THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

EUGEN PĂLTĂNEA

Analyse de fiabilité des grands systèmes réparables markoviens stratifiés, 2000

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.

63761 .

ORSAY
N° d'ordre

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Spécialité : Mathématique

par

Eugen Păltănea

Sujet : **ANALYSE DE FIABILITE DES GRANDS SYSTEMES REPARABLES MARKOVIENS STRATIFIES**

Soutenue le **10 mars 2000** devant le jury composé de :

M. BON Jean-Louis, directeur de thèse, Université Paris-Sud
M. BRETAGNOLLE Jean, président, Université Paris-Sud
M. IOSIFESCU Marius, Institut Polytechnique de Bucarest
M. ROUSSIGNOL Michel, rapporteur, Université de Marne-la-Vallée
M. YCART Bernard, rapporteur, Université Paris5

Remerciements

*Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre l'*UNIVERSITÉ PARIS-SUD *(Laboratoire de Modélisation Stochastique et Statistique) et l'*UNIVERSITÉ DE TRANSYLVANIE *(Faculté des Sciences de Brasov), par l'intermédiaire du Service Culturel et Scientifique de l'Ambassade de France Bucarest. La préparation de cette thèse a été possible grâce une bourse du gouvernement français et au soutien du C.N.O.U.S.. Je suis reconnaissant Christian* DUHAMEL, *Jean-Louis* BON, *Gheorghe* PITIS *et Gabriel V.* ORMAN *d'avoir soutenu ma candidature pour l'obtention de cette bourse.*

J'ai eu la chance d'être accueilli l'Université Paris-Sud et dirigé scientifiquement par Jean-Louis BON. *Je veux particulièrement le remercier pour son réel enthousiasme professionnel et sa grande disponibilité.*

En même temps, j'adresse mes plus vifs remerciements :

Jean BRETAGNOLLE, *pour l'attention accordée l'avancement de mes travaux et ses conseils scientifiques très importants. Je suis honoré de son acceptation de présider le jury de soutenance ;*

Michel ROUSSIGNOL, *Bernard* YCART *qui, en qualité de rapporteurs, ont étudié minutieusement mon travail et et dont les remarques ont été très utiles ;*

Marius IOSIFESCU *pour avoir encouragé mes recherches en Roumanie et en France ;*

Christiane COCOZZA *et Jean-Pierre* RAOULT *pour la chaleur de leur accueil l'Université de Marne-la-Vallée et leurs conseils scientifiques ;*

Patrick PAMPHILE, *Olivier* POURRET, *Jérôme* COLLET *pour les discussions mathématiques qui m'ont beaucoup apporté ;*

enfin tous les mathématiciens du laboratoire de Statistique d'Orsay et tout le personnel de secrétariat, en particulier Sabine, dont la gentillesse m'a beaucoup aidé durant mes différents séjours en France.

Analyse de fiabilité des grands systèmes réparables markoviens stratifiés

Résumé : L'objet de la thèse est l'analyse des grands systèmes réparables lorqu'il est possible d'établir une échelle de qualité de fonctionnement des états. L'exemple le plus simple est le nombre de composants en panne lorsque les composants jouent le même rôle. Pour la fiabilité, deux méthodes de calcul sont proposées. La première concerne l'analyse des trajectoires de panne. Une méthode basée sur des encadrements stochastiques permet de simplifier les calculs sur chacune des trajectoires. La deuxième repose sur les approximations pessimistes et utilise des encadrements spécifiques aux modèles stratifiés. En particulier la prise en compte du nombre de réparations permet d'affiner la méthode séquentielle. L'encadrement obtenu dans ce cadre markovien, améliore les encadrements classiques. En ce qui concerne la disponibilité, il est montré que le niveau de qualité d'un tel système converge vers le niveau stationnaire avec un phénomène de cut-off, résultat déjà connu dans le cas de composants identiques mais démontré ici pour des composants quelconques.

Mots clés : fiabilité, inégalités stochastiques, systèmes markoviens, cut-off

Classification AMS (1991) : 60K10, 60J20, 90B25, 62N05

Reliability Analysis of Large Reparable Markovian Stratified Systems

Abstract : The work deals with industrial systems composed of many markovian components for which it is reasonnable to define a level of working quality. The most simple example is the number of failed components. The first part is devoted to the approximation of the reliability. Two methods are proposed. The first one is based on the failure trajectories analysis. The efficiency of the method is coming from a new result about stochastic inequalities. The second method is made in the way of exponential pessimistic approximations. The existence of a quality level permits to get a new bounding for the reliability. This bounding is more accurate than the classical boundings. The second part of the thesis is concerning the availibility. It is proved that the quality level of the system converges to stationnary level with a cut-off property. This result was known in the case of identical components but not in the case of different components.

Key words : reliability, stochastic inequalities, markov systems, cut-off

Table des matières

Introduction **3**

1 Modélisation markovienne **5**

1.1 Système réparable 5

1.1.1 Structure du système 5

1.1.2 Dynamique du système 7

1.1.3 Matrices, trajectoires 9

1.2 Modèle stratifié par niveaux 11

2 Calcul séquentiel de fiabilité **15**

2.1 Écriture matricielle 15

2.2 Approximation par des distributions d'Erlang 16

2.2.1 Notations; résultats envisagés 17

2.2.2 Comparaisons stochastiques 18

2.2.3 Encadrement par des lois d'Erlang 21

2.2.4 Comparaison avec l'approximation de Barlow - Marshall 25

2.3 Utilisation pratique 26

3 Calcul de fiabilité à partir des strates **31**

3.1 Encadrement du temps moyen de vie 32

3.2 Comparaison avec un k/n dans le cas des réparations homogènes . . . 38

3.3 Fiabilité par comparaison avec un k/n dans le cas général 46

3.4 Sur l'uniformisation optimale des taux 49

4 Calcul par approximation exponentielle **53**

4.1 Approximation exponentielle pessimiste 53

4.2 Les paramètres de l'approximation exponentielle 54

4.3 Calcul matriciel de la probabilité de panne 57

4.4 Encadrement de la probabilité de panne 60

4.5 Etude séquentielle de la probabilité de panne directe 65
4.5.1 Nombre des séquences avec un nombre fixé de réparations . . . 65
4.5.2 Séquences avec un nombre fixé de réparations 75
4.5.3 Cas général 79
4.6 Conclusion 80

5 Evolution en temps de la disponibilité **83**
5.1 Modèle stratifié sans absorption 83
5.2 Niveau de séparation 86
5.3 Cas des composants identiques 94
5.4 Calcul direct de la distance en variation totale 98
5.5 Temps critique de convergence vers la loi stationnaire (cut-off) 104
5.6 Utilisation 114

Annexe **116**

Bibliographie **118**

Introduction

La fiabilité des grands systèmes industriels modernes est une préoccupation importante qui nécessite une analyse multidisciplinaire. En mathématique, elle est à l'origine de nombreux problèmes spécifiques. Qu'il s'agisse de réseaux de transport, de centrales nucléaires ou de composants électroniques, deux approches sont possibles pour évaluer la probabilité de défaillance. L'une est plutôt statique et privilégie les informations sur l'architecture du système. Schématiquement, on peut dire qu'il s'agit de l'approche anglo-saxonne développée dans les années 70 avec les techniques d'arbres de défaillance. L'autre approche est plutôt dynamique et utilise une modélisation sous forme de processus stochastiques. Elle trouve son origine, à la même époque, dans les travaux classiques de GNEDENKO, SOLOVYEV ... . Ici nous utilisons cette seconde approche et centrons notre travail sur les modèles markoviens à temps continu et à espaces d'états discrets. Nous cherchons dans cette étude à concilier l'analyse pratique des problèmes industriels et l'aspect théorique de toute recherche en mathématique.

Le calcul de la fiabilité pour les grands systèmes markoviens est un problème à la fois classique et ancien. Nous savons que les méthodes exactes sont la plupart du temps inapplicables. Les difficultés sont essentiellement de deux natures. L'une est liée à la taille des systèmes. Il n'est pas rare d'avoir des systèmes de plusieurs millions d'états. L'autre tient à la disparité des temps. Il est hautement souhaitable que les temps de défaillance des éléments soient très nettement plus grands que les temps de réparation. C'est pourquoi de nombreuses approximations ont été développées ces dernières années. Nous proposons ici de nouveaux encadrements qui soient utiles au moins pour les systèmes cohérents standard de grande taille. Les résultats sont démontrés dans le cadre de modèles stratifiés. Ils utilisent les outils classiques de l'agrégation dans les systèmes markoviens et la description par séquences des probabilités de panne.

La thèse est divisée en 5 chapitres. La description de la famille de modèles étudiés est contenue dans le premier chapitre. Le chapitre 2 privilégie le point de vue séquentiel. Schématiquement la panne est décrite par quelques scénarios dont la durée est une

convolution de variables exponentielles. C'est en étudiant la mise en pratique des calculs correspondants qu'a été développée une méthode réduisant sensiblement les temps de calculs. Cette méthode repose sur des comparaisons stochastiques qui ont aussi un intérêt en soi.

Le chapitre 3 est centré sur l'évaluation de la durée de vie du système à partir de la stratification par niveaux. Il s'agit de comparer la durée de vie du système à celle d'un système de type k/n qui lui soit à la fois proche et pessimiste.

Dans le chapitre 4, nous évoquons les approximations pessimistes classiques développées ces vingt dernières années. Nous en déduisons plusieurs résultats dans le cadre des modèles stratifiés qui nous intéressent. En particulier, pour les études concrètes, nous savons que les trajectoires de panne sans réparations ont le plus de poids dans la probabilité de panne du système. Ceci réduit considérablement le nombre de trajectoires à observer. Ici nous prolongeons cette étude aux trajectoires de panne ayant un nombre fixé de réparations et en déduisons de nouveaux encadrements.

Dans le chapitre 5 nous étudions les problèmes liés à la disponibilité du système. Les états de panne ne sont plus supposés absorbants et nous voulons décrire la faon dont le processus converge vers la loi stationnaire. Le modèle étant stratifié, nous étudions l'évolution de la loi donnant le nombre de composants en panne. Deux asymptotiques sont envisagées. L'une avec un nombre fixe de composants, l'autre lorsque le nombre de composants est très grand. L'ensemble des résultats théoriques sont illustrés par des données numériques réalisées en "matlab".

Chapitre 1

Modélisation markovienne

L'objet de ce chapitre est de définir le cadre général de notre étude. Nous souhaitons analyser le fonctionnement d'un système industriel formé de nombreux composants. Chaque composant est soit en bon état de fonctionnement, soit en panne. Sa durée de vie et sa durée de réparation est supposée sans usure. On obtient ainsi un modèle markovien classique (cf BARLOW, PROSCHAN OU GNEDENKO). L'hypothèse que nous ajoutons au cas standard est l'existence d'un *niveau de qualité*. Par exemple, le nombre de composants en panne peut servir d'indicateur de qualité de fonctionnement.

1.1 Système réparable

Nous rappelons le cadre markovien classique de modélisation des systèmes industriels et en profitons pour introduire l'essentiel des notations qui seront utilisés dans cette étude

1.1.1 Structure du système

Considérons un système S formé de n composants: $c^{(1)},c^{(2)},\ldots,c^{(n)}$ indexés par l'ensemble $I := \{1,2,\ldots,n\}$. On suppose que chaque composant $c^{(i)}, i \in I$, a deux états possibles qui sont notés: 0 pour le fonctionnement et 1 pour la panne. Soit $E = \{0,1\}^n = \{e_j\}_{j\in J}$, où $J = \{0,1,\ldots,2^n - 1\}$, l'ensemble des états possibles du système, tels que, si $e_j = (e_j^{(1)},e_j^{(2)},\ldots,e_j^{(n)}) \in E$, alors $e_j^{(i)}$ indique l'état du composant $c^{(i)}, i \in I$. Notons $e_0 = (0,0,\ldots,0)$, l'état de *fonctionnement parfait* du système S, et $\overline{e} = (1,1,\ldots,1)$ l'état du système avec tous ses composants en panne.

La structure du système S est caractérisée par la décomposition de E en deux sous-ensembles: $E^+ = \{e_j\}_{j\in J^+}$, l'ensemble des *états de fonctionnement*, et $E^- = \{e_j\}_{j\in J^-}$,

l'ensemble des *états de panne.* Évidemment nous supposons $e_0 \in E^+$ et $\overline{e} \in E^-$. Les éléments de $E_c^+ := E^+ \setminus \{e_0\}$ sont nommés des *états critiques.* Considérons sur E l'ordre partiel defini par

$$e_j \preceq e_k \Leftrightarrow e_j^{(i)} \leq e_k^{(i)}, \forall i \in I$$

Naturellement, on considère que E^+ et E^- sont compatibles avec la relation d'ordre " $\preceq$ " dans le sens suivant :

$$e_j \preceq e_k \text{ et } e_k \in E^+ \Rightarrow e_j \in E^+$$

$$e_j \preceq e_k \text{ et } e_j \in E^- \Rightarrow e_k \in E^-$$

L'évolution du système se fait par des défaillances et réparations successives de composants. Ainsi l'état du système évolue-t-il par des basculements $0-1$ ou $1-0$ successifs. Nous appellerons *pas* tout couple $(e_j,e_k) \in E^+ \times (E \setminus E_l^-)$ ayant la propriété $\sum_{i \in I} |e_j^{(i)} - e_k^{(i)}| = 1$. Nous dirons alors que les états e_j et e_k sont des *états voisins.*

Chaque élément e de $(E \setminus \{\overline{e}\}, \preceq)$ a un ensemble de successeurs qui sont les états e' plus grands, au sens de cette relation d'ordre, et tels que (e,e') soit un pas. Notons E_a^- l'ensemble des successeurs des éléments de E^+, qui se trouvent en E^-. On dit que E_a^- contient les *états d'absorption.* Soit $E_l^- := E^- \setminus E_a^-$ l'ensemble des *états latents.* Évidemment le système n'arrive jamais dans un *état latent* parce qu'il est déjà tombé en panne dans un état "$\preceq -$ inférieur" qui appartient à E_a^-. On peut donc décomposer l'ensemble des états $E = E^+ \cup E^-$ comme suit : $E^+ = E_0^+ \cup E_c$ où $E_0^+ := \{e_0\}$ et E_c est l'ensemble des *états critiques,* c'est-à-dire les états dont un successeur est dans $E^- = E_a^- \cup E_l^-$. Il sera pratique dans la suite d'indexer les éléments de E de sorte que, pour $j,k,m \in J$, si on a $e_j \in E^+$, $e_k \in E_a^-$ et $e_m \in E_l^-$, alors $j < k < m$.

Une *trajectoire* de *longueur* m, $m \geq 1$, est définie comme un $m+1-$uple $\gamma = (e_{j_0},e_{j_1},\ldots,e_{j_m})$ tel que chaque couple $(e_{j_{k-1}},e_{j_k})$, $1 \leq k \leq m$, est un *pas.* Donc les pas sont des trajectoires de longueur 1. Nous disons que la trajectoire γ part de e_{j_0}, arrive à e_{j_m} et, pour $m \geq 2$, passe par e_{j_k}, $k = 1,\ldots,m-1$. Nous précisons sa longueur en écrivant $l(\gamma) = m$. Il est utile de distinguer dans l'ensemble des trajectoires celles qui jouent un rôle important. Nous notons :

$\widetilde{\Gamma_0^+}$ l'ensemble des *trajectoires de marche,* celles qui partent de e_0, et arrivent à un état de E^+ sans visite à l'ensemble des états de panne;

$\widetilde{\Gamma_0^a}$ l'ensemble des *trajectoires de panne,* celles qui partent de e_0, et arrivent à un état de E_a^-;

Γ_0^0 l'ensemble des *trajectoires de retour* parmi celles de $\widetilde{\Gamma_0^+}$, qui arrivent à e_0 sans passer par e_0;

Γ_0^a l'ensemble des *trajectoires de panne directe*, parmi celles de $\widetilde{\Gamma_0^a}$ qui ne repassent pas par e_0.

Nous avons défini les éléments qui permettent de décrire l'état du système. Nous allons maintenant construire le modèle stochastique qui décrit l'évolution du système.

1.1.2 Dynamique du système

Nous supposons que S commence à fonctionner à l'instant $t = 0$ avec tous ses composants en état de marche (donc son état initial est e_0). Pendant son fonctionnement les composants se dégradent indépendamment, jusqu'à ce qu'ils tombent en panne. Quand un composant tombe en panne, sa réparation commence instantanément. Ainsi, l'évolution en temps du système S sera représentée par une succession d'états $e \in E$, jusqu'à "l'apparition" d'un $e^* \in E_a^-$ à un instant T que nous désignons comme la *durée de vie* de S.
Notons $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$, $X(0) = e_0$, $X(t) \in E$, le processus correspondant. Nous pouvons définir le *durée de vie* du système S comme:

$$T = \inf\{\ t \geq 0 :\ X(t) \in E_a^-\ \}.$$

Le caractère *markovien* du comportement de X est dû à l'hypothèse que pour chaque $c^{(i)}$ le *temps de fonctionnement*, $T_0^{(i)}$, et *le temps de réparation*, $T_1^{(i)}$, sont des variables aléatoires de loi exponentielle, de paramètres $\alpha_0^{(i)} = \lambda_i$ et respectivement $\alpha_1^{(i)} = \mu_i$. On suppose habituellement que $0 < \lambda_i \ll \mu_i$.
Il est connu que, dans ce cadre, le processus $X(t)$ est un *processus markovien homogène avec états absorbants*. Pour la description de X, il est utile de rappeler la signification des transitions. L'indépendance supposée du fonctionnement (réparation) des composants permet de modéliser l'évolution en temps de chaque composant $c^{(i)}$ par un *processus alterné de renouvellement*, $\{N^{(i)}(t)\}_{t\geq 0}$, avec les inter-arrivées $\{\ \tau_k^{(i)}\ \}_{k\geq 1}$, qui sont des v.a. indépendantes, ayant alternativement la distribution de la variable aléatoire $T_0^{(i)}$ et $T_1^{(i)}$. Les instants de renouvellement sont définis par $\Phi_0^{(i)} := 0$, $\Phi_m^{(i)} := \sum_{k=0}^{m} \tau_k^{(i)}$, $m = 1,2,\ldots$. De plus, tous ces processus qui correspondent chacun à un composant sont indépendants puisque nous avons supposé l'indépendance des composants.

Soit $t > 0$, fixé. Pour chaque $i \in I$, le nombre de renouvellements dans l'intervalle $[0,t]$ est fini, avec la probabilité 1. En fait nous avons la majoration suivante:

$$\mathbb{P}\{N^{(i)}(t) > m\} = \mathbb{P}\{\Phi_m^{(i)} \leq t\} \leq \mathbb{P}\{\max(\tau_k^{(i)}; k = 1,\ldots,m) \leq t\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}\{\tau_k^{(i)} \leq t\} \leq (1 - e^{-(\lambda_i+\mu_i)t})^m \longrightarrow 0, \quad m \to \infty.$$

Puisque $\tau_k^{(i)}$, $i \in I$, $k = 1,2,\ldots$, sont des variables aléatoires indépendantes, avec des densités continues, on a: $\mathbb{P}\{\ \Phi_m^{(i)} = \Phi_{m'}^{(i')}\ \} = 0$, pour tous $i,i' \in I$, $m,m' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tels que $i \neq i'$ ou $m \neq m'$. D'où on peut tirer la conclusion qu'avec la probabilité 1, on a une des deux assertions:

(i) $X(s) = e_0$, $\forall s \in [0,t]$,

ou

(ii) il existe un $\gamma = (e_{j_0},e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) \in \widetilde{\Gamma_0^+} \cup \widetilde{\Gamma_0^a}$ (où $j_0 = 0$) et des valeurs $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leq t$ tels que $X(s) = e_{j_{k-1}}$ $\forall s \in [t_{k-1},t_k)$, $k = 1,\ldots,m$; et $X(s) = e_{j_m}$, $\forall s \in [t_m,t]$. Dans ce cas, si on note $n_i := N^{(i)}(t)$, $s_i := \Phi_{n_i-1}^{(i)}$, alors on a: $m = \sum_{i\in I}(n_i - 1)$; $t_m = \max_{i\in I} s_i$.

Décrivons maintenant l'évolution de X après la date t.

Si $X(t) \in E_a^-$, alors $X(s) = X(t)$, $\forall s > t$.

Si $X(t) \in E^+$, alors on s'intéresse au saut suivant (donc le changement d'état) du processus X. Le modèle du système indique qu'il va apparaître au temps:

$$t' = t + \min_{i\in I}[\ \tau_{n_i}^{(i)} - (t - s_i) \mid \tau_{n_i}^{(i)} > t - s_i\ ].$$

Mais si V est une v.a. exponentielle, de paramètre $a > 0$ et si $s,x \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}\{V - s > x | V > s\} = \frac{\mathbb{P}\{V > s + x\}}{\mathbb{P}\{V > s\}} = \frac{e^{-a(s+x)}}{e^{-as}} = e^{-ax} = \mathbb{P}\{V > x\}$$

(la propriété de "perte de memoire" de l'exponentielle), donc la variable aléatoire $[\tau_{n_i}^{(i)} - (t - s_i) | \tau_{n_i}^{(i)} > t - s_i]$ a la même distribution que la v.a. $\tau_{n_i}^{(i)}$ (ou encore la v.a. $T_{2.\{(n_i+1)/2\}}^{(i)}$). Par l'indépendance des $\tau_{n_i}^{(i)}$, $i \in I$, on obtient alors:

$$\mathbb{P}\{t' > t + x\} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}\{\tau_{n_i}^{(i)} > x\} = \exp(-(\sum_{i\in I} \alpha_{e_{jm}^{(i)}}^{(i)})x)\ . \tag{1.1}$$

Précisons les lois des transitions conditionnées, dérivant de la relation (1.1). Supposons donc que le système se trouve à un instant donné dans $e \in E^+$. Nous avons vu que le changement possible d'état, vers n'importe quel état voisin, aura lieu après un temps

$$T_e := \min_{i\in I} T_{e^{(i)}}^{(i)}$$

qui sera dénommé le *temps de séjour en e*. Conformément à (1.1), T_e suit une loi exponentielle de paramètre:

$$\alpha_e := \sum_{i\in I} \alpha_{e^{(i)}}^{(i)}.$$

On sait (cf FELLER) que la distribution de la *durée de vie* du système S s'obtient par la résolution du système différentiel linéaire associé. Cette résolution n'est pas toujours possible pour des raisons de taille de matrice ou de disparité des taux de transition. Dans ce cas, il est fréquent de recourir à des méthodes de calcul utilisant la chaîne de Markov des états visités (*la chaîne encastrée ou chaîne incluse*).

1.1.3 Matrices, trajectoires

Nous avons vu précédemment, que, pour chaque $t > 0$, il existe p.s. une trajectoire γ de $\widetilde{\Gamma_0^+} \cup \widetilde{\Gamma_0^a}$ associée au processus X sur l'intervalle $[0,t]$. Cette trajectoire peut être réduite à un seul point $X = e_0$ si aucun élément ne tombe en panne entre 0 et t. Nous la notons $\gamma_t = \gamma_t(X)$. Alors :

$$\{T < \infty\} \equiv \{\exists \gamma \in \widetilde{\Gamma_0^a} : \gamma = \gamma_T\} = \cup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma_0^a}} \{\gamma = \gamma_T\}. \tag{1.2}$$

Puisque les composants (donc les pas) sont supposés indépendants, la trajectoire $\gamma = (e_{j_0}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) \in \widetilde{\Gamma_0^a}$ a la probabilité (pour la chaîne encastrée) donnée par :

$$p_\gamma := \mathbb{P}\{\gamma = \gamma_T\} = \prod_{k=1}^{m} p_{j_{k-1} j_k}. \tag{1.3}$$

De plus, nous avons :

$$\sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma_0^a}} p_\gamma = 1.$$

C'est ainsi qu'on peut associer p.s. au processus X la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $X_k \in E$ définie par $X_k = e_{j_k}$, $k \leq m$; $X_k = X_m$, $k > m$, où $\gamma_T = (e_{j_0}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})$ avec $j_0 = 0$, $e_{j_m} \in E_a^-$, $m = l(\gamma_T) \geq 1$. Parce qu'on peut ignorer les *états latents*, notons $J' := \{j \in J \ : \ e_j \in E' := E^+ \cup E_a^-\}$.
La *matrice des probabilités de transition*, associée à cette chaîne, sera :

$$P = (p_{jj'})_{(j,j') \in J' \times J'}, \quad p_{jj'} = \begin{cases} p_{e_j e_{j'}} & si\ (e_j e_{j'})\ est\ un\ pas \\ 1 & si\ j = j' \in E_a^- \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

Si nous considérons les vecteurs des probabilités des états :

$$p^{(k)} = (p_j^{(k)})_{j \in J'} \in [0,1]^{card\ J'}, \sum_{j \in J'} p_j^{(k)} = 1,\ k = 0,1,\ldots,$$

définis par $p^{(0)} = (1,0,0,\ldots,0)$, $p^{(k)} = p^{(0)}.P^k$, $k \geq 1$, alors nous avons

$$\mathbb{P}\{\ X_k = e_j\ \} = p_j^{(k)},\ j \in J',\ k \geq 0.$$

Nous faisons aussi la remarque suivante:

$$\sum_{j\in J';e_j\in E_a^-} p_j^{(m)} = \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}_0^a;l(\gamma)\leq m} p_\gamma$$

En modifiant légèrement la matrice P on obtient une matrice Q, utile à l'étude des trajectoires. Elle ne diffère de P que sur les termes diagonaux des états absorbants:

$$Q = (q_{jj'})_{(j,j')\in J'\times J'},\ q_{jj'} = \begin{cases} p_{jj'} & si\ (e_j,e_{j'})\ est\ un\ pas \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On remarque facilement (cf. (1.3)) que, si $q_{jj'}^{(m)}$ (avec $e_j \in E^+$, $e_{j'} \in E'$) désigne un élément de la matrice Q^m, alors on a:

$$q_{jj'}^{(m)} = \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma_j^{j'}};\ l(\gamma)=m} p_\gamma \tag{1.4}$$

où $\widetilde{\Gamma_j^{j'}}$ est l'ensemble des trajectoires qui partent de e_j et arrivent à $e_{j'}$.
L'emploi de ces matrices sera présenté aux chapitres suivants. Dans l'annexe seront démontrées des propriétés spécifiques.

La décomposition de X à partir des *processus de renouvellements alternés*, permet de montrer que si $\gamma_T = \gamma = (e_0,e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) \in \widetilde{\Gamma}_0^a$, alors la *durée de vie* du système (qui représente le *temps de séjour sur la trajectoire* γ_T) est la somme des *temps de séjour* dans les états atteints par γ, sans le dernier, c'est à dire

$$T = T_\gamma := \sum_{k=0}^{m-1} T_{e_{j_k}}\ .$$

Dans ce cas on peut écrire: $T \overset{p.s.}{=} T_{\gamma_T}$. D'où on obtient la distribution de T, dans le langage des trajectoires:

$$F_T(x) = \mathbb{P}\{T\leq x\} = \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}_0^a} \mathbb{P}\{T_{\gamma_T}\leq x|\gamma_T=\gamma\}\cdot\mathbb{P}\{\gamma_T=\gamma\} = \tag{1.5}$$

$$= \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}_0^a} p_\gamma \mathbb{P}\{T_\gamma\leq x\},\quad x\geq 0.$$

Grâce à "l'indépendance" (au sens où on remplace des v.a. indépendantes par des v.a. ayant la même distribution) de $T_{e_{j_k}}$, $k\leq m-1$, et puisque nous connaissons déjà la distribution de T_e, nous pouvons aussi donner la distribution du temps T_γ de parcours de la trajectoire γ pour $\gamma = (e_{j_0},\ldots,e_{j_m})$:

$$F_{T_\gamma}(x) := \mathbb{P}\{\ T_\gamma\leq x\ \} = \mathbb{P}\{\ \sum_{k=0}^{m-1} T_{e_{j_k}}\leq x\ \} = F_{e_{j_0}} * F_{e_{j_1}} * \ldots * F_{e_{j_{m-1}}}(x) \tag{1.6}$$

où $*$ désigne le produit de convolution et la distribution F_e de T_e est donnée par

$$F_e(x) = F_{T_e}(x) := \mathbb{P}\{\ T_e \leq x\ \} = 1 - exp(-\alpha_e x),\ \ x \geq 0.$$

Parce que $\widetilde{\Gamma_0^a}$ contient des trajectoires finies, nous pouvons transcrire (1.5) :

$$F_T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma_0^a};\ l(\gamma)=m} p_\gamma F_{T_\gamma}(x),\ \ x \geq 0 \tag{1.7}$$

Cette relation est très importante au niveau des applications concrètes. Elle permet, dans certains cas, de bien mettre en relief les scénarios de panne prépondérants et donc d'agir sur les causes principales de panne.

1.2 Modèle stratifié par niveaux

Suivant une idée classique (Cf BON, COURTOIS et al, SOLOVYEV, POURRET, RUBINO,...), nous envisageons de simplifier l'étude de ce système markovien en partageant ses états en différentes classes. Le plus naturel est de considérer comme une classe l'ensemble des états correspondants à un nombre fixé de composants en panne mais d'autres formes de stratification peuvent s'avérer utiles dans la pratique

Nous appellerons cette agrégation *le modèle stratifié.* Ainsi, considérons la partition $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ de E où E_j, dénommé *niveau* j, représente l'ensemble des états avec j composants en panne, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$. Alors :

$$e \in E_j \ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n} e^{(i)} = j.$$

Deux niveaux $\underline{k}$ et $\overline{k}$ représentant les frontières des états de panne seront utilisés dans la suite.

Nous supposons que tous les états de panne du système S ont plus de $\underline{k}$ composants défaillants. Plus précisement, nous supposons $\cup_{j=0}^{\underline{k}} E_j \subseteq E^+$ et $E^- \subseteq \cup_{j=\underline{k}+1}^{n} E_j$. L'entier $\underline{k}$ est choisi de sorte que $E^- \cap E_{\underline{k}+1} \neq \emptyset$, donc $\underline{k}+1$ est le "premier" niveau ayant au moins un état de panne.

Le dernier niveau du système avec au moins un état de fonctionnement est noté $\overline{k}$. Alors, pour $j > \overline{k}$ tous les états du niveau j sont des états de panne. Évidemment, on a

$$1 \leq \underline{k} \leq \overline{k} \leq n$$

La situation où $\underline{k} = \overline{k}$ est spécifique aux systèmes notés simplement k/n, $k = \underline{k}+1$.

Dans les estimations que nous proposons dans la suite nous utiliserons les niveaux $\underline{k}$ et $\overline{k}$ pour exprimer les encadrements. Une autre idée importante est l'utilisation pour approcher un système donné par un système k/n.

Certaines notations seront employées au fil de l'exposé.

Ainsi, soit e un état de fonctionnement. Notons :

$\lambda_e = \sum_{i;e^{(i)}=0} \lambda_i$ – *le taux de dégradation;*

$\mu_e = \sum_{i;e^{(i)}=1} \mu_i$ – *le taux de réparation;*

$p_e = \frac{\lambda_e}{\lambda_e+\mu_e}$ – *la probabilité de transition vers le niveau supérieur;*

$q_e = \frac{\mu_e}{\lambda_e+\mu_e}$ – *la probabilité de transition vers le niveau inférieur.*

Les expressions des bornes que nous allons proposer font appel à certains majorants ou minorants des taux de dégradation et de réparation. Usuellement nous employons les conventions suivantes :

$\underline{\mu} = \min\{\mu_i;\ i = 1,\ldots n\}$; $\underline{\lambda} = \min\{\lambda_i;\ i = 1,\ldots,n\}$;

$\overline{\mu} = \max\{\mu_i;\ i = 1,\ldots,n\}$; $\overline{\lambda} = \max\{\lambda_i;\ i = 1,\ldots,n\}$;

$\underline{\theta} = \underline{\mu}\,/\,\overline{\lambda}$; $\overline{\theta} = \overline{\mu}\,/\,\underline{\lambda}$, avec $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$

Observons que pour les systèmes industriels que nous étudions $\underline{\theta} \gg 1$.

Pour un état de niveau k, le nombre de composants susceptibles de tomber en panne est $n-k$. Notons

$$\overline{\Lambda}_k = \max_{\substack{I'\subset\{1,2,\ldots,n\} \\ |I'|=n-k}} \sum_{i\in I'} \lambda_i = \max_{e\in E_k} \lambda_e$$

la borne supérieure des taux de dégradation des états appartenant au niveau k. De manière analogue, notons

$$\underline{\Lambda}_k = \min_{\substack{I'\subset\{1,2,\ldots,n\} \\ |I'|=n-k}} \sum_{i\in I'} \lambda_i = \min_{e\in E_k} \lambda_e$$

la borne inférieure des taux des états appartenant au niveau k.

En particulier, on a les relations suivantes :

$$\overline{\Lambda}_{n-1} = \overline{\lambda},\ \underline{\Lambda}_{n-1} = \underline{\lambda} \text{ et } \underline{\Lambda}_0 = \overline{\Lambda}_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{1.8}$$

Remarquons qu'il existe une liaison directe entre les définitions ci-dessus de $\underline{\Lambda}_k$ et $\overline{\Lambda}_k$ et l'ordre croissant des taux de dégradation :

$$\lambda_{[1]} \leq \lambda_{[2]} \leq \ldots \leq \lambda_{[n]}.$$

Ainsi on a :

$$\underline{\Lambda}_k = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_{[i]} \quad \text{et} \quad \overline{\Lambda}_k = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{[i]}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Il se trouve que les suites $(\frac{\overline{\Lambda}_k}{n-k})_{0\leq k\leq n-1}$ et $(\frac{\underline{\Lambda}_k}{n-k})_{0\leq k\leq n-1}$ sont en fait monotones.

Lemme 1.2.1

(i) La suite $(\frac{\overline{\Lambda}_k}{n-k})_{0\leq k\leq n-1}$ *est croissante par rapport à* k.

(ii) La suite $(\frac{\underline{\Lambda}_k}{n-k})_{0\leq k\leq n-1}$ *est décroissante par rapport à* k.

DÉMONSTRATION. Soient k et l deux entiers tels que $0 \leq k \leq l \leq n-1$.
(i) Puisque $1 \leq n-l \leq n-k \leq n$, pour tout sous-ensemble I', avec $n-k$ éléments, de l'ensemble $I = \{1,\ldots,n\}$ on a:

$$\sum_{i\in I'} \lambda_i = \frac{1}{\binom{n-k-1}{n-l-1}} \sum_{\substack{I''\subset I' \\ |I''|=n-l}} \sum_{j\in I''} \lambda_j \leq \frac{\binom{n-k}{n-l}\cdot \overline{\Lambda}_l}{\binom{n-k-1}{n-l-1}} = \frac{n-k}{n-l}\overline{\Lambda}_l.$$

En prenant le maximum sur tous les sous-ensembles I', on déduit l'inégalité $\overline{\Lambda}_k \leq \frac{n-k}{n-l}\overline{\Lambda}_l$, d'où il résulte $\frac{\overline{\Lambda}_k}{n-k} \leq \frac{\overline{\Lambda}_l}{n-l}$.
(ii) Le raisonnement est identique. □

D'après la relation (1.8) et le LEMME 1.2.1 on déduit:

$$\underline{\lambda} \leq \frac{\underline{\Lambda}_k}{n-k} \leq \frac{\overline{\Lambda}_l}{n-l} \leq \overline{\lambda}, \quad \forall\, k,l \in \{0,1,\ldots,n-1\} \tag{1.9}$$

Soient λ_* et λ^* definis par:

$$\lambda_* = \frac{\underline{\Lambda}_{\overline{k}}}{n-\overline{k}} \quad \text{et respectivement} \quad \lambda^* = \frac{\overline{\Lambda}_{\underline{k}}}{n-\underline{k}}. \tag{1.10}$$

Observons que d'après (1.9) et (1.10) nous avons:

$$\underline{\lambda} \leq \lambda_* \leq \lambda^* \leq \overline{\lambda} \tag{1.11}$$

Les termes λ_* et λ^* permettent de prendre en compte la diversité des composants. Au lieu de prendre le taux maximum comme taux le plus pessimiste, nous proposons de prendre le taux λ_* "moyennement" le plus pessimiste.

Maintenant nous pouvons donner des encadrements pour le taux de dégradation et la probabilité de transition (vers le niveau supérieur) d'un état de fonctionnement, appartenant à un niveau connu.

Lemme 1.2.2 *Soit* e *un état de fonctionnement appartenant au niveau* j.
Notons $\theta_* = \underline{\mu}/\lambda^*$ *et* $\theta^* = \overline{\mu}/\lambda_*$.
(i) Si $j \leq \underline{k}$ *alors:*

$$\lambda_e \leq (n-j)\lambda^*, \quad \mu_e \geq j\underline{\mu} \quad et \quad p_e \leq \frac{n-j}{(n-j)+j\theta_*}.$$

(ii) Si $j \leq \overline{k}$ *alors :*

$$\lambda_e \geq (n-j)\lambda_*, \quad \mu_e \leq j\overline{\mu} \quad et \quad p_e \geq \frac{n-j}{(n-j)+j\theta^*}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $e \in E^+ \cap E_j$. Alors $\text{card}\{\, i : e^{(i)} = 0 \,\} = n-j$ et $\text{card}\{\, i : e^{(i)} = 1 \,\} = j$. D'après les définitions des taux de dégradation et réparation nous obtenons : $\underline{\Lambda_j} \leq \lambda_e \leq \overline{\Lambda}_j$ et $j\underline{\mu} \leq \mu_e \leq j\overline{\mu}$.
Supposons $j \leq \underline{k}$. Alors du LEMME 1.2.1 et de la relation (1.10) on tire

$$\overline{\Lambda}_j \leq (n-j)\frac{\overline{\Lambda}_{\underline{k}}}{n-\underline{k}} = (n-j)\lambda^*.$$

Il suit :

$$p_e = \frac{\lambda_e}{\lambda_e + \mu_e} \leq \frac{(n-j)\lambda^*}{(n-j)+j\underline{\mu}} = \frac{n-j}{(n-j)+j\theta_*},$$

donc l'assertion (i) est prouvée.
De la même façon on obtient (ii). □

Chapitre 2

Calcul séquentiel de fiabilité

Calculer la fiabilité du système en énumérant toutes les séquences de pannes possibles (les "scénarios catastrophe") est une méthode naturelle très utilisée dans les situations pratiques. Mais il est clair que, pour les grands systèmes, d'une part le nombre de trajectoires est très grand, d'autre part, l'évaluation des lois de chaque trajectoire alourdit fortement les calculs. Le but de ce chapitre est de proposer une méthode permettant de réduire sensiblement la lourdeur de ces calculs. Pour une trajectoire fixée, la loi du temps de parcours de la trajectoire est une somme de variables exponentielles de paramètres assez proches (de l'ordre de grandeur du taux de réparation) sauf pour létat qui ne concerne que des taux de dégradation. En remplaçant la loi de la somme des variables exponentielles de paramètres distincts (mais voisins) par une somme de variables exponentielles de même paramètre (loi d'ERLANG) nous évitons la partie "calcul de convolutions". Il est tentant de prendre comme paramètre, le paramètre moyen mais nous montrons que la moyenne arithmétique n'est pas la plus pertinente. Les principaux résultats, ainsi que leur application en fiabilité sont nouveaux.

Avant d'en venir à ces approximations, rappelons la formulation matricielle de la méthode des trajectoires.

2.1 Écriture matricielle

Nous voulons ici représenter matriciellement la distribution de T. Pour cela, quelques notations sont nécessaires. Ainsi, notons :

$J_+ := \{j \in J \ : \ e_j \in E^+\}$, $J_a := \{j \in J \ : \ e_j \in E_a^-\}$, $J' = J_+ \cup J_a$.

Supposons card $J' = l$. Ensuite : C désigne une matrice colonne d'ordre l avec les coefficients suivants :

$$c_j = \begin{cases} 0 & si\ j \in J_+ \\ 1 & si\ j \in J_a \end{cases}$$

Nous avons remarqué que les coefficients des puissances de Q représentent les sommes des probabilités des trajectoires de longueur égale á l'exposant de Q. C'est cette propriété que nous exploiterons pour donner une formule matricielle pour la fonction de répartition F_T.

Ainsi, définissons la *matrice fonctionnelle* $H = (h_{jj'})_{(j,j')\in J'\times J'}$, où :

$$h_{jj'} = \begin{cases} q_{jj'}F_{e_j} & si\ j \in J_+ \\ 0 & si\ j \in J_a \end{cases}$$

Rappelons que F_{e_j} est la fonction de répartition du temps de séjour dans l'état e_j. Considérons les *puissances de convolution* de H :

$$H^{*m} = (h_{jj'}^{(m)})\ ;\ \ h_{jj'}^{(m)} := \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{m-1})\in J'^{(m-1)}} h_{jj_1} * h_{j_1j_2} * \ldots * h_{j_{m-1}j'},\ \forall m \geq 1$$

Ici le symbole $*$ désigne la convolution des distributions. Soient F et G deux distributions, on a :

$$F * G(t) = \int_0^t F(t-u)dG(u) \tag{2.1}$$

Alors, en utilisant la relation (1.7), la définition du vecteur C et la linéarité du produit de convolution, on déduit une formule matricielle pour F_T.

Théorème 2.1.1 *La fonction de répartition du durée de vie T du système S peut s'écrire de la façon suivante :*

$$F_T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j\in J_a} h_{0j}^{(m)} = p^{(0)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} H^{*m} \cdot C,$$

donc la fiabilité de S est donnée par

$$R_T = 1 - p^{(0)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} H^{*m} \cdot C. \tag{2.2}$$

Cette relation traduit matriciellement le calcul de fiabilité par la méthode des trajectoires.

2.2 Approximation par des distributions d'Erlang

La relation (1.7) décrit la fonction de répartition de la durée de vie T du système à partir des fonctions de répartition des variables aléatoires T_γ, $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a$. D'autre part, la relation (1.6) montre que la fonction F_{T_γ} est une convolution de lois exponentielles.

Ainsi la fiabilité peut être calculée à partir d'une somme de convolutions d'exponentielles. Mais pratiquement les calculs sont très longs. Deux causes expliquent cette difficulté. D'une part le nombre des séquences est très grand, d'autre part la convolution d'un grand nombre d'exponentielles prend beaucoup de temps machine. Pour le premier problème il faut limiter les longueurs des séquences et pour le second nous proposons une approximation plus efficace que celles habituellement utilisées. Nous proposons une majoration raisonnable des distributions F_{T_γ} par des distributions d'ERLANG ce qui permet un calcul pessimiste de la durée de vie du système. En fait notre étude a un caractère plus général et répond au problème du choix des meilleures bornes de type ERLANG pour des sommes de variables aléatoires exponentielles indépendantes. La comparaison est faite par rapport aux ordres usuels : en moyenne, stochastique, taux de défaillance et rapport de vraisemblance.

2.2.1 Notations; résultats envisagés

Nous nous plaons dans un cadre plus général que la théorie de la fiabilité car les résultats obtenus sont intéressants en eux-mêmes. Considérons des variables aléatoires exponentielles indépendantes $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ avec les paramètres a_i et b_i. Les distributions de X_i et Y_i sont données par :

$$\mathbb{P}(X_i > t) = e^{-a_i t} \qquad \mathbb{P}(Y_i > t) = e^{-b_i t}.$$

Notre but est de comparer les deux sommes de n variables X_i d'une part et Y_i d'autre part. Cette comparaison n'est pas seulement faite sur les fonctions de répartition mais aussi pour les ordres stochastiques les plus usuels. Même si l'on quitte ainsi les applications directes en fiabilité, les résultats obtenus sont suffisamment plaisants pour être écrits en termes plus généraux. Notons :

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) := \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad T_n(b_1,\ldots,b_n) := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Soit $b_1 = \ldots = b_n = b$. Il est connu que si l'on choisit $b = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ alors on a (voir SHAKED, SHANTHIKUMAR) :

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{(\cdot)} T_n(b,\ldots,b), \tag{2.3}$$

où $\geq^{(\cdot)}$ désigne les ordres usuels :
l'ordre en moyenne, $\geq^{mn}$, *l'ordre stochastique ,* $\geq^{st}$, *l'ordre d'après le taux de défaillance* $\geq^{hr}$ *et l'ordre d'après le rapport de vraisemblance,* $\geq^{lr}$ (voir définitions ci-après). Nous nous proposons de trouver le meilleur paramètre $b > 0$ dans la relation

(2.3). Il se trouve qu'en améliorant des résultats anciens (voir Barlow, Proschan ou Boland) nous arrivons à associer aux ordres classiques, des moyennes classiques des nombres $a_1,a_2,\ldots,a_n$:

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{mn} T_n(b,\ldots,b) \quad \Leftrightarrow \quad b \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}};$$

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{st} T_n(b,\ldots,b) \quad \Leftrightarrow \quad b \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n};$$

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{hr} T_n(b,\ldots,b) \quad \Leftrightarrow \quad b \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n};$$

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{lr} T_n(b,\ldots,b) \quad \Leftrightarrow \quad b \geq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

En fait, nous prouvons que l'inégalité $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{hr} (\geq^{st}) T_n(b_1,\ldots,b_n)$ est vérifiée sous des conditions plus faibles que la *majoration* au sens de BOLAND et al. (1994). Mais la situation est différente pour l'ordre plus fort $\geq^{lr}$.

