VÉRONIQUE FISCHER

Étude de deux classes de groupes nilpotents de pas deux, 2004

Numéro d'ordre : 7552

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

Présentée par

VÉRONIQUE FISCHER

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Sujet : ÉTUDE DE DEUX CLASSES DE GROUPES NILPOTENTS DE PAS DEUX

Soutenue le 5 Juillet 2004 devant la commission d'examen composée de

Mr JEAN-PHILIPPE ANKER
Mr PASCAL AUSCHER
Mr LAURENT CLOZEL
Mr JEAN-LOUIS CLERC rapporteur
Mr GÉRARD LION
Mr NOEL LOHOUÉ

Abstract

The aim of my PhD work is to study the L^p-boundedness of operators on two classes of two-step nilpotent Lie groups, using Plancherel formulas and spherical functions as tools. The first class of groups consists of the groups of Heisenberg type, and the second, of the two-step free nilpotent Lie groups (denoted $N_{v,2}$ for v generators). In the latter case, we develop a radial Fourier calculus.
Our study has focused on the maximal functions associated with Korányi spheres, together with their square functions, and the convolution operator defined with the radial Fourier calculus on the two-step free nilpotent Lie group (radial Fourier multipliers problem).

In fact, one chapter of this work is devoted to the proof of L^p-inequalities for the maximal spherical function on the two considered classes of groups. Our method is based on interpolation for the same operator family as in the euclidean case, on L^p-boundedness for the standard maximal function, and L^2-inequalities for square functions. These L^2-inequalities are based on Plancherel formula and on the properties of bounded spherical functions for the orthogonal group.

On $N_{v,2}$, we construct the bounded spherical functions using representations of the semidirect product of $N_{v,2}$ with the orthogonal group. We also obtain some properties of the Kohn sublaplacian and the radial Plancherel measure.

Then we present a first study of the radial Fourier multiplier problem, with the aim of giving our solutions for some technicals difficulties.

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de la continuité L^p de certains opérateurs sur deux classes de groupes nilpotents de pas deux, avec comme outils, des formules de Plancherel et des fonctions sphériques.

La première classe de groupes est formée des groupes appelés de type H (ou de type Heisenberg), la seconde des groupes nilpotents libres à deux pas. On notera $N_{v,2}$ le groupe nilpotent libre de pas deux à v générateurs tout au long de ce travail. Pour ce dernier, nous avons développé un calcul de Fourier radial.

Les opérateurs principalement étudiés sont les fonctions maximales associées aux sphères de Korányi et leurs fonctions d'aires, ainsi que les opérateurs de convolution définis grâce au calcul de Fourier radial sur $N_{v,2}$ (problème des multiplicateurs).

Fonctions maximales

Les fonctions maximales associées à des boules, des sphères... sont des outils naturels pour démontrer la convergence presque partout des moyennes de fonctions sur ces supports (théorème de différentiation de Lebesgue) ; de plus, des fonctions maximales associées à des semi-groupes d'opérateurs interviennent dans des problèmes ergodiques (théorème de Wiener). Dans une autre direction, certaines fonctions maximales permettent le contrôle d'opérateurs (théorème des intégrales singulières [CW71] etc...).

Sur les groupes de Lie, plusieurs fonctions maximales ont déjà été étudiées. Elles proviennent d'une part de la recherche de résultats analogues au théorème de Wiener : des inégalités maximales L^p pour des familles de mesures formant un semi-groupe, sont connues sur des groupes de Lie semi-simples [Nev94, Nev97, MNS00, NS97] et sur le groupe de Heisenberg [NT97]. Leurs démonstrations reposent sur la méthode classique d'étude des fonctions maximales de semi-groupes d'opérateurs [Ste70], ainsi que sur l'évaluation de fonctions d'aire grâce à des propriétés spectrales.
D'autre part, sur l'espace euclidien ou plus généralement sur les groupes homogènes munis d'une norme homogène [FS82], on s'intéresse à la fonction maximale associée aux dilatées d'une surface donnée ; par exemple, la continuité L^p des fonctions maximales associées à la sphère euclidienne [Ste76, SW78], ou à la sphère de Korányi sur le groupe de Heisenberg [Cow81] a déjà été démontrée. D'autres résultats ont été obtenus pour des fonctions maximales associées à un support dont la courbure rotationelle ne s'annule pas, en utilisant les intégrales oscillantes [SS90, Sch98, MA03].

Nos résultats. Un chapitre de cette thèse est consacré à la démonstration d'inégalités L^p pour la fonction maximale sphérique sur les groupes de type H et $N_{v,2}$ et leur fonctions d'aires, en utilisant le même point de départ que [Ste76]. Ce résultat est déjà connu pour le groupe de Heisenberg [Cow81] et plus généralement pour les groupes de type H [Sch98] (avec des indices optimaux pour p dans les deux cas), mais pas pour les groupes $N_{v,2}$.

Notre méthode repose sur l'interpolation de la même famille analytique d'opérateurs que [Ste76], sur la continuité L^p de la fonction maximale standard et le contrôle L^2 de fonctions d'aires. Dans notre cas, ce contrôle s'effectuera par des techniques spectrales proches de [NT97].

