.2.9 *Soit V un G-module. Un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur V est dit G-invariant si pour tout $g \in G$ et $u, v \in V$, on a $\langle gu, gv\rangle = \langle u, v\rangle$.*

Lemme 1.2.10 *Soit (ρ, V) une représentation complexe ou réelle d'un groupe de Lie compact G. Alors V possède un produit scalaire G-invariant.*

Définition 1.2.11 *Soit V un G-module. Un sous-espace $U \subset V$ qui est invariant par l'action de G est dit un sous-module de V. Un G-module V est dit irréductible si V n'a pas de sous-espaces vectoriels propres G-invariants.*

Théorème 1.2.12 *Soit G un groupe compact et V un G-module complexe ou réel. Si U est un sous-G-module de V, alors il existe un sous-G-module supplémentaire U' tel que $V = U \oplus U'$. Tout G-module est la somme directe de sous-G-modules irréductibles.*

Lemme 1.2.13 *(Lemme de Schur)*
Soit G un groupe et V et W deux G-modules complexes irréductibles. On a :

(i) *Un G-morphisme $f : V \to W$ est un isomorphisme ou le morphisme trivial.*

(ii) *Tout G-morphisme $f : V \to V$ s'écrit $f = \lambda.1_V$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} Hom_G(V, W) = 1$ *si $V \cong W$ et 0 sinon.*

Proposition 1.2.14 *Soit G un groupe abélien. Si V est un G-module complexe irréductible, alors* $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

Conséquence 1.2.15 *Si ρ est une représentation complexe irréductible d'un groupe abélien, alors on peut la représenter par un homomorphisme de G à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Si G est de plus compact, $\rho(G)$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{C}^*$, donc contenu dans S^1.*

Définition 1.2.16 *Si G est un groupe abélien compact, les représentations irréductibles complexes $\rho : G \to S^1$ s'appellent les caractères du groupe G.*

Remarques 1.2.17

- *Un groupe G abélien compact est isomorphe à un produit fini de la forme :*

$$G \cong S^1 \times \cdots \times S^1 \times \mathbb{Z}/m_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_k, \quad \text{où } m_i \in \mathbb{N}.$$

- *Un groupe abélien, compact et connexe est isomorphe à $(S^1)^n$.*

Définition 1.2.18 *Un groupe de Lie T est dit un tore si T est abélien, compact et connexe.*

D'après la remarque précédente, un tore est isomorphe à $(S^1)^n$, i.e. à $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Proposition 1.2.19 *Les caractères du tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sont tous de la forme :*

$$\begin{aligned} \theta : \quad T &\to S^1 \\ [x] &\mapsto \exp(2\pi i a(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

avec $a(x) = \langle a, x \rangle = \sum_\nu a_\nu x_\nu$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Définitions 1.2.20 *Soit T un tore, $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T et (ρ, V) une représentation complexe du groupe T.*

(i) *Un caractère $\theta : T \to S^1 = U(1)$ du tore est dit un poids global de V si le sous-espace primaire relatif à θ :*

$$V(\theta) = \{v \in V;\ \rho(x)v = \theta(x).v,\ \forall x \in T\},$$

n'est pas trivial.

(ii) *Une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\Theta : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ est dite un poids infinitésimal de V si le sous-espace primaire relatif à Θ :*

$$V(\Theta) = \{v \in V;\ \rho_{*e}(X)v = \Theta(X).v,\ \forall X \in \mathfrak{t}\},$$

n'est pas trivial.

(iii) *Une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ est dite un poids réel de V si $2\pi i\alpha$ est un poids infinitésimal de V.*

(iv) *Une forme $\mathbb{C}$-linéaire $\Phi : \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est dite un poids infinitésimal complexe de V si le sous-espace primaire relatif à Φ :*

$$V(\Phi) = \{v \in V;\ \rho_{*e}(H)v = \Phi(H).v,\ \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\},$$

n'est pas trivial. La représentation ρ_{*e} a été étendue à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité.

Les éléments de $V(\theta)$ (resp. $V(\Theta)$, resp. $V(\Phi)$) s'appellent les vecteurs de poids θ (resp. Θ, resp. Φ).

Remarque 1.2.21 *Soit T un tore et V un T-module réel. Le poids du T-module V est celui de $V_{\mathbb{C}}$.*

Proposition 1.2.22 *Soit T un tore et V un T-module complexe.*

(i) *L'application $\theta \mapsto \theta_{*e} = \Theta$ est une bijection entre les poids globaux et les poids infinitésimaux du T-module V. De plus, pour tout poids θ, les espaces $V(\theta)$ et $V(\theta_{*e})$ sont les mêmes.*

(ii) *Soit Θ un poids infinitésimal, et :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\Theta : \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} & \to & (i\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \\ X + iY & \mapsto & \Theta(X) + i\Theta(Y) \quad pour\ X, Y \in \mathfrak{t}. \end{array}$$

La correspondance $\Theta \mapsto \Phi_\Theta$ est une bijection entre les poids infinitésimaux et les poids infinitésimaux complexes. De plus, $V(\Theta) = V(\Phi_\Theta)$.

V s'écrit comme la somme directe de ses espaces primaires.

Remarque 1.2.23 *Soit T un tore, V un T-module réel et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Soit $\sigma : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ l'application définie par $\sigma(u + iv) = u - iv$ pour tout u et v dans V. Si Θ est un poids infinitésimal de $V_{\mathbb{C}}$, alors $\sigma(V_{\mathbb{C}}(\Theta)) = V_{\mathbb{C}}(-\Theta)$, et donc $-\Theta$ est aussi un poids infinitésimal de $V_{\mathbb{C}}$. On peut voir de la même manière que si θ est un poids global de $V_{\mathbb{C}}$, alors $\overline{\theta}$ est aussi un poids global de $V_{\mathbb{C}}$.*

Définition 1.2.24 *Soit G un groupe de Lie compact. Un sous-groupe T de G est dit un tore de G s'il est un sous-groupe compact, connexe et abélien de G.*

Lemme 1.2.25 *Un groupe de Lie G compact et connexe contient un tore maximal. Un tore T de G est maximal si et seulement si, T est un sous-groupe abélien connexe maximal de G.*

Soit G un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal de G. On désigne par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et par $\mathfrak{t}$ celle de T.

Définition 1.2.26 *On désigne aussi par Ad, la restriction de la représentation adjointe de G au tore maximal T, et par ad, la restriction de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T. Un poids global (resp. infinitésimal, infinitésimal complexe, ou réel) de $\mathfrak{g}$ (i.e. de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, d'après la remarque 1.2.21) non trivial s'appelle une racine globale (resp. infinitésimale, infinitésimale complexe, ou réelle) du groupe G.*

Dans la suite on n'utilisera que la notion des racines réelles. Pour $V = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on note $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace $V(2\pi i\alpha)$, où $2\pi i\alpha$ est soit le poids trivial, soit une racine infinitésimale. On désigne par Δ_G l'ensemble des racines réelles de G. D'après la proposition 1.2.22, on a la décomposition :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_G} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{1.1}$$

1.2.2 Anneau des caractères

On désigne par G un groupe de Lie compact et par V un G-module complexe.

Définition 1.2.27 *Le caractère du G-module V est la fonction :*

$$\begin{aligned} \chi_V : \quad G &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto Tr(\rho(g)) \end{aligned}$$

Le caractère d'une représentation irréductible s'appelle un caractère irréductible.

La fonction χ vérifie les propriétés :

$$\begin{aligned} \chi_{V\oplus W} &= \chi_V + \chi_W \\ \chi_{V\otimes W} &= \chi_V{\cdot}\chi_W \end{aligned}$$

Ainsi, on définit l'anneau $R(G) = R(G, \mathbb{C})$, des fonctions définies sur G, à valeurs complexes, comme étant le groupe additif, engendré par les caractères des représentations complexes. Les caractères des représentations irréductibles sont linéairement indépendants et engendrent $R(G)$. Comme $\chi_V.\chi_W = \chi_{V\otimes W}$, le groupe est stable par multiplication. En fait, $R(G)$ est un anneau commutatif avec comme élément unité le caractère de la représentation triviale de G dans $\mathbb{C}$. C'est un sous-anneau de l'anneau des fonctions C^∞, définies sur G, à valeurs complexes. L'anneau $R(G)$ est dit l'anneau des caractères des représentations complexes de G, ses éléments sont appelés les caractères virtuels.

1.2.3 Groupe de Weyl

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de G, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{t}$ celle de T.

On désigne par $N = N(T)$ le normalisateur de T dans G, i.e.

$$N = N(T) = \{g \in G;\ gTg^{-1} = T\} = \{g \in G;\ gTg^{-1} \subset T\}.$$

N est un sous-groupe compact de G.

Définition 1.2.28 *Le groupe de Weyl du groupe G, associé à T, est $W = N/T$.*

Propriétés 1.2.29 *Le groupe de Weyl a les propriétés suivantes :*

- *W agit sur T par conjugaison par les éléments de N. Il agit sur $\mathfrak{t}$ par Ad et sur $\mathfrak{t}^*$, le dual de $\mathfrak{t}$, par $(w.\alpha)(H) = \alpha(w^{-1}(H))$ pour $w \in W$, $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ et $H \in \mathfrak{t}$.*
- *W est un groupe fini.*

Théorème 1.2.30 *Deux tores maximaux dans un groupe de Lie compact connexe G sont conjugués et tout élément de G appartient à un tore maximal.*

Conséquence 1.2.31 *Soit G un groupe de Lie compact connexe. On a :*

- *Les groupes de Weyl de G sont tous isomorphes.*
- *Tous les tores maximaux de G ont la même dimension. On appelle cette dimension le rang du groupe G.*
- *L'action du groupe de Weyl sur le tore maximal est effective, i.e. l'homomorphisme $W \to GL(T)$ défini par l'action de W sur T est injectif. Ainsi, on peut considérer le groupe de Weyl comme un groupe d'automorphismes de T.*
- *La restriction au tore maximal des fonctions de l'anneau des caractères $R(G)$ induit un homomorphisme injectif :*

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \to & R(T)^W \\ \chi & \mapsto & \chi|_T, \end{array}$$

  où $R(T)^W$ est le sous-ensemble de $R(T)$ invariant par W, et l'action de W sur $R(T)$ est donnée par :

$$w.f = f \circ w^{-1}, \quad \text{pour } w \in W \text{ et } f \in R(T).$$

Définition 1.2.32 *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Un élément de G est dit singulier s'il est dans l'intersection de deux tores maximaux distincts. Un élément qui n'est pas singulier est dit régulier.*

1.2.4 Systèmes de racines et chambres de Weyl d'un espace vectoriel

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie. On introduit les systèmes de racines, les bases (ou systèmes de racines simples) et les chambres de Weyl de E, et on explicite la correspondance entre les chambres de Weyl et les bases.

Définition 1.2.33 *Soit α un vecteur non nul de E. Une symétrie associée à α est un automorphisme s de E, qui laisse fixes les points d'un certain hyperplan $H \subset E$, et envoie α sur $-\alpha$.*

Définition 1.2.34 *Un sous-ensemble fini R de E est dit un système de racines (réduit) dans E s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *R engendre E et ne contient pas 0.*

(ii) *Si $\alpha, \beta \in R$ sont proportionnels, alors $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$.*

(iii) *A chaque vecteur $\alpha \in R$ correspond une symétrie s_α qui envoie R dans lui même.*

(iv) *$s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α, pour tout $\alpha, \beta \in R$.*

La dimension de E s'appelle le rang du système des racines, et les éléments de R s'appellent les racines.

Soit α une racine, s_α l'unique symétrie associée à α et H_α l'hyperplan de E dont les points sont fixés par s_α.

Définition 1.2.35 *Le groupe de Weyl d'un système des racines R dans E est le sous-groupe $\mathcal{W}$ de $GL(E)$, engendré par les symétries s_α, $\alpha \in R$.*

On considère les hyperplans H_α, $\alpha \in R$. Ils divisent E en un nombre fini de régions convexes. On appelle ces régions les chambres de Weyl du système des racines R. Ce sont donc les composantes connexes de $E \setminus \cup_{\alpha \in R} H_\alpha$. Les murs d'une chambre de Weyl C sont les sous-ensembles de $\overline{C} \cap H_\alpha$ non réduits à $\{0\}$.

Définition 1.2.36 *Soit R un système de racines. Un sous-ensemble $S \subset R$ est dit une base ou un système de racines simples si les éléments de S sont linéairement indépendants dans E et toute racine $\beta \in R$ s'écrit $\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha . \alpha$ où les m_α sont des entiers de même signe. Les éléments de S s'appellent les racines simples.*

Définition 1.2.37 *Soit R un système de racines et $R' \subset R$. Un élément de R' est dit décomposable dans R', s'il s'écrit comme la somme de deux ou plusieurs éléments de R'. Dans le cas contraire, il est dit indécomposable.*

La proposition donnée ci-dessous implique l'existence d'une base d'un système de racines.

Soit S une base fixée, alors R est la réunion disjointe de R_+ et R_-, où R_+ est l'ensemble des racines β avec coefficients $m_\alpha \geq 0$ et R_- celui des racines β avec coefficients $m_\alpha \leq 0$. Les éléments de R_+ (resp. R_-) sont dits les racines positives (resp. négatives). La base S est l'ensemble des racines positives indécomposables.

Réciproquement, si on écrit R comme la réunion de R_+ et de R_- où pour toute racine α, R_+ contient un seul élément de $\{\alpha, -\alpha\}$ et R_- contient l'autre. Si on désigne par S l'ensemble d'éléments indécomposables de R_+, alors S est une base de R.

Proposition 1.2.38 *L'ensemble des chambres de Weyl du système des racines R est en bijection avec l'ensemble des bases de R.*

- *Si C est une chambre de Weyl, on lui associe l'ensemble des racines positives :*

$$R_+(C) = \{\alpha \in R;\ \langle \alpha, u \rangle > 0,\ \forall u \in C\},$$

et la base $S(C)$ formée des éléments indécomposables de $R_+(C)$.

- *Réciproquement, si S est une base de R, on lui associe la chambre de Weyl :*

$$C(S) = \{u \in E;\ \langle \alpha, u\rangle > 0,\ \forall \alpha \in S\},$$

dont les murs sont les $\overline{C}(S) \cap \ker(\alpha)$, $\alpha \in S$. $C(S)$ s'appelle la chambre de Weyl fondamentale associée à S.

Conséquence 1.2.39 *Le choix d'un système de racines positives équivaut au choix d'une base ou d'une chambre de Weyl fondamentale.*

Corollaire 1.2.40

(i) Le groupe de Weyl est engendré par les réflexions simples, i.e. les réflexions s_α, $\alpha \in S$.

(ii) Le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl et toute racine est un élément d'une certaine base.

1.2.5 Chambres de Weyl de $\mathfrak{t}$

On reprend les résultats du paragraphe précédent dans le cas particulier où $E = \mathfrak{t}$.

Soit Δ_G l'ensemble des racines réelles de G relativement au tore maximal T défini dans le paragraphe précédent. On reprend la décomposition donnée par (1.1) :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_G} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On peut montrer que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, l'algèbre complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$.

Soit Δ_G^+ un sous-ensemble de Δ_G tel que pour toute racine α de Δ_G, l'ensemble Δ_G^+ contienne un seul élément de $\{\alpha, -\alpha\}$ (remarque 1.2.23). Pour tout $\alpha \in \Delta_G^+$, on pose $\mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$ (donc $(\mathfrak{u}_\alpha)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$). On a alors la décomposition suivante de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_G^+} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Les espaces $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{u}_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta_G^+$, s'appellent les composants isotypiques de la représentation adjointe de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$.

Définitions 1.2.41 *Pour tout $\alpha \in \Delta_G^+$, soit $\mathcal{H}_\alpha = \ker \alpha$.*

(i) Les hyperplans $\mathcal{H}_\alpha$ découpent $\mathfrak{t}$ en un nombre fini de régions convexes. Ce sont les ensembles non vides de la forme :

$$\{H \in \mathfrak{t};\ \varepsilon_\alpha.\alpha(H) > 0,\ \forall \alpha \in \Delta_G^+\}$$

où $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Ces régions sont dites les chambres de Weyl de $\mathfrak{t}$.

(ii) Les murs d'une chambre de Weyl C sont les sous-ensembles $\overline{C} \cap \mathcal{H}_\alpha$, qui ne sont pas réduits à $\{0\}$.

On choisit un produit scalaire euclidien $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$, invariant par l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ (lemme 1.2.10). Le groupe de Weyl W est ainsi vu comme un groupe de transformations orthogonales de $\mathfrak{t}$ relativement à ce produit scalaire. Chaque hyperplan $\mathcal{H}_\alpha$ détermine une réflexion σ_α de $\mathfrak{t}$. C'est la transformation orthogonale non triviale de $\mathfrak{t}$ qui laisse les points de $\mathcal{H}_\alpha$ fixes. L'application

$$\begin{aligned} k : \mathfrak{t} &\to \mathfrak{t}^* \\ H &\mapsto \langle H, . \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme W-équivariant.

On peut donc identifier $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$ par k en tant que W-modules.

Les chambres de Weyl de $\mathfrak{t}$ vont être identifiées à des parties de $\mathfrak{t}^*$ par cet isomorphisme.

Propriétés 1.2.42 *Soit W le groupe de Weyl de G.*

(i) Les réflexions σ_α par rapport aux hyperplans $\mathcal{H}_\alpha$ sont des éléments de W.

(ii) Les réflexions par rapport aux murs d'une chambre de Weyl donnée C de $\mathfrak{t}$ engendrent W.

(iii) Le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl, i.e. pour tout couple (C_1, C_2) de chambres de Weyl de $\mathfrak{t}$, il existe un unique $w \in W$ tel que $w(C_1) = C_2$.

Théorème 1.2.43 *Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de G et Δ_G l'ensemble des racines réelles de G relativement à T. Soit $E \subset \mathfrak{t}^*$ le sous-espace engendré par Δ_G. L'ensemble Δ_G est alors un système de racines dans E au sens de la définition 1.2.34. Le groupe de Weyl W de G relativement à T, vu comme un sous-groupe de $GL(E)$, est le même que le groupe de Weyl de ce système de racines, défini dans 1.2.35.*

Soit Z le centre de G et Z_0 la composante neutre de Z et $\mathfrak{z}$ son algèbre de Lie. On pose $S = T/Z_0$ et on désigne par $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ s'écrit alors $\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$. D'autre part, on peut montrer que $\mathfrak{z} = \cap_{\alpha \in \Delta_G} \mathcal{H}_\alpha$, ainsi $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{z}^* \oplus E$, où E est le sous-espace de $\mathfrak{t}^*$ engendré par Δ_G.

Définition 1.2.44 *Un groupe de Lie est dit semi-simple s'il n'a aucun sous-groupe abélien normal connexe non trivial.*

Remarque 1.2.45 *Un groupe de Lie compact connexe est semi-simple si et seulement si son centre est fini.*

Conséquence 1.2.46 *Si G est un groupe de Lie compact, connexe et semi-simple et T un tore maximal de G, alors le système de racines Δ_G de G relativement à T, est un système de racines de $\mathfrak{t}^*$ au sens de la définition 1.2.34.*

On considère l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{t} \to T$. Soit I son noyau ; I s'appelle le réseau entier. Le groupe

$$I^* = \{\alpha \in \mathfrak{t}^*;\ \alpha I \subset \mathbb{Z}\}, \tag{1.2}$$

est dit le réseau des formes entières.

Une forme entière dominante est par définition un élément de I^* qui est à l'intérieur ou dans la frontière de la chambre de Weyl fondamentale (pour un choix d'un système des racines simples).

1.2.6 Caractères et poids irréductibles

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe de Lie compact et connexe, T un tore maximal de G, W le groupe de Weyl de G relativement à T et $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. On fixe un produit scalaire W-invariant $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$. Δ_G désigne l'ensemble des racines réelles de T et C une chambre de Weyl fondamentale de $\mathfrak{t}$, qu'on considère comme une partie de $\mathfrak{t}^*$. Cette chambre de Weyl détermine une base S et un ensemble des racines positives noté Δ_G^+. Le réseau I^* des formes entières est une partie de $\mathfrak{t}^*$ et les racines sont dans I^*. On décrit la bijection entre les caractères irréductibles et les poids dominants de G, donnée par la formule des caractères de Weyl. Ensuite, on énonce la formule due à Steinberg qui permet de décomposer un produit tensoriel de deux G-modules irréductibles en sous-G-modules irréductibles.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e(x) = e^{2\pi i x} \in S^1$. Soit α un poids réel et θ_α le poids global correspondant. On considère

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &\to S^1 \\ H &\mapsto \theta_\alpha \circ \exp(H) = e^{2\pi i \alpha(H)} = e(\alpha(H)) \end{aligned}$$

i.e. $\Theta_\alpha \circ \exp = e \circ \alpha = e(\alpha)$. Autrement dit, si $\eta = 2\pi i \alpha$ est le poids infinitésimal correspondant à α, alors $e(\alpha) = e^\eta$.

On va définir l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{t}$. Pour tout $\alpha \in \Delta_G^+$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose $L_{\alpha n} = \alpha^{-1}(n)$ et :

$$\mathfrak{t}_s = \cup_{\alpha,n} L_{\alpha n}.$$

$\mathfrak{t}_s$ est dit le diagramme de Stiefel. C'est l'image réciproque par l'application exponentielle de l'ensemble des éléments singuliers de T (définition 1.2.32). Le complémentaire $\mathfrak{t}_r$ de $\mathfrak{t}_s$ dans $\mathfrak{t}$ est dit l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{t}$.

Définition 1.2.47 *Une fonction $\phi : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ ou $\phi : T \to \mathbb{C}$ est dite symétrique si $\phi \circ w = \phi$ pour tout $w \in W$. Elle est dite alternée si $\phi \circ w = \det w.\phi$ pour tout $w \in W$.*

Définition 1.2.48 *Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ une forme linéaire. On définit la somme alternée de λ comme étant la fonction*

$$\xi(\lambda) : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}, \quad avec \quad \xi(\lambda)(H) = \sum_{w \in W} det(w).e(\lambda(w(H))),\ \forall H \in \mathfrak{t}.$$

Lemme 1.2.49 *Le groupe abélien des fonctions alternées sur $\mathfrak{t}$ à valeurs complexes, de la forme $\sum_j n_j.e(\lambda_j)$, $\lambda_j \in \mathfrak{t}^*$, $n_j \in \mathbb{Z}$, est libre engendré par les $\xi(\gamma)$, $\gamma \in C$.*

On pose :

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_G = \sum_{\alpha\in\Delta_G^+} \alpha/2 \\ \rho &= \prod_{\alpha\in\Delta_G^+} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)) \\ c(\lambda) &= \frac{\xi(\lambda)}{\rho} \quad \text{pour } \lambda \in \mathfrak{t}^*\end{aligned}$$

$\rho : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ est une fonction alternée et $\rho(H)$ est non nul si H est régulier dans $\mathfrak{t}$. Ainsi, la fonction $c(\lambda)$ est continue sur $\mathfrak{t}_r$.

Proposition 1.2.50 *Soit $\gamma \in I^*$ une forme entière sur $\mathfrak{t}$. La fonction $c(\gamma+\delta)$ s'étend en une fonction continue sur $\mathfrak{t}$ qui se factorise par l'application exponentielle* $\exp : \mathfrak{t} \to T$. *Ceci définit une fonction symétrique dans l'anneau des caractères $R(T)$ du tore, qu'on note aussi $c(\gamma+\delta)$.*

Proposition 1.2.51 *(Formule des caractères de Weyl)*

Soit $Irr(G,T) \subset R(T)$, l'ensemble des caractères irréductibles de G restreints au tore maximal T.

(i) Si γ est une forme entière telle que $\langle\gamma,\alpha\rangle \geq 0$ pour toute racine positive α, i.e. $\gamma \in I^* \cap \overline{C}$, alors $c(\gamma+\delta) \in Irr(G,T)$.

(ii) L'application $\gamma \mapsto c(\gamma+\delta)$ est une bijection de $I^* \cap \overline{C}$ sur $Irr(G,T)$.

(iii)

$$\rho = \xi(\delta).$$

Ainsi, d'après (ii), la forme entière dominante 0 *correspond au caractère* 1 *de la représentation triviale de G.*

(iv) Si $\gamma \in I^* \cap \overline{C}$, la dimension de la représentation irréductible correspondante est :

$$\prod_{\alpha\in\Delta_G^+} \frac{\langle\alpha,\gamma+\delta\rangle}{\langle\alpha,\delta\rangle}.$$

On rappelle que la restriction $R(G) \to R(T)^W$, $\chi \mapsto \chi|_T$, est injective (conséquence 1.2.31). Donc, pour $\gamma \in I^* \cap \overline{C}$, $c(\gamma+\delta)$ est la restriction d'un seul caractère irréductible de G.

La formule de caractère de Weyl donne ainsi une bijection entre les formes entières dominantes et les représentations irréductibles de G. Mais si χ est un caractère irréductible de G, on ne sait pas encore caractériser la forme entière γ dans $I^* \cap \overline{C}$ en fonction de χ. Pour le faire, on définit un certain ordre partiel sur $\mathfrak{t}^*$, et on montre que γ est le poids réel de la représentation donnée, qui est maximal pour cet ordre.

Définition 1.2.52 *Pour γ, $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, on dit que $\gamma \leq \lambda$ si et seulement si*

$$\langle\gamma,\tau\rangle \leq \langle\lambda,\tau\rangle, \quad \forall\tau \in C.$$

$\leq$ est réflexive et elle est compatible avec les opérations algébriques :

$$\begin{aligned}\gamma &\leq \lambda \text{ et } \mu \leq \nu \Rightarrow \gamma+\mu \leq \lambda+\nu \\ \gamma &\leq \lambda \text{ et } r \in \mathbb{R} \Rightarrow r.\gamma \leq r.\lambda \\ \gamma &\leq \lambda \Rightarrow -\lambda \leq -\gamma.\end{aligned}$$

On écrit $\gamma < \lambda$ lorsque $\gamma \leq \lambda$ et $\gamma \neq \lambda$.

Proposition 1.2.53 *Si $\gamma \in \overline{C}$ et $w \in W$, alors $w(\gamma) \leq \gamma$, avec égalité si et seulement si, $w = 1$.*

Remarque 1.2.54 *Les racines positives sont des formes positives par rapport à l'ordre partiel $\leq$ défini sur $\mathfrak{t}^*$.*

Définition 1.2.55 *Soit $\gamma \in \mathfrak{t}^*$. On définit sur $\mathfrak{t}$ la fonction complexe $S(\gamma) = \sum_{\lambda \in W\gamma} e(\lambda)$. Cette fonction $S(\gamma)$ est dite la somme symétrique de γ. Ici $W\gamma$ désigne l'orbite de γ pour l'action de W sur $\mathfrak{t}^*$.*

Proposition 1.2.56

(i) Soit $\gamma \in \overline{C} \cap I^*$, alors :

$$c(\gamma+\delta) = S(\gamma) + \sum_j n_j S(\gamma_j), \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_j \in I^* \cap \overline{C} \quad et \quad \gamma_j < \gamma.$$

(ii) Une représentation irréductible a un plus grand poids réel λ dans $\overline{C}$ relativement à $\leq$. L'espace formé des éléments de poids λ est de dimension 1.

Conclusion : Soit V un G-module irréductible ayant pour caractère $\chi(\gamma)$, caractérisé par, $\chi(\gamma)|_T = c(\gamma+\delta)$. D'après les propositions 1.2.53 et 1.2.56, ce G-module a pour plus grand poids γ. Ainsi, le plus grand poids d'un G-module irréductible relativement à l'ordre $\leq$ (qui est aussi une forme entière dominante d'après la proposition 1.2.56) le détermine complètement. Ce plus grand poids s'appelle aussi le poids dominant du G-module V.

On introduit l'anneau $\mathbb{Z}[I^*]$, engendré par le groupe abélien I^* sur $\mathbb{Z}$. On note $e(\lambda)$, l'élément de la base de $\mathbb{Z}[I^*]$ qui correspond à l'élément $\lambda \in I^*$, avec multiplication donnée par $e(\lambda+\mu) = e(\lambda).e(\mu)$.

Remarque 1.2.57 *Si $x = e(\lambda) \in \mathbb{Z}[I^*]$, alors x est inversible dans $\mathbb{Z}[I^*]$ et $x^{-1} = e(-\lambda)$.*

Soit V un G-module. Il peut être considéré comme un T-module par restriction. Si X est un élément de $\mathfrak{t}$, la trace de $\exp(X)$ sur le T-module V est $\sum m_\alpha \Theta_\alpha \circ \exp(X) = \sum_\alpha m_\alpha e(\alpha(X))$. Donc par restriction à T, les caractères de G définissent des éléments de $\mathbb{Z}[I^*]$.

On définit une fonction p sur I^* de la façon suivante : si τ est dans I^*, $p(\tau)$ est le nombre de façons d'écrire τ sous la forme $\sum n_\alpha.\alpha$, où les n_α sont des entiers positifs, et la somme porte sur toutes les racines positives du groupe G.

Proposition 1.2.58 *(Formule de multiplicité de Steinberg)*
Soit $V(\gamma)$ et $V(\lambda)$ deux G-modules irréductibles des plus grands poids γ et λ et de caractères $\chi(\gamma)$ et $\chi(\lambda)$ respectivement. Le produit tensoriel $V(\gamma) \otimes V(\lambda)$ se décompose en une somme de sous-modules irréductibles de la façon suivante :

$$\chi(\gamma).\chi(\lambda) = \sum_{\mu \in \overline{C} \cap I^*} m(\gamma, \lambda, \mu)\chi(\mu),$$

avec

$$m(\gamma, \lambda, \mu) = \sum_{v,w \in W} det(v.w).p(v(\gamma + \delta) + w(\lambda + \delta) - (\mu + 2\delta)).$$

On appelle $m(\gamma, \lambda, \mu)$ la multiplicité du G-module irréductible $V(\mu)$ dans $V(\gamma) \otimes V(\lambda)$.

1.3 Algèbres de Lie

On va définir et décrire certaines propriétés des algèbres de Lie semi-simples, des algèbres de Lie compactes et des sous-algèbres de Cartan. Pour plus de détails sur les résultats décrits dans ce paragraphe, on pourra consulter les références [6], [18], [23] et [24].

1.3.1 Algèbres de Lie semi-simples

Dans cette partie, F désigne un corps de caractéristique 0, V désigne un espace vectoriel de dimension finie sur F et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur F avec crochet de Lie $[\ ,\ ]$.

On pose :

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}],$$

et

$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{i} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}].$$

Définitions 1.3.1

(i) On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^{(n)} = (0)$.

(ii) On dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente s'il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^{n} = (0)$.

(iii) L'idéal résoluble maximal de $\mathfrak{g}$ (existe) s'appelle le radical de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie non triviale est dite semi-simple si elle est sans radical.

Remarque 1.3.2 $\mathfrak{g}$ *est semi-simple si, et seulement si tout idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est nul. En particulier, le centre d'une algèbre de Lie semi-simple est trivial.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. On définit sur $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique B_ρ par :

$$B_\rho(X, Y) = \mathrm{Tr}(\rho(X) \circ \rho(Y)) \text{ pour tout } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Elle vérifie :

$$B_\rho(X,[Y,Z]) = B_\rho(Z,[X,Y]) = B_\rho(Y,[Z,X]) \text{ pour tout } X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

Lemme 1.3.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et ρ est fidèle, alors la forme B_ρ est non dégénérée.*

Définition 1.3.4 *On appelle forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ la forme bilinéaire B_ρ dans le cas particulier où ρ est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.*

Elle a la propriété suivante :

$$B(\sigma(X),\sigma(Y)) = B(X,Y) \text{ pour tout } \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ et } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Théorème 1.3.5

(i) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing B est non dégénérée.

(ii) Soit G un groupe de Lie de dimension finie. Le groupe G est semi-simple si et seulement si son algèbre de Lie est semi-simple.

1.3.2 Algèbres de Lie compactes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $GL(\mathfrak{g})$ est le groupe des endomorphismes non singuliers de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Lie de $GL(\mathfrak{g})$. Soit $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Définition 1.3.6 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$.*

(i) On appelle groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ le sous-groupe analytique Int$(\mathfrak{g})$ de $GL(\mathfrak{g})$ ayant ad$(\mathfrak{g})$ comme algèbre de Lie.

(ii) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite compacte si le groupe adjoint Int$(\mathfrak{g})$ est compact.

On rappelle que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. C'est un sous-groupe fermé de $GL(\mathfrak{g})$, il a donc une unique structure analytique pour laquelle il est un sous-groupe de Lie topologique de $GL(\mathfrak{g})$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$, le groupe adjoint $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ est la composante neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. En particulier, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe topologique fermé de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Proposition 1.3.7 *[23] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle.*

(i) Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Alors $\mathfrak{g}$ est compacte si et seulement si sa forme de Killing est définie strictement négative.

(ii) Si $\mathfrak{g}$ est compacte, alors elle s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semi-simple et compacte.

(iii) $\mathfrak{g}$ *est compacte si et seulement si, il existe un groupe de Lie compact dont l'algèbre de Lie est isomorphe à* $\mathfrak{g}$.

(iv) $\mathfrak{g}$ *est compacte si et seulement si, elle admet une forme bilinéaire symétrique invariante, négative et non dégénérée.*

1.3.3 Sous-algèbres de Cartan

Définition 1.3.8 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. On appelle sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre nilpotente de* $\mathfrak{g}$ *égale à son normalisateur.*

Théorème 1.3.9 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie compacte. Les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont ses sous-algèbres abéliennes maximales. En particulier,* $\mathfrak{g}$ *est la réunion de ses sous-algèbres de Cartan. Le groupe* $Int(\mathfrak{g})$ *opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Conséquence 1.3.10 *Soit* G *un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie (compacte réelle)* $\mathfrak{g}$. *Les algèbres de Lie des tores maximaux de* G *sont les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

1.4 Espaces symétriques

On définit tout d'abord un espace symétrique et une paire symétrique puis on décrit la correspondance entre les deux notions. On définit ensuite un espace symétrique de type compact. Les résultats énoncés dans ce paragraphe se trouvent dans les références [23], [41] et [42].

1.4.1 Espaces symétriques

(M, g) désigne une variété riemannienne avec une métrique riemannienne g.

Soit $p \in M$ et N_p un voisinage normal de p. On désigne par Exp_p l'application exponentielle de M au point p. Le difféomorphisme de N_p donné par :

$$\sigma_p = \mathrm{Exp}_p \circ (-I_p) \circ \mathrm{Exp}_p^{-1},$$

est dit la symétrie géodésique au point p. C'est l'isométrie de M qui fixe p et dont l'application tangente en p est $-I_p$. Ici I_p désigne l'identité de l'espace T_pM. L'application σ_p est une involution. On rappelle qu'une application non triviale est dite une involution si son carré est égal à l'identité.

Définition 1.4.1 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne.*

(i) La variété (M, g) *est dite un espace localement symétrique si pour tout* $p \in M$ *il existe un voisinage normal de* p *sur lequel la symétrie géodésique en* p *est une isométrie.*

(ii) La variété (M, g) *est dite un espace symétrique si tout point* $p \in M$ *est un point fixe isolé d'une isométrie involutive* s_p *de* M.

On peut montrer que s_p n'est autre que la symétrie géodésique σ_p en p. Ainsi, un espace symétrique est localement symétrique. Réciproquement, on peut montrer qu'un espace localement symétrique, simplement connexe et complet est symétrique.

Proposition 1.4.2 *Soit (M, g) un espace symétrique, alors on a :*

(i) La variété (M, g) est complète.

(ii) (M, g) est un espace homogène.

(iii) Le revêtement universel de (M, g) est un espace symétrique.

1.4.2 Paires symétriques

Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Supposons que σ est une involution non triviale de G. On définit un sous-groupe fermé G_σ de G par :

$$G_\sigma = \{g \in G;\ \sigma(g) = g\}.$$

On désigne par $(G_\sigma)_0$ la composante neutre de G_σ. On choisit un sous-groupe fermé K de G qui vérifie :

(1) $(G_\sigma)_0 \subset K \subset G_\sigma$.

(2) $\mathrm{Ad}_\mathfrak{g}(K)$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathfrak{g})$.

Soit σ_{*e} la différentielle de σ en e. C'est un automorphisme non trivial de $\mathfrak{g}$. D'après la propriété (1), l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K est donnée par :

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X) = X\}.$$

On pose :

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X) = -X\}.$$

On obtient la décomposition suivante de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{avec les propriétés } [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \text{ et } [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}.$$

Puisque $K \subset G_\sigma$, $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. On peut donc choisir un produit scalaire g sur $\mathfrak{m}$ invariant par l'action adjointe de K.

Une paire (G, K) où K vérifie les propriétés (1) et (2) pour un certain choix de σ, avec un choix d'un produit scalaire g sur $\mathfrak{m}$ invariant par K, s'appelle une paire symétrique.

Si de plus tout sous-groupe normal de G, contenu dans K, est trivial, la paire (G, K) est dite effective.

1.4.3 Espace symétrique associé à une paire symétrique

Soit (G, K) une paire symétrique avec une involution σ de G et un produit scalaire g sur $\mathfrak{m}$. On pose $M = G/K$. On va construire une métrique riemannienne sur M qui en fait un espace symétrique. On identifie K à un point o de M. Soit π la projection canonique de G sur M. L'action de G sur M est donnée par $\tau_a(\pi(b)) = \pi \circ L_a(b)$, pour $a, b \in G$.

L'application τ_a ($a \in G$) est un difféomorphisme de M. L'application $a \mapsto \tau_a$ est injective si et seulement si, la paire (G, K) est effective.

L'application tangente π_{*e} est surjective et a pour noyau $\mathfrak{k}$, on identifie donc les espaces $\mathfrak{m}$ et T_oM au moyen de π_{*e}. Ainsi, pour tout $k \in K$, on a :

$$(\tau_k)_{*o} = \mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{m}} \quad \text{(noté aussi } \mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}}k).$$

Puisque g est K-invariante, on peut l'étendre en une métrique riemannienne sur M d'une manière unique :

$$g_{\pi(a)}(X,Y) = g((\tau_a)_{*o}^{-1}(X), (\tau_a)_{*o}^{-1}(Y)), \quad \text{pour } a \in G \text{ et } X, Y \in T_{\pi(a)}M.$$

La variété riemannienne ainsi construite est un espace symétrique.

1.4.4 Paire symétrique associée à un espace symétrique

D'après la proposition 1.4.2, un espace symétrique est homogène, il est donc difféomorphe à l'espace quotient G/K d'un groupe de Lie connexe G par un sous-groupe fermé K. On va donner un exemple de couple (G, K) qui soit une paire symétrique.

Soit (M, g) un espace symétrique. Soit $I(M)$ le groupe des isométries de M et $G = I_0(M)$ la composante neutre de $I(M)$. Le groupe G agit transitivement sur M, d'après la proposition 1.4.2. On fixe un point o de M et on pose :

$$K = \{a \in G;\ a(o) = o\}.$$

K est un sous-groupe compact de G. L'espace quotient G/K s'identifie à M par $aK \mapsto a(o)$ pour tout a dans G. Si σ_o est la symétrie au point $o \in M$, on pose :

$$\sigma(a) = \sigma_o a \sigma_o^{-1}, \quad \text{pour } a \in G.$$

σ est un automorphisme involutif de G. On pose :

$$G_\sigma = \{a \in G;\ \sigma(a) = a\} = \{a \in G;\ \sigma_o a = a\sigma_o\}.$$

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{k}$ celle de K, on montre que :

(1) $(G_\sigma)_0 \subset K \subset G_\sigma$, où $(G_\sigma)_0$ est la composante neutre de G_σ.

(2) $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}K$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathfrak{g})$.

Soit σ_{*e} la différentielle de σ en e et $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g};\ \sigma_{*e}(X) = -X\}$. On peut identifier $\mathfrak{m}$ et T_oM d'après (1), donc $\mathfrak{m} \neq \{0\}$ et σ n'est pas triviale.

On pose $g(X,Y) = g_o(X,Y)$, pour $X, Y \in \mathfrak{m} = T_oM$. Par la G-invariance de la métrique riemannienne g, on a :

$$g(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = g(X,Y), \quad \text{pour } k \in K \text{ et } X, Y \in \mathfrak{m}.$$

On obtient une paire symétrique (G, K) associée à (M, g). Elle est effective parce que l'action de G sur M est effective (i.e. fidèle). L'espace symétrique associé à la paire (G, K), par le procédé du paragraphe précédent, n'est autre que (M, g).

1.4.5 Espaces symétriques de type compact

Définition 1.4.3 *On appelle algèbre de Lie symétrique orthogonale toute paire* $(\mathfrak{g}, \theta)$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{R}$.

(ii) θ *est un automorphisme involutif de* $\mathfrak{g}$.

(iii) L'ensemble des points fixes $\mathfrak{k}$ *de* θ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *telle que le sous-groupe de* $Int(\mathfrak{g})$ *d'algèbre de Lie* $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ *soit compact.*

Soit $\mathfrak{z}$ *le centre de* $\mathfrak{g}$. *Si de plus* $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = (0)$, *on dit que* $(\mathfrak{g}, \theta)$ *est effective.*

Définition 1.4.4 *Soit* $(\mathfrak{g}, \theta)$ *une algèbre de Lie symétrique, orthogonale et effective. Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ *la décomposition de* $\mathfrak{g}$ *en espaces propres de* θ *associés aux valeurs propres 1 et -1. Si* $\mathfrak{g}$ *est compacte et semi-simple, on dit que* $(\mathfrak{g}, \theta)$ *est de type compact.*

Le paragraphe précédent implique qu'un espace symétrique induit une algèbre de Lie symétrique orthogonale effective. Par définition, un espace symétrique est de type compact si l'algèbre symétrique orthogonale effective qu'il induit est de type compact.

1.5 Opérateur de Casimir

Dans cette partie, on donne la définition d'une algèbre enveloppante qui sert à définir l'opérateur de Casimir. On décrit ensuite les valeurs propres de l'opérateur de Casimir données par la Formule de Freudenthal et la réciprocité de Frobenius. Les résultats sont tirés des références [6], [18], [23] et [24].

1.5.1 Algèbre enveloppante universelle

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie arbitraire sur un corps F. Une algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ est une paire $(\mathfrak{U}, i)$ tel que :

1. $\mathfrak{U}$ est une algèbre associative unitaire et $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}$ est une application linéaire telle que :
$$i([X,Y]) = i(X)i(Y) - i(Y)i(X) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

2. Pour tout couple $(\mathfrak{V}, j)$ tel que $\mathfrak{V}$ est une algèbre associative unitaire et j est une application linéaire $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{V}$ vérifiant :
$$j([X,Y]) = j(X)j(Y) - j(Y)j(X) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$
il existe un unique homomorphisme d'algèbres unitaires :
$$\phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V} \ \text{ tel que } \ \phi \circ i = j.$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Par définition, $\mathfrak{T}(\mathfrak{g}) = \amalg_{i=0}^{\infty} \otimes^i \mathfrak{g}$. C'est une algèbre graduée associative unitaire. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal bilatère de $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme :

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y], \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

On pose :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{g})/\mathfrak{J}.$$

On peut montrer que $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est l'unique algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$.
On désigne par i la projection canonique de $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Proposition 1.5.1 *[23] Soit V un espace vectoriel sur F. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des représentations de $\mathfrak{g}$ dans V et celui des représentations de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans V. Si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V et ρ^* la représentation correspondante de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans V, alors :*

$$\rho(X) = \rho^*(i(X)), \quad \textit{pour } X \in \mathfrak{g}.$$

1.5.2 Opérateur de Casimir

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps F et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante universelle. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de dimension finie n de $\mathfrak{g}$ et b une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, dont la restriction à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée. Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{h}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ la base duale relativement à b, i.e. $b(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On rappelle que la base duale existe parce que b est non dégénérée sur $\mathfrak{h}$. L'élément $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ appartient au centre de $\mathfrak{g}$ et ne dépend pas du choix de la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Considérons le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie n et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$. La forme bilinéaire B_ρ associée à ρ est invariante et non dégénérée d'après le lemme 1.3.3. On peut alors définir l'opérateur $\mathcal{C}_\rho$ d'une manière analogue à ce qui précède. L'élément $\mathcal{C}_\rho$ s'appelle l'élément de Casimir associé à la représentation ρ.