2.2.2 Comparaisons stochastiques

Rappelons d'abord la signification des ordres usuels dont on vient de parler. Dans les applications pratiques que nous envisageons, nous utiliserons l'ordre stochastique dans le calcul de la fiabilité par la méthode des trajectoires.

Définition *Soient X,Y deux variables aléatoires positives, absolument continues, avec respectivement pour les fonctions de distribution F_X, F_Y et pour les densités f_X,f_Y. Alors on définit les ordres partiels suivants, lorsque les expressions ont un sens:*

$$X \geq^{mn} Y \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \overline{F}_X(t)dt \geq \int_0^\infty \overline{F}_Y(t)dt = \mathbb{E}(Y);$$

$$X \geq^{st} Y \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F}_X(t) \geq \overline{F}_Y(t),\ \forall\ t \geq 0;$$

$$X \geq^{hr} Y \quad \Leftrightarrow \quad h_X(t) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} \leq \frac{f_Y(t)}{\overline{F}_Y(t)} = h_Y(t),\ \forall\ t > 0;$$

$$X \geq^{lr} Y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f_X(t)}{f_Y(t)} \textit{ est une fonction non décroissante.}$$

Ici $\overline{F}$ désigne la fonction de survie $\overline{F} = 1 - F$. Ces ordres sont utilisés habituellement pour comparer des durées de vie. Rappelons les implications classiques:

$$\geq^{lr} \Rightarrow \geq^{hr} \Rightarrow \geq^{st} \Rightarrow \geq^{mn}.$$

On peut trouver les détails concernant ces différentes notions et leur utilisation dans les travaux de ROSS (1983), SHAKED et SHANTHIKUMAR (1994) ou SZEKLI (1995). Pour la variable aléatoire $S_n(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^n X_i$, notons:

$F_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)$ – la *fonction de répartition*,
$f_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)$ – la *densité* ,
$h_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)$ – le *taux de défaillance*.

Nous employons des notations similaires pour $T_n(b_1,\ldots,b_n) = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Supposons que l'inégalité (2.3) est vérifiée par un ordre (fixé). Nous désirons caractériser le paramètre b. Il est intéressant d'analyser la situation au voisinage de l'origine.

Lemme 2.2.1 *Les assertions suivantes sont vérifiées:*

$$F_{(a_1,\ldots,a_n)}(t) = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{n!} t^n + o(t^n), \quad t \to 0,\ t > 0\ ; \tag{2.4}$$

$$\frac{f'_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)}{f_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)} = \frac{n-1}{t} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} + o(1), \quad t \to 0,\ t > 0. \tag{2.5}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant l'expression classique de $F_{(a_1,\ldots,a_n)}$ (cf. GNEDENKO et al. (1969), pp. 289), nous savons qu'il existe une fonction analytique $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$, telle que

$$F_{(a_1,\ldots,a_n)}(t) = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n!}t^n - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{(n+1)!}t^{n+1} + \theta(t)t^{n+2}\right), \quad t \geq 0.$$

De cette relation, un calcul élémentaire donne les résultats désirés. □

Dans la suite nous avons besoin du résultat suivant concernant la conservation de l'ordre $\geq^{hr}$.

Lemme 2.2.2 *Soient les entiers positifs $k < n$ et les réels positifs $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$. Si $h_{(a_1,\ldots,a_k)} \leq h_{(b_1,\ldots,b_k)}$ et $a_i \leq b_i \ \forall\ i > k$, alors $h_{(a_1,\ldots,a_n)} \leq h_{(b_1,\ldots,b_n)}$.*

DÉMONSTRATION. Puisque la convolution des distributions exponentielles a un taux de défaillance croissant (cf. Théorème 4.2 de BARLOW et PROSCHAN, 1975), l'assertion est donné par le Lemme 3.9 de SHANTHIKUMAR et YAO (1991), p. 649. □

Utilisant le même type de concept que la *majoration* de SCHUR (notée par $\geq^m$), définissons un nouveau préordre sur $\mathbb{R}_+^n$. Soient $a_{[1]} \leq \ldots \leq a_{[n]}$ les composantes ordonnées du vecteur $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ (avec des notations similaires pour $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^n$).

Rappelons que $\mathbf{a} \geq^m \mathbf{b}$ signifie $\sum_{i=1}^n a_{[i]} = \sum_{i=1}^n b_{[i]}$ et, pour $1 \leq k < n$, $\sum_{i=1}^k a_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k b_{[i]}$ (cf. MARSHALL et OLKIN (1979)).

Définition *Nous disons que le vecteur* $\mathbf{a}$ *est* $p-$*plus grand par comparaison avec le vecteur* $\mathbf{b}$, *et nous écrivons* $\mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}$, *si l'assertion suivante est vérifiée:*

$$\mathbf{a} \geq^p \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{k} a_{[i]} \leq \prod_{i=1}^{k} b_{[i]},\ k = 1,\ldots,n.$$

Remarque Signalons que, contrairement à la *majoration* de SCHUR, l'égalité n'est pas supposée pour $k = n$. Nous pouvons vérifier $\mathbf{a} \geq^m \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}$, donc la relation $\geq^p$ est plus faible que $\geq^m$. De plus, en écrivant $\log \mathbf{a}$ pour le vecteur des logarithmes des composantes de $\mathbf{a}$, nous avons

$$\log \mathbf{a} \geq^m \log \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}.$$

Le lemme suivant donne une equivalence dans le cas particulier $n = 2$.

Lemme 2.2.3 *Pour tous* $a_1,a_2,b_1,b_2 > 0$, *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $S_2(a_1,a_2) \geq^{hr} S_2(b_1,b_2)$;

(ii) $S_2(a_1,a_2) \geq^{st} S_2(b_1,b_2)$;

(iii) $(a_1,a_2) \geq^p (b_1,b_2)$.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer les termes ordonnés $a_{[i]} = a_i$, $b_{[i]} = b_i$, $i = 1,2$.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est classique.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. D'après le LEMME 2.2.1 nous obtenons

$$\overline{F}_{(a_1,a_2)}(t) - \overline{F}_{(b_1,b_2)}(t) = \frac{b_1b_2 - a_1a_2}{2}t^2 + o(t^2), \text{ pour } t \to 0.$$

Il suit $b_1b_2 - a_1a_2 \geq 0$. On observe que, si on suppose $a_1 > b_1$, alors:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}_{(a_1,a_2)}(t)}{\overline{F}_{(b_1,b_2)}(t)} = 0.$$

On a donc $a_1 \leq b_1$ et $a_1a_2 \leq b_1b_2$. Par conséquent l'assertion (iii) est vérifiée.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Pour la preuve nous devons envisager deux cas.

a) 1^{er} *cas* : $b_1 \geq \sqrt{a_1a_2}$.

Si $a_1 = a_2$ alors $a_i \leq b_i$, $i = 1,2$ et nous employons le LEMME 2.2.2 pour obtenir

$$h_{(a_1,a_2)} \leq h_{(b_1,b_2)}.$$

Si $a_1 < a_2$, alors $h_{(a_1,a_2)}(t) = a_1a_2\frac{e^{(a_2-a_1)t}-1}{a_2e^{(a_2-a_1)t}-a_1}$ et $h_{(\sqrt{a_1a_2},\sqrt{a_1a_2})}(t) = a_1a_2\frac{t}{1+t\sqrt{a_1a_2}}$.

Pour finir, en référant toujours au LEMME 2.2.2, nous devons prouver que, pour tout $t > 0$,

$$h_{(a_1,a_2)}(t) \leq h_{(\sqrt{a_1a_2},\sqrt{a_1a_2})}(t).$$

Cette inégalité se résume en $\phi(t) \geq 0, \forall\, t > 0$, où ϕ est défini par :

$$\phi(t) = 1 + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\left[e^{(a_2-a_1)t} - 1\right] - \frac{e^{(a_2-a_1)t}-1}{(a_2-a_1)t}.$$

D'après le développement en série entière, on peut déduire que la fonction définie par :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})(a_2-a_1)^k}{(k+1)!} t^k$$

est positive pour tout $t > 0$.

b) $2^{\text{ème}}$ *cas* : $b_1 < \sqrt{a_1 a_2}$.

Sous l'hypothèse ci-dessus, nous obtenons $a_1 \leq b_1 < \sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 a_2}{b_1} \leq \min\{a_2, b_2\}$. Alors, clairement $h_{(b_1, \frac{a_1 a_2}{b_1})} \leq h_{(b_1,b_2)}$, et l'inégalité suivante s'avère être une condition suffisante pour l'assertion (i) :

$$h_{(a_1,a_2)}(t) \leq h_{(b_1, \frac{a_1 a_2}{b_1})}(t), \quad \forall\, t > 0 \tag{2.6}$$

Notons $r = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$, $q = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{b_1}$. Alors $r > q > 1$ et nous pouvons réécrire la relation (2.6) comme :

$$\frac{e^{\sqrt{a_1 a_2}(r-\frac{1}{r})t} - 1}{re^{\sqrt{a_1 a_2}(r-\frac{1}{r})t} - \frac{1}{r}} \leq \frac{e^{\sqrt{a_1 a_2}(q-\frac{1}{q})t} - 1}{qe^{\sqrt{a_1 a_2}(q-\frac{1}{q})t} - \frac{1}{q}}, \quad \forall\, t > 0$$

Maintenant il suffit de montrer que la fonction $\Phi_u(x) := \frac{xe^{u(x-1/x)} - 1/x}{e^{u(x-1/x)} - 1}$ est croissante de x sur $(1,\infty)$, pour chaque nombre positif u, fixé. Si nous notons $y = u(x - 1/x)$, alors nous avons $y > 0$ et $\Phi_u(x) = x + \frac{y}{u(e^y-1)}$. Après dérivation, nous obtenons : $\Phi'_u(x) = 1 - (1 + 1/x^2)\frac{e^y(e^{-y}-1+y)}{(e^y-1)^2}$. Mais $e^{-y} - 1 + y > 0$ and $1 + \frac{1}{x^2} < 2$ donne $\Phi'_u(x) > 1 - 2\frac{e^y(e^{-y}-1+y)}{(e^y-1)^2} = \frac{e^{2y}-2ye^y-1}{(e^y-1)^2}$, $\forall\, u > 0, \forall\, x > 1$. On conclut grâce à l'inégalité $e^{2y} - 2ye^y - 1 > 0, \forall\, y > 0$ (voir BOLAND et al. (1994), pp. 159). □

2.2.3 Encadrement par des lois d'Erlang

Nous sommes maintenant en mesure de présenter les principaux résultats de ce chapitre. Le premier théorème est une extension naturelle du LEMME 2.2.3.

Théorème 2.2.1 *Soient* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *avec des composantes positives. Nous avons les implications suivantes :*

1) si $\mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}$, *alors* $S_n(a_1, \ldots, a_n) \geq^{hr} T_n(b_1, \ldots, b_n)$.

2) si $\mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}$, *alors* $S_n(a_1, \ldots, a_n) \geq^{st} T_n(b_1, \ldots, b_n)$.

De plus, de faon réciproque, si $S_n(a_1, \ldots, a_n) \geq^{st} T_n(b_1, \ldots, b_n)$, *ou si* $S_n(a_1, \ldots, a_n) \geq^{hr} T_n(b_1, \ldots, b_n)$, *alors* $a_{[1]} \leq b_{[1]}$ *et* $a_1 a_2 \ldots a_n \leq b_1 b_2 \ldots b_n$.

DÉMONSTRATION. Nous pouvons supposer $a_{[i]} = a_i$ et $b_{[i]} = b_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Preuve de l'assertion 1). Supposons $\mathbf{a} \geq^p \mathbf{b}$ (i.e., $\prod_{i=1}^k a_i \leq \prod_{i=1}^k b_i$, $k = 1,\ldots,n$). Il suffit de montrer $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{hr} T_n(b_1,\ldots,b_n)$. La démonstration est faite par récurrence. Ainsi, l'assertion est claire pour $n = 1$. Pour $n = 2$, l'inégalité suit d'après le LEMME 2.2.3. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $n-1$, avec $n \geq 3$. En vue de la prouver pour n, nous analysons deux situations.

a) 1^{er} *cas* : $b_1 < a_n$.

Comme $a_1 \leq b_1$, il existe un indice $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $a_k \leq b_1 < a_{k+1}$. Ce qui donne aussi $a_k < \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{b_1}$. Nous en déduisons

$$(a_k, a_{k+1}) \geq^p (b_1, \frac{a_k a_{k+1}}{b_1})$$

et aussi

$$(a_1,\ldots,a_{k-1}, \frac{a_k a_{k+1}}{b_1}, a_{k+2},\ldots,a_n) \geq^p (b_2,\ldots,b_k,b_{k+1},\ldots,b_n).$$

D'après les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 et l'hypothèse de récurrence, nous obtenons:

$$h_{\mathbf{a}} \leq h_{(a_1,\ldots,a_{k-1},b_1,\frac{a_k a_{k+1}}{b_1},a_{k+2},\ldots,a_n)} \leq h_{\mathbf{b}},$$

d'où

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{hr} (\text{et aussi } \geq^{st}) T_n(b_1,\ldots,b_n).$$

b) $2^{\text{ème}}$ *cas* : $b_1 \geq a_n$.

Dans cette situation $a_i \leq b_i$, $i = 1,\ldots,n$, et nous pouvons utiliser directement le LEMME 2.2.2.

Preuve de l'assertion 2). Supposons l'inégalité $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{st} T_n(b_1,\ldots,b_n)$. Alors, d'après le LEMME 2.2.1, on a:

$$\frac{\prod_{i=1}^n b_i - \prod_{i=1}^n a_i}{n!} = \lim_{t\to 0;\ t>0} \frac{F_{(b_1,\ldots,b_n)}(t) - F_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)}{t^n} \geq 0.$$

Il suit $\prod_{i=1}^n a_i \leq \prod_{i=1}^n b_i$. En supposant que les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont toutes leurs composantes distinctes, nous avons:

$$\frac{\overline{F}_{\mathbf{a}}(t)}{\overline{F}_{\mathbf{b}}(t)} = e^{(b_1-a_1)t} \frac{\prod_{i\neq 1} \frac{a_i}{a_i-a_1} + \sum_{k=2}^n e^{-(a_k-a_1)t} \prod_{i\neq k} \frac{a_i}{a_i-a_k}}{\prod_{i\neq 1} \frac{b_i}{b_i-b_1} + \sum_{k=2}^n e^{-(b_k-b_1)t} \prod_{i\neq k} \frac{b_i}{b_i-b_k}}, \quad t > 0$$

(voir, par exemple, GNEDENKO et al. (1969), p. 288).

Puisque $\frac{\overline{F}_{\mathbf{a}}(t)}{\overline{F}_{\mathbf{b}}(t)} \geq 1$, $\forall\, t > 0$, et $a_i - a_1 > 0$, $b_i - b_1 > 0$, $\forall\, i = 2,\ldots,n$, nous avons, pour $a_1 > b_1$, $\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}_{\mathbf{a}}(t)}{\overline{F}_{\mathbf{b}}(t)} = 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi, nous trouvons $a_1 \leq b_1$.

Si certaines composantes de **a** (ou **b**) sont égales, nous obtenons la même conclusion en passant à la limite. □

Corollaire 2.2.1 $T_n(b,\ldots,b) \geq^{st} (\geq^{hr}, \geq^{lr}) S_n(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow b \leq a_{[1]}$

Maintenant nous pouvons donner, pour chaque ordre usuel, l'ensemble des valeurs de b, pour lesquelles l'inégalité (2.3) est vraie. Nous complétons ainsi certains résultats existant dans la littérature (voir en particulier BOLAND ET AL.. Nous montrons qu'il existe des liens forts entre les différents ordres stochastiques et les différentes notions de moyenne.

Théorème 2.2.2 *Soit le vecteur* $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ *ayant des composantes positives et le réel positif* b. *Alors :*

(*i*) $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{mn} T_n(b,\ldots,b)$ *si et seulement si* $b \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$;

(*ii*) $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{st} T_n(b,\ldots,b)$ *si et seulement si* $b \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$;

(*iii*) $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{hr} T_n(b,\ldots,b)$ *si et seulement si* $b \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$;

(*iv*) $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{lr} T_n(b,\ldots,b)$ *si et seulement si* $b \geq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

DÉMONSTRATION. Bien sûr la première équivalence est immédiate puisque le paramètre de l'exponentielle est l'inverse de sa moyenne. D'après le THÉORÈME 2.2.1 nous obtenons les relations (ii) et (iii). La relation (iv) est montrée par l'absurde. Supposons $0 < b < \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. Alors la relation (2.5) donne :

$$\frac{f'_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)}{f_{(a_1,\ldots,a_n)}(t)} - \frac{f'_{(b_1,\ldots,b_n)}(t)}{f_{(b_1,\ldots,b_n)}(t)} = b - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} + o(1),\ t \to 0,\ t > 0.$$

Par conséquent $\left(\frac{f_{(a_1,\ldots,a_n)}}{f_{(b_1,\ldots,b_n)}}\right)'$ est une fonction négative au voisinage de l'origine. Donc la relation $S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{lr} T_n(b,\ldots,b)$ n'est pas vraie. Alors :

$$S_n(a_1,\ldots,a_n) \geq^{lr} T_n(b,\ldots,b) \Rightarrow b \geq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

L'implication réciproque peut être déduite de l'article de BOLAND et al. (1994). □

Le théorème ci-dessus résume la liaison entre les ordres stochastiques pour les sommes de variables et les moyennes classiques de leurs paramètres. Pour illustrer cette situation, donnons une application directe du théorème. Notons $E_{(n;b)}$ la distribution

de $T_n(b,\ldots,b)$ qui est de type ERLANG-n de paramètre b. Sa densité est donnée, pour $t \geq 0$ par :

$$f_{(n;b)}(t) = \frac{b^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-bt}$$

D'après le théorème nous obtenons :

$$E_{(n;a_{[1]})} \leq^{st} F_{\mathbf{a}} \leq^{st} E_{(n;\sqrt[n]{\prod a_i})}$$

Cet encadrement indique en fait les meilleures bornes de type ERLANG-n pour la distribution $F_{\mathbf{a}}$ de $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Par conséquent nous pouvons dire que l'approximation de $F_{\mathbf{a}}$ par une distribution de type $E_{(n;b)}$ n'est raisonnable que si $b \in [a_{[1]}, \sqrt[n]{\prod a_i}]$.

EXEMPLE Soit $\mathbf{a} = (2,6,18)$. Alors $a_{[1]} = 2$, $\sqrt[3]{\prod a_i} = 6$ et $\frac{\sum a_i}{3} = \frac{26}{3}$.

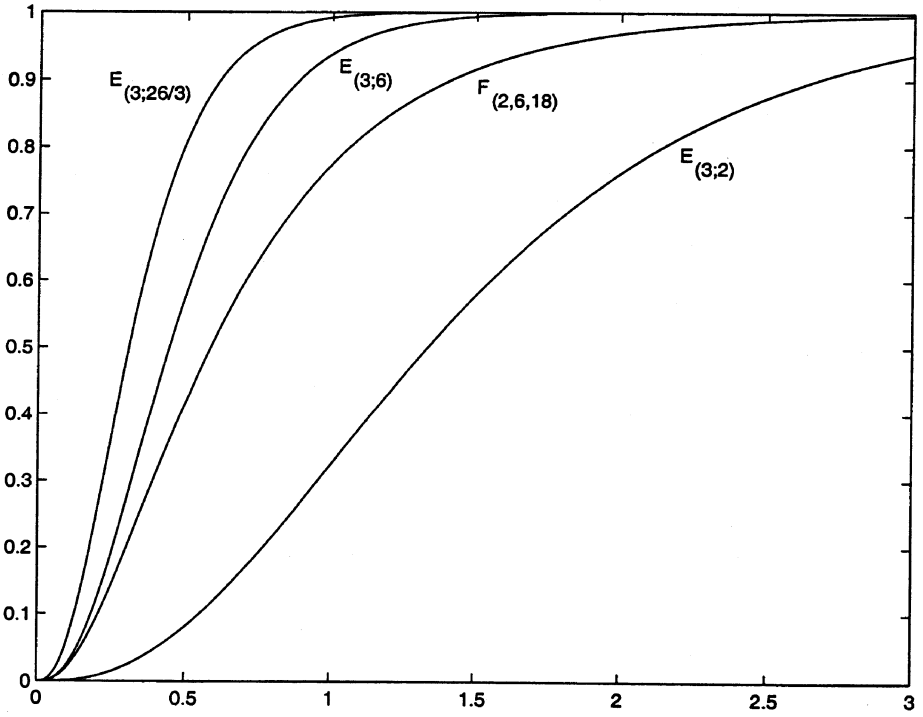

Figure 2.1 *Le meilleur encadrement de la convolution des trois variables exponentielles de paramètres respectifs (2,6,18) par des distributions* ERLANG *et la comparaison avec la loi d'*ERLANG *obtenue avec la moyenne arithmetique des paramètres.*

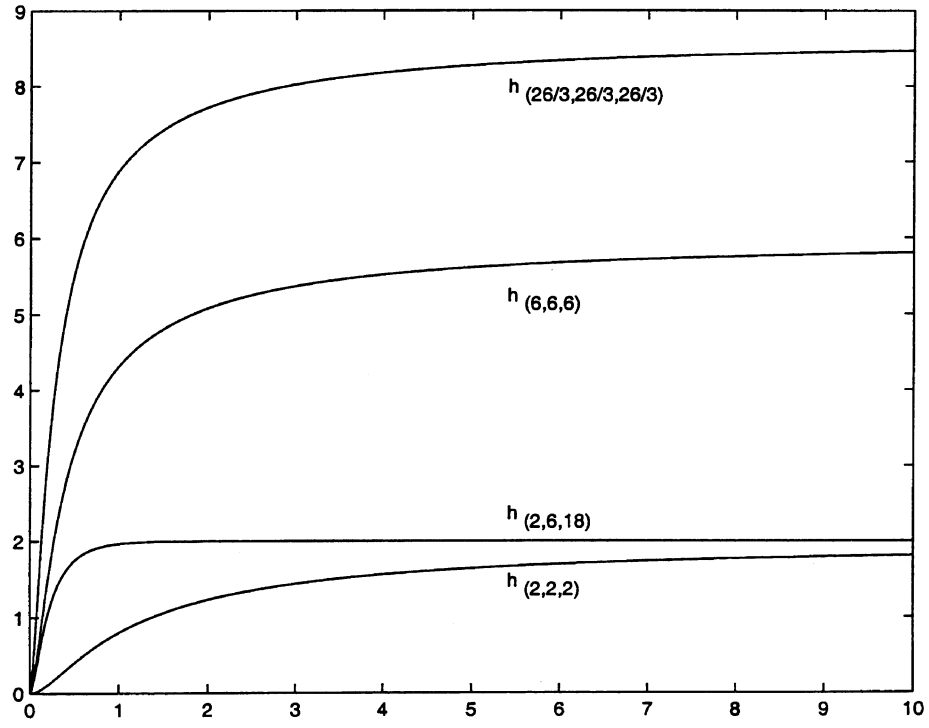

Figure 2.2 *La même comparaison en termes de taux de défaillance.*

Remarque En relation avec la preuve du THÉORÈME 2.2.1, nous observons que l'allure du comportement est donnée par la borne supérieure et l'allure du comportement au voisinage de l'origine est celle de la borne inférieure. On peut voir clairement ce phénomène dans la Figure 2.2. Au voisinage de l'origine la meilleure approximation est $h_{6,6,6}$. Au contraire, la meilleure approximation au voisinage de l'infini est $h_{2,2,2}$.

2.2.4 Comparaison avec l'approximation de Barlow - Marshall

Un problème plus général est l'approximation de la somme des variables aléatoires exponentielles par une distribution quelconque facile à calculer. Il est possible d'employer une approche plus globale. En effet, la somme des variables aléatoires exponentielles a un taux de défaillance croissant (IFR). On peut alors utiliser les nombreux résultats concernant l'analyse des distributions vieillissantes. Parmi ceux-ci nous privilégierons les approximations de BARLOW-MARSHALL (1965) qui donnent un encadrement fin de ces distributions. Il est intéressant de comparer nos résultats à ces résultats plus anciens. La figure suivante illustre cette comparaison. En trait continu, on a l'encadrement de BARLOW- MARSHALL, avec la borne supérieure (UP) et la borne inférieure (LB). Les paramètres ont été choisis pour faire apparaître les qualités respectives des deux approches. Dans les applications, les paramètres de défaillance

sont très petits et de même ordre. Dans ce cas, l'approximation par distribution ERLANG est nettement meilleure. Mais pour des valeurs plus grandes de t, c'est l'approximation IFR qui s'avère la plus fine.

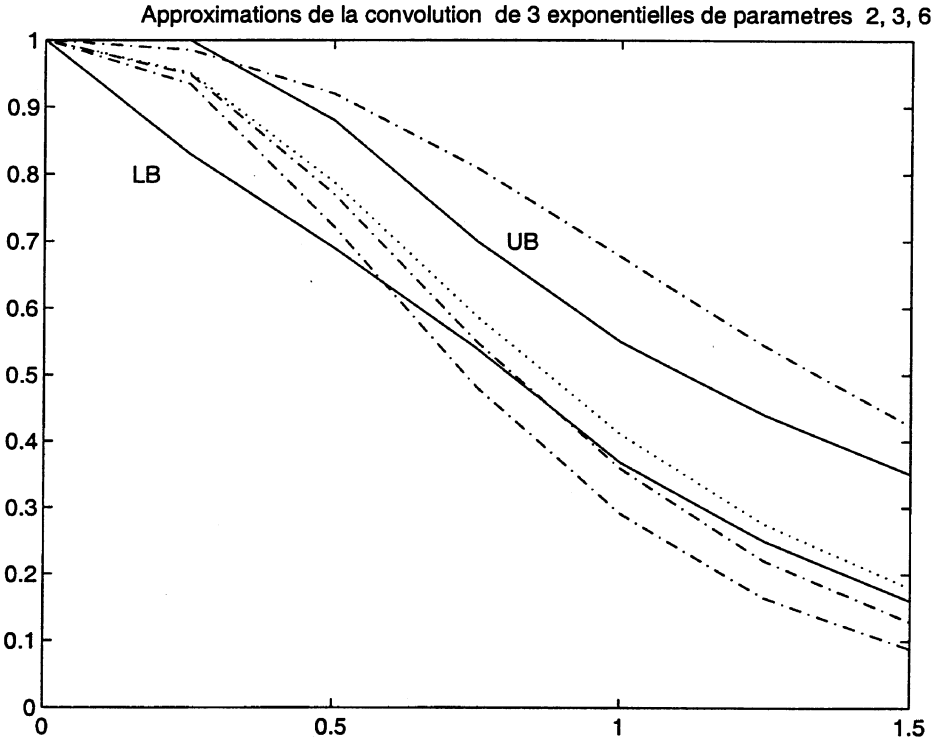

Figure 2.3 *Comparaison avec les approximations de Barlow - Marshall*
Dans la figure ci-dessus, la fonction de survie exacte est tracée avec des points "..", les trois fonctions de survie d'ERLANG sont en pointillés "-.", et l'encadrement de BARLOW-MARSHALL est en trait continu (UB et LB).

2.3 Utilisation pratique

En pratique, l'approximation des convolutions des variables aléatoires avec des distributions de type ERLANG peut servir au calcul séquentiel de la fiabilité, à partir des relations (1.5) et (1.6). Cela demande une investigation des séquences de panne $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a$. Nous avons déjà vu que le temps de séjour T_γ passé sur la trajectoire γ, est la convolution des temps de séjour dans les états consécutifs de la trajectoire avant absorption. Donc il s'agit d'une convolution de lois exponentielles ayant comme paramètres les taux des états. Puisque les taux des états de fonctionnement, sauf l'état initial, ne sont pas trés éloignés, il est raisonnable d'approcher une somme de temps de séjours passés dans ces états par une somme de temps de séjours identiques (en loi) de paramètre la moyenne géometrique des paramètres. Ainsi, par l'énumeration

des séquences, on arrive (d'après (1.5)) à une évaluation pessimiste de la fiabilité du système. Les simulations numériques qui suivent, montrent la validité de cette approche.

Enfin, nous allons mentionner une autre idée d'approximation séquentielle de la fiabilité, à partir d'une propriété de convexité des lois d'ERLANG de même ordre.

Proposition 2.3.1 *Soit* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *et* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *deux vecteurs avec des composantes positives, telles que* $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. *Pour tout entier positif* m, *on a l'inégalité:*

$$p_1 E_{(m,a_1)} + p_2 E_{(m,a_2)} + \ldots + p_k E_{(m,a_k)} \leq^{st} E_{(m,\widetilde{a})} \tag{2.7}$$

où $\widetilde{a} = (p_1 a_1^m + p_2 a_2^m + \ldots + p_k a_k^m)^{\frac{1}{m}}$.

DÉMONSTRATION. Soit $t > 0$, fixé. Pour prouver que l'inégalité (2.7) est vérifiée en t, il suffit de montrer que la fonction de répartition $E_{(m,a^{\frac{1}{m}})}(t)$ considérée comme fonction f de a de $(0,\infty) \to (0,\infty)$, est concave sur l'intervalle $(0,\infty)$. Nous avons $f'(a) = \frac{t^m}{m!} e^{-ta^{\frac{1}{m}}}$ et $f''(a) = -\frac{t^{m+1}}{m!\,m} a^{\frac{1-m}{m}} e^{-ta^{\frac{1}{m}}}$. Alors, puisque $f'' < 0$ sur $(0,\infty)$, la propriété de l'énoncé est prouvée. □

En employant la propriété ci-dessus nous pouvons obtenir (à partir des relations (1.6) et (1.7)) une majoration de la fonction de répartition F_T de la durée de vie du système par la somme d'une série de fonctions de répartitions de type ERLANG-m, $m = 1,2,\ldots$.
Le procédé consiste à regrouper les séquences de même longueur.

Ainsi, notons $\pi_m = \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a;\ l(\gamma)=m} p_\gamma$ la probabilité des séquences de panne de longueur m, $m = 1,2,\ldots$. Pour chaque $\gamma \in \Gamma_0^a$, soit g_γ la moyenne géometrique des taux des temps de séjour dans les états de γ. Alors nous avons la majoration suivante:

$$F_T \leq \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a} p_\gamma E_{(l(\gamma),g_\gamma)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \pi_m E_{(m,a(m))}.$$

où

$$a(m) = \left(\sum_{\gamma : l(\gamma)=m} \frac{p_\gamma}{\pi_m} (g_\gamma)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

On observe facilement qu'on peut déterminer les paramètres des lois d'ERLANG de la somme ci-dessus par un calcul matriciel. La Figure 2.6 ci-après permet d'illustrer l'efficacité de l'approximation en termes de fiabilité .

Exemples numériques

Supposons un système réparable avec 15 composants, dont les dégradations ont des taux proches de $\lambda = 0.01$. Soit $\gamma = (e_0,e_1,\ldots,e_5,e_6)$, $\in \Gamma_0^a$ une trajectoire de panne telle que $e_i \in E^+$, $i = 0,\ldots,5$, et $e_6 \in E_a^-$. Supposons que la succession des états de y suit la succession suivante d'événements :

$e_0 \rightarrow e_1$: dégradation du composant $c^{(1)}$ (taux de réparation $\mu_1 = 10$);
$e_1 \rightarrow e_2$: dégradation du composant $c^{(2)}$ (taux de réparation $\mu_2 = 2$);
$e_2 \rightarrow e_3$: réparation du composant $c^{(1)}$ (taux de réparation $\mu_1 = 10$);
$e_3 \rightarrow e_4$: dégradation du composant $c^{(3)}$ (taux de réparation $\mu_3 = 1$);
$e_4 \rightarrow e_5$: dégradation du composant $c^{(4)}$ (taux de réparation $\mu_4 = 1.7$);
$e_5 \rightarrow e_6$: dégradation du composant $c^{(5)}$;

Notons T_i le temps de séjour passé dans l'état e_i et $T_\gamma = \sum_{i=1}^{6} T_i$ le temps passé sur la trajectoire γ. Soit U et V des variables aléatoires (indépendantes de T_0) de type ERLANG-5, de paramètres égaux respectivement à la moyenne géométrique et à la moyenne arithmétique des paramètres des v. a. $T_1,\ldots,T_5$.

Notons $T_\gamma^{(g)} = T_0 + U$ et $T_\gamma^{(a)} = T_0 + V$. D'après le THÉORÈME 2.2.2 nous avons $T_\gamma \geq^{st} T_\gamma^{(g)} \geq^{st} T_\gamma^{(a)}$ Soient $F_\gamma, F_\gamma^{(g)}$ et respectivement $F_\gamma^{(a)}$ les fonctions de répartition associées, pour lesquelles l'inégalité ci-dessus devient :

$$F_\gamma \leq F_\gamma^{(g)} \leq F_\gamma^{(a)} \tag{2.8}$$

En fait, l'approximation de F_γ par $F_\gamma^{(g)}$ est raisonnable, même dans cet exemple où les taux ont été choisis pour faire apparaître l'écart. On remarquera la disparité des taux de défaillances qui pénalise la méthode. Plus précisement, nous avons une erreur relative plus petite que 0.165. Dans la réalité, nous avons plutôt des taux λ proches de 10^{-4}.

L'inégalité (2.8) est illustrée par les figures suivantes où les différents taux de défaillance des composants ont été simulés entre 0.008 et 0.012. La première donne en traits continus la "vraie" distribution. L'approximation avec la moyenne artihmétique est en pointillés et celle avec la moyenne géométrique est en tirets. La deuxième figure donne l'écart en valeur absolue de chacune des approximations avec la distribution exacte.

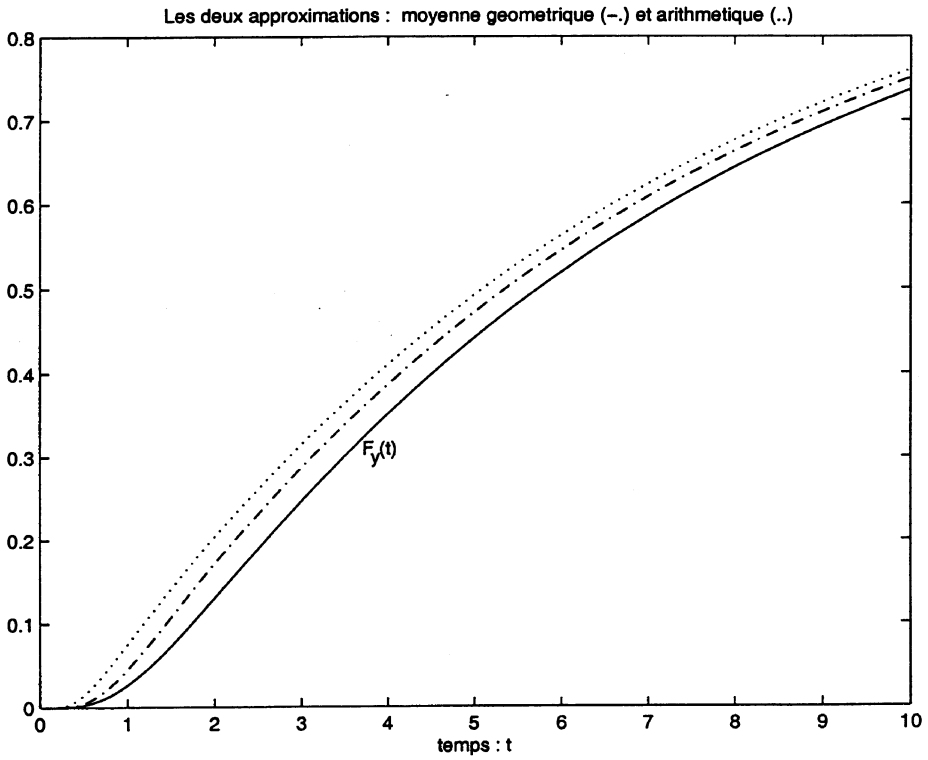

Figure 2.4 *Les graphes des fonctions* $F_\gamma, F_\gamma^{(g)}, F_\gamma^{(a)}$.

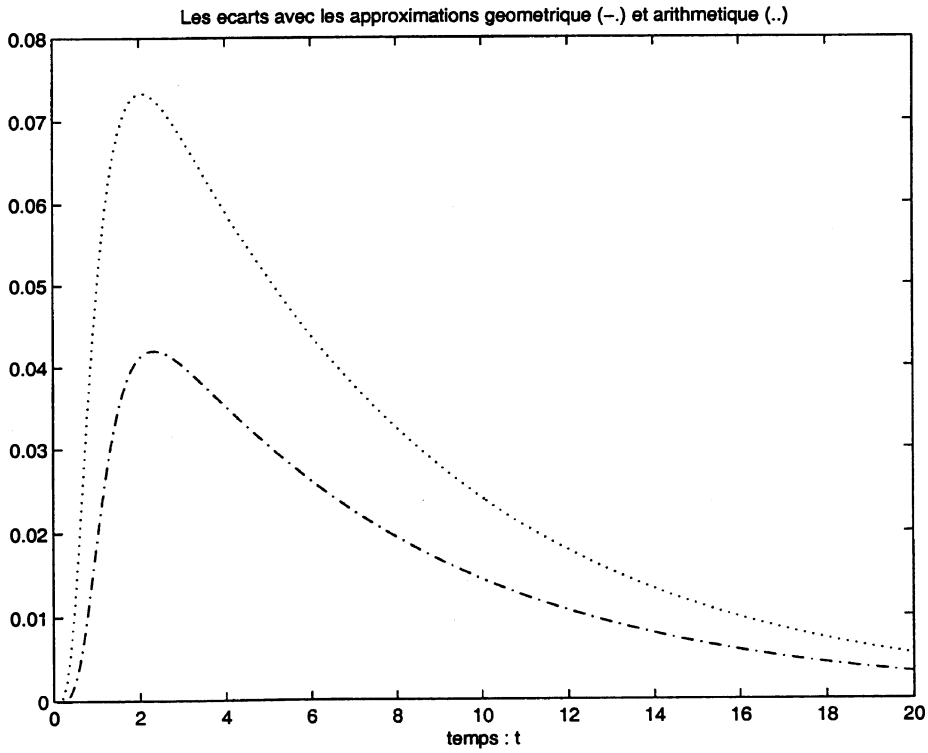

Figure 2.5 *Les graphes des fonctions* $F_\gamma^{(g)} - F_\gamma$ et $F_\gamma^{(a)} - F_\gamma$.

Dans le cas d'un systme de plusieurs composants, la méthode séquentielle consiste à énumérer toutes les trajectoires de panne et calculer pour chacune d'elle, la probabilité d'être parcourue en un temps t fixé. Regardons sur un exemple concret ce que donne la méthode d'approximation par les lois d'ERLANG.

La figure suivante représente la fiabilité d'un système k/n de 6 composants non identiques, en panne pour $k = 3$. Les taux de dégradations sont compris entre 0.05 et 0.09 et les taux de réparations entre 1 et 1.15. Dans les exemples réels, les écarts entre les taux de dégradation et de réparation sont, en général plus grands, ce qui améliore la qualité de notre approximation. Le calcul a été réalisé en séparant pour chaque séquence, le temps de séjour dans l'état initial, car il est assez nettement différent des temps de séjour dans tous les autres états. De plus les séquences n'ont pas pu être toutes énumérées mais on a privilégié les séquences à faible nombre de réparations (moins de quatre réparations par trajectoire). La comparaison n'est utile que pour des valeurs du temps comparables avec le temps moyen de vie du système.

La principale difficulté du programme *matlab* est d'ordre combinatoire lors de l'énumération des séquences mais le temps gagné par la suppression des calculs de convolution des distributions rend ce programme opérationnel.

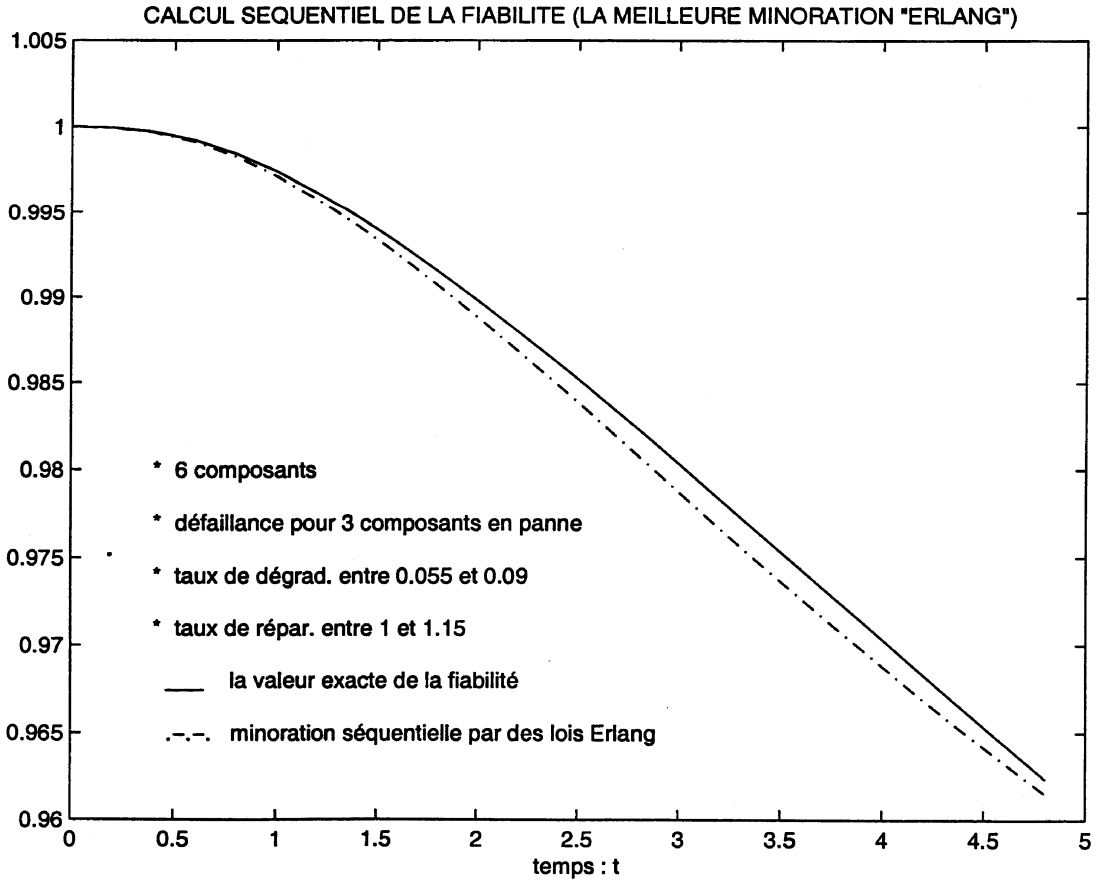

Figure 2.6 *Approximation séquentielle de la fiabilité.*

Chapitre 3

Calcul de fiabilité à partir des strates

Que ce soit pour la durée moyenne de bon fonctionnement ou pour la probabilité de défaillance, les formules exactes pour les indicateurs classiques de fiabilité du système que nous étudions sont souvent d'un intérêt pratique limité. On ne peut pas les utiliser pour les grands systèmes parce que le volume des calculs dépasse les possibilités habituelles des logiciels. C'est pourquoi nous souhaitons déterminer des approximations à partir de systèmes plus simples. C. COCOZZA-THIVENT et M. ROUSSIGNOL (1995) fournisent des encadrements à partir des méthodes de couplage. On retrouve ces préocupations dans le travail de C. COCOZZA-THIVENT et V. KALASHNIKOV qui contient une approximation du taux de défaillance à partir du taux de VÉSELY. Dans ce chapitre nous partons d'une approche séquentielle pour obtenir un encadrement simple du temps moyen de bon fonctionnement. Dans le cas des composants identiques on retrouve l'approximation classique du temps moyen. Cela permet d'utiliser l'approximation exponentielle pessimiste du "type SOLOVIEV" (voir SOLOVIEV (1990), BON, BRETAGNOLLE, PAMPHILE, RAOULT (1990-93), BON (1995), PAMPHILE (1994)). Dans une deuxième partie nous comparons la fiabilité du système à celle d'un système de type $k-sur-n$ (noté k/n)avec des composants identiques. Le but est de fournir un système k/n bien adapté à une évaluation pessimiste. Ceci nous permet de calculer de façon pessimiste la fiabilité sans avoir recours à l'approximation exponentielle.

3.1 Encadrement du temps moyen de vie

Dans cette première partie nous nous proposons d'encadrer l'espérance de vie du système réparable S, ce que l'on appelle usuellement le MTTF. Reprenons les notations précédentes (voir le paragraphe 1.2) et considérons de plus :

$$M_e = \mathbb{E}(T_e) = \frac{1}{\lambda_e + \mu_e}$$

le *temps moyen de séjour* dans l'état $e \in E^+$. Nous allons utiliser la stratification du système et comparer M_e au temps moyen de séjour dans la strate.