Transformée de Fourier radiale

Les propriétés spectrales utilisées sont celles données par les fonctions sphériques bornées. Leurs expressions sont bien connues sur le groupe de Heisenberg [BJR92], tout comme leurs généralisations sur les groupes de type H au sens de Damek et Ricci [DR92].

Nos résultats. Nous avons construit les fonctions sphériques bornées du groupe $N_{v,2}$, à l'aide de la théorie des représentations du groupe produit semi-direct de $N_{v,2}$ par le groupe orthogonal ou spécial orthogonal. Elles n'étaient pas jusqu'alors explicites. Nous avons aussi confronté les expressions trouvées à d'autres caractérisations, surtout celles données par les représentations sur $N_{v,2}$. Nous avons ensuite explicité les mesures de Plancherel radiale et non radiale. Les résultats sont concordants entre eux, et avec l'étude de Strichartz [Str91, section 6]. Nous avons ainsi obtenu la formule de Plancherel sphérique et la formule d'inversion radiale.

Multiplicateurs de Fourier sur $N_{v,2}$

Nous nous sommes intéressés ensuite au problème des multiplicateurs définis par passage en Fourier sphérique sur le groupe $N_{v,2}$. Grâce au calcul de Fourier sphérique et à de longs calculs proches du cas des groupes de type H [MRS96], nous avons obtenu certaines estimations L^2 à poids sur le groupe $N_{v,2}$. En appliquant le théorème des intégrales singulières, nous avons alors abouti à des conditions suffisantes pour le problème des multiplicateurs en Fourier. Cependant, ces conditions ne sont pas satisfaites même pour les fonctions constantes. L'objectif de cette première étude est d'exposer nos solutions à quelques points techniques.

Présentation de ce document et de nos résultats

Organisation de ce document. Dans le premier chapitre, nous donnons les définitions, les notations sur les fonctions maximales des deux classes de groupes que nous étudions : les groupes de type H et les groupes $N_{v,2}$. Nous rappelons également la notion de fonctions sphériques qui existent sur les groupes de type H, et des éléments de la théorie des représentations qui nous permettront de construire les fonctions sphériques sur les groupes $N_{v,2}$.

Dans le chapitre 2, nous montrons des inégalités L^p pour la fonction maximale sphérique sur les groupes de type H et sur les groupes $N_{v,2}$. Cela repose sur le contrôle L^2 de fonctions d'aire.

Dans le chapitre 3, nous donnons les expressions des fonctions sphériques et la formule de Plancherel radiale.

Dans le chapitre 4, grâce au calcul de Fourier précédemment développé, nous montrons le contrôle L^2 de fonction d'aire pour $N_{v,2}$, et nous étudions le problème des multiplicateurs sur $N_{v,2}$.

Énoncés des résultats. Jusqu'à la fin de ce chapitre d'introduction, nous présentons techniquement les résultats suivants :
- les inégalités maximales sphériques sur les groupes de type H et sur les groupes $N_{v,2}$,
- le calcul de Fourier du groupe $N_{v,2}$.

Fonction maximale sphérique

Nous considérons un groupe de Lie N de type H ou $N_{v,2}$. C'est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe que l'on peut identifier via l'exponentielle à son algèbre de Lie $\mathcal{N}$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ est stratifiée : $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$ avec $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \mathcal{Z}$ et $[\mathcal{N}, \mathcal{Z}] = \{0\}$ ($\mathcal{Z}$ est le centre de cette algèbre). On définit les dilatations naturellement associées à une algèbre stratifiée de pas deux :

$$\forall r > 0 \, , \quad \forall X \in \mathcal{V} \, , Z \in \mathcal{Z} \quad \delta_r.(X + Z) = rX + r^2 Z \quad .$$

Elles induisent des dilatations $n \mapsto r.n$, $r > 0$ sur le groupe N. De plus, les deux sous-espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ sont naturellement munis de normes euclidiennes. On peut ainsi définir la norme de Korányi sur N :

$$|n| \; = \; \left(|X|^4 + |Z|^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{où} \quad n = \exp(X + Z) \, , \quad X \in \mathcal{V} \, , \quad Z \in \mathcal{Z} \quad .$$

On considère une base orthonormée pour $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ dans le cas d'un groupe de type H, et la base canonique formée par les générateurs et leurs crochets dans le cas d'un groupe nilpotent libre à deux pas. On peut ainsi fixer une mesure de Lebesgue sur $\mathcal{N}$ puis une mesure de Haar dn sur N.

Cette norme et cette mesure étant fixées, on note μ la mesure supportée par la sphère unité $S_1 := \{n,\ |n| = 1\}$, pour laquelle on a le passage en coordonnées polaires :

$$\forall f\ , \qquad \int_N f(n)dn = \int_0^\infty \int_{S_1} f(r.n)d\mu(n)r^{Q-1}dr \quad .$$

où $Q = \dim \mathcal{V} + 2\dim \mathcal{Z}$ est la dimension homogène du groupe N. La fonction maximale sphérique est l'opérateur $\mathcal{A}$ donné pour une fonction f localement intégrable sur N par :

$$\mathcal{A}.f(n) := \sup_{r>0} |\int_{S_1} f(n\, r.n'^{-1})d\mu(n')| \quad , \quad n \in N \quad .$$