Plus particulièrement, si ρ est la représentation adjointe de l'algèbre de Lie semi-simple et de dimension finie $\mathfrak{g}$, on définit l'élément de Casimir $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Dans ce cas, la forme bilinéaire B_ρ est simplement la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. L'opérateur C_{ad} est aussi noté $\mathcal{C}_\mathfrak{g}$ ou $\mathcal{C}$. On l'appelle l'élément de Casimir de $\mathfrak{g}$.

Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$, alors en étendant ρ en une représentation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, l'endomorphisme $\rho(\mathcal{C})$ de V commute à tout élément de $\rho(\mathfrak{g})$. Donc, si ρ est irréductible, $\rho(\mathcal{C})$ est un scalaire. On peut montrer que $\rho(\mathcal{C})$ n'est pas nul lorsque la représentation ρ n'est pas triviale.

1.6 Laplacien et opérateur de Casimir

On commence ce paragraphe par définir les espaces qu'on va utiliser par la suite. Soit G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. On pose $M = G/K$ l'espace quotient.

1.6.1 Isomorphisme entre $C^\infty(\wedge^p M)$ et $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$

On commence par décrire les G-modules $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ et $C^\infty(\wedge^p M)$ puis on donne l'isomorphisme entre les deux.

- Soit U un espace vectoriel de dimension finie et $C^\infty(G, U)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G à valeurs dans U. L'espace $C^\infty(G, U)$ peut être muni d'une *structure de G-module* de la façon suivante :

  $$(g.f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{pour } g \in G, \ f \in C^\infty(G, U) \text{ et } x \in G.$$

  Supposons maintenant que U est un K-module de dimension finie. On désigne par $C^\infty(G, K, U)$ le sous-ensemble de $C^\infty(G, U)$ formé des fonctions f qui vérifient :

  $$f(gk) = k^{-1}f(g) \quad \text{pour } k \in K \text{ et } g \in G.$$

  On vérifie facilement que $C^\infty(G, K, U)$ est un sous-G-module de $C^\infty(G, U)$.
  Si on suppose que (G, K) est une paire symétrique et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, on identifie $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{m}$ en tant que K-modules par la représentation adjointe Ad. On désigne par Ad* l'action induite sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ et sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ et par Ad^{*p} celle induite sur $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$. Si on pose $U = \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$, on obtient que une *structure de G-module* sur $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$.
- Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ est un K-module (par exemple si (G, K) est une paire symétrique), on choisit un produit scalaire K-invariant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$; il induit une métrique riemannienne G-invariante sur M. Soit $\wedge^p M$ la p-ème puissance extérieure du fibré cotangent complexifié de M ; on étend la métrique riemannienne de M en une métrique hermitienne notée $\langle \ , \ \rangle$ de $\wedge^p M$. Soit $C^\infty(\wedge^p M)$ l'espace vectoriel des sections C^∞ du fibré $\wedge^p M$; il est muni d'une *structure de G-module* d'une façon naturelle :

  $$(g.\omega)(x) = g.\omega(g^{-1}x) \quad \text{pour } g \in G, \ \omega \in C^\infty(\wedge^p M) \text{ et } x \in M.$$

La proposition suivante décrit l'isomorphisme entre les deux G-modules obtenus. On désigne par π la projection canonique de G sur $M = G/K$. L'application linéaire $(\pi \circ L_g)_{*e}$: $T_eG = \mathfrak{g} \to T_{\pi(g)}M$ est surjective de noyau $\mathfrak{k}$, elle induit donc un isomorphisme entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ et $T_{\pi(g)}M$. On note $X \to \tilde{X}$ son inverse.
On identifie l'espace $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ à l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui s'annulent sur $\mathfrak{k}$.

Proposition 1.6.1 *On suppose que (G, K) est une paire symétrique. L'isomorphisme Φ de $C^\infty(\wedge^p M)$ sur $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ est donné par :*

$$\alpha \mapsto \Phi(\alpha) = \tilde{\alpha},$$

où pour tout $g \in G$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(g)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p) &= (\pi \circ L_g)^*(\alpha)(g)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p) \\ &= \alpha(\pi(g))((\pi \circ L_g)_{*e}Y_1, (\pi \circ L_g)_{*e}Y_2, \ldots, (\pi \circ L_g)_{*e}Y_p). \end{aligned}$$

Preuve :

– Tout d'abord, on vérifie que $\tilde{\alpha}$ est bien invariant par K, i.e. $\tilde{\alpha}(gk) = \mathrm{Ad}^{*p}(k^{-1})\tilde{\alpha}(g)$. En effet :

$$\mathrm{Ad}^{*p}(k^{-1})\tilde{\alpha}(g)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p) = \tilde{\alpha}(g)(\mathrm{Ad}(k)Y_1, \mathrm{Ad}(k)Y_2, \ldots, \mathrm{Ad}(k)Y_p),$$

et

$$(\pi \circ L_{gk})_{*e} = (\pi \circ R_{k^{-1}} \circ L_g \circ L_k)_{*e} = (\pi \circ L_g \circ R_{k^{-1}} \circ L_k)_{*e} = (\pi \circ L_g)_{*e} \circ \mathrm{Ad}(k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(gk)(Y_1, \ldots, Y_p) &= \alpha(\pi(gk))((\pi \circ L_{gk})_{*e}(Y_1), \ldots, (\pi \circ L_{gk})_{*e}(Y_p)) \\ &= \alpha(\pi(g))((\pi \circ L_g)_{*e} \circ \mathrm{Ad}(k)(Y_1), \ldots, (\pi \circ L_g)_{*e} \circ \mathrm{Ad}(k)(Y_p)) \\ &= \tilde{\alpha}(g)(\mathrm{Ad}(k)Y_1, \ldots, \mathrm{Ad}(k)Y_p). \end{aligned}$$

– Φ est un isomorphisme. En effet, l'application inverse de Φ associe à un β dans $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ la forme $\hat{\beta}$ définie par :

$$\hat{\beta}(\pi(g))(Y_1, \ldots, Y_p) = \beta(g)(\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_p), \quad \text{pour } g \in G \text{ et } Y_1, \ldots, Y_p \in T_{\pi(g)}M.$$

Ceci est bien défini puisque $\beta(g)$ est K-équivariant.

□

1.6.2 Laplacien et opérateur de Casimir

On suppose maintenant que (G, K) est une paire symétrique compacte où G est un groupe de Lie compact, connexe et semi-simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On rappelle que $M = G/K$ est l'espace symétrique associé.

L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'après l'identification de l'espace $C^\infty(\wedge^p M)$ des p-formes différentielles sur M à l'espace $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ donnée par la proposition 1.6.1, le laplacien n'est autre que l'opérateur de Casimir. Les preuves sont inspirées des références [30] et [37].

On définit un produit scalaire $(\ ,\ )_M$ sur $C^\infty(\wedge^p M)$ par :

$$(\phi, \varphi)_M = \int_M \langle \phi(m), \varphi(m) \rangle \, dm.$$

où dm est la mesure sur M définie par la métrique riemannienne. On rappelle que $\langle\ ,\ \rangle$ est la métrique hermitienne sur $\wedge^p M$ induite par la métrique riemannienne de M. Il est clair que $(\ ,\ )_M$ est invariant par l'action de G sur $C^\infty(\wedge^p M)$.

Soit d l'opérateur de différentiation extérieure, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$, et soit δ son adjoint formel relativement à $(\ ,\ )_M$. On définit ensuite le laplacien Δ par :

$$\Delta = \Delta_p = d\delta + \delta d.$$

C'est un opérateur différentiel elliptique, auto-adjoint, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$ et commutant à l'action de G sur cet espace.

L'ensemble des valeurs propres de Δ_p est discret, formé d'une suite :

$$0 \leq \lambda_1^p \leq \lambda_2^p \leq \dots$$

où chacune des valeurs propres λ_i^p sera répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité qui est par définition la dimension de l'espace propre $E_{\lambda_i^p}$ correspondant. Chacun de ces espaces propres est un sous-G-module de $C^\infty(\wedge^p M)$, et leur somme est dense dans ce dernier, muni de la topologie définie par $(\ ,\ )_M$. La collection des valeurs propres de Δ_p comptées avec multiplicité s'appelle le p-spectre du laplacien.

On rappelle que si σ est l'involution de G et σ_{*e} sa différentielle en e, alors $\mathfrak{k}$ est l'espace propre de σ_{*e} associé à la valeur propre 1 et $\mathfrak{m}$ celui associé à la valeur propre -1, et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Puisque B est invariante par les automorphismes de $\mathfrak{g}$, en particulier par σ_{*e}, les espaces $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{m}$ sont orthogonaux relativement à B. De plus, puisque $\mathfrak{g}$ est compacte et semi-simple, alors d'après la proposition 1.3.7, B est définie strictement négative, donc $-B$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. Ainsi, on peut choisir une base orthonormée $\{X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_N\}$ de $\mathfrak{g}$, par rapport au produit scalaire induit par B, de telle manière que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ soit une base de $\mathfrak{m}$ et $\{X_{n+1}, \dots, X_N\}$ soit une base de $\mathfrak{k}$. Les bases $\{X_1, \dots, X_N\}$ et $\{-X_1, \dots, -X_N\}$ de $\mathfrak{g}$ sont duales relativement à la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$. Donc :

$$\mathcal{C} = -\sum_{i=1}^{N} X_i^2.$$

En considérant les X_i comme opérateurs différentiels sur G, invariants à gauche, $\mathcal{C}$ est un opérateur différentiel bi-invariant sur G.

Nous allons prouver une série de propositions qui permettront de montrer «l'égalité» entre le laplacien et l'opérateur de Casimir.

Soit η un élément de $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$. Pour tout $g \in G$ et $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$, on pose :

$$\eta_{i_1 \dots i_p}(g) = \eta(g)(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}). \tag{1.3}$$

η est parfaitement déterminée par le système de fonctions C^∞, $\eta_{i_1 \dots i_p}$ définies sur G à valeurs complexes par la formule (1.3), avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ de sorte que si ξ est un autre élément de $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ et $g \in G$, alors :

$$\langle \xi(g), \eta(g) \rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \xi_{i_1 \dots i_p}(g) . \eta_{i_1 \dots i_p}(g),$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire K-invariant induit sur $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ par celui sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

On définit alors une application linéaire :

$$D : C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}) \to C^\infty(G, K, \wedge^{p+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}), \tag{1.4}$$

par :

$$(D\eta)_{i_1\ldots i_{p+1}} = \sum_{u=1}^{p+1}(-1)^{u-1}X_{i_u}\,\eta_{i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_{p+1}}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{p+1} \leq n.$$

Le symbole $\hat{i}_u$ signifie que l'indice i_u est exclu.

Proposition 1.6.2 *On a* $\widetilde{d\alpha} = D\tilde{\alpha}$ *pour tout* $\alpha \in C^\infty(\wedge^p M)$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{d\alpha}(g)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p+1}}) = (\pi \circ L_g)^*(d\alpha)(g)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p+1}})\\
&= d((\pi \circ L_g)^*\alpha)(g)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p+1}})\\
&= \sum_{u=1}^{p+1}(-1)^{u-1}X_{i_u}.((\pi \circ L_g)^*(\alpha))(g)(X_{i_1}, \ldots, \hat{X}_{i_u}, \ldots, X_{i_{p+1}})\\
&+ \sum_{u<v}(-1)^{u+v}((\pi \circ L_g)^*(\alpha))(g)([X_{i_u}, X_{i_v}], X_{i_1}, \ldots, \hat{X}_{i_u}, \ldots, \hat{X}_{i_v}, \ldots, X_{i_{p+1}}).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de $\tilde{\alpha}$, celle de l'opérateur D et le fait que $[X_{i_u}, X_{i_v}] \in \mathfrak{k}$, on obtient le résultat. □

Soit dg un élément de volume sur G induit par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et dk un élément de volume sur K induit par la restriction de B à $\mathfrak{k}$. On rappelle que dm est l'élément de volume de M.

Lemme 1.6.3 *Soit f une fonction continue sur G. Soit $\tilde{f}$ la fonction définie sur G par :*

$$\tilde{f}(g) = \int_K f(R_k(g))\,dk \quad \textit{pour } g \in G.$$

$\tilde{f}$ est invariante par le groupe K, elle induit donc une fonction sur M (notée aussi $\tilde{f}$), et on a :

$$\int_G f(g)\,dg = \int_M \tilde{f}(m)\,dm.$$

Preuve : On suppose que supp$f \subset \pi^{-1}(U)$ où U est un ouvert de M sur lequel il existe une section s du fibré G. Soit ϕ le difféomorphisme de $U \times K$ sur $\pi^{-1}(U)$ donné par $\phi(u,k) = R_k(s(u))$ pour tout $(u,k) \in U \times K$. On peut alors montrer que $dg \circ \phi = dm \wedge dk$, et :

$$\begin{aligned}
\int_G f(g)\,dg &= \int_{\pi^{-1}(U)} f(g)\,dg = \int_{U\times K} f(\phi(u,k))\,dm \wedge dk\\
&= \int_U dm \int_K f(R_k(s(u)))\,dk = \int_M \tilde{f}(m)\,dm.
\end{aligned}$$

□

On pose $c = \dfrac{1}{vol(K)}$. Comme conséquence du lemme 1.6.3, on a le corollaire :

Corollaire 1.6.4 *Si h est une fonction continue sur M, alors :*

$$\int_M h(m)\, dm = c. \int_G h(\pi(g))\, dg.$$

On utilise le produit scalaire K-invariant sur $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ pour définir un produit scalaire sur $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ par :

$$(\xi, \eta)^* = \int_G \langle \xi(g), \eta(g)\rangle\, dg = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} \int_G \xi_{i_1\ldots i_p}(g).\eta_{i_1\ldots i_p}(g). \tag{1.5}$$

La proposition suivante donne la relation entre ce produit scalaire et celui de M.

Proposition 1.6.5 $(\alpha, \beta)_M = c.(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^*$, *pour* $\alpha,\ \beta \in C^\infty(\wedge^p M)$.

Preuve : D'après le corollaire 1.6.4, on a :

$$(\alpha, \beta)_M = \int_M \langle \alpha(m), \beta(m)\rangle\, dm = c. \int_G \langle \alpha(\pi(g)), \beta(\pi(g))\rangle\, dg,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est la métrique de $\wedge^p M$.

Pour $g \in G$, on pose $Y_i = (\pi \circ L_g)_{*e}(X_i)$, pour $1 \leq i \leq n$. Les Y_i forment une base orthonormée de $T_{\pi(g)}M$, et au voisinage du point $\pi(g)$, il existe des 1-formes $\theta^1, \ldots, \theta^n$ orthonormées telles que $\theta^i(\pi(g))(Y_j) = \delta^i_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et

$$\begin{cases} \alpha = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} u_{i_1\ldots i_p}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}, \\ \beta = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} v_{i_1\ldots i_p}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}, \end{cases}$$

où

$$u_{i_1\ldots i_p}(\pi(g)) = \alpha(\pi(g))(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_p}) = \tilde{\alpha}(g)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}) = \tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p}(g),$$

et

$$v_{i_1\ldots i_p}(\pi(g)) = \beta(\pi(g))(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_p}) = \tilde{\beta}(g)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}) = \tilde{\beta}_{i_1\ldots i_p}(g).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\pi(g)), \beta(\pi(g))\rangle &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} u_{i_1\ldots i_p}(\pi(g)).v_{i_1\ldots i_p}(\pi(g)) \\ &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} \tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p}(g).\tilde{\beta}_{i_1\ldots i_p}(g) = \langle \tilde{\alpha}(g), \tilde{\beta}(g)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $(\alpha, \beta)_M = c. \displaystyle\int_G \langle \tilde{\alpha}(g), \tilde{\beta}(g)\rangle\, dg = c.(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^*$. □

Le lemme suivant est utile pour démontrer la proposition 1.6.7.

Lemme 1.6.6 *Soit f une fonction C^∞ sur G alors :*

$$\int_G X_\lambda.f\,dg = 0.$$

En particulier, si f et h sont deux fonctions C^∞ sur G, alors :

$$\int_G (X_\lambda.f)h\,dg = -\int_G f(X_\lambda.h)\,dg.$$

Proposition 1.6.7 *L'opérateur D^* adjoint de D relativement au produit scalaire $(\ ,\ )^*$ est donné par :*

$$(D^*\xi)_{i_1\ldots i_{p-1}} = -\sum_{k=1}^{n} X_k.\xi_{k,i_1\ldots i_{p-1}},$$

où $\xi \in C^\infty(G,K,\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ et $1 \le i_1 < \cdots < i_{p-1} \le n$.

Preuve : Soit $\eta \in C^\infty(G,K,\wedge^{p-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$. En utilisant la définition de D donnée par (1.4) et celle de $(\ ,\ )^*$ donnée par (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
(D^*\xi,\eta)^* &= (\xi, D\eta)^* = \int_G \langle \xi(g), D\eta(g)\rangle\,dg \\
&= \int_G \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \xi_{i_1\ldots i_p}(g).\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}X_{i_u}.\eta_{i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g)\,dg \\
&= -\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\int_G X_{i_u}.\xi_{i_1\ldots i_p}(g).\eta_{i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g)\,dg \\
&= -\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\int_G X_{i_u}.\xi_{i_1\ldots i_p}(g).\eta_{i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g)\,dg \\
&= -\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}\int_G X_{i_u}.\xi_{i_u,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g).\eta_{i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g)\,dg \\
&= -\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j_1,\ldots,j_{p-1}=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_G X_k.\xi_{k,j_1,\ldots j_{p-1}}(g).\eta_{j_1\ldots j_{p-1}}(g)\,dg \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\int_G \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{p-1}\le n} X_k.\xi_{k,j_1\ldots j_{p-1}}(g).\eta_{j_1\ldots j_{p-1}}(g)\,dg,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.6.8 *$D^*\tilde{\alpha} = \widetilde{d^*\alpha}$, pour tout $\alpha \in C^\infty(\wedge^p M)$.*
En effet, pour tout $\tilde{\beta} \in C^\infty(G,K,\wedge^{p-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$, on a :

$$(D^*\tilde{\alpha},\tilde{\beta})^* = (\tilde{\alpha}, D\tilde{\beta})^* = (\tilde{\alpha},\widetilde{d\beta})^* = \frac{1}{c}(\alpha, d\beta) = \frac{1}{c}(d^*\alpha,\beta) = (\widetilde{d^*\alpha},\tilde{\beta})^*,$$

où on a utilisé la proposition 1.6.5 pour assurer le passage de $(\ ,\ )^*$ à $(\ ,\ )$ et inversement.

Proposition 1.6.9 *Avec l'identification des G-modules $C^\infty(\wedge^p M)$ et $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ par la proposition 1.6.1, on a $\Delta = \mathcal{C}$, i.e pour tout $\alpha \in C^\infty(\wedge^p M)$:*

$$\widetilde{\Delta\alpha} = \mathcal{C}\tilde{\alpha}.$$

Preuve : On pose $\Delta^\circ = DD^* + D^*D$. D'après la proposition 1.6.2 et la remarque 1.6.8, on a :

$$\widetilde{\Delta\alpha} = \Delta^\circ\tilde{\alpha}.$$

Ainsi, pour montrer la proposition, il suffit de montrer que $\Delta^\circ = \mathcal{C}$ ou :

$$\Delta^\circ\tilde{\alpha} = \sum_{k=1}^{N} X_k^2\,\tilde{\alpha} \quad \text{pour } \alpha \in C^\infty(\wedge^p M).$$

Or d'après la définition de D donnée par (1.4) et la proposition 1.6.7, on a pour $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$:

$$(DD^*\tilde{\alpha})_{i_1\ldots i_p} = -\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\sum_{k=1}^{n} X_{i_u}X_k\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p},$$

et

$$\begin{aligned}(D^*D\tilde{\alpha})_{i_1\ldots i_p} &= -\sum_{k=1}^{n} X_k\,(D\tilde{\alpha})_{k,i_1\ldots i_p} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} X_k\left\{X_k\,\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p} + \sum_{u=1}^{p}(-1)^u X_{i_u}\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}\right\} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} X_k^2\,\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^u X_k X_{i_u}\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$(\Delta^\circ\tilde{\alpha})_{i_1\ldots i_p} = -\sum_{k=1}^{n} X_k^2\,\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^u[X_k, X_{i_u}]\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}.$$

Pour finir la preuve, on va montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^u[X_k, X_{i_u}]\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p} = \sum_{k=n+1}^{N} X_k^2\,\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p}. \tag{1.6}$$

Pour $X_i, X_j \in \mathfrak{g}$, on pose $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^N b_{ij}^k X_k$, où les b_{ij}^k sont les constantes de structure. Elles sont antisymétriques en i, j et k car G est compact. Ceci est dû au fait que la base $\{X_i, 1 \le i \le N\}$ est orthonormée relativement au produit scalaire induit par la forme de Killing B et à la propriété :

$$B(X, [Y, Z]) = B(Y, [Z, X]) = B(Z, [X, Y]), \quad \text{pour tout } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Comme $X_k, X_{i_u} \in \mathfrak{m}$, le crochet $[X_k, X_{i_u}] \in \mathfrak{k}$, donc

$$[X_k, X_{i_u}] = \sum_{j=n+1}^{N} b^j_{k,i_u} X_j = - \sum_{j=n+1}^{N} b^j_{i_u k} X_j.$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^u [X_k, X_{i_u}]\,\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p} = \sum_{j=n+1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1} b^j_{i_u k} X_j.\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u,\ldots,i_p}. \quad (1.7)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
X_j.\tilde{\alpha}_{i_1\ldots,i_p}(g) &= X_j.\tilde{\alpha}(g)(X_{i_1},\ldots,X_{i_p})\\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{\alpha}(g.\exp tX_j)(X_{i_1},\ldots,X_{i_p})\\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{\alpha}(g)((\exp tX_j).X_{i_1},\ldots,(\exp tX_j).X_{i_p})\\
&= \sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\tilde{\alpha}(g)([X_j, X_{i_u}], X_{i_1},\ldots,\hat{X}_{i_u},\ldots,X_{i_p})\\
&= \sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\sum_{k=1}^{n} b^k_{ji_u}\tilde{\alpha}(g)(X_k, X_{i_1},\ldots,\hat{X}_{i_u},\ldots,X_{i_p})\\
&= \sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\sum_{k=1}^{n} b^j_{i_u k}\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}(g).
\end{aligned}$$

En remplaçant donc $\sum_{u=1}^{p}(-1)^{u-1}\sum_{k=1}^{n} b^j_{i_u k}\tilde{\alpha}_{k,i_1\ldots\hat{i}_u\ldots i_p}$ par $X_j.\tilde{\alpha}_{i_1\ldots,i_p}$ dans (1.7), on obtient (1.6), ce qui termine la preuve. □

1.7 Valeurs propres du laplacien

Soit G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

Dans cette partie, on énonce la formule de Freudenthal qui sert à déterminer les valeurs propres de l'opérateur de Casimir sur les G-modules irréductibles. Ensuite, si U est un K-module de dimension fini, le théorème de réciprocité de Frobenius (théorème 1.7.4) réduit le problème de la décomposition du G-module $C^\infty(G, K, U)$ en sous-G-modules irréductibles à celui de la décomposition de U en sous-K-modules irréductibles et retrouver dans ces composantes irréductibles des restrictions de G-modules irréductibles à K.

Ainsi, lorsque (G, K) est une paire symétrique, pour déterminer les valeur propre du laplacien agissant sur $C^\infty(\wedge^p(M))$, il suffit de décomposer le G-module $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}))$ en sous-G-modules irréductibles, ou aussi d'après la réciprocité de Frobenius il suffit de décomposer $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles et retrouver les restrictions des G-modules irréductibles à K.

Proposition 1.7.1 *Soit U un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Si (ρ, V) est un sous-G-module de dimension finie de $C^\infty(G,U)$, on étend ρ à une représentation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. On obtient :*

$$\mathcal{C}f = \rho(\mathcal{C})f, \quad \textit{pour tout } f \in V.$$

Preuve : Par hypothèse, l'action de G à gauche sur $C^\infty(G,U)$ est équivalente à ρ sur V. En passant aux représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'action à gauche devient :

$$L_X f = -X.f \quad \text{pour tout } \ X \in \mathfrak{g} \ \text{ et } \ f \in C^\infty(G,U).$$

Ainsi, si $f \in V$, on a :

$$\rho(\mathcal{C})f = \sum \rho(X_i) \circ \rho(X_i) f = \sum L_{X_i}(L_{X_i} f) = \sum X_i.(X_i.f) = \mathcal{C}f.$$

□

Corollaire 1.7.2 *Tout sous-G-module de dimension finie de $C^\infty(G,U)$ est stable par l'opérateur de Casimir.*

Proposition 1.7.3 *(Formule de Freudenthal) [6], [18].*

Soit T un tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. On choisit un système de racines positives de G relativement à T et on désigne par δ_G la demi-somme des racines positives. Soit k une forme bilinéaire symétrique négative invariante et non dégénérée et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ (et sur $\mathfrak{t}^*$) induit par k. Soit (ρ, V) une représentation complexe irréductible de G de plus grand poids Λ. Si C est l'opérateur de Casimir associé à k, l'opérateur $\rho(C)$ de $\mathfrak{gl}(V)$ est un scalaire donné par :

$$\rho(C) = \langle \Lambda + 2\delta_G, \Lambda \rangle . 1_V.$$

En particulier, si G est semi-simple, le résultat est valable pour l'opérateur de Casimir $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{g}$. La forme bilinéaire considérée dans ce cas est la forme de Killing.

Ainsi, pour déterminer les valeurs propres de l'opérateur de Casimir, il suffit de décomposer l'espace $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ en sous-G-modules irréductibles et de calculer sur chacune de ses composantes irréductibles, la valeur propre de $\mathcal{C}$.

Théorème 1.7.4 *(Réciprocité de Frobenius)*

Soit F le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit (σ, U) un K-module de dimension finie et (ρ, V) un G-module de dimension finie, sur le corps F. On considère (ρ, V) comme un K-module par restriction. On a alors un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels :

$$Hom_G(V, C^\infty(G,K,U)) \cong Hom_K(V,U).$$

On rappelle que $C^\infty(G,K,U)$ est un G-module par l'action de G à gauche.

Preuve : On construit l'isomorphisme explicitement.
Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, C^\infty(G,K,U))$. On définit $\psi_\phi : V \to U$ par $\psi_\phi(v) = \phi(v)(e)$, pour $v \in V$.

– ψ_ϕ ainsi définie est linéaire.

– ψ_ϕ est K-équivariante, i.e. dans $\mathrm{Hom}_K(V, U)$. En effet, pour tout $k \in K$, on a :

$$\psi_\phi(\rho(k)v) = \phi(\rho(k)v)(e) = (L_k\phi(v))(e) = (\phi(v))(k^{-1}) = \sigma(k)\phi(v)(e) = \sigma(k)\psi_\phi(v).$$

– $\phi \mapsto \psi$ est une application linéaire.

Réciproquement, soit $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$. On définit $\phi_\psi : V \to C^\infty(G, K, U)$ par :

$$\phi_\psi(v)(g) = \psi(\rho(g^{-1})v), \quad \text{pour } g \in G \text{ et } v \in V.$$

– $\phi_\psi(v) \in C^\infty(G, K, U)$. En effet, pour tout $v \in V$, $g \in G$ et $k \in K$, on a :

$$\phi_\psi(v)(gk) = \psi(\rho(k^{-1})\rho(g^{-1})v) = \sigma(k^{-1})\psi(\rho(g^{-1})v) = \sigma(k^{-1})\phi_\psi(v)(g).$$

– $\phi_\psi \in \mathrm{Hom}_G(V, C^\infty(G, K, U))$. En effet, pour $v \in V$, $g, h \in G$, on a :

$$\phi_\psi(\rho(h)v)(g) = \psi(\rho(g^{-1})\rho(h)v) = \psi(\rho(h^{-1}g)^{-1}v) = \phi_\psi(v)(h^{-1}g) = (L_h\phi_\psi(v))(g).$$

Il reste à vérifier que $\phi \mapsto \psi_\phi$ et $\psi \mapsto \phi_\psi$ sont réciproques l'une de l'autre.

- Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, C^\infty(G, K, U))$, $v \in V$ et $g \in G$, alors on a :

$$(\phi_{\psi_\phi}(v))(g) = \psi_\phi(\rho(g^{-1})v) = (\phi(\rho(g^{-1})v))(e) = (L_{g^{-1}}\phi(v))(e) = \phi(v)(g).$$

- Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$ et $v \in V$, alors on a :

$$\psi_{\phi_\psi}(v) = (\phi_\psi(v))(e) = \psi(\rho(e^{-1})v) = \psi(v).$$

□

Soit $\mathcal{I}_G$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles de G. Pour $(\rho, V) \in \mathcal{I}_G$, on définit un G-homomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} i_\rho : & \mathrm{Hom}_G(V, C^\infty(\wedge^p M)) \otimes_{\mathbb{C}} V & \to & C^\infty(\wedge^p M) \\ & \phi \otimes u & \mapsto & \phi(u). \end{array}$$

i_ρ est injective car ρ est irréductible. On note μ_ρ la dimension de $\mathrm{Hom}_G(V, C^\infty(\wedge^p M))$ sur $\mathbb{C}$ et par Γ_ρ^p l'image de l'homomorphisme i_ρ. μ_ρ et Γ_ρ^p ne dépendent que de la classe d'équivalences de ρ, et Γ_ρ^p est isomorphe à la somme directe de μ_ρ copies de V (car V est irréductible).

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{C}$, $U = \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ et (ρ, V) représente une classe de représentations irréductibles de G, le théorème de la réciprocité de Frobenius implique que :

$$\mu_\rho = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_K(V, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}).$$

Donc μ_ρ est finie.

Ainsi, pour décomposer $C^\infty(G, K, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}})$ en sous-G-modules irréductibles, il suffit de décomposer un G-module irréductible, restreint à K, en sous-K-modules irréductibles, et le K-module $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles.

Chapitre 2

Spectre du laplacien de la grassmannienne

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode décrite dans le précédent pour calculer le spectre du laplacien des variétés grassmenniennes. Ainsi, pour $G = \mathrm{SO}(n)$ et $K = \mathrm{SO}(\mathrm{k}) \times \mathrm{SO}(n-k)$, on considère un G-module irréductible quelconque V et on regarde sa restriction à K. Cette restriction n'est pas irréductible en général. On effectue alors sa décomposition en sous-K-modules irréductibles. On réduit ce calcul à un calcul algébrique en utilisant la formule des caractères de Weyl (proposition 1.2.51) selon laquelle une représentation irréductible est parfaitement définie par son caractère et qui donne une formule algébrique pour ce caractère (égalité (2.2)). Ensuite, pour ce qui concerne la décomposition des puissances extérieurs de la représentation adjointe, on se sert de certaines propriétés connues qui permettront d'écrire l'espace de la représentation comme une somme de produits tensoriels de représentations irréductibles. On utilise ensuite la formule de Steinberg (proposition 1.2.58) qui permet de décomposer un produit tensoriel de deux représentations irréductibles en représentations irréductibles connaîssant les poids dominants du groupe considéré. Pour faire cette décomposition, on utilise un programme informatique. Finalement, pour décomposer l'espace des formes différentielles en sous-G-modules irréductibles, il faut retrouver les G-modules irréductibles dont la restriction à K intervient dans la décomposition du K-module $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles.

2.2 Décomposition d'un G-module irréductible en sous-K-modules irréductibles

Ce paragraphe est consacré à la décomposition d'un G-module irréductible en sous-K-modules irréductibles, lorsque G est le groupe $\mathrm{SO}(n)$ et K est le sous-groupe $\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$ de G. On désigne par T un tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ et par T_K un tore maximal de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}}$, par W_G le groupe de Weyl de G et par W_K celui de K, enfin par Δ_G le système des racines de G relativement à T et par Δ_K celui de K relativement à T_K.

Une représentation irréductible est parfaitement déterminée par son caractère ou son plus grand poids. Ainsi, on désigne par $V(\Lambda)$ (resp. $V'(\Lambda')$) un G-module (resp. K-module) irréductible de plus grand poids Λ (resp. Λ') et de caractère $\chi_G(\Lambda)$ (resp. $\chi_K(\Lambda')$). Décomposer le G-module $V(\Lambda)$, restreint à K, en une somme de K-modules irréductibles, revient alors à déterminer l'ensemble E des plus grands poids du groupe K tels qu'on ait l'égalité :

$$(\chi_G(\Lambda))|_{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}} = \sum_{\Lambda' \in E} \chi_K(\Lambda'). \tag{2.1}$$

En utilisant la formule des caractères de Weyl, l'égalité (2.1) devient :

$$\frac{\xi_G(\Lambda + \delta_G)}{\xi_G(\delta_G)}|_{\mathfrak{t}_\mathfrak{k}} = \sum_{\Lambda' \in E} \frac{\xi_K(\Lambda' + \delta_K)}{\xi_K(\delta_K)}. \tag{2.2}$$

On rappelle que si $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, alors $\xi(\lambda)$ est donné par :

$$\xi(\lambda)(H) = \sum_{w \in W} \det(w).e(\lambda(w(H))), \quad \text{pour } H \in \mathfrak{t}.$$

Ainsi, nous avons besoin de déterminer les quantités suivantes :

- L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G (resp. $\mathfrak{k}$ de K).
- Un tore maximal de T de G (resp. T_K de K).
- Le système des racines de G relativement à T (resp. de K relativement à T_K).
- Un système des racines positives de G (resp. de K), ce qui permet de choisir un système de racines simples de G (resp. de K), et une chambre de Weyl fondamentale de $\mathfrak{t}$ (resp. de $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}$).
- Le réseau des formes entières I^* de $\mathfrak{t}^*$ (resp. I_K^* de $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}^*$). Sa définition est donnée par (1.2) de la page 25.
- Les formes entières dominantes de $\mathfrak{t}^*$ (resp. de $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}^*$), qui correspondent aux représentations irréductibles de G (resp. de K).
- Le groupe de Weyl associé au choix du tore maximal T de G (resp. T_K de K).

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est $\mathfrak{so}(n)$ et celle de K est $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k)$. On a la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ avec :

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n);\ X \in M(n-k, k, \mathbb{R}) \right\}.$$

Les autres quantités à déterminer dépendent de la parité de n et de k. On commence par traiter le cas où k est pair, $k = 2q$. Dans ce cas, on peut prendre $T = T_K$. On étudie les deux cas $n = 2m$ et $n = 2m + 1$:

1. Cas où n est pair, $n = 2m$:

   Dans ce cas, On choisit $T = T_K = \mathrm{SO}(2) \times \cdots \times \mathrm{SO}(2)$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}}$ est donnée par :

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} R(\lambda_1) & & & \\ & R(\lambda_2) & & (0) \\ (0) & & \ddots & \\ & & & R(\lambda_m) \end{pmatrix} \in \mathfrak{g};\ \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ et } R(\lambda) = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

   où on regarde λ_j comme une forme linéaire sur $\mathfrak{t}$ qui associe la valeur λ_j, i.e. un élément de $\mathfrak{t}^*$.

   On choisit les coordonnées du tore de telle façon que le réseau entier I soit $\mathbb{Z}^n$. Donc :

$$I^* = \{h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + ... + h_m\lambda_m;\ h_i \in \mathbb{Z}\}.$$

   Les autres quantités à déterminer sont données par :

   - Le système des racines de G relativement à T est :

$$\{\pm\lambda_i \pm \lambda_j;\ 1 \leq i < j \leq m\}.$$

   - Le système des racines positives :

$$\{\lambda_i \pm \lambda_j;\ 1 \leq i < j \leq m\}.$$

   - Les racines simples :

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, ..., \alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} - \lambda_m, \alpha_m = \lambda_{m-1} + \lambda_m.$$

   - La chambre de Weyl fondamentale, correspondante au choix du système de racines simples, est donnée par :

$$\mathcal{C} = \{h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + ... + h_m\lambda_m;\ h_1 > h_2 > ... > h_{m-1} > |h_m|\}.$$

   - Une forme entière dominante Λ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, i.e. un élément de $\overline{\mathcal{C}} \cap I^*$, qui correspond à une représentation irréductible de G, s'écrit sous la forme $\Lambda = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + ... + h_m\lambda_m$, où les h_i sont des entiers tels que $h_1 \geq h_2 \geq ... \geq |h_m|$. On l'écrit :

$$\begin{cases} \Lambda = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + ... + \varepsilon h_m\lambda_m \\ h_i \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq m \\ h_1 \geq h_2 \geq ... \geq h_m \geq 0 \\ \varepsilon = \pm 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

   - Le groupe de Weyl W_G de G est l'ensemble des éléments $\phi = ((\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m), \sigma)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, $\sigma \in S_m$ et le nombre de ε_i égaux à -1 est pair, avec $\phi(a_1\lambda_1 + ... + a_m\lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i \sigma(\lambda_i)$ et la signature de ϕ est égale à celle de σ. Ici S_m désigne le groupe des permutations de $\{1, ..., m\}$.

On détermine les mêmes quantités pour K, on obtient :

- Le système des racines de K relativement à T_K est :

$$\{\pm\lambda_i \pm \lambda_j;\ 1 \leq i < j \leq q \text{ ou } q+1 \leq i < j \leq m\}.$$

- Le système des racines positives :

$$\{\lambda_i \pm \lambda_j;\ 1 \leq i < j \leq q \text{ ou } q+1 \leq i < j \leq m\}.$$

- Les racines simples :

$$\begin{aligned}&\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, ..., \lambda_{q-1} - \lambda_q, \lambda_{q-1} + \lambda_q,\\ &\lambda_{q+1} - \lambda_{q+2}, \lambda_{q+2} - \lambda_{q+3}, ..., \lambda_{m-1} - \lambda_m, \lambda_{m-1} + \lambda_m.\end{aligned}$$

- Une forme entière dominante, Λ' de $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, qui correspond à une représentation irréductible de K, s'écrit :

$$\begin{cases} \Lambda' = k_1\lambda_1 + ... + \varepsilon' k_q \lambda_q + k_{q+1}\lambda_{q+1} + ... + \varepsilon'' k_m \lambda_m \\ k_i \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } \ 1 \leq i \leq m \\ k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_q \geq 0 \\ k_{q+1} \geq k_{q+2} \geq ... \geq k_m \geq 0 \\ \varepsilon' = \pm 1, \quad \varepsilon'' = \pm 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

- Le groupe de Weyl de K est $W_{\mathrm{SO}(2q)} \times W_{\mathrm{SO}(n-2q)}$.

2. Cas où n est impair, $n = 2m+1$: $T = T_K = \mathrm{SO}(2) \times \cdots \times \mathrm{SO}(2) \times \{1\}$ et

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} = \left\{ \begin{pmatrix} R(\lambda_1) & & & & \\ & R(\lambda_2) & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & R(\lambda_m) & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g};\ \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Les racines de G relativement à T sont :

$$\begin{cases} \pm\lambda_i \pm \lambda_j & \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq m \\ \pm\lambda_i & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- Les racines positives :

$$\begin{cases} \lambda_i \pm \lambda_j & \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq m \\ \lambda_i & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- Les racines simples :

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, ..., \alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} - \lambda_m, \alpha_m = \lambda_m.$$

- Une forme entière dominante Λ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ est donnée par :

$$\begin{cases} \Lambda = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \ldots + h_m\lambda_m \\ h_i \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } \ 1 \leq i \leq m \\ h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_m \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

- Le groupe de Weyl W_G est le produit semi-direct de $(\mathbb{Z}/2)^m$ et S_m où S_m agit sur $(\mathbb{Z}/2)^m$ en permutant les facteurs, i.e. un élément de W_G est de la forme $\phi = ((\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \sigma)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, $\sigma \in S_m$, avec $\phi(a_1\lambda_1 + \ldots + a_m\lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i \sigma(\lambda_i)$. $\text{sign}(\phi) = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m . \ \text{sign}(\sigma)$.

On détermine les mêmes quantités pour K, on obtient :

- Les racines de K relativement à $T_K = T$ sont :

$$\begin{cases} \pm\lambda_i \pm \lambda_j & \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq q \ \text{ ou } \ q+1 \leq i < j \leq m \\ \pm\lambda_i & \text{pour} \quad q+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- Les racines positives :

$$\begin{cases} \lambda_i \pm \lambda_j & \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq q \ \text{ ou } \ q+1 \leq i < j \leq m \\ \lambda_i & \text{pour} \quad q+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- Les racines simples :

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{q-1} - \lambda_q, \lambda_{q-1} + \lambda_q,$$
$$\lambda_{q+1} - \lambda_{q+2}, \lambda_{q+2} - \lambda_{q+3}, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m, \lambda_m.$$

- Une forme entière dominante, Λ' de $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ s'écrit :

$$\begin{cases} \Lambda' = k_1\lambda_1 + \ldots + \varepsilon k_q\lambda_q + k_{q+1}\lambda_{q+1} + \ldots + k_m\lambda_m \\ k_i \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } \ 1 \leq i \leq m \\ k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_q \geq 0 \\ k_{q+1} \geq k_{q+2} \geq \ldots \geq k_m \geq 0 \\ \varepsilon = \pm 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

- Le groupe de Weyl du groupe K est toujours $W_{\mathrm{SO}(2q)} \times W_{\mathrm{SO}(n-2q)}$.

Notations 2.2.1

(i) On pose :

$$\begin{aligned} e(\Lambda) &= e^{2\pi i\Lambda}, \\ s(\Lambda) &= e(\Lambda) - e(-\Lambda) = e^{2\pi i\Lambda} - e^{-2\pi i\Lambda} = 2i \ sin2\pi\Lambda, \\ c(\Lambda) &= e(\Lambda) + e(-\Lambda) = e^{2\pi i\Lambda} + e^{-2\pi i\Lambda} = 2 \ cos2\pi\Lambda, \\ \alpha_{ij} &= \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}, \\ \beta_{ij} &= \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}. \end{aligned}$$

(ii) Si r et s sont des entiers tels que $1 \leq r \leq s$, on désigne par $[a_{ij}]_{r:s}$ une matrice carrée avec indices i, j, variant entre r et s.