Si e appartient au niveau j, nous avons pour M_e l'encadrement évident suivant :

$$\underline{M}_j \leq M_e \leq \overline{M}_j, \ \forall\, e \in E_j, \ j \leq \underline{k},$$

où $\underline{M}_j = \frac{1}{(n-j)\lambda^* + j\overline{\mu}}$ et $\overline{M}_j = \frac{1}{(n-j)\lambda_* + j\underline{\mu}}$, $j = 1,2,\ldots,n$.

On note $M_0 = M_{e_0} = \mathbb{E}(T_{e_0}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i}$ *le temps moyen de séjour dans l'état parfait.*

L'ensemble des trajectoires partant de $e \in E^+$ *et arrivant à un état de* E_a^- est noté Γ^e. Nous utiliserons aussi les différentes notions suivantes :

$M_\gamma = \mathbb{E}(T_\gamma) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{m-1} T_{e_{j_k}}) = \sum_{k=0}^{m-1} M_{e_{j_k}}$ *le temps moyen de séjour sur la trajectoire* $\gamma = (e_{j_0}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) \in \Gamma^e$;

M^e *le temps moyen de vie, à partir de l'état* $e \in E^+$; naturellement, on convient $M^e = 0, \forall\, e \in E^-$;

$\underline{M}^j = \min_{e \in E_j} M^e$, $j = 0,1,2,\ldots,n$;

$\overline{M}^j = \max_{e \in E_j} M^e$, $j = 0,1,2,\ldots,n$;

$M^0 = M^{e_0}$ *le temps moyen de vie du système.*

En vue d'obtenir l'encadrement du MTTF, nous allons établir des relations de récurrence, d'un coté pour $\underline{M}_{(\cdot)}$ et $\underline{M}^{(\cdot)}$ et de l'autre pour $\overline{M}_{(\cdot)}$ et $\overline{M}^{(\cdot)}$.

Le lemme suivant donne l'expression explicite du *temps moyen de vie à partir de* $e \in E^+$ en utilisant sa décomposition sur les trajectoires (voir (1.2) et (1.3)).

Lemme 3.1.1 *Pour chaque* $e \in E^+$ *on a*

$$M^e = \sum_{\gamma \in \Gamma^e} p_\gamma M_\gamma. \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION. Soit T^e le durée de vie du système à partir de l'état $e \in E^+$. On a

$$\{\, T^e \leq x\} \overset{p.s.}{=} \cup_{\gamma \in \Gamma^e} \{T^e \leq x;\ \gamma_{T^e} = \gamma\} \text{ et } \sum_{\gamma \in \Gamma^e} \mathbb{P}\{\gamma_{T^e} = \gamma\} = \sum_{\gamma \in \Gamma^e} p_\gamma = 1$$

donc la fonction de répartition de T^e est donnée par

$$F_{T^e}(x) = \mathbb{P}\{T^e \leq x\} = \sum_{\gamma \in \Gamma^e} \mathbb{P}\{\gamma_{T^e} = \gamma\} \cdot \{\mathbb{P}\{T^e \leq x \mid \gamma_{T^e} = \gamma\} = \sum_{\gamma \in \Gamma^e} p_\gamma \mathbb{P}\{T_\gamma \leq x\},$$

pour chaque $x \geq 0$. Par conséquent on obtient la relation (3.1). □

Puisque les pas permettent le changement d'un état avec un état voisin, on peut exprimer le temps moyen de vie à partir d'un niveau j par rapport aux temps moyens de vie à partir des niveaux $j-1$ et $j+1$. Plus précisément, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1.2 *Pour $j \in \{1,2,\ldots,\overline{k}\}$ et $e \in E_j \cap E^+$ on a la relation*

$$M^e = M_e + \sum_{e' \in E_{j-1}} p_{ee'} M^{e'} + \sum_{e' \in E_{j+1}} p_{ee'} M^{e'}. \tag{3.2}$$

De plus,

$$M^0 = M_0 + \sum_{e' \in E_1} p_{e_0 e'} M^{e'}. \tag{3.3}$$

DÉMONSTRATION. Soit $j \in \{1,2,\ldots,\overline{k}\}$ et $e \in E_j \cap E^+ (\neq \emptyset)$. D'après (3.1) et en tenant compte de la convention $M^{e'} = 0$, $\forall e' \in E^-$, on déduit successivement :

$$M^e = \sum_{\gamma \in \Gamma^e} p_\gamma M_\gamma = \sum_{e' \in E^+;\ (e,e')-pas} \{p_{ee'}[\sum_{\gamma \in \Gamma^a_{e'}} p_\gamma (M_e + M_\gamma)]\} + \sum_{e' \in E_a^-;\ (e,e')-pas} p_{ee'} M_e$$

$$= M_e\{\sum_{e' \in E^+;\ (e,e')-(pas)} [p_{ee'}(\sum_{\gamma \in \Gamma^a_{e'}} p_\gamma)] + \sum_{e' \in E_a^-;\ (e,e')-pas} p_{ee'}\} + \sum_{e \in E^+;\ (e,e')-pas} [p_{ee'}(\sum_{\gamma \in \Gamma^a_{e'}} p_\gamma M_\gamma)]$$

$$= M_e(\sum_{e' \in E;\ (e,e')-pas} p_{ee'}) + \sum_{e \in E;\ (e,e')-pas} p_{e,e'} M^{e'} = M_e + \sum_{e' \in E_{j-1}} p_{ee'} M^{e'} + \sum_{e' \in E_{j+1}} p_{ee'} M^{e'},$$

donc la relation (3.2) est prouvée. Pour démontrer (3.3) on emploie le même raisonnement. □

Corollaire 3.1.1

$$\forall\, j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}\ \exists\, \underline{e}_j \in E_j \subset E^+ \ :\ \underline{M}^j \geq \underline{M}_j + q_{\underline{e}_j} \underline{M}^{j-1} + p_{\underline{e}_j} \underline{M}^{j+1}; \tag{3.4}$$

$$\forall\, j \in \{1,2,\ldots,\overline{k}\}\ \exists\, \overline{e}_j \in E_j \cap E^+ \ :\ \overline{M}^j \leq \overline{M}_j + q_{\overline{e}_j} \overline{M}^{j-1} + p_{\overline{e}_j} \overline{M}^{j+1}. \tag{3.5}$$

DÉMONSTRATION. Soit $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, fixé.
Si $j \leq \underline{k}$ alors il existe un état $\underline{e}_j \in E_j \cap E^+ = E_j$ tel que $\underline{M}^j = M^{\underline{e}_j}$.
Si $j \leq \overline{k}$ alors il existe un état $\overline{e}_j \in E_j \cap E^+ \neq \emptyset$ tel que $\overline{M}^j = M^{\overline{e}_j}$.
Ensuite, en utilisant la relation (3.2) et les propriétés qui découlent directement des définitions de $\underline{M}_{(\cdot)}$, $\underline{M}^{(\cdot)}$, $\overline{M}_{(\cdot)}$ et $\overline{M}^{(\cdot)}$, on déduit (3.4) et (3.5). □

La monotonie des fonctions $\underline{M}^{(\cdot)}$ et $\overline{M}^{(\cdot)}$ permettra de remplacer d'une manière convenable les nombres $p_{\underline{e}_j}$, $q_{\underline{e}_j}$, $p_{\overline{e}_j}$ et $q_{\overline{e}_j}$ dans les relations (3.4) et (3.5).

Lemme 3.1.3 *Les fonctions*

$$\underline{M}^{(\cdot)} : \{0,1,\ldots,\underline{k}+1\} \to [0,\infty) \qquad et \qquad \overline{M}^{(\cdot)} : \{0,1,\ldots,\overline{k}+1\} \to [0,\infty)$$

sont décroissantes.

DÉMONSTRATION. Démontrons la monotonie de $\underline{M}^{(\cdot)}$ par récurrence.
À partir de (3.3), on obtient

$$\underline{M}^0 = M^0 = M_0 + \sum_{e' \in E_1} p_{e_0 e'} M^{e'} \geq M_0 + \underline{M}^1 \sum_{e' \in E_1} p_{e_0 e'} = M_0 + \underline{M}^1 > \underline{M}^1,$$

donc

$$\underline{M}^0 > \underline{M}^1. \tag{3.6}$$

Supposons maintenant

$$\underline{M}^{j-1} > \underline{M}^j, \text{ où } j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}. \tag{3.7}$$

La relation (3.4) implique $\underline{M}^j > q_{\underline{e}_j} \underline{M}^{j-1} + p_{\underline{e}_j} \underline{M}^{j+1}$, d'où, en utilisant (3.7),

$$0 > q_{\underline{e}_j} (\underline{M}^j - \underline{M}^{j-1}) > p_{\underline{e}_j} (\underline{M}^{j+1} - \underline{M}^j).$$

Il résulte

$$\underline{M}^j > \underline{M}^{j+1}. \tag{3.8}$$

En employant (3.5), on peut prouver la monotonie de $\overline{M}^{(\cdot)}$, aussi par récurrence, à partir de l'inégalité : $\overline{M}^{\overline{k}} > 0 = \overline{M}^{\overline{k}+1}$. □

On peut maintenant écrire les encadrements de temps moyen de bon fonctionnement à partir des niveaux et non plus à partir des états. Pour cela nous reprenons les notations : $\lambda_* = \frac{\Lambda_{\overline{k}}}{n-\overline{k}}$, $\lambda^* = \frac{\overline{\Lambda}_{\underline{k}}}{n-\underline{k}}$, $\underline{\mu} = \min_i \mu_i$, $\overline{\mu} = \max_i \mu_i$ et $\theta_* = \underline{\mu} \,/\, \lambda^*$, $\theta^* = \overline{\mu} \,/\, \lambda_*$.

Corollaire 3.1.2

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\} \; : \; \underline{M}^j \geq \underline{M}_j + \underline{u}_j \underline{M}^{j-1} + \overline{v}_j \underline{M}^{j+1}; \tag{3.9}$$

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,\overline{k}\} \; : \; \overline{M}^j \leq \overline{M}_j + \overline{u}_j \overline{M}^{j-1} + \underline{v}_j \overline{M}^{j+1}. \tag{3.10}$$

où

$$\overline{v}_j = \frac{n-j}{n-j+j\theta_*}, \qquad \underline{u}_j = 1 - \overline{v}_j,$$

$$\underline{v}_j = \frac{n-j}{n-j+j\theta^*}, \qquad \overline{u}_j = 1 - \underline{v}_j.$$

DÉMONSTRATION. Supposons $j \leq \underline{k}$. Puisque $\underline{e}_j \in E_j$, le LEMME 1.2.2 (i) donne $\underline{v}_j \geq p_{\underline{e}_j}$. Alors, d'après le COROLLAIRE 3.1.1 et le LEMME 3.1.3 on a

$$\underline{M}^j \geq \underline{M}_j + q_{\underline{e}_j}\underline{M}^{j-1} + p_{\underline{e}_j}\underline{M}^{j+1} = \underline{M}_j + \underline{M}^{j-1} + p_{\underline{e}_j}(\underline{M}^{j+1} - \underline{M}^{j-1})$$

$$\geq \underline{M}_j + \underline{M}^{j-1} + \overline{v}_j(\underline{M}^{j+1} - \underline{M}^{j-1}) = \underline{M}_j + \underline{u}_j\underline{M}^{j-1} + \overline{v}_j\underline{M}^{j+1},$$

donc l'inégalité (3.9) est démontrée. De la même manière, en utilisant l'inégalité $\underline{v}_j \leq p_{\overline{e}_j}$, pour $j \leq \overline{k}$, on obtient (3.10). □

Regardons ce que cela donne pour le temps moyen de bon fonctionnement si au départ, le système est dans l'état parfait.

Corollaire 3.1.3

$$M^0 = \underline{M}^0 \geq M_0 + \underline{M}^1 \tag{3.11}$$

$$M^0 = \overline{M}^0 \leq M_0 + \overline{M}^1 \tag{3.12}$$

DÉMONSTRATION. On emploie la relation (3.3), les définitions de $\underline{M}^1$ et $\overline{M}^1$, et la propriété $\sum_{e' \in E_1} p_{e_0 e'} = 1$. □

Maintenant nous sommes en mesure de donner le principal résultat de cette partie. Il s'agit d'encadrer le MTTF (temps moyen de bon fonctionnement partant de l'état parfait) à partir des taux de défaillance et de réparation les plus pessimistes. Seule est nécessaire la connaissance des niveaux $\underline{k}$ et $\overline{k}$ de séparation entre états de fonctionnement et états de panne.

Théorème 3.1.1 *Pour le système markovien S, nous notons :*
$\underline{k}$ – le dernier niveau ayant tous les états de fonctionnement;
$\overline{k}$ – le dernier niveau ayant au moins un état de fonctionnement;
$M_0 = \mathbb{E}(T_{e_0})$, $\underline{M}_j = \frac{1}{(n-j)\lambda^* + j\overline{\mu}}$, $\overline{M}_j = \frac{1}{(n-j)\lambda_* + j\underline{\mu}}$, $j = 1,2,\ldots,n-1$;
$z_j^{(k)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, $j \in \{0,1,\ldots,k+1\}$
la famille de fonctions définies par

$$z_j^{(k)}(x) = \binom{n-1}{j-1} \sum_{s=1}^{k-j+1} \frac{x^s}{\binom{n-1}{s+j-1}}, \ \forall\, x \geq 0, \ \ si\ j = 1,2,\ldots,$$

où k est un nombre entier positif, plus petit que n.
Alors on a l'encadrement suivant du temps moyen de vie (MTTF) du système S :

$$\sum_{j=0}^{\underline{k}} \underline{M}_j \left(1 + z_j^{(\underline{k})}(\theta_*) + z_{j+1}^{(\underline{k})}(\theta_*)\right) \leq \mathbb{E}(T) \leq \sum_{j=0}^{\overline{k}} \overline{M}_j \left(1 + z_j^{(\overline{k})}(\theta^*) + z_{j+1}^{(\overline{k})}(\theta^*)\right)$$

DÉMONSTRATION.
Prouvons l'inégalité

$$\sum_{j=0}^{\underline{k}} \{\underline{M}_j \, [\, 1 + z_j^{(\underline{k})}(\theta_*) + z_{j+1}^{(\underline{k})}(\theta_*) \,]\} \;\leq\; \mathbb{E}(T).$$

D'après (3.9) et (3.10) on a

$$\overline{v}_j(\underline{M}^j - \underline{M}^{j+1}) \geq \underline{M}_j + \underline{u}_j(\underline{M}^{j-1} - \underline{M}^j), \;\; j = 0,1,\ldots,\underline{k}, \tag{3.13}$$

avec les notations $\underline{u}_0 = 0$, $\overline{v}_0 = 1$, $\underline{M}^{-1} = 0$.
Les relations de (3.13) donnent par récurrence :

$$\underline{M}^j - \underline{M}^{j+1} \geq (1 + \underline{w}_j)\underline{M}_j + \sum_{0 \leq i < j} (1 + \underline{w}_i)\underline{w}_{i+1}\underline{w}_{i+2}\ldots\underline{w}_j\underline{M}_i, \tag{3.14}$$

où $\underline{w}_j := \underline{u}_j/\overline{v}_j$, $0 \leq j \leq n$. Puisque $\underline{M}^{\underline{k}+1} = 0$, en sommant les inégalités de (3.14) on obtient l'évaluation suivante :

$$\mathbb{E}(T) = \underline{M}^0 \geq \sum_{j=0}^{\underline{k}}(1 + \underline{w}_j) \left(1 + \sum_{j<i\leq\underline{k}} \underline{w}_{j+1}\underline{w}_{j+2}\ldots\underline{w}_i\right) \underline{M}_j \tag{3.15}$$

On observe que le coefficient de $\underline{M}_i$ dans la partie droite de l'inégalité (3.15) est

$$\underline{y}_j = 1 + \underline{z}_j + \underline{z}_{j+1}, \tag{3.16}$$

où

$$\underline{z}_j := \sum_{i=j}^{\underline{k}} \underline{w}_j\underline{w}_{j+1}\ldots\underline{w}_i, \; j = 0,1,\ldots,\underline{k}; \qquad \underline{z}_{\underline{k}+1} = 0. \tag{3.17}$$

Mais $\underline{z}_0 = 0$ et pour $1 \leq j \leq \underline{k}$ on peut écrire

$$\underline{z}_j = \frac{\sum_{i=j}^{\underline{k}} \underline{w}_1\underline{w}_2\ldots\underline{w}_i}{\underline{w}_1\ldots\underline{w}_{j-1}} = \binom{n-1}{j-1} \sum_{i=1}^{\underline{k}-j+1} \binom{n-1}{i}^{-1} \theta_*^{i-j+1}, \tag{3.18}$$

d'où l'on tire l'inégalité cherchée.
Naturellement, on emploie les même outils pour majorer $\mathbb{E}(T)$, à partir des relations (3.10) et (3.12). □

Remarque Si le modèle est hautement fiable, on sait qu'on peut utiliser une approximation pessimiste efficace en négligeant le temps cumulé passé hors de l'état initial. On en déduit l'approximation classique (voir GNEDENKO, 1969) :

$$\mathbb{E}(T) \approx \frac{\mathbb{E}(T_0)}{\varepsilon}$$

où ε est la probabilité de *panne directe* (panne avant retour à l'état parfait). Si nous reprenons l'encadrement de $\mathbb{E}(T)$ donné par le théorème ci-dessus, nous obtenons :

$$\frac{\mathbb{E}(T_0)}{\varepsilon^*} + \sum_{j=1}^{\underline{k}} (1 + \underline{z}_j + \underline{z}_{j+1}) \underline{M}_j \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{\mathbb{E}(T_0)}{\varepsilon_*} + \sum_{j=1}^{\overline{k}} (1 + \overline{z}_j + \overline{z}_{j+1}) \overline{M}_j, \tag{3.19}$$

où :

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\overline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} (\theta^*)^j}, \quad \varepsilon^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\underline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} (\theta_*)^j}.$$

Il se trouve que ces mêmes nombres ε apparaîtront dans le chapitre suivant pour l'encadrement de la probabilité de panne directe (voir THÉORÈME 4.4.1). La complexité des bornes données au THÉORÈME 3.1.1 ci-dessus nous incite à chercher des bornes plus faciles d'utilisation (mais bien sûr plus larges). Ainsi, le théorème suivant donne une évaluation pessimiste de l'espérance de vie du système qui raffine quelque peu l'approximation de Gnedenko.

Théorème 3.1.2 *La durée moyenne de bon fonctionnement d'un système markovien S est minorée à partir*

$$\mathbb{E}(T) \geq \frac{1}{\varepsilon^* \Lambda} + r \sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{M}_j, \tag{3.20}$$

où :

$$r = 1 + \frac{2}{\underline{k}} \sum_{j=1}^{\underline{k}} \frac{(\underline{k} + 1 - j)(\theta_*)^j}{\binom{n-1}{j}} \quad et \quad \Lambda = \sum_{1}^{n} \lambda_i$$

DÉMONSTRATION.

Puisque $\underline{w}_j > 1$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}$, on déduit que la suite $(\underline{y}_j)_{1 \leq j \leq \underline{k}}$ est décroissante, aussi comme la suite $(\underline{M}_j)_{1 \leq j \leq \underline{k}}$. Alors, en employant l'inégalité de TCHEBISHEV on trouve

$$\sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{y}_j \underline{M}_j \geq \left(1 + \frac{2}{\underline{k}} \sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{z}_j\right) \sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{M}_j.$$

Puis, en tenant compte de la croissance de la suite $\underline{w}_j = \frac{j\theta_*}{n-j}$, $j = 1,2,\ldots,\underline{k}$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{z}_j \geq \sum_{j=1}^{\underline{k}} (\underline{k} + 1 - j) \underline{w}_1 \underline{w}_2 \ldots \underline{w}_j = \sum_{j=1}^{\underline{k}} \frac{(\underline{k} + 1 - j)(\theta_*)^j}{\binom{n-1}{j}}.$$

D'après le THÉORÈME 3.1.1 et les deux dernières inégalités, on a la conclusion désirée. □

Remarque Puisque $\mu_i \gg \lambda_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, on peut encore tenir compte, dans la relation (3.20), de l'approximation (raisonnable) suivante :

$$\sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{M_j} \approx \sum_{j=1}^{\underline{k}} \frac{1}{j\overline{\mu}} \approx \frac{1}{\overline{\mu}} \log \underline{k}$$

Ainsi, dans le cas de composants identiques avec le taux de dégradation λ, il est possible de mesurer la finesse de ce résultat en le comparant à l'approximation classique :

$$\mathbb{E}(T) \approx \frac{1}{n\varepsilon\lambda}$$

On constate que le terme $r \sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{M_j}$ affinant l'approximation exponentielle a un poids relatif de $\frac{2n.\log k}{k}.\frac{\lambda}{\mu}$. C'est un terme d'ordre 1 si on considère un comportement asymptotique dans lequel $\frac{\lambda}{\mu}$ tend vers 0. Mais si on prend en compte le nombre de composants, l'amélioration est significative pour les grands systèmes.

3.2 Comparaison avec un k/n dans le cas des réparations homogènes

Nous voulons dans cette partie utiliser la spécificité des modèles stratifiés pour évaluer la fiabilité du système réparable considéré à partir des caractéristiques de ses composants (taux de défaillance et taux de réparation). Dans ce qui suit le nombre de réparateurs est supposé suffisamment grand pour couvrir tous les besoins de réparations.

Notre but est de réduire l'étude de fiabilité du grand système à celle d'un système beaucoup plus simple sans minimiser la probabilité de panne du système. On peut se restreindre à un système dont tous les composants sont identiques. Pour cela il est naturel de dramatiser les taux de défaillance en les augmentant. Ce nouveau système est en panne si au moins k des n éléments sont en panne. C'est ce qu'on appelle un système de type k/n à composants identiques.

Commençons l'étude par la situation particulière correspondant à une réparation de même type :

$$\mu_i = \mu, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Nous verrons à la fin de la section que cette hypotèse peut être affaiblie. Les taux de dégradation λ_i ne sont pas supposés égaux.

Pour un état de fonctionnement $e \in E^+$, notons T_e - le temps de séjour dans e, $F_e(t) = \mathbb{P}\{T_e \leq t\} = 1 - \exp(-(\lambda_e + \mu_e)t)$, $t \geq 0$ - la fonction de répartition de T_e,

T^e - le durée de vie du système à partir de l'état e,

F^e - la fonction de répartition de T^e.

Soit aussi

$$G_j := \max_{e \in E_j} F^e, \quad j = 0,1,\ldots,\underline{k}+1.$$

Observations

1) Pour tout $j \in \{0,1,2,\ldots,\underline{k}+1\}$, G_j est une fonction de répartition.

2) Puisque $\underline{k}+1$ est le premier niveau avec au moins un état de panne, on a $G_{\underline{k}+1} = \Pi$, où Π désigne la fonction de HEAVISIDE.

Lemme 3.2.1 *Les fonctions de répartition des temps du séjour et durée de vie, à partir d'un certain état, vérifient les relations suivantes:*

$$F^{e_0} = \sum_{e \in E_1} p_{e_0 e} F_{e_0} * F^e \tag{3.21}$$

$$F^e = \left(\sum_{e' \in E_{j-1}} p_{ee'} F^{e'} + \sum_{e' \in E_{j+1}} p_{ee'} F^{e'} \right) * F_e, \quad \forall\, e \in E_j, \quad j = 1,2,\ldots,\underline{k}. \tag{3.22}$$

DÉMONSTRATION. L'analyse des transitions du système conduit aux relations:

$$P\{T^{e_0} \le t\} = \sum_{e \in E_1} p_{e_0 e} P\{T_{e_0} + T^e \le t\}, \; t \ge 0;$$

$$P\{T^e \le t\} = \sum_{e' \in E_{j-1} \cup E_{j+1}} p_{ee'} P\{T_e + T^{e'} \le t\}, \; t \ge 0, \; e \in E_j, \; 1 \le j \le n-1.$$

Alors, grâce à l'indépendance des v.a. T_e et $T^{e'}$ pour les états voisins e et e', on obtient (3.21) et (3.22), en tenant compte de la signification du produit de convolution. □

Corollaire 3.2.1

$$G_0 \le F_0 * G_1 \quad (F_0 := F_{e_0}) \tag{3.23}$$

Pour tout $j \in \{1,\ldots,\underline{k}\}$ *et* $t \ge 0$ *il existe* $e \in E_j$ *tel que:*

$$G_j(t) = F^e(t) \le \{(q_e G_{j-1} + p_e G_{j+1}) * F_e\}(t) \tag{3.24}$$

Rappelons les propriétés de monotonie de la convolution (voir FELLER)

Lemme 3.2.2 *Si* F, G, H *sont les fonctions de répartition associées à des v.a. positives, alors:*

$$F \le G \Rightarrow F * H \le G * H \tag{3.25}$$

$$F * G \le F \tag{3.26}$$

Lemme 3.2.3 *La suite des fonctions de répartitions* $(G_j)_{1\leq j\leq \underline{k}+1}$ *est croissante:*

$$G_{j-1} \leq G_j,\ j = 1,2,\ldots,\underline{k}+1$$

DÉMONSTRATION. Prouvons la monotonie par récurrence.

On a $G_0 = F^{e_0} \leq G_1 * F_0 \leq G_1$, d'après (3.23) et (3.26).

Supposons $G_{j-1} \leq G_j$, pour $j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}$ fixé.

D'après (3.24) et (3.26), pour chaque $t \geq 0$, il existe $e = e(j,t) \in E_j$ tel que $G_j(t) \leq (q_e G_{j-1} + p_e G_{j+1})(t)$. Alors:

$$G_{j+1}(t) - G_j(t) \geq \frac{q_e}{p_e}(G_j(t) - G_{j-1}(t)) \geq 0.$$

Mais $t \geq 0$ est arbitraire, donc il résulte $G_j \leq G_{j+1}$. □

Pour donner une majoration des distributions par niveaux nous utilisons les notations suivantes:

$$F_j(t) = 1 - exp\{-[(n-j)\lambda^* + j\mu]t\},\ t \geq 0,$$

$$q_j := \frac{j\mu}{(n-j)\lambda^* + j\mu},\quad p_j = \frac{(n-j)\lambda^*}{(n-j)\lambda^* + j\mu},$$

pour tout $j \in \{0,1,\ldots,\underline{k}\}$. D'après la définition (1.9) nous avons $\lambda^* = \frac{1}{n-\underline{k}}(\lambda_{[\underline{k}+1]} + \lambda_{[\underline{k}+2]},\ldots,\lambda_{[n]})$, où $\lambda_{[1]} \leq \lambda_{[2]} \leq \ldots \leq \lambda_{[n]}$ est la suite croissante des taux de dégradation.

Lemme 3.2.4 *Supposons* $\mu_i = \mu$, $i = 1,\ldots,n$. *On a la relation:*

$$G_j \leq (q_j G_{j-1} + p_j G_{j+1}) * F_j,\ j = 1,2,\ldots,\underline{k} \tag{3.27}$$

DÉMONSTRATION. Pour $j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}$ et $t \geq 0$, il existe $e \in E_j$ tel que (3.24) est satisfaite. D'après le LEMME 1.2.2, $\lambda_e \leq (n-j)\lambda^*$. Alors $F_e \leq F_j$. Puis, $p_e = \frac{\lambda_e}{\lambda_e+\mu_e} \leq \frac{(n-j)\lambda^*}{(n-j)\lambda^*+j\mu} = p_j$, donc, d'après (3.24), (3.25) et le LEMME 3.2.3, on a:

$$G_j(t) \leq \{(q_e G_{j-1} + p_e G_{j+1}) * F_e\}(t) = \{(G_{j-1} + p_e(G_{j+1} - G_{j-1})) * F_e\}(t) \leq$$

$$\leq \{(G_{j-1} + p_j(G_{j+1} - G_{j-1})) * F_j\}(t) = \{(q_j G_{j-1} + p_j G_{j+1}) * F_j\}(t),$$

ce qui donne la conclusion. □ Nous donnons maintenant notre premier résultat de comparaison de fiabilité entre le système initial (avec composants non identiques) et un système k/n avec composants identiques. Comme cette comparaison est centrée sur la fiabilité nous utilisons la notation R (reliability) au lieu de $\overline{F}$.

Théorème 3.2.1 *Soit* $\lambda^* = \frac{\overline{\Lambda}_{\underline{k}}}{n-\underline{k}}$ *le taux moyen de défaillance défini au premier chapitre et* μ *le taux de réparation de chacun des composants.*
Soit R *la fiabilité du système* S, *et* $\tilde{R}$ *la fiabilité d'un système associé* $\tilde{S}$, *de type* k/n, *sur l'espace d'états* $\{E_0, E_1, \ldots, E_{\underline{k}}, E_{\underline{k}+1}\}$ *ayant l'état de panne* $E_{\underline{k}+1}$ *et avec les taux de transitions donnés par:*

$$E_0 \underset{\mu}{\overset{n\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_1 \underset{2\mu}{\overset{(n-1)\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_2 \quad \ldots \quad E_{\underline{k}-1} \underset{k\mu}{\overset{(n-\underline{k}+1)\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_{\underline{k}} \overset{(n-\underline{k})\lambda^*}{\longrightarrow} E_{\underline{k}+1}$$

Alors

$$R(t) \geq \tilde{R}(t), \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Ce qui peut s'exprimer sous la forme le temps de bon fonctionnement du système S *est stochastiquement supérieur au temps de bon fonctionnement du système* $\tilde{S}$

DÉMONSTRATION. Pour le système $\tilde{S}$, notons $\tilde{G}_j$, $j = 1, \ldots, \underline{k}+1$, la fonction de répartition du temps de vie (i.e. le temps d'entrée dans l'état d'absorption $E_{\underline{k}+1}$) à partir (avec la probabilité 1) de l'état E_j. Ces fonctions de répartition sont liées par les récurrences suivantes, qui dérivent naturellement de l'analyse des transitions de ce système markovien:

$$\tilde{G}_0 = \tilde{G}_1 * F_0 \tag{3.28}$$

$$\tilde{G}_j = (q_j \tilde{G}_{j-1} + p_j \tilde{G}_{j+1}) * F_j, \quad j = 1, \ldots, \underline{k} \tag{3.29}$$

De plus, $\tilde{G}_{\underline{k}+1} = \Pi$. Soit $\mathcal{H}$ la matrice fonctionnelle suivante:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & F_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 F_1 & 0 & p_1 F_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 F_2 & 0 & p_2 F_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{\underline{k}} F_{\underline{k}} & 0 & p_{\underline{k}} F_{\underline{k}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \Pi \end{bmatrix}$$

Notons aussi:
$\mathcal{H}_0$ la matrice obtenue en remplaçant Π de la dernière ligne de $\mathcal{H}$ par 0;
$\mathcal{I}$ la matrice d'ordre $\underline{k}+2$, avec Π sur la diagonale principale et 0 ailleurs;
$\mathcal{I}_0$ la matrice obtenue en remplaçant Π de la dernière ligne de $\mathcal{I}$ par 0;
$\mathcal{C}$ la matrice colonne d'ordre $\underline{k}+2$ ayant Π comme dernier élément et nulle ailleurs;
$\mathcal{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_{\underline{k}}, \Pi)^T$; $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_{\underline{k}}, \Pi)^T$.
Observons d'abord:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{I}_0 * \mathcal{H}$$

Les récurrences établies précédemment peuvent être écrites sous une forme concentrée. Ainsi, (3.23) et (3.27) impliquent :

$$\mathcal{H} * \mathcal{G} \geq \mathcal{G}, \tag{3.30}$$

tandis que (3.28) et (3.29) donnent :

$$\mathcal{H} * \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}. \tag{3.31}$$

Pour le processus associé au système $\tilde{S}$, l'élément $(j,\underline{k}+1)$ de la dernière colonne de la matrice $\mathcal{H}_0^{*m}(t)$ (avec $j \in \{0,1,\ldots,\underline{k}\}$, $m \geq 1$, $t \geq 0$) est la probabilité d'absorption (entrée dans $E_{\underline{k}+1}$) avant le moment t, à partir de E_j, en suivant une trajectoire comportant m pas. Alors la somme sur $m = 1,2,\ldots$ de ces éléments donne la probabilité d'absorption avant t à partir de l'état (niveau) E_j, c'est à dire $\tilde{\mathcal{G}}_j(t)$. De plus, la répartition du temps d'absorption à partir de l'état absorbant $E_{\underline{k}+1}$ est donnée par la fonction Π de HEAVISIDE. Par conséquent nous avons :

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{I}_0 * \tilde{\mathcal{G}} + \mathcal{C} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} + \mathcal{C} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C},$$

avec la notation $\mathcal{H}_0^0 = \mathcal{I}$.
Rappelons que le THÉORÈME 2.1.1 donne une écriture matricielle de même type. On peut d'ailleurs vérifier directement que le vecteur fonctionnel colonne $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C}$ satisfait la relation (3.31). Ainsi on a :

$$\mathcal{H} * \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} \right) = (\mathcal{H}_0 - \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}) * \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} = (\mathcal{H}_0 - \mathcal{I}_0) * \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C}$$

Mais $\mathcal{I}_0 * \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$ et $\mathcal{I}_0 * \mathcal{C} = \mathcal{O}$ (la matrice colonne nulle). On déduit que le premier terme de la somme ci-dessus est nul, donc il résulte :

$$\mathcal{H} * \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C}.$$

Nous voulons maintenant prouver l'inégalité :

$$\mathcal{G} \leq \tilde{\mathcal{G}}. \tag{3.32}$$

A partir de (3.30) on trouve $\mathcal{I}_0 * (\mathcal{H} * \mathcal{G}) \geq \mathcal{I}_0 * \mathcal{G}$, ou $\mathcal{H}_0 * \mathcal{G} - \mathcal{G} + \mathcal{C} \geq 0$.
La positivité de l'opérateur

$$\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{X}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

implique dans ce cas :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * (\mathcal{H}_0 * \mathcal{G} - \mathcal{G} + \mathcal{C}) \geq 0.$$

Alors on déduit successivement :

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{G} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * (\mathcal{H}_0 * \mathcal{G} - \mathcal{G} + \mathcal{C})$$

$$= \mathcal{G} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{G} - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{G} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C} = \mathcal{G} - \mathcal{G} + \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}},$$

donc (3.32) est démontrée.

De là on trouve $G_0 \leq \tilde{G}_0$. Mais G_0 est la fonction de répartition de la durée de vie T du système S (à partir de l'état e_0), tandis que $\tilde{G}_0$ désigne la répartition de la durée de vie $\tilde{T}$ du systeme associé $\tilde{S}$ (à partir de l'état E_0). L'inégalité prouvée peut être interprétée comme $\tilde{T} \preceq_{st} T$, ou $R(t) \geq \tilde{R}(t)$, $\forall\, t \geq 0$. □

Remarque En écriture matricielle, on peut résumer le théorème ci-dessus par l'inégalité :

$$R(t) \geq 1 - \mathcal{L} * \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_0^{*m} * \mathcal{C}(t), \quad \forall\, t \geq 0,$$

où $\mathcal{L}$ est la matrice fonctionnelle ligne d'ordre $\underline{k}+2$ ayant Π comme premier élément et des zéros ailleurs (avec $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{C}$ définis au cours de la démonstration). Il s'agit donc bien d'une évaluation pessimiste de la fiabilité du système initial S.

Supposons maintenant que les taux de réparation ne sont pas égaux, mais suffisamment proches. Dans ce cas on peut aussi obtenir de la même manière une évaluation pessimiste de la fiabilité du S, sans nous "écarter beaucoup".

Théorème 3.2.2 *La conclusion du Théorème 3.2.1 reste valable avec :*

$$\mu := \underline{\mu} = \min\{\mu_i,\ i = 1,2,\ldots,n\} \quad et \quad \lambda^{**} := \frac{1}{n-\underline{k}} \overline{\Lambda}_{n-\underline{k}} + \frac{\underline{k}}{n-\underline{k}} (\overline{\mu} - \underline{\mu})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que la relation (3.27) du LEMME 3.2.4 reste encore valable dans ces conditions. Plus précisement nous devons vérifier les inégalités $p_e \leq \frac{(n-j)\lambda^{**}}{(n-j)\lambda^{**}+j\mu}$, et $\lambda_e + \mu_e \leq (n-j)\lambda^{**} + j\mu$ pour tout $e \in E_j$, $j = 1,2,\ldots,\underline{k}$.
Ainsi nous avons $\lambda^{**} \geq \frac{\overline{\Lambda}_{n-\underline{k}}}{n-\underline{k}} = \lambda^*$ d'où $(n-j)\lambda^{**} \geq \lambda_e$ et clairement $j\mu \leq \mu_e$. Alors $p_e = \frac{\lambda_e}{\lambda_e+\mu_e} \leq \frac{(n-j)\lambda^{**}}{(n-j)\lambda^{**}+j\mu}$.
L'autre inégalité résulte du fait :

$$\frac{1}{n-j} \sum_{\{i/e^{(i)}=1\}} (\mu_i - \mu) \leq \frac{j}{n-j} (\overline{\mu} - \underline{\mu}) \leq \frac{\underline{k}}{n-\underline{k}} (\overline{\mu} - \underline{\mu}),\ \forall\, e \in E_j,\ j = 1,2,\ldots,\underline{k}.$$

Il vient :

$$(n-j)\lambda^{**} + j\mu - (\lambda_e + \mu_e) =$$
$$= \left[\frac{n-j}{n-\underline{k}}\overline{\Lambda}_{n-\underline{k}} - \lambda_e\right] + (n-j)\left[\frac{\underline{k}}{n-\underline{k}}(\overline{\mu}-\underline{\mu}) - \frac{1}{n-j}(\mu_e - j\mu)\right] \geq 0.$$

D'où le résultat. □

Les raisonnements ci-dessus sont basés sur l'idée d'uniformisation des taux en vue d'approcher le modèle markovien donné par un modèle markovien pessimiste plus simple (de type k/n). L'inconvénient est la particularité supposée des taux μ_i de réparation. Nous nous proposons maintenant d'évaluer, toujours à partir du processus sur les niveaux, la fiabilité du système S dans le cadre général. Il s'agit toujours d'une approche fonctionnelle dérivée du COROLLAIRE 3.2.1. Nous gardons les notations précédentes, avec la convention $\underline{\mu} = \min_{1\leq i\leq n}\mu_i$.

Lemme 3.2.5 *Les fonctions* $G_j = \max_{e\in E_j} F^e$ *satisfont les relations récurrentes :*

$$G_j \leq G_{j-1} + p_j F_j * (G_{j+1} - G_{j-1}),\ \ j = 1,2,\ldots,\underline{k}. \tag{3.33}$$

DÉMONSTRATION. Pour $t \geq 0$ fixé, soit $\psi(x,y) = \frac{x}{x+y}(1-e^{-(x+y)t})$, $x>0$, $y>0$. Nous avons $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}(1-e^{-(x+y)t}) + \frac{tx}{x+y}e^{-(x+y)t} \geq 0$ et d'autre part $\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{(x+y)^2}e^{-(x+y)t}(e^{(x+y)t} - 1 - t(x+y)) \geq 0$; donc la fonction ψ est croissante en x et décroissante en y. Alors, pour tout $j \in \{1,\ldots,\underline{k}\}$ et $e \in E_j$ on a :

$$p_e F_e(t) = \frac{\lambda_e}{\lambda_e+\mu_e}(1-e^{-(\lambda_e+\mu_e)t}) \leq \frac{(n-j)\lambda^*}{(n-j)\lambda^* + j\mu}(1-e^{-((n-j)\lambda^*+j\mu)t}) = p_j F_j(t)$$

D'après le COROLLAIRE 3.2.1 et le Lemme 3.2.3 nous obtenons

$$G_j \leq G_{j-1} * F_e + p_e(G_{j+1} - G_{j-1}) * F_e \leq G_{j-1} + p_j F_j * (G_{j+1} - G_{j-1}),$$

où l'existence de $e \in E_j$ est assurée par (3.24). □

Nous pouvons écrire (3.33) comme

$$G_j \leq (\Pi - p_j F_j) * G_{j-1} + p_j F_j * G_{j+1},\ \ j = 1,2,\ldots,\underline{k}. \tag{3.34}$$

Soit $\mathcal{K}$ la matrice fonctionnelle carrée d'ordre $\underline{k}+2$ définie par:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & F_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \Pi - p_1F_1 & 0 & p_1F_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi - p_2F_2 & 0 & p_2F_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \Pi - p_{\underline{k}}F_{\underline{k}} & 0 & p_{\underline{k}}F_{\underline{k}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \Pi \end{bmatrix}$$

D'après (3.23) et (3.34) nous trouvons :

$$\mathcal{K} * \mathcal{G} \geq \mathcal{G}. \tag{3.35}$$

Le raisonnement employé pour la démonstration du THÉORÈME 3.2.1 permet d'obtenir le résultat suivant. Nous ne le détaillons pas, dans la mesure où les utilisations concrètes qui en découlent sont peu efficaces.

Théorème 3.2.3 *Si* $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{G}_0, \overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{\underline{k}}, \overline{G}_{\underline{k}+1})^T$ *est le point fixe de l'opérateur* $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{K} * \mathcal{X}$, *i.e.* $\mathcal{K} * \overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}$, *alors on a* $\mathcal{G} \leq \overline{\mathcal{G}}$. *En particulier on obtient*

$$R(t) \geq 1 - \overline{G}_0(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Pour illustrer l'évaluation de la fiabilité à partir de la stratification nous avons choisi un modèle de 6 composants, avec absorption au niveau 3. La comparaison de la fiabilité du système avec les fiabilités des deux modèles "3/6", avec des taux égaux, est montrée par la figure suivante. La meilleure "sous-évaluation" de la fiabilité, illustrée par la courbe $- \cdots - \cdots$, est obtenue pour le taux de dégradation $\lambda^* = \frac{\lambda_{[4]}+\lambda_{[5]}+\lambda_{[6]}}{3}$. L'autre sous-évaluation, illustrée par la courbe ".....", est obtenue pour le taux de dégradation $\overline{\lambda} = \max(\lambda_i)$. Pour les deux derniers modèles, on a pris pour taux de dégradation $\underline{\mu} = \min(\mu_i)$.

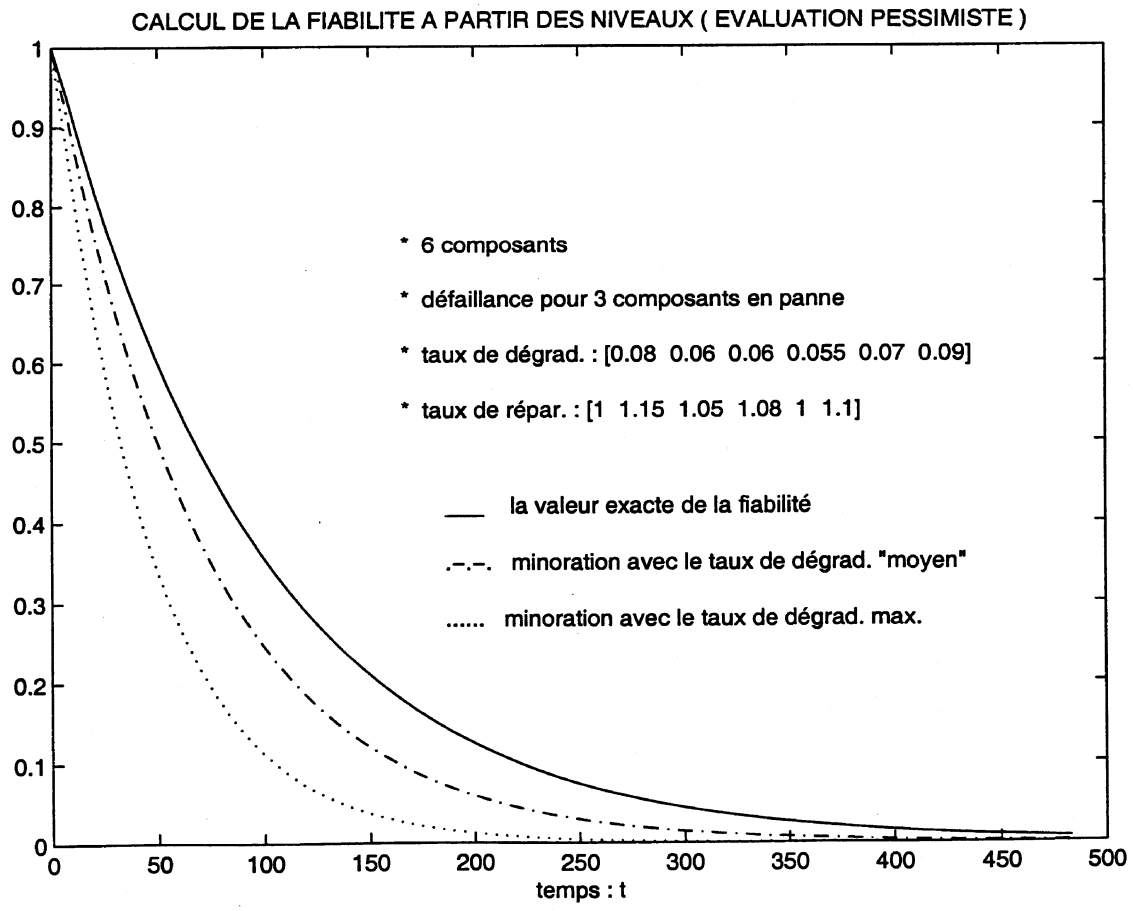

Figure 3.1 *Evaluation pessimiste de la fiabilité par la réduction du modèle initial à des modèles k/n, avec des taux égaux.*

3.3 Fiabilité par comparaison avec un k/n dans le cas général

Afin d'obtenir une extension du Théorème 3.2.1 dans le cas des composants avec des taux différents de réparation, nous allons réduire l'étude d'un processus en temps continu à un processus dérivé en temps discret, par la technique classique de *changement d'échelle* dite aussi *uniformisation.* En même temps nous faisons appel à la méthode de majoration précédemment employée.