Nous avons étudié les propriétés de cette fonction maximale $\mathcal{A}$ pour la norme L^p ; les espaces L^p que nous considérons sont relatifs à la mesure de Haar dn :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_N |f(n)|^p dn\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Nous montrons des inégalités maximales sphériques L^p sur N dans le chapitre 2 :

Théorème 1 (Inégalité L^p pour $\mathcal{A}$)
Notons $v = \dim \mathcal{V}$ et $z = \dim \mathcal{Z}$. La fonction maximale sphérique vérifie des inégalités L^p,
- $2 \leq p \leq \infty$ *si* $v = 4$,
- *si* $v > 4$, *dans le cas d'un groupe de type H,* $(v-2)/(v-3) < p \leq \infty$,
- *si* $v > 4$, *dans le cas* $N = N_{v,2}$, $2h_0/(2h_0 - 1) < p \leq \infty$ *où* h_0 *est le minimum de* $v+1$ *et de la partie entière de* $(z-1)/4$,

c'est-à-dire qu'il existe une constante C qui dépend seulement de v, z, p telle que :

$$\forall f \in L^p\ , \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^p} \leq C\, \|f\|_{L^p} \quad .$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin des expressions explicites des fonctions sphériques bornées ; elles sont connues sur les groupes de type H [DR92] ; nous les avons explicitées sur $N_{v,2}$:

Calcul de Fourier radial sur $N_{v,2}$

On note $X_1, \ldots, X_v$ les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe $N_{v,2}$, et $v = 2v'$ ou $v = 2v'+1$. Les vecteurs $X_1, \ldots, X_v$ engendre une base d'un sous-espace $\mathcal{V}$, que l'on munit du produit scalaire pour laquelle la base $(X_1, \ldots, X_v)$ est orthogonale.

On convient aussi de noter le simplexe : $\mathcal{L} := \{\lambda_1^* > \ldots > \lambda_{v'}^* > 0\}$, et son adhérence $\bar{\mathcal{L}} := \{\lambda_1^* \geq \ldots \geq \lambda_{v'}^* \geq 0\}$. À un élément non nul $\Lambda^* \in \bar{\mathcal{L}}$, on associe les entiers v_0, v_1, le multi-indice d'entier $m \in \mathbb{N}^{v_1}$ et le v_1-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{v_1}) \in \mathbb{R}^{v_1}$ de la manière suivante :
- l'entier v_0 est tel que $\lambda_{v_0}^* > 0$ et $\lambda_{v_0+1}^* = 0$: c'est le nombre de λ_i^* non nuls ;
- v_1 est le nombre de λ_i^* non nuls distincts, et les λ_j sont les λ_i^* non nuls et distincts, ordonnés de façon strictement décroissante :

$$\{\lambda_1^* \geq \ldots \geq \lambda_{v_0}^* > 0\} = \{\lambda_1 > \ldots > \lambda_{v_1} > 0\} \quad ;$$

- on note m_j le nombre de paramètres λ_i^* égaux à λ_j, on définit également : $m_0 := m_0' := 0$ et $m_j' := \sum_{i=1}^j m_i$ pour $j = 1, \ldots v_1$; on a $m_{v_1}' := m_1 + \ldots + m_{v_1-1} + m_{v_1} = v_0$.

Nous avons obtenu les expressions explicites des fonctions sphériques bornées de la paire de Guelfand $(N_{v,2}, SO(v))$ et $(N_{v,2}, O(v))$. Nous présentons ces dernières :

Théorème 2 (Fonctions sphériques sur $N_{v,2}, O(v)$)
Les paramètres des fonctions sphériques bornées sont r^*, Λ^*, l, décrits dans ce qui suit :

1. *$\Lambda^* \in \bar{\mathcal{L}}$;*
   lorsque Λ^* est non nul, on lui associe comme décrit ci-dessus les entiers v_0, v_1, le multi-indice d'entier $m \in \mathbb{N}^{v_1}$ et le v_1-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{v_1}) \in \mathbb{R}^{v_1}$;
2. *le multi-indice $l \in \mathbb{N}^{v_1}$ si $\Lambda^* \neq 0$, rien sinon ;*
3. *$r^* \geq 0$, avec $r^* = 0$ si $2v_0 = v$.*

Avec ces paramètres, les fonctions sphériques bornées pour $N_{v,2}, O(v)$ sont données par :
Si $\Lambda^* \neq 0$

$$\phi^{r^*,\Lambda^*,l}(n) = \int_{k\in K} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(k.n)dk, \quad n \in N_{v,2} \quad ,$$

où $\Theta^{r^*,\Lambda^*,l}$ est la fonction sur $N_{v,2}$ donnée pour $n = \exp(X + A) \in N_{v,2}$ par :

$$\Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(n) = e^{i<r^* X_v^*, X>} e^{i\sum_{j=1}^{v'} \lambda_j^* a_{2j-1,2j}} \Pi_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j,m_j-1}(\frac{\lambda_j}{2}|\mathrm{pr}_j(X)|^2) \quad ,$$

où on a décomposé $X = \sum_{j=1}^v x_j X_j$ et $A = \sum_{i,j} a_{i,j}[X_i, X_j]$ et noté :

- *$\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha}$ la fonction de Laguerre normalisée de degré n et de paramètre α (voir sous section 5.1.3),*
- *pr_j la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les $2m_j$ vecteurs :*

$$X_{2i-1}\,,\ X_{2i}\,,\quad m_{j-1}' < i \leq m_j' \quad .$$

Si $\Lambda^* = 0$

$$\phi^{r^*,0}(n) = \mathcal{J}_{\frac{v-2}{2}}(r^*|X|) \quad , \quad n = \exp(X + A) \in N_{v,2} \quad ,$$

où $\mathcal{J}_\alpha$ est la fonction de Bessel réduite (voir sous section 5.1.2).