Remarque 2.2.2 *Si r est un entier, alors on a :*

$$\frac{s(rx)}{s(x)} = \frac{e(rx) - e(-rx)}{e(x) - e(-x)} = \sum_{k=0}^{r-1} e(kx)e((r-1-k)(-x)) = \sum_{k=0}^{r-1} e((2k-r+1)x).$$

Les lemmes suivants seront utilisés pour montrer les théorèmes 2.2.5 et 2.2.6. Leur preuve est donnée dans le paragraphe 2.2.1.

Lemme 2.2.3 *Soit $H_1, ..., H_m$ des entiers positifs ou nuls ou des demi-entiers strictement positifs qui vérifient :*

$$H_1 > ... > H_m.$$

On a :

1.
$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^{m} s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = \sum_{K_i} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{s(l_i\lambda_1)}{s(\lambda_1)} \right) Hc(l_m\lambda_1). \det[c(K_i\lambda_j)]_{3:m} \right\},$$

2.
$$\frac{\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^{m} s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = \sum_{K_i} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{s(l_i\lambda_1)}{s(\lambda_1)} \right) s(l_m\lambda_1). \det[s(K_i\lambda_j)]_{3:m} \right\},$$

avec :

–
$$H = \begin{cases} 1/2 & si \quad K_m = 0 \\ 1 & si \quad K_m > 0. \end{cases}$$

– *Les l_i sont donnés par :*

$$\begin{cases} l_1 = H_1 - \max(H_2, K_2) \\ l_i = \min(H_i, K_i) - \max(H_{i+1}, K_{i+1}) \quad pour \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ l_m = \min(H_m, K_m). \end{cases}$$

– *La somme porte sur $K_2, ..., K_m$ vérifiant :*

$$(C_1) \quad \begin{cases} H_{i+1} < K_i < H_{i-1} & pour \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ K_m < H_{m-1} \\ K_m < K_{m-1} < ... < K_2. \end{cases}$$

Les K_i sont des entiers ≥ 0 si les H_i le sont, et des demi-entiers > 0 si les H_i le sont.

Lemme 2.2.4 *Soit $H_1, ..., H_m$ des entiers positifs ou nuls ou des demi-entiers strictement positifs qui vérifient :*

$$H_1 > ... > H_m.$$

On a pour tout entier $1 \leq q \leq m$:

1.

$$\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}/(\prod_{i=1}^{q}\prod_{j=i+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})) =$$

$$\sum_{K_{1,i}}\cdots\sum_{K_{q,i}}\left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)H^r c(l_{r,m}\lambda_r)\right\}\det[c(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m},$$

2.

$$\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}/(\prod_{i=1}^{q}\prod_{j=i+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})) =$$

$$\sum_{K_{1,i}}\cdots\sum_{K_{q,i}}\left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)s(l_{r,m}\lambda_r)\right\}\det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m},$$

où pour tout $1 \le r \le q$ et pour tout $r+1 \le i \le m$, les $K_{r,i}$ vérifient les conditions :

$$(C_r)\quad\left\{\begin{array}{ll} K_{r-1,i+1} < K_{r,i} < K_{r-1,i-1} & \textit{pour}\quad r+1 \le i \le m-1 \\ K_{r,m} < K_{r-1,m-1} & \\ K_{r,m} < K_{r,m-1} < \ldots < K_{r,r+1}. & \end{array}\right.$$

Les $K_{r,i}$ sont des entiers ≥ 0 dans le cas où les H_i le sont, et des demi-entiers (> 0) dans le cas contraire.
Pour tout $1 \le r \le q$ et tout $r \le i \le m$, les $l_{r,i}$ sont donnés par :

$$\left\{\begin{array}{l} l_{r,r} = K_{r-1,r} - \max(K_{r-1,r+1}, K_{r,r+1}) \\ l_{r,i} = \min(K_{r-1,i}, K_{r,i}) - \max(K_{r-1,i+1}, K_{r,i+1}) \quad \textit{pour}\quad r+1 \le i \le m-1 \\ l_{r,m} = \min(K_{r-1,m}, K_{r,m}), \end{array}\right.$$

et pour tout $1 \le r \le q$:

$$H^r = \left\{\begin{array}{lll} 1/2 & \textit{pour} & K_{r,m} = 0 \\ 1 & \textit{pour} & K_{r,m} > 0. \end{array}\right.$$

Avant d'énoncer les théorèmes 2.2.5 et 2.2.6 on va définir des entiers $k_{r,i}$ pour $1 \le r \le q-1$ et $r+1 \le i \le m$ par :

– Si $2r < 3q - m + 1$:

$$\begin{cases} \max(k_{r-1,i+1}, k_{q,i+q-r}) \leq k_{r,i} \leq k_{r-1,i-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad r+1 \leq i \leq m-q+r \\ k_{r-1,i+1} \leq k_{r,i} \leq k_{r-1,i-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad m-q+r+1 \leq i \leq 2q-r \\ k_{r-1,i+1} \leq k_{r,i} \leq \min(k_{r-1,i-1}, k_{q,i-q+r}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad 2q-r+1 \leq i \leq m-1 \\ k_{r,m} \leq \min(k_{r-1,m-1}, k_{q,m-q+r}) \\ 0 \leq k_{r,m} \leq \ldots \leq k_{r,r+1}. \end{cases} \tag{2.7}$$

– Si $2r \geq 3q - m + 1$:

$$\begin{cases} \max(k_{r-1,i+1}, k_{q,i+q-r}) \leq k_{r,i} \leq k_{r-1,i-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad r+1 \leq i \leq 2q-r \\ \max(k_{r-1,i+1}, k_{q,i+q-r}) \leq k_{r,i} \leq \min(k_{r-1,i-1}, k_{q,i-q+r}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad 2q-r+1 \leq i \leq m-q+r \\ k_{r-1,i+1} \leq k_{r,i} \leq \min(k_{r-1,i-1}, k_{q,i-q+r}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad m-q+r+1 \leq i \leq m-1 \\ k_{r,m} \leq \min(k_{r-1,m-1}, k_{q,m-q+r}) \\ 0 \leq k_{r,m} \leq \ldots \leq k_{r,r+1}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.5 *Soit G le groupe $SO(2m)$ et K le groupe $SO(2q) \times SO(2m-2q)$. Soit V un G-module irréductible de plus grand poids $\Lambda = h_1\lambda_1 + \ldots + \varepsilon h_m\lambda_m$. Le G-module V est un K-module par restriction. La décomposition du K-module V en sous-K-modules irréductibles, contient un K-module irréductible V', de plus grand poids $\Lambda' = k_1\lambda_1 + \ldots + \varepsilon' k_q\lambda_q + k_{q+1}\lambda_{q+1} + \ldots + \varepsilon'' k_m\lambda_m$, si et seulement si :*

1. *Les entiers k_i, $(q+1 \leq i \leq m)$, sont liés aux entiers h_i, $(1 \leq i \leq m)$, par les conditions :*

$$\begin{cases} h_{i+q} \leq k_i \leq h_{i-q} & \textit{pour} \quad q+1 \leq i \leq m-q \\ k_i \leq h_{i-q} & \textit{pour} \quad m-q+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

2. *La multiplicité de $V' = V(\Lambda')$ dans $V = V(\Lambda)$ est la suivante :*

   (i) Si $k_m = 0$:

C'est la multiplicité $m_{\Lambda'}$ *de* $e((k_1+q-1)\lambda_1+\ldots+\varepsilon' k_q\lambda_q)$ *dans :*

$$\prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{\substack{k_{1,i}\\ \text{un des } k_{r,m}=0}} \cdots \sum_{k_{q-1,i}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right) H^r c(l_{r,m}\lambda_r)\right\}.$$

(ii) Si $k_m>0$ *et* $\varepsilon''=\varepsilon$ *:*

C'est la multiplicité $m_{\Lambda'}$ *de* $e((k_1+q-1)\lambda_1+\ldots+\varepsilon' k_q\lambda_q)$ *dans :*

$$\prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{\substack{k_{1,i}\\ k_{1,m}>0}} \cdots \sum_{\substack{k_{q-1,i}\\ k_{q-1,m}>0}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\right\}$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q\\ \varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=1}} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q).$$

où la somme porte sur $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q\in\{-1,1\}$.

(iii) Si $k_m>0$ *et* $\varepsilon''=-\varepsilon$ *:*

C'est la multiplicité $m_{\Lambda'}$ *de* $e((k_1+q-1)\lambda_1+\ldots+\varepsilon' k_q\lambda_q)$ *dans :*

$$\prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{\substack{k_{1,i}\\ k_{1,m}>0}} \cdots \sum_{\substack{k_{q-1,i}\\ k_{q-1,m}>0}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\right\}$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q\\ \varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=-1}} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q),$$

où la somme porte sur $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q\in\{-1,1\}$.

V' est un sous-K-module de V si la multiplicité $m_{\Lambda'}$ est non nulle.

Les $k_{r,i}$ vérifient les conditions (2.7) et (2.8).

Les $l_{r,i}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{r,r}=k_{r-1,r}-\max(k_{r-1,r+1},k_{r,r+1})+1 \\ l_{r,i}=\min(k_{r-1,i},k_{r,i})-\max(k_{r-1,i+1},k_{r,i+1})+1 \quad \textit{pour} \quad r+1\le i\le m-1 \\ l_{r,m}=\min(k_{r-1,m},k_{r,m}). \end{cases} \tag{2.9}$$

Théorème 2.2.6 *Soit $G=SO(2m+1)$, $K=SO(2q)\times SO(2m-2q+1)$. Soit V un G-module irréductible de plus grand poids $\Lambda=h_1\lambda_1+\ldots+h_m\lambda_m$. V est un K-module par restriction. Un K-module irréductible V', de plus grand poids $\Lambda'=k_1\lambda_1+\ldots+\varepsilon k_q\lambda_q+k_{q+1}\lambda_{q+1}+\ldots+k_m\lambda_m$, est un sous-$K$-module de V, si et seulement si :*

1.

$$\begin{cases} h_{i+q}\le k_i\le h_{i-q} & \textit{pour} \quad q+1\le i\le m-q \\ k_i\le h_{i-q} & \textit{pour} \quad m-q+1\le i\le m. \end{cases}$$

2. *La multiplicité $m_{\Lambda'}$ de $V' = V(\Lambda')$ dans $V = V(\Lambda)$ est la multiplicité de $e((k_1 + q - 1)\lambda_1 + ... + \varepsilon k_q \lambda_q)$ dans le terme :*

$$\prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{k_{1,i}} \cdots \sum_{k_{q-1,i}} \left\{ \prod_{r=1}^{q} \left(\prod_{i=r}^{m-1} \frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)} \right) . \frac{s(l_{r,m}\lambda_r)}{s(\lambda_r/2)} \right\},$$

et V' est un sous-K-module de V si la multiplicité $m_{\Lambda'}$ est non nulle.

Les entiers $k_{r,i}$, pour $1 \leq r \leq q$ et $r+1 \leq i \leq m$, vérifient les conditions (2.7) et (2.8). Les $l_{r,i}$, pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq i \leq m$, sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{r,r} = k_{r-1,r} - \max(k_{r-1,r+1}, k_{r,r+1}) + 1 \\ l_{r,i} = \min(k_{r-1,i}, k_{r,i}) - \max(k_{r-1,i+1}, k_{r,i+1}) + 1 \quad \textit{pour} \quad r+1 \leq i \leq m-1 \\ l_{r,m} = \min(k_{r-1,m}, k_{r,m}) + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Preuve du théorème 2.2.5 : Pour décomposer un G-module irréductible, de plus grand poids Λ, en K-modules irréductibles, on utilise l'égalité (2.1) ou (2.2), et on détermine l'ensemble E tel que :

$$\xi_G(\Lambda + \delta_G).\xi_K(\delta_K) = \xi_G(\delta_G). \sum_{\Lambda' \in E} \xi_K(\Lambda' + \delta_K).$$

Tout revient donc à diviser $\xi_G(\Lambda + \delta_G)$ par $\xi_G(\delta_G)/\xi_K(\delta_K)$, et identifier le résultat obtenu avec $\sum_{\Lambda' \in E} \xi_K(\Lambda' + \delta_K)$ pour déterminer l'ensemble E. Ceci est possible car les $\xi_K(\Lambda' + \delta_K)$, où Λ' est une forme entière dominante, sont linéairement indépendant (lemme 1.2.49). On a aussi par la formule des caractères de Weyl :

$$\xi_G(\delta_G) = \prod_{\alpha \in \Delta_G^+} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)) \quad \text{et} \quad \xi_K(\delta_K) = \prod_{\alpha \in \Delta_K^+} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)).$$

Donc

$$\frac{\xi_G(\delta_G)}{\xi_K(\delta_K)} = \prod_{\alpha \in \Delta_G^+ - \Delta_K^+} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)).$$

On écrit Λ sous la forme (2.3), ce qui revient à écrire :

$$\Lambda + \delta_G = H_1\lambda_1 + H_2\lambda_2 + ... + \varepsilon H_m \lambda_m,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, $H_i = h_i + m - i$. Les H_i sont donc des entiers qui vérifient

$$H_1 > H_2 > ... > H_m \geq 0.$$

De la même façon, on écrit Λ' sous la forme (2.4), ce qui implique que :

$$\Lambda' + \delta_K = K_1\lambda_1 + ... + \varepsilon' K_q \lambda_q + K_{q+1}\lambda_{q+1} + ... + \varepsilon'' K_m \lambda_m,$$

où $K_i = k_i + q - i$ pour tout $1 \leq i \leq q$ et $K_i = k_i + m - i$ pour tout $q+1 \leq i \leq m$. Les K_i sont donc des entiers qui vérifient :

$$K_1 > K_2 > ... > K_q \geq 0$$
$$K_{q+1} > K_{q+2} > ... > K_m \geq 0.$$

On obtient alors :

$$\frac{\xi_G(\delta_G)}{\xi_K(\delta_K)} = \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=q+1}^{m} (e(\alpha_{ij}) - e(-\alpha_{ij}))(e(\beta_{ij}) - e(-\beta_{ij})) = \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=q+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}).$$

D'autre part,

$$\xi_G(\Lambda + \delta_G) = \sum_{\sigma \in W_G} (-1)^{\sigma} e(\sigma(H_1\lambda_1 + H_2\lambda_2 + ... + \varepsilon H_m\lambda_m)).$$

En faisant opérer tout d'abord les éléments de W_G qui consistent à multiplier par les ε_i (et dont la signature est 1) on obtient $\sum_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m} e(\varepsilon_1 H_1\lambda_1 + \varepsilon_2 H_2\lambda_2 + ... + \varepsilon\varepsilon_m H_m\lambda_m)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $\varepsilon_1 ... \varepsilon_m = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[c(H_1\lambda_1)...c(\varepsilon H_m\lambda_m) + s(H_1\lambda_1)...s(\varepsilon H_m\lambda_m)\right] \\ = \; & \frac{1}{2}\left[c(H_1\lambda_1)...c(\varepsilon H_m\lambda_m) + s(H_1\lambda_1)...\varepsilon s(H_m\lambda_m)\right]. \end{aligned}$$

On applique ensuite les éléments du groupe symétrique S_m, on trouve, en utilisant la définition du déterminant, que :

$$\xi_G(\Lambda + \delta_G) = \frac{1}{2}\left\{\det\left[c(H_i\lambda_j)\right]_{1:m} + \varepsilon \det\left[s(H_i\lambda_j)\right]_{1:m}\right\}.$$

De la même façon on trouve, en utilisant le fait que le groupe de Weyl de K est le produit $W_{\mathrm{SO}(2q)} \times W_{\mathrm{SO}(n-2q)}$, que :

$$\xi_K(\Lambda' + \delta_K) =$$
$$\frac{1}{4}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon' \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\} \times \left\{\det[c(K_i\lambda_j]_{q+1:m} + \varepsilon'' \det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m}\right\}.$$

Déterminer l'ensemble E tel que

$$\frac{\xi_G(\Lambda + \delta_G)}{\xi_G(\delta_G)/\xi_K(\delta_K)} = \sum_{\Lambda' \in E} \xi_K(\Lambda' + \delta_K),$$

revient à déterminer les entiers $K_1, ..., K_m$ tels que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m} + \varepsilon \det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=q+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})}$$

$$= \sum_{K_i} \frac{1}{4}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon' \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\} \times \left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{q+1:m} + \varepsilon'' \det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m}\right\},$$

où la somme porte sur les entiers $K_1, ..., K_m$ qui vérifient :

$$\begin{cases} K_1 > ... > K_q \geq 0 \\ K_{q+1} > ... > K_m \geq 0. \end{cases}$$

Ceci veut dire que :

$$\prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij}) s(\beta_{ij}) \times \sum_{K_{1,i}} \cdots \sum_{K_{q,i}} \left\{ \prod_{r=1}^{q} \left(\prod_{i=r}^{m-1} \frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)} \right) \right\}$$

$$\{H^1 ... H^q c(l_{1,m}\lambda_1) ... c(l_{q,m}\lambda_q) \det[c(K_{q,i}\lambda_j]_{q+1:m} + \varepsilon s(l_{1,m}\lambda_1) ... s(l_{q,m}\lambda_q) \det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}\}$$

$$= \sum_{K_i} \frac{1}{2} \left\{ \det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon' \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q} \right\} \times \left\{ \det[c(K_i\lambda_j)]_{q+1:m} + \varepsilon'' \det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m} \right\}.$$

On va ensuite permuter les sommes de telle manière d'avoir celle sur les $K_{q,i}$ à l'extérieur. On commence par permuter les sommes sur les $K_{q,i}$ et les $K_{q-1,i}$ et ainsi de suite. Après r étapes, on obtient des nouvelles conditions :

$$\begin{cases} K_{q-r-1,i+r+1} + r < K_{q,i} < K_{q-r-1,i-r-1} - r & \text{pour} \quad q+1 \leq i \leq m-r-1 \\ K_{q,i} < K_{q-r-1,i-r-1} - r & \text{pour} \quad m-r \leq i \leq m \\ 0 \leq K_{q,m} < ... < K_{q,q+1}, \end{cases}$$

et les conditions (C'_r) sur les entiers $K_{r,i}$, données ci-dessous. Pour simplifier les expressions, on pose :

$$\begin{aligned} a_{q,r,i} &= \max(K_{q-r-2,i+1}, K_{q,i+r+1} + r) \\ b_{q,r,i} &= \min(K_{q-r-2,i-1}, K_{q,i-r-1} - r). \end{aligned}$$

- Si $2r > m - q - 3$:

  Dans ce cas, (C'_{q-r-1}) sont les conditions :

$$\begin{cases} a_{q,r,i} < K_{q-r-1,i} < K_{q-r-2,i-1} & \text{pour} \quad q-r \leq i \leq m-r-1 \\ K_{q-r-2,i+1} < K_{q-r-1,i} < K_{q-r-2,i-1} & \text{pour} \quad m-r \leq i \leq q+r+1 \\ K_{q-r-2,i+1} < K_{q-r-1,i} < b_{q,r,i} & \text{pour} \quad q+r+2 \leq i \leq m-1 \\ K_{q-r-1,m} < b_{q,r,m} \\ 0 \leq K_{q-r-1,m} < ... < K_{q-r-1,q-r}. \end{cases}$$

- Si $2r \leq m - q - 3$:

  Dans ce cas, (C'_{q-r-1}) sont les conditions :

$$\begin{cases} a_{q,r,i} < K_{q-r-1,i} < K_{q-r-2),i-1} & \text{pour} \quad q-r \leq i \leq q+r+1 \\ a_{q,r,i} < K_{q-r-1,i} < b_{q,r,i} & \text{pour} \quad q+r+2 \leq i \leq m-r-1 \\ K_{q-r-2,i+1} < K_{q-r-1,i} < b_{q,r,i} & \text{pour} \quad m-r \leq i \leq m-1 \\ K_{q-r-1,m} < b_{q,r,m} \\ 0 \leq K_{q-r-1,m} < ... < K_{q-r-1,q-r}. \end{cases}$$

Après $q-1$ étapes, la somme sur les $K_{q,i}$ est à l'extérieur et on a :

$$(C'_q) \quad \begin{cases} H_{i+q}+q \leq K_{q,i} \leq H_{i-q}-q & \text{pour } \quad q+1 \leq i \leq m-q \\ K_{q,i} \leq H_{i-q}-q & \text{pour } \quad m-q+1 \leq i \leq m \\ 0 \leq K_{q,m} < \ldots < K_{q,q+1}. \end{cases}$$

On pose $K_{0,i}=H_i$. On a les deux possibilités suivantes :

1. Il existe $0 \leq r \leq q$ tel que $K_{r,m}=0$ et dans ce cas, $\det[s(K_{r,i}\lambda_j)]_{r+1:m}=0$. Ainsi, $\det[s(K_{s,i}\lambda_j)]_{s+1:m}=0$ pour tout $r \leq s \leq q$. Par conséquent, $\det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}=0$.
2. Pour tout $0 \leq r \leq q$, $K_{r,m}>0$. Dans ce cas, $H^r=1$ pour tout $1 \leq r \leq q$. D'autre part,
$$c(l_{1,m}\lambda_1)\ldots c(l_{q,m}\lambda_q)=\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q),$$
et
$$s(l_{1,m}\lambda_1)\ldots s(l_{q,m}\lambda_q)=\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_q e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q),$$
où la somme porte sur $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q \in \{-1,1\}$.

En utilisant ces expressions, on obtient :

$$c(l_{1,m}\lambda_1)\ldots c(l_{q,m}\lambda_q)\det[c(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}+\varepsilon s(l_{1,m}\lambda_1)\ldots s(l_{q,m}\lambda_q)\det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}$$

$$=\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q)\{\det[c(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}+\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q.\varepsilon\det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}\}.$$

Ainsi,

$$\prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{\substack{K_{q,i}\\ K_{q,m}>0}}\ \sum_{\substack{K_{1,i}\\ K_{m,i}>0}} \cdots \sum_{\substack{K_{q-1,i}\\ K_{q-1,m}>0}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\right\}$$

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1+\ldots+\varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q)\{\det[c(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}+\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q.\varepsilon\det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}\}$$

$$=\sum_{K_i}\frac{1}{2}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q}+\varepsilon'\det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\} \times \left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{q+1:m}+\varepsilon''\det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m}\right\}.$$

Après identification on trouve les possibilités :

(i) $K_i=K_{q,i}$ pour tout $q+1 \leq i \leq m$ $(K_m=0)$, et

$$\sum_{K_1>\ldots K_q \geq 0}\frac{1}{2}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q}+\varepsilon'\det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \underbrace{\sum_{K_{1,i}}\cdots\sum_{K_{q-1,i}}}_{\text{un des } K_{r,m}=0} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right) H^r c(l_{r,m}\lambda_r)\right\},$$

(ii) $K_i = K_{q,i}$ pour tout $q+1 \leq i \leq m$ $(K_m > 0)$, $\varepsilon'' = \varepsilon$ et

$$\sum_{K_1>\dots K_q\geq 0} \frac{1}{2}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon' \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{\substack{K_{1,i}\\K_{1,m}>0}} \cdots \sum_{\substack{K_{q-1,i}\\K_{q-1,m}>0}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\right\}$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q\\ \varepsilon_1\dots\varepsilon_q=1}} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1 + \dots + \varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q),$$

(iii) $K_i = K_{q,i}$ pour tout $q+1 \leq i \leq m$ $(K_m > 0)$, $\varepsilon'' = -\varepsilon$ et

$$\sum_{K_1>\dots K_q\geq 0} \frac{1}{2}\left\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon' \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) times \sum_{\substack{K_{1,i}\\K_{1,m}>0}} \cdots \sum_{\substack{K_{q-1,i}\\K_{q-1,m}>0}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\right\}$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q\\ \varepsilon_1\dots\varepsilon_q=-1}} e(\varepsilon_1 l_{1,m}\lambda_1 + \dots + \varepsilon_q l_{q,m}\lambda_q),$$

où les conditions sur les $K_{r,i}$, $1 \leq r \leq q-1$, sont les (C'_r) et sur les $K_{q,i}$ sont les (C'_q).

On trouve donc :

$$\begin{cases} h_{i+q} \leq k_i \leq h_{i-q} & \text{pour} \quad q+1 \leq i \leq m-q \\ k_i \leq h_{i-q} & \text{pour} \quad m-q+1 \leq i \leq m \\ 0 \leq k_m \leq \dots \leq k_q. \end{cases}$$

Si on pose :

$$k_{r,i} = K_{r,i} - m + i, \quad \text{pour tout } \ 0 \leq r \leq q-1 \ \text{ et } \ r+1 \leq i \leq m,$$

on peut vérifier que les conditions sur les $k_{r,i}$ sont celles données par (2.7) et (2.8) et que les entiers $l_{r,i}$, $(1 \leq r \leq q$ et $r \leq i \leq m)$ sont ceux donnés dans l'énoncé du théorème. Ceci prouve le théorème 2.2.5. □

Preuve du théorème 2.2.6 : On écrit Λ sous la forme (2.5), ce qui revient à écrire :

$$\Lambda + \delta_G = H_1\lambda_1 + \dots + H_m\lambda_m,$$

où $H_i = h_i + m - i + 1/2$, sont des demi-entiers qui vérifient :

$$H_1 > H_2 > ... > H_m > 0.$$

On écrit Λ' sous la forme (2.6), i.e. :

$$\Lambda' + \delta_K = K_1\lambda_1 + ... + \varepsilon K_q\lambda_q + K_{q+1}\lambda_{q+1} + ... + K_m\lambda_m,$$

où $K_i = k_i + q - i$, pour $1 \leq i \leq q$, sont des entiers, et $K_i = k_i + m - i + 1/2$, pour $q+1 \leq i \leq m$, sont des demi-entiers, tels que :

$$K_1 > K_2 > ... > K_q \geq 0$$
$$K_{q+1} > K_{q+2} > ... > K_m > 0$$

En faisant le calcul comme dans le théorème 2.2.5, on obtient :

$$\frac{\xi_G(\delta_G)}{\xi_K(\delta_K)} = s(\frac{\lambda_1}{2})...s(\frac{\lambda_q}{2})\prod_{i=1}^{q}\prod_{j=q+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})$$
$$\xi_G(\Lambda + \delta_G) = \det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}$$
$$\xi_K(\Lambda' + \delta_K) = \frac{1}{2}\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\} \times \det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m},$$

et

$$\frac{\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{i=1}^{q} s(\frac{\lambda_i}{2})\prod_{i=1}^{q}\prod_{j=q+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})}$$

$$= \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{K_{1,i}} ... \sum_{K_{q,i}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\frac{s(l_{r,m}\lambda_r)}{s(\lambda_r/2)}\right\} \det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}.$$

Donc la détermination de l'ensemble E qui vérifie :

$$\xi_G(\Lambda + \delta_G).\xi_K(\delta_K) = \xi_G(\delta_G).\sum_{\Lambda' \in E} \xi_K(\Lambda' + \delta_K),$$

est équivalente à trouver les entiers $K_1, ..., K_q$ et les demi-entiers $K_{q+1}, ..., K_m$ tels que :

$$K_1 > ... > K_q \geq 0 \quad \text{et} \quad K_{q+1} > ... > K_m > 0,$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{K_i}\{\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q}\} \times \det[s(K_i\lambda_j)]_{q+1:m}$$

$$= \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{K_{1,i}} ... \sum_{K_{q,i}} \left\{\prod_{r=1}^{q}\left(\prod_{i=r}^{m-1}\frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)}\right)\frac{s(l_{r,m}\lambda_r)}{s(\lambda_r/2)}\right\} \det[s(K_{q,i}\lambda_j)]_{q+1:m}.$$

Après permutation des sommes et identification des termes, on trouve que $K_i = K_{q,i}$, pour tout $q+1 \leq i \leq m$, avec les conditions :

$$\begin{cases} H_{i+q} + q \leq K_{q,i} \leq H_{i-q} - q & \text{pour} \quad q+1 \leq i \leq m-q \\ K_{q,i} \leq H_{i-q} - q & \text{pour} \quad m-q+1 \leq i \leq m \\ 0 < K_{q,m} < \ldots < K_{q,q+1}, \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{2} \sum_{K_1 > \ldots > K_q > 0} (\det[c(K_i\lambda_j)]_{1:q} + \varepsilon \det[s(K_i\lambda_j)]_{1:q})$$

$$= \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=i+1}^{q} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij}) \times \sum_{K_{1,i}} \cdots \sum_{K_{q-1,i}} \left\{ \prod_{r=1}^{q} \left(\prod_{i=r}^{m-1} \frac{s(l_{r,i}\lambda_r)}{s(\lambda_r)} \right) \frac{s(l_{r,m}\lambda_r)}{s(\lambda_r/2)} \right\}.$$

Les $K_{r,i}$ vérifient les conditions (C'_r) (mais $K_{r,m} > 0$). En posant $k_{r,i} = K_{r,i} - m + i - \frac{1}{2}$, pour tout $0 \leq r \leq q-1$ et $r+1 \leq i \leq m$, on obtient le théorème. □

2.2.1 Preuve des lemmes 2.2.3 et 2.2.4

On commence par le lemme 2.2.3. Sa preuve est inspirée de la référence [43]. Le lemme 2.2.4 en est une généralisation ; il est utilisé dans la preuve des théorèmes 2.2.5 et 2.2.6.

Preuve du lemme 2.2.3 : On montre le lemme dans le cas où les H_i sont des entiers. Dans l'autre cas le calcul se fait de la même manière.

On pose :

$$\begin{aligned} u_{ij} &= s((H_{i-1} + H_i)\alpha_{1j}).s((H_{i-1} - H_i)\beta_{1j}), \\ v_{ij} &= s((H_{i-1} - H_i)\alpha_{1j}).s((H_{i-1} + H_i)\beta_{1j}). \end{aligned}$$

Première étape : *On montre que :*

$$\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m} = \prod_{i=2}^{m-1} (c(H_i\lambda_1))^{-1} \times \det[u_{ij} + v_{ij}]_{2:m}. \tag{2.10}$$

En effet, on transforme la matrice $[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}$ de la façon suivante :

On multiple la $(m-1)$-ème ligne par le terme $H.c(H_m\lambda_1)/c(H_{m-1}\lambda_1)$, puis on la retranche de la m-ème. Ensuite, pour toute ligne i (partant de $m-1$ jusqu'à 2), on multiplie la $(i-1)$-ème ligne par le terme $c(H_i\lambda_1)/c(H_{i-1}\lambda_1)$, puis on la retranche de la i-ème. Cette transformation préserve le déterminant.

La matrice obtenue est :

$$\begin{pmatrix} c(H_1\lambda_1) & c(H_1\lambda_2) & \cdots & c(H_1\lambda_m) \\ 0 & & & \\ \vdots & & \left[c(H_i\lambda_j) - c(H_{i-1}\lambda_1).\dfrac{c(H_i\lambda_1)}{c(H_{i-1}\lambda_1)} \right]_{2:m} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m} = c(H_1\lambda_1)\det\left[c(H_i\lambda_j) - c(H_{i-1}\lambda_j).\frac{c(H_i\lambda_1)}{c(H_{i-1}\lambda_1)}\right]_{2:m}$$

$$= c(H_1\lambda_1).\prod_{i=2}^{m}(c(H_{i-1}\lambda_1))^{-1}.\det[c(H_i\lambda_j)c(H_{i-1}\lambda_1) - c(H_{i-1}\lambda_j)c(H_i\lambda_1)]_{2:m}$$

$$= \prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}.\det[c(H_i\lambda_j)c(H_{i-1}\lambda_1) - c(H_{i-1}\lambda_j)c(H_i\lambda_1)]_{2:m}.$$

D'autre part, un calcul simple permet de vérifier que :

$$\begin{aligned}
&c(H_i\lambda_j)c(H_{i-1}\lambda_1) - c(H_{i-1}\lambda_j)c(H_i\lambda_1)\\
&= s((H_{i-1}+H_i)\alpha_{1j}).s((H_{i-1}-H_i)\beta_{1j}) + s((H_{i-1}-H_i)\alpha_{1j}).s((H_{i-1}+H_i)\beta_{1j})\\
&= u_{ij} + v_{ij},
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité (2.10).

Deuxième étape : *Pour tout entier* $0 \leq k \leq H_{i-1} - 1$, *on pose :*

$$P_i(k) = \begin{cases} s((H_{i-1} - H_i)\lambda_1) & \text{pour} \quad k = 0 \\ s((H_{i-1} - \max(H_i, k))\lambda_1)c(\min(H_i, k)\lambda_1) & \text{pour} \quad 1 \leq k \leq H_{i-1} - 1, \end{cases}$$

et on montre que pour tout $1 \leq i \leq n$ *et* $2 \leq j \leq n$ *:*

$$\frac{u_{ij} + v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = (s(\lambda_1))^{-1}\sum_{k=0}^{H_{i-1}-1} P_i(k)c(k\lambda_j). \tag{2.11}$$

Tout d'abord, en utilisant la remarque 2.2.2, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{s((H_{i-1}+H_i)\alpha_{1j})}{s(\alpha_{1j})} &= \sum_{k=0}^{H_{i-1}+H_i-1} e((2k - H_{i-1} - H_i + 1)\alpha_{1j}),\\
\frac{s((H_{i-1}-H_i)\beta_{1j})}{s(\beta_{1j})} &= \sum_{k=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2k - H_{i-1} + H_i + 1)\beta_{1j}),\\
\frac{s((H_{i-1}-H_i)\alpha_{1j})}{s(\alpha_{1j})} &= \sum_{k=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2k - H_{i-1} + H_i + 1)\alpha_{1j}),\\
\frac{s((H_{i-1}+H_i)\beta_{1j})}{s(\beta_{1j})} &= \sum_{k=0}^{H_{i-1}+H_i-1} e((2k - H_{i-1} - H_i + 1)\beta_{1j}).
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} &= \sum_{r=0}^{H_{i-1}+H_i-1}\ \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((r+s-H_{i-1}+1)\lambda_1 + (r-s-H_i)\lambda_j),\\
\frac{v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} &= \sum_{r=0}^{H_{i-1}+H_i-1}\ \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((r+s-H_{i-1}+1)\lambda_1 - (r-s-H_i)\lambda_j),
\end{aligned}$$

ou aussi :

$$\frac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = \sum_{r=0}^{H_{i-1}+H_i-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((r+s-H_{i-1}+1)\lambda_1)c((r-s-H_i)\lambda_j).$$

Si on pose $r-s-H_i=k$ et on exprime r en fonction de s et k, alors les conditions sur s et k seront :

$$\begin{cases} 1-H_{i-1} \leq k \leq H_{i-1}-1, \\ \max(0,-H_i-k) \leq s \leq \min(H_{i-1}-H_i-1, H_{i-1}-k-1). \end{cases}$$

L'expression de $\dfrac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} &= \sum_{k=-H_{i-1}+1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=\max(0,-H_i-k)}^{H_{i-1}-1-\max(H_i,k)} e((2s+k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\ &= \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-1-\max(H_i,k)} e((2s+k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\ &\quad + \sum_{k=-H_{i-1}+1}^{-1} \sum_{s=\max(0,-H_i-k)}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s+k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j). \end{aligned}$$

On traite le deuxième et le troisième termes de $\dfrac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}$.

- Le deuxième terme devient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{H_i} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s+k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\ &\qquad + \sum_{k=H_i+1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-k-1} e((2s-k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{H_i} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s+k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=H_i+1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-k-1} e((2s+H_i-(H_{i-1}-k-1))\lambda_1)c(k\lambda_j). \end{aligned}$$

– Le troisième terme devient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=\max(0,-H_i+k)}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s-k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{H_i} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s-k-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_j) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=H_i+1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-k-1} e((2s-H_i-(H_{i-1}-k-1))\lambda_1)c(k\lambda_j).
\end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant dans l'expression de $\frac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{ij}+v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} &= \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(0) \\
&+ \sum_{k=1}^{H_i} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-H_i-1} e((2s-(H_{i-1}-H_i-1))\lambda_1)c(k\lambda_1)c(k\lambda_j) \\
&+ \sum_{k=H_i+1}^{H_{i-1}-1} \sum_{s=0}^{H_{i-1}-k-1} e((2s-(H_{i-1}-k-1))\lambda_1)c(H_i\lambda_1)c(k\lambda_j) \\
&= \frac{s((H_{i-1}-H_i)\lambda_1)}{s(\lambda_1)}c(0) + \sum_{k=1}^{H_i} \frac{s((H_{i-1}-H_i)\lambda_1)}{s(\lambda_1)}c(k\lambda_1)c(k\lambda_j) \\
&+ \sum_{k=H_i+1}^{H_{i-1}-1} \frac{s((H_{i-1}-k)\lambda_1)}{s(\lambda_1)}c(H_i\lambda_1)c(k\lambda_j)
\end{aligned}$$

Quand on exprime les quantités obtenues en termes de P_i, on obtient l'égalité (2.11).

Troisième étape : *Simplification de l'expression :*

$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^m s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^m s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}\\
&= (s(\lambda_1))^{-(m-1)}\prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}.\det\left[\sum_{K_i=0}^{H_{i-1}-1}P_i(K_i)c(K_i\lambda_j)\right]_{2:m}\\
&= (s(\lambda_1))^{-(m-1)}\prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}\sum_{K_2=0}^{H_1-1}\dots\sum_{K_m=0}^{H_{m-1}-1}\left\{\prod_{i=2}^{m}(P_i(K_i)).\det[c(K_i\lambda_j)]_{2:m}\right\}\\
&= (s(\lambda_1))^{-(m-1)}\prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}\sum_{K_2,\dots,K_m\in\mathbb{N}}\left\{\prod_{i=2}^{m}(P_i(K_i)).\det[c(K_i\lambda_j)]_{2:m}\right\}\\
&= (s(\lambda_1))^{-(m-1)}\prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}\sum_{K_2>\dots>K_m\geq 0}\left\{\det[P_i(K_j)]_{2:m}.\det[c(K_i\lambda_j)]_{2:m}\right\},
\end{aligned}$$

où on a posé $P_i(k) = 0$ si $k \geq H_{i-1}$.

On va ensuite restreindre les domaines des K_i en remarquant que s'il existe un $2 \leq i \leq m$ tel que $H_{i-1} \leq K_i$ ou $K_i \leq H_{i+1}$, alors $\det[P_l(K_j)]_{2:m} = 0$. En effet :

– Si $H_{i-1} \leq K_i$ pour un certain $2 \leq i \leq m$, on obtient :

$$K_2 > \dots > K_i \geq H_{i-1} > H_i > \dots > H_m \geq 0.$$

Donc, $P_l(K_j) = 0$, pour tout $i \leq l \leq m$ et $2 \leq j \leq i$. Ceci implique :

$$\det[P_l(K_j)]_{2:m} = 0.$$

– Si $K_i \leq H_{i+1}$ pour un certain $2 \leq i \leq m$, alors :

$$0 \leq K_m < K_{m-1} < \dots < K_i \leq H_{i+1} < H_i < \dots < H_1.$$

Ainsi, $P_l(K_j) = s((H_{l-1} - H_l)\lambda_1)c(K_j\lambda_1)$, pour tout $2 \leq l \leq i+1$ et $i \leq j \leq m-1$, et $P_l(\tilde{K}_m) = H.s((H_{l-1} - H_l)\lambda_1)c(K_m\lambda_1)$, et on trouve aussi dans ce cas

$$\det[P_l(K_j)]_{2:m} = 0.$$

On peut donc supposer que les K_i vérifient les conditions :

$$\begin{cases} H_{i+1} < K_i < H_{i-1} \\ 0 \leq K_m < H_{m-1}. \end{cases}$$

Ainsi, l'expression de $\dfrac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^m s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}$ devient :

$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^m s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} =$$

$$(s(\lambda_1))^{-(m-1)}\prod_{i=2}^{m-1}(c(H_i\lambda_1))^{-1}\sum_{\substack{K_2>\dots>K_m\geq 0\\ H_{i-1}>K_i>H_{i+1}\\ H_{m-1}>K_m\geq 0}}\left\{\det[P_i(K_j)]_{2:m}.\det[c(K_i\lambda_j)]_{2:m}\right\}. \quad (2.12)$$

Quatrième étape : *Calcul de* $\det[P_i(\tilde{K}_j)]_{2:m}$ *et fin de la preuve.*

On commence par calculer le déterminant de la matrice $[P_i(K_j)]_{2:m}$. Les conditions sur les K_i impliquent que si $i \geq j+2$, alors $K_j > H_{j+1} > H_{i-1}$, ce qui donne que $P_i(K_j) = 0$. D'autre part, si on multiplie la $(j-1)$-ème colonne de la matrice $[P_i(K_j)]_{2:m}$ par $c(K_j\lambda_1)/c(K_{j-1}\lambda_1)$ (ou $H\times$ce terme si $j = m$), et on la retranche de la j-ème colonne, pour j allant de de m à 3, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} P_2(K_2) & \\ \vdots & \left(P_i(K_j) - P_i(K_{j-1}).\dfrac{c(K_j\lambda_1)}{c(K_{j-1}\lambda_1)}\right)_{\substack{2\leq i\leq m \\ 3\leq j\leq m}} \\ P_m(K_2) & \end{pmatrix},$$

dont les éléments sont nuls si $i \geq j+2$.