Théorème 3.3.1 *Soit $\lambda^* = \frac{\overline{\Lambda}_{\underline{k}}}{n-\underline{k}}$ le taux moyen de défaillance défini au premier chapitre et $\underline{\mu}$ le plus petit taux de réparation des composants.*
Soit R la fiabilité du système S, et $\widetilde{R}$ la fiabilité d'un système associé $\widetilde{S}$, de type k/n, sur l'espace d'états $\{E_0, E_1, \ldots, E_{\underline{k}}, E_{\underline{k}+1}\}$ ayant l'état de panne $E_{\underline{k}+1}$ et avec les taux de transitions donnés par:

$$E_0 \underset{\mu}{\overset{n\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_1 \underset{2\mu}{\overset{(n-1)\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_2 \quad \ldots \quad E_{\underline{k}-1} \underset{\underline{k}\mu}{\overset{(n-\underline{k}+1)\lambda^*}{\rightleftarrows}} E_{\underline{k}} \overset{(n-\underline{k})\lambda^*}{\longrightarrow} E_{\underline{k}+1}$$

Alors

$$R(t) \geq \widetilde{R}(t), \quad \forall \quad t \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour le système S, notons $A = (a_{ee'})_{(e,e')\in E\times E}$ la matrice carrée d'ordre 2^n des taux de transition, associée au processus en temps continu X sur l'espace d'états $E = \{0,1\}^n$. Soit $K = (K_e)_{e\in E}$ la matrice ligne de la probabilité au temps $t = 0$, définie par $K_{e_0} = 1$ et $K_e = 0$ ailleurs. Soit aussi la matrice colonne $L = (L_e)'_{e\in E}$ définie par $L_e = 0$ si $e \in E^+$ et $L_e = 1$ si $e \in E^-$. Alors la fiabilité du système S, à partir de e_0, est donnée par la formule matricielle classique:

$$R(t) = 1 - K\, e^{tA} L, \quad t \geq 0.$$

Soit $\alpha > n\lambda^* + \sum_{i=1}^n \mu_i$ un paramètre positif de changement d'échelle. Soit U la matrice identité d'ordre 2^n. On voit bien que la matrice $B := U + \frac{1}{\alpha}A$ est stochastique avec les éléments

$$b_{ee'} = \begin{cases} \frac{a_{ee'}}{\alpha}, & e' \in E - \{e\} \\ \frac{\alpha - \sum_{e'\in E-\{e\}} a_{ee'}}{\alpha}, & e' = e \end{cases}$$

De plus on peut écrire :

$$(3.36)\quad R(t) = 1 - e^{-\alpha t} K e^{\alpha t(U+\frac{1}{\alpha}A)} L = 1 - e^{-\alpha t} K e^{\alpha t B} L = 1 - e^{-\alpha t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s t^s}{s!} K B^s L.$$

Pour tout entier positif s notons $F(s) = (F_e(s))'_{e\in E}$ la matrice colonne définie par

$$F(s) = B^s L$$

Posons aussi $F(0) = L$. Il est facile d'interpréter la signification des éléments $F_e(s)$ comme la probabilité d'absorption, en s *pas* au plus, à partir de l'état $e \in E$, pour la chaîne de Markov discrète sur l'espace E, dont la matrice des probabilités de transition est B.

Les suites $(F_e(s))_{s\in\mathbb{N}}$, $e \in E$ satisfont les relations récurrentes suivantes :

$$(3.37)\quad F_0(s) := F_{e_0}(s) = b_{e_0e_0} F_{e_0}(s-1) + \sum_{e'\in E_1} b_{e_0e'} F_{e'}(s-1),\ \ s = 1,2,\ldots$$

et, pour $j = 1,2,\ldots,n-1$:

$$(3.38)\ F_e(s) = \sum_{e'\in E_{j-1}} b_{ee'} F_{e'}(s-1) + b_{ee} F_e(s-1) + \sum_{e'\in E_{j+1}} b_{ee'} F_{e'}(s-1),\ e \in E_j,\ s \geq 1$$

De plus, pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $e \in E^-$ on a $F_e(s) = 1$. Comme auparavant, notons

$$G_j(s) = \max_{e\in E_j} F_e(s),\ \ j = 0,1,\ldots,n;\ \ s = 0,1,2,\ldots.$$

Alors, en particulier on a $G_0 = F_0$ et $G_j = 1$, $j \geq \underline{k} + 1$. D'après la relation (3.37) et la définition des éléments $b_{ee'}$ de la matrice B, nous trouvons

$$(3.39)\qquad G_0(s) \leq \frac{\alpha - \Lambda}{\alpha} G_0(s-1) + \frac{\Lambda}{\alpha} G_1(s-1),\ \ s = 1,2,\ldots.$$

Par définition, pour tout $e \in E$, la fonction $F_e(s)$ est non-décroissante en s. Cette propriété et la relation (3.39) impliquent

$$G_1(s-1) - G_0(s-1) \geq \frac{\alpha}{\Lambda}(G_0(s) - G_0(s-1)) = \frac{\alpha}{\Lambda}(F_0(s) - F_0(s-1)) \geq 0,\ \ s = 1,2,\ldots,$$

donc

$$(3.40)\qquad G_0(s) \leq G_1(s),\ \ s = 0,1,\ldots.$$

A son tour, la relation (3.38) donne l'assertion suivante pour $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$:

$$\forall\, s \geq 1\ \ \exists\, e \in E_j\ \ t.q.\ \ G_j(s) \leq \sum_{e'\in E_{j-1}} b_{ee'} G_{j-1}(s-1) + b_{ee} G_j(s-1) + \sum_{e'\in E_{j+1}} b_{ee'} G_{j+1}(s-1)$$

$$(3.41)$$

L'inégalité (3.41) peut être aussi écrite (en employant les anciennes notations) comme

$$(3.42)\quad G_{j+1}(s-1)-G_j(s-1)\geq \frac{\mu_e}{\lambda_e}(G_j(s-1)-G_{j-1}(s-1))+\frac{\alpha}{\lambda_e}(G_j(s)-G_j(s-1))$$

Puisque les fonctions $F_e(s)$, $e\in E_j$ sont non-décroissantes en s, il suit que la fonction $G_j(s)=\max_{e\in E_j}F_e(s)$ est aussi non-décroissante en s.

Alors, d'après (3.40) et (3.42), un raisonnement par récurrence donne la non-décroissance de la suite finie $(G_j)_{0\leq j\leq n}$, donc pour tout entier $s\geq 0$ on a

$$G_j(s)\leq G_{j+1}(s),\quad j=0,1,\dots n-1.$$

Dans ce cas, puisqu'on a les inégalités $\lambda_e\leq (n-j)\lambda^*$ et $\mu_e\geq j\underline{\mu}$ pour tout $e\in E_j$, $j=0,1,\dots,\underline{k}$, des écritures convenables des relations (3.39) et (3.42) nous assurent que pour $s=1,2,\dots$ on a

$$(3.43)\quad \begin{cases} G_0(s)\leq \frac{\alpha-n\lambda^*}{\alpha}G_0(s-1)+\frac{n\lambda^*}{\alpha}G_1(s-1) \\ \\ G_j(s)\leq \frac{j\underline{\mu}}{\alpha}G_{j-1}(s-1)+\frac{\alpha-j\underline{\mu}-(n-j)\lambda^*}{\alpha}G_j(s-1)+\frac{(n-j)\lambda^*}{\alpha}G_{j+1}(s-1),\ j\geq 1 \end{cases}$$

Notons ensuite $H(s)$ la matrice colonne d'ordre $\underline{k}+2$ définie par

$$H(s)=(G_j(s))'_{j=0,\dots,\underline{k}+1},\quad s=0,1,2,\dots.$$

En suivant successivement les définitions des matrices L et $F(0)$, la définition des nombres $G_j(0)$ et la signification niveau $E_{\underline{k}+1}$, nous observons que la matrice colonne $H(0)$ a tous les éléments nuls, sauf le dernier qui est égal à 1.

Appliquons maintenant le même changement d'échelle au processus en temps continu qui modélise l'évolution en temps du système k/n, où $k=\underline{k}+1$, sur les niveaux $E_0,E_1,\dots,E_{\underline{k}},E_{\underline{k}+1}$ (seul le dernier est absorbant) avec les paramètres λ^* et $\underline{\mu}$.

Notons $\widetilde{B}$, $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$ les matrices correspondant respectivement aux B, K, L, mais ayant évidemment d'autres dimensions. Soit $\widetilde{R}$ sa fiabilité.

Alors les relations du système (3.43) et la définition de la matrice H impliquent

$$H(s)\leq \widetilde{B}H(s-1),\quad s=1,2,\dots.$$

D'autre part, on a

$$\widetilde{B}^s\widetilde{L}=\widetilde{B}\left(\widetilde{B}^{s-1}\widetilde{L}\right),\quad s=1,2,\dots$$

De plus, on déduit facilement $H(0) = \widetilde{L} = \widetilde{B}^0\widetilde{L}$.
D'où l'on tire (par récurrence) :

$$H(s) \leq \widetilde{B}^s\widetilde{L},\ s = 0,1,2,\ldots.$$

En particulier nous obtenons :

$$KB^sL = F_0(s) = G_0(s) \leq \widetilde{K}\widetilde{B}^s\widetilde{L},\ \ s = 0,1,\ldots.$$

Enfin, dans ce cas, les relations qui expriment les fiabilités R et $\widetilde{R}$ comme des séries matricielles (voir (3.36) qui exprime R) donnent

$$R(t) \geq \widetilde{R}(t),\ \ \forall\, t \geq 0.$$

□

3.4 Sur l'uniformisation optimale des taux

Dans le paragraphe précédent nous avons trouvé (à partir de la stratification) une sous-évaluation de la fiabilité du système donné, par la fiabilité d'un système beaucoup plus simple. En fait, dans une première étape, masquée par la démonstration, nous avons réduit le système initial à un k/n, avec $k = \underline{k}+1$, en gardant les anciens taux différents. Dans une deuxième étape on a "uniformisé" les taux afin d'obtenir un système k/n avec des taux égaux, sans augmenter la fiabilité. Il est intéressant, au moins dans un but d'analyse théorique de ces comparaisons, de connaître la manière optimale d'uniformiser les taux pour un système général. Le problème peut se rencontrer dans la situation suivante. Nous avons un système qui est formé de n composants provenant de différentes sources (par exemple, des constructeurs différents). Nous voudrions imposer à chaque composant une fiabilité minimale, sorte de fiabilité de référence. Cela revient à comparer le système initial à un système à composants identiques. Le taux "optimal" au sens précédent serait une bonne référence pour le taux à exiger pour les composants de sources distinctes.

Pour simplifier le problème, supposons dès le début que tous les taux de réparation sont égaux. Puisqu'il est clair que l'augmentation des taux de dégradations, au-delà d'un certain niveau, diminue la fiabilité, nous cherchons à trouver le plus petit taux $\lambda = \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ qui convient à une sous-évaluation de fiabilité, indépendamment de μ, le taux unique de réparation.

Définition *Soient les entiers positifs n et k, $k \leq n$. On appelle fonction d'uniformisation inférieure de fiabilité (UIF), de paramètres n et k, une fonction symétrique de n variables $f_{n,k} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, telle que pour tout $\mu \geq 0$ et tout vecteur $\mathbf{d} = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ la fiabilité du système $[k/n, f_{n,k}(\mathbf{d}), \mu]$ ne dépasse pas celle du système initial $[k/n, \mathbf{d}, \mu]$.*
On appele UIF-optimale une fonction $\widetilde{f}_{n,k}$ qui minore toute fonction UIF $f_{n,k}$:

$$\widetilde{f}_{n,k} \leq f_{n,k}.$$

Nous avons prouvé dans le paragraphe 3.2 que la fonction $\Lambda^*_{n,k} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\Lambda^*_{n,k}(\mathbf{d}) = \frac{\lambda_{[k]} + \lambda_{[k+1]} + \ldots + \lambda_{[n]}}{n+1-k}, \ \forall\, \mathbf{d} = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

est UIF.
Notons aussi

$$m_{n,r}(\mathbf{d}) = \left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_r}}{\binom{n}{r}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

la *moyenne d'ordre* r du $\mathbf{d}$, $r = 1,2,\ldots,n$. Observons que $m_{n,1}(\mathbf{d})$ est la moyenne arithmétique des composantes du vecteur $\mathbf{d}$ tandis que $m_{n,n}(\mathbf{d})$ est la moyenne géométrique. Rappelons l'ordre classique de ces moyennes :

$$m_{n,1}(\mathbf{d}) \geq m_{n,2}(\mathbf{d}) \geq \ldots \geq m_{n,n}(\mathbf{d}), \ \forall\, \mathbf{d} = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Evidemment on a $\Lambda^*_{n,k} \geq m_{n,1}$.

A partir des fonctions ci-dessus nous pouvons fournir un encadrement d'une éventuelle fonction $UIF - optimale$.

Proposition 3.4.1 *S'il existe une fonction $\widetilde{f}_{n,k}$ UIF-optimale, de paramètres n et k, alors on a l'encadrement suivant :*

$$m_{n,k} \leq \widetilde{f}_{n,k} \leq \Lambda^*_{n,k}$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité droite est claire.
Pour l'inégalité gauche, prenons comme système initial le k/n avec le vecteur des taux de dégradation $\mathbf{d} = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et le taux de réparation nul ($\mu = 0$). Soit $R_{\mathbf{d},0}$ sa fiabilité. Notons $\widetilde{\lambda} = \widetilde{f}_{n,k}(\mathbf{d})$ et $\widetilde{R}_{\widetilde{\lambda},0}$ la fiabilité du k/n avec tous les taux de dégradation $\widetilde{\lambda}$.

Un calcul classique de fiabilité donne les évaluations suivantes au voisinage de l'origine :

$$R_{\mathbf{d},0}(t) = 1 - \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k} \right) t^k + 0(t^k), \text{ quand } t \to 0$$

$$\widetilde{R}_{\widetilde{\lambda},0}(t) = 1 - \binom{n}{k} \widetilde{\lambda}^k t^k + 0(t^k), \text{ quand } t \to 0.$$

Alors, pour avoir $\widetilde{R}_{\widetilde{\lambda},0} \le R_{\mathbf{d},0}$, il est nécessaire que $\widetilde{\lambda} \ge m_{n,k}(\mathbf{d})$, ou encore $\widetilde{f}_{n,k}(\mathbf{d}) \ge m_{n,k}(\mathbf{d})$. Par conséquent, on obtient $m_{n,k} \le \widetilde{f}_{n,k}$. □

Remarque La proposition ci-dessus montre que si $m_{n,k}$ est une fonction UIF, alors elle est $UIF - optimale$. Les différentes simulations numériques confirment que $m_{n,k}$ est un bon candidat pour la propriété d'UIF-optimalité. Comme illustration, voir la position de la courbe "m3" en comparaison avec la courbe "fiab" dans la Figure 3.3.

Mais, jusqu'à présent, le problème de l'existence de la fonction $UIF - optimale$ reste ouvert.

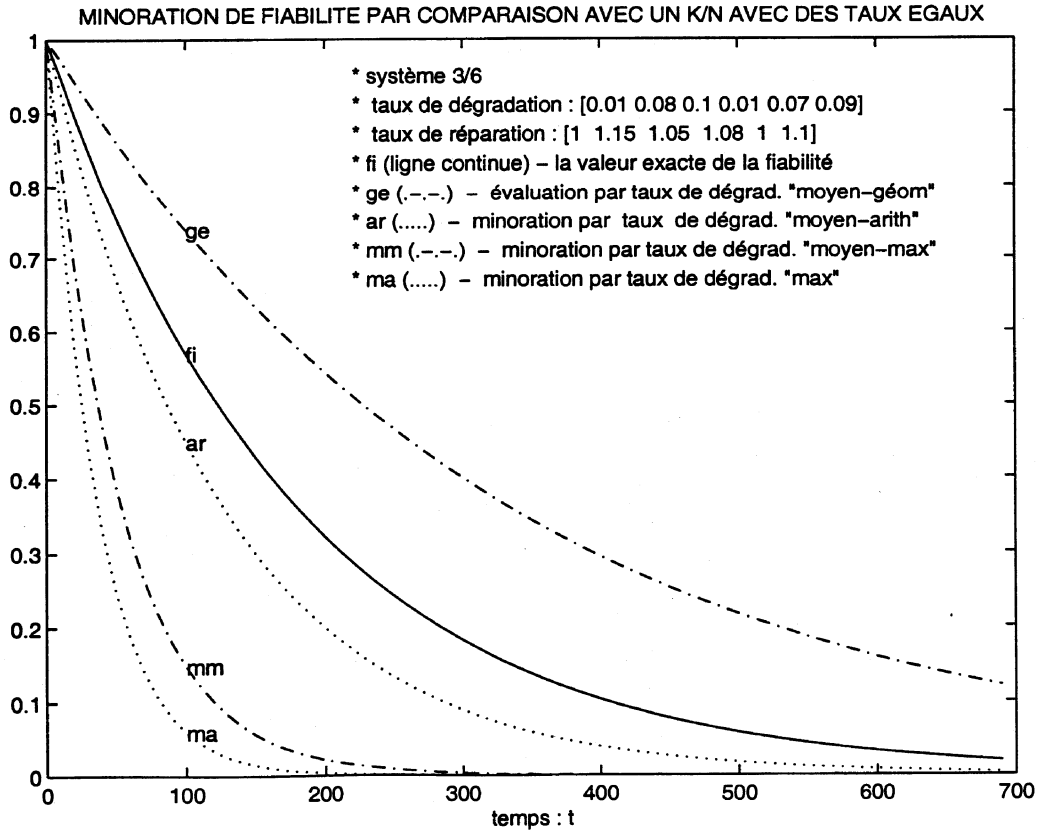

Figure 3.2 *Comparaison avec k/n pour différents choix du taux de dégradation.*

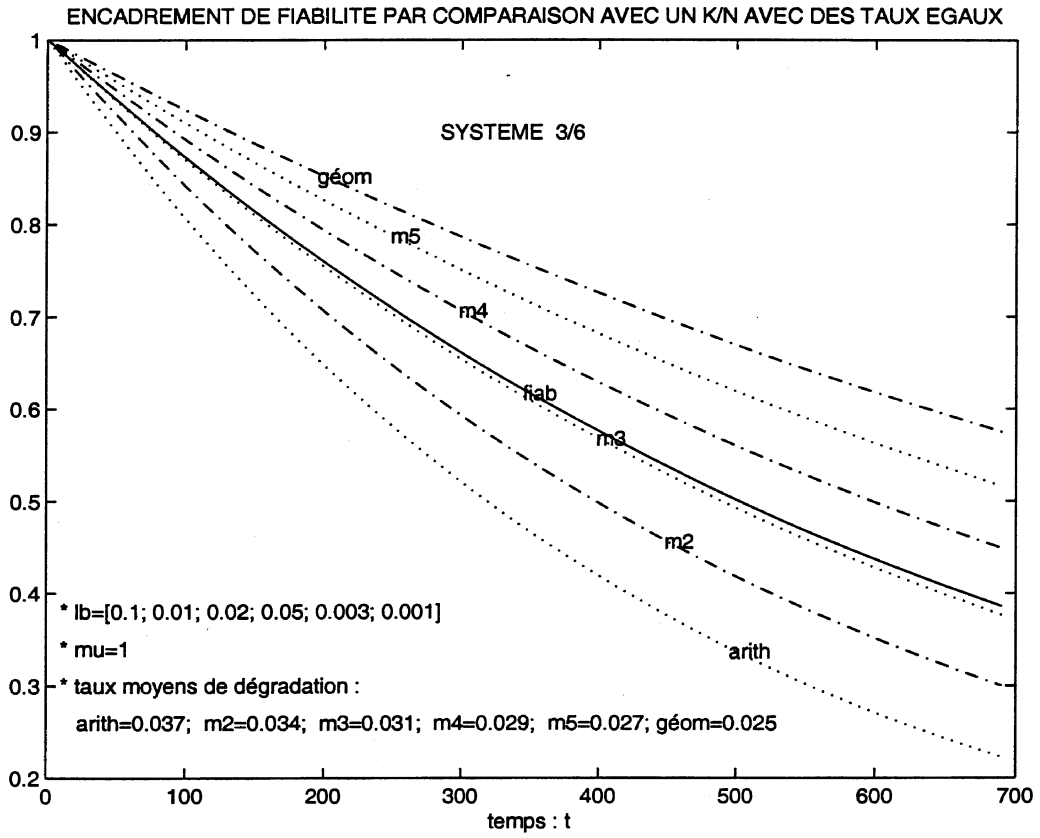

Figure 3.3 *Comparaison avec k/n pour les taux de dégradation $m_{n,r}(\mathbf{d})$.*

Chapitre 4

Calcul par approximation exponentielle

Pour les grands systèmes, avec des réparations rapides, le temps passé dans l'état initial a un poids considérable dans la durée entière de la vie du système. En termes probabilistes, ce phénomène peut être décrit faisant appel aux notions de *temps de retour* (noté Y), *temps de panne directe* (noté Z) et *probabilité de panne directe* (notée ε) dont les définitions sont précisées dans la section suivante. La fiabilité peut alors être approchée par une exponentielle de paramètre $\Lambda\varepsilon$ (voir par exemple GNEDENKO-SOLOVIEV, 1975, PAMPHILE, 1994, BON, 1995). Nous nous proposons de préciser ces paramètres dans le cadre markovien stratifié. Les résultats principaux de ce chapitre sont le calcul exact de la probabilité ε et les différents encadrements obtenus a priori à partir des paramètres de base des composants. Le problème de l'évaluation de ε est à l'origine de nombreux travaux. En utilisant une approche trajectorielle, il est possible de montrer que les séquences sans réparation fournissent l'essentiel de la probabilité de défaillance. Nous prolongeons ce résultat en introduisant les séquences à nombre fixé de réparations. Il est plaisant de constater que le poids des séquences décroît (à peu près) géométriquement. Nous en déduisons alors des encadrements pour ε. La dernière partie de ce chapitre comprend une comparaison des inégalités de SOLOVYEV, BON, BRETAGNOLLE démontrées dans un cadre plus général.

4.1 Approximation exponentielle pessimiste

Soit T la durée de vie du système, ε la probabilité partant de l'état parfait d'aller à la panne sans retour à l'état initial. Le temps moyen de bon fonctionnement

du système peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\varepsilon}\{\ \mathbb{E}(T_O) + (1-\varepsilon)\mathbb{E}(Y) + \varepsilon\mathbb{E}(Z)\ \}, \tag{4.1}$$

où T_O, représentant le *temps cumulé de séjour dans l'état initial*, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\Lambda := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Les variables Y (resp. Z) représentent le temps passé à l'extérieur de l'état parfait conditionnellement à un retour à cet état (resp. à l'entrée dans les états de panne).

La connaisance de la probabilité ε est évidemment importante pour l'évaluation du *temps moyen de vie* et de la *fiabilité* du système. Cela dérive de l'inégalité classique de SOLOVYEV (1983) :

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) \geq \exp(-\Lambda\varepsilon t) \tag{4.2}$$

En fait, on peut écrire :

$$R_T(t) = \exp(-\Lambda\varepsilon t) + \delta_t,\ \ t \geq 0, \tag{4.3}$$

avec $\delta_t > 0$, uniformément majoré par $\Lambda\{\ (1-\varepsilon)\mathbb{E}(Y) + \varepsilon\mathbb{E}(Z)\ \}$.
Ainsi, pour les systèmes hautement fiables on a :

$$\mathbb{P}\{T > t\} \approx e^{-\Lambda\varepsilon t},\ \ \mathbb{E}(T) \approx \frac{1}{\Lambda\varepsilon}.$$

4.2 Les paramètres de l'approximation exponentielle

Certains résultats d'approximation de la fiabilité du système S demandent la connaissance du nombre de visites à l'état de fonctionnement parfait e_0. C'est pourquoi nous allons considérer que e_0 devient, après le premier pas, un état d'absorption.

Considérons donc un nouveau système S', dérivé de S, ayant comme ensemble d'états absorbants $E'_a := E_a^- \cup \{e_0\}$. Supposons aussi que S' se trouve au moment $t = 0$, avec la probabilité 1, dans E_1, défini comme l'ensemble des états voisins de e_0. Plus précisément, S' se trouve à ce moment dans un des états $e' \in E_1$ avec la probabilité $p_{e_0e'} > 0$ du pas (e_0,e').

Soit Γ_1^0 et Γ_1^a les ensembles des *trajectoires de panne* de S' (donc qui ne passent pas par e_0) qui arrivent dans e_0 et E_a^- respectivement. Il y a une correspondance claire entre les ensembles Γ_1^0, Γ_1^a d'un côté et Γ_0^0, Γ_0^a de l'autre : si à une trajectoire γ de panne directe ou de retour de S on efface son premier état, e_0, alors on a une trajectoire γ' de panne de S'. Nous admettons que si $\gamma = (e_0,e) \in \Gamma_0^a$, pour $e \in$

$E_1 \cap E_-^a$, alors $\gamma' = (e) \in \Gamma_1^a$, avec $p_{\gamma'} = 1$.
C'est à dire :

$$\Gamma_1^0 \sim \Gamma_0^0; \quad \Gamma_1^a \sim \Gamma_0^a.$$

Pour chaque trajectoire γ, notons e_γ son premier état (son point de départ).

Enfin, soit T' la *durée de vie* de ce système modifié. Nous avons :

$$\{T' < \infty\} \equiv \{\exists \gamma' \in \Gamma_1^0 \cup \Gamma_1^a \ : \ \gamma' = \gamma_{T'}\} \equiv (\cup_{\gamma' \in \Gamma_1^0} \{\gamma_{T'} = \gamma'\}) \cup (\cup_{\gamma' \in \Gamma_1^a} \{\gamma_{T'} = \gamma'\})$$

Comme antérieurement pour le système initial, nous avons aussi pour ce nouveau système (voir annexe) :

$$\sum_{\gamma' \in \Gamma_1^0} p_{e_0 e_{\gamma'}} . p_{\gamma'} + \sum_{\gamma' \in \Gamma_1^a} p_{e_0 e_{\gamma'}} . p_{\gamma'} = 1,$$

d'où $\mathbb{P}\{\ T' < \infty\ \} = 1$. Mais $p_{e_0 e_{\gamma'}} . p_{\gamma'} = p_\gamma$ donc il suit :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_0^0} p_\gamma \ + \ \sum_{\gamma \in \Gamma_0^a} p_\gamma \ = \ 1 \ ,$$

Notons :

(4.4) $$\varepsilon := \mathbb{P}\{\ \gamma_{T'} \in \Gamma_1^a\ \} = \sum_{\gamma \in \Gamma_0^a} p_\gamma \quad \textit{la probabilité de panne directe,}$$

$$1 - \varepsilon = \mathbb{P}\{\ \gamma_{T'} \in \Gamma_1^0\ \} = \sum_{\gamma \in \Gamma_0^0} p_\gamma \quad \textit{la probabilité de retour.}$$

En fait ε est aussi la probabilité que le temps d'entrée dans E^- est inférieur au temps d'entrée dans e_0.

Définissons les lois conditionnelles de T' sachant $\gamma_{T'} \in \Gamma_1^0$ ou Γ_1^a. Et considérons deux variables Y et Z dsitribuées suivant ces lois. Nous noterons de façon très schématique :

$$Y \ := \ [\ T' \mid \gamma_{T'} \in \Gamma_1^0\ ],$$

appelé le *temps de retour* et

$$Z \ := \ [\ T' \mid \gamma_{T'} \in \Gamma_1^a\ ],$$

appelé le *temps de panne directe.*
Le *temps de retour* a la distribution suivante :

$$F_Y(x) := \mathbb{P}\{\ Y \leq x\ \} = \mathbb{P}\{\ T' \leq x \mid \gamma_{T'} \in \Gamma_1^0\ \} =$$

$$= \sum_{\gamma' \in \Gamma_1^0} \mathbb{P}\{T' \leq x \mid \gamma_{T'} = \gamma'\} \cdot \mathbb{P}\{\gamma_{T'} = \gamma' \mid \gamma_{T'} \in \Gamma_1^0\},$$

donc

$$F_Y(x) = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^0} p_\gamma \mathbb{P}\{ T'_{\gamma'} \leq x\}, \; x \geq 0.$$

De la même manière nous obtenons aussi :

$$F_Z(x) := \mathbb{P}\{ Z \leq x \} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^a} p_\gamma \mathbb{P}\{ T'_{\gamma'} \leq x \}, \; x \geq 0.$$

Notons ν la variable aléatoire representant le nombre des retours en e_0 de la trajectoire γ_T. Alors on peut décomposer la durée de vie du système T à partir de T_{e_o}, Y, Z et ν :

$$T = \sum_{1 \leq k < \nu} (s_k + r_k) + s_\nu + Z,$$

où $(s_k)_{k \geq 1}$ et $(r_k)_{k \geq 1}$ sont des suites des v.a. réciproquement indépendantes ayant respectivement les distributions F_0 (de T_{e_o}) et F_Y (de Y). La v.a. ν a des valeurs entières positives et une distribution géométrique, de paramètre ε :

$$\mathbb{P}\{ \nu = m \} = \mathbb{P}^{m-1}\{ \gamma_{T'} \in \Gamma_1^0 \} \cdot \mathbb{P}\{ \gamma_{T'} \in \Gamma_1^a \} = \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1}, \quad \forall \, m \geq 1.$$

Nous supposons toutes ces variables indépendantes entre elles. Par conséquent on peut évaluer la distribution de T :

$$F_T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\nu = m\} \cdot \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^{m} s_k + \sum_{k=1}^{m-1} r_k + Z \leq x\}, \; x \geq 0.$$

Donc on peut écrire :

$$F_T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1} (F_O^{*m} * F_Y^{*(m-1)} * F_Z)(x), \;\; x \geq 0.$$

Remarque Il est possible aussi de déduire cette relation en utilisant l'approche séquentielle évoquée au premier chapitre, en particulier la relation (1.7) :

$$F_T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \in (\Gamma_0^0)^{m-1} \times \Gamma_0^a} p_{\gamma_1} p_{\gamma_2} \ldots p_{\gamma_m} F_{\sum_{k=1}^m T_{\gamma_k}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^0} p_\gamma F_{T_0 + T'_{\gamma'}} \right)^{*(m-1)} * \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^a} p_\gamma F_{T_0 + T'_{\gamma'}} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1} (F_Y * F_O)^{*(m-1)} * F_Z * F_O = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1} F_Y^{*(m-1)} * F_O^{*m} * F_Z$$

Ainsi l'approche analytique est reliée à l'approche séquentielle par le théorème suivant qui permet (au moins formellement) de déterminer les lois de Y et Z.

Théorème 4.2.1 *Les variables aléatoires T (durée de vie), Y (temps de retour) et Z (temps de panne directe), associées au processus markovien X, ont respectivement les fonctions de répartition*

$$F_T = \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a} p_\gamma F_{T_\gamma} = \sum_{\gamma=(e_0,e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) \in \widetilde{\Gamma}_0^a} (p_{e_0 e_{j_1}} F_O) * (p_{e_{j_1} e_{j_2}} F_{e_{j_1}}) * \ldots * (p_{e_{j_{m-1}} e_{j_m}} F_{e_{j_{m-1}}}),$$

$$F_Y = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^0} p_\gamma F_{T'_{\gamma'}} = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{\gamma=(e_0,e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) \in \Gamma_0^0} p_{e_0 e_{j_1}} (p_{e_{j_1} e_{j_2}} F_{e_{j_1}}) * \ldots * (p_{e_{j_{m-1}} e_{j_m}} F_{e_{j_{m-1}}}),$$

$$F_Z = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^a} p_\gamma F_{T'_{\gamma'}} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\gamma=(e_0,e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) \in \Gamma_0^a} p_{e_0 e_{j_1}} (p_{e_{j_1} e_{j_2}} F_{e_{j_1}}) * \ldots * (p_{e_{j_{m-1}} e_{j_m}} F_{e_{j_{m-1}}}),$$

où ε est la probabilité de panne directe.
De plus, si F_0 désigne la fonction de répartition du temps de séjour dans l'état initial, de fonctionnement parfait, alors on a

$$F_T = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^{m-1} (F_0^{*m} * F_Y^{*(m-1)} * F_Z).$$

4.3 Calcul matriciel de la probabilité de panne

Ce qui précéde montre l'importance de la probabilité ε de panne directe. Nous nous proposons, dans cette section, de calculer cette probabilité. La première méthode est une méthode matricielle. Nous donnons dans le paragraphe suivant une méthode qui prenne en compte la stratification. Ensuite nous verrons une troisième méthode que nous appelons séquentielle et qui permet des approximations efficaces. Commençons par formuler le principal résultat de cette section qui permet un calcul explicite de la probabilité de panne directe.

Théorème 4.3.1 *Avec les notations précédemment établies, la probabilité de panne directe s'exprime sous la forme :*

$$\varepsilon = 1 - \frac{D_1}{D}, \tag{4.5}$$

où l'ordre des déterminants D et D_1 est égal au nombre m des états de fonctionnement du système.

DÉMONSTRATION. Considérons

$$Q' = (q'_{jj'})_{(j,j')\in J'\times J'},\ q'_{jj'} = \begin{cases} 0 & si\ j = 0 \\ q_{jj'} & si\ j \neq 0 \end{cases}$$

la *matrice associée au système* S' (correspondant à la matrice Q, associée au système S). Observons que $p^{(1)} = p^{(0)}$. Le vecteur $P = (p_{0j})_{j\in J'}$, la première ligne de Q (et P), représente le *vecteur des probabilités des états initiaux de* S'. Alors, en tenant compte de la définition de ε et de la signification des puissances de Q', on trouve:

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j'\in J_a} \sum_{j\in J'} p_{0j}(q')^{(m)}_{jj'} = p^{(1)} \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (Q')^m\right) \cdot C$$

Mais (voir l'annexe) $U_l - Q'$ est inversible (ici U_l est la matrice identité) , donc on peut encore écrire:

$$\varepsilon = p^{(1)} \cdot (U_l - Q')^{-1} \cdot C \tag{4.6}$$

Nous donnons maintenant une autre expression matricielle mieux adaptée au calcul de ε. Soit $m = card(J_+) < l = card(J')$. Définissons la matrice B restriction de Q' à J_+ par:

$$B = (b_{jj'})_{(j,j')\in J_+\times J_+},\ b_{jj'} = q'_{jj'}.$$

Alors nous avons:

$$1 - \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\Gamma_0^0; l(\gamma)=k} p_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(j_1,\ldots j_{k-1})\in J_+\setminus\{0\}} p_{0j_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{k-1}0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in J_+} p_{0j} b_{jo}^{(k-1)} = \sum_{j\in J_+} p_{0j}(\sum_{k=0}^{\infty} b_{j0}^{(k)})$$

Ainsi nous trouvons la nouvelle expression matricielle pour le calcul de la *probabilité de panne directe*:

$$\varepsilon = 1 - p_+^{(1)} \cdot (U_m - B)^{-1} \cdot \overline{C} \tag{4.7}$$

où: $p_+^{(1)}$ est la restriction de $p^{(1)}$ à J_+, U_m est la matrice unité d'ordre m, $\overline{C}$ est une matrice colonne d'ordre m , de les coefficients $\overline{c}_0 = 1$ et
$\overline{c}_j = 0,\ \forall\ j \in J_+ \setminus \{0\}$.

La formule (4.7) est facilement utilisable pour les systèmes de petite taille. Elle peut être présentée sous une forme plus parlante. Ainsi, en tenant compte du calcul de l'inverse d'une matrice et des définitions de $p_+^{(1)}$ et $\overline{C}$, nous observons que $p_+^{(1)}$ $(U_m - B)^{-1} \cdot \overline{C}$ est simplement le rapport des déterminants $\frac{D_1}{D}$ où $D = det(U_m - B)$ et D_1 est le déterminant obtenu à partir de D en remplaçant sa première ligne par $p_+^{(1)}$. □

Pour les systèmes de grande taille, la formule exacte précédente n'est guère utilisable. Nous pouvons alors chercher une décomposition de la probabilité ε qui tienne compte des propriétés usuelles des systèmes. Si on ne tient pas compte du temps (calcul sur la chaîne incluse et non sur le processus continu) il est raisonnable de supposer que les trajectoires avec peu de réparations ont plus de poids que les autres. Nous proposons donc ci-dessous une formulation matricielle de la probabilité de panne directe par des séquences avec un nombre fixé de réparations. Ainsi, supposons que l'écriture de la matrice carrée Q, d'ordre $l = card\ E^+ \cup E_a^-$, est "compatible" avec l'ordre partiel sur E, i.e.:

$$\forall\ j,k \in J' \quad e_j \preceq e_k \ \Rightarrow\ j \leq k$$

où J' est l'ensemble des indices des états de $E^+ \cup E_a^-$. Considérons deux matrices triangulaires $M = (m_{j,k})$ et $N = (n_{j,k})$ dérivées de Q, correspondant respectivement aux dégradations et aux réparations (sauf celles permettant le retour en e_0), définies par:

$$m_{j,k} = \begin{cases} q_{j,k}, & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases}$$

$$n_{j,k} = \begin{cases} q_{j,k}, & j > k > 0 \\ 0, & j \leq k \text{ ou } k = 0 \end{cases}$$

où $(j,k) \in J' \times J'$.

Observons d'abord que nous avons:

$$\varepsilon = p^{(0)} \cdot \left(\sum_{s=0}^{\infty} (M+N)^s \right) \cdot C = p^{(0)} \cdot (U_l - (M+N))^{-1} \cdot C \tag{4.8}$$

comme variante de l'expression matricielle (4.6) de la probabilité de panne directe.

Notons ε_r - *la probabilité de panne directe par des séquences avec r réparations, où* $r = 0,1,\ldots$

Nous avons, bien sûr:

$$\varepsilon = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \tag{4.9}$$

Nous envisageons ensuite d'exprimer ε_r sous forme matricielle.

Ainsi, soient r et s deux nombres naturels arbitraires. Dans le développement de la puissance matricielle $(M+N)^s$, considérons la somme $S_{s,r}$ des tous les termes contenant r fois la matrice N (pour les r réparations) et $s-r$ (si $r \leq s$) fois la matrice M (pour les $s-r$ dégradations "restantes"). Dans le cas $r > s$, convenons $S_{s,r} = 0$. Alors nous avons $(M+N)^s = \sum_{r=0}^{s} S_{s,r} = \sum_{r=0}^{\infty} S_{s,r}$. La signification de la

matrice $S_{s,r}$ est claire : elle correspond aux probabilités des trajectoires (sans retour) de longueur s avec r réparations. La somme sur s des matrices $S_{s,r}$ donne la matrice des probabilités des trajectoires (sans retour en e_0), ayant exactement r réparations (r fixé). D'où l'expression matricielle de ε_r :

$$\varepsilon_r = p^{(0)} \cdot \left(\sum_{s=0}^{\infty} S_{s,r} \right) \cdot C, \quad r = 0,1,2,\ldots \tag{4.10}$$

Donnons le lien entre entre les différentes formules ci-dessus:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r = \sum_{r=0}^{\infty} p^{(0)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} S_{s,r} \right) C = p^{(0)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} S_{s,r} \right) C =$$

$$= p^{(0)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} (M+N)^s \right) C = \varepsilon$$

Par cette méthode matricielle, nous avons une expression formelle de la probabilité de défaillance. Certes elle n'est applicable que pour des systèmes de petite taille ou assez homogènes. Mais elle permet de mieux mesurer la qualité des différentes approximations que nous donnons dans la suite.

4.4 Encadrement de la probabilité de panne

Dans cette section, nous nous proposons donc d'évaluer la probabilité ε de panne directe, dont l'importance pour l'étude de la fiabilité est montrée par les relations (4.1) et (4.3), en utilisant l'hypothèse de stratification du système.

Le premier objectif est d'obtenir une *sur − estimation* (dépendante de $\underline{k}$) de ε en approchant le processus initial par un processus de type k/n.

Soit e un état de fonctionnement appartenant à un niveau j, avec $0 \leq j \leq \overline{k}$. D'après les définitions des probabilités p_e et q_e de transition à partir de l'état e on déduit les inégalités suivantes:

$$p_e \leq \frac{(n-j)\overline{\lambda}}{(n-j)\overline{\lambda} + \sum_{i;e^{(i)}=1} \mu_i} \leq \frac{(n-j)\overline{\lambda}}{(n-j)\overline{\lambda} + j\underline{\mu}} = \frac{n-j}{(n-j) + j\underline{\theta}}$$

et

$$q_e = 1 - q_e \geq \frac{j\underline{\theta}}{(n-j) + j\underline{\theta}}.$$

Comme dans le chapitre précédent, nous notons :

$$\underline{u}_j = \frac{j\underline{\theta}}{(n-j) + j\underline{\theta}}; \quad \overline{v}_j = \frac{n-j}{(n-j) + j\underline{\theta}} = 1 - \underline{u}_j.$$

Ainsi on peut majorer les probabilités de transition sur une strate :

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,\underline{k}\}\ \ \forall\, e \in E_j \cap E^+ \ :\quad q_e \geq \underline{u}_j;\quad p_e \leq \overline{v}_j \tag{4.11}$$

Notre but est de comparer les probabilités de défaillance sur E à celles d'un modèle sur les niveaux.

Notons p^e la *probabilité de panne directe en partant de* $e \in E_c^+$.
Ainsi p^e représente la somme des *probabilités des trajectoires* γ qui partent de e, arrivent en E_a^-, sans passer par e_0. Dans ce contexte, définissons aussi, d'une manière naturelle, les *probabilités des bords* par :

$$p^{e_0} = 0\ ;\quad p^e = 1,\ \forall e \in E^-.$$

Cet ensemble de probabilités vérifie les relations de récurrence suivantes :

$$p^e = \sum_{e' \in E} p_{ee'} p^{e'} = \tag{4.12}$$

$$= \sum_{e' \in E_{j-1}} p_{ee'} p^{e'} + \sum_{e' \in E_{j+1}} p_{ee'} p^{e'},\ \forall e \in E_c^+ \cap E_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

Observons que, dans ces conditions, le vecteur colonne $\tilde{p} = (p^e)_{e \in E}$ satisfait la relation matricielle

$$\tilde{P} \cdot \tilde{p} = \tilde{p}$$

où $\tilde{P}$ représente la matrice des probabilités des transitions (la matrice de la chaîne incluse), en considérant $E^- \cup \{e_0\}$ comme ensemble d'absorption.
Notons

$$\overline{h}(j) := \max\{p^e,\ e \in E_j\}\ ,\ \ j = 0,1,\ldots,n\ , \tag{4.13}$$

la plus grande probabilité de panne directe à partir du niveau j. Alors, en conformité avec les conditions aux bords, on a

$$\overline{h}(0) = 0 \ \text{ et } \overline{h}(j) = 1,\ \forall j \in \{\underline{k}+1,\ldots,n\}.$$

Puis, d'après (4.12) et en tenant compte de la signification de p_e, q_e, et $\overline{h}(j)$, on déduit l'inéquation vectorielle :

$$\forall j \in \{1,2,\ldots \underline{k}\}\ \ \exists e \in E_j \quad t.q.\ \ \overline{h}(j) \leq q_e\, \overline{h}(j-1) + p_e\, \overline{h}(j+1). \tag{4.14}$$

Montrons que la fonction $\overline{h} : \{0,1,\ldots,n\} \to [0,1]$ est croissante, ce qui semble naturel d'après la définition. Il suffit que nous prouvions par récurrence l'inégalité

$$\overline{h}(j) \leq \overline{h}(j+1),\ j = 0,1,\ldots,\underline{k}.$$

Ainsi, nous avons $\overline{h}(0) = 0 \leq \overline{h}(1)$. Supposons maintenant $\overline{h}(j-1) \leq \overline{h}(j)$, pour un $j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}$. Alors, il existe $e \in E_j$ pour lequel l'inégalité (4.14) est vérifiée et puisque $p_e, q_e > 0$, nous obtenons:

$$0 \leq q_e(\overline{h}(j) - \overline{h}(j-1)) \leq p_e(\overline{h}(j+1) - \overline{h}(j)),$$

d'où $\overline{h}(j) \leq \overline{h}(j+1)$.
Les inégalités (4.11) et (4.14), de pair avec la monotonie de $\overline{h}$, impliquent alors $\overline{h}(j) \leq \overline{h}(j-1) + p_e(\,\overline{h}(j+1) - \overline{h}(j-1)\,) \leq \overline{h}(j-1) + \overline{v}_j(\,\overline{h}(j+1) - \overline{h}(j-1)\,)$, d'où

$$\overline{h}(j) \leq \underline{u}_j \overline{h}(j-1) + \overline{v}_j \overline{h}(j+1),\ \forall j \in \{1,2,\ldots,\underline{k}\}$$

On peut encore écrire cette inégalité sous la forme

$$\overline{h}(j+1) - \overline{h}(j) \geq \underline{w}_j(\,\overline{h}(j) - \overline{h}(j-1)\,),\ j = 1,2,\ldots,\underline{k} \tag{4.15}$$

où

$$\underline{w}_j = \frac{\underline{u}_j}{\overline{v}_j} = \frac{j}{n-j}\underline{\theta}$$

représente une sorte de "raideur" du système (ici $\theta \geq 1$).