Ce théorème sera démontré dans le chapitre 3, ainsi que le théorème donnant les fonctions sphériques bornées pour $SO(v)$.

Les fonctions sphériques sont fonctions propres des opérateurs différentiels sur $N_{v,2}$ invariant à gauche et sous $SO(v)$, en particulier du laplacien de Kohn $L = -\sum_i X_i^2$. Dans le même chapitre, nous donnerons les valeurs propres associées à L pour chaque fonction sphérique bornée : avec les notations du théorème 2, on a dans les cas $\Lambda^* \neq 0$ et $\Lambda^* = 0$ respectivement :

$$L.\phi^{r^*,\Lambda^*,l} = \left(\sum_{j=1}^{v_1} \lambda_j(2l_j + m_j) + r^{*2}\right) \phi^{r^*,\Lambda^*,l} \quad \text{et} \quad L.\phi^{r^*,0} = r^{*2}\phi^{r^*,0} \quad .$$

Dans le chapitre 4, nous donnons l'expression de la mesure de Plancherel radiale pour $N_{v,2}, O(v)$:

Théorème 3 (Mesure de Plancherel radiale)
La mesure de Plancherel radiale est supportée par les fonctions sphériques $\phi^{r^*,\Lambda^*,l}$, *dont les paramètres* X^*, Λ^*, l *sont dans l'ensemble* $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}$ *donné par :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2v'} &= \{(0, \Lambda^*, l)\ ,\quad \Lambda^* \in \mathcal{L}\ ,\ l \in \mathbb{N}^{v'}\} \quad , \\
\mathcal{P}_{2v'+1} &= \{(r^*, \Lambda^*, l)\ ,\quad r^* \in \mathbb{R}^+\ ,\ \Lambda^* \in \mathcal{L}\ ,\ l \in \mathbb{N}^{v'}\} \quad .
\end{aligned}$$

En identifiant les fonctions $\phi^{r^*,\Lambda^*,l}$, *et leurs paramètres* r^*, Λ^*, l, *la mesure de Plancherel est la mesure sur l'ensemble* $\mathcal{P}$ *produit tensoriel :*

– de la mesure sur le simplexe $\mathcal{L}$ *donnée par :*

$$\Pi_j \lambda_j d\eta(\Lambda) \quad , \quad \Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \quad ,$$

où η *est la mesure sur le simplexe* $\mathcal{L}$ *dont l'expression est donnée dans le lemme 5.11,*

– de la mesure $\sum$ *de comptage sur* $\mathbb{N}^{v'}$,

– et si $v = 2v' + 1$ *de la mesure de Lebesgue* dr^* *sur* $\mathbb{R}^+$,

$$c(v) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{v(v-1)}{2} - v'} & si\ v = 2v'\ , \\ 2(2\pi)^{-\frac{v(v-1)}{2} - 1 - v'} & si\ v = 2v' + 1\ . \end{cases}$$

Il découle des théorèmes 2 et 3 un calcul de Fourier radial sur $N_{v,2}, O(v)$; on étudie alors le problème des multiplicateurs de Fourier dans la section 4.2.

Chapitre 1

Généralités

Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons les définitions des fonctions maximales sphériques, puis nous présentons les groupes de type H et les groupes libres nilpotents à deux pas ainsi que leurs structures homogènes. Nous donnons ensuite les propriétés caractéristiques des fonctions sphériques dans la seconde section, puis dans une troisième section, des éléments sur la théorie des représentations.

1.1 Groupes et fonctions maximales étudiés

Dans ce travail, tous les groupes de Lie nilpotents sont supposés CONNEXES SIMPLEMENT CONNEXES. Lorsqu'une mesure de Haar dn est fixée sur un groupe N nilpotent, pour une fonction f localement intégrable sur N, on définit sa norme L^p :

$$\|f\|_{L^p} := \|f\|_p := \left(\int |f(n)|^p dn\right)^{\frac{1}{p}} \quad ;$$

on notera aussi parfois $\|f\|_2 = \|f\|$.

1.1.1 Fonctions maximales sphériques

Dans cette section, on considère un groupe N homogène muni d'une norme homogène [FS82] ; on note $n \mapsto |n|$ la norme homogène, $n \mapsto r.n$, $r > 0$, la famille de dilatations, et Q la dimension homogène. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion sur la structure choisie, on omettra le qualificatif "homogène".

Le groupe N est donc nilpotent.

On suppose qu'une mesure de Haar dn est fixée. Pour un ensemble $E \subset N$, on note $r.E = \{r.n,\ n \in E\}$ l'ensemble dilaté, et $|E|$ sa mesure de Haar lorsque E est mesurable ; toujours dans ce cas, on a $|r.E| = r^Q|E|$.