Si $m \geq j \geq i+2 \geq 4$, alors $K_j < K_{j-1} \leq H_{j-2} - 1 \leq H_i - 1 < H_i$. Ainsi, pour tout i, j tels que $4 \leq i+2 \leq j \leq m-1$, on a :

$$P_i(K_j) = s((H_{i-1} - H_i)\lambda_1)c(K_j\lambda_1) \quad \text{et} \quad P_i(K_{j-1}) = s((H_{i-1} - H_i)\lambda_1)c(K_{j-1}\lambda_1),$$

et pour tout i tel que $4 \leq i+2 \leq m$, on a :

$$P_i(K_m) = H.s((H_{i-1} - H_i)\lambda_1)c(K_m\lambda_1).$$

Ceci implique que pour $j \geq i+2$:

$$P_i(K_j) - P_i(K_{j-1}).\frac{c(K_j\lambda_1)}{c(K_{j-1}\lambda_1)} = 0, \quad \text{pour } j \leq m-1,$$

et

$$P_i(K_m) - P_i(K_{m-1}).H.\frac{c(K_m\lambda_1)}{c(K_{m-1}\lambda_1)} = 0.$$

Si on désigne par $[P_{ij}]_{2:m}$ la matrice obtenue après transformation alors $[P_{ij}]_{2:m}$ est une matrice tridiagonale. De plus, son déterminant est égal à celui de $[P_i(K_j)]_{2:m}$. On a aussi $P_{i,i+1}.P_{i+1,i} = 0$, pour tout $2 \leq i \leq m-1$. En fait :

$$P_{i,i+1} = 0 \quad \text{pour } K_j \leq H_i \quad \text{et} \quad P_{i+1,i} = 0 \text{ sinon.}$$

Donc,

$$\det[P_i(K_j)]_{2:m} = \det[P_{ij}]_{2:m} = \prod_{i=2}^{m} P_{ii}.$$

On pose :

$$\begin{cases} p_1 = H_1 \\ p_i = \min(H_i, K_i) \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq m, \end{cases}$$

et on montre que :

$$P_{ii} = c(H_{i-1}\lambda_1)s(l_{i-1}\lambda_1)\frac{c(p_i\lambda_1)}{c(p_{i-1}\lambda_1)}, \quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq m-1,$$

et

$$P_{mm} = c(H_{m-1}\lambda_1)s(l_{m-1}\lambda_1).H.\frac{c(p_m\lambda_1)}{c(p_{m-1}\lambda_1)}.$$

En effet, on a les possibilités suivantes :

- Cas où $p_{i-1} = H_{i-1}$, i.e. $K_{i-1} \geq H_{i-1}$, pour un certain $3 \leq i \leq m$:
  Dans ce cas, $P_i(K_{i-1}) = 0$ et pour $3 \leq i \leq m-1$ on obtient :

$$\begin{aligned} P_{ii} &= P_i(K_i) - P_i(K_{i-1}).\frac{c(K_i\lambda_1)}{c(K_{i-1}\lambda_1)} = P_i(K_i) \\ &= s((H_{i-1} - \max(H_i, \tilde{K}_i))\lambda_1)c(\min(H_i, \tilde{K}_i)\lambda_1) \\ &= s(l_{i-1}\lambda_1)c(p_i\lambda_1) = c(H_{i-1}\lambda_1)s(l_{i-1}\lambda_1)\frac{c(p_i\lambda_1)}{c(p_{i-1}\lambda_1)}, \end{aligned}$$

  et

$$P_{mm} = P_m(K_m) = c(H_{m-1}\lambda_1)s(l_{m-1}\lambda_1).H.\frac{c(p_m\lambda_1)}{c(p_{m-1}\lambda_1)}.$$

- Cas où $p_{i-1} = K_{i-1}$, pour un certain $3 \leq i \leq m$:
  Dans ce cas, on a pour tout $3 \leq i \leq m-1$:

$$\begin{aligned} P_{ii} &= P_i(K_i) - P_i(K_{i-1}).\frac{c(K_i\lambda_1)}{c(K_{i-1}\lambda_1)} \\ &= s((H_{i-1} - \max(H_i, \tilde{K}_i))\lambda_1)c(\min(H_i, K_i)\lambda_1) \\ &- s((H_{i-1} - K_{i-1})\lambda_1)c(H_i\lambda_1).\frac{c(K_i\lambda_1)}{c(K_{i-1}\lambda_1)} \\ &= \{s((H_{i-1} - \max(H_i, K_i))\lambda_1)c(K_{i-1}\lambda_1) \\ &- s((H_{i-1} - K_{i-1})\lambda_1)c(\max(H_i, K_i)\lambda_1)\}\,\frac{c(p_i\lambda_1)}{c(p_{i-1}\lambda_1)} \\ &= c(H_{i-1}\lambda_1)s(l_{i-1}\lambda_1)\frac{c(p_i\lambda_1)}{c(p_{i-1}\lambda_1)}, \end{aligned}$$

  et

$$P_{mm} = P_m(K_m) - P_m(K_{m-1})H\frac{c(K_m\lambda_1)}{c(K_{m-1}\lambda_1)} = c(H_{m-1}\lambda_1)s(l_{m-1}\lambda_1)H\frac{c(p_m\lambda_1)}{c(p_{m-1}\lambda_1)}.$$

En utilisant les valeurs obtenues pour P_{ii}, on obtient :

$$\begin{aligned} \det[P_i(K_j)]_{2:m} &= \prod_{i=1}^{m-1} c(H_i\lambda_1.\prod_{i=1}^{m-1} s(l_i\lambda_1).H\frac{c(p_m\lambda_1)}{c(p_1\lambda_1)} \\ &= \prod_{i=2}^{m-1} c(H_i\lambda_1).\prod_{i=1}^{m-1} s(l_i\lambda_1).Hc(l_m\lambda_1). \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant dans la formule (2.12), on obtient :

$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^{m} s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = (s(\lambda_1))^{-(m-1)}\sum_{K_i}\left\{\left(\prod_{i=1}^{m-1} s(l_i\lambda_1)\right)Hc(l_m\lambda_1)\det[c(K_i\lambda_j)]_{2:m}\right\},$$

où la somme porte sur les entiers K_i qui vérifient les conditions (C_1). Ceci montre la première partie du lemme.

On procède de la même façon avec $[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}$, pour prouver la seconde partie du lemme. On décrit uniquement les grandes étapes de la preuve.

Première étape : *On montre que :*

$$\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m} = \prod_{i=2}^{m-1} (s(H_i\lambda_1))^{-1} \times \det[u_{ij} - v_{ij}]_{2:m}. \tag{2.13}$$

Deuxième étape : *Pour tout entier* $0 \leq k \leq H_{i-1} - 1$, *on pose :*

$$Q_i(k) = \begin{cases} s((H_{i-1} - H_i)\lambda_1) & \text{pour} \quad k = 0 \\ s((H_{i-1} - \max(H_i, k))\lambda_1)s(\min(H_i, k)\lambda_1) & \text{pour} \quad 1 \leq k \leq H_{i-1} - 1, \end{cases}$$

et on montre que pour tout $1 \leq i \leq n$ *et* $2 \leq j \leq n$ *:*

$$\frac{u_{ij} - v_{ij}}{s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = (s(\lambda_1))^{-1} \sum_{k=0}^{H_{i-1}-1} Q_i(k)s(k\lambda_j). \tag{2.14}$$

Troisième étape : *On montre que :*

$$\frac{\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^{m} s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})} = (s(\lambda_1))^{-(m-1)} \prod_{i=2}^{m-1} (s(H_i\lambda_1))^{-1} \sum_{K_i} \{\det[Q_i(K_j)]_{2:m}. \det[s(K_i\lambda_j)]_{2:m}\},$$

où les K_i vérifient les conditions (C_1).

Quatrième étape : *On montre que :*

$$\det[Q_i(K_j)]_{2:m} = \left(\prod_{i=2}^{m-1} s(H_i\lambda_1)\right) \left(\prod_{i=1}^{m} s(l_i\lambda_1)\right).$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression de $\frac{\det[s(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{j=2}^{m} s(\alpha_{1j})s(\beta_{1j})}$ obtenue à la troisième étape, on prouve la deuxième assertion du lemme. □

Preuve du lemme 2.2.4 : On va faire la preuve dans le cas où les H_i sont des entiers. En appliquant le lemme 2.2.3 deux fois tout en utilisant les notations du lemme 2.2.4, on obtient :

$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{i=1}^{2} \prod_{j=i+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})}$$

$$= (s(\lambda_1))^{-(m-1)} \sum_{K_{1,i}} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{m-1} s(l_{1,i}\lambda_1)\right) H^1 c(l_{1,m}\lambda_1) \frac{\det[c(K_{1,i}\lambda_j)]_{2:m}}{\prod_{j=3}^{m} s(\alpha_{2j})s(\beta_{2j})} \right\}$$

$$= (s(\lambda_1))^{-(m-1)}(s(\lambda_2))^{-(m-2)} \times$$

$$\sum_{K_{1,i}} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{m-1} s(l_{1,i}\lambda_1)\right) H^1 c(l_{1,m}\lambda_1) \sum_{K_{2,i}} \left(\prod_{i=2}^{m-1} s(l_{2,i}\lambda_2)\right) H^2 c(l_{2,m}\lambda_2) \det[c(K_{2,i}\lambda_j)]_{3:m} \right\}.$$

Donc

$$\frac{\det[c(H_i\lambda_j)]_{1:m}}{\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=i+1}^{m} s(\alpha_{ij})s(\beta_{ij})}$$
$$= \sum_{K_{1,i}}\sum_{K_{2,i}}\left\{\left(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{s(l_{1,i}\lambda_1)}{s(\lambda_1)}\right)\left(\prod_{i=2}^{m-1}\frac{s(l_{2,i}\lambda_2)}{s(\lambda_2)}\right)H^1H^2c(l_{1,m}\lambda_1)c(l_{2,m}\lambda_2).\det[c(K_{2,i}\lambda_j)]_{3:m}\right\}.$$

La première assertion du lemme se fait ainsi par induction.

On peut montrer la deuxième assertion du lemme de la même façon. □

2.3 Décomposition de $\wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*_{\mathbb{C}}$

On identifie l'espace cotangent de $M = G/K$ en $o = [K]$ à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$, l'espace dual de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. On écrit :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_G} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_K} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_G\setminus\Delta_K} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Pour comprendre la structure du K-module $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$, on a besoin de la définition suivante :

Définition 2.3.1 *Soit G un sous-groupe du groupe linéaire des matrices carrées inversibles d'ordre n (à coefficients complexes ou réelles). La représentation standard de G sur $\mathbb{C}^n$ est l'action qui consiste à multiplier une matrice par un vecteur de $\mathbb{C}^n$.*

Les poids du K-module $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ sont les racines $\alpha \in \Delta_G \setminus \Delta_K$, donc les plus grands poids des sous-K-modules irréductibles de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ sont parmi les racines $\alpha \in \Delta_G \setminus \Delta_K$. D'autre part, on écrit une forme entière dominante Λ' qui correspond à un K-module irréductible, comme dans (2.4) si $n = 2m$, et comme dans (2.6) si $n = 2m+1$, on obtient pour Λ' les possibilités :

$$\Lambda' = \lambda_1 + \lambda_{q+1}, \quad \text{si } n = 2m,$$

et

$$\Lambda' = \lambda_1 + \lambda_{q+1} \quad \text{ou} \quad \Lambda' = \lambda_1, \quad \text{si } n = 2m+1.$$

D'autre part, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = k(n-k)$, (elle est égale à la dimension de M), et on a :

- La restriction de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ à $SO(k) \times \{I_{n-k}\}$, est isomorphe à $n-k$ copies de la représentation standard $\mathbb{C}^k$ de $SO(k)$. Il en est de même pour la restriction du K-module $V(\lambda_1 + \lambda_{q+1})$, au groupe $SO(k) \times \{I_{n-k}\}$.
- La restriction de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ à $\{I_k\} \times SO(n-k)$ est isomorphe à k copies de la représentation standard $\mathbb{C}^{n-k}$ de $SO(n-k)$. Il en est de même pour la restriction du K-module $V(\lambda_1 + \lambda_{q+1})$, au groupe $\{I_k\} \times SO(n-k)$.

On peut déduire de ce qui précède que le K-module $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\cong V(\lambda_1 + \lambda_{q+1})$. Donc $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ est un K-module irréductible ; il en est de même pour $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$.

Notations 2.3.2 *Soit H et L deux groupes et V un H-module et W un L-module. On munit l'espace $V \otimes W$ d'une structure de $H \times L$-module de sorte que H agit sur le premier facteur et L sur le deuxième. On note $V \boxtimes W$ le $H \times L$-module ainsi obtenu.*
Ainsi, le $\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$-module $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $V(\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_{q+1})$.

Notre but est de décomposer le K-module $\wedge^p \mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles. On commence par le cas particulier où $k = 4$. Le cas $k = 2q > 4$ se fait ensuite par induction.

2.3.1 Cas particulier où $K = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(n-4)$

Soit H le sous-groupe $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ de $\mathrm{SO}(4)$. On commence par restreindre $\wedge^p \mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ à $H \times \mathrm{SO}(n-4)$ et voir comment il se décompose en tant que $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-module, ensuite retrouver la K-décomposition irréductible. Pour cela on commence par la restriction de $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ ou $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$, i.e. $V(\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_3)$ à $H \times \mathrm{SO}(n-4)$. Or ceci revient à restreindre le $\mathrm{SO}(4)$-module $V(\lambda_1)$ à H. En utilisant un cas particulier du théorème 2.2.5, on trouve que la restriction du $\mathrm{SO}(4)$-module $V(\lambda_1)$ à H, se décompose en sous-H-modules irréductibles de la façon suivante :

$$V(\lambda_1)|_H \cong V(\lambda_1) \oplus V(-\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus V(-\lambda_2).$$

Donc la décomposition de $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-modules irréductibles est :

$$\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}} \cong (V(\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_3)) \oplus (V(-\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_3)) \oplus (V(\lambda_2) \boxtimes V(\lambda_3)) \oplus (V(-\lambda_2) \boxtimes V(\lambda_3)).$$

On désigne par V_1, V_2, V_3 et V_4 les $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-modules $V(\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_3)$, $V(-\lambda_1) \boxtimes V(\lambda_3)$, $V(\lambda_2) \boxtimes V(\lambda_3)$ et $V(-\lambda_2) \boxtimes V(\lambda_3)$ respectivement. On note $\wedge^{a,b,c,d}$, le $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-module, $\wedge^a V_1 \otimes \wedge^b V_2 \otimes \wedge^c V_3 \otimes \wedge^d V_4$.

Le $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-module $\wedge^p \mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ se décompose de la façon suivante :

$$\wedge^p \mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}} \cong \sum \wedge^{a,b,c,d} \qquad a+b+c+d = p. \tag{2.15}$$

D'autre part, la restriction à $\mathrm{SO}(n-4)$ de n'importe lequel des $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-modules, V_1, V_2, V_3, V_4, est isomorphe à $V = V(\lambda_3)$. De plus, le $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n-4)$-module, $\wedge^{a,b,c,d}$, est isomorphe à :

$$V((a-b)\lambda_1) \boxtimes V((c-d)\lambda_2) \boxtimes (\wedge^a V \otimes \wedge^b V \otimes \wedge^c V \otimes \wedge^d V). \tag{2.16}$$

Ceci veut dire qu'il suffit de décomposer le $\mathrm{SO}(n-4)$-module $\wedge^a V \otimes \wedge^b V \otimes \wedge^c V \otimes \wedge^d V$, en une somme de sous-$\mathrm{SO}(n-4)$-modules irréductibles pour obtenir la décomposition du $H \times \mathrm{SO}(n-4)$-module, $\wedge^{a,b,c,d}$. Supposons que :

$$\wedge^a V \otimes \wedge^b V \otimes \wedge^c V \otimes \wedge^d V \cong \sum V(\mu), \quad (\mathrm{SO}(n-4)\text{-modules}). \tag{2.17}$$

On aura :

$$\wedge^{a,b,c,d} \cong \sum_{\mu} V((a-b)\lambda_1) \boxtimes V((c-d)\lambda_2) \boxtimes V(\mu), \quad (\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n-4)\text{-modules}). \tag{2.18}$$

Notations 2.3.3 *On pose $\gamma_{j-2} = \lambda_j$ pour $3 \leq j \leq m$.*

1. *Dans le cas où $n = 2m$, on pose :*

$$\begin{array}{lcll}
\Gamma_0 & = & 0 & \\
\Gamma_j & = & \gamma_1 + ... + \gamma_j & \textit{pour} \quad 1 \leq j \leq m-4 \\
\Gamma_{m-3} & = & \frac{1}{2}(\gamma_1 + ... + \gamma_{m-3} - \gamma_{m-2}) & \\
\Gamma_{m-2} & = & \frac{1}{2}(\gamma_1 + ... + \gamma_{m-3} + \gamma_{m-2}) &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcll}
V_{i,j} & = & V(\Gamma_i + \Gamma_j) & \textit{pour} \quad 0 \leq i \leq j \leq m-4 \\
V_{i,m-3} & = & V(\Gamma_i + \Gamma_{m-3} + \Gamma_{m-2}) & \textit{pour} \quad 0 \leq i \leq m-4 \\
V_{m-3,m-3} & = & V(2\Gamma_{m-3} + 2\Gamma_{m-2}) & \\
V_{i,m-2} & = & V(\Gamma_i + 2\Gamma_{m-3}) \oplus V(\Gamma_i + 2\Gamma_{m-2}) & \textit{pour} \quad 0 \leq i \leq m-4 \\
V_{m-3,m-2} & = & V(3\Gamma_{m-3} + \Gamma_{m-2}) \oplus V(\Gamma_{m-3} + 3\Gamma_{m-2}) & \\
V_{m-2,m-2} & = & V(4\Gamma_{m-3}) \oplus V(4\Gamma_{m-2}) & \\
V_{i,j} & = & V_{i,n-4-j} & \textit{pour} \quad m-1 \leq j \leq n-4-i.
\end{array}$$

2. *Dans le cas où $n = 2m+1$, on pose :*

$$\begin{array}{lcll}
\Gamma_0 & = & 0 & \\
\Gamma_j & = & \gamma_1 + ... + \gamma_j & \textit{pour} \quad 1 \leq j \leq m-4 \\
\Gamma_{m-3} & = & \gamma_1 + ... + \gamma_{m-3} & \\
\Gamma_{m-2} & = & \frac{1}{2}(\gamma_1 + ... + \gamma_{m-3} + \gamma_{m-2}), &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcll}
V_{i,j} & = & V(\Gamma_i + \Gamma_j) & \textit{pour} \quad 0 \leq i \leq j \leq m-3 \\
V_{i,m-2} & = & V(\Gamma_i + 2\Gamma_{m-2}) & \textit{pour} \quad 0 \leq i \leq m-3 \\
V_{m-2,m-2} & = & V(4\Gamma_{m-2}) & \\
V_{i,j} & = & V_{i,n-4-j} & \textit{pour} \quad m-1 \leq j \leq n-4-i.
\end{array}$$

Les Γ_j, pour $1 \leq j \leq m-2$ sont les poids fondamentaux du groupe $\mathrm{SO}(n-4)$. Avec ces notations, la restriction de $\wedge^{a,b,c,d}$ à $\mathrm{SO}(n-4)$ est isomorphe à :

$$\wedge^a V(\Gamma_1) \otimes \wedge^b V(\Gamma_1) \otimes \wedge^c V(\Gamma_1) \otimes \wedge^d V(\Gamma_1).$$

Proposition 2.3.4 *[43] Le $SO(n-4)$-module $\wedge^r V(\Gamma_1) \otimes \wedge^s V(\Gamma_1)$, où $0 \leq r \leq s \leq m-2$, se décompose en sous-$SO(n-4)$-modules de la façon suivante :*

$$\wedge^{r,s} = \wedge^r V(\Gamma_1) \otimes \wedge^s V(\Gamma_1) \cong \sum_{i,j} V_{i,j},$$

où la somme porte sur les paires d'entiers (i,j) positifs ou nuls qui vérifient :

$$\begin{cases} j-i & \geq & s-r \\ i+j & \leq & r+s \\ i+j & \equiv & r+s \pmod 2. \end{cases}$$

On utilise cette proposition pour décomposer $\wedge^{a,b,c,d}$ en sous-modules irréductibles.

Proposition 2.3.5

(i) La restriction de $\wedge^{a,b,c,d}$ à $SO(n-4)$ se décompose :

$$\wedge^{a,b,c,d}|_{SO(n-4)} \cong \sum_{\substack{(i,j)\in S_1 \\ (k,l)\in S_2}} V_{i,j} \otimes V_{k,l},$$

où S_1 est l'ensemble des paires d'entiers positifs (i,j) telles que :

$$\begin{cases} j-i & \geq & b-a \\ i+j & \leq & a+b \\ i+j & \equiv & a+b \pmod 2, \end{cases}$$

et S_2 est l'ensemble des paires d'entiers positifs (k,l) telles que :

$$\begin{cases} l-k & \geq & d-c \\ k+l & \leq & c+d \\ k+l & \equiv & c+d \pmod 2. \end{cases}$$

(ii) La formule de multiplicité de Steinberg permet de décomposer $V_{i,j} \otimes V_{k,l}$ en sous-$SO(n-4)$-modules irréductibles pour un n donné en utilisant le programme informatique de l'annexe A.

(iii) Pour retrouver la décomposition de $\wedge^{a,b,c,d}$ en tant que $SO(4) \times SO(n-4)$-module, on regroupe les $SO(2) \times SO(2)$-modules irréductibles $V((a-b)\lambda_1 + (c-d)\lambda_2)$ en $SO(4)$-modules irréductibles (voir (2.16)).

Pour mieux comprendre la méthode, on pourra voir l'exemple traité au paragraphe 2.4 de la page 74.

2.3.2 Cas général

On considère maintenant un $k = 2q$ quelconque. On fait le calcul par induction sur q. Pour décomposer le K-module $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles, on commence, comme pour $q = 2$, par décomposer la restriction de $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ à $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2q-2) \times \mathrm{SO}(n-2q)$ puis celle de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ restreint à $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2q-2) \times \mathrm{SO}(n-2q)$ et on remonte ensuite à K comme dans le cas $q = 2$.

Comme $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}} \cong V(\lambda_1 + \lambda_{q+1})$, il suffit d'étudier la restriction du $\mathrm{SO}(2q)$-module $V(\lambda_1)$ à $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2q-2)$. En utilisant un cas particulier du théorème 2.2.5, on trouve que :

$$V(\lambda_1)|_{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2q-2)} \cong V(\lambda_1) \oplus V(-\lambda_1) \oplus V(\lambda_2),$$

où $V(\pm\lambda_1)$ est trivial et $V(\lambda_2)$ est la représentation standard de $\mathrm{SO}(2q-2)$. Donc :

$$V(\lambda_1+\lambda_{q+1})|_{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2q-2)\times\mathrm{SO}(n-2q)} \cong V(\lambda_1+\lambda_{q+1}) \oplus V(-\lambda_1+\lambda_{q+1}) \oplus V(\lambda_2+\lambda_{q+1}),$$

en tant que $\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2q-2)\times\mathrm{SO}(n-2q)$-modules.

On note $U_1 = V(\lambda_1+\lambda_{q+1})$, $U_2 = V(-\lambda_1+\lambda_{q+1})$ et $U_3 = V(\lambda_2+\lambda_{q+1})$.

Proposition 2.3.6 *La décomposition $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles s'effectue par récurrence. Les étapes sont les suivantes :*

(i) La première étape de la récurrence est assurée par la proposition 2.3.5.

(ii) La restriction de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ à $SO(2)\times SO(2q-2)\times SO(n-2q)$ se décompose de la manière suivante :

–
$$\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}} \cong \sum_{i+j+k=p} \wedge^i U_1 \otimes \wedge^j U_2 \otimes \wedge^k U_3.$$

– *Comme U_1 et U_2 sont isomorphes à la représentation standard de $SO(n-2q)$, la décomposition de $\wedge^i U_1 \otimes \wedge^j U_2$ est déterminée en utilisant la proposition 2.3.4.*

– *La décomposition de $\wedge^k U_3$ s'effectue en utilisant l'hypothèse de récurrence.*

(iii) Pour retrouver la décomposition de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en tant que $SO(2q)\times SO(n-2q)$-module, on regroupe les $SO(2)\times SO(2q-2)$-modules irréductibles intervenant dans la décomposition en $SO(2q)$-modules irréductibles.

2.4 Exemple

Nous allons traiter l'exemple particulier $G = \mathrm{SO}(7)$ et $K = \mathrm{SO}(4)\times\mathrm{SO}(3)$.

On commence par la décomposition de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en sous-K-modules irréductibles. Pour cela on utilisera les résultats obtenus dans le paragraphe précédent.

Tout d'abord, on a :

$$\begin{array}{rcl} V_{0,1}\otimes V_{0,1} & \cong & \mathbb{C}\oplus V(\gamma_1)\oplus V(2\gamma_1) \\ V_{0,1}\otimes V_{1,1} & \cong & V(\gamma_1)\oplus V(2\gamma_1)\oplus V(3\gamma_1) \\ V_{1,1}\otimes V_{1,1} & \cong & \mathbb{C}\oplus V(\gamma_1)\oplus V(2\gamma_1)\oplus V(3\gamma_1)\oplus V(4\gamma_1). \end{array} \tag{2.19}$$

En utilisant les égalités (2.15), (2.17), (2.18), (2.19) et la proposition 2.3.5, on obtient la décomposition de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ en sous-$H\times\mathrm{SO}(3)$-modules irréductibles. Le tableau suivant contient les plus grands poids des sous-$H\times\mathrm{SO}(3)$-modules irréductibles, de $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$, pour tout $1\le p\le 6$. On lit les colonnes de la façon suivante :

– En tête d'une colonne on a l'espace $\wedge^p\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ qu'on décompose, pour un p fixé.

– Le symbole p.g.p. désigne le plus grand poids d'un sous-module irréductible apparaissant dans la décomposition.

- Le symbole m. désigne la multiplicité avec laquelle intervient l'espace de plus grand poids p.g.p. dans la décomposition.

$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^2\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^3\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^4\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^5\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^6\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$	
p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.
$\pm\lambda_1$	1	0	2	$\pm\lambda_1$	2	0	5	$\pm\lambda_1$	4	0	8
$\pm\lambda_2$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2$	1	$\pm\lambda_2$	2	$\pm2\lambda_1$	1	$\pm\lambda_2$	4	$\pm2\lambda_1$	2
		λ_3	2	$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2$	1	$\pm2\lambda_2$	1	$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2$	2	$\pm2\lambda_2$	2
		$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2$	2	$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2$	2	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2$	5
		$\pm2\lambda_1+\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_1$	1	$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2$	1	$\pm3\lambda_1$	1	$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2$	2
		$\pm2\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_2$	1	λ_3	8	$\pm3\lambda_2$	1	$\pm\lambda_1\pm3\lambda_2$	1
		$2\lambda_3$	2	$\pm\lambda_1+\lambda_3$	4	$\pm2\lambda_1+\lambda_3$	4	$\pm\lambda_1+\lambda_3$	10	$\pm3\lambda_1\pm\lambda_2$	1
		$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	1	$\pm\lambda_2+\lambda_3$	4	$\pm2\lambda_2+\lambda_3$	4	$\pm\lambda_2+\lambda_3$	10	$\pm3\lambda_1\pm3\lambda_2$	1
				$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	6	$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2+\lambda_3$	4	λ_3	12
				$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	4	$\pm2\lambda_1+\lambda_3$	6
				$\pm\lambda_1+2\lambda_3$	3	$\pm3\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_1+\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_2+\lambda_3$	6
				$\pm\lambda_2+2\lambda_3$	3	$\pm\lambda_1\pm3\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	8
				$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	1	$2\lambda_3$	8	$\pm2\lambda_1\pm3\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2+\lambda_3$	2
				$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1+2\lambda_3$	2	$\pm3\lambda_1\pm2\lambda_2+\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm3\lambda_2+\lambda_3$	1
				$\pm\lambda_1+3\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	2	$\pm\lambda_1+2\lambda_3$	8	$\pm3\lambda_1\pm\lambda_2+\lambda_3$	1
				$\pm\lambda_2+3\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	4	$\pm\lambda_2+2\lambda_3$	8	$2\lambda_3$	12
						$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	3	$\pm2\lambda_1+2\lambda_3$	4
						$3\lambda_3$	3	$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	3	$\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	4
						$\pm2\lambda_1+3\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_1+2\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	8
						$\pm2\lambda_2+3\lambda_3$	1	$\pm3\lambda_2+2\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1\pm2\lambda_2+2\lambda_3$	2
						$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+3\lambda_3$	2	$\pm\lambda_1+3\lambda_3$	4	$\pm\lambda_1\pm3\lambda_2+2\lambda_3$	1
						$4\lambda_3$	1	$\pm\lambda_2+3\lambda_3$	4	$\pm3\lambda_1\pm\lambda_2+2\lambda_3$	1
								$\pm\lambda_1\pm2\lambda_2+3\lambda_3$	1	$3\lambda_3$	6
								$\pm2\lambda_1\pm\lambda_2+3\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_1+3\lambda_3$	2
								$\pm\lambda_1+4\lambda_3$	1	$\pm2\lambda_2+3\lambda_3$	2
								$\pm\lambda_2+4\lambda_3$	1	$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+3\lambda_3$	3
										$4\lambda_3$	2
										$\pm\lambda_1\pm\lambda_2+4\lambda_3$	1

Le tableau suivant contient la décomposition explicite des SO(4)-modules irréductibles, dont les plus grand poids sont désignés dans la colonne gauche, en sous-H-modules irréductibles. Les plus grands poids donnés par la colonne droite sont ceux des H-modules irréductibles intervenant dans la décomposition du SO(4)-module en question. La multiplicité des H-modules obtenus dans la décomposition est 1. Par exemple, la première ligne du tableau signifie que la restriction du SO(4)-module $V(\lambda_1)$ à $H = SO(2) \times SO(2)$ se décompose en $V(\lambda_1) \oplus V(-\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus V(-\lambda_2)$.

Ces valeurs vont être utilisées pour retrouver la K-décomposition irréductible des K-modules $\wedge^p \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$, à partir de la $H \times SO(3)$-décomposition déjà décrite. Le calcul se fait en utilisant un cas particulier du théorème 2.2.5.

p.g.p. dans SO(4)	p.g.p. dans SO(2) × SO(2)
λ_1	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$
$\lambda_1 + \lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 + \lambda_2)$
$\lambda_1 - \lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 - \lambda_2)$
$2\lambda_1$	0, $\pm\lambda_1 \pm \lambda_2$, $\pm 2\lambda_1$, $\pm 2\lambda_2$
$2\lambda_1 + \lambda_2$	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 + \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 + 2\lambda_2)$
$2\lambda_1 - \lambda_2$	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 - \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 - 2\lambda_2)$
$2\lambda_1 + 2\lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 + \lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$
$2\lambda_1 - 2\lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 - 2\lambda_2)$
$3\lambda_1$	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm 3\lambda_1$, $\pm 3\lambda_2$, $\pm 2\lambda_1 \pm \lambda_2$, $\pm\lambda_1 \pm 2\lambda_2$
$3\lambda_1 + \lambda_2$	0, $\pm 2\lambda_1$, $\pm 2\lambda_2$, $\pm\lambda_1 \pm \lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 + \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 + 3\lambda_2)$
$3\lambda_1 - \lambda_2$	0, $\pm 2\lambda_1$, $\pm 2\lambda_2$, $\pm\lambda_1 \pm \lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 - 2\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 - \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 - 3\lambda_2)$
$3\lambda_1 + 2\lambda_2$	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 + \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 + 3\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 + 2\lambda_2)$
$3\lambda_1 - 2\lambda_2$	$\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm(2\lambda_1 - \lambda_2)$, $\pm(\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 - 3\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 - 2\lambda_2)$
$3\lambda_1 + 3\lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 + \lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 + 3\lambda_2)$
$3\lambda_1 - 3\lambda_2$	0, $\pm(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\pm(2\lambda_1 - 2\lambda_2)$, $\pm(3\lambda_1 - 3\lambda_2)$

Ensuite, pour obtenir la K-décomposition irréductible de $\wedge^p \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$, on remonte du sous-groupe H à SO(4), en utilisant la formule de décomposition d'un SO(4)-module irréductible en sous-H-modules irréductibles, mais en "sens inverse", i.e. regrouper les données du premier tableau en se servant du deuxième. Les décompositions obtenues sont données par le tableau ci-dessous.

On remarque que pour $7 \leq p \leq 12$, $\wedge^p \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^* \cong \wedge^{12-p} \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$ car $\dim \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^* = 12$.

$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^2\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^3\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^4\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^5\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$		$\Lambda^6\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$	
p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.	p.g.p.	m.
λ_1	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2$	1	λ_1	1	0	2	λ_1	1	λ_3	2
		$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	1	$\lambda_1 + \lambda_3$	2	$2\lambda_3$	2	$\lambda_1 + \lambda_3$	4	$3\lambda_3$	2
		λ_3	1	$\lambda_1 + 2\lambda_3$	1	$4\lambda_3$	1	$\lambda_1 + 2\lambda_3$	3	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	1
		$2\lambda_1 + \lambda_3$	1	$\lambda_1 + 3\lambda_3$	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	2	$\lambda_1 + 3\lambda_3$	2	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	3
				$2\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	1	$\lambda_1 + 4\lambda_3$	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 3\lambda_3$	1
				$2\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 3\lambda_3$	1	$2\lambda_1 \pm \lambda_2$	1	$\lambda_1 \pm \lambda_2 + 4\lambda_3$	1
				$3\lambda_1$	1	$2\lambda_1$	1	$2\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	2	$\lambda_1 \pm \lambda_2$	2
						$2\lambda_1 + \lambda_3$	2	$2\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	2	$2\lambda_1 + \lambda_3$	4
						$2\lambda_1 + 2\lambda_3$	2	$2\lambda_1 \pm \lambda_2 + 3\lambda_3$	1	$2\lambda_1 + 2\lambda_3$	2
						$2\lambda_1 + 3\lambda_3$	1	$3\lambda_1$	1	$2\lambda_1 + 3\lambda_3$	2
						$2\lambda_1 \pm 2\lambda_2$	1	$3\lambda_1 + \lambda_3$	1	$2\lambda_1 \pm 2\lambda_2 + \lambda_3$	1
						$2\lambda_1 \pm 2\lambda_2 + 2\lambda_3$	1	$3\lambda_1 + 2\lambda_3$	1	$2\lambda_1 \pm 2\lambda_2 + 2\lambda_3$	1
						$3\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	1	$3\lambda_1 \pm 2\lambda_2 + \lambda_3$	1	$3\lambda_1 \pm \lambda_2$	1
										$3\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_3$	1
										$3\lambda_1 \pm 3\lambda_2$	1
										$3\lambda_1 \pm \lambda_2 + 2\lambda_3$	1

Nous allons maintenant utiliser le théorème 2.2.6 pour calculer, lorsqu'elle n'est pas nulle, la multiplicité d'un K-module V', apparaissant dans la décomposition de $\wedge^p \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$, comme sous-$K$-module d'un certain G-module V.

Supposons que V' a pour plus grand poids $\Lambda' = k_1\lambda_1 + \varepsilon' k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3$, avec $k_1 \geq k_2 \geq 0$ et $k_3 \geq 0$. Si V' est un sous-K-module d'un certain G-module irréductible V de plus haut poids $\Lambda = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + h_3\lambda_3$ où $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq 0$, apparaissant avec une multiplicité m_{k_1,k_2}, alors $k_3 \leq h_1$ m_{k_1,k_2} est le coefficient de $e((k_1+1)\lambda_1 + k_2\lambda_2)$, $(k_1 \geq k_2 \geq 0)$, dans :

$$s(\alpha_{1,2})s(\beta_{1,2})\sum_{k_{1,2}}\sum_{k_{1,3}} \frac{s(l_{1,1}\lambda_1)}{s(\lambda_1)}.\frac{s(l_{1,2}\lambda_1)}{s(\lambda_1)}.\frac{s(l_{1,3}\lambda_1)}{s(\lambda_1/2)}.\frac{s(l_{2,2}\lambda_2)}{s(\lambda_2)}.\frac{s(l_{2,3}\lambda_2)}{s(\lambda_2/2)},$$

où la somme porte sur les entiers $k_{1,2}$ et $k_{1,3}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \max(h_3,k_3) \leq k_{1,2} \leq h_1 \\ k_{1,3} \leq h_2 \\ 0 \leq k_{1,3} \leq k_{1,2}, \end{cases} \tag{2.20}$$

et les $l_{r,i}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{1,1} &= h_1 - \max(h_2,k_{1,2}) + 1 \\ l_{1,2} &= \min(h_2,k_{1,2}) - \max(h_3,k_{1,3}) + 1 \\ l_{1,3} &= \min(h_3,k_{1,3}) + 1/2 \\ l_{2,2} &= k_{1,2} - \max(k_{1,3},k_3) + 1 \\ l_{2,3} &= \min(k_{1,3},k_3) + 1/2. \end{cases} \tag{2.21}$$

On traite tout d'abord le terme :

$$\frac{s(l_{1,1}\lambda_1)}{s(\lambda_1)}.\frac{s(l_{1,2}\lambda_1)}{s(\lambda_1)}.\frac{s(l_{1,3}\lambda_1)}{s(\lambda_1/2)}.\frac{s(l_{2,2}\lambda_2)}{s(\lambda_2)}.\frac{s(l_{2,3}\lambda_2)}{s(\lambda_2/2)}. \tag{2.22}$$

il est égal à :

$$\sum_{r_1,r_2,r_3,s_2,s_3} e((l_{1,1}+l_{1,2}+l_{1,3}-5/2-2r_1-2r_2-r_3)\lambda_1 + (l_{2,2}+l_{2,3}-3/2-2s_2-s_3)\lambda_2),$$

où r_1, r_2, r_3, s_2, s_3 vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq r_1 \leq h_1 - \max(h_2,k_{1,2}) = l_{1,1} - 1 \\ 0 \leq r_2 \leq \min(h_2,k_{1,2}) - \max(h_3,k_{1,3}) = l_{1,2} - 1 \\ 0 \leq r_3 \leq 2\min(h_3,k_{1,3}) = 2l_{1,3} - 1 \\ 0 \leq s_2 \leq k_{1,2} - \max(k_{1,3},k_3) = l_{2,2} - 1 \\ 0 \leq s_3 \leq 2\min(k_{1,3},k_3) = 2l_{2,3} - 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Ainsi, l'expression donnée par (2.22) devient :

$$\sum_{r_1,r_2,r_3,s_2,s_3} e((h_1-|h_2-k_{1,2}|-|h_3-k_{1,3}|-2r_1-2r_2-r_3)\lambda_1 + (k_{1,2}-|k_{1,3}-k_3|-2s_2-s_3)\lambda_2),$$

et la somme porte sur les r_i et s_i donnés par (2.23).

Soit m_k le nombre de fois qu'un $e(k\lambda_1)$ apparaît dans

$$\sum_{r_1,r_2,r_3} e((h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - |h_3 - k_{1,3}| - 2r_1 - 2r_2 - r_3)\lambda_1),$$

où la somme porte sur r_1, r_2, r_3 vérifiant les conditions données par (2.23).

De même, on note n_k le nombre de fois qu'un $e(k\lambda_2)$ apparaît dans

$$\sum_{s_2=0}^{k_{1,2}-\max(k_{1,3},k_3)} \sum_{s_3=0}^{2\min(k_{1,3},k_3)} e((k_{1,2} - |k_{1,3} - k_3| - 2s_2 - s_3)\lambda_2).$$

On a :

$$m_{k_1,k_2} = \sum_{k_{1,2}=\max(h_3,k_3)}^{h_1} \sum_{k_{1,3}=0}^{\min(h_2,k_{1,2})} (m_{k_1+2}n_{k_2} + m_{k_1}n_{k_2} - m_{k_1+1}n_{k_2+1} - m_{k_1-1}n_{k_2+1}).$$

On pose :

$$k_{1,2} - |k_{1,3} - k_3| - 2s_2 - s_3 = \tilde{k}_2.$$

On obtient :

$$0 \leq s_3 = k_{1,2} - |k_{1,3} - k_3| - 2s_2 - \tilde{k}_2 \leq 2\min(k_{1,3}, k_3),$$

i.e.

$$k_{1,2} - k_{1,3} - k_3 - \tilde{k}_2 \leq 2s_2 \leq k_{1,2} - |k_{1,3} - k_3| - \tilde{k}_2.$$

Pour simplifier les expressions, on pose :

$$\begin{cases} a = k_{1,2} - k_{1,3} - k_3 - \tilde{k}_2 \\ b = k_{1,2} - |k_{1,3} - k_3| - \tilde{k}_2. \end{cases}$$

Notations 2.4.1 *Si x est un réel, on désigne par $[x]$ la partie entière de x et par $[x]^+$ le nombre x lui même, lorsqu'il est entier, et sa partie entière plus un, sinon.*

On a alors :

$$\begin{aligned} n_{\tilde{k}_2} &= \sum_{s_2=\max(0,[\frac{a}{2}]^+)}^{\min(k_{1,2}-\max(k_{1,3},k_3),[\frac{b}{2}])} 1 \\ &= \max\left(0; \min\left(k_{1,2} - \max(k_{1,3}, k_3), \left[\frac{b}{2}\right]\right) - \max\left(0, \left[\frac{a}{2}\right]^+\right) + 1\right). \end{aligned}$$

On procède de la même façon avec le premier facteur. On pose :

$$h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - |h_3 - k_{1,3}| - 2r_1 - 2r_2 - r_3 = \tilde{k}_1.$$

On a alors :

$$0 \leq r_3 = h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - |h_3 - k_{1,3}| - 2r_1 - 2r_2 - \tilde{k}_1 \leq 2\min(h_3, k_{1,3}),$$

ce qui entraîne que :

$$h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - h_3 - k_{1,3} - \tilde{k}_1 - 2r_1 \leq 2r_2 \leq h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - |h_3 - k_{1,3}| - \tilde{k}_1 - 2r_1.$$

Pour simplifier les expressions, on procède comme dans le cas précédent et on pose :

$$\begin{cases} c = h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - h_3 - k_{1,3} - \tilde{k}_1 - 2r_1 \\ d = h_1 - |h_2 - k_{1,2}| - |h_3 - k_{1,3}| - \tilde{k}_1 - 2r_1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\max\left(0, \frac{c}{2}\right) \leq r_2 \leq \min\left(\min(h_2, k_{1,2}) - \max(h_3, k_{1,3}); \frac{d}{2}\right)$$

ce qui implique :

$$m_{\tilde{k}_1} = \sum_{r_1=0}^{h_1 - \max(h_2, k_{1,2})} \max\left(0; \min\left(\min(h_2, k_{1,2}) - \max(h_3, k_{1,3}); \left[\frac{d}{2}\right]\right) - \max\left(0, \left[\frac{c}{2}\right]^+\right) + 1\right).$$

En remplacçant les expressions de m_k et n_k dans m_{k_1,k_2}, on obtient la multiplicité demandée.

Le programme de l'annexe B permet de calculer explicitement les multiplicités m_{k_1,k_2}.

Deuxième partie

Variétés isospectrales - Spectre géométrique

Chapitre 3

Exemples de variétés isospectrales non isométriques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle les constructions de variétés isospectrales et non isométriques obtenues par A. Ikeda dans les articles [26], [28], [27] et [29]. Il s'agit précisément d'espaces lenticulaires et de quotients de la sphère et de la grassmannienne par des groupes d'isométries finis, non cycliques et sans point fixe. On ne donnera pas toujours les preuves de A. Ikeda, mais dans certains cas, on montre que les variétés en question vérifie les hypothèses du théorème 3.4.1 de T. Sunada, pour prouver qu'elles sont p-isospectrales pour tout p. En fait le théorème cité est une généralisation du théorème de T. Sunada [40], qu'on trouve dans les références [13], [3] et [4].

On commence par donner certaines propriétés des variétés étudiées et quelques définitions utiles dans la suite. On décrit ensuite les résultats obtenus par A. Ikeda dans [26] et [28] qui consistent à montrer que pour tout entier p, il existe des espaces lenticulaires k-isospectraux pour tout $k \leq p$ mais non $(p+1)$-isospectraux. Il est facile à voir que ces variétés ne vérifient pas les hypothèses du théorème de T. Sunada puisqu'elles ne sont pas isospectrales pour les formes différentielles. Finalement, on décrit les quotients de la sphère et de la grassmannienne par des groupes d'isométries finis, non cycliques, sans point fixe et de type 1, qui sont irréductibles et isomorphes. Pour ces cas, on ne donne pas exactement les preuves de A. Ikeda mais on montre que ces espaces satisfont aux hypothèses du théorème de T. Sunada. On montre ainsi que les quotients de la sphère sont p-isospectraux pour tout p. Il en est de même pour les quotients de la grassmannienne.

A. Ikeda utilise la classification de ces variétés, décrite dans le livre de J. A. Wolf (voir [45]), pour montrer qu'ils ne sont pas isométriques.

3.2 Quotients de la sphère et de la grassmannienne

Soit $S^{2n-1} = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{SO}(2n-1)$ la sphère de dimension $2n-1$, $G_{q,2n}(\mathbb{R})$ la grassmannienne de dimension $q(2n-q)$, et Γ un groupe fini sans point fixe (définition 3.2.1) de $\mathrm{O}(2n)$. Le groupe Γ agit sans point fixe sur S^{2n-1} et sur $G_{q,2n}(\mathbb{R})$ et on a donc des variétés riemanniennes $\Gamma\backslash S^{2n-1}$ et $\Gamma\backslash G_{q,2n}(\mathbb{R})$.