Le théorème suivant fournit un encadrement simple de la probabilité de panne directe.

Théorème 4.4.1 *Si on note*

$$\underline{\theta} = \frac{\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mu_i}{\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \lambda_i},\quad \overline{\theta} = \frac{\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mu_i}{\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \lambda_i},$$

$\underline{k}$ — *le dernier niveau ayant tous les états de fonctionnement,*

$\overline{k}$ — *le dernier niveau ayant au moins un état de fonctionnement,*

alors la probabilité de panne directe est encadrée par:

$$\underline{\varepsilon} := \frac{1}{\sum_{j=0}^{\overline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} \overline{\theta}^j} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{\underline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} \underline{\theta}^j} =: \overline{\varepsilon}. \tag{4.16}$$

DÉMONSTRATION. Puisque $\overline{h}(0) = 0$ et que la fonction $\overline{h}$ est croissante, la relation (4.15) donne par récurrence les relations:

$$\overline{h}(j+1) - \overline{h}(j) \geq \underline{w}_1\underline{w}_2\ldots\underline{w}_j\overline{h}(1),\ j = 1,2,\ldots,\underline{k}.$$

D'où, en sommant sur j , on trouve:

$$\overline{h}(\underline{k}+1) - \overline{h}(1) \geq \sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{w}_1\underline{w}_2\ldots\underline{w}_j\overline{h}(1)\ .$$

Mais $\overline{h}(\underline{k}+1) = 1$, donc :

$$\overline{h}(1) \leq \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{\underline{k}} \underline{w}_1\underline{w}_2\cdots\underline{w}_j} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{\underline{k}} \frac{1}{\binom{n-1}{j}}\underline{\theta}^j} \tag{4.17}$$

De plus, d'après les définitions de ε, p^e et $\overline{h}$ on a

$$\varepsilon = \sum_{e\in E_1} p_{e_0 e} p^e \leq \sum_{e\in E_1} p_{e_0 e}\overline{h}(1) = \overline{h}(1) \tag{4.18}$$

Enfin, à partir de (4.17) et (4.18) on déduit la majoration suivante de ε :

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{\underline{k}} \frac{1}{\binom{n-1}{j}}\underline{\theta}^j}. \tag{4.19}$$

C'est un majorant très facile à calculer à partir des taux de défaillance et de réparation.

On souhaite maintenant minorer ε. Rappelons que le dernier niveau du système avec au moins un état de fonctionnement est noté $\overline{k}$, $1 < \underline{k} \leq \overline{k} < n$. Alors, pour $j > \overline{k}$ tous les éléments du niveau j sont des états de panne. Notons

$$\overline{u}_j = \frac{j\overline{\theta}}{(n-j)+j\overline{\theta}}; \quad \underline{v}_j = 1 - \overline{u}_j.$$

Alors nous avons

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,\overline{k}\} \;\; \forall\, e \in E_j \cap E^+ \;:\; p_e \geq \underline{v}_j; \quad q_e \leq \overline{u}_j. \tag{4.20}$$

La fonction

$$\underline{h} : \{0,1,\ldots,\overline{k}+1\} \to [0,1],\ \underline{h}(j) = \min\{p^e,\ e \in E_j\}$$

est croissante et satisfait les conditions aux bords $\underline{h}(0) = 0$, $\underline{h}(\overline{k}+1) = 1$. Pour prouver (par récurrence) sa monotonie on peut employer la relation

$$q_e(\underline{h}(j) - \underline{h}(j-1)) \geq p_e(\underline{h}(j+1) - \underline{h}(j)),$$

valable pour au moins un état $e \in E_j$, $1 \leq j \leq \overline{k}$, à partir de l'inégalité $\underline{h}(\overline{k}) < 1 = \underline{h}(\overline{k}+1)$.

Puisque

$$\underline{h}(j) \geq \overline{u}_j\underline{h}(j-1) + \underline{v}_j\underline{h}(j+1),\ \forall j \in \{1,2,\ldots,\overline{k}\},$$

on déduit une inégalité analogue à (4.18)

$$\underline{h}(1) \geq \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{\overline{k}} \frac{\overline{\theta}^j}{\binom{n-1}{j}}} \tag{4.21}$$

Mais après la définition de $\underline{h}$ on a

$$\varepsilon = \sum_{e \in E_1} p_{e_0 e} p^e \geq \sum_{e \in E_1} p_{e_0 e} \underline{h}(1) = \underline{h}(1)$$

et à partir de (4.21) on trouve la minoration de ε. □

Ainsi avons-nous obtenu pour des systèmes markoviens de grande taille un encadrement de la probabilité de panne directe qui ne tienne compte que des tailles des premières coupes minimales et des taux (de défaillance ou de réparation) des différents composants. **Remarques**

a) Si on considère les paramètres moyens suivants :

$$k = \frac{1}{2}(\underline{k} + \overline{k}), \quad \theta = \frac{1}{2}(\underline{\theta} + \overline{\theta}),$$

alors, pour θ assez grand, on a une évaluation rapide de la probabilité de panne directe :

$$\varepsilon \approx \binom{n-1}{k} \theta^{-k}.$$

b) Un système de type k/n classique où tous les composants sont identiques ($\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$) et de plus $\underline{k} = \overline{k}$ correspond à un cas particulier intéréssant. Dans ce cas, à partir de (4.16) on retrouve la formule exacte de ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j}^{-1} \theta^j}, \tag{4.22}$$

où $k = \underline{k} + 1 = \overline{k} + 1$ et $\theta = \frac{\mu}{\lambda}$.

L'encadrement de la probabilité ε de panne directe donné dans le théorème ci-dessus peut être légèrement amélioré. Remarquons d'abord que les inégalités (4.11) et (4.20) correspondent au passage à "l'uniformisation" des taux de réparation et dégradation. En fait, le choix des taux extrêmes n'est pas le meilleur si on souhaite garder ce type d'inégalités, de façon que la démonstration de l'encadrement reste valable.

Un raisonnement similaire à celui employé pour obtenir le résultat du THÉORÈME 4.4.1 permet d'affiner l'encadrement de ε en prenant en compte une raideur moyenne au lieu de la raideur maximale.

Théorème 4.4.2 *Soit* $\theta_* = \underline{\mu} / \lambda^*$ *et* $\theta^* = \overline{\mu} / \lambda_*$, *où* λ_* *et* λ^* *ont été definis par (1.10). Alors :*

$$\varepsilon_* := \frac{1}{\sum_{j=0}^{\overline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} (\theta^*)^j} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{\underline{k}} \binom{n-1}{j}^{-1} (\theta_*)^j} =: \varepsilon^*. \tag{4.23}$$

Evidemment, plus les taux de dégradations sont proches les uns des autres, meilleur est l'encadrement ci-desus.

4.5 Etude séquentielle de la probabilité de panne directe

L'encadrement précédent de ε est somme toute assez brutal. Un autre façon d'approcher ε est de classer les séquences par nombre de réparations. Chaque réparation engendre un "aller-retour" qui prend du temps et qui est peu probable. Nous envisageons maintenant le comportement de la suite $(\varepsilon_r)_{r\geq 0}$ des probabilités de panne sans retour par des séquences avec un nombre fixé de réparations (voir (4.10) pour le calcul exact de ε_r). Il est bien connu (voir GNEDENKO et SOLOVYEV, 1974) que le terme dominant de la somme $\varepsilon = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r$, (cf 4.9), est le premier, ε_0, qui représente la probabilité de panne par des séquences sans réparations. On emploie souvent le terme de *séquences monotones* pour désigner les séquences de ce type. La connaissance du poids de ε_0 dans la somme entière permet d'approcher ε. Soit :

N_r *le nombre des séquences de panne, sans retour en* e_0, *avec* r *réparations*

Notre étude concerne en même temps le comportement de la suite $(N_r)_{r\geq 0}$. En fait, puisque $\varepsilon = \sum_{\gamma\in\Gamma_0^a} p_\gamma$ où Γ_0^a est l'ensemble des trajectoires de panne directe (voir la relation (4.4)), il existe un lien étroit entre les suites $(N_r)_{r\geq 0}$ et $(\varepsilon_r)_{r\geq 0}$. Le phénomène assez surprenant que nous montrons est le comportement "presque géométrique" des suites (N_r) et (ε_r).

Regardons d'abord le cas particulier d'un système k/n avec des composants identiques.

4.5.1 Nombre des séquences avec un nombre fixé de réparations

Dans ce paragraphe nous supposons $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$, $i = 1,\ldots,n$ et $\underline{k} = \overline{k}$. Nous sommes donc en présence d'un système k/n avec $k = \underline{k} + 1 = \overline{k} + 1$.

Une trajectoire γ a été définie comme une succession d'états. En fait, on peut aussi l'interpréter comme une succession de composants telle que chaque apparition d'un composant indique son changement d'état. Ainsi, une trajectoire $\gamma \in \Gamma_0^a$ avec r réparations comprend une succession de $k + 2r$ composants telle que on a k "apparitions distinctes" (celles des composants non-réparés jusqu'à la fin) et r "paires d'apparitions" (celles des composants réparés). Si on "éloigne" de cette succession

les $2r$ termes correspondant aux composants réparés, sans changer l'ordre des autres termes, on obtient une trajectoire $\gamma_0 \in \Gamma_0^a$ sans réparations. Nous allons dire que la séquence γ avec r réparations est "dérivée" de la séquence sans réparations γ_0. Cela nous permettra de simplifier l'étude de la suite $(N_r)_{r\geq 0}$.

Lemme 4.5.1 *La suite $(N_r)_{r\geq 0}$ des nombres des trajectoires de panne directe avec r réparations satisfait les relations:*
(i) $N_0 = n!/(n-k)!$
(ii) N_r est multiple entier de N_0.

DÉMONSTRATION.
(i) N_0 correspond au nombre des choix de k composants (en ordre) parmi les n composants.
(ii) On partage l'ensemble des trajectoires de panne, sans retour, avec r réparations en classes, tels que chaque classe contient toutes les trajectoires "dérivées" d'une trajectoire de panne directe fixée, sans reparations. □
Notons:

$$(4.24)\quad x_r = \frac{N_r}{N_0} \quad \begin{cases} \textit{le nombre des trajectoires de } \Gamma_0^a \textit{ avec } r \textit{ réparations, dérivées} \\ \textit{d'une trajectoire (arbitraire, fixée) de } \Gamma_0^a \textit{ sans réparations} \end{cases}$$

Pour $r \in \{1,2,\ldots\}$ et $j \in \{2,\ldots,k-1\}$, soit:

$$(4.25)\quad x_{r,j} \quad \begin{cases} \textit{le nombre des trajectoires de } \Gamma_0^a \textit{ avec } r \textit{ réparations, dérivées} \\ \textit{d'une trajectoire (arbitraire, fixée) de } \Gamma_0^a \textit{ sans réparations,} \\ \textit{ayant leur première réparation au niveau } j \end{cases}$$

Evidemment nous avons:

$$(4.26)\qquad x_r = \sum_{j=2}^{k-1} x_{r,j},\quad r = 1,2,\ldots$$

Nous pouvons établir des relations de récurrence entre les différents nombres de trajectoires.

Lemme 4.5.2 *Pour $j = 2,\ldots,k-1$ et $r = 1,2,\ldots$ on a:*

$$(4.27)\qquad \begin{cases} x_{1,j} = a_j \\ \\ x_{r+1,j} = a_j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} x_{r,i} \end{cases}$$

où $a_j := j(n+1-j)$.

DÉMONSTRATION. Si la (première) réparation intervient au niveau $j \geq 2$, alors le composant réparé appartient à un ensemble comptant $n-(j-1)$ composants (ceux

distincts des premiers $j-1$ composants non-réparés). Evidemment, la dégradation de ce composant a eu lieu dans un niveau inférieur $j' \in \{0,1,\ldots,j-1\}$. Par conséquent il existe exactement $a_j = j(n+1-j)$ trajectoires de panne directe avec une seule réparation, passée au niveau j, qui dérivent d'une trajectoire sans réparation fixée. Ainsi on obtient $x_{1,j} = a_j$.

Pour la deuxième relation, observons que chaque séquence avec $r+1$ réparations, dont la première a lieu au niveau j, peut être obtenue en ajoutant en "face" une réparation à une séquence avec r réparations dont la première a lieu dans un niveau i, tel que $\max\{2,j-1\} \leq i \leq k-1$. Ensuite on emploie le même raisonnement que celui de la première relation. □

Remarque Clairement les relations (4.24)...(4.27) sont définies pour $k \geq 3$. On observe facilement que pour $k \in \{1,2\}$ il n'existe pas de séquence de panne avec réparation, sans retour dans l'état parfait. De plus, pour $k = 3$, d'après le lemme précédent, nous obtenons $x_1 = x_{1,2} = a_2 = 2(n-1)$ et $x_{r+1} = a_2 x_r$, $r = 1,2,\ldots$. Alors $N_{r+1} = 2(n-1)N_r$, $r \geq 0$, donc la suite $(N_r)_{r\geq 1}$ est une progression géométrique. L'étude de la suite $(N_r)_{r\geq 1}$ reste intéressante pour $k \geq 4$, ce que nous allons supposer désormais.

Notons

$$A_j := \sum_{i=2}^{j} i(n+1-i) = \sum_{i=2}^{j} a_i, \quad j = 3,\ldots,k-1.$$

A partir du LEMME 4.5.2 et de (4.26), on obtient directement des écritures nouvelles pour les nombres x_r.

Corollaire 4.5.1 *On a les récurrences:*

$$(4.28) \qquad \begin{cases} x_1 = A_{k-1} \\ \\ x_{r+1} = x_{r,2}A_3 + \ldots + x_{r,k-2}A_{k-1} + x_{r,k-1}A_{k-1}, \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Pour obtenir des informations sur le comportement asymptotique des nombres N_r pour $r = 0,1,\ldots$, nous comparons les termes consécutifs de cette suite. Ainsi, définissons la suite $(\rho_r)_{r\geq 1}$ par:

$$(4.29) \qquad \rho_r := \frac{N_r}{N_{r-1}} = \frac{x_r}{x_{r-1}}, \quad r = 1,2,\ldots$$

Lemme 4.5.3

(i) Les nombres ρ_r, $r = 2,3,\ldots$, sont majorés par $\rho_1 = A_{k-1}$.

(ii) On les inégalités:

$$N_r \leq \frac{n!}{(n-k)!}(A_{k-1})^r, \quad r = 0,1,\ldots \tag{4.30}$$

DÉMONSTRATION.

(i) D'abord, il faut observer que d'après (4.24) et la première relation de (4.28), nous avons: $\rho_1 = x_1 = A_{k-1}$. Alors, pour $r > 1$, les relations (4.24), (4.26), (4.28) et la propriété $A_j \leq A_{k-1}$, $\forall\, j \in \{3,\ldots,k-1\}$, donnent:

$$\rho_r = \frac{N_r}{N_{r-1}} = \frac{x_r}{x_{r-1}} = \frac{x_{r-1,2}A_3 + \ldots + x_{r-1,k-2}A_{k-1} + x_{r-1,k-1}A_{k-1}}{x_{r-1}} \leq$$

$$\leq A_{k-1}\frac{\sum_{j=2}^{k-1} x_{r-1,j}}{x_{r-1}} = A_{k-1} = \rho_1,$$

d'où la conclusion.

(ii) Puisque ρ_1 est un majorant de l'ensemble $\{\rho_r\}_{r\geq 1}$, nous avons:

$$N_r = \rho_1\rho_2\ldots\rho_r N_0 \leq \rho_1^r N_0 = (A_{k-1})^r \frac{n!}{(n-k)!}$$

(voir aussi LEMME 4.5.1 pour la valeur de N_0). □

Pour $r = 1,2,\ldots$ notons:

$$b_{r,j} = \frac{x_{r,j}}{x_r}, \quad j = 2,\ldots,k-1, \tag{4.31}$$

la proportion des trajectoires avec la première réparation au niveau j, parmi les trajectoires avec r réparations.

Remarque Pour $k = 4$ nous avons: $x_r = x_{r,2} + x_{r,3}$ et $x_{r+1} = A_3x_{r,2} + A_3x_{r,3}$, d'où $x_{r+1} = A_3x_r$, $r = 1,2,\ldots$. Alors $\rho_r = A_3 = 2(n-1) + 3(n-2) = 5n - 8$. Par conséquent, la suite $(N_r)_{r\geq 1}$ est une progression géométrique (comme dans le cas $k = 3$ que nous avons déjà vu). De plus, la proportion des trajectoires avec la première réparation au niveau 2 ou 3 reste constante:

$$b_{r,2} = \frac{a_2}{a_2 + a_3} = \frac{2n-2}{5n-8}, \quad b_{r,3} = \frac{a_2}{a_2 + a_3} = \frac{3n-6}{5n-8}, \ \forall\, r \geq 1.$$

Par contre, la démonstration du lemme précédent montre que, pour $k > 4$, on a $\rho_r < \rho_1$, $\forall\, r > 1$.

Le théorème suivant résume le comportement asymptotique de la suite $(N_r)_{r\geq 1}$.

Théorème 4.5.1 *Pour un système k/n, avec $3 \leq k \leq n$, soit N_r le nombre des séquences de panne qui partent de e_0, ne reviennent pas en e_0 et comportent exactement r réparations.*
Alors les assertions suivantes sont vraies :
(i) La suite $(\rho_r)_{r\geq 1}$ des rapports $\rho_r = \frac{N_r}{N_{r-1}}$ est décroissante vers une limite positive $\rho = \rho(n,k)$.
(ii) Les suites $(b_{r,j})_{r\geq 1}$, $j = 2,\ldots k-1$, définies par la relation (4.31) convergent vers les limites respectives $b_j = b_j(n,k) \geq 0$, $j = 2,\ldots,k-1$.
(iii) Les limites ci-dessus satisfont le système :

$$(4.32) \qquad \begin{cases} \rho\, b_j = a_j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_i, \quad j = 2,\ldots,k-1 \\ \\ \sum_{j=2}^{k-1} b_j = 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.
Pour $k = 3$ ou $k = 4$ nous avons vu que le problème ne posait aucune difficulté. Nous supposons donc $k > 4$.
(i) D'après le LEMME 4.5.2 et la définition (4.31) des nombres $b_{r,j}$, on obtient :

$$(4.33) \qquad \begin{cases} b_{1,j} = \frac{a_j}{A_{k-1}} \\ \\ \rho_{r+1}\, b_{r+1,j} = a_j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r,i}, \quad r \geq 1, \end{cases}$$

pour tout $j \in \{2,3,\ldots,k-1\}$.
Montrons, par récurrence la relation :

$$(4.34) \qquad \frac{b_{r+1,2}}{b_{r,2}} \geq \frac{b_{r+1,3}}{b_{r,3}} \geq \ldots \geq \frac{b_{r+1,k-1}}{b_{r,k}}, \quad r \geq 1.$$

Pour $r = 1$, le système de relations (4.33) donne

$$\frac{b_{2,2}}{b_{2,3}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_{1,2}}{b_{1,3}} \quad \text{et} \quad \frac{b_{2,j}}{b_{2,j+1}} = \frac{a_j \sum_{i=j-1}^{k-1} b_{1,i}}{a_{j+1} \sum_{i=j}^{k-1} b_{1,i}} > \frac{a_j}{a_{j+1}} = \frac{b_{1,j}}{b_{1,j+1}},$$

pour $j = 3,\ldots,k-2$. Il suit $\frac{b_{2,j}}{b_{1,j}} \geq \frac{b_{2,j+1}}{b_{1,j+1}}$, $2 \leq j \leq k-2$.
Supposons maintenant que la relation (4.34) est vérifiée pour certain $r \geq 1$.
En employant (4.33), nous obtenons :

$$(4.35) \qquad \frac{b_{r+2,j}}{b_{r+1,j}} - \frac{b_{r+2,j+1}}{b_{r+1,j+1}} = \frac{\rho_{r+1}}{\rho_{r+2}} \left(\frac{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r,i}} - \frac{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r,i}} \right)$$

pour tout $j \in \{2,3,\ldots,k-2\}$. Mais l'expression $\frac{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r,i}} - \frac{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r,i}}$ est nulle pour $j=2$ et positive pour $3 \leq j \leq k-2$.
Ainsi pour $3 \leq j \leq k-2$, on a:

$$\frac{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_{r,i}} - \frac{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r+1,i}}{\sum_{i=j}^{k-1} b_{r,i}} = \frac{\sum_{i=j}^{k-1}(b_{r+1,j-1}b_{r,i} - b_{r,j-1}b_{r+1,i})}{\sum_{i=j-1}^{k-1} b_{r,i} \sum_{i=j}^{k-1} b_{r,i}} > 0,$$

en conformité avec l'hypothèse (4.34). Alors, la relation (4.35) implique $\frac{b_{r+2,j}}{b_{r+1,j}} \geq \frac{b_{r+2,j+1}}{b_{r+1,j+1}}$, $2 \leq j \leq k-2$. Par conséquent la relation (4.34) est prouvée par récurrence.

Nous avons (voir (4.26) et (4.31)):

$$\sum_{j=2}^{k-1} b_{r,j} = 1, \forall\, r \geq 1 \tag{4.36}$$

Alors la relation (4.34) assure l'existence d'un niveau "de séparation" j_r^* tel que $\frac{b_{r+1,j}}{b_{r,j}} > 1$, si $2 \leq j < j_r^*$ et $\frac{b_{r+1,j}}{b_{r,j}} \leq 1$, si $j_r^* \leq j \leq k-1$. D'autre part, la somme sur $j \in \{2,\ldots,k-1\}$ des relations en r du système (4.33) donne:

$$\rho_{r+1} = b_{r,2}A_3 + b_{r,3}A_4 + \ldots + b_{r,k-2}A_{k-1} + b_{r,k-1}A_{k-1}.$$

Il faut mentionner que la relation ci-dessus peut se déduire aussi aussi à partir de la deuxième relation de (4.28), en divisant par x_r. Alors, puisque $A_j < A_{j+1}$, nous avons:

$$\rho_{r+1} - \rho_{r+2} = \sum_{j=2}^{k-1} A_j(b_{r,j} - b_{r+1,j}) = \sum_{j \geq j_r^*} A_j(b_{r,j} - b_{r+1,j}) - \sum_{j<j_r^*} A_j(b_{r+1,j} - b_{r,j}) \geq$$

$$\geq A_{j_r^*}\left(\sum_{j \geq j_r^*}(b_{r,j} - b_{r+1,j}) - \sum_{j<j_r^*}(b_{r+1,j} - b_{r,j})\right) = A_{j_r^*}\left(\sum_{j=2}^{k-1} b_{r,j} - \sum_{j=2}^{k-1} b_{r+1,j}\right) = 0.$$

Rappelons aussi $\rho_2 \leq \rho_1$, cf. l'assertion (i) du LEMME 4.5.3. Il suit:

$$\rho_r \geq \rho_{r+1} > 0, \ \forall\, r \geq 1,$$

donc la suite $(\rho_r)_{r \geq 1}$ converge vers une limite $\rho = \rho(n,k) \geq 0$. Enfin, la relation (4.32) donnera $\rho > 0$.

(ii) Pour prouver la convergence des suites $(b_{r,j+1})_{r \geq 1}$, $j = 2,\ldots,k-1$, nous allons employer un raisonnement par réccurence sur j, à partir de la deuxième relation de (4.33).

Ainsi nous avons $b_{r+1,k-1} = \frac{a_{k-1}}{\rho_{r+1}} b_{r,k-1}$, d'où: $\frac{b_{r+1,k-1}}{b_{r+2,k-1}} = \frac{\rho_r}{\rho_{r+1}} \frac{b_{r,k-1}}{b_{r+1,k-1}} \geq \frac{b_{r,k-1}}{b_{r+1,k-1}}$.
Mais, d'après le LEMME 4.5.3, on a $b_{2,k-1} = \frac{a_{k-1}}{\rho_2} b_{1,k-1} \leq \frac{a_{k-1}}{A_{k-1}} b_{1,k-1} < b_{1,k-1}$.

Les dernières inégalités assurent la décroissance de la suite $(b_{r,k-1})_{r\geq 1}$, donc sa convergence, puisque $b_{r,k-1} \in [0,1]$.
Supposons maintenant que les suites $(b_{r,i})_{r\geq 1}$, $i \in \{j,\ldots,k-1\}$, sont convergentes, où $2 < j \leq k-1$. Mais la relation (4.33) implique $b_{r,j-1} = \frac{1}{a_j}\rho_{r+1} b_{r+1,j} - \sum_{i=j}^{k-1} b_{r,i}$, d'où la convergence de la suite $(b_{r,j-1})_{r\geq 1}$.
(iii) On passe à la limite dans les relations (4.33) et (4.36). □

Remarque 1
1) On observe facilement que les limites $b_j = \lim_{r\to\infty} b_{r,j}$, $j = 2,\ldots,k-1$ et $\rho = \lim_{r\to\infty} \rho_r$ sont uniquement déterminées par le système (4.32).
On peut vérifier cela sur l'exemple suivant. Prenons $n = 6$ et $k = 5$ le système (4.32) devient :

$$\begin{cases} \rho\, b_2 = 10(b_2 + b_3 + b_4) \\ \rho\, b_3 = 12(b_2 + b_3 + b_4) \\ \rho\, b_4 = 12(b_3 + b_4) \\ b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\ b_2, b_3, b_4 \geq 0; \quad \rho > 0 \end{cases}$$

On obtient : $$\rho^2 - 34\rho + 120 = 0, \quad \rho \geq 10, \quad \Rightarrow \quad \rho = 30$$

et $$b_2 = \frac{1}{3} = 0.3333,\ b_3 = \frac{2}{5} = 0.4,\ b_4 = \frac{4}{15} = 0.2667$$

Le tableau suivant, réalisé à partir de *matlab*, montre la vitesse de convergence suivante : $b_{r,j} \to b_j$, $j \in \{1,2,3\}$, et $\rho_r \to \rho$:

r	$b_{2,r}$	$b_{3,r}$	$b_{4,r}$	ρ_r
1	0.2941	0.3529	0.3529	34.0000
2	0.3282	0.3938	0.2780	30.4706
3	0.3326	0.3992	0.2682	30.0618
4	0.3332	0.3999	0.2669	30.0082
5	0.3333	0.4000	0.2667	30.0011
6	0.3333	0.4000	0.2667	30.0001
7	0.3333	0.4000	0.2667	30.0000

Remarque 2 La relation (4.34) montre qu'au "passage" de r à $r+1$ les nombres $b_{\cdot,j}$ augmentent pour des petites valeurs de j et diminuent pour des grandes valeurs de j. Ce phénomène est illustré par la figure suivante, qui donne la variation des coefficients $b_{r,j}$ pour différentes valeurs de r.

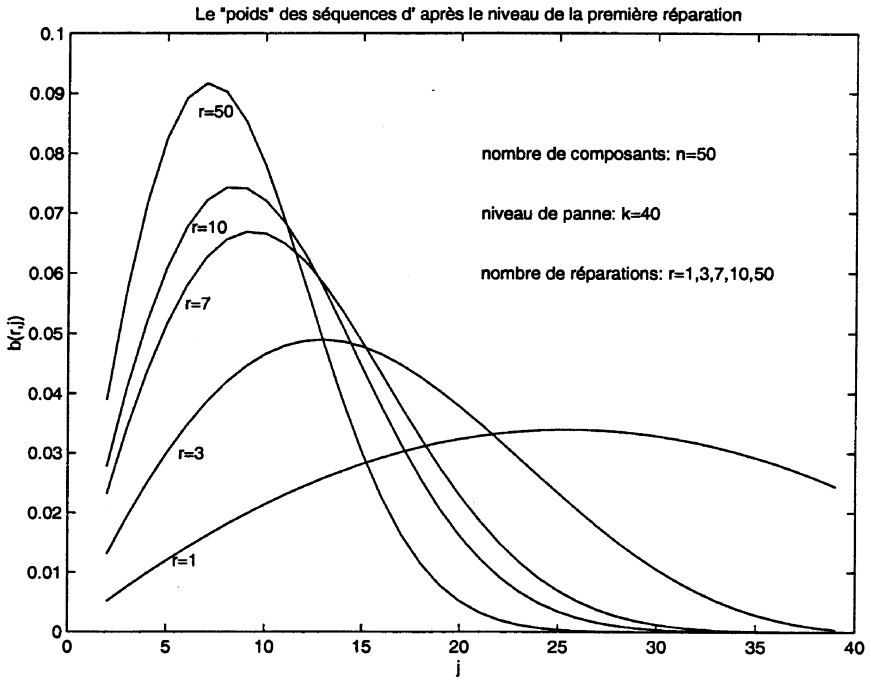

Figure 4.1 *Les coefficients* $b_{r,j}$ *en fonction de* $j \in \{2,3,\ldots,40\}$, *pour* $r \in \{1,3,7,15,50\}$.

Remarque 3 La mesure de probabilité $B = (b_j)$ sur l'ensemble $\{2,3,\ldots,k-1\}$ est "proche" d'une distribution normale tronquée.

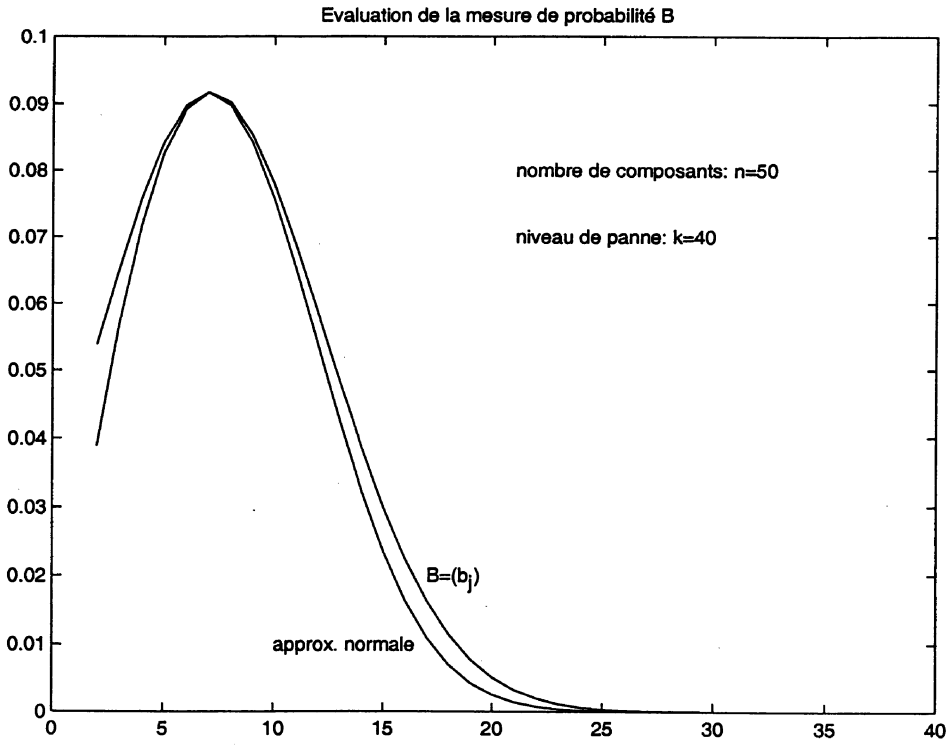

Figure 4.2 *L'approximation de la loi de probabilité* $B = (b_j)_{2\leq j\leq k-1}$ *par une distribution normale tronquée de densité* $\varphi_{n,k}(x) = c\,e^{-\frac{(x-\mathbb{E}(B))^2}{k+\sqrt{n}}}$, $x \in [2,k-1]$

On peut aussi prendre f continue t.q. $f(j) \approx b_j$, $j = 2,\ldots,k-1$.
Pour trouver f on considère, à partir de (4.32), le système integral :

$$\begin{cases} v(x)\left(\frac{3}{2}f(x) + \int_x^{k-1} f(t)dt\right) = \widetilde{\rho} f(x), \quad x \in [3,k-1] \\ \\ \int_3^{k-1} f(t)dt = 1 - \frac{1}{2\widetilde{\rho}}(7n-8) \end{cases}$$

avec $v(x) = x(n+1-x)$.
Le système ci-dessus a une solution unique f sur l'intervalle $[3,k-2]$:

$$f(x) = \alpha h(x) e^{-\int_3^x h(t)dt}, \quad x \in [3,k-2]$$

avec

$$h(x) = \frac{v(x)}{\widetilde{\rho} - \frac{3}{2}v(x)}, \qquad \alpha = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{7n-8}{3(k-1)(n+2-k)}\right)$$

et

$$\widetilde{\rho} = \frac{3}{2}v(k-1) = \frac{3}{2}(k-1)(n+2-k)$$

En fait, $\widetilde{\rho}$ est une sous-évaluation de ρ. □

Dans la suite on s'intéresse au comportement assymptotique du rapport $\frac{\rho}{n}$, où $\rho = \lim_{r\to\infty} \rho_r$ est donné par le système (4.32). Ainsi, supposons $k \geq 4$, fixé, et $n \geq k$, variable. Pour indiquer la dépendance de ρ par rapport à n, nous notons désormais $\rho(n)$ au lieu de ρ. On adopte la même convention pour les coefficients b_j, $j = 2,3,\ldots,k-1$.
La "réplique" suivante du THÉORÈME 4.5.1 permet d'approcher $\rho(n)$ pour n suffisamment grand.

Théorème 4.5.2
(i) La suite $(\frac{\rho(n)}{n})_{n\geq k}$ *est croissante vers une limite finie* $l = l(k)$.
(ii) Pour chaque $j \in \{2,\ldots,k-1\}$, *la suite* $(b_j(n))_{n\geq k}$ *converge vers une limite positive* $c_j = c_j(k)$.
(iii) Les limites ci-dessus satisfont le système

$$(4.37) \qquad \begin{cases} l\, c_j = j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} c_i, \quad j = 2,\ldots,k-1 \\ \\ \sum_{j=2}^{k-1} c_j = 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.
(i) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, soit $j_n \in \{2,\ldots,k-1\}$ tel que $\frac{b_{j_n}(n)}{b_{j_n}(n+1)} = \max_{2\leq i\leq k-1} \frac{b_i(n)}{b_i(n+1)}$.
Alors, d'après (4.32), on obtient :

$$\frac{\rho(n)}{n} = \frac{j_n(n+1-j_n)}{n} \sum_{i=\max\{2,j_n-1\}}^{k-1} \frac{b_i(n)}{b_{j_n}(n)}$$

$$\frac{\rho(n)}{n} < \frac{j_n(n+2-j_n)}{n+1} \sum_{i=\max\{2,j_n-1\}}^{k-1} \frac{b_i(n+1)}{b_{j_n}(n+1)} = \frac{\rho(n+1)}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\rho(n)}{n} < \frac{\rho(n+1)}{n+1}, \quad \forall\, n \geq k. \tag{4.38}$$

D'autre part nous avons :

$$\frac{\rho(n)}{n} b_j = \frac{j(n+1-j)}{n} \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} b_i(n) \leq j, \quad j = 2, \ldots k-1.$$

En sommant les inégalités ci-dessus nous obtenons :

$$\frac{\rho(n)}{n} \leq \frac{(k-2)(k-1)}{2}, \quad \forall\, n \geq k. \tag{4.39}$$

Les relations (4.38) et (4.39) assurent la convergence de la suite $(\rho(n)/n)$ vers une limite finie l (qui depend évidemment de k).

(ii) En employant (4.32), nous obtenons la convergence des suites $(b_j(n))_{n\geq k}$ par récurrence.
En effet, pour $j = 2$ nous avons $b_2(n) = \frac{2(n-1)}{n}\frac{n}{\rho(n)} \to \frac{2}{l}$. Puis nous utilisons l'écriture $b_{j+1} = \frac{(j+1)(n-j)}{n}\frac{n}{\rho(n)}(1 - \sum_{i=2}^{j-1} b_i(n))$ à dans l'hypothèse où elle est valable pour tout $i \leq j$.

(iii) En conformité avec les assertions antérieures, on peut passer à la limite dans la première relation de (4.32), divisée par n. Ainsi on obtient la première relation du système (4.37). La deuxième relation dérive directement de la deuxième relation de (4.32). □

Remarque

Les nombres l et c_j sont uniquement déterminés par le système (4.37) et d'après le théorème précédent, on a :

$$\rho(n) = l\, n + 0(n), \quad n \to \infty, \quad k \text{ fixé}.$$

Pour la limite l on a l'encadrement suivant (voir la remarque précédente et la relation (4.39)) :

$$\frac{3(k-1)}{2} < l \leq \frac{(k+2)(k-1)}{2}.$$

ILLUSTRATION NUMERIQUE:

k	3	4	5	...	10	...	30
$\rho(n)/n$ (*)	1.999	4.999	7.998	...	23.599	...	93.978
$l = \lim_{n\to\infty} \rho(n)/n$	2	5	8	...	23.6	...	94

(*) $n = 10\ 000$

4.5.2 Séquences avec un nombre fixé de réparations

Venons en à l'étude de la suite $(\varepsilon_r)_{r\geq 0}$ des probabilités de panne directe avec r réparations. Le système k/n avec composants exponentiels identiques se modélise par un processus "de vie et mort" sur l'ensemble des niveaux $\{0,1,\ldots,k\}$, avec les taux de transition suivants:

$$0 \underset{\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2\mu}{\overset{(n-1)\lambda}{\rightleftarrows}} 2 \quad \ldots \quad k-2 \underset{(k-1)\mu}{\overset{(n-k+2)\lambda}{\rightleftarrows}} k-1 \overset{(n-k+1)\lambda}{\longrightarrow} k$$

Alors la probabilité de la transition $j \to j-1$ est $q_j = \frac{j\mu}{(n-j)\lambda+j\mu}$ tandis que la probabilité de la transition $j \to j+1$ est $p_j = \frac{(n-j)\lambda}{(n-j)\lambda+j\mu}$, pour $j = 0,1,\ldots,k-1$. Par conséquent on a:

$$\varepsilon_0 = p_0 p_1 \cdots p_{k-1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j)\lambda}{(n-j)\lambda + j\mu} \tag{4.40}$$

Le lien entre N_0 et ε_0 est clair. Ainsi, d'après l'assertion (i) de LEMME 4.5.1, on peut interpréter ε_0 comme:

$$\varepsilon_0 = N_0\, p_\gamma,$$

où

$$p_\gamma = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(n-j)\lambda + j\mu}$$

désigne la probabilité d'une séquence arbitraire $\gamma \in \Gamma_0^a$.

Soit $r \geq 1$. Le modèle stratifié nous permet de comprendre ε_r comme la somme des probabilités des trajectoires sur les niveaux $\{0,1,\ldots,k\}$ qui partent de 0, arrivent à k, sans retour en 0, avec exactement r "pas en arrière". Si on retient dans cette somme seulement les trajectoires dont le premier "pas en arrière" a lieu au niveau j, on obtient le nombre $\varepsilon_{r,j}$ défini comme *la probabilité de panne sans retour, par des*

séquences avec r réparations, dont la première au niveau j. Clairement nous avons

$$\varepsilon_r = \sum_{j=2}^{k-1} \varepsilon_{r,j}.$$

Nous nous proposons d'analyser la suite $(\varepsilon_r)_{r\geq 1}$ en se référant aux récurrences vérifiées par les nombres $\varepsilon_{r,j}$.

Lemme 4.5.4 *Pour $j \in \{2,\ldots,k-1\}$ et $r \geq 1$ on a les relations :*

$$\text{(4.41)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{1,j} = \alpha_j \, \varepsilon_0 \\ \\ \varepsilon_{r+1,j} = \alpha_j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1} \varepsilon_{r,i}, \end{cases}$$

où

$$\alpha_j = q_j p_{j-1} = \frac{j(n-j+1)\lambda\mu}{[(n-j)\lambda + j\mu]\,[(n-j+1)\lambda + (j-1)\mu]}$$

DÉMONSTRATION. On observe que si on ajoute la "boucle" $j \to j-1 \to j$ à une trajectoire sur les niveaux, alors son nombre de "pas en arrière" augmente d'une unité. La probabilité de cette boucle est $q_j p_{j-1}$. Après un petit calcul, tenant compte de la signification des probabilités ε_0 et $\varepsilon_{r,j}$, nous obtenons les relations de récurrence de l'énoncé. □

Remarque

Le lemme ci-dessus est en liaison directe avec le LEMME 4.5.2, les réels α_j "remplaçant" ici les entiers a_j du lemme cité. En fait, si on considère dans le modèle non-stratifié une trajectoire arbitraire $\gamma = (e,e',e")$, avec $e,e" \in E_j$ et $e' \in E_{j-1}$, alors on a $\alpha_j = a_j \, p_\gamma$, où $p_\gamma = \frac{\lambda\mu}{[(n-j)\lambda+j\mu]\,[(n-j+1)\lambda+(j-1)\mu]}$ est la probabilité de γ. □

Corollaire 4.5.2 *Notons $\mathcal{A}_j = \sum_{i=2}^{j} \alpha_i$, $j = 3,4,\ldots,k-1$. On a les relations de récurrence :*

$$\text{(4.42)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \mathcal{A}_{k-1}\varepsilon_0 \\ \\ \varepsilon_{r+1} = \varepsilon_{r,2}\mathcal{A}_3 + \ldots + \varepsilon_{r,k-2}\mathcal{A}_{k-1} + \varepsilon_{r,k-1}\mathcal{A}_{k-1}, \quad r \geq 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On fait la somme sur j des relations de (4.41). □

Pour les systèmes réels, les réparations sont beaucoup plus rapides que les défaillances et on a $\mu \gg \lambda$. Nous verrons dans la suite, que dans cette situation $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$. C'est ce qui justifie d'ailleurs, l'intérêt de l'inégalité de SOLOVYEV-BON-BRETAGNOLLE.

Une condition suffisante pour avoir l'inégalité précédente est formulée dans le lemme suivant.

Lemme 4.5.5 *Si* $\frac{\mu}{\lambda} > n\log n$, *alors* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\alpha_i = \frac{j(n-i+1)\lambda\mu}{[(n-i)\lambda+i\mu]\,[(n-i+1)\lambda+(i-1)\mu]} < \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{n}{i-1}-1\right).$$

Puisque $\sum_{i=2}^{k-2}\frac{1}{i} < \log(k-2)$, nous obtenons:

$$\mathcal{A}_{k-1} = \sum_{i=2}^{j}\alpha_i < \frac{\lambda}{\mu}[n\log(k-2)+n-(k-2)].$$

En employant l'inégalité classique $\log x \le x-1$, $\forall\ x>0$, nous trouvons $n\log(k-2)+n-(k-2) \le n\log n$, d'où $\mathcal{A}_{k-1} < \frac{\lambda}{\mu}n\log n$. Alors, d'après l'hypothèse et la première relation de (4.42), on obtient la conclusion. □

Nous nous intéressons au rapport entre ε_r (r réparations) et ε_{r-1} ($r-1$ réparations). Notons:

(4.43) $$\delta_r := \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{r-1}},\quad r=1,2,\ldots$$

Observons que le système de relations (4.42) donne $\varepsilon_{r+1} \le \mathcal{A}_{k-1}(\varepsilon_{r,2}+\ldots+\varepsilon_{r,k-2}+\varepsilon_{r,k-1}) = (\varepsilon_1/\varepsilon_0)\varepsilon_r = \delta_1\varepsilon_r$, d'où:

(4.44) $$\delta_{r+1} \le \delta_1,\ \forall\ r \ge 1$$

De plus, sous l'hypothèse $\frac{\mu}{\lambda} > n\log n$, on a $\delta_1 < 1$.
On peut mieux caracteriser le comportement asymptotique de la suite $(\delta_r)_{r\ge1}$. Ainsi le théorème suivant est l'équivalent du THÉORÈME 4.5.1 pour la suite $(\delta_r)_{r\ge1}$.