On définit comme dans le cas euclidien, la boule homogène centrée en n de rayon r :

$$B(n,r) := \{n' \in N \quad : \quad |nn'^{-1}| < r\} \quad ,$$

et la sphère homogène centrée en n de rayon r :

$$S(n,r) := \{n' \in N \quad : \quad |nn'^{-1}| = r\} \quad .$$

En particulier, la boule unité $B(0,1)$ est notée B_1, et la sphère unité $S(0,1)$, S_1.

Il existe une unique mesure de Radon μ sur la sphère unité S_1 telle que l'on ait l'égalité [FS82], proposition 1.15 :

$$\forall f \in L^1(N), \qquad \int_N f(n)dn = \int_{r=0}^{\infty} \int_{S_1} f(rn)d\mu(n) r^{Q-1} dr \quad . \tag{1.1}$$

On note μ_s la mesure dilatée de la mesure μ dans le sens suivant :

$$\int_{S_1} f(s.n)d\mu(n) = \int_{s.S_1} f(n)d\mu_s(n) \quad .$$

Nous définissons alors la **fonction maximale sphérique**

$$\mathcal{A}.f := \sup_{s>0} |\mu_s * f| \quad .$$

Pour une fonction f localement intégrable sur N, la fonction maximale $\mathcal{A}.f$ est mesurable (il suffit de considérer le supremum sur tous les rationels positifs).

Nous nous sommes intéressés aux propriétés L^p de la fonction maximale $\mathcal{A}$:

$$\forall f \; , \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^p} \leq C_p \; \|f\|_{L^p} \quad .$$

Rappelons la définition de la fonction maximale standard que nous noterons $\mathcal{M}$ pour une fonction f localement intégrable sur N :

$$\mathcal{M}.f(n) := \frac{1}{|B(n,r)|} \int_{B(n,r)} f(n')dn' \quad n \in N \quad .$$

Il est bien connu que cette fonction maximale vérifie des inégalités $L^p, 1 < p \leq \infty$ et L^1-faible, [CW71, théorème fondamental des intégrales singulières] :

$$\forall f \; , \qquad \|\mathcal{M}.f\|_{L^p} \leq C_p \; \|f\|_{L^p} \quad . \tag{1.2}$$

On en déduit le corollaire :

Corollaire 1.1
Soit $F : N \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive telle que $F(n) = m(|n|)$ où m est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, décroissante. On définit les fonctions $F_t, t > 0$ par $F_t(n) = t^{-Q}F(t^{-1}.n)$, et leurs opérateurs de convolution $T_t : f \mapsto F_t * f$.

Alors la famille d'opérateur $\{T_t, t > 0\}$ vérifie une inégalité maximale : $L^p, 1 < p \leq \infty$:

$$\forall f \in L^p \; , \qquad \left\| \sup_{t>0} |T_t.f| \right\|_{L^p} \leq C \, \|F\|_{L^1} \; \|f\|_{L^p} \quad ,$$

où C est une constante qui ne dépend que de la strucure homogène du groupe N.

Mais pour la fonction maximale sphérique, le cas général n'est pas connu. Il l'est sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ [Ste76], et sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ pour la norme de Korányi [Cow81, Sch98] avec des indices pour p optimaux.

1.1.2 Groupes de type Heisenberg

Introduits par Kaplan [Kap80], les groupes de type Heisenberg (ou de type H) généralisent les groupes de Heisenberg dans le sens où les solutions élémentaires du sous-laplacien sont formellement identiques.

Définition 1.2
Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie. $\mathcal{N}$ est une **algèbre de type H** *(ou de type Heisenberg) lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :*

(1) En tant qu'espace vectoriel, $\mathcal{N}$ est muni d'un produit scalaire noté $<,>$ et se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces non nuls $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$: $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$.

(2) En tant qu'algèbre de Lie, $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{Z}$ et $[\mathcal{N}, \mathcal{Z}] = \{0\}$. En particulier, cette algèbre de Lie est nilpotente.

Lorsque les conditions (1) et (2) sont satisfaites, on définit l'application $J : \mathcal{Z} \to \operatorname{End} \mathcal{V}$ par :

$$\forall X, X' \in \mathcal{V},\ \forall Z \in \mathcal{Z}, \qquad < J(Z)X, X' > = < Z, [X, X'] > \quad .$$

(3) Pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, on a : $J^2(Z) = -|Z|^2 \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$.

Un **groupe de type H** *est un groupe de lie N dont l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ est de type H*

Lorsque N est un groupe de type H avec les notations de la définition ci-dessus, on a $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}$ est le centre de l'algèbre de Lie. On identifie $N \sim \mathcal{N} \sim \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$ pour noter $n = (X, A) \in N$.

Remarque 1 *L'application J est linéaire, inversible et à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$. En conséquence, l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est de dimension paire.*

Remarque 2 *La condition (3) établit le lien entre la structure euclidienne et celle de Lie. Elle est équivalente à la condition (3bis) suivante :*

(3bis) Pour tout $X \in \mathcal{V}, |X| = 1$, $\mathrm{ad}(X)$ est une isométrie de $(\ker \mathrm{ad}(X))^\perp$ sur $\mathcal{Z}$.
En conséquence, on a : $\dim \mathcal{Z} < \dim \mathcal{V}$.