Définition 3.2.1 *Un sous-groupe fini Γ du groupe orthogonal $O(n)$ est dit sans point fixe si tout élément non trivial de Γ ne peut pas avoir 1 comme valeur propre. Une représentation orthogonale d'un groupe fini est dite sans point fixe si elle est fidèle et son image est un sous-groupe sans point fixe du groupe orthogonal. Un groupe Γ est dit sans point fixe s'il a une représentation finie sans point fixe dans le groupe orthogonal.*

On a la propriété suivante :

Lemme 3.2.2 *[25] Un sous-groupe sans point fixe de $O(2n)$ est contenu dans $SO(2n)$.*

Les espaces quotients de la sphère et de la grassmannienne de dimension impaire seront les seuls à être considérés dans ce chapitre. En fait, il n'y en a pas beaucoup en dimension paire. La définition suivante sera utilisée dans la suite.

Définition 3.2.3 *Soit G un groupe de Lie et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes de G. On dit que Γ_1 et Γ_2 sont presque conjugués dans G s'il existe une bijection f de Γ_1 sur Γ_2 telle que pour tout $\sigma \in \Gamma_1$, $f(\sigma)$ et σ sont conjugués dans G par un élément qui dépend de σ.*

Dans la suite, on va étudier deux types de formes d'espaces sphériques (quotients de la sphère). Le premier est le quotient de la sphère par un groupe d'isométries cyclique, fini et sans point fixe. Nous allons décrire de tels espaces k-isospectraux jusqu'à un certain ordre p et non $(p+1)$-isospectraux. Le deuxième type est le quotient de la sphère par un groupe d'isométries fini, sans point fixe et de type 1 ; on en décrit qui sont p-isospectraux pour tout p. On décrit aussi des quotients de la grassmannienne par des groupes d'isométries finis, sans point fixe et de type 1 qui sont p-isospectraux pour tout p. On rappelle la définition de variétés p-isospectrales. Pour cela, on rappelle la définition du spectre du laplacien agissant sur l'espace des formes différentielles.

Si (M,g) est une variété riemannienne avec une métrique riemannienne g, on désigne par d l'opérateur de différentiation extérieure, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$, l'espace des p-formes différentielles sur M, et on note δ l'adjoint formel de d relativement au produit scalaire induit par la métrique g. Le laplacien noté Δ (ou Δ_p) est défini par :

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

C'est un opérateur différentiel elliptique, auto-adjoint, agissant sur $C^\infty(\wedge^p M)$. Si M est une variété compacte, l'ensemble des valeurs propres de Δ_p est discret. On notera cet ensemble comme une suite de réels ordonnés dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1^p \leq \lambda_2^p \leq \dots$$

où chacune des valeurs propres λ_i^p sera répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité qui est par définition la dimension de l'espace propre $E_{\lambda_i^p}$ correspondant.

Définition 3.2.4 *L'ensemble des valeurs propres de Δ_p est noté $Spec^p(M,g)$ et appelé le p-spectre du laplacien de (M,g). Le 0-spectre du laplacien (ou spectre des fonctions) sera noté simplement $Spec(M,g)$.*

Définition 3.2.5 *Deux variétés sont dites p-isospectrales pour un certain p si elles ont le même p-spectre du laplacien. Si deux variétés ont le même spectre des fonctions, on dit simplement qu'elles sont isospectrales.*

3.3 Quotient de la sphère par un groupe cyclique

3.3.1 Description et propriétés

Un quotient de la sphère par un groupe d'isométries cyclique sans point fixe s'appelle un espace lenticulaire. C'est une variété riemannienne compacte, connexe, de groupe fondamental cyclique et de courbure sectionnelle constante égale à 1.

On va décrire explicitement un espace lenticulaire L de dimension $2n-1$ et dont le groupe fondamental Γ est d'ordre q.

Soit A le générateur de Γ. Supposons que les valeurs propres de A sont $e^{\pm 2i\pi p_i/q}$, $(1 \leq i \leq n)$ avec $p_1, p_2, ..., p_n$ des entiers premiers avec q (puisque Γ est sans point fixe). La matrice A est alors conjuguée dans $\mathrm{O}(2n)$ à la matrice :

$$\sigma = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & (0) \\ & R(\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(\theta_n) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où $\theta_i = 2\pi p_i/q$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le groupe Γ est donc conjugué dans $\mathrm{O}(2n)$ au groupe $\langle\sigma\rangle$ engendré par cette matrice. Ainsi, les quotients $\Gamma\backslash S^{2n-1}$ et $\langle\sigma\rangle\backslash S^{2n-1}$ sont isométriques.

On suppose alors que $\Gamma = \langle\sigma\rangle$. C'est un sous-groupe cyclique, fini, sans point fixe, d'ordre q du groupe orthogonal $\mathrm{SO}(2n)$. L'espace

$$L(q : p_1, ..., p_n) = \Gamma\backslash S^{2n-1}.$$

est un espace lenticulaire de dimension $2n-1$, dont le groupe fondamental est d'ordre q.

On décrit maintenant les espaces considérés dans ce paragraphe. Soit $\tilde{\mathcal{L}}(q,n)$ la famille des espaces lenticulaires de dimension $2n-1$ et dont le groupe fondamental est d'ordre q. On définit :

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(q,n) = \{L(q : p_1, ..., p_n) \in \tilde{\mathcal{L}}(q,n);\ p_i \not\equiv \pm p_j \pmod{q},\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

L'ensemble des classes d'isométries de $\tilde{\mathcal{L}}_0(q,n)$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}(q,n)$) est noté $\mathcal{L}_0(q,n)$ (resp. $\mathcal{L}(q,n)$).

On a la caractérisation suivante :

Théorème 3.3.1 *[31] Soit $L_1 = L(q : p_1, ..., p_n)$ et $L_2 = L(q : s_1, ..., s_n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L_1 est isométrique à L_2.

(ii) L_1 est difféomorphe à L_2.

(iii) L_1 est homéomorphe à L_2.

(iv) Il existe un entier l et des nombres $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ de $\{-1, 1\}$ tels que $(p_1, ..., p_n)$ soit une permutation de $(\varepsilon_1 l s_1, ..., \varepsilon_n l s_n)$ modulo q.

Remarque 3.3.2 *Pour un entier m, soit K_m le groupe multiplicatif formé des classes d'équivalence modulo m des entiers premiers avec m. On désigne par $\phi(m)$ l'ordre du groupe K_m. Par définition ϕ est la fonction d'Euler. Si m est un nombre premier, on sait que K_m est cyclique d'ordre $m-1$.*

On suppose maintenant que q est un nombre premier et que $n \geq 3$. On pose $q_0 = \phi(q)/2$, i.e. $q_0 = (q-1)/2$ et on suppose que $q_0 \geq n+2$. Ainsi, q doit être supérieur à 11. On pose $k = q_0 - n$ et $L = L(q : p_1, ..., p_n) \in \mathcal{L}_0(q,n)$. Soit $q_1, ..., q_k$ des entiers tels que l'ensemble $\{p_1, -p_2, ..., p_n, -p_n, q_1, -q_1, ..., q_k, -q_k\}$ (mod q) soit le groupe K_q. On définit alors la matrice $\overline{\sigma}$ du groupe SO$(2k)$ par :

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} R(\alpha_1) & & & (0) \\ & R(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(\alpha_k) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

où pour tout $1 \leq i \leq k$, $\alpha_i = 2\pi q_i/q$. Soit $\overline{\Gamma}$ le groupe cyclique engendré par $\overline{\sigma}$. C'est un sous-groupe fini d'ordre q de SO$(2k)$ sans point fixe. Ceci permet de définir l'espace lenticulaire de dimension $2k-1$:

$$\overline{L} = L(q : q_1, ..., q_k) = \overline{\Gamma} \backslash S^{2k-1}.$$

Proposition 3.3.3 *[28] Soit $L_1 = \Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ et $L_2 = \Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ deux espaces de $\mathcal{L}_0(q,n)$. Pour que L_1 et L_2 soient isométriques il faut et il suffit que $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ le soient.*

Preuve : Si l'ensemble $\{\pm p_1, ..., \pm p_n, \pm q_1, ..., \pm q_k\}$ est un ensemble complet d'entiers premiers avec q (i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de ces entiers est K_q), alors, pour l premier avec q, $\{\pm l p_1, ..., \pm l p_n, \pm l q_1, ..., \pm l q_k\}$ est aussi un ensemble complet d'entiers premiers avec q. La proposition est alors une conséquence du théorème 3.3.1. □

Cette proposition permet de définir une bijection ω de $\mathcal{L}_0(q,n)$ sur $\mathcal{L}_0(q,k)$ en posant $\omega(L) = \overline{L}$ pour tout $L \in \mathcal{L}_0(q,n)$.

On suppose maintenant que $k = 2$ et on définit pour tout entier $r > 0$ une famille d'espaces lenticulaires $\mathcal{L}_r(q, n)$, contenue dans $\mathcal{L}_0(q, n)$, en posant :

$$\mathcal{L}_r(q, 2) = \{L(q : q_1, q_2) \in \mathcal{L}_0(q, 2);\ aq_1 + bq_2 \not\equiv 0 \pmod q,\ 1 \leq |a| + |b| \leq r + 2\},$$

et

$$\mathcal{L}_r(q, n) = \omega^{-1}(\mathcal{L}_r(q, 2)).$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de l'article [28] de A. Ikeda.

Théorème 3.3.4 *[28] Soit q un nombre premier supérieur à 11 tel que $q_0 = n + 2$. Soit L_1 et L_2 deux espaces de $\mathcal{L}_p(q, n)$, où p est un entier positif. On a :*

1. *L_1 et L_2 sont k-isospectraux pour tout $k = 0, 1, ..., p$.*
2. *Si de plus $L_1 \in \mathcal{L}_{p+1}(q, n)$ mais pas L_2, alors L_1 et L_2 ne sont pas $(p+1)$-isospectraux.*

3.3.2 Preuve du théorème 3.3.4

Dans ce paragraphe, on présente la preuve du théorème 3.3.4 donnée dans l'article [28].

Dans [28], A. Ikeda a caractérisé les espaces sphériques isospectraux à l'aide des fonctions :

$$F^p(\Gamma : z) = \sum_{\sigma \in \Gamma} \frac{\chi^p(\sigma)}{\det(z - \sigma)},$$

définies sur les nombres complexes, pour tout entier p. En effet il a démontré la proposition suivante :

Proposition 3.3.5 *[28] Soit $M = \Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ et $N = \Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ deux espaces sphériques et p un entier. M est k-isospectral à N pour tout $k \leq p$ si et seulement si :*

$$F^k(\Gamma_1 : z) = F^k(\Gamma_2 : z) \quad \textit{pour tout } z \in \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad k \leq p.$$

Théorème 3.3.6 *Soit $M = \Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ et $N = \Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ deux espaces sphériques. M et N sont p-isospectraux pour tout p si et seulement si pour tout w et z complexes, on a :*

$$\sum_{\sigma \in \Gamma_1} \frac{\det(w - \sigma)}{\det(z - \sigma)} = \sum_{\tau \in \Gamma_2} \frac{\det(w - \tau)}{\det(z - \tau)}.$$

Preuve : On a :

$$\det(w - \sigma) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \chi^k(\sigma) w^k,$$

donc,

$$\sum_{\sigma \in \Gamma} \frac{\det(w - \sigma)}{\det(z - \sigma)} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k F^k(\Gamma : z) w^k.$$

□

Corollaire 3.3.7 *Soit $M = \Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ et $N = \Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ deux espaces sphériques. S'il existe une bijection $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ telle que tout élément σ de Γ_1 soit conjugué à $\phi(\sigma)$ dans $O(2n)$ (i.e. Γ_1 et Γ_2 sont presque conjugués dans $O(2n)$), alors M et N sont p-isospectraux pour tout p.*

Si on pose $\xi = \xi_q = \exp(2\pi i/q)$, alors σ a $2n$ valeurs propres :

$$\xi^{p_1}, \xi^{-p_1}, ..., \xi^{p_n}, \xi^{-p_n}.$$

Ainsi, pour tout $0 \leq t \leq q-1$, on a :

$$\det(z - \sigma^t) = \prod_{i=1}^{n} (z - \xi^{tp_i})(z - \xi^{-tp_i}). \tag{3.3}$$

Corollaire 3.3.8 *On suppose que $n = 2$. On a les assertions suivantes :*
i) $L(q : p_1, p_2) \in \mathcal{L}_0(q, 2)$ est isométrique à $L(q : 1, t)$ pour un certain t.
ii) $L(q : 1, s)$ et $L(q : 1, t)$ sont isométriques si et seulement si $s \equiv \pm t \pmod q$ ou $st \equiv \pm 1 \pmod q$.
iii) $|\mathcal{L}_0(q, 2)| = [\phi(q)/4]$, où ϕ désigne la fonction d'Euler.

Dans [31], A. Ikeda et Y. Yamamoto montrent le théorème suivant :

Théorème 3.3.9 *Deux espaces lenticulaires de dimension trois, 0-isospectraux, sont isométriques.*

On va décrire maintenant les résultats de A. Ikeda pour les espaces lenticulaires de dimension $2n-1$ où $n \geq 3$ et dont le groupe fondamental est d'ordre q premier. On pose $q_0 = \phi(q)/2$, i.e. $q_0 = (q-1)/2 = n + k$ pour un certain nombre k qu'on suppose supérieur à 2. On trouve une certaine «dualité» entre les espaces lenticulaires de dimension $2k-1$ et ceux de dimension $2n-1 \geq 5$, ayant les groupes fondamentaux du même ordre q. Le cas particulier $k = 2$ permet de décrire les espaces de dimension $2n-1$, isospectraux jusqu'à un certain ordre, en utilisant les résultats obtenus en dimension 3. On va maintenant décrire l'enchaînement de son calcul.

Remarque 3.3.10 *Si q est un nombre premier impair, on sait que le q-ème polynôme cyclotomique est donné par :*

$$\psi_q(z) = \frac{z^q - 1}{z - 1} = \prod_{\eta} (z - \eta),$$

où η parcourt les racines q-èmes de l'unité, sauf 1. Ainsi, d'après (3.3),

$$\psi_q(z) = \det(z - \sigma^t)\det(z - \overline{\sigma}^t), \quad \forall t \not\equiv 0 \pmod q. \tag{3.4}$$

On pose :

$$\psi_{q,n}(p_1, ..., p_n) = \sum_{t=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{n} (z - \xi^{tp_i})(z - \xi^{-tp_i}) = \sum_{t=1}^{q-1} \det(z - \sigma^t).$$

Proposition 3.3.11

$$\psi_{q,n}(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i z^i,$$

avec :

$$a_i = a_{2n-i} \quad \textit{pour tout } i \in \{0, ..., 2n\}, \quad a_0 = q-1, \quad a_1 = -2n, \quad a_2 = n(q-2n+1).$$

Preuve : La première égalité résulte du fait que $(z-\xi^{tp_i})(z-\xi^{-tp_i}) = (z\xi^{tp_i}-1)(z\xi^{-tp_i}-1)$. La deuxième est facile à voir. Pour les autres,

$$a_1 = -\sum_{t=1}^{q-1}(-\xi^{tp_1} - \xi^{-tp_1} - ... - \xi^{tp_n} - \xi^{-tp_n}) = -2n,$$

et

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{t=1}^{q-1}\left(n + \sum_{1\leq i<j\leq n} \xi^{\pm tp_i \pm tp_j}\right) \\ &= (q-1)n + \sum_{1\leq i<j\leq n} -4 = (q-1)n - 4\frac{n(n-1)}{2} = n(q-2n+1). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.12 *[28] Soit $L_1 = \Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ et $L_2 = \Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ deux espaces de $\mathcal{L}_0(q,n)$. Pour que les variétés L_1 et L_2 soient p-isospectrales pour tout p, il faut et il suffit que $\overline{L_1} = \omega(L_1)$ et $\overline{L_2} = \omega(L_2)$ le soient.*

Preuve : D'après le théorème 3.3.6, L_1 est p-isospectral à L_2 pour tout p si et seulement si :

$$\sum_{\sigma\in\Gamma_1} \frac{\det(w-\sigma)}{\det(z-\sigma)} = \sum_{\tau\in\Gamma_2} \frac{\det(w-\tau)}{\det(z-\tau)}. \tag{3.5}$$

Or

$$\frac{\det(w-\sigma)}{\det(z-\sigma)} = \frac{\det(w-\sigma)\det(z-\overline{\sigma})}{\det(z-\sigma)\det(z-\overline{\sigma})} = \frac{\det(w-\sigma)\det(z-\overline{\sigma})}{\psi_q(z)}. \tag{3.6}$$

En utilisant ceci dans l'équation (3.5), on trouve :

$$\sum_{\sigma\in\Gamma_1} \det(w-\sigma)\det(z-\overline{\sigma}) = \sum_{\tau\in\Gamma_2} \det(w-\tau)\det(z-\overline{\tau}).$$

En échangeant les rôles de w et z et en utilisant l'équation (3.6), on trouve :

$$\sum_{\sigma\in\Gamma_1} \frac{\det(w-\overline{\sigma})}{\det(z-\overline{\sigma})} = \sum_{\tau\in\Gamma_2} \frac{\det(w-\overline{\tau})}{\det(z-\overline{\tau})},$$

ce qui montre que $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont p-isospectraux pour tout p. Ceci démontre aussi la réciproque, parce que $\overline{(\overline{\Gamma})} = \Gamma$. □

Soit Δ le laplacien agissant sur l'espace des fonctions C^∞ sur $L(q : p_1, ..., p_n)$. Les valeurs propres de Δ sont de la forme $k(k+2n-2)$, $k = 0, 1, 2, ...$; on note $E_{k(k+2n-2)}$ l'espace propre de Δ ayant $k(k+2n-2)$ pour valeur propre. On définit la fonction génératrice $F_q(z : p_1, ..., p_n)$ sur les nombres complexes, associée au spectre de Δ sur $L(q : p_1, ..., p_n)$ par :

$$F_q(z : p_1, ..., p_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim(E_{k(k+2n-2)}) z^k.$$

La fonction génératrice est rationnelle :

$$F_q(z : p_1, ..., p_n) = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^{q} \frac{1 - z^2}{\prod_{i=1}^{n} (z - \xi^{tp_i})(z - \xi^{-tp_i})}. \tag{3.7}$$

Les espaces lenticulaires $L(q : p_1, ..., p_n)$ et $L(q : s_1, ..., s_n)$ sont 0-isospectraux si et seulement si leurs fonctions génératrices sont identiques (voir [31]).

Proposition 3.3.13 *Soit q un nombre premier impair et $L(q : p_1, ...p_n)$ un espace de $\mathcal{L}_0(q, n)$. On pose $k = q_0 - n$. On a :*

$$F_q(z : p_1, ..., p_n) = \frac{1}{q} \left\{ \frac{1 - z^2}{(1 - z)^{2n}} + \frac{\psi_{q,k}(q_1, ..., q_k)(1 - z^2)}{\psi_q(z)} \right\},$$

où $q_1, ..., q_k$ sont des entiers tels que $\{\pm p_1, ..., \pm p_n, \pm q_1, ..., \pm q_k\}$ forment un ensemble complet d'entiers premiers avec q.

Preuve : Ceci est une conséquence de (3.7) et du fait que pour tout $t \not\equiv 0 \pmod q$,

$$\psi_q(z) = \left(\prod_{i=1}^{n} (z - \xi^{tp_i})(z - \xi^{-tp_i}) \right) \left(\prod_{j=1}^{k} (z - \xi^{tq_j})(z - \xi^{-tq_j}) \right).$$

□

Ce qui précède nous permet de montrer la proposition :

Proposition 3.3.14 *Soit $L_1 = L(q : p_1, ..., p_n)$ et $L_2 = L(q : s_1, ..., s_n)$ deux espaces de $\mathcal{L}_0(q, n)$. Si q est un nombre premier impair, alors L_1 et L_2 sont 0-isospectraux si et seulement si :*

$$\psi_{q,k}(q_1, ..., q_k) = \psi_{q,k}(t_1, ..., t_k),$$

où $k = q_0 - n$ et $q_1, ..., q_k, t_1, ..., t_k$ sont des entiers tels que $\{\pm p_1, ..., \pm p_n, \pm q_1, ..., \pm q_k\}$ et $\{\pm s_1, ..., \pm s_n, \pm t_1, ..., \pm t_k\}$ soient deux ensembles complets d'entiers premiers avec q.

Théorème 3.3.15 *[26] Soit q un nombre premier supérieur à 11. Si $q_0 = n + 2$ alors deux espaces de $\mathcal{L}_0(q, n)$ sont 0-isospectraux.*

Preuve : C'est une conséquence de la proposition 3.3.14 et du fait que $\psi_{q,2}$ ne dépend que de q d'après la proposition 3.3.11. □

Théorème 3.3.16 *[28] Soit q comme dans le théorème 3.3.15. Deux espaces non isométriques de $\mathcal{L}_0(q,n)$ ne peuvent pas être p-isospectraux pour tout p.*

Preuve : Soit L_1 et L_2 deux espaces de $\mathcal{L}_0(q,n)$ qui ne sont pas isométriques. D'après la proposition 3.3.3, $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ ne sont pas isométriques. Comme $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont de dimension trois, ils ne sont pas 0-isospectraux d'après le théorème 3.3.9. Ceci implique que L_1 et L_2 ne sont pas p-isospectraux pour tout p d'après le théorème 3.3.12. □

D'après l'expression de $F^p(\Gamma : z)$ et l'équation (3.4), on a :

$$\begin{aligned} F^p(\Gamma : z) &= \sum_{t=1}^{q-1} \frac{\chi^p(\sigma^t)}{\det(z-\sigma^t)} + \frac{C_{2n}^p}{(z-1)^{2n}} \\ &= \frac{1}{\psi_q(z)} \sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t) \det(z-\overline{\sigma}^t) - \frac{1}{\psi_q(z)} C_{2n}^p (z-1)^4 + \frac{C_{2n}^p}{(z-1)^{2n}}. \end{aligned}$$

Comme $\det(z-\overline{\sigma}^t) = \sum_{a=0}^{4} (-1)^a \chi^a(\overline{\sigma}^t) z^a$, on a :

$$\sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t) \det(z-\overline{\sigma}^t) = \sum_{a=0}^{4} (-1)^a \left(\sum_{t=1}^{q} \chi^a(\overline{\sigma}^t) \chi^p(\sigma^t) \right) z^a.$$

Comme le coefficient de z^a est égal à celui de z^{4-a}, il suffit de calculer les coefficients de $1, z$ et z^2.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t) &= \sum_{d=0}^{[p/2]} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{p-2d} \le n} \sum_{t=1}^{q} C_p^d \xi^{t(\pm p_{j_1} \pm \ldots \pm p_{j_{p-2d}})}, \\ \sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t) \chi^1(\overline{\sigma}^t) &= \sum_{d=0}^{[p/2]} \sum_{i=1}^{2} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{p-2d} \le n} \sum_{t=1}^{q} C_p^d \xi^{t(\pm p_{j_1} \pm \ldots \pm p_{j_{p-2d}} \pm q_i)}, \\ \sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t) \chi^2(\overline{\sigma}^t) &= \sum_{d=0}^{[p/2]} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{p-2d} \le n} \sum_{t=1}^{q} C_p^d \xi^{t(\pm p_{j_1} \pm \ldots \pm p_{j_{p-2d}} \pm q_1 \pm q_2)} + 2 \sum_{t=1}^{q} \chi^p(\sigma^t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour $r \geq 1$ et $s \geq 0$, on pose :

$$\begin{aligned} K_r &= \{(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{Z}^r; 0 < u_1 < \ldots < u_r > q, u_i + u_j \not\equiv 0 \pmod q \ \forall\, i \neq j\}, \\ K_r(q_1, q_2) &= \{(u_1, \ldots, u_r) \in K_r; u_i \not\equiv \pm q_j \pmod q \forall 1 \leq i \leq r, j = 1, 2\}, \\ A_r(s) &= \{(u_1, \ldots, u_r) \in K_r; u_1 + \ldots + u_r \equiv s \pmod q\}, \\ A_r(q_1, q_2; s) &= K_r(q_1, q_2) \cap (A_r(s) \cup A_r(-s)). \end{aligned}$$

Si $s \equiv 0 \pmod q$, on désigne $A_r(q_1, q_2; s)$ par $A_r(q_1, q_2)$.

Proposition 3.3.17 *Soit $L_1 = L(q : p_1, ..., p_n)$ et $L_2 = L(q : s_1, ..., s_n)$ deux espaces de $\mathcal{L}_0(q, n)$ tels que $\overline{L_1} = L(q : q_1, q_2)$ et $\overline{L_2} = L(q : t_1, t_2)$. L_1 et L_2 sont k-isospectraux pour tout $k \leq p$ si et seulement si pour tout $r = 1, ..., p$:*

$$
\begin{aligned}
&|A_r(q_1, q_2)| = |A_r(t_1, t_2)|, \\
&|A_r(q_1, q_2; q_1)| + |A_r(q_1, q_2; q_2)| = |A_r(t_1, t_2; t_1)| + |A_r(t_1, t_2; t_2)|, \\
&|A_r(q_1, q_2; q_1 + q_2)| + |A_r(q_1, q_2; q_1 - q_2)| = |A_r(t_1, t_2; t_1 + t_2)| + |A_r(t_1, t_2; t_1 - t_2)|.
\end{aligned}
$$

Preuve : C'est une conséquence de (3.8) et de la proposition 3.3.5. □

Lemme 3.3.18

1. $|A_r(s)| = |A_r(1)|$, *si* $s \not\equiv 0 \pmod q$.
2. $|A_r(0)| \neq |A_r(1)|$.

Preuve :

1. Si u est un entier, on désigne par $\overline{u}$ la classe d'équivalence de u modulo q. Si $(u_1, ..., u_r) \in A_r(1)$, alors $(\overline{su_1}, ..., \overline{su_r}) \in A_r(s)$ à une permutation près. Cette correspondance est une bijection entre $A_r(1)$ et $A_r(s)$ pour $s \not\equiv 0 \pmod q$.
2. $\sum_{s=0}^{q} |A_r(s)| = |K_r| = C_{q-1}^r$. En utilisant la première partie on trouve :

$$|A_r(0)| + (q-1)|A_r(1)| = C_{q-1}^r.$$

Si $|A_r(0)| = |A_r(1)|$, alors $q|A_r(0)| = C_{q-1}^r$, ce qui n'est pas possible puisque q est premier.

□

Lemme 3.3.19 *Pour $r \geq 3$, on a :*

$$
\begin{aligned}
|A_r(q_1, q_2)| \;=\; & |A_r(0)| - |A_{r-1}(q_1, q_2; q_1)| - |A_{r-1}(q_1, q_2; q_2)| \\
& - |A_{r-2}(q_1, q_2; q_1 + q_2)| - |A_{r-2}(q_1, q_2; q_1 - q_2)|.
\end{aligned}
$$

Preuve : On décompose l'ensemble $A_r(0)$ en la réunion disjointe de $A_r(q_1, q_2)$ et du sous-ensemble A' d'éléments $(u_1, ..., u_r)$ de $A_r(0)$ tels que pour au moins un $i \in \{1, ..., r\}$ et un $j \in \{1, 2\}$, $u_i \equiv \pm q_j \pmod q$. Le nombre des i vérifiant cette condition ne peut pas dépasser 2 puisque $u_{i_1} + u_{i_2} \not\equiv 0$ si $i_1 \neq i_2$. On décompose ensuite A' en une réunion disjointe $A'_1 \cup A'_2$ où A'_1 est le sous-ensemble correspondant à l'existence d'un seul i et A'_2 est celui correspondant à l'existence de deux i. Maintenant, A'_1 n'est autre que $A_{r-1}(q_1, q_2; q_1) \cup A_{r-1}(q_1, q_2; q_2)$ et A'_2 n'est autre que $A_{r-2}(q_1, q_2; q_1 + q_2) \cup A_{r-2}(q_1, q_2; q_1 - q_2)$. D'où le lemme. □

On démontre de la même façon le lemme suivant.

Lemme 3.3.20 *Soit $L(q:q_1,q_2) \in \mathcal{L}_r(q,2)$. Pour $r \geq 3$ et $\{i,j\}=\{1,2\}$, on a :*

1. $$\begin{aligned} |A_r(q_1,q_2;q_i)| &= 2|A_r(1)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;2q_i)| - 2|A_{r-1}(q_1,q_2)| \\ &\quad -|A_{r-1}(q_1,q_2;q_1+q_2)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;q_1-q_2)| \\ &\quad -|A_{r-2}(q_1,q_2;2q_i+q_j)| - |A_{r-2}(q_1,q_2;2q_i-q_j)| \\ &\quad -2|A_{r-2}(q_1,q_2;q_j)|. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} |A_r(q_1,q_2;q_1 \pm q_2)| &= 2|A_r(1)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;2q_1 \pm q_2)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;q_1 \pm 2q_2)| \\ &\quad -|A_{r-1}(q_1,q_2;q_1)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;q_2)| - |A_{r-2}(q_1,q_2;2q_1 \pm 2q_2)| \\ &\quad -|A_{r-2}(q_1,q_2;2q_1)| - |A_{r-2}(q_1,q_2;2q_2)| - 2|A_{r-2}(q_1,q_2)|. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} |A_r(q_1,q_2;s)| &= 2|A_r(1)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;s+q_1)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;s-q_1)| \\ &\quad -|A_{r-1}(q_1,q_2;s+q_2)| - |A_{r-1}(q_1,q_2;s-q_2)| \\ &\quad -|A_{r-2}(q_1,q_2;s+q_1+q_2)| - |A_{r-2}(q_1,q_2;s+q_1-q_2)| \\ &\quad -|A_{r-2}(q_1,q_2;s-q_1+q_2)| - |A_{r-2}(q_1,q_2;s-q_1-q_2)|, \\ &\quad \textit{si } s \not\equiv 0, \pm q_1, \pm q_2, \pm(q_1 \pm q_2) \pmod q. \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants sont faciles à démontrer.

Lemme 3.3.21 *Soit $L(q:q_1,q_2) \in \mathcal{L}_0(q,2)$. On a :*

1. $|A_1(q_1,q_2)| = 0$.

2. $|A_1(q_1,q_2;q_j)| = 0$, *pour* $j=1,2$.

3. $|A_1(q_1,q_2;s)| = 2$, *si* $s \not\equiv 0, \pm q_1, \pm q_2 \pmod q$.

Lemme 3.3.22 *Soit $L(q:q_1,q_2) \in \mathcal{L}_1(q,2)$. On a :*

1. $|A_2(q_1,q_2)| = 0$.

2. $|A_2(q_1,q_2;q_j)| = 2|A_2(1)| - 4$, *pour* $j=1,2$.

3. $|A_2(q_1,q_2;q_1 \pm q_2)| = 2|A_2(1)| - |A_1(q_1,q_2;2q_1 \pm q_2)| - |A_1(q_1,q_2;q_1 \pm 2q_2)| - 2$.

4. $|A_2(q_1,q_2;s)| = 2|A_2(1)| - |A_1(q_1,q_2;s+q_1)| - |A_1(q_1,q_2;s-q_1)| - |A_1(q_1,q_2;s+q_2)| - |A_1(q_1,q_2;s-q_2)|$, *si* $s \not\equiv 0, \pm q_1, \pm q_2, \pm(q_1 \pm q_2) \pmod q$.

La proposition suivante est une conséquence des lemmes 3.3.20, 3.3.21 et 3.3.22.

Proposition 3.3.23 *Soit $r \geq 3$ et $L(q:q_1,q_2) \in \mathcal{L}_r(q,2)$. On a :*

1. $$|A_r(q_1,q_2)| = C_{r,0} + \sum_{\substack{1 \leq a+b \leq r-1 \\ a,b>0}} C_{r,0,a,b}\left\{|A_1(q_1,q_2;aq_1+bq_2)| + |A_1(q_1,q_2;aq_1-bq_2)|\right\},$$

2. $$|A_r(q_1,q_2;q_1)| + |A_r(q_1,q_2;q_2)| = C_{r,1} + \sum_{\substack{1 \leq a+b \leq r \\ a,b>0}} C_{r,1,a,b}\left\{|A_1(q_1,q_2;aq_1+bq_2)| + |A_1(q_1,q_2;aq_1-bq_2)|\right\},$$

3. $$|A_r(q_1,q_2;q_1+q_2)| + |A_r(q_1,q_2;q_1-q_2)| = C_{r,2} + \sum_{\substack{1 \leq a+b \leq r+1 \\ a,b>0}} C_{r,2,a,b}\left\{|A_1(q_1,q_2;aq_1+bq_2)| + |A_1(q_1,q_2;aq_1-bq_2)|\right\},$$

où les constantes $C_{r,i}$ et $C_{r,i,a,b}$, $i = 0, 1, 2$ et $a, b > 0, 1 \leq a+b \leq r-1+i$ sont indépendants de $L(q : q_1, q_2) \in \mathcal{L}_r(q, 2)$. De plus, pour un i fixé ($i = 0, 1$ ou 2), les constantes $C_{r,i,a,r+i-a}$, $0 < a < r+i$, ne s'annulent pas et ont le même signe.

Preuve du théorème 3.3.4 :

1. Soit $L_1 \in \mathcal{L}_p(q, n)$, avec $\overline{L_1} = L(q : q_1, q_2)$. On a :

   $$aq_1 \pm bq_2 \not\equiv 0 \pmod{q}, \ \forall a, b;\ 1 \leq |a| + |b| \leq p+2.$$

   Ainsi, si $1 \leq |a| + |b| \leq p+1$, alors $aq_1 + bq_2 \not\equiv 0, \pm q_1, \pm q_2 \pmod{q}$. La première partie du théorème 3.3.4 est alors une conséquence des propositions 3.3.17 et 3.3.23.

2. Si $L_1 \in \mathcal{L}_p(q, n)$ et non dans $\mathcal{L}_{p+1}(q, n)$, avec $\overline{L_1} = L(q : q_1, q_2)$. Il existe un seul couple d'entiers a_0, b_0 tel que $a_0 q_1 \pm b_0 q_2 \equiv 0 \pmod{q}$ et $|a_0| + |b_0| = p+3$. On suppose que $a_0, b_0 > 0$ et que $b_0 \geq 2$ alors $a_0 q_1 + (b_0 - 1)q_2 \equiv -q_2 \pmod{q}$ ou $a_0 q_1 - (b_0 - 1)q_2 \equiv q_2 \pmod{q}$. Pour le reste de couples a, b tels que $1 \leq |a| + |b| \leq p+2$, $aq_1 \pm bq_2 \not\equiv 0, \pm q_1, \pm q_2$. Si $L_2 \in \mathcal{L}_{p+1}(q, n)$ avec $\overline{L_2} = L(q : t_1, t_2)$, alors pour tout a, b tels que $1 \leq |a| + |b| \leq p+2$, $at_1 \pm bt_2 \not\equiv 0, \pm t_1, \pm t_2$. Il suffit maintenant de voir que la troisième condition de la proposition 3.3.23 n'est pas vérifiée lorsque $r = p+1$.

□

3.4 Sous-groupes de $O(2d)$ finis, sans point fixe et de type 1

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés des sous-groupes de $O(2d)$ finis, sans points fixes et de type 1 (définition 3.4.2). Nous vérifions que si Γ_1 et Γ_2 sont deux tels sous-groupes irréductibles (définition 3.4.3) et isomorphes, alors le triplet $(O(2d), \Gamma_1, \Gamma_2)$ vérifient les hypothèses du théorème de T. Sunada (théorème 3.4.1).

On désigne par $\sharp A$ le nombre d'éléments de l'ensemble A. Si G est un groupe et $g \in G$, on désigne par $[g]_G$ la classe de conjugaison de g dans G.

Théorème 3.4.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte où g est la métrique correspondante, G un groupe d'isométries compact de M. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes finis sans point fixe de G tels que $\Gamma_1 \backslash M$ et $\Gamma_2 \backslash M$ soient des variétés compactes. Si l'on munit ces deux variétés de la métrique induite par g et si pour tout $g \in G$, $\sharp([g]_G \cap \Gamma_1) = \sharp([g]_G \cap \Gamma_2)$, alors :*

1. *Les variétés $\Gamma_1 \backslash M$ et $\Gamma_2 \backslash M$ ont même p-spectre du laplacien pour tout p.*
2. *Il existe une bijection qui préserve les longueurs entre l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_1 \backslash M$ et l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_2 \backslash M$.*

Ce théorème est en fait un cas particulier d'une généralisation du théorème de T. Sunada [40] et dont la preuve se trouve dans [13], [3] et [4].

Nous allons tout d'abord définir un groupe de type 1.

Définition 3.4.2 *Un groupe Γ fini, sans point fixe, est dit de type 1 si tous les sous-groupes de Sylow de Γ sont cycliques.*

Définition 3.4.3 *Soit Γ un sous-groupe de $O(2d)$. On dit que Γ est irréductible si la représentation $\Gamma \subset O(2d)$ est irréductible réelle.*

On décrit un groupe fini sans point fixe de type 1. Si a et b sont deux entiers, on désigne par (a, b) le plus grand commun diviseur de a et b. Soit m, n, d et n' des entiers strictement positifs et r un entier premier avec m vérifiant :

$$\begin{cases} ((r-1)n, m) = 1 \\ \text{la classe de } r \text{ dans } K_m \text{ est d'ordre } d \\ n = n'd \\ \text{tout diviseur premier de } d \text{ divise } n'. \end{cases} \tag{3.9}$$

Avec ces entiers, on définit le groupe fini $\Gamma_d(m, n; r)$ d'ordre $N = mn$ engendré par deux éléments A et B vérifiant :

$$A^m = B^n = 1 \quad \text{et} \quad BAB^{-1} = A^r.$$

Lemme 3.4.4 *[29] Pour tout $d \geq 2$, il existe une infinité de groupes finis sans point fixe $\Gamma_d(m, n, r)$ de type 1 avec $n' = d$.*

Preuve : Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $kd + 1$. Soit m un tel nombre ; le groupe K_m est cyclique d'ordre kd. Il existe donc un entier r premier avec m dont l'ordre dans K_m est d. Si on pose $n = d^2$, le groupe $\Gamma_d(m, n, r)$ est un groupe fini sans point fixe de type 1. □

La proposition suivante caractérise les groupes finis sans point fixe de type 1.

Proposition 3.4.5 *[45] Un groupe fini sans point fixe de type 1 est isomorphe à un certain $\Gamma_d(m, n, r)$.*

Pour vérifier que le triplet $(\mathrm{O}(2d), \Gamma_1, \Gamma_2)$ satisfait aux conditions du théorème 3.4.1, nous allons montrer les propositions 3.4.6 et 3.4.7 énoncées ci-dessous. La première est facile, nous donnons sa preuve. La deuxième est due à A. Ikeda et sa preuve sera donnée plus loin.

Proposition 3.4.6 *Soit G un groupe compact et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes finis sans point fixe de G. Le triplet (G, Γ_1, Γ_2) vérifie les conditions du théorème 3.4.1 si et seulement si les groupes Γ_1 et Γ_2 sont presque conjugués dans G (définition 3.2.3).*

Preuve : Supposons tout d'abord qu'il existe une presque conjugaison $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Soit $\sigma \in [g]_G \cap \Gamma_1$, donc σ est conjugué à g dans G. Puisque $\phi(\sigma)$ est conjugué à σ dans G, il est conjugué à g dans G. Donc $\phi|_{[g]_G \cap \Gamma_1}$ est une bijection de $[g]_G \cap \Gamma_1$ sur $[g]_G \cap \Gamma_2$.

Réciproquement, supposons que pour tout $g \in G$, $\sharp([g]_G \cap \Gamma_1) = \sharp([g]_G \cap \Gamma_2)$. Il est évident que pour tout $g \in G$, il existe une presque conjugaison de $[g]_G \cap \Gamma_1$ sur $[g]_G \cap \Gamma_2$. D'autre part, $\Gamma_1 = \cup_{g \in G} \left([g]_G \cap \Gamma_1\right) = \cup_{g \in \Gamma_1} \left([g]_G \cap \Gamma_1\right)$ et $\Gamma_2 = \cup_{g \in \Gamma_1} \left([g]_G \cap \Gamma_2\right)$. On peut donc construire une presque conjugaison de Γ_1 sur Γ_2. □

Proposition 3.4.7 *[29] Soit Γ et Γ' deux groupes finis, non cycliques, sans point fixe et de type 1 dans $O(2d)$. Si Γ et Γ' sont irréductibles et isomorphes, alors ils sont presque conjugués.*

Avant de donner la preuve de cette proposition, nous avons besoin de décrire les représentations sans point fixe de $\Gamma_d(m,n,r)$. Soit $\Gamma = \Gamma_d(m,n,r)$ et k et l deux entiers tels que $(k,m) = (l,n) = 1$. Soit $\pi_{k,l}$ la représentation réelle de degré $2d$ de Γ donnée par :

$$\pi_{k,l}(A) = \begin{pmatrix} R(2\pi k/m) & & & \mathbf{(0)} \\ & R(2\pi kr/m) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & & R(2\pi kr^{d-1}/m) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

et

$$\pi_{k,l}(B) = \begin{pmatrix} (0) & I & & \mathbf{(0)} \\ & (0) & I & \\ & & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{(0)} & & \ddots & I \\ R(2\pi l/n') & & & & (0) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

où chaque bloc est une matrice d'ordre 2. On a la proposition suivante :

Proposition 3.4.8 *[45] La représentation $\pi_{k,l}$ est irréductible et toute représentation réelle sans point fixe de Γ est équivalente à une somme de représentations de cette forme. Deux représentations $\pi_{k,l}$ et $\pi_{k',l'}$ sont équivalentes si et seulement s'il existe des entiers $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et $c \in \{0,1,...,d-1\}$ tels que $k' \equiv \varepsilon k r^c \pmod m$ et $l' \equiv \varepsilon l \pmod{n'}$.*

Le lemme suivant est utile pour montrer la proposition 3.4.7.

Lemme 3.4.9 *[29] Soit $M = (x_{i,j})$ une matrice d'ordre d et soit v un entier tel que $1 \leq v \leq d-1$. Si $x_{i,j} = 0$ pour tout $j \not\equiv i+v \pmod d$, alors le polynôme caractéristique de M est :*

$$\det(z - M) = \prod_{i=1}^{(d,v)} \left\{ z^{d/(d,v)} - \prod_{j=1}^{d/(d,v)} x_{i+(d,v)(j-1),i+(d,v)(j-1)+v} \right\},$$

où $x_{i,j} = x_{i',j'}$ si $i \equiv i' \pmod d$ et $j \equiv j' \pmod d$.