Théorème 4.5.3 *Soit* $\beta_{r,j} := \frac{\varepsilon_{r,j}}{\varepsilon_r}$, $j=2,\ldots,k-1$, *et* $\delta_r = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{r-1}}$, $r=1,2,\ldots$. *On a les assertions suivantes.*
(i) La suite $(\delta_r)_{r\ge1}$ *est décroissante vers une limite positive* $\delta=\delta(n,k,\lambda,\mu)$.
(ii) Les suites $(\beta_{r,j})_{r\ge1}$, $j=2,\ldots k-1$, *convergent vers* $\beta_j=\beta_j(n,k,\lambda,\mu)\ge0$.
(iii) Les limites ci-dessus satisfont le système:

(4.45) $$\begin{cases} \delta\,\beta_j = \alpha_j\sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{k-1}\beta_i, & j=2,\ldots,k-1 \\ \sum_{j=2}^{k-1}\beta_j = 1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Elle est similaire à la démonstration du THÉORÈME 4.5.1. □
Maintenant nous avons la possibilité d'estimer le poids des séquences de panne sans retour, ayant un nombre fixé de réparations. En fait nous pouvons utiliser le théorème ci-dessus pour obtenir un l'encadrement de ε à partir de ε_0.

Théorème 4.5.4 *Si* $\frac{\mu}{\lambda} > n \log n$, *alors:*

$$\varepsilon_0 \left(1 + \frac{\delta_1}{1-\delta}\right) \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \frac{1}{1-\delta_1}. \tag{4.46}$$

o δ *est la limite de* δ_r *quand* $r \to \infty$.

DÉMONSTRATION.
L'hypothèse $\frac{\mu}{\lambda} > n \log n$ assure (cf. LEMME 4.5.5) $\delta_1 < 1$. D'après le THÉORÈME 4.5.3 nous avons $0 < \delta \leq \delta_r \leq \delta_1$, $r = 1,2,\ldots$. Alors, un raisonnement par récurrence à partir de la définition (4.43) des rapports δ_r donne, $\varepsilon_0 \delta^{r-1} \delta_1 \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_0 \delta_1^r$, $r = 1,2,\ldots$. La somme sur r de ces inégalités, à laquelle on rajoute le ε_0 donne (d'après (4.9)) la conclusion. □

Remarque Le calcul des bornes de l'encadrement ci-dessus ne pose pas de problèmes. Ainsi, la probabilité ε_0 de panne directe par des séquences sans réparations est donnée par la relation (4.40), puis d'après (4.42) on a

$$\delta_1 = \mathcal{A}_{k-1} = \sum_{j=2}^{k-1} \frac{j(n-j+1)\lambda\mu}{[(n-j)\lambda + j\mu]\,[(n-j+1)\lambda + (j-1)\mu]}$$

et enfin, pour avoir δ, il suffit de résoudre (numériquement si nécessaire) le système (4.45). Rappellons aussi que la valeur exacte de ε est donnée par les formules matricielles (4.6), (4.7), (4.5) et (4.8) et la formule spécifique à un k/n (4.22).

EXEMPLE NUMÉRIQUE : Soit $n = 15$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 1$.

a) Le comportement de la suite $(\delta_r)_{r \geq 1}$, avec $\delta_r = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{r-1}}$, pour des valeurs différentes du niveau de panne k est donné par le premier tableau :

k	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	...	δ
3	0.1153	0.1153	0.1153	0.1153	0.1153	0.1153	...	0.1153
4	0.1740	0.1740	0.1740	0.1740	0.1740	0.1740	...	0.1740
5	0.2114	0.1910	0.1888	0.1886	0.1885	0.1885	...	0.1885
6	0.2377	0.2003	0.1933	0.1917	0.1913	0.1912	...	0.1911
7	0.2570	0.2065	0.1958	0.1928	0.1919	0.1917	...	0.1915
8	0.2716	0.2111	0.1974	0.1934	0.1922	0.1918	...	0.1916

b) Pour les même valeurs de k, le deuxième tableau suit l'encadrement de ε par rapport à ε_0, en utilisant δ_1 et δ :

k	ε_0	$\varepsilon_0[1+\delta_1/(1-\delta)]$	$\varepsilon_0/(1-\delta_1)$	ε
3	$7.500\ 10^{-3}$	$8.500\ 10^{-3}$	$8.500\ 10^{-3}$	$8.500\ 10^{-3}$
4	$2.8828\ 10^{-4}$	$3.4901\ 10^{-4}$	$3.4901\ 10^{-4}$	$3.4901\ 10^{-4}$
5	$7.7155\ 10^{-6}$	$9.7254\ 10^{-6}$	$9.7838\ 10^{-6}$	$9.7309\ 10^{-6}$
6	$1.5128\ 10^{-7}$	$1.9573\ 10^{-7}$	$1.9845\ 10^{-7}$	$1.9616\ 10^{-7}$
7	$2.2357\ 10^{-9}$	$2.9464\ 10^{-9}$	$3.0090\ 10^{-9}$	$2.9577\ 10^{-9}$
8	$2.5262\ 10^{-11}$	$3.3749\ 10^{-11}$	$3.4682\ 10^{-11}$	$3.3926\ 10^{-11}$

D'après les résultats numériques ci-dessus on voit bien que la borne gauche de l'encadrement de ε est très bonne, donc on peut écrire

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\delta_1}{1-\delta}\right)$$

4.5.3 Cas général

Nous nous proposons de généraliser les résultats obtenus pour un système k/n avec composants identiques (voir paragraphe précédent) dans le cadre plus large du modèle stratifié considéré.
Supposons l'ordre croissant de $\epsilon_i = \mu_i - \lambda_i > 0$:

$$\epsilon_{[1]} \leq \epsilon_{[2]} \leq \ldots \leq \epsilon_{[n]}$$

Notons

$$\eta = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i \mu_i)$$

$$\underline{\Delta}_j := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{j} \epsilon_{[i]}, \quad \overline{\Delta}_j := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{j} \epsilon_{[n+1-i]}$$

$$\overline{\alpha}_j = \eta \, \frac{\prod_{1\leq i\leq j-2} \overline{\Delta}_i}{\prod_{1\leq i\leq j} \underline{\Delta}_i} \, a_j, \quad j = 2, \ldots, \overline{k}$$

Contrairement au cas particulier du système k/n avec composants identiques, nous ne sommes pas en mesure de donner des résultats très concis. Pourtant on peut encore exploiter la nature "presque géométrique" de la suite étudiée. Ainsi le théorème suivant fournit des inégalités convenables pour l'évaluation de ε à partir de ε_0.

Théorème 4.5.5 *Avec les notations ci-dessus, on a le système de relations suivant:*

$$\text{(4.47)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{1,j} \leq \overline{\alpha}_j \varepsilon_0, \quad j = 2, \ldots, \overline{k} \\ \\ \varepsilon_{r+1,j} \leq \overline{\alpha}_j \sum_{i=\max\{2,j-1\}}^{\overline{k}} \varepsilon_{r,i}, \; j = 2, \ldots, \overline{k} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les trajectoires de panne, sans retour dans l'état initial, arrivent dans les états absorbants qui se trouvent dans les niveaux $\underline{k}+1,\underline{k}+2,\ldots,\overline{k}+1$. Alors elles peuvent enregistrer des réparations juqu'au niveau $\overline{k}$. Ainsi, nous avons $\varepsilon_r = \sum_{j=2}^{\overline{k}} \varepsilon_{r,j}$, $r \geq 1$. Dans l'interprétation séquentielle, $\varepsilon_{r,j}$ est la somme des probabilités de l'ensemble des trajectoires de panne directe de "type (r,j)". Pour comparer $\varepsilon_{r+1,j}$ avec $\varepsilon_{r,i}$ il suffit d'observer que chaque trajectoire γ' de "type $(r+1,j)$" peut être regardée comme "dérivée" d'une trajectoire γ de "type (r,i)", $i \geq j-1$ (à laquelle on "ajoute" une réparation admissible), et d'estimer le rapport $\frac{p_{\gamma'}}{p_\gamma}$. Après un raisonnement élémentaire nous trouvons:

$$\frac{p_{\gamma'}}{p_\gamma} \leq \eta \frac{\prod_{1\leq i\leq j-2} \overline{\Delta}_i}{\prod_{1\leq i\leq j} \underline{\Delta}_i}.$$

Mais le nombre des trajectoires γ' de "type $(r+1,j)$" qui dérivent d'une trajectoire fixée γ de "type (r,i), $i \geq j-1$, est $a_j = j(n+1-j)$ (voir la démonstration du LEMME 4.5.2).
Alors nous obtenons le système des inégalités (4.47). □

Comme application, nous obtenons la majoration de ε à partir de ε_0.

Théorème 4.5.6 *Si* $\overline{\delta} := \sum_{j=2}^{\overline{k}} \overline{\alpha}_j$ *est inférieur à 1, alors:*

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 \frac{1}{1-\overline{\delta}} \tag{4.48}$$

DÉMONSTRATION. D'après (4.47), nous trouvons par récurrence:

$$\varepsilon_r \leq \varepsilon_0 \rho_1^r \leq \varepsilon_0 \overline{\delta}^r, \quad r = 0,1,2,\ldots,$$

d'où la conclusion. □
On remarque que pour un système k/n on a $\overline{\alpha}_j = \alpha_j$ et $\overline{\delta} = \delta_1$.

4.6 Conclusion

Pour calculer ε on a la formule asympthotique de SOLOVIEV

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0.$$

Il est classique aussi d'approcher

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \varepsilon_1.$$

On constate que c'est raisonnable mais qu'il est beaucoup plus intéressant de prendre

$$\varepsilon \approx \frac{\varepsilon_0}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$$

Pour l'évaluation de ε_0 on peut employer, par exemple, l'inégalité de Solovyev montrée dans BON-BRETAGNOLLE (1998) :

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{e \in E_a^-} \left(\prod_{i \in D_e} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \left(\sum_{i \in D_e} \mu_i \right) \tag{4.49}$$

où D_e est l'ensemble des composants en panne dans l'état e.
Dans le même article est donné un encadrement qu'il est intéressant de comparer aux résultats précédents.

Nous supposons tous les taux égaux :

$$\lambda_i = \lambda \text{ et } \mu_i = \mu, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Ecrivons l'encadrement de BON-BRETAGNOLLE en l'adaptant à notre contexte. Nous avons :

$$\binom{n-1}{k-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}(1+\log k)\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} \leq \varepsilon \leq \binom{n-1}{k-1} e^{\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} \tag{4.50}$$

En général le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est très petit et on constate que le niveau de panne k n'intervient qu'avec le logarithme dans l'approximation d'ordre 1.

Reprenons l'exemple numérique précédent avec les valeurs :

$$n = 15,\ k = 6,\ \lambda = 0{,}01,\ \mu = 1.$$

Notre encadrement donne :

$$1{,}294\,\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1{,}312\,\varepsilon_0$$

alors que la formule ci-dessus donne :

$$0{,}972\,a \leq \varepsilon \leq 1{,}01\,a$$

où a est une constante positive (sur-évaluation de ε_0).

Une façon de comparer la précision des encadrements est de faire le rapport entre la borne supérieure et la borne inférieure. Pour notre encadrement, nous obtenons 1,014 alors que l'encadrement de BON-BRETAGNOLLE donne 1,039. Pour $k = 5$ ces rapports valent respectivement 1,007 et 1,037, donc notre encadrement est toujours meilleur. Il faut rappeler, cependant que l'encadrement de BON-BRETAGNOLLE est

établi dans un cadre beaucoup plus général puisque les taux de réparation ne sont pas supposés constants et donc le système n'est pas markovien. De plus la nature de l'approximation est différente. Dans notre cas il s'agit d'un calcul séquentiel. On énumère les trajectoires ayant successivement 0, 1, 2, ... réparations et on approche ε à partir des probabilités cumulées. Dans le travail de BON-BRETAGNOLLE, il s'agit d'un calcul analytique à partir des coupes minimales et des propriétés de vieillissement des réparations.

Chapitre 5

Evolution en temps de la disponibilité

5.1 Modèle stratifié sans absorption

Nous restons dans le cadre markovien. Les composants ont des taux de dégradation et réparation constants. Nous nous intéressons, maintenant, aux propriétés concernant la disponibilité d'un système à n composants indépendants. Dans ce sens, nous supposons que les états de panne de E^- ne sont pas absorbants. Autrement dit, tout composant est réparable, quel que soit l'état dans lequel se trouve le système à un moment donné. L'hypothèse assure l'irréructibilité du noyau de Markov correspondant et l'ergodicité du processus de Markov en temps continu qui décrit l'état du système (conditionné par l'état initial). Il s'agit d'une nouvelle perspective sur l'évolution en temps du système, mais qui présente certaines affinités avec la durée de vie du système, surtout dans le cas des réparations rapides.

Soit λ_i le taux de dégradation et μ_i le taux de réparation du composant $c^{(i)}$, avec $i = 1, \ldots, n$. Notons $(X_{i,t})_{t\geq 0}$ le processus aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, indiquant l'état du composant $c^{(i)}$ au temps $t \geq 0$, sachant qu'au moment initial, il est en bon état. Pour $t \geq 0$ fixé, $X_{i,t}$ est une variable aléatoire de BERNOULLI de paramètre

$$p_{i,t} = p_i(1 - e^{-\Lambda_i t}), \quad \text{avec} \quad \Lambda_i = \lambda_i + \mu_i \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda_i}, \tag{5.1}$$

obtenue comme solution de l'équation différentielle associée :

$$\frac{dp_{i,t}}{dt} = \lambda_i q_{i,t} - \mu_i p_{i,t}, \quad p_{i,0} = 0.$$

où

$$q_{i,t} := 1 - p_{i,t} = q_i + p_i e^{-\Lambda_i t} \quad \text{et} \quad q_i = 1 - p_i. \tag{5.2}$$

De la même façon, si au moment initial $t = 0$ le composant $c^{(i)}$ se trouve en panne, alors son état sera décrit par le processus $(Y_{i,t})_{t\geq 0}$, où $Y_{i,t}$ est une variable aléatoire Bernoulli de paramètre

$$r_{i,t} = p_i \left(1 + \frac{\mu_i}{\lambda_i} e^{-\Lambda_i t}\right) = p_i + q_i e^{-\Lambda_i t} \tag{5.3}$$

Observons :

$$\frac{dp_{i,t}}{dt} = \Lambda_i p_i e^{-\Lambda_i t} > 0, \forall\, t > 0, \tag{5.4}$$

et par conséquent $p_{i,t} \uparrow p_i$.
D'autre part on a $r_{i,t} \downarrow p_i$, puisque $\frac{dr_{i,t}}{dt} = -\Lambda_i q_i e^{-\Lambda_i t} < 0, \forall\, t > 0$.

A partir de la stratification $\mathcal{E}_n = \{E_j\}_{j=0,\ldots,n}$ de l'ensemble des états $E = \{0,1\}^n$, notons :

$${}^e\mathcal{P}_t(j) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{la probabilité que le système se trouve au temps } t \textit{ dans } E_j \\ \textit{(i.e. dans le niveau } j\textit{) à partir de l'état } e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}) \in E\ . \end{array} \right.$$

Pour $e = e_0$, nous allons noter simplement $\mathcal{P}_t(j)$ au lieu de ${}^{e_0}\mathcal{P}_t(j)$.
La signification de la probabilité ci-dessus est la suivante : *sachant qu'au début il y a k composants en panne* (donc $e \in E_k$), ${}^e\mathcal{P}_t(j)$ indique *la probabilité d'avoir au moment $t \geq 0$ exactement j composants en panne.* La mesure de probabilité $({}^e\mathcal{P}_t(j))_{j=0,\ldots,n}$ sur l'ensemble $\{0,1,\ldots n\}$ représente en fait la distribution de la variable aléatoire

$${}^eS_{n,t} = \sum_{i:e^{(i)}=0} X_{i,t} + \sum_{i:e^{(i)}=1} Y_{i,t}. \tag{5.5}$$

Pour $e = e_0$ on note $S_{n,t} = {}^{e_0}S_{n,t} = \sum_{i=1}^n X_{i,t}$. Les termes des sommes sont des variables aléatoires indépendantes d'après l'hypothèse d'indépendance des composants.

Un raisonnement classique nous donne le résultat suivant.

Lemme 5.1.1 *En terme de fonction génératrice nous avons :*

$${}^e\mathcal{P}_t(j) = \mathbb{P}\{{}^eS_{n,t} = j\} = [z^j] \left\{ \prod_{i:e^{(i)}=0} (1 - p_{i,t} + p_{i,t}z) \prod_{i:e^{(i)}=1} (1 - r_{i,t} + r_{i,t}z) \right\},$$

où $[z^j]$ $\{Q(z)\}$ représente le coefficient du z^j du polynôme $Q(z)$.

Puisque $\lim_{t\to\infty} p_{i,t} = \lim_{t\to\infty} r_{i,t} = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, la loi stationnaire associée au processus de comptage ${}^e\mathcal{N}_n = ({}^eS_{n,t})_{t\geq 0}$ sera (pour tout $e \in E$) $\Pi = (\pi_j)_{j=0,\ldots,n}$ définie par :

$$\pi_j = [z^j] \left\{ \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) \right\} \tag{5.6}$$

i.e. la distribution de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i, $i = 1, \ldots, n$ sont des variables aléatoires BERNOULLI indépendantes, respectivement de paramètres p_i.

Notre étude est centrée sur la convergence de la mesure de probabilité $(\mathcal{P}_t(j))_{j=0,\ldots,n}$, que l'on peut écrire (en adaptant le résultat du LEMME 5.1.1) comme:

$$\mathcal{P}_t(j) = \mathbb{P}\{S_{n,t} = j\} = [z^j] \left\{ \prod_{i=1}^{n} (q_{i,t} + p_{i,t} z) \right\}, \tag{5.7}$$

vers la probabilité stationnaire $\Pi = (\pi_j)_{j=0,\ldots,n}$. D'après (5.4), on remarque:

$$\mathcal{P}_t(0) = \prod_{i=1}^{n} q_{i,t} \downarrow \prod_{i=1}^{n} q_i = \pi_0, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{P}_t(n) = \prod_{i=1}^{n} p_{i,t} \uparrow \prod_{i=1}^{n} p_i = \pi_n. \tag{5.9}$$

En termes de variation totale, il est bien connu que de nombreux processus modélisés par des chaînes de Markov présentent un phénomène de *cut-off* (voir par exemple ALDOUS (1983), DIACONIS (1995), SALOFF-COSTE (1997), YCART (1998)). La présence de ce phénomène dans la convergence ci-dessus est prouvée dans le cas de composants identiques. Ici il s'agit d'une situation plus délicate à cause du manque de symétrie. Nous analysons dans la suite, l'évolution du vecteur d'état, ce qui permettra de mettre en évidence un phénomène de *cut-off*. Ce phénomène peut être démontré directement à partir d'un encadrement de finesse de la distance en variation totale entre deux sommes de variables aléatoires BERNOULLI indépendantes. Pour obtenir cet encadrement nous allons rapprocher la distribution des sommes respectives de v. a. de type BERNOULLI de la distribution normale en empoyant les résultats classiques de HOEFFDING (1959), SAMUELS (1965), GLESER (1975) et l'inégalité de BERRY-ESSEN. Une préoccupation importante sera l'encadrement du *niveau de séparation*, notion que l'on définie dans le paragraphe suivant. D'autre part, d'après une idée de BRETAGNOLLE, nous obtenons une bonne majoration de l'écart entre $\mathcal{P}_t$ et Π qui peut servir elle même à une démonstration partielle du théorème sur le *cut-off*. Enfin, il faut mentionner que le travail récent de WEBA (1999) donne des bornes pour l'écart en variation totale entre une somme des v.a. de BERNOULLI et la distribution de POISSON de même moyenne.

Les résultats théoriques de ce chapitre seront illustrés par des simulations numériques.

5.2 Niveau de séparation

Pour évaluer l'évolution de la probabilité d'être en j au moment $t \geq 0$, nous allons étudier le comportement des fonctions ψ_j, $j = 0,1,\ldots,n$, définies par:

$$\psi_j(t) = \frac{\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j},\ t \geq 0. \tag{5.10}$$

Evidemment tous ces rapports tendent vers la valeur 1 pour $t \to \infty$. Les relations (5.8) et (5.9) nous assurent les convergences monotones $\psi_0(t) \downarrow 1$ et $\psi_n(t) \uparrow 1$. Naturellement, se pose ensuite le problème du comportement de $\psi_j(t)$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Voyons d'abord quelque relations récurrentes sur les nombres $\mathcal{P}_t(j)$.

Ainsi, le conditionnement par rapport à la variable aléatoire $X_{i,t}$ nous donne:

$$\mathcal{P}_t(j) = q_{i,t}\mathcal{P}_t^{(i)}(j) + p_{i,t}\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1), \tag{5.11}$$

où:

$$\mathcal{P}_t^{(i)}(j) := [z^j]\ \{\prod_{l\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} (q_{l,t} + p_{l,t}z)\}, \tag{5.12}$$

pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ et $t \geq 0$.
On peut aussi facilement déduire les identités:

$$\begin{cases} j\mathcal{P}_t(j) = \sum_{i=1}^n p_{i,t}\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1), \\ \\ (n-j)\mathcal{P}_t(j) = \sum_{i=1}^n (1-p_{i,t})\mathcal{P}_t^{(i)}(j). \end{cases} \tag{5.13}$$

Selon SAMUELS (1965) on a les inégalités:

$$\left(\mathcal{P}_t^{(i)}(j)\right)^2 > \mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)\mathcal{P}_t^{(i)}(j+1), \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_t^{(i)}(j-1) < \mathcal{P}_t^{(i)}(j) & si \quad j \leq \sum_{l\neq i} p_{l,t} \\ \mathcal{P}_t^{(i)}(j) > \mathcal{P}_t^{(i)}(j+1) & si \quad j \geq \sum_{l\neq i} p_{l,t}. \end{cases} \tag{5.15}$$

La proposition suivante donne la monotonie par rapport à t des fonctions $\frac{\psi_j(t)}{\psi_{j-1}(t)}$.

Proposition 5.2.1 *Pout tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, la fonction $\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ est croissante.*

DÉMONSTRATION. Pour $j = 1$, la propriété de l'énoncé est évidente puisque on a $\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)(t) = \frac{\pi_0}{\pi_1}\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_{i,t}^2}\frac{dp_{i,t}}{dt} > 0$, $\forall\ t > 0$, en conformité avec (5.4).
Soit $j \geq 2$. A partir de (5.11) on obtient la formule:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) = \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1) - \mathcal{P}_t^{(i)}(j)\right)\frac{dp_{i,t}}{dt}. \tag{5.16}$$

Après calculs, on arrive la forme suivante de la dérivée de $\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}}\right)(t) = \frac{\pi_{j-1}}{\pi_j\left(\mathcal{P}_t(j-1)\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)\right)^2(t) - \mathcal{P}_t^{(i)}(j-2)\mathcal{P}_t^{(i)}(j)\right\}\frac{dp_{i,t}}{dt}.$$

Alors, cf. (5.14) et (5.4), on déduit la croissance de $\frac{\psi_j(t)}{\psi_{j-1}(t)}$ par rapport à $t > 0$. □

Corollaire 5.2.1 *Pour $j = 1,2,\ldots,n$, on a l'ordre suivant:*

$$\psi_{j-1}(t) > \psi_j(t),\ \forall\ t \geq 0 \tag{5.17}$$

DÉMONSTRATION. On a $\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_j(t)}{\psi_{j-1}(t)} = \frac{\lim_{t\to\infty}\psi_j(t)}{\lim_{t\to\infty}\psi_{j-1}(t)} = 1$ or selon la PROPOSITION 5.2.1 $\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}}$ est croissante; on obtient $\frac{\psi_j(t)}{\psi_{j-1}(t)} < 1,\ \forall\ t \geq 0$. □

En fait cette relation peut être déduite d'une propriété plus générale des comparaisons de sommes de v.a. BERNOULLI.

Proposition 5.2.2 *Soient X_i et X_i' des variables* BERNOULLI *indépendantes à de paramètres respectifs p_i et p_i', tels que $0 \leq p_i' < p_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$. Notons $\pi_j = P\{\sum_{i=1}^n X_i = j\}$ et $\pi_j' = P\{\sum_{i=1}^n X_i' = j\}$, $j = 0,1,\ldots,n$. Alors:*

$$\frac{\pi_{j-1}'}{\pi_{j-1}} > \frac{\pi_j'}{\pi_j},\quad j = 1,\ldots,n$$

DÉMONSTRATION. Pour la preuve, il suffit d'employer la croissance du $\frac{\pi_j}{\pi_{j-1}}$, regardé comme fonction de $(p_1,\ldots,p_n)$, par rapport à chaque p_i (cf. SAMUELS, 1965) pour obtenir $\frac{\pi_j}{\pi_{j-1}} > \frac{\pi_j'}{\pi_{j-1}'}$, d'où la conclusion. □

La propriété ci-dessus nous est également utile pour évaluer la distance en variation totale entre les mesures de probabilité $(\mathcal{P}_t(j))_0^n$ et $(\pi_j)_0^n$, donc entre les variables aléatoires $S_{n,t}$ et S_n. Rappelons d'abord la définition (adaptée à notre situation) de cette métrique des distributions discrètes.

Définition *Pour des variables aléatoires U et V prennant des valeurs dans l'ensemble $\{0,1,\ldots,n\}$ avec les probabilités $f_U(j) = P\{U = j\}$ et respectivement $f_V(j) = P\{V = j\}$, $j = 0,1,\ldots,n$, on appelle "distance en variation totale entre les variables aléatoires U et V " (ou entre les mesures f_U et f_V de probabilité sur $\{0,1,\ldots,n\}$) le nombre réel non-négatif défini par:*

$$\|f_U - f_V\|_{VT} := \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}|f_U(j) - f_V(j)|$$

Ainsi, donnons une première approximation de l'écart entre $\mathcal{P}_t$ et Π.

Théorème 5.2.1 *Pour tout $t \geq 0$ on a la majoration suivante:*

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\max\left\{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\Lambda_i t}) - 1\ ,\ 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\Lambda_i t})\right\} \tag{5.18}$$

DÉMONSTRATION. En conformité avec(5.10) et (5.17) on a:

$$\frac{\mathcal{P}_t(n)}{\pi_n} \leq \frac{\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j} \leq \frac{\mathcal{P}_t(0)}{\pi_0}, \quad t \geq 0, \quad j = 0,1,\ldots,n.$$

Mais $\frac{\mathcal{P}_t(n)}{\pi_n} = \prod_{i=1}^n \frac{p_{i,t}}{p_i} = \prod_{i=1}^n (1-e^{-\Lambda_i t})$ et d'autre part $\frac{\mathcal{P}_t(0)}{\pi_0} = \prod_{i=1}^n \frac{1-p_{i,t}}{1-p_i} = \prod_{i=1}^n (1+\frac{p_i}{1-p_i}e^{-\Lambda_i t}) = \prod_{i=1}^n (1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\Lambda_i t})$. D'où l'on tire pour $j = 0,1,\ldots,n$:

$$(5.19) \qquad -\pi_j\left[1-\Pi_{i=1}^n(1-e^{-\Lambda_i t})\right] \leq \mathcal{P}_t(j) - \pi_j \leq \pi_j\left[\Pi_{i=1}^n(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\Lambda_i t}) - 1\right].$$

Ainsi nous obtenons:

$$\frac{1}{2}|\mathcal{P}_t(j) - \pi_j| \leq \frac{\pi_j}{2} \max\left\{ \Pi_{i=1}^n(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\Lambda_i t}) - 1 \ , \ 1 - \Pi_{i=1}^n(1-e^{-\Lambda_i t}) \right\}$$

La somme sur j de ces inégalités conduit à la relation (5.18). □

Ce résultat permet de majorer $\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT}$ En fonction du paramètre $\underline{\Lambda} = \min_{1\leq i\leq n} \Lambda_i$.

Corollaire 5.2.2 *Soit* $\underline{\Lambda} = \min_{1\leq i\leq n} \Lambda_i$. *Supposons* $\lambda_i < \mu_i$ *pour* $i = 1,\ldots,n$.
(i) Pour tout $t \geq 0$ *on a:*

$$(5.20) \qquad \|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\left[(1+e^{-\underline{\Lambda}t})^n - 1\right].$$

(ii) Il existe $t_0 \geq 0$ *tel que pour tout* $t \geq t_0$ *on a:*

$$(5.21) \qquad \|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\left[1-(1-e^{-\underline{\Lambda}t})^n\right].$$

DÉMONSTRATION. Nous avons $\Pi_{i=1}^n(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\Lambda_i t}) - 1 \leq (1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\underline{\Lambda}t})^n - 1 < (1+e^{-\underline{\Lambda}t})^n - 1$ et $1 - \Pi_{i=1}^n(1-e^{-\Lambda_i t}) \leq 1-(1-e^{-\underline{\Lambda}t})^n$. Alors, d'après le théorème ci-dessus, nous obtenons:

$$(5.22) \qquad \|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\max\left\{\Pi_{i=1}^n(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\underline{\Lambda}t}) - 1, 1-(1-e^{-\Lambda_i t})^n\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\max\left\{(1+e^{-\underline{\Lambda}t})^n - 1, 1-(1-e^{-\Lambda_i t})^n\right\}.$$

L'inégalité $(1+x)^n + (1-x)^n \geq 2$, $\forall\, x \in [0,1]$ implique $1-(1-e^{-\underline{\Lambda}t})^n \leq (1+e^{-\underline{\Lambda}t})^n - 1$, $\forall\, t \geq 0$. Ainsi l'assertion (i) est prouvée.
Pour (ii), observons que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\Pi_{i=1}^n(1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-\underline{\Lambda}t}) + (1-e^{-\underline{\Lambda}t})^n \leq (1+ae^{-\underline{\Lambda}t})^n + (1-e^{-\underline{\Lambda}t})^n,$$

avec $a = \max_{1\le i\le n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$. La fonction $f : [0,1] \to [0,\infty)$, $f(x) = (1+ax)^n + (1-x)^n$ est décroissante au voisinage de 0, puisque on a $f'(0) = n(a-1) < 0$. Mais $f(0) = 2$, donc il existe $\delta > 0$ t.q. $f(x) < 2$, $\forall\, x \in (0,\delta)$.
Alors il existe $t_0 \ge 0$ t.q. pour tout $t \ge t_0$ on a

$$\Pi_{i=1}^n (1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} e^{-\Delta t}) - 1 < 1 - (1 - e^{-\Delta t})^n,$$

d'où nous obtenons (ii) comme conséquence de (5.22). □

Parmi les propriétés bien connues de la distance en variation totale rappelons seulement la suivante :

$$\|f_U - f_V\|_{VT} = \max_{\mathcal{A}\subset\{0,\dots,n\}} (P\{U \in \mathcal{A}\} - P\{V \in \mathcal{A}\}).$$

Un problème naturel est de trouver un ensemble $\mathcal{A}^*$ qui réalise le maximum. Nous verrons qu'à partir de la relation (5.17) il est possible d'exhiber un entier j^* avec $\mathcal{A}^* = \{0,1,\dots,j^*-1\}$. En fait on peut montrer un résultat de comparaison de distributions dans un cadre plus général.

Lemme 5.2.1 *Soit U et V deux variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$. Notons $f_U(j) = P\{U = j\}$ et $f_V(j) = P\{V = j\} > 0$, $j = 0,1,\dots,n$. puis $F_U(j) = \sum_{i=0}^j f_U(i)$, et $F_V(j) = \sum_{i=0}^j f_V(i)$ pour $j = 0,1,\dots,n$. Supposons :*

$$\frac{f_U(j-1)}{f_V(j-1)} > \frac{f_U(j)}{f_V(j)}, \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}.$$

Alors :
(i) il existe un unique entier positif $j^* \le n$ tel que :

$$f_U(j) > f_V(j), \qquad si \quad j \in \{0,1,\dots,j^*-1\},$$

$$f_U(j^*) \ge f_V(j^*), \qquad si \quad j = j^* \qquad ;$$

$$f_U(j) > f_V(j), \qquad si \quad j \in \{j^*+1,\dots,n\}$$

(ii) $\|f_U - f_V\|_{VT} = \sum_{j<j_t^*}(f_U(j) - f_V(j)) = \sum_{j\ge j_t^*}(f_V(j) - f_U(j))$;
(iii) $\|f_U - f_V\|_{VT} = F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) = max_{0\le j\le n}(F_U(j) - F_V(j))$.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord qu'on ne peut pas avoir $\frac{f_U(n)}{f_V(n)} \ge 1$. En effet dans le cas contraire on déduit $\frac{f_U(j)}{f_V(j)} > \frac{f_U(n)}{f_V(n)} \ge 0$ pour $j < n$, d'où la relation contradictoire :

$$1 = \sum_{j=0}^n f(j) > \sum_{j=0}^n g(j) = 1.$$

On a donc $\frac{f_U(n)}{f_V(n)} < 1$. De même façon on montre $\frac{f(0)}{g(0)} > 1$.
Soit $j^* = \min_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\ j\ :\ \frac{f_U(j)}{f_V(j)} \leq 1\ \}$. D'après l'hypothèse, il suit :

$$\frac{f_U(0)}{f_V(0)} > \ldots > \frac{f_U(j^*-1)}{f_V(j^*-1)} > 1 \geq \frac{f_U(j^*)}{f_V(j^*)} > \ldots > \frac{f_U(n)}{f_V(n)},$$

d'où on déduit l'assertion (i).
Pour (ii) on emploie la définition de la distance en variation totale :

$$\|f_U - f_V\|_{VT} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{j^*-1}(f_U(j) - f_V(j)) - \sum_{j=j^*}^{n}(f_U(j) - f_V(j))\right] = \sum_{i=0}^{j^*-1}(f_U(i) - f_V(i)).$$

De la même manière on trouve $\|f_U - f_V\|_{VT} = \sum_{j\geq j_t^*}(f_V(j) - f_U(j)$.
En fait nous avons $\|f_U - f_V\|_{VT} = F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1)$ et pour prouver (iii) il suffit de vérifier $F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) = \max_{0\leq j\leq n}(F_U(j) - F_V(j))$. Cela résulte du raisonnement suivant :
si $0 \leq j < j^*-1$, alors $F_U(j) - F_V(j) = F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) - \sum_{j<i\leq j^*-1}(f_U(i) - f_V(i)) =$
$F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) - \sum_{j<i\leq j^*-1}|f_U(i) - f_V(i)| < F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1)$;
par contre, si $j^* \leq j \leq n$, alors $F_U(j) - F_V(j) = F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) + \sum_{j^*\leq i\leq j}(f_U(i) - f_V(i)) = F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1) - \sum_{j^*\leq i\leq j}|f_U(i) - f_V(i)| \leq F_U(j^*-1) - F_V(j^*-1)$. □

En particulier, la relation (5.17) nous permet de choisir $U = S_{n,t}$ et $V = S_n$ dans l'énoncé précédent. Alors il existe un niveau unique j_t^* à partir duquel le rapport $\psi_j(t) = \frac{\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j}$ devient inférieur à 1.
Définition *Soit $t > 0$. On appelle "niveau de séparation au moment t" le nombre entier j_t^* defini par*

$$j_t^* = \min\{\ j \in \{1,\ldots,n\}\ :\ \psi_j(t) \leq 1\ \} \tag{5.23}$$

Ainsi nous avons :

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} = \sum_{j<j_t^*}(\mathcal{P}_t(j) - \pi_j) = \sum_{j\geq j_t^*}(\pi_j - \mathcal{P}_t(j)) = \max_j \sum_{i=0}^{j}(\mathcal{P}_t(i) - \pi_i) \tag{5.24}$$

Comme application immédiate de (5.24), nous pouvons donner un autre majorant de la distance en variation totale. Il améliore (5.20) pour "des petites valeurs" du paramètre t.

Proposition 5.2.3 *Pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq 1 - (1 - e^{-\underline{\Lambda}t})^n, \tag{5.25}$$

où $\underline{\Lambda} = \min_i \Lambda_i$.

DÉMONSTRATION. D'après (5.24) et (5.19) nous avons:

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} = \sum_{j \geq j_t^*} (\pi_j - \mathcal{P}_t(j)) \leq \sum_{j \geq j_t^*} \pi_j \left[1 - (1 - e^{-\underline{\Lambda} t})^n\right] \leq 1 - (1 - e^{-\underline{\Lambda} t})^n,$$

d'où la conclusion. □

Remarque Pour $t < \frac{1}{\underline{\Lambda}} \log \frac{n}{2}$, la relation (5.25) donne une meilleure borne pour $\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT}$ que (5.20). Evidemment, pour t suffisamment grand nous comptons sur (5.21).

Il reste à déterminer de façon plus précise où se trouve le niveau de séparation. Nous proposons d'encadrer ce niveau à partir des moyennes des variables aléatoires $S_{n,t}$ et S_n. Notons:

$$m_t = \sum_{i=1}^{n} p_{i,t} = E(S_{n,t}) \quad \text{et} \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i = E(S_n). \tag{5.26}$$

En fait, les deux moyennes fournissent des bornes pour j_t^*.

Proposition 5.2.4 *On a l'encadrement suivant du niveau de séparation:*

$$m_t - 1 < j_t^* \leq m + 1, \quad \forall \quad t > 0. \tag{5.27}$$

DÉMONSTRATION. Pour avoir $j_t^* > m_t - 1$, la propriété $\mathcal{P}_t(j) > \pi_j$, $\forall\, j \leq m_t - 1$. est suffisante. Soit $j \leq m_t - 1$ un entier positif. Notons

$$c_{j,k} = [z^j] \left\{\prod_{i<k}(1 - p_i + p_i z) \cdot \prod_{i \geq k}(1 - p_{i,t} + p_{i,t} z)\right\},\ k = 1, \ldots, n+1$$

avec $c_{j,1} = \mathcal{P}_t(j)$ et $c_{j,n+1} = \pi_j$. Soit

$$c_{j,k}^{(k)} = [z^j] \left\{\prod_{i<k}(1 - p_i + p_i z) \cdot \prod_{i>k}(1 - p_{i,t} + p_{i,t} z)\right\}.$$

Pour $1 \leq k \leq n$, fixé, on arrive facilement à l'identité: $c_{j,k} - c_{j,k+1} = (p_k - p_{k,t})(c_{j,k}^{(k)} - c_{j-1,k}^{(k)})$. Mais $j \leq m_t - 1 \leq \sum_{i<k} p_i + \sum_{i>k} p_{i,t} + (p_{k,t} - 1) < \sum_{i<k} p_i + \sum_{i>k} p_{i,t}$. Dans ce cas, d'après la relation (5.15) (adaptée au contexte), on a $c_{j,k}^{(k)} - c_{j-1,k}^{(k)} > 0$. Puisque $p_k - p_{k,t} > 0$, il résulte $c_{j,k} > c_{j,k+1}$. Alors, par récurrence, on obtient $\mathcal{P}_t(j) > \pi_j$.

Pour prouver l'inégalité $j_t^* \leq m+1$, il suffit de montrer $\mathcal{P}_t(j) < \pi_j$, $\forall\, j \geq m+1$. Ainsi, soient j et k les entiers t.q. $m+1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n$. Le choix de j implique $j - 1 \geq m > \sum_{i<k} p_i + \sum_{i>k} p_{i,t}$. Alors, en conformité avec la relation (5.15)

(adaptée), on a $c_{j,k}^{(k)} - c_{j-1,k}^{(k)} > 0$. Il résulte $\mathcal{P}_t(j) < \pi_j$. □

On peut compléter le résultat de la PROPOSITION 5.2.4 en observant que le type de monotonie des fonctions ψ_j dépend de la position de j par rapport à $m = E(\Pi)$.

Proposition 5.2.5 *Les fonctions* ψ_j, $j = 0,1,\ldots,n$ *ont le comportement suivant*

(i) ψ_0 *est décroissante sur* $[0,\infty)$;

(ii) si $0 < j \leq m-1$, *il existe* $0 < t_j' \leq t_j''$ *t.q.* ψ_j *est croissante sur* $[0,t_j']$ *et décroissante sur* $[t_j'',\infty)$.

(iii) si $m+1 \leq j \leq n$, ψ_j *est croissante sur* $[0,\infty)$.

DÉMONSTRATION. L'affirmation de (i) est évidente. Pour (ii) et (iii), montrons d'abord la croissance au voisinage de $t = 0$ des fonctions ψ_j pour $j \geq 1$. Ainsi, la relation (5.16) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)\left(1 - \frac{\mathcal{P}_t^{(i)}(j)}{\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)}\right)\frac{dp_{i,t}}{dt}. \tag{5.28}$$

D'après l'inégalité de TCHEBYSHEV

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

si $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$, $\forall\, i \neq j$, nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1) \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i,t}}{1-p_{i,t}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(1-p_{i,t})\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)\right)$$

Après (5.13) on déduit l'inégalité:

$$\mathcal{P}_t(j) \leq \frac{n-j+1}{nj}\mathcal{P}_t(j-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i,t}}{1-p_{i,t}}\right) \tag{5.29}$$

Mais $\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i,t}}{1-p_{i,t}} = 0$ et l'inégalité (5.29) donne dans ce cas $\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{P}_t(j)}{\mathcal{P}_t(j-1)} = 0$. De la même façon, nous trouvons $\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{P}_t^{(i)}(j)}{\mathcal{P}_t^{(i)}(j-1)} = 0$. Alors selon (5.28) nous avons $\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) > 0$ au voisinage de $t = 0$, ce qui assure l'existence de t_j' (pour $j \leq m-1$). Il faut remarquer aussi (cf. (5.15) et (5.16)): $j \leq m_t - 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) > 0$.
Supposons $1 \leq j \leq m-1$. Puisque $m_t \uparrow m$, il existe $t_j'' > 0$ t.q. $m_t > j + \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} p_i > j + \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} p_{i,t}$, $\forall\, t > t_j''$.
D'après (5.15) et (5.16) il suit $\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) < 0\ \forall\ t > t_j''$. Soit $m+1 \leq j \leq n$. Alors $j - 1 \geq m > m_t$. En employant toujours les relations (5.15) et (5.16) on obtient

$\forall\, t > 0 \;\; \frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(j) > 0.$ □

Illustrons les résultats ci-dessus par des simulations numériques réalisées avec le logiciel *matlab*. Par exemple, pour 100 composants, avec des taux de dégradation $\lambda_i \in [0.01,0.1]$ et des taux de réparation $\mu_i \in [0.8,1]$, le comportement des rapports $\psi_j(t) = \frac{\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j}$, $t \geq 0$, pour j au voisinage de $m = \mathbb{E}(\Pi)$ est représenté par la figure suivante.

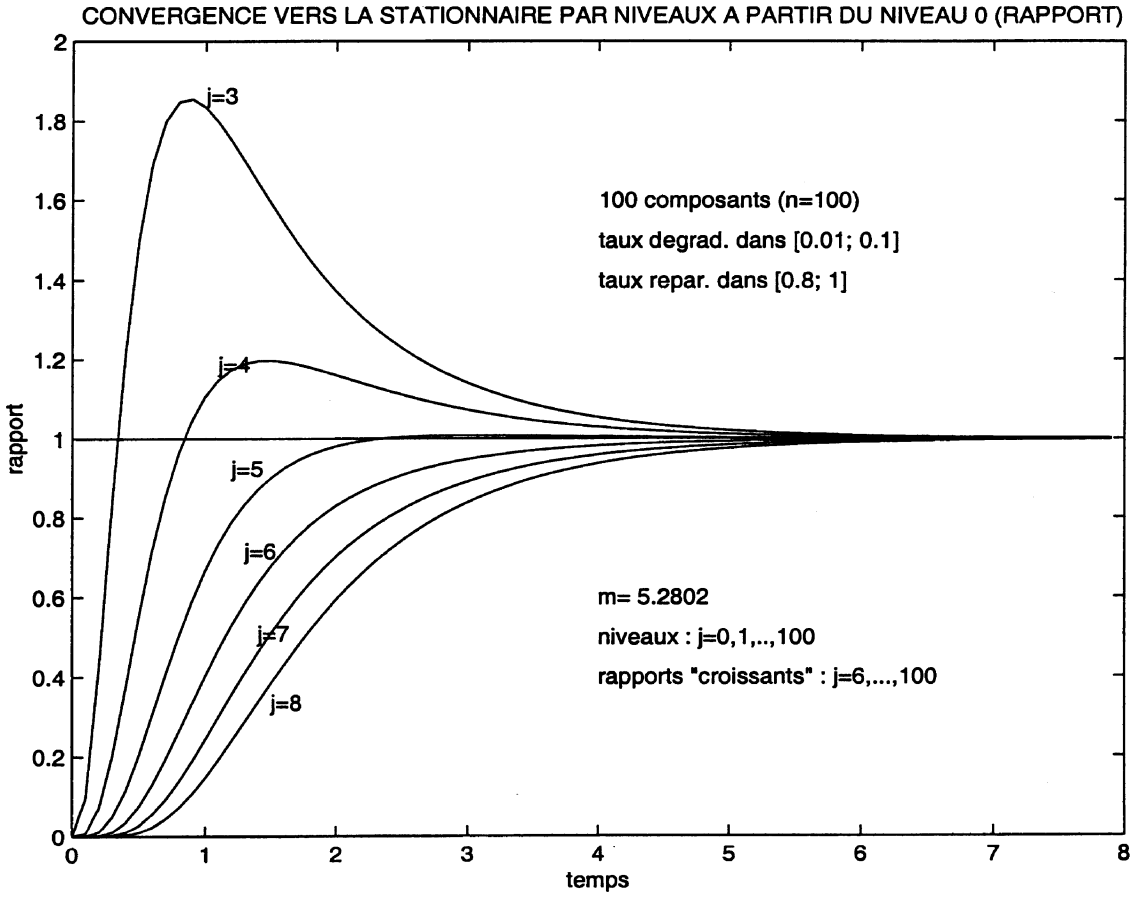

Figure 5.1 *Les graphes des fonctions* ψ_j, $j \in \{3,4,\ldots,8\}$

Pour la simulation numérique ci-dessus on a employé des taux λ_i et μ_i aléatoires, suivant des lois uniformes sur les intervalles indiqués. Pratiquement, les états dégradés sont ceux qui ont beaucoup de composants en panne. Si ce nombre est plus grand que m, on peut dire que *la probabilité stationnaire est une vision pessimiste de l'indisponibilité.*

5.3 Cas des composants identiques

Dans le cas particulier des composants identiques, on peut regarder ce que donne l'étude précédente. Il est possible d'identifier avec précision le niveau de séparation j_t^* et le comportement des fonctions ψ_j. Supposons donc $\lambda_i = \lambda > 0$, $\mu_i = \mu > 0$, $\Lambda_i = \Lambda = \lambda + \mu$ et $p_i = p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $S_{n,t}$ et S_n ont des distributions binomiales de paramètres $p_t = p(1 - e^{-\Lambda t})$ et p respectivement, d'espérance $m_t = \mathbb{E}(S_{n,t}) = np_t$ et $m = \mathbb{E}(S_n) = np$.