Exemple : le groupe de Heisenberg. Dans ce travail, on choisit la loi suivante sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$:

$$(z_1, \ldots, z_n, t).(z'_1, \ldots, z'_n, t') = (z_1 + z'_1, \ldots, z_n + z'_n, t + t' + \frac{1}{2} \sum_i \Im z_i \bar{z}'_i) \quad .$$

Son algèbre de Lie s'identifie comme espace vectoriel à $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$. Le centre de cette algèbre est $\mathcal{Z} = \mathbb{R}(0,1) \sim \mathbb{R}$. Sa structure d'algèbre de type H correspond à des matrices $J_t, t \in \mathcal{Z} \sim \mathbb{R}$ de taille $2n$, diagonalisées par bloc 2-2, dont les n blocs 2-2 sont tous de la forme :

$$t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Un produit direct de groupes de Heisenberg (ou de type H) étant encore un groupe de type H ; on obtient ainsi une grande classe d'exemples de groupes de type H.

1.1.3 Groupes nilpotents libres à deux pas

On définit d'abord l'algèbre de Lie nilpotente libre à deux pas et v générateurs. Heuristiquement, c'est l'algèbre de Lie nilpotente de pas deux engendrée par v vecteurs libres, tels que les seules relations entre leurs crochets soient celles nécessaires à l'anticommutativité. Pour des pas quelconques, les algèbres de Lie libres nilpotentes se définissent par propriété universelle [Jac62, Chap.V §4].

Définition 1.3
*Une **algèbre de Lie libre nilpotente à deux pas** et v générateurs est une algèbre de Lie qui admet en tant qu'espace vectoriel une base :*

$$X_i\,,\ 1 \le i \le v\ ;\ X_{i,j}\,,\ 1 \le i < j \le v\,,\quad \text{telle que}\quad X_{i,j} = [X_i, X_j], i < j \quad .$$

Elle est unique à isomorphisme près et on la note $\mathcal{N}_{v,2}$.

Les bases $X_1, \ldots, X_v$ et $X_{i,j}, i < j$ sont appelées canoniques dans la suite.

On notera $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X_i, i = 1, \ldots, v$, et $\mathcal{Z}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X_{i,j}, i < j$. Le sous-espace $\mathcal{Z}$ est le centre de l'algèbre de Lie ; il est de dimension $z = v(v-1)/2$.

On convient tout au long de ce travail que lorsque l'on écrit $X + A \in \mathcal{N}$, on sous-entend $X \in \mathcal{V}$ et $A \in \mathcal{Z}$.

Définition 1.4
*Le **groupe libre nilpotent à deux pas** est le groupe nilpotent dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{N}_{v,2}$. On le note $N_{v,2}$.*

Une réalisation de $\mathcal{N}_{v,2}$.

Outre la définition par générateurs, on peut définir l'algèbre de Lie nilpotente libre à deux pas comme suit. Soit $(\mathcal{V}, <,>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension v. On note $O(\mathcal{V})$ le groupe des transformations orthogonales de $(\mathcal{V}, <,>)$ et $SO(\mathcal{V})$ son sous-groupe des transformations spéciales orthogonales. Leur algèbre de Lie commune s'identifie à l'espace vectoriel des transformations antisymétriques de $(\mathcal{V}, <,>)$, que l'on note $\mathcal{Z}$. On définit la somme extérieure d'espaces vectoriels : $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$.

Définissons le crochet de Lie. On définit une application bilinéaire $[.,.]$ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ à valeurs dans $\mathcal{Z}$ par

$$[X,Y].(V) = < X, V > Y - < Y, V > X \quad X, Y, V \in \mathcal{V}, \quad .$$

On étend alors cette application bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ par :

$$[.,.]_{\mathcal{N}\times\mathcal{Z}} = [.,.]_{\mathcal{Z}\times\mathcal{N}} = 0 \quad .$$

Ce crochet vérifie trivialement l'identité de Jacobi ; il munit l'espace vectoriel $\mathcal{N}$ d'une structure d'algèbre de Lie nilpotente de pas deux.

Action de $O(\mathcal{V})$. De plus, les groupes $O(\mathcal{V})$ et son sous-groupe $SO(\mathcal{V})$ agissent d'une part, par automorphisme sur $\mathcal{V}$, et d'autre part, par la représentation adjointe $Ad_{\mathcal{Z}}$ sur leur algèbre de Lie commune $\mathcal{Z}$. On peut donc définir une action de $O(\mathcal{V})$ et de $SO(\mathcal{V})$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Montrons qu'elle respecte le crochet ; il suffit de voir pour $X, Y, V \in \mathcal{V}$ et $k \in O(\mathcal{V})$:

$$\begin{aligned}
[k.X, k.Y](V) &= < k.X, V > k.Y - < k.Y, V > k.X \\
&= k.\left(< X, {}^t k.V > Y - < Y, {}^t k.V > X\right) \\
&= k.[X,Y](k^{-1}.V) \; = \; Ad_{\mathcal{Z}} k.[X,Y] \quad .
\end{aligned}$$

On a donc une action par automorphisme du groupe $O(\mathcal{V})$ (et de son sous-groupe $SO(\mathcal{V})$) sur l'algèbre $\mathcal{N}$.