Preuve : Le lemme est facile dans le cas où $v = 1$. Si $v > 1$, on regarde la matrice M comme une transformation linéaire d'un espace vectoriel complexe V de dimension d et de base $\{e_1, ..., e_d\}$ tel que :

$$Me_i = \sum_{j=1}^{d} x_{i,j} e_j = x_{i,i+v} e_{i+v}, \quad i = 1, ..., d.$$

On pose :

$$f_{i,j} = e_{i+v(j-1)}, \quad 1 \leq i \leq (d,v), 1 \leq j \leq d/(d,v).$$

Soit V_i, $i = 1, ..., (d,v)$, le sous-espace de V engendré par $f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,d/(d,v)}$. On a alors :
i) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_{(d,v)}$.
ii) $MV_i \subset V_i$, $i = 1, ..., (d,v)$.
iii) $Mf_{i,j} = x_{i+v(j-1)i+vj} f_{i,j+1}$, pour $1 \leq j \leq d/(d,v)$, et $Mf_{i,d/(d,v)} = x_{i-v,i} f_{i,1}$.
Ainsi, le polynôme caractéristique de M est :

$$\prod_{i=1}^{(d,v)} \left\{ z^{d/(d,v)} - \prod_{j=1}^{d/(d,v)} x_{i+v(j-1),i+vj} \right\}.$$

Le lemme résulte du fait que :

$$\{v(j-1); j = 1, 2, ..., d/(d,v)\} \equiv \{(d,v)(j-1); j = 1, 2, ..., d/(d,v)\} \pmod{d}.$$

□

Preuve de la proposition 3.4.7 : Comme Γ et Γ' sont de type 1 et isomorphes, ils sont isomorphes à un $\Gamma_d(m,n,r)$ d'après la proposition 3.4.5. On peut supposer que $\Gamma = \pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$ et $\Gamma' = \pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))$ où $\pi_{1,l}$ et $\pi_{1,1}$ sont deux représentations sans point fixe de Γ définies par les expressions (3.10) et (3.11). Le complexifié $(\pi_{1,l})_{\mathbb{C}}$ de $\pi_{1,l}$ se décompose en deux représentations irréductibles de $\Gamma_d(m,n,r)$, conjuguées complexes l'une de l'autre :

$$(\pi_{1,l})_{\mathbb{C}} = \rho_l \oplus \overline{\rho}_l,$$

où

$$\rho_l(A) = \begin{pmatrix} \xi_m & & & (0) \\ & \xi_m^r & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \xi_m^{r^{n-1}} \end{pmatrix}$$

et

$$\rho_l(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ \xi_{n'}^l & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

où A et B sont les générateurs du groupe $\Gamma_d(m,n,r)$ et $\xi_m = \exp(2i\pi/m)$.

Ainsi, pour tout $0 \leq v \leq d-1$, les composantes de la matrice $\rho_l(A^a B^{v+wd})$ sont :

$$\begin{cases} (\rho_l(A^a B^{v+wd}))_{i,i+v} & = \xi_m^{ar^{i-1}} . \xi_{n'}^{lw} & 1 \leq i \leq d-v, \\ (\rho_l(A^a B^{v+wd}))_{i,i+v-d} & = \xi_m^{ar^{i-1}} . \xi_{n'}^{l(w+1)} & d-v < i, \\ (\rho_l(A^a B^{v+wd}))_{i,j} & = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En appliquant le lemme 3.4.9 à la matrice $\rho_l(A^aB^b)$, pour $0 \leq a \leq m-1$ et $1 \leq b \leq n-1$, $b = v + wd$, on trouve :

$$\det(z - \rho_l(A^aB^b)) = \prod_{i=1}^{(d,v)} (z^{d/(d,v)} - \xi_m^{ar^{i-1}r(v)}.\xi_{n'}^{vl/(d,v)}), \tag{3.12}$$

où $r(v) = \sum_{j=1}^{d/(d,v)} r^{(d,v)j}$.

On définit l'application $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ par :

$$\phi(\pi_{1,l}(A^aB^b)) = \pi_{1,1}(A^aB^{lb}), \quad \text{pour} \quad 0 \leq a \leq m-1 \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq n-1.$$

ϕ est une bijection. De plus, pour tout $\sigma \in \Gamma$, on a :

$$\det(z - \sigma) = \det(z - \phi(\sigma)).$$

Ceci veut dire que σ est conjugué à $\phi(\sigma)$ dans $O(2d)$. □

3.5 Quotient de la sphère par un groupe de type 1

3.5.1 Description et propriétés

Les variétés étudiées dans ce paragraphe, sont des quotients de la sphère par des groupes d'isométries finis, non cycliques, sans point fixe et de type 1. D'après le théorème 3.4.1 et les propositions 3.4.6 et 3.4.7, on a :

Théorème 3.5.1 *Soit $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma'\backslash S^{2d-1}$ deux formes d'espaces sphériques de groupes fondamentaux non cycliques de type 1. Si Γ et Γ' sont irréductibles et isomorphes alors $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma'\backslash S^{2d-1}$ sont p-isospectraux pour tout p.*

Dans la suite, on va décrire les espaces satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.5.1. Ces espaces seront utilisés dans le chapitre 4 où on calcule leurs spectres des longueurs.

Le théorème suivant décrit les espaces sphériques dont le groupe fondamental est non cyclique de type 1, à isométrie près.

Théorème 3.5.2 *[45] Un espace sphérique dont le groupe fondamental est non cyclique de type 1, est isométrique à un espace de la forme :*

$$(\pi_{k_1,l_1} \oplus ... \oplus \pi_{k_s,l_s})(\Gamma)\backslash S^{2sd-1}.$$

Deux espaces $(\pi_{k_1,l_1} \oplus ... \oplus \pi_{k_s,l_s})(\Gamma)\backslash S^{2sd-1}$ et $(\pi_{k'_1,l'_1} \oplus ... \oplus \pi_{k'_s,l'_s})(\Gamma)\backslash S^{2sd-1}$ sont isométriques si et seulement si il existe une permutation $i \mapsto i'$ de l'ensemble $\{1, ..., s\}$ et des entiers ε_i, c_i, s, t tels que $\varepsilon_i = \pm 1$, $c_i \in \{0, ..., d-1\}$, $(s, m) = (t, n) = 1$, $t \equiv 1 \pmod d$ et $k'_{i'} \equiv \varepsilon_i s k_i r^{c_i} \pmod m$, $l'_{i'} \equiv \varepsilon_i t l_i \pmod{n'}$.

En particulier, les espaces qui vérifient les hypothèses du théorème 3.5.1 sont de la forme $\pi_{k,l}(\Gamma)\backslash S^{2d-1}$. Cet espace est isométrique à un $\pi_{k',l'}(\Gamma)\backslash S^{2d-1}$ si et seulement si il existe des entiers $\varepsilon = \pm 1$, $c \in \{0, ..., d-1\}$, s, t tels que $(s, m) = (t, n) = 1$ et $t \equiv 1 \pmod d$, vérifiant $k' \equiv \varepsilon s k r^c \pmod m$ et $l' \equiv \varepsilon t l \pmod{n'}$.

On a aussi les propriétés suivantes pour les formes d'espaces sphériques.

Proposition 3.5.3 *Si d est impair, le groupe fondamental de l'espace $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ est de type 1.*

Théorème 3.5.4 *[27] Soit $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma'\backslash S^{2d-1}$ deux formes d'espaces sphériques de dimension $2d-1$ et de groupes fondamentaux non cycliques. Supposons que d est premier impair alors $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma'\backslash S^{2d-1}$ sont 0-isospectraux (même p-isospectraux) si et seulement si Γ et Γ' sont isomorphes.*

Preuve : Si d est impair alors, d'après la proposition 3.5.3, Γ et Γ' sont de type 1. De plus, si d est premier impair et Γ et Γ' sont non cycliques, alors ils sont irréductibles d'après la proposition 3.4.8. Ainsi, si Γ et Γ' sont isomorphes, $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma'\backslash S^{2d-1}$ sont p-isospectraux pour tout p, d'après le théorème 3.5.1. La réciproque est prouvée par A. Ikeda dans [25]. □

Lemme 3.5.5 *[29] Soit $\Gamma = \Gamma_d(m,n,r)$ un groupe fini sans point fixe de type 1 avec $n' = d$. Pour que le nombre des classes d'isométries des formes d'espaces sphériques de dimension $2d-1$ et de même groupe fondamental Γ soit au moins deux il faut et il suffit que d soit égal à 5 ou supérieur à 7.*

Preuve : En utilisant le théorème 3.5.2, la question se ramène à montrer que le nombre de représentations non équivalentes de Γ est supérieur à deux dans les conditions du lemme. Soit $\pi_{k,l}$ et $\pi_{k',l'}$ deux représentations sans point fixe de Γ. Ces deux représentations sont équivalentes, modulo les automorphismes de Γ, s'il existe un entier t, premier avec n et dont la classe d'équivalence modulo d est 1, tel que $l \equiv \pm tl' \pmod{n'}$. Comme $n' = d$, le nombre de classes d'isométries de formes d'espaces sphériques de dimension $2d-1$ et de même groupe fondamental Γ est au moins $\phi(d)/2$. Or, si $d = p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}$ est la décomposition de d en nombres premiers, on sait que :

$$\phi(d) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1})(p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1})...(p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1}).$$

Ainsi, il est facile de vérifier que si $d = 5$ ou $d \geq 7$, $\phi(d)/2 \geq 2$. □

On a donc le théorème :

Théorème 3.5.6 *[27] On suppose que $d = 5$ ou $d > 6$. Il existe une infinité de pairs de formes d'espaces sphériques de dimension $2d-1$ qui sont p-isospectraux pour tout p, mais non isométriques.*

3.6 Quotients de la grassmannienne

La classification des formes des variétés grassmanniennes réelles est faite dans [45] et utilise celle des formes d'espaces sphériques. Il n'y a pas beaucoup de tels espaces de dimension paire, on va donc s'intéresser à ceux de dimension impaire, i.e. de la forme $\Gamma\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ où q est impair. On a une isométrie β de $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sur $G_{2d-q,2d}(\mathbb{R})$ qui envoie un plan sur le plan orthogonal. En particulier, β est une isométrie de $G_{d,2d}(\mathbb{R})$.

Théorème 3.6.1 *[45] Le groupe d'isométries $I(G_{q,2d}(\mathbb{R}))$ de la variété grassmannienne réelle $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ est :*

$$I(G_{q,2d}(\mathbb{R})) = \begin{cases} O(2d) & si \quad q \neq d, \\ O(2d) \cup \beta.O(2d) & si \quad q = d. \end{cases}$$

Théorème 3.6.2 *[45] Soit M une variété grassmannienne réelle de dimension impaire. Les classes d'isométries des variétés $\Gamma\backslash M$, $\Gamma \subset O(2d)$, sont en bijection avec celles des formes d'espaces sphériques de dimension $2d-1$. La correspondance est donnée par $\Gamma\backslash M \mapsto \Gamma\backslash S^{2d-1}$.*

Les résultats de cette partie sont prouvés par A. Ikeda dans [29] seulement pour le spectre du laplacien agissant sur les fonctions et sans utiliser le théorème de T. Sunada.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème 3.4.1 et des propositions 3.4.6 et 3.4.7.

Théorème 3.6.3 *Soit $\Gamma_1\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ deux formes de variétés grassmanniennes réelles de dimension impaire et de groupes fondamentaux non cycliques de type 1 et telles que Γ_1 et Γ_2 soient inclus dans O(2d). Si Γ_1 et Γ_2 sont irréductibles et isomorphes alors les variétés $\Gamma_1\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sont p-isospectrales pour tout p.*

Les théorèmes suivants se montrent de la même façon que les théorèmes 3.5.4 et 3.5.6.

Théorème 3.6.4 *Soit $\Gamma_1\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ deux formes de variétés grassmanniennes réelles de dimension impaire et de groupes fondamentaux non cycliques de type 1 et telles que Γ_1 et Γ_2 soient inclus dans O(2d). Si Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes et d est premier impair alors les variétés $\Gamma_1\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sont p-isospectrales pour tout p.*

Théorème 3.6.5 *Soit $d = 5$ ou $d > 6$ et q un entier impair $1 < q \leq d$. Il existe une infinité de paires d'espaces $\Gamma_1\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ qui sont p-isospectraux pour tout p et non isométriques.*

Chapitre 4

Spectre géométrique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on calcule le spectre des longueurs (définitions 4.2.2) et parfois le spectre des volumes (définition 4.3.5) pour les variétés isospectrales et non isométriques construites par A. Ikeda dans [26], [28], [27] et [29], et décrites dans le chapitre 3. Ensuite, on compare les spectres de deux variétés isospectrales et non isométriques.

On commence par les espaces lenticulaires isospectraux jusqu'à un certain ordre p et non $(p+1)$-isospectraux. On calcule leurs spectres des longueurs au sens de la définition 4.2.2–(i) et (iii). La comparaison des spectres de deux espaces isospectraux et non isométriques montre qu'ils sont identiques. On rappelle que ces espaces ne satisfont pas aux hypothèses du théorème 3.4.1 de T. Sunada. On ne calcule pas le spectre des longueurs au sens de la définition 4.2.2–(ii), la difficulté est d'ordre technique (remarque 4.5.3). On caractérise ensuite le lien entre les géodésiques de deux espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques (remarque 4.5.5).

N'ayant pas toutes les sous-variétés minimales de ces espaces, on détermine une partie du spectre des volumes d'un espace lenticulaire, formée par les volumes des sous-variétés totalement géodésiques, ainsi que d'une partie de sous-variétés minimales, non totalement géodésiques. Dans ce cas aussi, les spectres obtenus pour deux espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques sont identiques.

On montre ainsi que ni le spectre des longueurs, ni la partie déterminée du spectre des volumes ne détermine le p-spectre du laplacien pour $p \geq 1$. On rappelle qu'il existe des espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques de la famille utilisée dans ce chapitre, qui n'ont pas le même type d'homotopie (A. Ikeda [26]). On note aussi que ces espaces non isométriques ne peuvent pas avoir le même spectre marqué (R. Gornet [22]).

On considère ensuite les quotients de la sphère et de la grassmannienne par des groupes d'isométries finis, sans point fixe, non cycliques et de type 1 qui sont irréductibles et isomorphes.

Les quotients de la sphère sont isospectraux pour les formes différentielles de tout ordre et non isométriques. Pour un tel quotient, on calcule le spectre des longueurs au sens des définitions 4.2.2–(i) et (iii). Ces exemples vérifient les hypothèses du théorème de T. Sunada (théorème 3.4.1), ils ont donc le même spectre des longueurs relativement à la première définition. On peut obtenir ce résultat directement en se servant du calcul du spectre des longueurs. On montre que deux variétés de cette famille, qui sont isospectrales et non isométriques, n'ont pas toujours le même spectre des longueurs pour la troisième défintion (théorème 4.6.10), bien qu'ils vérifient le théorème de T. Sunada. Pour la définition 4.2.2–(ii), on a le même genre de difficulté que dans le cas des espaces lenticulaires. Malheureusement, il n'a pas été possible de calculer le spectre des volumes de ces variétés, la difficulté étant de trouver les éléments du groupe fondamental qui laissent invariants une sous-variété donnée.

Les variétés quotients de la grassmannienne $\Gamma\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sont elles aussi isospectrales pour les formes différentielles de tout ordre. Pour ces variétés, on caractérise les nombres réels strictement positifs appartenant au spectre des longueurs (au sens de la définition 4.2.2–(i)) en fonction du spectre des matrices du groupe Γ. Il n'est pas possible de déterminer le spectre des longueurs ayant cette caractérisation parce qu'une géodésique de la grassmannienne dépend de plusieurs paramètres (voir lemme 4.7.1). Deux telles variétés, isospectrales et non isométriques, ont le même spectre des longueurs, au sens de la définition 4.2.2–(i), d'après le théorème de T. Sunada, ce qu'on peut prouver directement à partir de la description du spectre des longueurs. Encore dans ce cas, le spectre des volumes est difficile à déterminer.

On signale que le calcul du spectre des longueurs effectué pour les formes d'espaces sphériques $\Gamma\backslash S^n$ avec $\Gamma \subset O(n+1)$ se ramène au calcul des valeurs propres des matrices du groupe Γ, ce qui s'applique à tous les quotients de la sphère et pas seulement aux exemples traités dans ce chapitre.

L'ensemble des résultats obtenus est résumé dans un tableau. On désigne par L_1 et L_2 deux espaces lenticulaires avec $L_1 \in \mathcal{L}_{p+1}(q,n)$ et $L_2 \in \mathcal{L}_p(q,n) \setminus \mathcal{L}_{p+1}(q,n)$ (voir paragraphe 3.3.1 du chapitre 3). On désigne par M_1 et M_2 deux quotients de la sphère par deux groupes d'isométries finis, cycliques, sans point fixe, de type 1 et presque conjugués (mais pas conjugués). On note N_1 et N_2 deux quotients de la grassmannienne par deux groupes d'isométries finis, cycliques, sans point fixe, de type 1 et presque conjugués (mais pas conjugués). Dans le tableau, k-spectre (ou p-spectre) désigne le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles d'ordre k (ou p). L-spectre pour (i) (resp. pour (ii), resp. pour (iii)) désigne le spectre des longueurs au sens de la définition 4.2.2–(i) (resp. (ii), resp. (iii)). Deux variétés seront dites L-isospectrales pour (i) (resp. (ii), resp. (iii)) si elles ont le même L-spectre pour (i) (resp. (ii), resp. (iii)). De même, on notera V-spectre le spectre des volumes (définition 4.3.5) et on dira que deux variétés sont V-isospectrales si elles ont le même V-spectre.

Ce qui est marqué en gras dans le tableau correspond aux résultats obtenus dans ce chapitre.

4.2 Spectre des longueurs

Soit M une variété ayant un groupe fondamental Γ. Les classes d'homotopie libre des courbes fermées dans M correspondent aux classes de conjugaison $[\sigma]_\Gamma$ de Γ.

Proposition 4.2.1 *[32] Si M est une variété compacte, toute classe d'homotopie libre de courbes fermées de M contient au moins une géodésique fermée.*

Dans la littérature, il existe plusieurs définitions du spectre des longueurs. On les cite ci-dessous.

Définitions 4.2.2

(i) Le spectre des longueurs de la variété M est la collection des longueurs des géodésiques fermées de M, où la multiplicité de la longueur l est le nombre des géodésiques fermées de M de longueur l.

(ii) Le spectre des longueurs de M contient une longueur l si l est la longueur de la géodésique la plus courte dans une classe d'homotopie libre de courbes fermées de M. La multiplicité de l est le nombre de classes d'homotopie libre dont le lacet le plus court (nécessairement une géodésique) est de longueur l.

(iii) Le spectre des longueurs de M contient une longueur l si l est la longueur d'une géodésique dans une classe d'homotopie libre de courbes fermées de M. La multiplicité de l est le nombre de classes d'homotopie libre de courbes fermées de M contenant une géodésique de longueur l.

Dans tous les exemples qu'on considère, les multiplicités pour la première définition sont infinies, donc la deuxième et la troisième définition du spectre des longueurs sont plus significatives.

4.2.1 Cas d'un espace quotient

Les variétés riemanniennes considérées dans ce chapitre sont des quotients $\Gamma\backslash M$, d'un espace symétrique M par un groupe d'isométries sans point fixe Γ. On a ainsi un revêtement riemannien $\Pi : M \to \Gamma\backslash M$. Comme les géodésiques de l'espace symétrique M peuvent être calculées explicitement, il en est de même pour son quotient $\Gamma\backslash M$ grâce à la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 *[19] Soit (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et $\Pi : (M, g) \to (N, h)$ un revêtement riemannien. Les géodésiques de (N, h) sont les projections de celles de (M, g) et les géodésiques de (M, g) sont les relèvements de celles de (N, h).*

On décrit maintenant les longueurs des géodésiques fermées dans le quotient $\Gamma\backslash M$. On dit qu'une géodésique γ, de M, est invariante par l'élément σ, du groupe Γ, s'il existe une constante $\omega > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\sigma.\gamma(t) = \gamma(t + \omega)$. La plus petite constante ω_σ, vérifiant cette relation, est dite la période de γ par rapport à σ. Le plus petit des nombres ω_σ quand σ varie dans Γ, est la longueur ω de la géodésique primitive de N associée à $\Pi(\gamma)$. Les itérées de cette géodésique ont pour longueurs $k\omega$, $k \geq 1$. Il

	L_1 et L_2	M_1 et M_2	N_1 et N_2
Laplacien	k-isospectraux pour tout $k \leq p$ et non $(p+1)$-isospectraux A. Ikeda [28] (voir théorème 3.3.4)	p-isospectraux pour tout p et non isométriques T. Sunada (voir théorème 3.4.1)	p-isospectraux pour tout p et non isométriques T. Sunada (voir théorème 3.4.1)
Longueurs (définition 4.2.2–(i))	**L-spectre calculé** (théorème 4.5.2) **L-isospectraux** (théorème 4.5.2)	**L-spectre calculé** (lemme 4.6.3 et remarque 4.6.8) **L-isospectraux** (remarque 4.6.9 ou théorème 3.4.1)	**L-spectre caractérisé** (lemme 4.7.1) **L-isospectraux** (remarque 4.7.2 ou théorème 3.4.1)
Longueurs (définition 4.2.2–(ii))			
Longueurs (définition 4.2.2–(iii))	**L-spectre calculé** (théorème 4.5.2) **L-isospectraux** (théorème 4.5.2)	**L-spectre calculé** (lemme 4.6.3 et théorème 4.6.7) **L-isospectraux si d est impair et non L-isospectraux si d est pair** ($2d-1$ est la dimension de M_1 et de M_2) (théorème 4.6.10)	
Volumes	**Une partie du V-spectre est calculée** (propositions 4.5.8 et 4.5.12) **V-isospectraux pour la partie calculée** (propositions 4.5.8 et 4.5.12)		

TAB. 4.1: Résumé des résultats obtenus dans le chapitre 4.

revient au même de considérer simplement les ω tels que $\sigma.\gamma(t) = \gamma(t+\omega)$ pour un σ dans Γ comme les longueurs. La multiplicité d'une longueur ω est le nombre de classes d'homotopie libre contenant une géodésique de longueur ω. La collection de ces longueurs, comptées avec leur multiplicité, est le spectre des longueurs de l'espace $\Gamma\backslash M$, au sens de la troisième définition.

4.3 Spectre des volumes

Soit M une variété riemannienne et X une sous-variété de M. En tout point p de X, l'espace tangent en p à M s'écrit comme la somme directe de l'espace tangent en p à X et l'espace normal en p à X, $T_p(M) = T_p(X) \oplus N_p(X)$. Ainsi, un vecteur $u \in T_p(M)$ s'écrit d'une manière unique comme $u^T + u^N$, où $u^T \in T_p(X)$ et $u^N \in N_p(X)$. Ceci permet de décomposer un champ de vecteur $U \in T(M)$ d'une façon unique en somme d'un champ U^T tangent à X et un autre U^N normal à X. La connexion canonique ∇ de X est donnée à partir de celle de M, $\overline{\nabla}$, de la façon suivante :

Si U et V sont deux champs de vecteurs définis au voisinage du point p dans X, alors :

$$\nabla_U V = (\overline{\nabla}_U V)^T.$$

On définit alors la seconde forme fondamentale B de X par :

$$B(U,V) = (\overline{\nabla}_U V)^N = \overline{\nabla}_U V - \nabla_U V.$$

B est symétrique, donc $B(U,V)$ ne dépend que des valeurs de U et de V au point p.

4.3.1 Sous-variétés totalement géodésiques

Définition 4.3.1 *Une sous-variété riemannienne X de M est dite totalement géodésique si toute géodésique de X est une géodésique de M.*

Proposition 4.3.2 *Soit X une sous-variété de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est totalement géodésique dans M.

(ii) La seconde forme fondamentale de X est nulle.

(iii) Si $u \in T_pM$ un vecteur tangent à X en p et γ est la géodésique de M partant de p et ayant pour vecteur tangent initial u, alors le début de γ est contenu dans X.

(iv) Si c est une courbe de X et $u \in T_{c(0)}X$, alors le transport parallèle de u le long de c est le même dans M et dans X.

Proposition 4.3.3 *Soit M une variété riemannienne et X une sous-variété totalement géodésique de M. Si M est complète, X l'est aussi. Si M est symétrique, X l'est aussi.*

4.3.2 Sous-variétés minimales

Définition 4.3.4 *Soit X une sous-variété riemannienne de M. On dit que X est minimale si la trace de la seconde forme fondamentale de X est nulle.*

4.3.3 Définition du spectre des volumes

On va mettre en place une définition du spectre des volumes qui pourrait généraliser la première définition du spectre des longueurs (définitions 4.2.2).

Définition 4.3.5 *Le p-spectre des volumes d'une variété M est la collection des volumes des sous-variétés minimales de dimension p de M. La multiplicité d'un volume v est le nombre de fois où v apparaît dans le spectre.*

Pourquoi cette définition ? L'objet géométrique qui généralise naturellement les géodésiques en dimension supérieure pourrait être les sous-variétés totalement géodésiques. Malheureusement, il n'y en a pas beaucoup en général. Si on regarde les géodésiques comme étant les courbes qui minimisent les longueurs, on peut penser que les sous-variétés minimales, qui minimisent les volumes peuvent être une généralisation des géodésiques.

Dans quel but ? Chercher à savoir si le spectre des volumes apporte plus d'informations sur la variété, soit seul, soit combiné avec le spectre des longueurs. Par exemple, est-ce que le spectre des p-volumes peut avoir une relation quelconque avec le spectre des p-formes ? Ou tous les spectres des volumes avec le spectre des longueurs contiennent-ils des informations sur le spectre du laplacien ? Ou l'inverse ?

Le but initial était d'établir une formule des traces semblables à celle montrée par Y. Colin de Verdière dans [12], reliant le spectre du laplacien sur les formes et le spectre des volumes. Il y a bien de difficultés techniques dans cette direction. Dans ce texte, on n'apporte pas une réponse de nature générale. On montre seulement qu'une partie du spectre des volumes est la même pour les espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques décrits dans le chapitre 3, montrant ainsi que cette partie du spectre des volumes (contenant entre autre les volumes des sous-variétés totalement géodésiques) ne détermine pas le p-spectre du laplacien pour $p \geq 1$.

4.3.4 Cas d'un espace quotient

Soit M une variété riemannienne compacte, Γ un groupe d'isométries agissant sans point fixe sur M et $\Pi : M \to \Gamma\backslash M$ la projection canonique.

Proposition 4.3.6 *Si X est une sous-variété totalement géodésique (resp. minimale) de M, alors son image $\Pi(X)$ par la projection canonique est une sous-variété totalement géodésique (resp. minimale) de $\Gamma\backslash M$.*

Proposition 4.3.7 *Soit X et M deux variétés riemanniennes, $i : X \to M$ une immersion propre et injective et $\Pi : \tilde{M} \to M$ un revêtement riemannien. Il existe une variété riemannienne $\tilde{X}$ et un revêtement $\Pi' : \tilde{X} \to X$ et une immersion propre injective $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{M}$ tels* *que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{M} \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[i]{} & M \end{array}$$

Si de plus X est totalement géodésique (ou minimale) alors $\tilde{X}$ l'est aussi.

Preuve : Il suffit de prendre pour $\tilde{X}$ le revêtement image réciproque de $\tilde{M}$, i.e.

$$\tilde{X} = \{(x, \tilde{m}) \in X \times \tilde{M}; i(x) = p(\tilde{m})\},$$

et

$$\Pi'(x, \tilde{m}) = x, \quad \tilde{i}(x, \tilde{m}) = \tilde{m}.$$

D'après l'expression de $\tilde{i}$ et l'injectivité de i, on a l'injectivité de $\tilde{i}$. $\tilde{i}$ est clairement une immersion. La propriété d'être totalement géodésique (ou minimale) étant une propriété locale, on a la conclusion. □

Le lemme suivant va servir dans le calcul des volumes des sous-variétés des quotients de la sphère.

Lemme 4.3.8 *[5] Si $\Pi : \tilde{M} \to M$ est un revêtement à q feuillets alors volume$(M) = \frac{1}{q}$volume$(\tilde{M})$.*

4.4 Cas d'un espace symétrique

Dans ce paragraphe, on rappelle la détermination des géodésiques et de sous-variétés totalement géodésiques dans un espace symétrique, en particulier dans la sphère et la variété grassmannienne. Ce calcul va servir à les déterminer dans les quotients de la sphère et de la grassmannienne, considérées tout au long de ce chapitre. Pour plus de détails à ce sujet, on pourra consulter la référence [23].

Théorème 4.4.1 *[23] Soit M un espace symétrique, $G = I_0(M)$ la composante neutre du groupe d'isométrie, o un point de M et K le stabilisateur de o. Soit σ l'involution associée à la paire symétrique (G, K) (voir le paragraphe 1.4.4 de la page 33). Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sont les algèbres de Lie de G et K respectivement, on obtient $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.*

Soit π la projection de G sur M donnée par $g \mapsto g.o$. L'application linéaire $T_e\pi$ envoie $\mathfrak{k}$ sur (0) et induit un isomorphisme de $\mathfrak{m}$ sur T_oM.

Si $X \in \mathfrak{m}$, alors la géodésique de M partant de o avec vecteur tangent $T_e\pi(X)$ est donnée par :

$$\gamma_{T_e\pi(X)}(t) = (exptX).o.$$

Définition 4.4.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{s}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{s}$ est un système de Lie triple si $[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]] \subset \mathfrak{s}$.*

Théorème 4.4.3 *Soit M un espace symétrique. On identifie T_oM avec $\mathfrak{m}$ comme dans le théorème 4.4.1. Soit $\mathfrak{s}$ un système de Lie triple contenu dans $\mathfrak{m}$. Si Exp est l'application exponentielle de la variété M au point o, on pose $S = Exp\mathfrak{s}$. Alors S a une structure différentielle naturelle pour laquelle elle est une sous-variété totalement géodésique de M vérifiant $T_oS = \mathfrak{s}$.*

Réciproquement, si S est une sous-variété totalement géodésique de M et o un point de S, alors le sous-espace $\mathfrak{s} = T_oS$ de $\mathfrak{m}$ est un système de Lie triple.

Définition 4.4.4 *Une variété riemannienne est dite plate si son tenseur de courbure est identiquement nul.*

Définition 4.4.5 *Soit M un espace symétrique. Le rang de M est la dimension maximale d'une sous-variété plate totalement géodésique de M.*

Une sous-variété plate totalement géodésique de M dont la dimension est le rang de M s'appelle un plat maximal.

Proposition 4.4.6 *Soit M un espace symétrique de type compact ou de type non compact. Soit o un point de M. On identifie T_oM à $\mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{s}$ un système de Lie triple contenu dans T_oM. Alors la sous-variété totalement géodésique $S = Exp\mathfrak{s}$, avec structure différentielle donnée par le théorème 4.4.3, est plate si et seulement si $\mathfrak{s}$ est abélien.*

Théorème 4.4.7 *Soit M un espace symétrique de type compact ou de type non compact. Soit l le rang de M. Soit A et A' deux sous-variétés plates totalement géodésiques de M de dimension l. On a alors :*

(i) Soit $q \in A$, $q' \in A'$. Il existe un élément $h \in I_o(M)$ tel que $h.A = A'$ et $h.q = q'$.

(ii) Soit $X \in T_qM$. Il existe un élément $h \in I_o(M)$ tel que $h.q = q$ et $T_qh(X) \in T_qA$.

(iii) Les variétés A et A' sont des sous-espaces topologiques fermés de M.

4.4.1 Sphère

On décrit les sous-variétés totalement géodésiques de la sphère.

Lemme 4.4.8 *Si X et Y sont deux sous-variétés totalement géodésiques connexes complètes d'une variété riemannienne M, telles que pour un certain x dans $X \cap Y$, $T_xX = T_xY$, alors $X = Y$.*

Preuve : Il suffit de montrer que si X est connexe et Y est complète alors $X \subset Y$. Soit γ un segment géodésique de X joignant p à un point q de X. γ est une géodésique de M telle que $\gamma'(0) \in T_pY$. D'après la proposition 4.3.2, (iii), le début de cette géodésique est dans Y. Comme Y est complète, γ est entièrement dans Y. Comme X est connexe, on a $X \subset Y$. □

Corollaire 4.4.9 *Les sous-variétés connexes complètes totalement géodésiques de S^{2n-1} sont les sphères $S^k = P \cap S^{2n-1}$, où P est un plan de dimension $k+1$ passant par l'origine.*

Leurs volumes sont donnés par :

$$\begin{cases} volume(S^{2m}) & = \dfrac{(4\pi)^m(m-1)!}{(2m-1)!}, \\ volume(S^{2m+1}) & = \dfrac{2\pi^{m+1}}{m!}. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.4.2 Grassmannienne

On décrit maintenant explicitement les sous-variétés plates totalement géodésiques (en particulier les géodésiques) des variétés grassmanniennes.

Le théorème 4.4.1 permet d'avoir une méthode pour déterminer explicitement toutes les géodésiques d'un espace symétrique. Le théorème 4.4.7 (ii) implique qu'une géodésique est contenue dans un plat maximal à une isométrie près. En d'autres termes, pour déterminer les longueurs des géodésiques d'un espace symétrique, il suffit de déterminer les longueurs des géodésiques d'un certain plat maximal.

Soit $G_{p,n}(\mathbb{R})$ la variété des p-plans orientés de $\mathbb{R}^n$. Soit P_0 le p-plan qui a pour base $\{e_1, ..., e_p\}$, où $\{e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit sur $G_{p,n}(\mathbb{R})$ en permutant les bases. Cette action est transitive et le stabilisateur de P_0 est $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p)$. La projection $\pi : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p)$ induit un difféomorphisme entre $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p)$ et $G_{p,n}(\mathbb{R})$ donné par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p) & \to & G_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & & \pi(A) & \mapsto & A.P_0 \end{array}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathrm{SO}(n)$ est $\mathfrak{so}(n)$ et celle de $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p)$ est $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(n-p)$. Si on écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ on trouve que $\mathfrak{m}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ donné par :

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} ; \; X \in M_{n-p,p}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Une géodésique de $G_{p,n}\mathbb{R}$ est donc de la forme $\exp t\xi.P_0$ où $\xi \in \mathfrak{m}$.

Une sous-variété plate totalement géodésique S est donnée par $\mathrm{Exp}\,\mathfrak{s}$ où $\mathfrak{s}$ est un sous-espace abélien de $\mathfrak{m}$, et ceci en identifiant $\mathfrak{m}$ avec T_oM par $T_e\pi$. C'est aussi l'ensemble des éléments de la forme $\pi(\exp\xi)$ où $\xi \in \mathfrak{s}$. La dimension de S est celle du sous-espace vectoriel $\mathfrak{s}$. Une famille de ces sous-espaces de dimension $k \leq \inf(p, n-p)$ est donnée par :

$$\mathfrak{s}_k = \left\{ \xi \in \mathfrak{m} \; : \; X = \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & x_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x_k & \\ & & & & (0) \end{pmatrix}, \; x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ces espaces vérifient clairement $[\mathfrak{s}_k, \mathfrak{s}_k] = (0)$.

Pour k fixé, et pour $\xi \in \mathfrak{s}_k$, $\exp\xi$ est donné par :

$$\exp\xi = \begin{pmatrix} A & -{}^tB \\ B & C \end{pmatrix},$$

où

$$A = \mathrm{diag}(\cos x_1, \cos x_2, ..., \cos x_k, 1, ..., 1) \in M_{p,p}(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{pmatrix} \sin x_1 & & & & \\ & \sin x_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sin x_k & \\ & & & & (0) \end{pmatrix} \in M_{n-p,p}(\mathbb{R}),$$

et

$$C = \mathrm{diag}(\cos x_1, \cos x_2, ..., \cos x_k, 1, ..., 1) \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{R}).$$

Les éléments de S sont les $\exp\xi.P_0$, où $\xi \in \mathfrak{s}_k$. Ce sont donc les p-plans de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

pour A et B donnés précédemment.

Si k =rang de M, alors on obtient un plat maximal dont le volume est égal à celui de n'importe quel plat maximal par théorème 4.4.7.

Si $k <$ rang de M, on obtient certaines sous-variétés plates totalement géodésiques.

Si $k = 1$, on obtient certaines géodésiques.

Soit l le rang de M. On fixe un plat maximal S qui est donné par $\mathrm{Exp}\mathfrak{s}_l$. Une géodésique de S est donnée par le théorème 4.4.1. C'est $\exp\xi.P_0 = \pi(\exp\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{s}_l$ tel que $x_i = t\alpha_i$ pour tout i où $\alpha_1, ..., \alpha_l$ sont fixés dans $\mathbb{R}$. Cette géodésique $\gamma(t)$ est fermée si et seulement si pour tout i, j tels que $\alpha_j \neq 0$, α_i/α_j est un nombre rationnel. Dans ce cas, la période de γ est le plus petit nombre réel $t_0 > 0$ tel que $\gamma(t_0) = P_0$. C'est celui qui vérifie pour tout $1 \leq i \leq l$, $t_0\alpha_i = 2k_i\pi$ avec le plus petit entier $k_i \geq 0$ possible. Si $\alpha_i = 0$ alors on choisit $k_i = 0$. Sinon, $k_i/\alpha_i = t_0/2\pi = cte$. Le calcul de la longueur d'une telle géodésique $\gamma(t)$ donne toutes les longueurs possibles par le théorème 4.4.7 (ii).

4.5 Espaces lenticulaires

Soit $S^{2n-1} = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{SO}(2n-1)$ la sphère de dimension $2n-1$ et Γ un groupe fini sans point fixe d'isométries de S^{2n-1} (voir définition 3.2.1 de la page 86). Le groupe Γ agit sans point fixe sur S^{2n-1} et donne une forme d'espace sphérique $\Gamma\backslash S^{2n-1}$.

Après avoir rappelé la définition et les propriétés des espaces en question, on détermine leurs spectres des longueurs, les volumes des sous-variétés totalement géodésiques ainsi que les volumes d'une partie de sous-variétés minimales, non totalement géodésiques. On compare aussi les spectres obtenus. On note que ces espaces ne vérifient pas les hypothèses du théorème de T. Sunada (théorème 3.4.1).

4.5.1 Rappels

On rappelle les notations utilisées dans le chapitre précédent. Un quotient de la sphère par un groupe d'isométries cyclique sans point fixe s'appelle un espace lenticulaire. C'est une variété riemannienne compacte, connexe, de groupe fondamental cyclique et de courbure sectionnelle constante égale à 1.

On rappelle la définition d'un espace lenticulaire de dimension $2n-1$ et dont le groupe fondamental est d'ordre q.

Soit q un entier strictement positif et $p_1, p_2, ..., p_n$ des entiers premiers avec q. Soit σ la matrice orthogonale donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & (0) \\ & R(\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(\theta_n) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

où $\theta_i = 2\pi p_i/q$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le groupe Γ engendré par σ est un sous-groupe cyclique, fini, sans point fixe, d'ordre q du groupe orthogonal $\mathrm{SO}(2n)$. L'espace

$$L(q : p_1, ..., p_n) = \Gamma\backslash S^{2n-1}.$$

est un espace lenticulaire de dimension $2n-1$, dont le groupe fondamental est d'ordre q.

On décrit maintenant les espaces considérés dans ce paragraphe. Soit $\tilde{\mathcal{L}}(q,n)$ la famille des espaces lenticulaires de dimension $2n-1$ et dont le groupe fondamental est d'ordre q. On définit :

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(q,n) = \{L(q : p_1, ..., p_n) \in \tilde{\mathcal{L}}(q,n);\ p_i \not\equiv \pm p_j \pmod q,\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

L'ensemble des classes d'isométries de $\tilde{\mathcal{L}}_0(q,n)$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}(q,n)$) est noté $\mathcal{L}_0(q,n)$ (resp. $\mathcal{L}(q,n)$).

On suppose maintenant que q est premier. L'ensemble K_q des classes d'équivalences (modulo q) des entiers premiers avec q est un groupe cyclique d'ordre $q-1$. On suppose que $\frac{q-1}{2} = n+2$. On rappelle qu'il existe une bijection ω de $\mathcal{L}_0(q,n)$ sur $\mathcal{L}_0(q,2)$ telle que $\omega(L(q : p_1, ..., p_n)) = L(q : q_1, q_2)$ si $K_q = \{\pm p_1, ..., \pm p_n, \pm q_1, \pm q_2\}$. On définit alors pour tout entier $r > 0$ une famille d'espaces lenticulaires $\mathcal{L}_r(q,n)$, contenue dans $\mathcal{L}_0(q,n)$, en posant :

$$\mathcal{L}_r(q,2) = \{L(q : q_1, q_2) \in \mathcal{L}_0(q,2);\ aq_1 + bq_2 \not\equiv 0 \pmod q,\ 1 \leq |a| + |b| \leq r+2\},$$

et

$$\mathcal{L}_r(q,n) = \omega^{-1}(\mathcal{L}_r(q,2)).$$

On rappelle le résultat suivant prouvé par A. Ikeda dans [28] et expliqué dans le chapitre précédent.

Théorème 4.5.1 *[28] Soit q un nombre premier supérieur à 11 tel que $q_0 = n+2$. Soit L_1 et L_2 deux espaces de $\mathcal{L}_p(q,n)$, où p est un entier positif. On a :*

1. *L_1 et L_2 sont k-isospectraux pour tout $k = 0, 1, ..., p$.*
2. *Si de plus $L_1 \in \mathcal{L}_{p+1}(q,n)$ mais pas L_2, alors L_1 et L_2 ne sont pas $(p+1)$-isospectraux.*

4.5.2 Longueurs des géodésiques

Dans ce paragraphe, on calcule le spectre des longueurs d'un espace lenticulaire de $\mathcal{L}_0(q,n)$ au sens des définitions 4.2.2–(i) et (iii). On montre ensuite que les spectres des longueurs de deux espaces lenticulaires k-isospectraux jusqu'à un certain ordre p, mais non $(p+1)$-isospectraux, décrits dans le théorème 3.3.4 sont identiques. Ce calcul utilise le fait que les géodésiques d'un espace lenticulaire $\Gamma\backslash S^{2n-1}$, sont exactement les images de celles de S^{2n-1}, par la projection canonique Π de S^{2n-1} sur $\Gamma\backslash S^{2n-1}$ (proposition 4.2.3).

Soit la projection $\pi : \mathrm{SO}(2n) \to S^{2n-1} = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{SO}(2n-1)$. Une géodésique dans S^{2n-1} est de la forme $h.\gamma(t)$, où $h \in \mathrm{O}(2n)$ et :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Soit Γ le sous-groupe de $\mathrm{SO}(2n)$ engendré par la matrice σ définie par (3.1) et Π la projection canonique de S^{2n-1} sur $\Gamma\backslash S^{2n-1}$. Les géodésiques de l'espace lenticulaire $\Gamma\backslash S^{2n-1}$ sont exactement les images par Π des géodésiques de S^{2n-1}, d'après la proposition 4.2.3.

Nous allons déterminer le spectre des longueurs d'un espace de $\mathcal{L}_0(q,n)$ relativement aux définitions 4.2.2–(i) et (iii).

Théorème 4.5.2 *Soit q un nombre premier supérieur à 11 avec $q_0 = n+2$, où $q_0 = (q-1)/2$. Soit $L = L(q : p_1, ..., p_n)$ un espace de $\mathcal{L}_0(q,n)$. Le spectre des longueurs de l'espace lenticulaire L est formé des nombres :*

(i) $2l\pi/q$, $(l \geq 1)$, avec une multiplicité infinie, relativement à la définition 4.2.2-(i).

(ii) $2l\pi$, $(l \geq 1)$, ayant pour multiplicité 1 et $2l\pi/q$, $(l \geq 1)$, ayant pour multiplicité $2n$ relativement à la définition 4.2.2-(iii).

En particulier, si L_1 et L_2 sont dans $\mathcal{L}_0(q,n)$, alors ils ont des spectres des longueurs identiques relativement aux définitions 4.2.2-(i) et (iii).