Cette hypothèse supplémentaire permet une version plus forte de la PROPOSITION 5.2.4. Présentons d'abord un lemme préparatoire.

Lemme 5.3.1 *La fonction* $v_a : (0,1) \times (0,1) \to (0,\infty)$ *définie par* $v_a(s,x) = (1 + as)^{1-x}(1 - s)^x$, *où* a *est une constante positive, vérifie la propriété suivante : pour chaque* $s \in (0,1)$ *il existe un unique* $x_s \in (0,1)$ *t.q.* $v_a(s,x_s) = 1$; *de plus*

$$x_s = \frac{a}{a+1}\left(1 - \frac{1}{2}s + \frac{a-1}{12}s^2 + 0(s^2)\right), \quad s \to 0. \tag{5.30}$$

DÉMONSTRATION. Puisque qu'on a $v_a(s,x) = (1 + as)(\frac{1-s}{1+as})^x$ avec $0 < \frac{1-s}{1+as} < 1$, la fonction v est décroissante en x (s fixé). Puis $v_a(s,0) = 1 + as > 1 > 1 - s = v(s,1)$. Alors pour tout $s \in (0,1)$ il existe un unique $x_s \in (0,1)$ t.q. $v_a(s,x_s) = 1$ et $v_a(s,x) \leq 1$ si et seulement si $x \in [x_s,1)$. En fait

$$x_s = \frac{\log(1 + as)}{\log(1 + as) - \log(1 - s)} \tag{5.31}$$

est obtenu comme solution de l'équation $v(s,x) = 1$. En développant x_s par rapport à s au voisinage de l'origine, on obtient la relation (5.30). □

La proposition suivante montre que le niveau de séparation j_t^* se trouve au voisinage de la moyenne arithmétique des nombres m et m_t.

Proposition 5.3.1 *Le niveau de séparation* j_t^* *(à partir du niveau 0) satisfait les relations :*

$$j_t^* \geq \frac{m_t + m}{2} + m\left(\frac{2p-1}{12(1-p)}e^{-2\Lambda t} + 0(e^{-2\Lambda t})\right), \quad t \to \infty \tag{5.32}$$

$$\sqrt{m_t m} < j_t^* <^{(*)} \frac{m_t + m}{2} + 1 \tag{5.33}$$

où $<^{(*)}$ *a lieu si* $\lambda < \mu$.

DÉMONSTRATION. Pour $t > 0$ fixé observons que $\psi_j(t)$ peut s'écrire :

$$\psi_j(t) = \frac{\binom{n}{j}p_t^j(1-p_t)^{n-j}}{\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}} = \left(1 - e^{-\Lambda t}\right)^j \left(1 + \frac{p}{q}e^{-\Lambda t}\right)^{n-j},$$

ce qui nous conduit à l'étude de la fonction v_a définie par le lemme précédent. Ainsi nous avons $\psi_j(t) = v_a^n(e^{-\Lambda t},j/n)$, pour $a = \frac{p}{q}$, et nous obtenons: $\psi_j(t) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{j}{n} \geq x_{e^{-\Lambda t}}$. Alors, d'après (5.30) et les définitions de m, m_t et j_t^*, on arrive à la relation (5.32).

Pour l'inégalité gauche de (5.33), étudions la monotonie de la fonction $\theta_b : (b^2,b] \to (0,\infty)$,

$$\theta_b(x) = b^{-2b}x^{b+1}\left(\frac{1-x}{x-b^2}\right)^{1-b}, \quad x \in (b^2,b],$$

où $b \in (0,1)$ est une constante. On a pour la dérivée de θ_b la forme:

$$\theta_b'(x) = b^{-2b}(1-b)(1-b^2)x^b\left(\frac{1-x}{x-b^2}\right)^{1-b}\left[\frac{1}{(1-b)^2} - \frac{x}{(1-x)(x-b^2)}\right], \quad x \in (b^2,b).$$

Puisque, pour tout $x \in (b^2,b)$, $\frac{d}{dx}(\frac{x}{(1-x)(x-b^2)}) = \frac{x^2-b^2}{(1-x)^2(x-b^2)^2} < 0$, nous trouvons $\frac{x}{(1-x)(x-b^2)} > \frac{1}{(1-b)^2}$, donc $\theta_b'(x) < 0$. Alors nous avons $\theta_b(x) > \theta_b(b) = 1$, $\forall\, x \in (b^2,b)$. En particulier, pour $b = \sqrt{p_t p}$ (où $t > 0$ est fixé) et $a = \frac{p}{1-p}$, l'inégalité précédente et la décroissance de la fonction $v_a(e^{-\Lambda t},\cdot)$ donnent:

$$\psi_j(t) = v_a^n(e^{-\Lambda t},j/n) \geq v_a^n(e^{-\Lambda t},b) = \theta_b^n(p_t) > 1, \quad \forall\, j \leq nb$$

Puisque $nb = n\sqrt{p_t p} = \sqrt{m_t m}$, on déduit $j_t^* > \sqrt{m_t m}$.

Pour l'inégalité droite de (5.33), on s'intéresse à la monotonie de la fonction δ_c : $(0,c] \to (0,\infty)$, $\delta_c(x) = (\frac{2c}{x} - 1)^c(\frac{2(1-c)}{1-x} - 1)^{1-c}$, où $c \in (0,\frac{1}{2})$ est une constante. Sa dérivée

$$\delta_c'(x) = 2(1-c)^2x^{-2}\left(\frac{2c}{x} - 1\right)^{-1}\delta_c(x)\left(\frac{2cx-x^2}{1-2c+(2cx-x^2)} - \frac{c^2}{(1-c)^2}\right)$$

est négative, parce que $0 < x < c \Rightarrow 2cx - x^2 < c^2 \Rightarrow \frac{2cx-x^2}{1-2c+(2cx-x^2)} < \frac{c^2}{(1-c)^2}$. Alors, $\delta_c(x) > \delta_c(c) = 1$, $\forall\, x \in (0,c)$. En particulier, pour $c = \frac{p_t+p}{2} < p < \frac{1}{2}$ (puisque $\lambda < \mu$) et $a = \frac{p}{1-p}$, on déduit:

$$\psi_j(t) = v_a^n(e^{-\Lambda t},j/n) \leq v_a^n(e^{-\Lambda t},c) = \delta_c^{-n}(p_t) < 1, \quad \forall\, j \geq nc.$$

Par définition du niveau de séparation j_t^* nous concluons $j_t^* < nc + 1 = \frac{m_t+m}{2} + 1$. □

Remarque L'hypothèse $\lambda < \mu$ est raisonnable au point de vue fiabiliste. La relation (5.33) du niveau de séparation est généralement valable pour deux variables aléatoires binomiales $\mathcal{B}(n,p')$ et $\mathcal{B}(n,p)$, avec $0 < p' < p < \frac{1}{2}$.

Ainsi, dans ce cas, nous avons l'encadrement suivant du niveau de séparation j^* :

$$n\sqrt{pp'} < j^* < \frac{n(p+p')}{2} + 1$$

La monotonie des fonctions $\psi_j(t)$ est clarifiée par l'énoncé suivant.

Proposition 5.3.2 *(i) ψ_0 est décroissante sur $[0,\infty)$;*

(ii) si $0 < j < m$, alors ψ_j est croissante sur $[0,t_j]$ et décroissante sur $[t_j,\infty)$ où $t_j = \frac{1}{\Lambda}\log(\frac{m}{m-j})$ est la solution de l'équation $m_t = j$;

(iii) si $m \leq j \leq n$, ψ_j est croissante sur $[0,\infty)$.

DÉMONSTRATION. On utilise la forme:

$$\frac{d\psi_j}{dt}(t) = \Lambda(1-p)^{-1}e^{-\Lambda t}\left(1-e^{-\Lambda t}\right)^{j-1}\left(1+\frac{p}{q}e^{-\Lambda t}\right)^{n-j-1}(j-m_t)$$

de la dérivée de ψ_j, $j = 1,\ldots,n-1$. □

On peut formuler un résultat plus général qui décrit le comportement des rapports ${}^e\mathcal{P}_t(j)\,/\,\pi_j$, $e \in E$, pour t assez grand.

Théorème 5.3.1 *Si l'état initial $e \in E$ se trouve avec la probabilité 1 dans l'ensemble $\cup_{k<m}E_k$, alors il existe $t^* > 0$ t.q. la fonction ${}^e\psi_j(t) = \frac{{}^e\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j}$ est décroissante (resp. croissante) sur l'intervalle $[t^*,\infty)$, pour tout $j < m$ (resp. $j > m$).*

De même, si $\mathbb{P}\{e \in \cup_{k>m}E_k\} = 1$, alors il existe $t^* > 0$ t.q. ${}^e\psi_j(t)$ est décroissante (resp. croissante) sur l'intervalle $[t^*,\infty)$, pour tout $j > m$ (resp. $j < m$).

DÉMONSTRATION. Soit $e \in E$ l'état initial. Supposons $\mathbb{P}\{e \in \cup_{k<m}E_k\} = 1$. Evidemment, pour prouver l'affirmation de l'énoncé il suffit de prendre comme hypothèse $\mathbb{P}\{e \in E_k\} = 1$, pour $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ fixé, avec $k < m$. Puisque les composants sont identiques (donc le choix de l'état dans le niveau k n'a pas d'importance) notons ${}^k\mathcal{P}_t(j)$ = *la probabilité d'être au temps t dans le niveau j, à partir du niveau k.* D'après (5.3) et le LEMME 5.1.1 on a:

$$(5.34) \qquad {}^k\mathcal{P}_t(j) = [z^j]\,\left\{(1-p_t+p_tz)^{n-k}(1-r_t+r_tz)^k\right\},$$

où $r_t = p(1+\frac{\mu}{\lambda}e^{-\Lambda t})$. Si ${}^k\psi_j(t)$ désigne le rapport $\frac{{}^k\mathcal{P}_t(j)}{\pi_j}$, alors:

$${}^k\psi_j(t) = \sum_{i=\max(0,k+j-n)}^{\min(j,k)} \frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{j-i}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}e^{-\Lambda t}\right)^i\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-\Lambda t}\right)^{n+i-k-j}\left(1-e^{-\Lambda t}\right)^{k+j-2i}}{\binom{n}{j}}$$

Le signe de la première dérivée de ${}^k\psi_j(t)$ est indiqué par l'expression:

$$\sum_{i=\max(0,k+j-n)}^{\min(j,k)}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j-i}\mathcal{H}_j(t),$$

avec

$$\mathcal{H}_j(t) = (k+j-2i)(1+\tfrac{\mu}{\lambda}e^{-\Lambda t})(1+\tfrac{\lambda}{\mu}e^{-\Lambda t}) - \tfrac{\mu i}{\lambda}(1+\tfrac{\lambda}{\mu}e^{-\Lambda t})(1-e^{-\Lambda t}) -$$

$$-\tfrac{\lambda(n+i-k-j)}{\mu}(1+\tfrac{\mu}{\lambda}e^{-\Lambda t})(1-e^{-\Lambda t}).$$

Si on réécrit convenablement cette expression, on obtient une relation asymptotique très simple :

$$\lim_{t\to\infty} e^{\Lambda t}\frac{d^{\,k}\psi_j}{dt}(t) = \frac{\Lambda^3}{n\lambda\mu}(m-k)(j-m) \tag{5.35}$$

D'après l'hypothèse $m-k>0$ et dans ce cas (5.35) montre que pour chaque $j<m$ (resp. $j>m$) il existe un $t_j>0$ t.q. $\frac{d\psi_j^{(k)}}{dt}(t)<0$ (resp. $\frac{d\psi_j^{(k)}}{dt}(t)>0$) pour tout $t>t_j$. Pour valider l'affirmation de l'énoncé, il suffit de choisir $t^*=\max_{j\neq m} t_j$. Evidemment, d'après (5.35), la situation sera "inversée" si on prend comme l'hypothèse $\mathbb{P}\{e\in\cup_{k>m}E_k\}=1$. □

Remarque En fait, pour n suffisamment grand, le phénomène décrit dans le THÉORÈME 5.3.1 reste valable pour des taux λ_i et μ_i différents. Les figures ci-dessous illustrent cette propriété. Par des simulations numériques, on y représente le comportement des fonctions ${}^e\psi_j(t)$, avec $e\in E_k$, dans les deux cas suivants : $k<m$ et $k>m$.

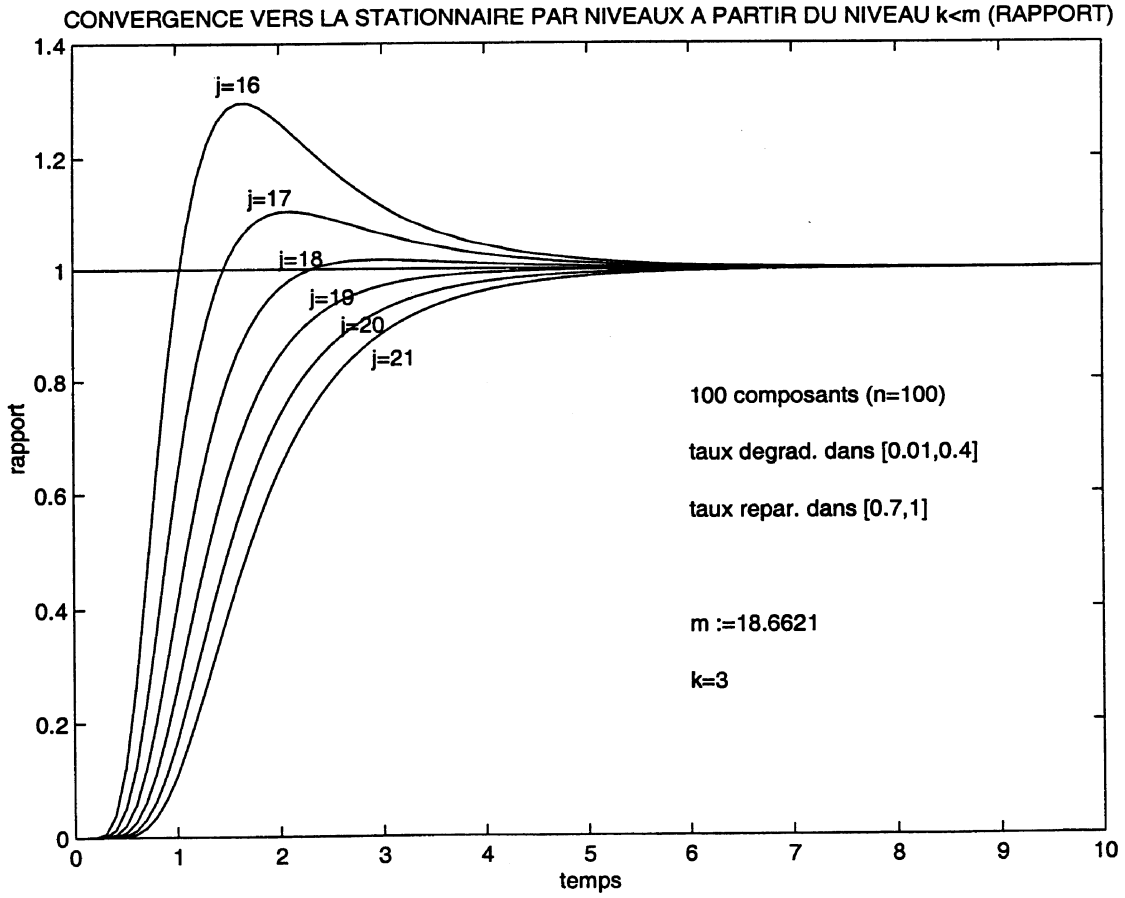

Figure 5.2 *Les graphes des fonctions* ${}^{e}\psi_j$, $j \in \{16,17,\ldots,21\}$ *pour un état initial* $e \in E_3$

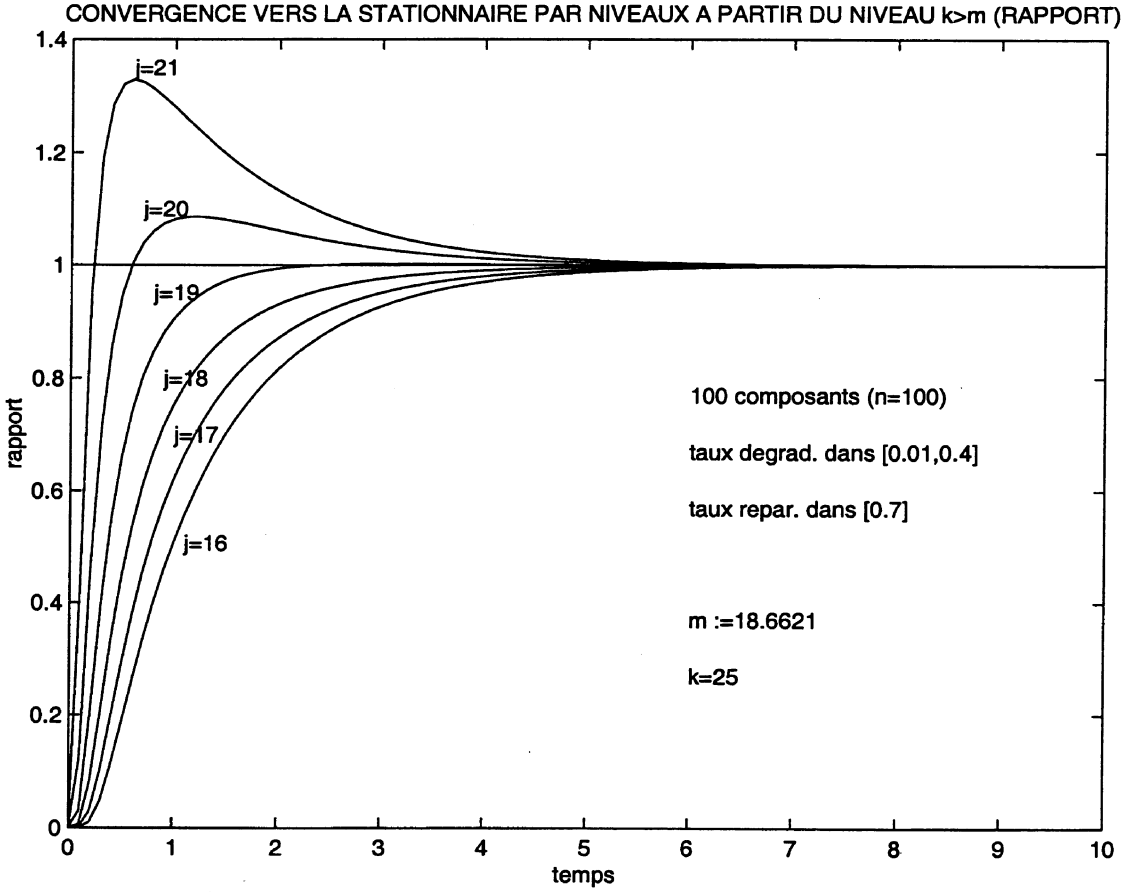

Figure 5.3 *Les graphes des fonctions* ${}^{e}\psi_j$, $j \in \{16,17,\ldots,21\}$ *pour un état initial* $e \in E_{25}$

5.4 Calcul direct de la distance en variation totale

Dans la section précédente nous avons décrit l'évolution de la probabilité d'être dans un état donné. Cette étude a permis de majorer la distance en variation totale entre $\mathcal{P}_t$ et Π. En fait, nous pouvons fournir une majoration directe de cette distance en variation totale en utilisant le lien avec la distance de Hellinger (Cf DACUNHA-CASTELLE ET DUFLO).

Soient $P = \{P(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ et $Q = \{Q(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ deux probabilités sur un même espace discret $[\Omega,\mathcal{P}(\Omega)]$, où Ω est un ensemble au plus dénombrable. On définit deux affinités de P et Q par

$$A(P,Q) := \sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{P(\omega)\cdot Q(\omega)} \tag{5.36}$$

$$B(P,Q) := \sum_{\omega\in\Omega} \min(P(\omega),Q(\omega)) \tag{5.37}$$

Ces deux notions sont reliées par l'encadrement classique suivant.

Lemme 5.4.1

$$B(P,Q) \leq A(P,Q) \leq \sqrt{B(P,Q)(2-B(P,Q))}$$

DÉMONSTRATION. La première inégalité vient de la propriété $\min(a,b) \leq \sqrt{ab}$, pour $a,b > 0$; la deuxième utilise $\sqrt{ab} = \sqrt{\min(a,b)\cdot\max(a,b)}$, si $a,b > 0$, $\max(a,b) = (a+b) - \min(a,b)$ et l'inégalité de Cauchy. □

La distance en variation totale entre P et Q s'exprime alors simplement en fonction de $B(P,Q)$.

Lemme 5.4.2

$$\|P-Q\|_{VT} = 1 - B(P,Q)$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\|P-Q\|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|P(\omega)-Q(\omega)| = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}(P(\omega)+Q(\omega)-2\min(P(\omega),Q(\omega))) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}Q(\omega)\right) - \sum_{\omega\in\Omega}\min(P(\omega),Q(\omega)) = 1 - B(P,Q),$$

d'où la conclusion. □

De façon similaire, la distance de Hellinger s'exprime en fonction de A. Rappelons sa définition.

Définition *On appelle distance de Hellinger des mesures de probabilité P et Q sur l'espace discret $[\Omega,\mathcal{P}(\Omega)]$ le nombre réel non-négatif défini par :*

$$H(P,Q) := \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\left(\sqrt{P(\omega)}-\sqrt{Q(\omega)}\right)^2 = 1 - A(P,Q)$$

Ce qui précède peut se résumer en un encadrement de H à partir de la variation totale.

Lemme 5.4.3

$$1 - \sqrt{1-\|P-Q\|_{VT}^2} \leq H(P,Q) \leq \|P-Q\|_{VT}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de reprendre les résultats des deux lemmes précédents et la définition de H. □

Remarque Pour obtenir un encadrement de la distance en variation totale, il suffit donc d'encadrer $H(P,Q)$. Ainsi, montrer qu'une suite de couples (P_n,Q_n) a une

distance en variation totale qui tend vers 0 ou 1 est équivalent à montrer la même chose pour la distance H.
Montrons maintenant un résultat général pour deux lois P et Q, que nous appliquerons ensuite aux lois $\mathcal{P}_t$ et Π et qui fait intervenir la distance du chi-deux.

Nous supposons $Q \preceq P$. Pour l'espace discret Ω, il suffit $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Notons L la vraisemblance de la mesure de probabilité Q par rapport à la mesure de probabilité P telle que on a $Q = L \cdot P$. Donc L est une variable aléatoire réelle sur $[\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P]$ de moyenne $\mathbb{E}(L) = 1$. Dans la suite, nous utiliserons aussi $\xi = L - 1$ pour avoir une variable centrée.

Lemme 5.4.4 *Si* $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$, *alors:*

$$\|P - Q\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)} \tag{5.38}$$

DÉMONSTRATION. Dans ce cas,

$$\sum_{\omega\in\Omega} |P(\omega) - Q(\omega)| = \sum_{\omega\in\Omega} |L(\omega) - 1|P(\omega) = \mathbb{E}|\xi| \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)},$$

d'où l'on tire (5.38). □

Définition *On dira que le couple* (P,Q) *a une vraisemblance M-bornée, où* M *est une constante positive, si*

$$-1 \leq \xi \leq M.$$

Théorème 5.4.1 *Si le couple* (P,Q) *a une vraisemblance M-bornée, alors on peut minorer la distance de Hellinger par:*

$$H(P,Q) \geq \frac{1}{8(1+M)^{3/2}}\mathbb{E}(\xi^2). \tag{5.39}$$

DÉMONSTRATION. D'après les définitions,

$$H(P,Q) = 1 - A(P,Q) = 1 - \sum_{\omega} P(\omega)\sqrt{L(\omega)} = 1 - \mathbb{E}\left(\sqrt{1+\xi}\right).$$

Pour minorer $H(P,Q)$, il suffit donc de trouver un majorant convenable pour $\sqrt{1+\xi}$. Il est possible d'exhiber un positif a tel que

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - ax^2,$$

pour tout $-1 \leq x \leq M$. En utilisant la majoration du reste d'ordre 2 de la formule de TAYLOR, on vérifie que le nombre $a_M = \frac{1}{8(1+M)^{3/2}}$ convient. Dans ce cas, pour l'inégalité de l'énoncé, nous aurons besoin de l'hypothèse de vraisemblance *M-bornée*

et du fait que $\mathbb{E}(\xi) = 0$. □

Le théorème ci-dessus et les deux derniers lemmes donnnent un encadrement significatif de la distance en variation totale.

Corollaire 5.4.1 *Si le couple (P,Q) a une vraisemblance M-bornée, alors on peut encadrer la distance en variation totale à l'aide de* ξ *par*

$$a_M \mathbb{E}(\xi^2) \leq \|P - Q\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)} \tag{5.40}$$

avec $a_M = \frac{1}{8(1+M)^{3/2}}$.

Application pour le cas d'un seul composant.

Considérons, dans le contexte précédent, un composant exponentiel de taux respectifs λ et μ. Soit t un réel positif. L'espace Ω est $\{0,1\}$ et les probabilités P et Q sont définies par $P(1) = p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $Q(1) = p_t = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$. La signification de ces probabilités est claire: P est la probabilité stationnaire et Q est la probabilité transitoire (au moment t) du composant respectif. Après un calcul facile on obtient

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-2\Lambda t}, \tag{5.41}$$

où $\Lambda = \lambda + \mu$. Puisque $\xi \leq \frac{p-p_t}{1-p} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\Lambda t} < 1$, on peut prendre $M = 1$. Alors, d'après (5.40), nous trouvons que la distance en variation totale est encadrée par

$$\frac{1}{2^{9/2}} \frac{\lambda}{\mu}\, e^{-2\Lambda t} \leq \|P - Q\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, e^{-\Lambda t}. \tag{5.42}$$

Puisque en fait on a $\|P - Q\|_{VT} = \frac{\lambda}{\Lambda} e^{-\Lambda t}$, on voit bien que l'inégalité droite est beaucoup satisfaisante que l'inégalité gauche. En particulier si des taux λ et μ sont proches la partie droite est presque une égalité.

Mais nous désirons évaluer la distance entre $\mathcal{P}_t$ et Π. Afin de réaliser une majoration convenable de cette distance, nous nous proposons d'étendre l'inégalité (5.38) à des produits de probabilités.

Théorème 5.4.2 *Soient* P_i *et* Q_i *des mesures de probabilité sur l'espace discret* $[\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i)]$, $i = 1,2,\ldots,n$. *Supposons* $P_i(\omega) > 0$ *et notons* ξ_i *la variable aléatoire réelle centrée définie sur* $[\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i]$ *par* $\xi_i = \frac{Q_i}{P_i} - 1$, $i = 1,2,\ldots,n$. *Si* $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i = 1,2,\ldots,n$ *et* $P := \times_{i=1}^n P_i$ *et* $Q := \times_{i=1}^n Q_i$ *sont des produits de mesures sur l'espace produit* $\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i$, *alors on a la majoration suivante de la distance en variation totale entre* P *et* Q :

$$\|P - Q\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{E}(\xi_i^2) + 1) - 1} \tag{5.43}$$

DÉMONSTRATION. Soient les variables aléatoires indépendantes $\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2,\ldots,\overline{\xi}_n$ définies sur l'espace Ω par $\overline{\xi}_i(\omega) = \xi_i(\omega_i)$, $\forall\ \omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega$. Alors les variables aléatoires ξ_i et $\overline{\xi}_i$ ont la même distribution (en particulier, on trouve que $\overline{\xi}_i$ est aussi centrée).

Dans ce cas, nous avons :

$$\|P-Q\|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\left|\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} - 1\right| = \frac{1}{2}\sum_{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega} P(\omega)\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{Q_i(\omega_i)}{P_i(\omega_i)} - 1\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\left|\prod_{i=1}^{n}(\overline{\xi}_i(\omega)+1) - 1\right| = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\left|\prod_{i=1}^{n}(\overline{\xi}_i+1)\ -1\right|\right).$$

Puis, l'inégalité de CAUCHY et l'indépendance des variables centrées $\overline{\xi}_i$, $i = 1,\ldots,n$ donnent :

$$\mathbb{E}\left(\left|\prod_{i=1}^{n}(\overline{\xi}_i+1)\ -1\right|\right) \le \sqrt{\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}(\overline{\xi}_i+1)\ -1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\overline{\xi}_i+1)^2 - 2\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\overline{\xi}_i\ +1)\ +1} =$$

$$= \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(\overline{\xi}_i^2)+1\right)\ -1} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(\xi_i^2)+1)\ -1},$$

d'où l'on tire la conclusion. □

Application pour un système fini de composants indépendants.
Appliquons maintenant les résultats précédents aux cas d'un système de n composants pour obtenir une autre majoration de la distance entre la mesure transitoire de probabilité au moment t et la mesure statonnaire, distribuées sur les niveaux.

Théorème 5.4.3 *Pour tout $t > 0$ on a la majoration :*

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \le \frac{1}{2}\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-2\Lambda_i t}+1\right) - 1}. \tag{5.44}$$

DÉMONSTRATION. Soit $t > 0$, fixé. Comme dans l'application pour le cas d'un seul composant, soient l'espace $\Omega_i = \{0,1\}$, les probabilités P_i et Q_i sur $\Omega_i = \{0,1\}$ et la variable aléatoire centrée ξ_i, avec $\mathbb{E}(\xi_i^2) = \frac{\lambda_i}{\mu_i}e^{-2\Lambda_i t}$ (cf. (5.41)), $i = 1,2,\ldots,n$. Soient aussi l'espace produit $\Omega = \times_{i=1}^{n}\Omega_i$ et les produits de mesures de probabilités sur Ω : $P = \times_{i=1}^{n}P_i$ et $Q = \times_{i=1}^{n}Q_i$. Alors, puisque les variables aléatoires indépendantes

X_i et $X_{i,t}$ ont comme distributions respectives P_i et Q_i, pour $i = 1,2,\ldots,n$, on obtient :

$$\|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} |\mathcal{P}_t(j) - \pi_j| = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \left| \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n} X_{i,t} = j\} - \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{n} X_i = j\} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega; \\ \omega_1+\ldots+\omega_n=j}} |\mathbb{P}\{X_{1,t} = \omega_1,\ldots,X_{n,t} = \omega_n\} - \mathbb{P}\{X_1 = \omega_1,\ldots,X_n = \omega_n\}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega} \left| \prod_{i=1}^{n} Q_i(\omega_i) - \prod_{i=1}^{n} P_i(\omega_i) \right| = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega} |Q(\omega) - P(\omega)| = \|P - Q\|_{VT}.$$

Alors il suffit d'employer la majoration (5.43) du théorème précédent pour finir la démonstration. □

La vitesse de convergence vers la loi stationnaire est très bien mise en évidence par le théorème ci-dessus. Nous allons montrer à la fin du chapitre qu'on peut employer ce résultat pour prouver une partie du théorème concernant le phémonène de *cut-off*.

D'autre part, à partir de l'inégalité (5.44), sous une condition raisonnable, on arrive à une majoration simple, plus faible mais de même qualité.

Proposition 5.4.1 *Si* $\frac{\lambda_i}{\mu_i} \leq \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$, *alors :*

$$(5.45) \qquad \|\mathcal{P}_t - \Pi\|_{VT} \leq \sqrt{\frac{e-1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} e^{-2\Lambda_i t}\right)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} e^{-2\Lambda_i t}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $t > 0$ l'hypothèse donne :

$$u_i := \frac{\lambda_i}{\mu_i} e^{-2\Lambda_i t} \leq \frac{1}{n}, \; i = 1,\ldots,n.$$

De plus, dans ce cas, en partant de l'inégalité élémentaire

$$\frac{\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}}{\binom{n}{k}} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

nous obtenons les majorations globales suivantes

$$\prod_{i=1}^{n}(1+u_i) - 1 = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} u_{i_1}u_{i_2} + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \sum_{i=1}^{n} u_i = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\} \sum_{i=1}^{n} u_i < (e-1)\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Alors, la relation (5.44) implique l'inégalité de l'énoncé. □

Illustrons les différentes évaluations précédentes de la distance en variation totale par un exemple numérique. Le système est formé de 6 composants indépendants dont les taux de dégradation sont compris entre 0.05 et 0.09 et les taux de réparation sont compris entre 1 et 1.15. Ces valeurs sont raisonnables pour des applications concrètes.

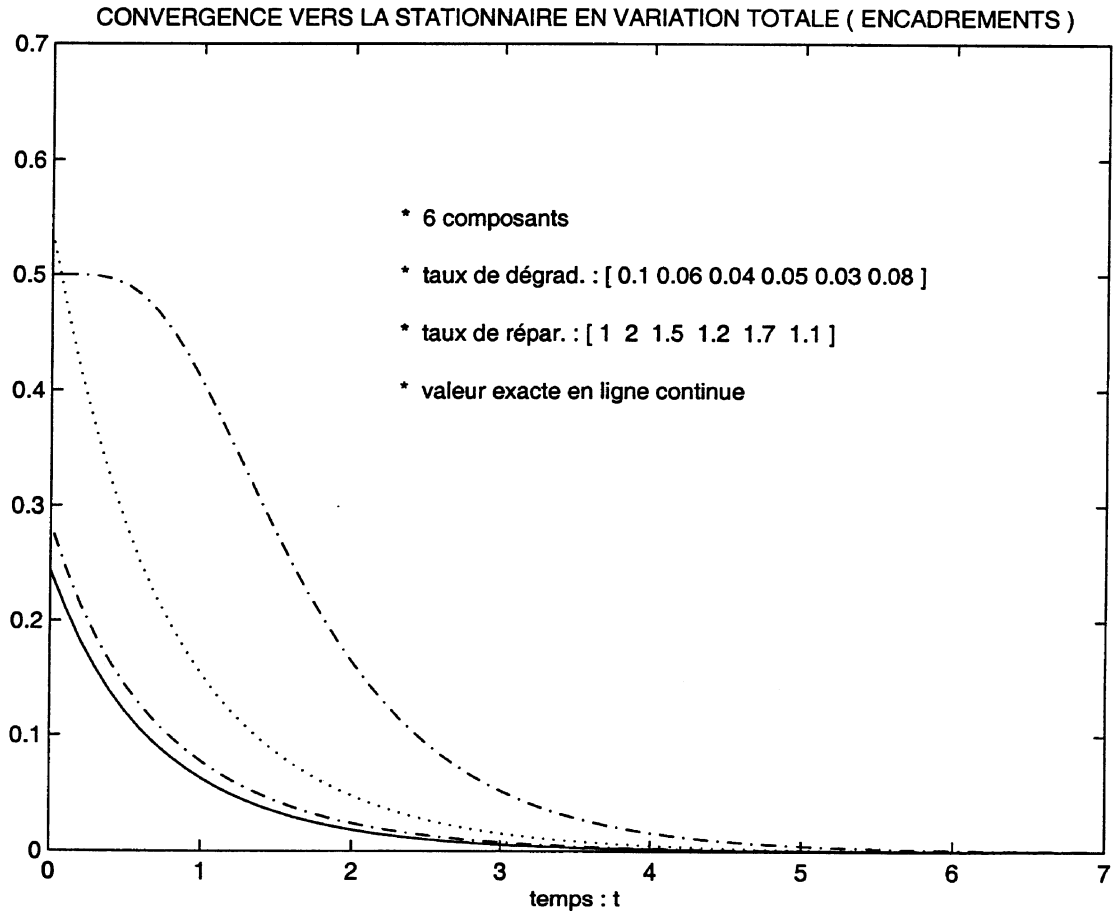

Figure 5.4 *La valeur exacte de la distance en variation totale est en ligne continue. Les autres courbes représentent, dans l'ordre de la plus petite à la plus grande, les majorations respectives (5.44) - en traits alternés, (5.45) - en pointillés et (5.18) - de nouveau en traits alternés.*

5.5 Temps critique de convergence vers la loi stationnaire (cut-off)

Le phénomène de *cut-off* a été dejà signalé pour les modèles markoviens en fiabilité quand le nombre des composants devient très grand. Des études récentes sur ce sujet ont été réalisées par YCART (1998). Nous nous proposons d'étudier ce phénomène pour des composants différents dans le cas du processus de Markov réversible. Cet objectif demande un changement de modèle par rapport à ce qui précède: le processus $\mathcal{N}_n = (S_{n,t})_{t\geq 0}$ (n fixé) sera remplacé désormais par une suite de processus

$(\mathcal{N}_n)_{n\geq 1}$. Cela revient à imaginer une suite infinie de composants $c^{(1)},c^{(2)},\ldots$ à des taux de dégradation $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$, respectivement de réparation $\mu_1,\mu_2,\ldots$. En gardant cependant la signification de Λ_i, p_i et $p_{i,t}$, $i = 1,2,\ldots$, nous voyons que le processus $\mathcal{N}_n$ indique l'évolution en temps du nombre des composants en panne, parmi les n premiers composants $c^{(1)},c^{(2)},\ldots,c^{(n)}$, sachant toujours qu'au moment initial tout composant est en bon état. Pour marquer ce changement de modèle, notons ensuite $\mathcal{P}_{n,t}$ (au lieu de $\mathcal{P}_t$) la distribution de la variable aléatoire $S_{n,t}$, i.e.

$$\mathcal{P}_{n,t}(j) = \mathbb{P}\{S_{n,t} = j\} = [z^j] \left\{\prod_{i=1}^{n}(1 - p_{i,t} + p_{i,t}z)\right\}, \tag{5.46}$$

comme réplique de (5.7). La mesure stationnaire associée sera noté $\Pi_n = (\pi_{n,j})_{j=0,1,\ldots,n}$ et les moyennes de $S_{n,t}$ et S_n seront notées par $m_{n,t}$ et m_n.

Dans un premier temps, nous allons voir ce que devient le *niveau de séparation* dans ce nouveau cadre. Puis nous donnerons un résultat de cut-off pour ce modèle. Il est raisonnable de supposer que l'ensemble des taux est inférieurement borné et les taux de dégradation sont (beaucoup) plus petits que les taux de réparation. Formulons cela de façon plus précise.

Définition *On dit que la suite de composants* $(c^{(i)})_{i\geq 1}$ *satisfait la condition* $\mathcal{D}$ *de paramètres* $(a,\underline{\Lambda})$, *avec* $0 < a < \frac{1}{2}$ *et* $\underline{\Lambda} > 0$, *si*
1) $p_i \in [a,\frac{1}{2}]$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$
2) $\inf_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i = \underline{\Lambda}$.

Dorénavant $(t_n)_{n\geq 1}$ sera une *suite* (fixée) *croissante de nombres réels positifs.* Notons

$$\rho_n = \frac{m_{n,t_n}}{m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t_n}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{5.47}$$

le rapport des moyennes. Si $\rho_1 = \rho \in (0,1)$, alors évidemment $0 < \rho \leq \rho_n < \rho_{n+1} < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

L'encadrement (5.27), PROPOSITION 5.2.4, du niveau de séparation j_{n,t_n} à partir des moyennes a un caractère général. Ici nous nous proposons d'affiner l'encadrement et nous donnons, ci-dessous une condition suffisante telle que $m_{n,t_n} + 2 \leq j^*_{n,t_n} \leq m_n - 2$.

Théorème 5.5.1 *Supposons que la condition* $\mathcal{D}$ *est satisfaite et considérons* ρ_n, j^*_{n,t_n} *antérieurement définis. Si* $\sqrt{n}(1-\rho_n) > d := \sqrt{\frac{8(1-a)\log 2}{3a}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *alors il existe* $N \in \mathbb{N}$ *t.q.*

$$m_n\rho_n + 2 \;\leq\; j^*_{n,t_n} \;\leq\; m_n - 2, \quad \forall\, n \geq N.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, on a $\lim_{n\to\infty} n(1-\rho_n) = \infty$. Alors $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall\ n \geq N_1\ :\ n(1-\rho_n) > \frac{6}{a}$. Puisque $p_i \geq a$, nous avons $m_n \geq na$ donc $\forall\ n \geq N_1\ :\ 1-\rho_n > \frac{6}{m_n}$. Après une manipulation simple on obtient l'inegalité équivalente :

$$m_n\rho_n + 3 \ < \ \frac{m_n(1+\rho_n)}{2} \ < \ m_n - 3,\ \forall\ n \geq N_1$$

On déduit $\mathcal{K}_n := \{\ j \in \mathbb{N}\ :\ m_n\rho_n + 2 \leq j \leq \frac{m_n(1+\rho_n)}{2}\ \} \neq \emptyset$. Soit $w_n = \text{card}\,(\mathcal{K}_n)$ et $k_n = \min \mathcal{K}_n$.

Nous allons utiliser l'approximation normale séparément pour S_n et S_{n,t_n}. Cette approximation est classique pour des sommes de variables de Bernoulli. Elle est justifiée par les conditions de Lindeberg-Feller. Ainsi nous avons :

$$w_n\mathcal{P}_{n,t_n}(k_n) \geq \sum_{m_{n,t_n}+2\leq j\leq \frac{m_n+m_{n,t_n}}{2}} \mathcal{P}_{n,t_n}(j) = \mathbb{P}\left\{\frac{2}{\sqrt{B_{n,t_n}}} \leq \frac{S_{n,t_n}-m_{n,t_n}}{\sqrt{B_{n,t_n}}} \leq \frac{m_n-m_{n,t_n}}{2\sqrt{B_{n,t_n}}}\right\},$$

(5.48)

parce que $\mathcal{P}_{n,t_n}(j) > \mathcal{P}_{n,t_n}(j+1), \forall\ j \geq m_n\rho_n = m_{n,t_n}$ (cf. SAMUELS, 1965). Dans la relation ci-dessus $B_{n,t_n} = \sum_{i=1}^n p_{i,t_n}(1-p_{i,t_n})$ est la variance de la variable aléatoire S_{n,t_n}.

De la même façon, puisque $\pi_{n,j} < \pi_{n,j+1},\ \forall\ j \leq m_n - 1$, nous avons :

$$w_n\pi_{n,k_n} \leq \sum_{m_{n,t_n}+2\leq j\leq \frac{m_n+m_{n,t_n}}{2}} \pi_{n,j} = \mathbb{P}\left\{\frac{2-(m_n-m_{n,t_n})}{\sqrt{B_n}} \leq \frac{S_n-m_n}{\sqrt{B_n}} \leq -\frac{m_n-m_{n,t_n}}{2\sqrt{B_n}}\right\},$$

(5.49)

où $B_n = \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)$ est la variance de la variable aléatoire S_n.

Notons que $0 < B_{n,t_n} < B_n$ puisque $0 < p_{i,t_n} < p_i \leq \frac{1}{2}$.