Produit scalaire sur $\mathcal{Z}$. L'application donnée par $X \wedge Y \mapsto [X, Y]$. s'étend en un isomorphisme (d'espace vectoriel) de $\Lambda^2(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{Z}$; et les éléments $[X, Y]$ sont des générateurs de $\mathcal{Z}$. Comme sur $\Lambda(V)^2$, on définit le produit scalaire de $\mathcal{Z}$ en étendant par bilinéarité la forme suivante :

$$< [X,Y], [X',Y'] > = < X, X' >< Y, Y' > - < X, Y' >< X', Y > \quad .$$

On remarque $< [X,Y], [X',Y'] > = < [X,Y]X', Y' >$. Et donc grâce à l'identification entre $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}^*$ par le produit scalaire, on a pour $A^* \in \mathcal{Z}^*$ et $X, Y \in \mathcal{V}$:

$$< A^*, [X,Y] > = < A^*.X, Y > \quad . \tag{1.3}$$

Lien avec la définition par générateurs.

Fixons une base orthonormale $X_1, \ldots, X_v$ de $\mathcal{V}$; alors les vecteurs $X_{i,j} := [X_i, X_j], i < j$ forment une base de $\mathcal{Z}$. Ainsi, l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ s'identifie à l'algèbre de Lie nilpotente libre à deux pas avec pour générateurs $X_1, \ldots, X_v$.

La base $X_{i,j}, i < j$ est orthonormale pour le produit scalaire de $\mathcal{Z}$; elle permet d'identifier l'espace vectoriel $\mathcal{Z}$ à l'ensemble $\mathcal{A}_v$ des matrices antisymétriques de taille v.

L'égalité (1.3) se redémontrent alors en développant A^* et X, Y sur les bases canoniques.

Action de $K = O(v)$ ou $K = SO(v)$. Par leurs bases canoniques, on identifie $\mathcal{V}$ à $\mathbb{R}^v$ et $\mathcal{Z}$ à $\mathcal{A}_v$; on a donc les deux actions par automorphismes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} K \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ k, X & \longmapsto & k.X \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} K \times \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \\ k, A & \longmapsto & k.A = kAk^{-1} \end{array}\right. \quad .$$

On vérifie facilement : $k.[X, X'] = [k.X, k.X']$ en développant X et X' sur la base canonique. On retrouve l'action (par automorphismes) du groupe K sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}_{v,2}$, puis sur le groupe $N_{v,2}$.

1.1.4 Choix de la structure de groupe homogène.

Soit N un groupe de type H, ou un groupe libre nilpotent à deux pas, et $\mathcal{N}$ son algèbre de Lie. On écrit $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$ en reprenant les notations des définitions 1.3 et 1.2. L'algèbre $\mathcal{N}$ est stratifiée à deux pas [FS82].

On équipe alors le groupe de dilatations adaptées à la stratification :

$$\forall X \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{Z} \quad \forall r > 0 \qquad r.\exp(X+Z) = \exp(rX + r^2 Z) \quad ,$$

et d'une norme homogène "de Korányi" :

$$\forall X \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{Z} \qquad |\exp(X+Z|) = (|X|^4 + |Z|^2)^{\frac{1}{4}} \quad .$$

où les normes euclidiennes sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ sont choisies de la manière suivante :

- si N est un groupe de type H, ces normes euclidiennes sont issues de la norme euclidienne pour $\mathcal{N}$;
- si $N = N_{v,2}$ est un groupe libre nilpotent à deux pas, ces normes euclidiennes sont celles pour lesquelles les bases $X_i, 1 \leq i \leq v$ et $X_{i,j}, i < j$ sont orthogonales respectivement.

Le groupe N est ainsi muni de la structure naturelle de groupe homogène avec une norme homogène pour un groupe stratifié. La dimension homogène est $Q = \dim \mathcal{V} + 2 \dim \mathcal{Z}$.

Nous fixons la mesure de Haar suivante sur N :

$$\int_N f(n)dn = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{Z}} f(\exp(X+Z))dXdZ \quad ,$$

où les mesures de Lebesgues dX, dZ sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ sont fixées telles que :

- si N est un groupe de type H, une base orthonormale sur chacun des sous espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ donne lieu à deux mesures de Lebesgues dX et dZ sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ respectivement ;
- si $N = N_{v,2}$ est un groupe libre nilpotent à deux pas, les mesures de Lebesgues sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ sont celles données par les bases canoniques $X_i, 1 \leq i \leq v$ et $X_{i,j}, i < j$ respectivement.

1.2 Fonctions sphériques

Dans cette section, on rappelle d'abord les différentes définitions équivalentes des fonctions sphériques. Puis, on donne les définitions des paires de Guelfand et leurs propriétés. Nous illustrons alors ces notions par l'exemple du groupe de Heisenberg. On donne également leurs généralisations au sens de [DR92] sur les groupes de type H. Enfin, on précise l'action du groupe spécial orthogonal sur le groupe libre nilpotent à deux pas qui en fait une paire de Guelfand.