Preuve : La première assertion est facile. Nous allons démontrer la deuxième. Soit $\gamma(t)$ une géodésique de la sphère et σ la matrice définie par (3.1). Si $\gamma(t)$ n'est pas invariante par σ, elle n'est invariante par aucun élément non trivial de Γ. Son image par Π dans l'espace lenticulaire $\Gamma\backslash S^{2n-1}$ est une géodésique de longueur 2π. La multiplicité de cette longueur est évidemment 1.

Si la géodésique $\gamma(t)$ est invariante par σ, alors elle l'est par tous les σ^k, $0 \le k \le q-1$. Donc, pour tout $0 \le k \le q-1$, il existe $\omega = \omega_k$ tel que $\sigma^k.\gamma(t) = \gamma(t+\omega)$. Ceci s'écrit :

$$h^{-1}\sigma^k h. \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\omega) \\ \sin(t+\omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$h^{-1}\sigma^k h = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 & \dots & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

où $B \in \mathrm{SO}(2n-2)$. L'égalité (4.4) est équivalente à :

$$h^{-1}(\sigma^k + {}^t\sigma^k)h = \begin{pmatrix} 2\cos\omega & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\cos\omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B + {}^tB & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

et

$$h^{-1}(\sigma^k - {}^t\sigma^k)h = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin\omega & 0 & \dots & 0 \\ 2\sin\omega & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B - {}^tB & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

En particulier $2\cos\omega$ est une valeur propre double de $\sigma^k + {}^t\sigma^k$ ayant $\begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{2n,1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} h_{12} \\ \vdots \\ h_{2n,2} \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres.

D'autre part, σ^k n'est autre que la matrice orthogonale :

$$\begin{pmatrix} R(k\theta_1) & & & (0) \\ & R(k\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(k\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Donc, les valeurs propres de $\sigma^k + {}^t\sigma^k$ sont les quantités $2\cos k\theta_i$, $1 \leq i \leq n$, où chacune est double.
Réciproquement, si $\cos\omega = \cos k\theta_i$ pour un certain $0 \leq i \leq q-1$, alors on peut facilement vérifier que (4.5) et (4.6) sont valables en choisissant $h \in \mathrm{O}(2n)$ dont les deux premières colonnes sont deux vecteurs propres de la valeur propre $2\cos k\theta_i$ de $\sigma^k + {}^t\sigma^k$. Quand k varie entre 0 et $q-1$, le plus petit des nombres positifs ω tel que $\cos\omega = \cos k\theta_i$ est $2\pi/q$ quelle que soit la valeur de i.

Pour calculer la multiplicité de la longueur $\omega = 2\pi/q$, il faut d'abord remarquer que le groupe Γ est cyclique, donc les classes de conjugaison des éléments de Γ sont des singletons. Comme q est premier, alors pour tout entier p, l'ensemble $\{kp; 1 \leq k \leq q-1\}$ est tout simplement $\{1, ..., q-1\}$. Ainsi, pour tout $p \in \{\pm p_1, ..., \pm p_n\}$, il existe un unique $1 \leq k \leq q-1$, tel que $kp \equiv 1 \pmod q$, et ces valeurs de k sont deux à deux distinctes. Donc, pour tout i, il existe deux valeurs distinctes de k telles que $\cos k\theta_i = \cos\frac{2\pi}{q}$. Ceci implique que le nombre des classes d'homotopie libre, contenant une géodésique de longueur $2\pi/q$, est $2n$. En prenant les itérées de chacune des géodésiques considérées, on achève la démonstration. □

Remarque 4.5.3 *En suivant la même démarche avec la définition 4.2.2-(ii), on peut montrer que $2\pi/q$ est dans le spectre des longueurs avec multiplicité $2n$, mais on ne peut pas déterminer la longueur la plus courte dans les 4 autres classes d'homotopie.*

Afin de savoir plus sur les propriétés des géodésiques d'un espace lenticulaire de $\mathcal{L}_0(q,n)$, nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition 4.5.4 *Soit Γ le groupe engendré par la matrice σ donnée par (3.1). Soit $\Pi(h.\gamma(t))$ une géodésique de $L = \Gamma\backslash S^{2n-1}$, où $h \in O(2n)$, $\gamma(t)$ est donnée par (4.3) et Π est la projection canonique de S^{2n-1} sur $\Gamma\backslash S^{2n-1}$. On écrit h sous la forme :*

$$h = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} \end{pmatrix},$$

où pour tout i, H_{i1} est une matrice $(2,2)$ et H_{i2} est une matrice $(2, 2n-2)$. La géodésique $h.\gamma(t)$ est invariante par Γ si et seulement si, pour tout i, $H_{i_1} = 0$ ou $H_{i2} = 0$. Cette condition est aussi équivalente au fait qu'il existe un seul i tel que $H_{i1} \neq 0$.

Preuve : La géodésique $h.\gamma(t)$ est invariante par la matrice σ si et seulement si $\gamma(t)$ est invariante par $h^{-1}\sigma h$, ainsi $h^{-1}\sigma h$ est une isométrie de $\gamma(t)$, donc s'écrit

$$h^{-1}\sigma h = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{SO}(2n-2)$. En particulier, les valeurs propres de A sont toutes complexes de module 1, apparaîssant en même temps avec leur conjuguée. Ainsi, les valeurs propres de $A + {}^tA$ sont doubles, de la forme $2\cos\theta_i$. Il en est de même pour B et il n'y a aucune valeur propre commune de $A+{}^tA$ et $B+{}^tB$ (σ n'est pas l'identité). D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} A+{}^tA & (0) \\ (0) & B+{}^tB \end{pmatrix} . {}^th = {}^th(\sigma + {}^t\sigma).$$

Donc, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $2\cos\theta_i$ est une valeur propre double de l'une des matrices $A + {}^tA$ ou $B + {}^tB$, donc, nécessairement l'une des matrices H_{i1} ou H_{i2} est nulle. On vérifie que cette condition sur la matrice h suffit pour que $h^{-1}\sigma h$ soit dans le groupe $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2n-2)$. En effet, si H_{i1} ou H_{i2} est nulle, alors :

$$\begin{aligned} h^{-1}\sigma h &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n {}^tH_{i1}R(\theta_i)H_{i1} & \sum_{i=1}^n {}^tH_{i1}R(\theta_i)H_{i2} \\ \sum_{i=1}^n {}^tH_{i2}R(\theta_i)H_{i1} & \sum_{i=1}^n {}^tH_{i2}R(\theta_i)H_{i2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n {}^tH_{i1}R(\theta_i)H_{i1} & (0) \\ (0) & \sum_{i=1}^n {}^tH_{i2}R(\theta_i)H_{i2} \end{pmatrix} \\ &\in \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2n-2). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.5.5 *La proposition 4.5.4 implique que le fait qu'une géodésique $h.\gamma(t)$ de S^{2n-1} soit invariante par le groupe Γ ne dépend que de la forme de h et de celle de Γ mais pas des valeurs des θ_i. Soit $L_1 = \Gamma_1\backslash S^{2n-1}$ et $L_2 = \Gamma_2\backslash S^{2n-1}$ deux espaces de $\mathcal{L}_0(q,n)$ et Π_1 (resp. Π_2) la projection canonique de S^{2n-1} sur L_1 (resp. sur L_2). On désigne par GI l'ensemble des géodésiques de S^{2n-1} invariantes par Γ_1 (ou par Γ_2) et par GI_{L_1} (resp. GI_{L_2}) l'ensemble des géodésiques de L_1 (resp. L_2), images par Π_1 (resp. Π_2) des éléments de GI. L'application identique de GI induit une bijection de GI_{L_1} sur GI_{L_2} donnée par $\Pi_1(h.\gamma(t)) \mapsto \Pi_2(h.\gamma(t))$, bijection qui préserve les longueurs.*

Conclusion : *Le spectre des longueurs ne détermine pas le spectre des p-formes pour $p \geq 1$. En effet, si on prend $q = 11$, l'espace $L(11:1,3) \in \mathcal{L}_1(11,2)$; l'espace $L(11:1,2)$ est dans $\mathcal{L}_0(11,2)$ mais pas dans $\mathcal{L}_1(11,2)$. Donc $L(11:2,4,5)$ et $L(11:3,4,5)$ sont 0-isospectraux mais non 1-isospectraux d'après le théorème 3.3.4. Ils ont pourtant le même spectre des longueurs (théorème 4.5.2.*

4.5.3 Volumes des sous-variétés totalement géodésiques

Dans ce paragraphe, on détermine les sous-variétés totalement géodésiques d'un quotient de la sphère, en particulier d'un espace lenticulaire. On montre que les volumes des sous-variétés totalement géodésiques pour deux espaces lenticulaires, isospectraux jusqu'à un certain ordre p mais non $(p+1)$-isospectraux, décrits dans le théorème 3.3.4, sont les mêmes indépendamment de la valeur de p.

La proposition suivante est une conséquence des propositions 4.3.6 et 4.3.7 et du corollaire 4.4.9.

Proposition 4.5.6 *Les sous-variétés totalement géodésiques de dimension k d'un espace lenticulaire $L(q : p_1, ..., p_n)$ sont exactement les projections des sphères S^k de S^{2n-1} sur $L(q : p_1, ..., p_n)$.*

Proposition 4.5.7 *Soit Γ le groupe engendré par la matrice σ donnée par (3.1). Soit $X = h.S^r$ une sous-variété totalement géodésique de S^{2n-1}, où $h \in O(2n)$. On écrit h de la forme :*

$$h = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} \end{pmatrix},$$

où pour tout i, H_{i1} est une matrice $(2, r+1)$ et H_{i2} est $(2, 2n-r-1)$.

- *Dans le cas où r est pair, la sous-variété X n'est invariante par aucun élément de Γ.*
- *Dans le cas où r est impair, la sous-variété X est invariante par Γ si et seulement si,*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad H_{i_1} = 0 \text{ ou } H_{i2} = 0. \tag{4.7}$$

Cette condition est aussi équivalente au fait qu'il existe un seul i tel que $H_{i1} \neq 0$.

Preuve : On représente la sphère S^{2n-1} dans $\mathbb{R}^{2n}$ comme l'ensemble des points $(x_1, ..., x_{2n})$ tels que $\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 = 1$. Soit S^r la sphère de dimension $r < 2n-1$, de S^{2n-1}, dont les points sont de la forme $(x_1, ..., x_{r+1}, 0, ..., 0)$. Toute autre sphère totalement géodésique, X, de dimension r de S^{2n-1} s'écrit $X = h.S^r$ où $h \in \mathrm{O}(2n)$. La sous-variété X est invariante par la matrice σ si et seulement si S^r est invariante par $h^{-1}\sigma h$, ainsi $h^{-1}\sigma h$ est une isométrie de S^r, donc s'écrit

$$h^{-1}\sigma h = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathrm{SO}(r+1)$ et $B \in \mathrm{SO}(2n-r-1)$. On va distinguer deux cas :

- Cas où $r = 2m$:
  Dans ce cas, si la sous-variété $X = h.S^{2m}$ est invariante par σ, alors la matrice h vérifie $h^{-1}\sigma h = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathrm{SO}(2m+1)$ et $B \in \mathrm{SO}(2n-2m-1)$. En particulier, les valeurs propres de A sont parmi celles de σ. Ainsi σ a une valeur propre réelle (puisque A est d'ordre impair), ce qui est absurde. Donc X n'est invariante par aucun élément non trivial de Γ.
- Cas où $r = 2m-1$:
  Soit $X = h.S^{2m-1}$, où $h \in \mathrm{O}(2n)$, une sous-variété totalement géodésique de dimension impaire de S^{2n-1}. Elle est invariante sous l'action de σ, si et seulement si, h vérifie $h^{-1}\sigma h = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathrm{SO}(2m)$ et $B \in \mathrm{SO}(2n-2m)$. On vérifie

comme dans la preuve de la proposition 4.5.4 que cette condition est équivalente à celle donnée par (4.7).

□

Comme conséquence de la proposition 4.5.7 et du lemme 4.3.8, on a la proposition :

Proposition 4.5.8 *Les volumes des sous-variétés totalement géodésiques* $\Pi(h.S^r)$ *de* $L(q : p_1, ..., p_n)$*, où* $h \in O(2n)$ *et* $r \in \{1, \ldots, 2n-1\}$*, sont donnés par :*

(i) Le volume de $\Pi(h.S^{2m})$ *est égal à celui de* S^{2m}*.*

(ii) Le volume de $\Pi(h.S^{2m-1})$ *est égal à* $\frac{1}{q}$*.volume(*S^{2m-1}*) si h vérifie (4.7) et au volume de* S^{2m-1} *sinon.*

La multiplicité des volumes obtenus est infinie.

En particulier, si L_1 *et* L_2 *sont dans* $\mathcal{L}_0(q,n)$*, alors les volumes des sous-variétés totalement géodésiques de* L_1 *et les volumes des sous-variétés totalement géodésiques de* L_2 *sont identiques.*

Remarque 4.5.9 *Soit* L_1 *et* L_2 *deux espaces de* $\mathcal{L}_0(q,n)$ *et* Π_1 *(resp.* Π_2*) la projection canonique de* S^{2n-1} *sur* L_1 *(resp.* L_2*). On désigne par* $I^k_{L_1}$ *(resp.* $I^k_{L_2}$*) l'ensemble des sous-variétés totalement géodésiques de dimension k de* L_1 *(resp. de* L_2*) qui sont des projections des sphères totalement géodésiques de* S^{2n-1} *invariantes par* Γ_1 *(et* Γ_2*). Soit* ψ *l'application définie de* $I^k_{L_1}$ *dans* $I^k_{L_2}$ *par* $\psi(\Pi_1(h.S^k)) = \Pi_2(h.S^k)$ *pour tout* $h \in O(2n)$ *vérifie la condition (4.7). Comme dans la remarque 4.5.5,* ψ *est une bijection qui préserve les volumes. En particulier, la différence entre les comportements des sous-variétés totalement géodésiques de deux espaces lenticulaires de* $\mathcal{L}_0(q,n)$ *se produit au niveau des projections des sphères totalement géodésiques de* S^{2n-1} *qui ne sont pas invariantes sous l'action de* Γ_1 *(ou de* Γ_2*). Les volumes des sous-variétés totalement géodésiques sont identiques dans* L_1 *et dans* L_2*.*

Conclusion : *La partie du spectre des volumes formée des volumes des sous-variétés totalement géodésiques ne détermine pas le p-spectre du laplacien pour* $p \geq 1$*.*

4.5.4 Volumes des sous-variétés minimales

La proposition suivante est une conséquence des propositions 4.3.6 et 4.3.7.

Proposition 4.5.10 *Les sous-variétés minimales de dimension k d'un espace lenticulaire* $L(q : p_1, ..., p_n)$ *sont exactement les projections des sous-variétés minimales de* S^{2n-1} *sur* $L(q : p_1, ..., p_n)$*.*

Pour tout entier p et tout réel r, on désigne par $S^p(r)$ la sphère euclidienne de rayon r. On considère une famille particulière de sous-variétés de la sphère S^{2n-1} :

Pour tous entiers k et l tels que $0 < l < k$,

$$\begin{aligned} M_{l,k-l} &= S^l\left(\sqrt{\frac{l}{k}}\right) \times S^{k-l}\left(\sqrt{\frac{k-l}{k}}\right) \\ &= \left\{(x_1,\dots,x_{l+1},x_{l+2},\dots,x_{k+2},0,\dots,0);\ \sum_{i=1} l+1x_i^2 = \frac{l}{k},\ \sum_{i=l+2}^{k+2} x_i^2 = \frac{k-l}{k}\right\}. \end{aligned}$$

Proposition 4.5.11 *([11], [35]) Soit M^k une sous-variété minimale compacte de la sphère S^{k+p}. On désigne par $||B||$ la longueur de la seconde forme fondamentale de M. Si on suppose que $||B||^2 \leq \dfrac{k}{2-1/p}$, alors ou bien M est totalement géodésique, soit M est la surface de Veronese dans S^4, soit $M = M_{l,k-l}$, $0 \leq l \leq k$.*

On va étudier l'image des sous-variétés minimales $h.M_{l,k-l}$, où $h \in \mathrm{O}(2n)$, par la projection canonique $\Pi : S^{2n-1} \to L(q : p_1, ..., p_n) = \Gamma\backslash S^{2n-1}$. La sous-variété $h.M_{l,k-l}$ est invariante par un élément σ de Γ si et seulement si $M_{l,k-l}$ est invariante par $h^{-1}\sigma h$, on a donc nécessairement :

$$h^{-1}\sigma h = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathrm{O}(k+2)$ et $B \in \mathrm{O}(2n-k-2)$. On montre alors comme dans la proposition 4.5.7 que σ est forcément l'identité si k est impair et que si k est pair alors pour tout $1 \leq i \leq n$, $H_{i1} = 0$ ou $H_{i2} = 0$, où pour tout i, H_{i1} est une matrice d'ordre $(2, k+2)$ et H_{i2} est d'ordre $(2, 2n-k-2)$ telles que :

$$h = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout h qui ne vérifient pas la condition précédente, $h.M_{l,k-l}$ n'est invariante que par l'identité. Supposons que l et $k-l$ sont impairs. On peut facilement vérifier qu'il existe une infinité de sous-variétés de la forme $h.M_{l,k-l}$ qui sont invariantes par Γ ; en effet, pour tout $h \in \mathrm{O}(l+1) \times \mathrm{O}(k-l+1) \times \mathrm{O}(2n-k-2)$, $h.M_{l,k-l}$ est invariante par Γ. Ainsi, si k est impair, ou si l et $k-l$ sont impairs, alors les volumes des projections des sous-variétés $h.M_{l,k-l}$ sur deux espaces lenticulaires $\Gamma_1\backslash S^{2n-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2n-1}$ sont identiques. On a alors :

Proposition 4.5.12 *Soit $L = L(q : p_1, \dots, p_n)$ un espace lenticulaire de la famille $\mathcal{L}_0(q,n)$ et Π la projection canonique de S^{2n-1} sur L. Les volumes des sous-variétés minimales de L, de la forme $\Pi(h.M_{l,k-l})$, où $h \in O(2n)$ sont donnés par :*

1. *Si k est impair, Volume($\Pi(h.M_{l,k-l})$)=Volume($h.M_{l,k-l}$), pour tout $h \in O(2n)$.*
2. *Si l et $k-l$ sont impairs, il existe une infinité de h dans $O(2n)$ tels que le volume de $\Pi(h.M_{l,k-l})$ soit égal au volume de $h.M_{l,k-l}$, et une infinité de h dans $O(2n)$ tels que le volume de $\Pi(h.M_{l,k-l})$ soit égal au $\dfrac{1}{q}$ Volume($h.M_{l,k-l}$).*

En particulier, si L_1 et L_2 sont deux espaces lenticulaires appartenant à $\mathcal{L}_0(q,n)$ et Π_1 (resp. Π_2) est la projection canonique de S^{2n-1} sur L_1 (resp. sur L_2), alors les volumes *des sous-variétés de la forme* $\Pi_1(h.M_{l,k-l})$, $h \in O(2n)$ *de* L_1 *et ceux des sous-variétés de la forme* $\Pi_2(h.M_{l,k-l})$, $h \in O(2n)$ *de* L_2, *sont identiques.*

Conclusion : *La partie du spectre des volumes formée des volumes des sous-variétés minimales de l'espace lenticulaire, images par la projection canonique des* $M_{l,k-l}(h,g)$, *où* k *est impair, ou* l *et* $k-l$ *sont impairs, et* $h, g \in O(2n)$, *ne déterminent pas le p-spectre du laplacien pour* $p \geq 1$.

4.6 Quotient de la sphère par un groupe non cyclique de type 1

Dans cette partie, nous rappelons les variétés isospectrales et non isométriques utilisées. Nous déterminons leurs spectres des longueurs relativement aux définitions 4.2.2–(i) et (iii). On note que deux telles variétés isospectrales et non isométriques ont le même spectre des longueurs, au sens de la définition 4.2.2–(i), d'après le théorème 3.4.1. Nous montrons qu'elles ont des sepctres des longueurs différents au sens de la définition 4.2.2–(iii).

4.6.1 Rappels

Les variétés étudiées dans ce paragraphe, sont des quotients de la sphère par des groupes d'isométries finis, non cycliques, sans point fixe, de type 1 (définition 3.4.2). Nous rappelons les groupes finis sans point fixe de type 1 qui permettent de définir les espaces en question.

Si a et b sont deux entiers, on désigne par (a,b) le plus grand commun diviseur de a et b. Soit m, n, d et n' des entiers strictement positifs et r un entier premier avec m vérifiant :

$$\begin{cases} ((r-1)n, m) = 1 \\ \text{la classe de } r \text{ dans } K_m \text{ est d'ordre } d \\ n = n'd \\ \text{tout diviseur premier de } d \text{ divise } n'. \end{cases}$$

Avec ces entiers, on définit le groupe fini $\Gamma_d(m,n;r)$ d'ordre $N = mn$ engendré par deux éléments A et B vérifiant :

$$A^m = B^n = 1 \quad \text{et} \quad BAB^{-1} = A^r.$$

On rappelle que les représentations irréductibles sans point fixe de $\Gamma_d(m,n,r)$ sont décrites de la manière suivante :

Soit $\Gamma = \Gamma_d(m,n,r)$ et k et l deux entiers tels que $(k,m) = (l,n) = 1$. Soit $\pi_{k,l}$ la représentation réelle de degré $2d$ de Γ donnée par :

$$\pi_{k,l}(A) = \begin{pmatrix} R(2\pi k/m) & & & (0) \\ & R(2\pi kr/m) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(2\pi kr^{d-1}/m) \end{pmatrix}$$

et

$$\pi_{k,l}(B) = \begin{pmatrix} (0) & I & & & (0) \\ & (0) & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{(0)} & & \ddots & I \\ R(2\pi l/n') & & & & (0) \end{pmatrix},$$

où chaque bloc est une matrice d'ordre 2.

Les espaces que nous allons étudier sont de la forme $\pi_{k,l}(\Gamma)\backslash S^{2n-1}$. Un tel espace est isométrique à un $\pi_{k',l'}(\Gamma)\backslash S^{2n-1}$ si et seulement si il existe des entiers $\varepsilon = \pm 1$, $c \in \{0, ..., d-1\}$, s, t tels que $(s, m) = (t, n) = 1$ et $t \equiv 1 \pmod d$, vérifiant $k' \equiv \varepsilon skr^c \pmod m$ et $l' \equiv \varepsilon tl \pmod{n'}$. Nous rappelons que deux tels espaces de la forme $\pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash S^{2d-1}$ et $\pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash S^{2d-1}$ avec $(l,d) = 1$ et $(l-1,d) = 1$ sont isospectraux pour les formes différentielles de tout ordre (proposition 3.4.7 et théorème 3.5.1 du chapitre 3).

4.6.2 Longueurs des géodésiques

Dans ce paragraphe, on va calculer et comparer les spectres des longueurs (définitions 4.2.2-(i) et (iii)) des espaces $\pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash S^{2d-1}$ et $\pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash S^{2d-1}$ avec $(l,d) = 1$ et $(l-1,d) = 1$.

On commence par introduire les notations qui vont être utilisées dans la suite. Soit m, n, d, n' et r des entiers vérifiant les conditions (3.9) avec $n' = d$, i.e. $n = d^2$. On pose $\Gamma = \pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$. Si A et B sont les générateurs de $\Gamma_d(m,n,r)$, avec les relations $A^m = B^n = 1$ et $BAB^{-1} = A^r$, alors pour tout $0 \le a \le m-1$ et $0 \le b \le n-1$, on a :

$$A^a B^b . A^{a'} B^{b'} = A^{a+a'r^b} B^{b+b'}.$$

Ainsi tout élément de Γ a la forme $\sigma = \sigma_{a,v,w} = \pi_{1,l}(A^a B^b)$, $0 \le a \le m-1$ et $0 \le b \le n-1$. On écrit $b = v + wd$, avec $0 \le v, w \le d-1$, on a alors :

- Si $v = 0$:

$$\sigma = \sigma_{a,v,w} = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \mathbf{(0)} \\ & R(\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & & R(\theta_d) \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

où $\theta_i = 2\pi(a\dfrac{r^{i-1}}{m} + w\dfrac{l}{d})$, pour tout $1 \le i \le d$.

– Si $1 \leq v \leq d-1$:

$$\sigma = \sigma_{a,v,w} = \begin{pmatrix} & & R(\theta_1) & & (0) \\ & & & R(\theta_2) & \\ & & & & \ddots \\ & & (0) & & R(\theta_{d-v}) \\ R(\alpha_{d-v+1}) & & & & \\ & \ddots & & & \\ (0) & & R(\alpha_d) & & \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

où

$$\begin{cases} \theta_i = 2\pi(a\dfrac{r^{i-1}}{m} + w\dfrac{l}{d}) & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d-v, \\ \alpha_i = 2\pi(a\dfrac{r^{i-1}}{m} + (w+1)\dfrac{l}{d}) & \text{pour} \quad d-v+1 \leq i \leq d. \end{cases}$$

Comme dans le cas des espaces lenticulaires, si une géodésique γ de S^{2d-1} de la forme $\gamma(t) = h.\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, où $h \in \mathrm{O}(2d)$, vérifie $\sigma.\gamma(t) = \gamma(t+\omega)$ pour un certain ω, alors nécessairement $2\cos\omega$ est une valeur propre double de la matrice $\sigma + {}^t\sigma$, de vecteurs propres, les deux premières colonnes de h. Nous commençons par chercher les valeurs propres de cette matrice. Si $v = 0$, les valeurs propres sont les $2\cos\theta_i$, $(0 \leq i \leq q-1)$, elles sont toutes doubles. Si $v \neq 0$, les valeurs propres sont données par le lemme 4.6.2. Avant d'énoncer le lemme on introduit certaines notations.

Notations 4.6.1 *Soit* $1 \leq v \leq d-1$. *On pose* $v_1 = (v,d)$, $\delta = d/v_1$ *et :*

$$\begin{cases} \gamma_i &= \theta_i \quad si \quad i \leq d-v \\ \gamma_i &= \alpha_i \quad sinon. \end{cases}$$

On note

$$S_{a,v,w,\mu} = \gamma_\mu + \gamma_{v_1+\mu} + \dots + \gamma_{(\delta-1)v_1+\mu},$$

où ν *est l'entier qui vérifie* $(\delta-\nu)v_1 = v$.

On a :

$$\begin{aligned} S_{a,v,w,\mu} &\equiv 2\pi\left(\frac{ar^{\mu-1}}{m}(1 + r^{v_1} + \dots + r^{(\delta-1)v_1}) + (\delta w + \delta - \nu)\frac{l}{d}\right) \pmod{2\pi} \\ &\equiv 2\pi\left(\frac{ar^{\mu-1}(1-r^d)}{m(1-r^{v_1})} + (\delta w + \delta - \nu)\frac{l}{d}\right) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Lemme 4.6.2 *Soit* $0 \leq a \leq m-1$, $1 \leq v \leq d-1$ *et* $0 \leq w \leq d-1$. *On utilise les notations de 4.6.1. Les valeurs propres de* $\sigma_{a,v,w}$ *sont les quantités* $e^{\pm i\omega}$, *où* ω *est solution de l'une des équations :*

$$e^{i\delta\omega} = e^{iS_{a,v,w,\mu}}, \quad 1 \leq \mu \leq v_1. \tag{4.10}$$

Les valeurs propres de $\sigma_{a,v,w} + {}^t\sigma_{a,v,w}$ sont doubles de la forme $2\cos\omega$, où ω est donné par (4.10). Les vecteurs propres de $\sigma_{a,v,w} + {}^t\sigma_{a,v,w}$ associés à la valeur propre double $2\cos\omega$ sont les parties réelle et imaginaire du vecteur propre de $\sigma_{a,v,w}$ associé à la valeur propre $e^{i\omega}$.

Preuve : Les valeurs propres de $\sigma_{a,v,w}$ sont toutes des complexes de module 1 apparaissant en même temps avec leurs conjuguées. Supposons que $e^{i\omega}$ est une telle valeur propre et que $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_d \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, où pour tout i, V_i a deux composantes. Soit $v_1 = (v,d)$ et $\delta = d/v_1$. Pour tout $1 \leq \mu \leq v_1$, nous avons un système :

$$\begin{cases} V_{v_1+\mu} & = & e^{i\omega} R(-\gamma_\mu) V_\mu \\ V_{2v_1+\mu} & = & e^{2i\omega} R(-\gamma_\mu - \gamma_{v_1+\mu}) V_\mu \\ \vdots & & \\ V_{(\delta-1)v_1+\mu} & = & e^{(\delta-1)i\omega} R(-\gamma_\mu - \dots - \gamma_{(\delta-2)v_1+\mu}) V_\mu \\ V_\mu & = & e^{i\omega} R(-\gamma_{(\delta-1)v_1+\mu}) V_{(\delta-1)v_1+\mu}. \end{cases}$$

Les deux dernières égalités impliquent que V_μ est un vecteur propre de $R(S_{a,v,w,\mu})$ associé à la valeur propre $e^{i\delta\omega}$. Donc $e^{i\delta\omega} = e^{\pm i S_{a,v,w,\mu}}$ et $V_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ si $e^{i\delta\omega} = e^{iS_{a,v,w,\mu}}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ si $e^{i\delta\omega} = e^{-iS_{a,v,w,\mu}}$. $V_{kv_1+\mu}$ est donné en fonction de V_μ pour tout $1 \leq k \leq \delta - 1$ et les autres V_i sont nuls. Quand μ varie entre 1 et v_1, on obtient $2d$ valeurs propres $e^{\pm i\omega}$ avec les vecteurs propres correspondants. Les valeurs propres de $\sigma_{a,v,w} + {}^t\sigma_{a,v,w}$ sont doubles données par $2\cos\omega$ et les vecteurs propres associés sont les parties réelles et imaginaires de ceux de $\sigma_{a,v,w}$ associés aux valeurs propres $e^{i\omega}$ et $e^{-i\omega}$. D'où le lemme. □

Lemme 4.6.3 *Soit ω tel que $2\cos\omega$ est une valeur propre de la matrice $\sigma + {}^t\sigma$, où $\sigma \in \Gamma$. Il existe une géodésique de S^{2d-1} invariante par σ dont la projection sur $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ est de longueur ω. Ainsi, les longueurs des géodésiques fermées de $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ sont les réels strictement positifs ω tels que $2\cos\omega$ est valeur propre de $\sigma + {}^t\sigma$, pour un certain $\sigma \in \Gamma$.*

Preuve : Soit $\sigma = \sigma_{a,v,w}$, $v_1 = (v,d)$ et $\delta = d/v_1$. On choisit deux vecteurs propres associés à la valeur propre double $2\cos\omega$ de $\sigma + {}^t\sigma$, donnés par la preuve du lemme 4.6.2. On normalise ces deux vecteurs pour obtenir deux vecteurs orthonormés. On forme une matrice h de $O(2d)$ ayant pour deux premières colonnes h_1 et h_2 les deux vecteurs propres déjà décrits. On peut facilement vérifier que la géodésique $h.\gamma(t)$ ainsi obtenue vérifie

$$\sigma.h.\gamma(t) = h.\gamma(t - \omega).$$

D'où la preuve du lemme. □

Remarque 4.6.4 *La propriété qu'un nombre réel $\omega > 0$ est dans le spectre des longueurs si et seulement si $2\cos\omega$ est une valeur propre de $\sigma + {}^t\sigma$ pour un certain $\sigma \in \Gamma$ est valable dans tout quotient $\Gamma\backslash S^n$ et pas seulement dans ce cas particulier.*

Le lemme suivant décrit les classes d'homotopie libres des courbes fermées de l'espace $\pi_{1,l}(\Gamma)\backslash S^{2d-1}$, en utilisant la correspondance entre ces classes d'homotopie et les classes de conjugaison des éléments du groupe $\pi_{1,l}(\Gamma)$. Il va servir à calculer les multiplicités des longueurs des géodésiques fermées de l'espace $\pi_{1,l}(\Gamma)\backslash S^{2d-1}$ relativement à la troisième définition.

Lemme 4.6.5 *On suppose que m est premier. Soit $0 \leq a \leq m-1$ et $0 \leq b \leq n-1$. On écrit $b = v + wd$ avec $0 \leq v, w \leq d-1$. La classe d'homotopie libre $[\sigma_{a,v,w}]$ de $\sigma_{a,v,w}$ est donnée :*

1. *pour tout $0 \leq w \leq d-1$, par :*
$$[\sigma_{0,0,w}] = \{\sigma_{0,0,w}\}.$$
2. *pour tout $1 \leq a \leq m-1$ et $0 \leq w \leq d-1$, par :*
$$[\sigma_{a,0,w}] = \{\sigma_{ar^t,0,w};\ 0 \leq t \leq d-1\}.$$
3. *pour tout $0 \leq a \leq m-1$, $1 \leq v \leq d-1$ et $0 \leq w \leq d-1$, par :*
$$[\sigma_{a,v,w}] = \{\sigma_{c,v,w};\ 0 \leq c \leq m-1\}.$$

Preuve : La classe d'homotopie de $\sigma_{a,v,w}$ dans Γ est :
$$[\sigma_{a,v,w}] = \{\pi_{1,l}(A^{ar^t+s(1-r^b)}B^b);\ 0 \leq s \leq m-1,\ 0 \leq t \leq d-1\}.$$

Elle contient au plus m éléments. Explicitons $[\sigma_{a,v,w}]$ suivant les valeurs de a, v et w :

1. Si $0 \leq w \leq d-1$, on a $A^{s(1-wd)} = 1_{2d}$ car $r^d \equiv 1 \pmod m$. Ainsi,
$$[\sigma_{0,0,w}] = \{\pi_{1,l}(B^{wd})\}.$$
2. Si $1 \leq a \leq m-1$ et $0 \leq w \leq d-1$, alors pour tout $0 \leq t, t' \leq d-1$, tels que t soit différent de t', $r^t a - r^{t'} a$ ne peut pas être multiple de m. En effet, m est premier et $r^c \not\equiv 1 \pmod m$ pour $1 \leq c \leq d-1$ puisque l'ordre de r dans K_m est d. Donc :
$$[\sigma_{a,0,w}] = \{\pi_{1,l}(A^{ar^t}B^{wd});\ 0 \leq t \leq d-1\}.$$
Cette classe contient exactement d éléments.
3. Si $0 \leq a \leq m-1$, $1 \leq v \leq d-1$ et $0 \leq w \leq d-1$, alors pour $t = 0$, les puissances possibles de A sont les $a + s(1-r^b)$, où $0 \leq s \leq m-1$. Comme $r^d \equiv 1 \pmod m$, alors $A^{s(1-r^b)} = A^{s(1-r^v)}$. D'autre part, pour tout $0 \leq s, s' \leq m-1$, tels que s soit différent de s', $s(1-r^v) - s'(1-r^v)$ ne peut pas être un multiple de m. Ainsi, les éléments $A^{a+s(1-r^v)}$ sont deux à deux distincts et :
$$[\sigma_{a,v,w}] = \{\pi_{1,l}(A^c B^{v+wd});\ 0 \leq c \leq m-1\}.$$
Cette classe contient m éléments.

□

Remarque 4.6.6 *On suppose que m est premier.*

- $[\sigma_{a,0,w}] = [\sigma_{m-a,0,w}]$, *si et seulement si d est pair ou $a = 0$. En effet, si $a = 0$, c'est évident ; sinon, ceci est vrai si et seulement si* $m - a \equiv ar^t \pmod m$ *pour un certain* $0 \leq t \leq d-1$. *Ceci revient à dire que* $r^t \equiv -1 \pmod m$ *puisque m est premier, ce qui est possible uniquement si d est pair, et dans ce cas $t = d/2$.*
-
$$S_{a,v,w,\mu} \equiv 2\pi\frac{l}{d}(\delta w + \delta - \nu) \pmod{2\pi}.$$
On pose dans ce cas $S_{v,w} = S_{a,v,w,\mu}$

Le théorème suivant détermine les multiplicités des longueurs obtenues, relativement à la troisième définition. On note que les multiplicités dans la première définition sont toutes infinies.

Théorème 4.6.7 *On suppose que m est premier. Soit ω la longueur d'une géodésique de la classe d'homotopie libre* $[\sigma_{a,v,w}]$, *où* $0 \leq a \leq m-1$, $0 \leq v \leq d-1$ *et* $0 \leq w \leq d-1$. *On pose* $v_1 = (d, v)$ *et* $\delta = d/v_1$. *On entend par multiplicité de ω, sa multiplicité au sens de la définition 4.2.2-(iii).*

I- Cas où d est impair :

1. *Si $a = v = w = 0$, alors $\omega = 2\pi$ a pour multiplicité 1.*
2. *Si $a \neq 0$ et $v = 0$, alors ω a pour multiplicité 2.*
3. *Si $v = 0$ et $w \neq 0$, alors ω a pour multiplicité 2.*
4. *Si $v \neq 0$, alors ω a pour multiplicité 2δ.*

II- Cas où d est pair :

1. *Si $a = v = w = 0$, alors $\omega = 2\pi$ a pour multiplicité 1.*
2. *Si $v = 0$ et $w \notin \{0, d/2\}$, alors ω a pour multiplicité 2.*
3. *Si $a \neq 0$ et $v = w = 0$, alors ω a pour multiplicité 1.*
4. *Si $v = 0$ et $w = d/2$, alors ω a pour multiplicité 1.*
5. *Si $v \notin \{0, d/2\}$, alors ω a pour multiplicité 2δ.*
6. *Si $v = d/2$ et si $2w + 1$ n'est pas multiple de $d/2$, alors ω a pour multiplicité $2\delta = 4$ (car dans ce cas $v_1 = d/2$).*
7. *Si $v = d/2$ et si $2w + 1$ est multiple de $d/2$, alors ω a pour multiplicité $\delta = 2$.*

Preuve : Soit ω la longueur d'une géodésique de la classe d'homotopie libre $[\sigma_{a,v,w}]$, où $0 \leq a \leq m-1$, $0 \leq v \leq d-1$ et $0 \leq w \leq d-1$.

- Supposons tout d'abord que $v = 0$:

  Dans ce cas, il existe $\alpha \in \{1, ..., d\}$ tel que $\cos\omega = \cos\theta_\alpha$. S'il existe une autre classe d'homotopie libre $[\sigma_{a',v',w'}]$, où $0 \leq a' \leq m-1$, $0 \leq v' \leq d-1$ et $0 \leq w' \leq d-1$, contenant une géodésique de même longueur ω, alors v' est nécessairement nul. En effet, si $v' \neq 0$, on désigne par $v_1 = (v', d)$ et $1 \leq \nu \leq \delta - 1$ un entier tel que $d - v' = \nu . v_1$. D'après le lemme 4.6.2, $\cos \delta\omega = \cos S_{v',w'}$. On a donc $\delta\theta_\alpha \equiv \pm S_{v',w'}$ (mod 2π). Ceci implique que d divise $\delta w \pm (\delta w' + (\delta - \nu))$. Par conséquent δ divise ν, ce qui n'est pas possible puisque $1 \leq \nu \leq \delta - 1$.

On se restreint donc à chercher les entiers $0 \leq a' \leq m-1$ et $0 \leq w' \leq d-1$ tels que la classe d'homotopie $[\sigma_{a',0,w'}]$ contienne une géodésique de longueur ω. Dans ce cas, il existe $\alpha' \in \{1, ..., d\}$ tel que $\cos \theta_\alpha = \cos \omega = \cos \theta'_{\alpha'}$, ce qui revient à dire que md divise

$$(ar^{\alpha-1} \pm a'r^{\alpha'-1})d + (w \pm w')lm,$$

ou encore que m divise $ar^{\alpha-1} \pm a'r^{\alpha'-1}$ et que d divise $w \pm w'$.

- d divise $w - w'$ si et seulement si $w = w'$, et m divise $ar^{\alpha-1} - a'r^{\alpha'-1}$ si et seulement si il existe un $0 \leq t \leq d-1$ tel que $a - a'r^t$ ou $ar^t - a'$ est un multiple de m.

  D'après ce qui précède, ceci implique que $[\sigma_{a,0,w}] = [\sigma_{a',0,w}]$.
- d divise $w + w'$ si et seulement si $w' = d - w$ (modulo d), et m divise $ar^{\alpha-1} + a'r^{\alpha'-1}$ si et seulement si m divise $ar^t + a'$ ou $a + a'r^t$ pour un certain $0 \leq t \leq d-1$. Ceci revient à dire que $w' = d - w$ et m divise $ar^t - (m - a')$ ou $a'r^t - (m - a)$. On a donc $[\sigma_{a',0,w'}] = [\sigma_{m-a,0,d-w}]$.

- Supposons maintenant que $v \neq 0$:

Soit $v_1 = (v, d)$ et $\delta = d/v_1$, alors $\cos \delta\omega = \cos S_{v,w}$. Soit $0 \leq a' \leq m-1$, $0 \leq v' \leq d-1$ et $0 \leq w' \leq d-1$ des entiers tels que $[\sigma_{a',v',w'}]$ contienne une géodésique de longueur ω. Alors, v' est nécessairement non nul, d'après ce qui précède. Soit $v'_1 = (v', d)$ et $\delta' = d/v'_1$, alors $\cos \delta' S_{v,w} = \cos \delta S_{v',w'}$. Si $1 \leq \nu \leq \delta - 1$ et $1 \leq \nu' \leq \delta' - 1$ vérifient $\nu v_1 = d - v$ et $\nu' v'_1 = d - v'$, alors l'équation précédente implique que d divise $\delta'(\delta w + (\delta - \nu)) \pm \delta(\delta' w' + (\delta' - \nu'))$, ce qui implique que δ divise $\delta' \nu$ et δ' divise $\delta \nu'$. Comme $(\delta, \nu) = (\delta', \nu') = 1$, on trouve que $\delta = \delta'$. On obtient $\cos S_{v,w} = \cos S_{v',w'}$. Cette condition est équivalente au fait que d divise

$$(\delta w + (\delta - \nu)) \pm (\delta w' + (\delta - \nu')).$$

- Supposons que d divise $(\delta w + (\delta - \nu)) - (\delta w' + (\delta - \nu'))$. Dans ce cas, δ divise $\nu - \nu'$, donc $\nu' = \nu$, ce qui implique que d divise $\delta(w - w')$ ou v_1 divise $w - w'$. On pose $w - w' = \alpha v_1$, alors $\frac{w+1}{v_1} - \delta \leq \alpha \leq \frac{w}{v_1}$. On remarque qu'il y a δ valeurs entières distinctes de α, donc δ classes d'homotopie différentes contenant une géodésique de longueur ω.
- Supposons que d divise $(\delta w + (\delta - \nu)) + (\delta w' + (\delta - \nu'))$. Alors, δ divise $\nu + \nu'$, donc $\nu' = \delta - \nu$ (modulo δ). Ceci implique que v_1 divise $w + w' + 1$. On pose $w + w' + 1 = \beta v_1$ donc $\frac{w+1}{v_1} \leq \beta \leq \frac{w}{v_1} + \delta$. On obtient ainsi δ classes d'homotopie différentes contenant une géodésique de longueur ω.

w' peut prendre la même valeur dans les cas deux si et seulement si v_1 divise $2w + 1$.