Soit :

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{m_n-m_{n,t_n}}{2\sqrt{B_n}} \\ \\ \beta_n = \frac{m_n-m_{n,t_n}}{2\sqrt{B_{n,t_n}}} \end{cases}$$

D'après l'inégalité de BERRY-ESSEN (voir par exemple PETROV, 1995) il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\text{(5.50)} \qquad \mathbb{P}\left\{\frac{2}{\sqrt{B_{n,t_n}}} \leq \frac{S_{n,t_n}-m_{n,t_n}}{\sqrt{B_{n,t_n}}} \leq \beta_n\right\} \geq \Phi(\beta_n) - \Phi\left(2B_{n,t_n}^{-1/2}\right) - 2AL_{n,t_n},$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{2}{\sqrt{B_n}} - 2\alpha_n \leq \frac{S_n-m_n}{\sqrt{B_n}} \leq -\alpha_n\right\} \leq \Phi(-\alpha_n) - \Phi\left(2B_n^{-1/2} - 2\alpha_n\right) + 2AL_n,$$

où :

$$L_n = B_n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(|X_i - p_i|^3\right) = B_n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)[p_i^2 + (1-p_i)^2],$$

$$L_{n,t_n} = B_{n,t_n}^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(|X_{i,t_n} - p_{i,t_n}|^3\right) = B_{n,t_n}^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n p_{i,t_n}\left(1-p_{i,t_n}\right)\left[p_{i,t_n}^2 + (1-p_{i,t_n})^2\right]$$

et $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les relations (5.48)... (5.50) donnent :

$$w_n\left(\mathcal{P}_{n,t_n}(k_n) - \pi_{n,k_n}\right) \geq$$

$$\geq \left[\Phi\left(\beta_n\right) - \Phi\left(2B_{n,t_n}^{-1/2}\right)\right] - \left[\Phi\left(-\alpha_n\right) - \Phi\left(2B_n^{-1/2} - 2\alpha_n\right)\right] - 2A\left(L_n + L_{n,t_n}\right).$$

On a $\beta_n > \alpha_n$ donc $\Phi(\beta_n) > \Phi(\alpha_n)$. Puis :

$$\Phi(2B_n^{-1/2} - 2\alpha_n) - \Phi(-\alpha_n) > \Phi(-2\alpha_n) - \Phi(-\alpha_n) = \Phi(\alpha_n) - \Phi(2\alpha_n).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$w_n\left(\mathcal{P}_{n,t_n}(k_n) - \pi_{n,k_n}\right) \geq H(\alpha_n) - \left[\Phi\left(2B_{n,t_n}^{-1/2}\right) - \Phi(0)\right] - 2A\left(L_n + L_{n,t_n}\right) \tag{5.51}$$

où $H(x) = -\Phi(2x) + 2\Phi(x) - \Phi(0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. La fonction $v(\mathbf{p}) = \frac{m_n^2}{B_n} = \frac{(\sum_{i=1}^n p_i)^2}{\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)}$ est croissante par rapport à chacune des variables $p_i \in [a,b] \subset (0, \frac{1}{2})$, car

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(\mathbf{p}) = \frac{(\sum_{l=1}^n p_l)[\sum_{l=1}^n p_l(1-2p_l) + 2p_i(\sum_{l=1}^n p_l)]}{[\sum_{l=1}^n p_l(1-p_l)]^2} > 0.$$

Alors $v(\mathbf{p}) \geq \frac{na}{1-a}$, d'où

$$\alpha_n \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}(1-\rho_n)\sqrt{\frac{a}{1-a}} > \frac{d}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}. \tag{5.52}$$

Mais d'autre part H est croissante, avec $H'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - e^{-\frac{3x^2}{2}}) \geq 0$, donc

$$H(\alpha_n) > H\left(\tfrac{d}{2}\sqrt{\tfrac{a}{1-a}}\right).$$

Puisque $1 - p_{i,t_n} > \frac{1}{2}$ on a $B_{n,t_n} > \frac{1}{2} m_{n,t_n} = \frac{1}{2}\rho_n m_n \geq \frac{1}{2} n\rho a$ et par conséquent :

$$-\left\{\Phi\left(2B_{n,t_n}^{-1/2}\right) - \Phi(0)\right\} \geq \Phi(0) - \Phi(2^{3/2}(n\rho a)^{-1/2}) > -\frac{2}{\sqrt{\pi\rho a n}}.$$

Enfin, devons majorer L_n et L_{n,t_n}. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)[p_i^2 + (1-p_i)^2] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (2p_i - 2p_i^2)[1 - (2p_i - 2p_i^2)] \leq \frac{n}{8}$$

et de façon analogue,

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,t_n}(1-p_{i,t_n})[p_{i,t_n}^2+(1-p_{i,t_n})^2] \leq \frac{n}{8}$$

Puis $B_n \geq na(1-a) > \frac{1}{2}na$ tandis que $B_{n,t_n} > \frac{1}{2}n\rho a$, comme nous avons déjà vu. D'où les inégalités :

$$L_n < \frac{1}{2a\sqrt{2an}}, \quad L_{n,t_n} < \frac{1}{2a\rho\sqrt{2a\rho n}}.$$

A partir de (5.51) nous trouvons :

$$(5.53)\mathcal{P}_{n,t_n}(k_n) - \pi_{n,k_n} > \frac{1}{w_n}\left\{H\left(\tfrac{d}{2}\sqrt{\tfrac{a}{1-a}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi\rho a}} + \frac{A}{a\sqrt{2a}} + \frac{A}{a\rho\sqrt{2a\rho}}\right)\right\}$$

Mais $H\left(\frac{d}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right) > H(0) = 0$ et $w_n \geq 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$, t.q. $\mathcal{P}_{n,t_n}(k_n) - \pi_{n,k_n} > 0 \ \forall\, n \geq N$ et cela implique $j_{n,t_n} > k_n \geq m_n\rho_n + 2$ et la première partie de l'inégalité est prouvée.

La deuxième, $j_{n,t_n} \leq m_n - 2$, pour n suffisamment grand, utilise la même technique. Ainsi, soit l'ensemble $\mathcal{L}_n := \{\, j \in \mathbb{N} \ : \ \frac{m_n(1+\rho_n)}{2} \leq j \leq m_n - 2\} \neq \emptyset$ avec $z_n = \mathrm{card}(\mathcal{L}_n)$ et $l_n = \max \mathcal{L}_n$. En employant les inégalités de SAMUELS et BERRY-ESSEN, nous obtenons :

$$z_n\mathcal{P}_{n,t_n}(l_n) \leq \sum_{\frac{m_n+m_{n,t_n}}{2} \leq j \leq m_n-2} \mathcal{P}_{n,t_n}(j) \leq \Phi\left(2\beta_n - 2B_{n,t_n}^{-1/2}\right) - \Phi(\beta_n) + 2AL_{n,t_n}$$

et

$$z_n\pi_{n,l_n} \geq \sum_{\frac{m_n+m_{n,t_n}}{2} \leq j \leq m_n-2} \pi_{n,j} \geq \Phi(\alpha_n) - \Phi\left(\tfrac{2}{\sqrt{B_n}}\right) - 2AL_n.$$

La différence des inégalités ci-dessus conduit à :

$$z_n(\mathcal{P}_{n,t_n}(l_n) - \pi_{n,l_n}) \leq J(\beta_n) - J(\alpha_n) - H(\alpha_n) + \left(\Phi(\tfrac{2}{\sqrt{B_n}}) - \Phi(0)\right) + 2A\left(L_n + L_{n,t_n}\right),$$

où J est la fonction définie par $J(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. On observe que la fonction J, avec la dérivée $J'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2x^2}(2 - e^{\frac{3x^2}{2}})$, est décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\frac{2\log 2}{3}}, \infty)$. Mais, $\beta_n > \alpha_n$ et de plus, d'après (5.52) et le choix du d (voir l'hypothèse), on a $\alpha_n > \sqrt{\frac{2\log 2}{3}}$. Alors $J(\beta_n) - J(\alpha_n) < 0$. En comptant sur les relations antérieures, nous trouvons la réplique de (5.53) :

$$(5.54)\mathcal{P}_{n,t_n}(l_n) - \pi_{n,l_n} < \frac{1}{z_n}\left\{-H\left(\tfrac{d}{2}\sqrt{\tfrac{a}{1-a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi\rho a}} + \frac{A}{a\sqrt{2a}} + \frac{A}{a\rho\sqrt{2a\rho}}\right)\right\}$$

Il suit $j_{n,t_n} \leq l_n \leq m_n - 2$, $\forall\, n \geq N$. □

Nous avons déjà signalé l'importance du niveau de séparation j_{n,t_n} pour le calcul explicite de la distance en variation totale entre S_{n,t_n} et S_n. Mais la difficulté d'encadrer convenablement j_{n,t_n} nous conduit à l'idée de rapporter cette distance à une distance entre deux variables alèatoires binomiales (ou "proches" de binomiales).
Dans la suite $\mathcal{B}(n,x)$ désigne la distribution binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Notons aussi $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ la distribution discrète obtenue par la convolution des distributions discrètes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Le théorème suivant donne un encadrement explicite de $\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT}$.

Théorème 5.5.2 *Supposons que la condition $\mathcal{D}$ de paramètres $(a,\underline{\Lambda})$ vérifiée. On fixe une suite croissante (t_n) de nombres réels positifs tels que $\sqrt{n}(1-\rho_n) > d := \sqrt{\frac{8(1-a)\log 2}{3a}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Notons :*

$$\overline{p}_n := \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} = \frac{m_n}{n}, \quad \overline{p}_{n,t_n} := \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t_n}}{n} = \frac{m_{n,t_n}}{n}; \tag{5.55}$$

$$\widetilde{k}_n := \left[\frac{m_n - na}{1/2 - a}\right], \; c_n = m_n - (n - 1 - \widetilde{k}_n)a - \widetilde{k}_n/2\,, \tag{5.56}$$
$$\mathcal{U}_n := \mathcal{B}(n - \widetilde{k}_n - 1,a) * \mathcal{B}(\widetilde{k}_n,1/2) * \mathcal{B}(1,c_n)$$

$$a_{t_n} := a(1 - e^{-\underline{\Lambda} t_n}), \; b_{t_n} := (1 - e^{-\underline{\Lambda} t_n})/2, \; c_{t_n} := c_n(1 - e^{-\underline{\Lambda} t_n}) \tag{5.57}$$
$$\mathcal{U}_{n,t_n} := \mathcal{B}(n - \widetilde{k}_n - 1,a_{t_n}) * \mathcal{B}(\widetilde{k}_n,b_{t_n}) * \mathcal{B}(1,c_{t_n}).$$

Alors, pour n suffisamment grand, on a :

$$\|\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n}) - \mathcal{B}(n,\overline{p}_n)\|_{VT} \leq \|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \tag{5.58}$$

$$\text{si} \quad \Lambda_i = \underline{\Lambda},\ \forall\, i \in \mathbb{N}, \quad \text{alors} \quad \|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \leq \|\mathcal{U}_{n,t_n} - \mathcal{U}_n\|_{VT} \tag{5.59}$$

(Dans la relation (5.56), $[\,\cdot\,]$ signifie la part entière.)

DÉMONSTRATION. L'hypothèse du THÉORÈME 5.5.1 étant satisfaite, nous avons $m_n\rho_n + 2 \leq j^*_{n,t_n} \leq m_n - 2$, pour n assez grand. Mais d'après les dèfinitions de l'énoncé nous obtenons $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n})) = \mathbb{E}(\mathcal{U}_{n,t_n}) = m_{n,t_n}$ et $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n,\overline{p}_n)) = \mathbb{E}(\mathcal{U}_n) = m_n$. Notons $\overline{j}_{n,t_n}$ le niveau de séparation associé au couple $\big(\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n}),\mathcal{B}(n,\overline{p}_n)\big)$. Evidemment, pour n suffisamment grand, on a aussi $m_n\rho_n + 2 \leq \overline{j}_{n,t_n} \leq m_n - 2$. Pour Λ_i égaux, soit $\widetilde{j}_{n,t_n}$ le niveau de séparation associé au couple de distributions $(\mathcal{U}_{n,t_n},\mathcal{U}_n)$, avec le même encadrement pour n grand. Soient les variables aléatoires

T_{n,t_n}, T_n, U_{n,t_n}, U_n avec les distributions respectives $\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n})$, $\mathcal{B}(n,\overline{p}_n)$, $\mathcal{U}_{n,t_n}$ et $\mathcal{U}_n$. Alors l'assertion (iii) du LEMME 5.2.1 donne les relations:

$$\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} = \max_{m_{n,t_n}+2\le j\le m_n-2}\left(F_{S_{n,t_n}}(j) - F_{S_n}(j)\right)$$

$$\|\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n}) - \mathcal{B}(n,\overline{p}_n)\|_{VT} = \max_{m_{n,t_n}+2\le j\le m_n-2}\left(F_{T_{n,t_n}}(j) - F_{T_n}(j)\right) \tag{5.60}$$

$$\|\mathcal{U}_{n,t_n} - \mathcal{U}_n\|_{VT} = \max_{m_{n,t_n}+2\le j\le m_n-2}\left(F_{U_{n,t_n}}(j) - F_{U_n}(j)\right), \quad si \quad \Lambda_i = \underline{\Lambda},$$

pour tout $n \ge N$ (où N est celui du THÉORÈME 5.5.1).
D'après l'inégalité de HOEFFDING (1956) on a:

$$\begin{cases} F_{T_{n,t_n}}(j) \le F_{S_{n,t_n}}(j), & \forall\, j \ge m_{n,t_n}+2, \\ F_{T_n}(j) \ge F_{S_n}(j), & \forall\, j \le m_n - 2. \end{cases},$$

d'où:

$$F_{T_{n,t_n}}(j) - F_{T_n}(j) \le F_{S_{n,t_n}}(j) - F_{S_n}(j), \quad m_{n,t_n}+2 \le j \le m_n - 2. \tag{5.61}$$

Les relations (5.60) et (5.61) donnent l'inégalité

$$\|\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n}) - \mathcal{B}(n,\overline{p}_n)\|_{VT} \le \|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT}.$$

Pour l'autre inégalité nous supposons maintenant que tous les taux Λ_i sont egaux. On note $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ et on définit $\mathbf{x}_n = (x_{1,n},\ldots,x_{n,n})$ le vecteur ayant les composantes: $x_{i,n} = a$ si $i = 1,\ldots,n-\widetilde{k}_n-1$, $x_{n-\widetilde{k}_n,n} = c_n$, et $x_{i,n} = \frac{1}{2}$ si $i = n-\widetilde{k}_n+1,\ldots,n$. On peut vérifier sans difficulté la relation $\mathbf{x}_n \succeq^{(m)} \mathbf{p}_n$ où $\succeq^{(m)}$ signifie la majoration de SCHUR. En multipliant les deux vecteurs par le nombre positif $\rho_n = 1 - e^{-\underline{\Lambda}t_n}$ on a aussi $\rho_n\mathbf{x}_n \succeq^{(m)} \rho_n\mathbf{p}_n$. Alors, suivant GLESER (1975), on obtient les inégalités:

$$\begin{cases} F_{S_{n,t_n}}(j) \le F_{U_{n,t_n}}(j), & \forall\, j \ge m_{n,t_n}+2, \\ F_{S_n}(j) \ge F_{U_n}(j), & \forall\, j \le m_n - 2. \end{cases},$$

donc

$$F_{S_{n,t_n}}(j) - F_{S_n}(j) \le F_{U_{n,t_n}}(j) - F_{U_n}(j), \quad m_{n,t_n}+2 \le j \le m_n - 2. \tag{5.62}$$

La relation (5.60) implique alors: $\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \le \|\mathcal{U}_{n,t_n} - \mathcal{U}_n\|_{VT}$. □

Exemple numérique. Soit $a = 0.1$, $b = 0.4$, $n = 50$ et $\rho_n = 1 - e^{-\underline{\Lambda}t_n} = 0.6$.

Après un tirage aléatoire (suivant un loi uniforme) des nombres $p_i \in [a,b]$, un calcul réalisé en *matlab* donne :

$$m := m_n = 12.6436$$

$$mt := m_{n,t_n} = 7.5862$$

$$\bar{j}_{n,t_n} = j^*_{n,t_n} = \tilde{j}_{n,t_n} = 10$$

$$\|\mathcal{B}(n,\bar{p}_{n,t_n}) - \mathcal{B}(n,\bar{p}_n)\|_{VT} = 0.6281$$

$$\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 0.6355$$

$$\|\mathcal{U}_{n,t_n} - \mathcal{U}_n\|_{VT} = 0.6645$$

Les inégalités (5.61) et (5.62) sont illustrées par la figure suivante.

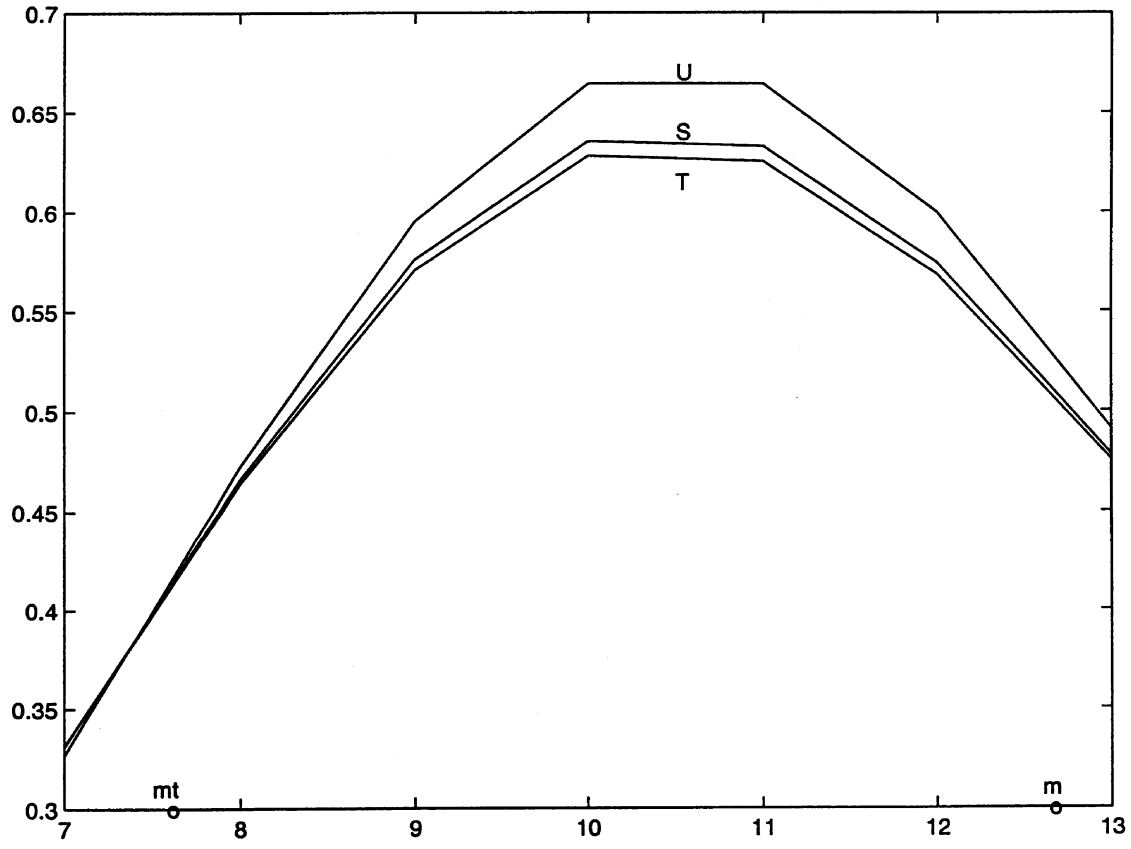

Figure 5.5 *Les graphes des fonctions* $T(j) := F_{T_{n,t_n}}(j) - F_{T_n}(j)$, $S(j) := F_{S_{n,t_n}}(j) - F_{S_n}(j)$ *et* $U(j) := F_{U_{n,t_n}}(j) - F_{U_n}(j)$ *pour* $j \in \{8,9,\ldots,12\} \subset [mt,m]$.

La minoration de la distance en variation totale donnée en (5.58) sera utile dans la suite pour détecter un phénomène de cut-off.

Lemme 5.5.1 *Supposons que l'hypothèse du* THÉORÈME 5.5.2 *est vérifiée.*
(i) Pour nsuffisamment grand on a :

$$\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \geq 2\left\{\Phi\left(\tfrac{\sqrt{na}(1-\rho_n)}{2}\right) - \Phi(0)\right\} - 2^{3/2}A\left(1+\rho^{-1/2}\right)a^{-1/2}n^{-1/2}.$$

(ii) Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\rho_n) = \infty$, *alors* $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 1$.

DÉMONSTRATION. Nous maintenons les notations de l'énoncé et de la démonstration du théorème précédent. En conformité avec THÉORÈME 5.5.2, LEMME 5.2.1, (ii) et PROPOSITION 5.3.1 nous avons :

$$\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \geq \|\mathcal{B}(n,\overline{p}_{n,t_n}) - \mathcal{B}(n,\overline{p}_n)\|_{VT} \geq \sum_{j\geq\frac{m_n+m_{n,t_n}}{2}}\left(f_{T_{n,t_n}}(j) - f_{T_n}(j)\right) \tag{5.63}$$

pout tout $n \geq N$ (où l'existence de N est assurée par THÉORÈME 5.5.1).
Puisque $\overline{p}_{n,t_n}(1-\overline{p}_{n,t_n}) < \overline{p}_n(1-\overline{p}_n)$, l'inégalité BERRY-ESSEN donne :

$$\sum_{j\geq\frac{m_n+m_{n,t_n}}{2}}\left(f_{T_{n,t_n}}(j) - f_{T_n}(j)\right) \geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha_n} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) - 2A\left(L_n(\overline{p}_n) + L_n(\overline{p}_{n,t_n})\right) \tag{5.64}$$

où $\alpha_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{p}_n}{1-\overline{p}_n}}(1-\rho_n)\sqrt{n}$, $L_n(x) = \frac{1-2x+2x^2}{\sqrt{nx(1-x)}}$ et $A > 0$ est une constante. Mais $\overline{p}_n \geq a$ et $\overline{p}_{n,t_n} = \rho_n\overline{p}_n$, avec $\rho_n \geq \rho > 0$, d'où $\alpha_n \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}(1-\rho_n)\sqrt{n} > \frac{1}{2}\sqrt{a}(1-\rho_n)\sqrt{n}$ (voir aussi (5.52)), $L_n(\overline{p}_n) < \sqrt{\frac{2}{na}}$ et $L_n(\overline{p}_{n,t_n}) < \sqrt{\frac{2}{n\rho a}}$.
Alors, en employant les relations (5.63) et (5.64) on obtient (i).
La relation (ii) en est une conséquence immédiate. □
Maintenant nous donnons une majoration de l'écart en variation totale entre $\mathcal{P}_{n,t_n}$ et Π_n.

Lemme 5.5.2 *En présence de la condition* $\mathcal{D}$ *et de la suite croissante des réels positifs* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *nous avons :*

$$(i)\quad \|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} < \Phi\left(\sqrt{\tfrac{n}{2a\rho}}(1-\rho_n) + \tfrac{2}{\sqrt{a\rho n}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\tfrac{n}{2a}}(1-\rho_n) - \tfrac{2}{\sqrt{an}}\right) + \tfrac{A}{a\rho\sqrt{2a\rho n}};$$

$$(ii)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\rho_n) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 0.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant les relations (5.24) et (5.27) nous obtenons :

$$\|\mathcal{P}_{n,t_n} - \Pi_n\|_{VT} \leq \sum_{j\leq m_n+1}\mathcal{P}_{n,t_n}(j) - \sum_{j\leq m_{n,t_n}-1}\pi_{n,j}.$$

Puis, l'inégalité de BERRY-ESSEN nous assure les majorations suivantes :

$$\sum_{j\leq m_n+1}\mathcal{P}_{n,t_n}(j) \leq \Phi\left(\tfrac{m_n(1-\rho_n)+1}{\sqrt{B_{n,t_n}}}\right) + AL_{n,t_n} < \Phi\left(\sqrt{\tfrac{n}{2a\rho}}(1-\rho_n) + \tfrac{2}{\sqrt{a\rho n}}\right) + \tfrac{A}{2a\rho\sqrt{2a\rho n}},$$

$$-\sum_{j\le m_{n,t_n}-1}\pi_{n,j} \le -\Phi\left(-\tfrac{m_n(1-\rho_n)+1}{\sqrt{B_n}}\right) + AL_n < -\Phi\left(-\sqrt{\tfrac{n}{2a}}(1-\rho_n)-\tfrac{2}{\sqrt{an}}\right) + \tfrac{A}{2a\sqrt{2an}}.$$

(voir la démonstration du THÉORÈME 5.5.1 pour les notations et plus de détails). Les inégalités ci-dessus nous donnent (i) et, par conséquent, (ii) aussi. □

Si le nombre de fois qu'on atteint $\underline{\Lambda}$ dans la suite (Λ_i) n'est pas négligeable, alors on peut rapprocher les suites $\sqrt{n}(1-\rho_n)$ et $(\sqrt{n}e^{-\underline{\Lambda}t_n})$.

Lemme 5.5.3 *Si la condition $\mathcal{D}$ est satisfaite et* $\liminf_{n\to\infty} \frac{card\{\ 1\le i\le n\ :\ \Lambda_i=\underline{\Lambda}\}}{n} > 0$, *alors :*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\rho_n)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{-\underline{\Lambda}t_n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\rho_n)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{-\underline{\Lambda}t_n}=\infty$$

DÉMONSTRATION. La définition de ρ_n donne $1-\rho_n = 1-\frac{m_{n,t_n}}{m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i e^{-\Lambda_i t_n}}{\sum_{i=1}^n p_i}$, d'où, en notant $s_n := \frac{card\{\ i\ :\ 1\le i\le n\ et\ \Lambda_i=\underline{\Lambda}\}}{n}$, on obtient l'encadrement suivant :

$$2as_n e^{-\underline{\Lambda}t_n} \le 1-\rho_n \le e^{-\underline{\Lambda}t_n}.$$

Mais l'hypothèse assure l'existence d'un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour n suffisamment grand, $s_n > \epsilon$. Alors la conclusion suit facilement. □

Le cadre établi antérieurement nous permet de constater que la convergence en temps de la disponibilité du modèle markovien stratifié vers la mesure stationnaire, à partir de l'état parfait, présente le phénomène de *cut-off en variation totale*, avec *les temps critiques* $t_n = \frac{\log n}{2\underline{\Lambda}}$. Pour la définition complète du phénomène cut-off pour des chaînes markoviennes, on peut voir, par exemple, SALOFF-COSTE (1997).

Théorème 5.5.3 *Soit* $\mathcal{F} = \{(\mathcal{E}_n, \mathcal{P}_{n,t}, \Pi_n)\ :\ t\ge 0, n=1,2,\ldots\}$, *où* $\mathcal{E}_n := \{0,1,\ldots,n\}$, *la famille infinie des mesures de probabilité, désignant la disponibilité d'un modèle markovien stratifié à partir du niveau* 0 .

Si la suite des composants associée satisfait la condition $\mathcal{D}$ de paramètres $(a,\underline{\Lambda})$ et de plus la condition suivante est réalisée

$$\forall\epsilon>0,\ \liminf_{n\to\infty}\frac{card\{\ i\ :\ 1\le i\le n\ et\ \Lambda_i<\underline{\Lambda}+\epsilon\}}{n} > 0,$$

alors $\mathcal{F}$ présente un cut-off en variation totale avec les temps critiques $t_n = \frac{\log n}{2\underline{\Lambda}}$, *c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,(1-\varepsilon)t_n}-\Pi_n\|_{VT}=1, \quad \forall\ \varepsilon\in(0,1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,(1+\varepsilon)t_n}-\Pi_n\|_{VT}=0, \quad \forall\ \varepsilon\in(0,\infty).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon\in(0,1)$ fixé et $t_n' = (1-\varepsilon)t_n = \frac{(1-\varepsilon)\log n}{2\underline{\Lambda}}$, $n=1,2,\ldots$. Alors $\sqrt{n}e^{-\underline{\Lambda}t'} = n^{\frac{\varepsilon}{2}} \to \infty$. De même façon, pour $\varepsilon\in(0,\infty)$, si on définit $t_n^{"} =$

$(1+\varepsilon)t_n = \frac{(1+\varepsilon)\log n}{2\underline{\Lambda}}$, $n = 1,2,\ldots$, alors on a $\sqrt{n}e^{-\underline{\Lambda}t_n} = n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \to 0$. En utilisant les résultats du LEMME 5.5.1, LEMME 5.5.2 et respectivement LEMME 5.5.3 on déduit la conclusion désirée. □

Remarques. Le résultat du théorème est plus fin que les inégalités (5.18), (5.20) où (5.25), puisqu'il ne peut pas être déduit à partir de ces relations. Par contre, sous une hypothèse encore plus faible que celle du théorème ci-dessus on peut prouver

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_{n,(1+\varepsilon)t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 0, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\infty)$$

à partir de l'inégalité (5.44) du Théorème 5.4.3.

Ainsi, supposons $\underline{\Lambda} = \inf\{\lambda_i + \mu_i \ : \ i \in \mathbb{N}\} > 0$, et $p_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leq 1$. Alors, pour $t_n = \frac{\log n}{2\underline{\Lambda}}$, et $\varepsilon > 0$, d'après (5.44), on a:

$$\|\mathcal{P}_{n,(1+\varepsilon)t_n} - \Pi_n\|_{VT} \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1+e^{-2\underline{\Lambda}t_n(1+\varepsilon)})^n - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n - 1}\,.$$

Mais

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n - 1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left\{\left(1+\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^{n^{1+\varepsilon}}\right\}^{n^{-\varepsilon}} - 1} = 0,$$

d'où l'on tire $lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,(1+\varepsilon)t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 0$. Par conséquent, l'hypothèse supplémentaire du théorème et l'emploi de l'inégalité de BERRY-ESSEN restent motivés seulement pour avoir aussi $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{n,(1-\varepsilon)t_n} - \Pi_n\|_{VT} = 1$.

D'autre part le théorème confirme une fois de plus les résultats classiques du domaine (DIACONIS, SALOFF-COSTE, YCART) qui montrent que le phénomène de cut-off est en liaison intrinsèque avec le saut spectral de la chaîne de Markov associée. Pour n fixé, les valeurs propres non-nulles de la matrice des taux de transitions sont $\alpha_M = -\sum_{i\in M}\Lambda_i$, $M \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $M \neq \phi$, donc, sous notre hypothèse, la plus grande valeur negative est $\underline{\Lambda}$ (pour n assez grand).

5.6 Utilisation

La connaissance de la probabilité stationnaire peut servir à l'évaluation de la fiabilité du système. Par exemple, on peut approximer à partir de celle-ci la probabilité de panne directe (ε). Cette approximation est explicitement montrée par SOLOVYEV et KARASEVA (1998).

Nous voulons signaler un autre phénomène intéressant. Ainsi, la mesure de probabilité sur les niveaux $0,1,\ldots,n$ se "propage" en temps comme une "vague", dont

l'apogée se déplace du niveau 0 vers les grands niveaux. L'étude de la convergence vers la loi stationnaire que nous avons accomplie (dans le cas "non-absorbant") montre qu'il n'y a aucun "recul" de ce déplacement vers les hauts niveaux. Cela suggère d'approcher la durée de vie du système au moment où la "vague" atteint son apogée au niveau $\underline{k}$ défini comme le dernier niveau avec tous les états de fonctionnement.

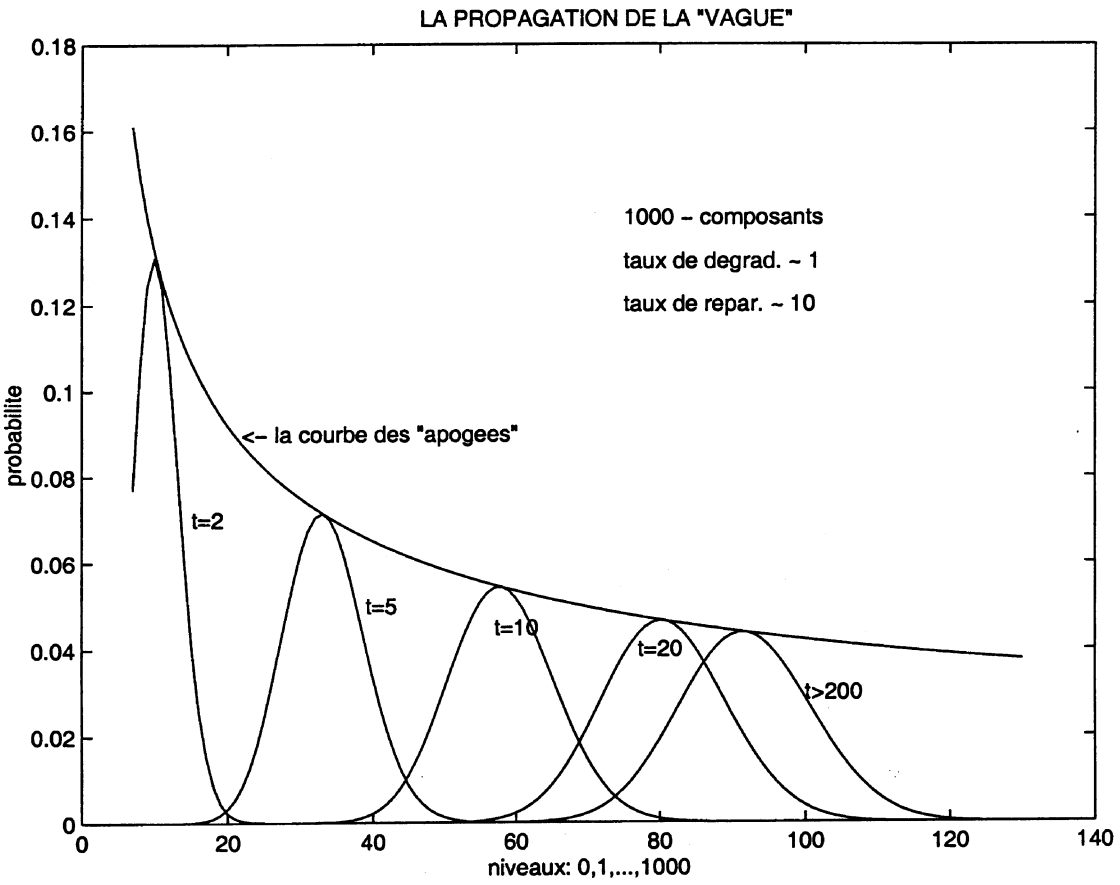

Figure 5.6 *Les mesures de probabilité (sur les l'ensemble des niveaux)* $\mathcal{P}_t$, *pour les temps* $t = 2, 5, 10, 20, 200$.

Annexe

Lemme .0.1 *Chaque matrice complexe* $A = (a_{ij})$ *d'ordre* l *satisfaisant:* 1) $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $\forall i \in \{1,2,\ldots,l\}$,
2) $\forall I \subseteq \{1,2,\ldots,l\}$, $I \neq \phi$, $\exists i \in I$ *t.q.* $|a_{ii}| > \sum_{j \in I \setminus \{i\}} |a_{ij}|$,
est inversible.

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde $\det(A) = 0$. Alors il existe une solution non-triviale $(z_j) \in \mathbb{C}^l$ du système homogène de matrice A. Soit $\delta := \max_{1 \leq j \leq l} |z_j| >$ 0et $M := \{j \ : \ |z_j| = \delta \}$, $M^c := \{1,2,\ldots,l\} \setminus M$.

Si $M^c = \phi$, alors $\sum_{j=1}^{l} a_{ij} z_j = 0$ implique $|a_{ii} z_i| \leq \sum_{j;j \neq i} |a_{ij} z_j|$,d'où, simplifiant par δ et employant 1), on déduit $|a_{ii}| = \sum_{j;j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1,\ldots,l$,en contradiction avec 2).

Si $M^c \neq \phi$ et $a_{ij} = 0$, $\forall i \in M$, $\forall j \in M^c$,alors $\sum_{j \in M} a_{ij} z_j = 0$, $\forall i \in M$,donc on peut employer le même raisonnement qui conduit aussi vers la contradiction de 2).

Enfin, si $\exists i' \in M$, $\exists j' \in M^c$ *t.q.* $a_{i'j'} \neq 0$,alors:

$$|a_{i'i'}| \leq \sum_{j;j \neq i'} |a_{i'j}| \frac{|z_j|}{\delta} < \sum_{j;j \neq i'} |a_{i'j}|,$$

l'inégalité stricte provenant de la comparaison des j-èmes termes; mais cette relation est contraire à 1).

Ainsi, on déduit l'existence de A^{-1}.□

Corollaire .0.1 *La matrice* $U_l - Q$ *admet un inverse qui s'écrit:*

$$(U_l - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

DÉMONSTRATION. Soit $A := U_l - Q$. Nous avons: $a_{jj} = 1$, $\forall j \in J'$; $a_{jj'} = -p_{jj'}$,$\forall (j,j') \in J' \times J'$, $j \neq j'$.
Cette matrice satisfait évidemment la condition 1) du LEMME 1. Mais elle satisfait aussi la deuxième condition car, si $J" \subseteq J'$, alors pour chaque élément maximal e_m de le $(\{e_j : j \in J"\}, \preceq)$, nous avons $\sum_{j \in J"} p_{mj} < 1$.

Donc, d'après le lemme précédent, la relation de l'énoncé suit . □
Notons D la matice colonne d'ordre $l$avec les coefficients $d_k = 1 - c_k$.

Lemme .0.2 *On a la relation matricielle :*

$$(U_l - Q) \cdot D = \overset{\circ}{Q} \cdot C \ .$$

DÉMONSTRATION. La relation

$$d_j = \sum_{k \in J'} q_{jk} = \sum_{k \in J'} q_{jk}(c_k + d_k) = \sum_{k \in J'} q_{jk} c_k + \sum_{k \in J'} q_{jk} d_k, \ \forall j \in J'$$

implique l'égalité matricielle de l'énoncé. □

Théorème .0.1

$$\sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a} p_\gamma = 1.$$

DÉMONSTRATION. Suite à la relation (1.4) et au corollaire précédent nous avons successivement :
$\sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a} p_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0^a;\ l(\gamma)=k} p_\gamma = p^{(0)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} Q^k \cdot C =$
$= p^{(0)} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} Q^{k-1}) \cdot (Q \cdot C) = p^{(0)} \cdot (U_l - Q)^{-1} \cdot (U_l - Q) \cdot D = p^{(0)} \cdot D = 1$ □

Remarque On trouve un résultat similaire pour le système S' en remplacant Q par Q', $p^{(0)}$ par $p^{(1)}$, J_+ par $J_+ \setminus \{0\}$ et J_a par $J_a \cup \{0\}$.

Bibliographie

[1] D. ALDOUS "Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains", *Séminaire de probabilités* XVII, LNM 986, Springer, Berlin, 1983.

[2] S. ASMUSSEN *Applied Probability and Queues,* John Wiley &Sons Ltd., 1987.

[3] R.E. BARLOW et A.W. MARSHALL "Tables of bounds for Distributions with monotone Hazard Rate", *J. Amer. Statis. Assoc.*, vol. 60, pp. 872-890, 1965.

[4] R.E. BARLOW et F. PROSCHAN *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1975.

[5] R.E. BARLOW et F. PROSCHAN *Mathematical Theory of Reliability*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1996.

[6] P.J. BOLAND, E. EL-NEWEIHI et F. PROSCHAN "Schur Properties of Convolutions of Exponential and Geometric Random Variables", *J. Multivariate Anal.*, vol. 48, pp. 157-167, 1994.

[7] P.J. BOLAND et E. EL-NEWEIHI "Component Redundancy versus System Redundancy", *IEEE Transaction on Reliability*, vol. 44, 4, pp. 614-619, 1995.

[8] P.J. BOLAND, M. SHAKED et J.G. SHANTHIKUMAR *Handbook of Statistics*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[9] J.-L. BON *Fiabilité des Systèmes,* Techniques Stochastiques, Masson, Paris, 1995.

[10] J.-L. BON et J. BRETAGNOLLE "Approximation of Reliability for a large system with non Markovian Repair-times", ESAIM-PS, vol.3, pp. 49-65, 1999.

[11] J.-L. BON, J. BRETAGNOLLE, P. PAMPHILE et J.P. RAOULT *Calcul séquentiel de fiabilité à partir d'approximations exponentielles.* Rapports Techniques, Université Paris -Sud, 1990, 1991,1992, 1993.

[12] J.-L. BON et J. COLLET "An algorithm in order to implement reliability exponential approximations", Rel. Eng. and Safety Prob., vol.43, 3 pp.262-269, 1994.

[13] J.-L. BON et E. PĂLTĂNEA "Encadrement de la fiabilité d'un système markovien à partir des caractéristiques de ses composants", *Actes des 29-èmes journées de statistique (ASU)*, pp. 169-173, 1997.

[14] J.-L. BON et E. PĂLTĂNEA "Ordering Properties of Convolutions of Exponential Random Variables", *Lifetime Data Analysis*, Kluwer Academic Publishers, vol. 5, pp. 185-189, 1999.

[15] K.L. CHENG *Markov chains with stationary transition probabilities*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[16] E. ÇINLAR *Introduction to Stochastic Processes,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[17] C. COCOZZA-THIVENT *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, SMAI, Springer, Berlin, 1997.

[18] C. COCOZZA-THIVENT et V. KALASHNIKOV "The failure rate in reliability. Numerical treatment", *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, vol. 10, pp. 21-45, 1997.

[19] C. COCOZZA-THIVENT et M. ROUSSIGNOL "Comparaison des lois stationnaire et quasi-stationnaire d'un processus de Markov et applications à la fiabilité", *Séminaire de Probabilités XXX*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1626, pp. 24-39, 1996.

[20] C. COCOZZA-THIVENT et M. ROUSSIGNOL "Techniques de couplage en fiabilité", *Ann. I.H.P.*", vol 31:1, pp. 119-141, 1995.

[21] P.-J. COURTOIS et P. SEMAL, "Bound for transient characteristics of large or infinite Markov chains", *Stewart* [69], article 22, pp. 413-434.

[22] P. DIACONIS et D. STOOCK "Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains", *Ann. Appl. Prob.*, vol.1, pp. 36-61, 1991.

[23] P. DIACONIS "The cutoff phenomenon in finite Markov chains", *Proc Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 93, pp. 1659-1664, 1996.

[24] W. FELLER *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Wiley, New-York, 1968.

[25] I. GUIKHMAN et A. SKOROKHOD *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, Éditions Mir, Moscou, 1980.

[26] L.J. GLESER "On the distribution of the number of successes in independent trials", *Ann. Prob.*, vol. 3, pp. 182-188, 1975.

[27] B.V. GNEDENKO, Y.K. BELYAYEV et A.D. SOLOVYEV *Mathematical Methods of Reliability Theory,* Academic Press, New York and London, 1969.

[28] B.V. GNEDENKO et A.D. SOLOVYEV "Modéle de redondance", Kibernetica, 1974.

[29] B.V. GNEDENKO et A.D. SOLOVYEV *Problèmes mathématiques de fiabilité*, Radio i Sviaz, Moscou, 1983.

[30] W. HOEFFDING "On the distribution of the number of successes in independent trials", *Ann. Math. Statist.* , 27, pp. 713-721, 1959.

[31] M. IOSIFESCU *Finite Markov Process and their applications,* Wiley, New York, 1980.

[32] V.V. KALASHNIKOV *Mathematical Methods in Queuing Theory,* Kluwer Academic Publishers, 1994.

[33] S. KARLIN and H.M. TAYLOR *A first Course in Stochastic Processes,* Academic Press, New York, 1975.

[34] J. KEILSON *Markov Chain Models - Rarity and Exponentiality,* Springer-Verlag, New York, 1979.

[35] S. KOCHAR et C. MA "Dispersive ordering of convolutions of exponential random variables", *Statistics and Probability Letters*, vol. 43, pp. 321-324, 1999.

[36] A.W. MARSHALL and I. OLKIN *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications,* Academic Press, New York, 1979.

[37] P. PAMPHILE *Calculs de la fiabilité de grands systèmes hautement fiables*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, 1994.

[38] E. PĂLTĂNEA "Étude de la fiabilité des modèles markoviens stratifiés", Proc. *Conferinţa Societăţii de Ştiinţe Matematice din România*, Cluj, 1998.

[39] V. PETROV *Limits Theorems of Probability Theory,* Clarendon Press Oxford, 1995.

[40] O. POURRET *Sur l'approximation lent-rapide pour les processus de Markov en fiabilité*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, 1998.

[41] N. RAVICHANDRAN *Stochastic Methods in Reliability Theory,* Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1990.

[42] S. ROSS *Stochastic Processes,* Wiley, New York, 1983.

[43] G. RUBINO et B. SERICOLA "Sojourn Times in finite Markov Processes", *J. Appl. Prob.*, 27, 1989.

[44] L. SALOFF-COSTE et al. *Lecture on finite Markov Chains*, École d'été de St-Flour, 1996.

[45] S.M. SAMUELS "On the number of successes in independent trials", *Ann. Math. Statist.*, 36 1272-1278, 1965.

[46] M. SHAKED et J.G. SHANTHIKUMAR *Stochastic Orders and Their Applications,* Academic Press, New York, 1994.

[47] J.G. SHANTHIKUMAR et D.D. YAO "Bivariate characterization of some Stochastic Order Relations", *Adv. Appl. Prob.,* vol. 23, pp. 642-659, 1991.

[48] A.D. SOLOVIEV et D.G. KONSTANT "Reliability of a complex renewable system with an unbounded number of repair units", *J. Appl. Prob.*, 28, pp. 833-840, 1990.

[49] A.D. SOLOVIEV et N.G. KARASEVA "Evaluation du temps moyen de vie d'un système reparable", *Vesthnik Mosc. Univ*, Serie 1 math. et mécanique, 5, pp. 25-29, 1998.

[50] R. SZEKLI *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[51] M. WEBA "Bounds for the total variation distance between the binomial and the Poisson distribution in case of medium sized success probabilities", *J. Appl. Prob.*, vol. 36, pp. 97-104, 1999.

[52] B. YCART "Cutoff for samples of Markov Chains", ESAIM-PS, vol.3, pp. 89-107, 1999.