La preuve du théorème est une simple conséquence du calcul précédent. □

Remarque 4.6.8 *Les multiplicités des longueurs obtenues sont infinies relativement à la définition 4.2.2-(i).*

Remarque 4.6.9 *Le théorème 3.4.1 de T. Sunada assure que les quotients $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$ avec $\Gamma_1 = \pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$ et $\Gamma_2 = \pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))$ ont le même spectre des longueurs au sens de la définition 4.2.2-(i). On peut retrouver ce résultat en utilisant la proposition 3.4.7 qui montre que les Γ_1 et Γ_2 sont presque conjugués dans $O(2d)$, et le lemme 4.6.3 qui décrit les longueurs des géodésiques fermées de $\Gamma\backslash S^{2d-1}$ en fonction des valeurs propres de Γ.*

Théorème 4.6.10 *Soient les groupes $\Gamma_1 = \pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$ et $\Gamma_2 = \pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))$. Si m est premier alors, au sens de la définition 4.2.2-(iii), les espaces $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$ ont le même spectre des longueurs si d est impair et des spectres des longueurs différents si d est pair.*

Preuve : Soit ω la longueur d'une géodésique fermée, de l'espace $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$, dans la classe d'homotopie $[\pi_{1,l}(A^aB^{v+wd})]$, où $0 \leq a \leq m-1$, $0 \leq v \leq d-1$ et $0 \leq w \leq d-1$. D'après la preuve de la proposition 3.4.7, il existe une géodésique fermée dans $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$, dans la classe d'homotopie $[\pi_{1,1}(A^aB^{v'+w'd})]$ où $v' \equiv lv \pmod d$ et $w' \equiv lw \pmod d$. En fait, $\pi_{1,1}(A^aB^{v'+w'd})$ et $\pi_{1,l}(A^aB^{v+wd})$ sont conjugués dans O$(2d)$ donc ils ont les mêmes valeurs propres. En utilisant le théorème 4.6.7, nous allons montrer que ω n'a pas toujours la même multiplicité dans $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$ et dans $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$.

- On suppose tout d'abord que $v = 0$.

  Dans ce cas, $v' = 0$ puisque $(l,d) = 1$. Si $w \neq 0$, il en est de même pour lw (modulo d) parce que $(l,d) = 1$, donc $w' \neq 0$. Dans le cas où d est pair, $lw \equiv d/2 \pmod d$ précisément quand $w = d/2$ puisque $(l,d) = 1$, i.e. $w' = d/2$ si et seulement si $w = d/2$.

- On suppose ensuite que $v \neq 0$.

  Comme $v \neq 0$ alors $lv \not\equiv 0 \pmod d$, i.e. $v' \neq 0$. Dans le cas où d est pair $lv \equiv d/2 \pmod d$ (ou $v' = d/2$) si et seulement si $v = d/2$. Dans le cas où $v = v' = d/2$, et $2w+1$ et $2w'+1$ ne peuvent pas être multiples de $d/2$ en même temps parce que $(l-1,d) = 1$.

En utilisant le théorème 4.6.7, on trouve que ω a la même multiplicité dans les espaces $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$, lorsque d est impair, ou lorsque d est pair avec $v = v' \neq d/2$. Si $v = v' = d/2$, ω a des multiplicités différentes dans $\Gamma_1\backslash S^{2d-1}$ et dans $\Gamma_2\backslash S^{2d-1}$. □

Conclusion : *La connaissance du p-spectre du laplacien pour tout p ne détermine pas le spectre des longueurs au sens de la troisième définition.*

4.7 Quotients de la grassmannienne

On rappelle ici les formes des variétés grassmanniennes qui sont p-isospectraux pour tout p et non isométriques, construits par A. Ikeda dans [29] et décrits dans le chapitre 3. On caractérise les nombres ω appartenant au spectre des longueurs au sens de la définition 4.2.2–(i).

4.7.1 Rappels

Les variétés étudiées dans ce paragraphe sont de la forme $\pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ où l est un entier tel que $(l,d) = 1$ et $(l-1,d) = 1$. Ces variétés sont isospectrales pour les formes différentielles de tout ordre (proposition 3.4.7 et théorème 3.6.3 du chapitre 3). Elles ont aussi le même spectre des longueurs, au sens de la première définition, d'après le théorème 3.4.1.

4.7.2 Longueurs des géodésiques

Dans ce paragraphe, on caractérise les longueurs des géodésiques fermées dans un quotient de la variété grassmannienne.

Une géodésique de la variété grassmannienne $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ s'écrit $h.\gamma(t)$où $h \in \mathrm{O}(2d)$ et $\gamma(t)$ est une géodésique de $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ de la forme :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos tx_1 & & & \\ & \cos tx_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos tx_q \\ \sin tx_1 & & & \\ & \sin tx_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sin tx_q \\ & (0) & & \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

où $x_1, x_2, ..., x_q$ sont des réels tels que $\sum_{i=1}^{q} x_i^2 = 1$.

Si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(2d)$ sans point fixe, les géodésiques du quotient $\Gamma\backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ sont précisément les images des géodésiques de $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ par la projection canonique. Comme on s'intéresse au calcul des longueurs des géodésiques fermées dans le quotient, on se restreint à l'étude des géodésiques qui sont fermées dans $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et celles qui sont invariantes par au moins un élément non trivial de Γ.

Soit Γ le groupe $\pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$ ou $\pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))$, et $\sigma_{a,v,w} \in \Gamma$, avec $0 \le a \le m-1$, $0 \le v \le d-1$ et $0 \le w \le d-1$, définie par l'expression (4.8) pour $a = 0$ et par l'expression (4.9) pour $a \neq 0$. Si une géodésique $h.\gamma(t)$ est invariante par un élément $\sigma_{a,v,w}$ de Γ, alors pour tout $1 \le k \le q$, $2\cos \omega x_k$ est une valeur propre double de $\sigma_{a,v,w} + {}^t\sigma_{a,v,w}$, de vecteurs propres la k-ème et $q+k$-ème colonnes de la matrice h. En utilisant le lemme 4.6.2, si ω est la longueur d'une géodésique de la classe d'homotopie $[\sigma_{a,v,w}]$, deux cas sont possibles :

- $v = 0$:
  Dans ce cas ω vérifie $\cos \omega x_k = \cos \theta_{i_k}$ pour $1 \leq k \leq q$, où $1 \leq i_k \leq d$. Donc, pour tout $1 \leq k \leq q$, il existe $1 \leq i_k \leq d$ tel que $\omega x_k \equiv \pm 2\pi(\frac{ar^{i_k - 1}}{m} + \frac{wl}{d}) \pmod{2\pi}$.
- $v \neq 0$:
  Dans ce cas ω vérifie $\cos \delta\omega x_k = \cos S_{v,w}$ pour tout $1 \leq k \leq q$. Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq q$, $\delta\omega x_k \equiv \pm 2\pi \frac{l}{d}(\delta w + \delta - \nu) \pmod{2\pi}$, où $\delta = d/(d,v)$ et ν vérifie $\delta - \nu = v/(d,v)$.

Avec une preuve analogue à celle du lemme 4.6.3, on montre le lemme suivant :

Lemme 4.7.1 *Soient $x_1, x_2, ..., x_q$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{q} x_i^2 = 1$ et ω un réel. Supposons que pour tout $1 \leq k \leq q$, $2\cos \omega x_k$ est une valeur propre de la matrice $\sigma + {}^t\sigma$, où $\sigma \in \Gamma$. Il existe une géodésique de $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ invariante par σ dont la projection sur $\Gamma \backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ est de longueur ω. La réciproque est vraie d'après ce qui précède.*

Remarque 4.7.2 *Soient les groupes $\Gamma_1 = \pi_{1,l}(\Gamma_d(m,n,r))$ et $\Gamma_2 = \pi_{1,1}(\Gamma_d(m,n,r))$. Les espaces $\Gamma_1 \backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_2 \backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ ont le même spectre des longueurs par rapport à la première définition, d'après le théorème de T. Sunada. On peut vérifier ce résultat en utilisant la caractérisation précédente des longueurs des géodésiques fermées.*

En effet, soit $h.\gamma(t)$ une géodésique de $G_{q,2d}(\mathbb{R})$ où $h \in O(2d)$ et $\gamma(t)$ est de la forme (4.11). Supposons qu'il existe un $\sigma \in \Gamma_1$ tel que $h.\gamma(t)$ est invariante par σ et tel que la projection de $h.\gamma(t)$ sur $\Gamma_1 \backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ est de longueur ω. Alors $2\cos \omega x_k$ est une valeur propre de $\sigma + {}^t\sigma$ pour tout $1 \leq k \leq q$. D'après la proposition 3.4.7, il existe un σ' dans Γ_2 conjugué à σ dans $O(2d)$, donc ayant les mêmes valeurs propres que σ. Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq q$, $2\cos \omega x_k$ est une valeur propre de $\sigma' + {}^t\sigma'$, i.e. $h.\gamma(t)$ est invariante par un σ' et sa projection sur $\Gamma_2 \backslash G_{q,2d}(\mathbb{R})$ a pour longueur ω. Ces longueurs sont de multiplicité infinie.

Annexe A

Décomposition d'un produit tensoriel

Ce programme sert à décomposer le produit tensoriel de deux SO(n)-modules irréductibles en modules irréductibles, en utilisant la formule de multiplicité de Steinberg donnée par la proposition 1.2.58 dans le chapitre 1. Les résultats obtenus sont utilisés pour décomposer les puissances extérieurs de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$ dans le paragraphe 2.3 du chapitre 2. Il est formé de deux fichiers "includes" et "puis-ext.f". Le premier fichier sert à déclarer les variables et les tableaux nécessaires et il est appelé dans le programme principal ainsi que dans les différentes routines. Le deuxième contient le programme principal ainsi que les diverses routines. Les explications des étapes sont ajoutées comme commentaires dans les fichiers.

Le fichier "includes" est le suivant :

```
c....NTAIL est la dimension maximale que peut prendre la valeur ndim
c....NWEYL est la dimension du tableau sign_w
      integer NTAIL, NWEYL
      parameter (NTAIL = 10, NWEYL = 2000)
c....Le tableau nvij correspond aux coeficients des plus grand poids
c....des composantes des Vi,j suivant les poids fondamentaux.
c....Les deux premiers champs correspondent à i et j, le troisième sert
c....à indiquer le nombre de composantes de Vi,j, le quatrième indique
c....les coeficients du plus grand poids d'une composante fixée de Vi,j
      integer nvij
      common /nvijij / nvij(0:NTAIL, 0:NTAIL, 2, -5:NTAIL)
c....ndim est l'ordre des matrices du groupe SO(ndim), mdim est la
c....partie entière de la moitié de ndim
      integer ndim, mdim
      common / ndimension / ndim, mdim
c....xdelta est demi-somme des racines positives
      real xdelta
```

```
      common / xdelta_ / xdelta(0:NTAIL)
c....nbweyl est le nombre des éléments du groupe de weyl
      integer nbweyl
      common / nbweyl1 / nbweyl
      integer sign_w
      common /sign_weil / sign_w(NWEYL)
c....Les tableaux xtab1, xrab2, xtab3 sont des tableaux auxiliares
      real xtab1, xtab2, xtabpp
      common /xtabb / xtab1(0:NTAIL),xtab2(0:NTAIL),xtabpp(0:NTAIL)
c....Le tableau nvijkl est le tableau produit de Vi,j par Vk,l
      integer nvijkl
      common / nvklij /
     &     nvijkl(0:NTAIL,0:NTAIL,0:NTAIL,0:NTAIL,0:4*NTAIL,0:NTAIL)
c....ngama est le tableau des plus grands poids des composantes de Vi,j
c....nlamda celui de Vk,l
      integer ngama, nlamda
      common / gammaa / ngama(-5:NTAIL), nlamda(-5:NTAIL)
c....gamdelta = ngama + xdelta, gamlam = ngama + nlamda
      real gamdelta, gamlam
      common / gamalama / gamdelta(-5:NTAIL), gamlam(-5:NTAIL)
c....vwnr est un tableau auxiliare
      real vwnr
      common / xvwnr / vwnr(-5:NTAIL)
c....muu et nh1index sont des variables auxiliares
      integer muu, nh1index
      common /mmuu/ muu(-5:NTAIL)
```

Le fichier "puis-ext.f" est le suivant :

```
      program main
c....On insère le fichier includes qui déclare les tableaux
      include 'includes'
c....Déclaration des variables
      integer ni,nj,nk,nl,nij,nkl
      integer mi,mj, mk
      integer nmu1, nmu2, nmu3
      integer na1,na2,na3
      integer multip,differ,somm
c....Inpression de l'entete du programme
      print *, '       PROGRAMME  QUI FAIT LA DECOMPOSITION '
      print *, '         DES PUISSANCES EXTERIEURS EN DES   '
      print *, '                   IRREDUCTIBLES            '
c....Initialisation du tableau nvij a 0
```

```
      do ni = 0, NTAIL
         do nj = 0, NTAIL
            do nk = 1, 2
               do nl = -5, NTAIL
                  nvij(ni,nj,nk,nl) = 0
               enddo
            enddo
         enddo
      enddo
c....Lecture de la dimension ndim de l'espace
 10   print *,' introduire la dimension de l''espace n < ', NTAIL,' = '
      read *,ndim
      if (ndim.gt.NTAIL) goto 10
c....Si ndim est pair, on appelle la routine dim_pair, sinon dim_impair
c....pour remplir le tableau nvij
      mdim = int(ndim/2)
      if ((2*mdim).eq.ndim) then
         call dim_pair
      else
         call dim_impair
      endif
c....On appelle la routine sign_weyl qui contient les déterminants des
c....éléments du groupe de Weyl
      call sign_weyl
c....Début du calcul du produit tensoriel de Vi,j et Vk,l
c....pour plus de détails, voir chapitre 2.
      do ni = 0, mdim
         do  nj = 0, mdim
            do nk = 0, mdim
               do  nl = 0, mdim
                  nbool = 0
                  do 101 nij = 1, 2
                     if (nvij(ni,nj,nij,-1).eq.0) goto 101
                     do mi = 1, mdim
                        ngama(mi) = nvij(ni,nj,nij,mi)
                        gamdelta(mi) = ngama(mi) + xdelta(mi)
                     enddo
                     do 102 nkl = 1,2
                        if (nvij(nk,nl,nkl,-1).eq.0) goto 102
                        nbool = 1
                        do mj = 1, mdim
                           nlamda(mj) = nvij(nk,nl,nkl,mj)
```

```
                     gamlam(mj) = nlamda(mj) + xdelta(mj)
                  enddo
         if (ndim.eq.3) then
c....Local au cas ndim = 3
            nh1index = ngama(1) + nlamda(1)
            do nmu1 = 0, nh1index
               multip = 0
               muu(1) = nmu1
               do mi = 1, nbweyl
                  do mj = 1, nbweyl
                     do mk = 1, mdim
                        xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                     enddo
                     call weyl(mi)
                     do mk = 1, mdim
                        xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                        xtab1(mk) = gamlam(mk)
                     enddo
                     call weyl(mj)
                     do mk = 1, mdim
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                     enddo
                     if (xtabpp(1).ge.0) then
                        multip = multip +
     &                          sign_w(mi)*sign_w(mj)
                     endif
                  enddo
               enddo
               if (multip.ne.0) then
                  print *, ni, nj, nk, nl, nmu1, multip
               endif
            enddo
         elseif(ndim.eq.4) then
c....Local au cas ndim = 4
            nh1index = ngama(1) + nlamda(1)
            do nmu1 = 0, nh1index
               do nmu2 = 0, nmu1
                  multip = 0
                  muu(1) = nmu1
                  muu(2) = nmu2
```

```
            do mi = 1, nbweyl
               do mj = 1, nbweyl
                  do mk = 1, mdim
                     xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                  enddo
                  call weyl(mi)
                  do mk = 1, mdim
                     xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                     xtab1(mk) = gamlam(mk)
                  enddo
                  call weyl(mj)
                  do mk = 1, mdim
                     xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                     xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                     xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                  enddo
                  if (xtabpp(1).ge.(abs(xtabpp(2)))) then
                     differ = xtabpp(1) - xtabpp(2)
                     somm = xtabpp(1) + xtabpp(2)
                     if (((2*(int(differ/2))).eq.differ).and.
     &                    ((2*(int(somm/2))).eq.somm)) then
                        multip = multip +
     &                       sign_w(mi)*sign_w(mj)
                     endif
                  endif
               enddo
            enddo
            if (multip.ne.0) then
               print *, ni, nj, nk, nl, nmu1, nmu2,multip
            endif
         enddo
      enddo
      do nmu1 = 0, nh1index
         do nmu2 = 1, nmu1
            multip = 0
            muu(1) = nmu1
            muu(2) = -nmu2
            do mi = 1, nbweyl
               do mj = 1, nbweyl
                  do mk = 1, mdim
                     xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                  enddo
```

```
                        call weyl(mi)
                        do mk = 1, mdim
                           xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                           xtab1(mk) = gamlam(mk)
                        enddo
                        call weyl(mj)
                        do mk = 1, mdim
                           xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                           xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                           xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                        enddo
                        if (xtabpp(1).ge.(abs(xtabpp(2)))) then
                           differ = xtabpp(1) - xtabpp(2)
                           somm = xtabpp(1) + xtabpp(2)
                           if (((2*(int(differ/2))).eq.differ).and.
     &                         ((2*(int(somm/2))).eq.somm)) then
                              multip = multip +
     &                             sign_w(mi)*sign_w(mj)
                           endif
                        endif
                     enddo
                  enddo
                  if (multip.ne.0) then
                     print *, ni, nj, nk, nl, nmu1, -nmu2, multip
                  endif
               enddo
            enddo
         elseif (ndim.eq.5) then
c....Local au cas ndim = 5
            nh1index = ngama(1) + nlamda(1)
            do nmu1 = 0, nh1index
               do nmu2 = 0, nmu1
                  multip = 0
                  muu(1) = nmu1
                  muu(2) = nmu2
                  do mi = 1, nbweyl
                     do mj = 1, nbweyl
                        do mk = 1, mdim
                           xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                        enddo
                        call weyl(mi)
                        do mk = 1, mdim
```

```
                        xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                        xtab1(mk) = gamlam(mk)
                     enddo
                     call weyl(mj)
                     do mk = 1, mdim
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                     enddo
                     do na1 = 0, xtabpp(1)
                        do na2 = 0, xtabpp(1)-na1
                           xna3 = xtabpp(1) - na1 - na2
                           xna4 = xtabpp(2) + na1 - na2
                           if ((xna3.ge.0).and.(xna4.ge.0)) then
                              multip = multip +
     &                             sign_w(mi)*sign_w(mj)
                           endif
                        enddo
                     enddo
                  enddo
               enddo
               if (multip.ne.0) then
                  print *, ni, nj, nk, nl, nmu1, nmu2, multip
               endif
            enddo
         enddo
c....Local au cas ndim = 6
         nh1index = ngama(1) + nlamda(1)
         do nmu1 = 0, nh1index
            do nmu2 = 0, nmu1
               do nmu3 = 0, nmu2
                  multip = 0
                  muu(1) = nmu1
                  muu(2) = nmu2
                  muu(3) = nmu3
                  do mi = 1, nbweyl
                     do mj = 1, nbweyl
                        do mk = 1, mdim
                           xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                        enddo
                        call weyl(mi)
                        do mk = 1, mdim
```

```
                        xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                        xtab1(mk) = gamlam(mk)
                     enddo
                     call weyl(mj)
                     do mk = 1, mdim
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                        xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                     enddo
            do na1 = 0, xtabpp(1)
               do na2 = 0, xtabpp(1)
                  do na3 = 0, xtabpp(1)
                     xna4=xtabpp(1)-na1-na2-na3
                     xna5=(xtabpp(2)+xtabpp(3)-na1+na2-na3+xna4)/2
                     xna6=xtabpp(2)-na1+na2-xna5
                     if ((xna4.ge.0).and.(xna5.ge.0)
     &                   .and.(xna6.ge.0)) then
                        if (xna5.eq.(int(xna5))) then
                           multip = multip +
     &                          sign_w(mi)*sign_w(mj)
                        endif
                     endif
                  enddo
               enddo
            enddo
                   enddo
                enddo
                if (multip.ne.0) then
                   print *, ni, nj, nk, nl,
     &                  nmu1, nmu2, nmu3, multip
                endif
             enddo
          enddo
       enddo
       do nmu1 = 0, nh1index
          do nmu2 = 0, nmu1
             do nmu3 = 1, nmu2
                multip = 0
                muu(1) = nmu1
                muu(2) = nmu2
                muu(3) = -nmu3
                do mi = 1, nbweyl
```

```
                      do mj = 1, nbweyl
                         do mk = 1, mdim
                            xtab1(mk) = gamdelta(mk)
                         enddo
                         call weyl(mi)
                         do mk = 1, mdim
                            xtabpp(mk) = xtab2(mk)
                            xtab1(mk) = gamlam(mk)
                         enddo
                         call weyl(mj)
                         do mk = 1, mdim
                            xtabpp(mk)=xtabpp(mk)+xtab2(mk)
                            xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-muu(mk)
                            xtabpp(mk)=xtabpp(mk)-2*xdelta(mk)
                         enddo
                do na1 = 0, xtabpp(1)
                   do na2 = 0, xtabpp(1)
                      do na3 = 0, xtabpp(1)
                         xna4=xtabpp(1)-na1-na2-na3
                         xna5=(xtabpp(2)+xtabpp(3)-na1+na2-na3+xna4)/2
                         xna6=xtabpp(2)-na1+na2-xna5
                         if ((xna4.ge.0).and.(xna5.ge.0)
     &                       .and.(xna6.ge.0)) then
                            if (xna5.eq.(int(xna5))) then
                               multip = multip +
     &                              sign_w(mi)*sign_w(mj)
                            endif
                         endif
                      enddo
                   enddo
                enddo
                     enddo
                  enddo
                  if (multip.ne.0) then
                     print *, ni, nj, nk, nl,
     &                    nmu1, nmu2, -nmu3, multip
                  endif
               enddo
            enddo
         enddo
      endif
c...............................................
```

```
 102                enddo
 101             enddo
                 if (nbool.eq.1) then
                    print *,'--------------------------'
                 endif
              enddo
           enddo
        enddo
      enddo
      end
c==========================================================
      subroutine dim_impair
c....On insère le fichier includes qui déclare les tableaux
      include 'includes'
      integer ni,nj,nk
c....Déclaration des coeficients nvij du plus grand poids des Vi,j
      do ni = 0, ndim
         do 100 nj = 0, ndim
            if ((ni.eq.0).and.(nj.eq.0)) goto 100
            if ((ni.le.nj).and.(nj.le.(mdim-1))) then
               nvij(ni,nj,1,-1) = 1
               nvij(ni,nj,1,0)  = nj
               do nk = 1, ni
                  nvij(ni,nj,1,nk) = 2
               enddo
               do nk = ni+1, nj
                  nvij(ni,nj,1,nk) = 1
               enddo
            endif
            if ((ni.le.(mdim-1)).and.(nj.eq.mdim)) then
               nvij(ni,nj,1,-1) = 1
               nvij(ni,nj,1,0)  = nj
               do nk = 1, ni
                  nvij(ni,nj,1,nk) = 2
               enddo
               do nk = ni+1, nj
                  nvij(ni,nj,1,nk) = 1
               enddo
            endif
            if ((ni.eq.mdim).and.(nj.eq.mdim)) then
               nvij(ni,nj,1,-1) = 1
               nvij(ni,nj,1,0)  = nj
```

```
            do nk = 1, ni
               nvij(ni,nj,1,nk) = 2
            enddo
          endif
 100    enddo
      enddo
c....Déclaration de la demi-somme des racines positives xdelta
      do ni = 1, mdim
        xdelta(ni) = mdim - ni + .5
      enddo
c
      return
      end
c==========================================================
      subroutine dim_pair
c....On insère le fichier includes qui déclare les tableaux
      include 'includes'
      integer ni,nj,nk
c....Déclaration des coeficients nvij des plus grand poids des
c....composantes de Vi,j
      do ni = 0, ndim
        do 110 nj = 0, ndim
          if ((ni.eq.0).and.(nj.eq.0)) goto 110
          if ((ni.le.nj).and.(nj.le.(mdim-2))) then
            nvij(ni,nj,1,-1) = 1
            nvij(ni,nj,1,0)  = nj
            do nk = 1, ni
              nvij(ni,nj,1,nk) = 2
            enddo
            do nk = ni+1, nj
              nvij(ni,nj,1,nk) = 1
            enddo
          endif
          if ((ni.le.(mdim-2)).and.(nj.eq.(mdim-1))) then
            nvij(ni,nj,1,-1) = 1
            nvij(ni,nj,1,0)  = nj
            do nk = 1, ni
              nvij(ni,nj,1,nk) = 2
            enddo
            do nk = ni+1, nj
              nvij(ni,nj,1,nk) = 1
            enddo
```

```
endif
if ((ni.eq.(mdim-1)).and.(nj.eq.(mdim-1))) then
   nvij(ni,nj,1,-1) = 1
   nvij(ni,nj,1,0)  = nj
   do nk = 1, ni
      nvij(ni,nj,1,nk) = 2
   enddo
endif
if ((ni.le.(mdim-2)).and.(nj.eq.mdim)) then
   nvij(ni,nj,1,-1) = 1
   nvij(ni,nj,1,0)  = nj
   do nk = 1, ni
      nvij(ni,nj,1,nk) = 2
   enddo
   do nk = ni+1, nj-1
      nvij(ni,nj,1,nk) = 1
   enddo
   nvij(ni,nj,1,nj) = -1
   nvij(ni,nj,2,-1) = 1
   nvij(ni,nj,2,0)  = nj
   do nk = 1, ni
      nvij(ni,nj,2,nk) = 2
   enddo
   do nk = ni+1, nj
      nvij(ni,nj,2,nk) = 1
   enddo
endif
if ((ni.eq.(mdim-1)).and.(nj.eq.mdim)) then
   nvij(ni,nj,1,-1) = 1
   nvij(ni,nj,1,0)  = nj
   do nk = 1, ni
      nvij(ni,nj,1,nk) = 2
   enddo
   nvij(ni,nj,1,mdim)  = -1
   nvij(ni,nj,2,-1) = 1
   nvij(ni,nj,2,0)  = nj
   do nk = 1, ni
      nvij(ni,nj,2,nk) = 2
   enddo
   nvij(ni,nj,2,mdim)  = 1
endif
if ((ni.eq.mdim).and.(nj.eq.mdim)) then
```

```
                 nvij(ni,nj,1,-1) = 1
                 nvij(ni,nj,1,0)  = nj
                 do nk = 1, mdim-1
                    nvij(ni,nj,1,nk) = 2
                 enddo
                 nvij(ni,nj,1,mdim)  = -2
                 nvij(ni,nj,2,-1) = 1
                 nvij(ni,nj,2,0)  = nj
                 do nk = 1, mdim-1
                    nvij(ni,nj,2,nk) = 2
                 enddo
                 nvij(ni,nj,2,mdim)  = 2
              endif
 110       enddo
        enddo
c....Déclaration de xdelta
        do ni = 1, mdim -1
           xdelta(ni) = mdim - ni
        enddo
        xdelta(mdim) = 0
        return
        end
c=====================================================================
        subroutine sign_weyl
c....On insère le fichier includes qui déclare les tableaux
        include 'includes'
c....Remplir le tableau sign_w
        if (ndim.eq.3) then
           nbweyl = 2
           sign_w(1) = 1
           sign_w(2) = -1
        elseif (ndim.eq.4) then
           nbweyl = 4
           sign_w(1) = 1
           sign_w(2) = -1
           sign_w(3) = -1
           sign_w(4) = 1
        elseif (ndim.eq.5) then
           nbweyl = 8
           sign_w(1) = 1
           sign_w(2) = -1
           sign_w(3) = -1
```

```
            sign_w(4) = 1
            sign_w(5) = 1
            sign_w(6) = -1
            sign_w(7) = -1
            sign_w(8) = 1
         elseif (ndim.eq.6) then
            nbweyl = 24
            sign_w(1) = 1
            sign_w(2) = 1
            sign_w(3) = 1
            sign_w(4) = 1
            sign_w(5) = 1
            sign_w(6) = 1
            sign_w(7) = 1
            sign_w(8) = 1
            sign_w(9) = 1
            sign_w(10) = 1
            sign_w(11) = 1
            sign_w(12) = 1
            sign_w(13) = -1
            sign_w(14) = -1
            sign_w(15) = -1
            sign_w(16) = -1
            sign_w(17) = -1
            sign_w(18) = -1
            sign_w(19) = -1
            sign_w(20) = -1
            sign_w(21) = -1
            sign_w(22) = -1
            sign_w(23) = -1
            sign_w(24) = -1
         endif
      return
      end
c=================================================================
      subroutine weyl(nindex)
c....On insère le fichier includes qui déclare les tableaux
      include 'includes'
      integer nindex
c....Remplissage du tableau xtab2
      if (ndim.eq.3) then
         if (nindex.eq.1) then
```

```
         xtab2(1) = xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.2) then
         xtab2(1) = -xtab1(1)
      endif
   elseif (ndim.eq.4) then
      if (nindex.eq.1) then
         xtab2(1) = xtab1(1)
         xtab2(2) = xtab1(2)
      elseif (nindex.eq.2) then
         xtab2(1) = xtab1(2)
         xtab2(2) = xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.3) then
         xtab2(1) = -xtab1(2)
         xtab2(2) = -xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.4) then
         xtab2(1) = -xtab1(1)
         xtab2(2) = -xtab1(2)
      endif
   elseif (ndim.eq.5) then
      if (nindex.eq.1) then
         xtab2(1) = xtab1(1)
         xtab2(2) = xtab1(2)
      elseif (nindex.eq.2) then
         xtab2(1) = xtab1(2)
         xtab2(2) = xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.3) then
         xtab2(1) = xtab1(1)
         xtab2(2) = -xtab1(2)
      elseif (nindex.eq.4) then
         xtab2(1) = -xtab1(2)
         xtab2(2) = xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.5) then
         xtab2(1) = -xtab1(1)
         xtab2(2) = -xtab1(2)
      elseif (nindex.eq.6) then
         xtab2(1) = -xtab1(2)
         xtab2(2) = -xtab1(1)
      elseif (nindex.eq.7) then
         xtab2(1) = -xtab1(1)
         xtab2(2) = xtab1(2)
      elseif (nindex.eq.8) then
         xtab2(1) = xtab1(2)
```

```
      xtab2(2) = -xtab1(1)
   endif
elseif (ndim.eq.6) then
   if (nindex.eq.1) then
      xtab2(1) = xtab1(1)
      xtab2(2) = xtab1(2)
      xtab2(3) = xtab1(3)
   elseif (nindex.eq.2) then
      xtab2(1) = -xtab1(1)
      xtab2(2) = -xtab1(2)
      xtab2(3) = xtab1(3)
   elseif (nindex.eq.3) then
      xtab2(1) = -xtab1(1)
      xtab2(2) = xtab1(2)
      xtab2(3) = -xtab1(3)
   elseif (nindex.eq.4) then
      xtab2(1) = xtab1(1)
      xtab2(2) = -xtab1(2)
      xtab2(3) = -xtab1(3)
   elseif (nindex.eq.5) then
      xtab2(1) = xtab1(3)
      xtab2(2) = xtab1(1)
      xtab2(3) = xtab1(2)
   elseif (nindex.eq.6) then
      xtab2(1) = -xtab1(3)
      xtab2(2) = -xtab1(1)
      xtab2(3) = xtab1(2)
   elseif (nindex.eq.7) then
      xtab2(1) = -xtab1(3)
      xtab2(2) = xtab1(1)
      xtab2(3) = -xtab1(2)
   elseif (nindex.eq.8) then
      xtab2(1) = xtab1(3)
      xtab2(2) = -xtab1(1)
      xtab2(3) = -xtab1(2)
   elseif (nindex.eq.9) then
      xtab2(1) = xtab1(2)
      xtab2(2) = xtab1(3)
      xtab2(3) = xtab1(1)
   elseif (nindex.eq.10) then
      xtab2(1) = -xtab1(2)
      xtab2(2) = -xtab1(3)
```

```
   xtab2(3) = xtab1(1)
elseif (nindex.eq.11) then
   xtab2(1) = -xtab1(2)
   xtab2(2) = xtab1(3)
   xtab2(3) = -xtab1(1)
elseif (nindex.eq.12) then
   xtab2(1) = xtab1(2)
   xtab2(2) = -xtab1(3)
   xtab2(3) = -xtab1(1)
elseif (nindex.eq.13) then
   xtab2(1) = xtab1(2)
   xtab2(2) = xtab1(1)
   xtab2(3) = xtab1(3)
elseif (nindex.eq.14) then
   xtab2(1) = -xtab1(2)
   xtab2(2) = -xtab1(1)
   xtab2(3) = xtab1(3)
elseif (nindex.eq.15) then
   xtab2(1) = -xtab1(2)
   xtab2(2) = xtab1(1)
   xtab2(3) = -xtab1(3)
elseif (nindex.eq.16) then
   xtab2(1) = xtab1(2)
   xtab2(2) = -xtab1(1)
   xtab2(3) = -xtab1(3)
elseif (nindex.eq.17) then
   xtab2(1) = xtab1(1)
   xtab2(2) = xtab1(3)
   xtab2(3) = xtab1(2)
elseif (nindex.eq.18) then
   xtab2(1) = -xtab1(1)
   xtab2(2) = -xtab1(3)
   xtab2(3) = xtab1(2)
elseif (nindex.eq.19) then
   xtab2(1) = -xtab1(1)
   xtab2(2) = xtab1(3)
   xtab2(3) = -xtab1(2)
elseif (nindex.eq.20) then
   xtab2(1) = xtab1(1)
   xtab2(2) = -xtab1(3)
   xtab2(3) = -xtab1(2)
elseif (nindex.eq.21) then
```

```
        xtab2(1) = xtab1(3)
        xtab2(2) = xtab1(2)
        xtab2(3) = xtab1(1)
     elseif (nindex.eq.22) then
        xtab2(1) = -xtab1(3)
        xtab2(2) = -xtab1(2)
        xtab2(3) = xtab1(1)
     elseif (nindex.eq.23) then
        xtab2(1) = -xtab1(3)
        xtab2(2) = xtab1(2)
        xtab2(3) = -xtab1(1)
     elseif (nindex.eq.24) then
        xtab2(1) = xtab1(3)
        xtab2(2) = -xtab1(2)
        xtab2(3) = -xtab1(1)
     endif
  endif
  return
  end
```

Annexe B

Multiplicités des valeurs propres

Ce programme est formé d'un seul fichier. Il sert à calculer les multilplicités des valeurs propres.

```
      program multiplicite
c....Déclaration des variables nécessaires
      integer nbor1_h1, nbor2_h1
      integer nk1, nk2, nk3, nh1, nh2, nh3
      integer nkk1, nkk2, nkk3, multip, mult_aux
c....On fixe les valeurs de k1, k2 et k3, ainsi que celle de h1
      nk1 = 5
      nk2 = 3
      nk3 = 2
      nbor1_h1 = nk3 + 2
      nbor2_h1 = 10
c....Début du calcul
      do nh1 = nbor1_h1, nbor2_h1
         do nh2 = 0, nh1
            do nh3 = 0, nh2
               multip = 0
               nkk1 = nk1 + 1
               nkk2 = nk2
               nkk3 = nk3
               mult_aux = 0
               call mult_int(nkk1, nkk2, nkk3, nh1, nh2, nh3,
     &              mult_aux)
               multip = multip + mult_aux
               nkk1 = nk1 - 1
               nkk2 = nk2
               nkk3 = nk3
               mult_aux = 0
```

```
            call mult_int(nkk1, nkk2, nkk3, nh1, nh2, nh3,
     &            mult_aux)
            multip = multip + mult_aux
            nkk1 = nk1
            nkk2 = nk2 + 1
            nkk3 = nk3
            mult_aux = 0
            call mult_int(nkk1, nkk2, nkk3, nh1, nh2, nh3,
     &            mult_aux)
            multip = multip - mult_aux
            nkk1 = nk1
            nkk2 = nk2 - 1
            nkk3 = nk3
            mult_aux = 0
            call mult_int(nkk1, nkk2, nkk3, nh1, nh2, nh3,
     &            mult_aux)
            multip = multip - mult_aux
            if (multip.ne.0) then
               print *, 'nh1 ', nh1, ' nh2 ', nh2,
     &                ' nh3 ', nh3, '        ',multip
            endif
          enddo
        enddo
      enddo
      end
c=============================================================
      subroutine mult_int(nk1, nk2, nk3, nh1, nh2, nh3, mult_aux)
c....Déclaration des variables
      integer nk1, nk2, nk3, nh1, nh2, nh3
      integer mult_aux
      integer nl2, nl3, nh1h2p1, nh1h2p2
      integer nr1
c....
      do nl2 = max(nh3, nk3), nh1
        do nl3 = 0, min(nh2, nl2)
          nh1h2p1 = max(0,
     &        min((nl2-abs(nl3-nk3)-nk2),2*(nl2-max(nl3,nk3)))
     &        - max(0, 2*int((nl2-nl3-nk3-nk2+1)/2)) + 2)/2
c
          do nr1 = 0, nh1 - max(nh2,nl2)
            nh1h2p2 = max(0,min(2*(min(nh2,nl2)-max(nh3,nl3)),
     &            (nh1-abs(nh2-nl2)-abs(nh3-nl3)-nk1-2*nr1))
```

```
&               - max(0, 2*int((nh1-abs(nh2-nl2)
&               -nh3-nl3-nk1-2*nr1+1)/2)) + 2)/2
          mult_aux = mult_aux + nh1h2p2*nh1h2p1
       enddo
    enddo
 enddo
 return
 end
```

Bibliographie

[1] **B. L. Beers and R. S. Millman** : *The spectra of the Laplace-Beltrami operator on compact, semisimple Lie groups*, Amer. J. Math. **99** (1977), 801–807.

[2] **P. Bérard** : *Spectral Geometry, Direct and Inverse Problems*, LNM 1207, Springer, Berlin, 1986.

[3] **P. Bérard** : *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. (2) **48**, No. 3 (1993), 565–576.

[4] **P. Bérard, H. Pesce** : *Construction de variétés isospectrales autour du théorème de T. Sunada*, Progress in inverse spectral geometry, Basel : Birkhaeuser (1997), 63–83.

[5] **M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet** : *Le spectre d'une variété riemannienne*, LNM 194, Springer, Berlin, 1971.

[6] **N. Bourbaki** : *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Masson, Paris, 1982.

[7] **T. Bröcker and T. tom Dieck** : *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer-Verlag, New York, 1985.

[8] **P. Buser** : *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhauser, Basel, 1992.

[9] **I. Chavel** : *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[10] **J. Chazarain** : *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Inventiones Math. **24** (1974), 65–82.

[11] **S. S. Chern, M. Do Carmo and S. Kobayashi** : *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Funct. Anal. Relat. Fields, Conf. Chicago 1968, (1970), 59–75.

[12] **Y. Colin de Verdière** : *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I et II*, Compositio Math. **27** (1973), 83–106 et 159–184.

[13] **D. M. DeTurck, C. S. Gordon** : *Isospectral deformations. II : Trace formulas, metrics, and potentials*, Commun. Pure Appl. Math. **42**, No.8 (1989), 1067–1095.

[14] **D. M. DeTurck, H. Gluck, C. S. Gordon, D. Webb** : *How can a drum change shape, while sounding the same ?*, Differential Geometry, Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math. **52** (1991),111–122.

[15] **D. M. DeTurck, H. Gluck, C. S. Gordon, D. Webb** : *How can a drum change shape, while sounding the same ? II*, Mechanics, analysis and geometry : 200 years after Lagrange (1991), 335–358.

[16] **D. M. DeTurck, H. Gluck, C. S. Gordon, D. Webb** : *The inaudible geometry of nilmanifolds*, Invent. Math. **111**, No.2 (1993), 271–284.

[17] **J. Duistermaat and V. Guillemin** : *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inventiones Math. **29** (1975), 39–79.

[18] **W. Fulton and J. Harris** : *Representation Theory, A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[19] **S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine** : *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[20] **S. Gallot et D. Meyer** : *Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pure Appl. **54** (1975), 259–284.

[21] **C. S. Gordon** : *The Laplace spectra versus the length spectra of Riemannian manifolds*, Nonlinear problems in geometry, Proc. AMS Spec. Sess., 820th Meet. AMS, Contemp. Math. **51** (1986) 63–80.

[22] **R. Gornet** : *The marked length spectrum vs. the Laplace spectrum on forms on Riemannian nilmanifolds*, Comment. Math. Helv. **71**, No.2 (1996), 297–329.

[23] **S. Helgason** : *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[24] **J. I. Humphreys** : *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer-Verlag, New York, 1972.

[25] **A. Ikeda** : *On the spectrum of a Riemannian manifold of positive constant curvature I and II*, Osaka J. Math. **17** (1980), 75–93 and 691–702.

[26] **A. Ikeda** : *On lens spaces which are isospectral but not isometric*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^{e} série, **t. 13** (1980), 303–315.

[27] **A. Ikeda** : *On spherical space forms which are isospectral but not isometric*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 437–444.

[28] **A. Ikeda** : *Riemannian manifolds p–isospectral but not (p+1)–isospectral*, Coll. Pap. 35^{th} Symp. Diff. Geom., Matsumoto/Japan 1988, Perspect. Math. **8** (1989), 383–417.

[29] **A. Ikeda** : *On space forms of real Grassmann manifolds which are isospectral but not isometric*, Kodai Math. J. **20** (1997), 1–7.

[30] **A. Ikeda and Y. Taniguchi** : *Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(C)$*, Osaka J. Math. **15** (1978), 515–546.

[31] **A. Ikeda and Y. Yamamoto** : *On the spectra of 3–dimensional lens spaces*, Osaka J. Math. **16** (1979), 447–469.

[32] **J. Jost** : *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[33] **E. Kaneda** : *The spectra of 1-forms on simply connected compact irreducible Riemannian symmetric spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 369–395.

[34] **E. Kaneda** : *The spectra of 1-forms on simply connected compact irreducible Riemannian symmetric spaces II*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 141–162.

[35] **H. B. Lawson, Jr.** : *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. **89** (1969), 187–197.

[36] **H. Marbes** : *On the spectra of compact locally symmetric Riemannian manifolds*, Math. Nachr. **104** (1981), 83–99.

[37] **Y. Matsushima and S. Murakami** : *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **78** (1963), 365–413.

[38] **A. L. Onishchik and E. B. Vinberg** : *Lie Groups and Lie Algebras III*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[39] **L. Paquet** : *Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles*, Bull. Sc. Math., 2° série **105** (1981), 85–112.

[40] **T. Sunada** : *Riemannian coverings ans isospectral manifolds*, Ann. of Math. **121** (1985), 169–186.

[41] **M. Takeuchi** : *Lie Groups II*, Translations of mathematical monographs 85, AMS, 1991.

[42] **M. Takeuchi** : *Modern Spherical Functions*, Translations of mathematical monographs 135, AMS, 1994.

[43] **C. Tsukamoto** : *Spectra of Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$ and $Sp(n+1)/Sp(1)\times Sp(n)$*, Osaka J. Math. **18** (1981), 407–426.

[44] **M. F. Vignéras** : *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. **112** (1980), 21–32.

[45] **J. A. Wolf** : *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Boston, 1984.