Pour ce qui suit, on renvoit aux cours [Far82] et au livre [Hel62].

Dans ces rappels et la première sous-section, on considère un groupe G, localement compact, et un de ses sous-groupes compacts K, sur lesquels sont fixées des mesures de Haar : dg sur G, et dk (de masse 1) sur K.

Définition 1.5 (Fonctions sphériques et caractères)
Une fonction sphérique est une fonction Φ *continue sur* G, *biinvariante par* K *(i.e. invariante sous les actions à gauche et à droite de* K*), telle que l'application :*

$$\chi : f \longmapsto \int_G f(g)\Phi(g^{-1})dg$$

soit un caractère non nul de l'algèbre de convolution des fonctions continues, à support compact, biinvariantes par K *; c'est-à-dire qu'elle doit vérifier* $\chi(f_1 * f_2) = \chi(f_1)\chi(f_2)$ *pour toutes fonctions* $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ *continues, à support compact, biinvariantes par* K.

La fonction obtenue par passage au quotient sur G/K *s'appelle encore fonction sphérique.*

On peut aussi les définir par une équation fonctionnelle (théorème 1.6), et dans le cas de groupe de Lie, comme fonction propre d'opérateurs différentiels (théorème 1.7), [Hel62, sec.3 ch.X].

Théorème 1.6 (Fonctions sphériques et équation fonctionnelle)
Soit $\Phi \neq 0$ *une fonction continue sur* G, *biinvariante par* K. *La fonction* Φ *est sphérique si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall g_1, g_2 \in G, \qquad \int_K \Phi(g_1 k g_2)dk = \Phi(g_1)\Phi(g_2) \quad . \tag{1.4}$$

En particulier on a $\Phi(e) = 1$. *De plus, si* Φ *est bornée, alors elle est bornée par 1.*

Théorème 1.7 (Fonctions sphériques et opérateurs différentiels)
On suppose que le groupe G *est un groupe de Lie connexe. Soit* $\phi : G/K \to \mathbb{C}$ *une fonction* C^∞, *invariante à gauche sous* K.

La fonction ϕ *est sphérique si et seulement si* $\phi(e) = 1$, *et* ϕ *est fonction propre de tous les opérateurs différentiels sur* G/K *invariants sous l'action à gauche de* G.

1.2.1 Sur une paire de Guelfand

On choisit une mesure de Haar dg sur G. On note $L^1(K\backslash G/K)$ le sous-espace des fonctions intégrables sur G, biinvariantes par K. C'est une algèbre de convolution, qui s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions intégrables sur G/K, invariantes sous l'action à droite de K.

Définition 1.8
La paire (G, K) *est dite* **paire de Guelfand** *si l'algèbre de convolution* $L^1(K\backslash G/K)$ *est commutative.*

Théorème 1.9 (Fonctions sphériques et spectre de $L^1(K\backslash G/K)$)
On suppose que (G, K) *est une paire de Guelfand.*

Soit Φ *une fonction sphérique bornée. L'application* χ *de la définition 1.5 s'étend en un caractère non nul de l'algèbre commutative* $L^1(K\backslash G/K)$.

Réciproquement, tout caractère non nul de $L^1(K\backslash G/K)$ est de cette forme.

Notons $Sp(L^1(K\backslash G/K))$ le spectre de l'algèbre $L^1(K\backslash G/K)$ et Ω, l'ensemble des fonctions sphériques bornées. L'application :

$$\Xi : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \quad Sp(L^1(K\backslash G/K)) \\ \Phi & \longmapsto \quad [\chi_\Phi : f \longmapsto \int_G f(g)\Phi(g^{-1})dg] \end{cases} .$$

est une bijection. C'est un homéomorphisme lorsque l'on munit le spectre de sa topologie usuelle faible-, et Ω de la convergence uniforme sur tout compact de G (ou G/K).*

Produit semi-direct $\triangleleft$. Soient H un groupe, et K un sous-groupe du groupe d'automorphismes de H. Le produit semi-direct de H par K est l'ensemble $G = K \times H$, muni de la loi :

$$(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in G, \quad (k_1, h_1).(k_2, h_2) \;=\; (k_1 k_2, h_1\, k_1.h_2) \quad ,$$

qui donne à G un structure de groupe. On note le groupe G produit semi-direct du groupe H par K : $G = K \triangleleft H$. On identifie souvent le groupe K avec le sous-groupe $K \times \{e\} \subset G$, ainsi que le groupe N avec le sous-groupe $\{\mathrm{Id}\} \times N \subset G$. On fait de même pour leurs éléments.

Dans ce cas, si le groupe $G = K \triangleleft H$ produit semi-direct de H par K est tel que (G, K) est une paire de Guelfand, on dit aussi que (H, K) est une paire de Guelfand. Les fonctions sur G biinvariantes par K sont en bijection avec les fonctions sur H invariantes sous K. On note $L^{1\natural}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur H et invariantes sous K. La paire (H, K) est alors de Guelfand si et seulement si l'algèbre de convolution $L^{1\natural}$ est commutative.

Nous allons illustrer la notion de paire de Guelfand en donnant un exemple dans la sous-section qui suit, exemple qui nous sera utile lors de la construction des fonctions sphériques sur le groupe $N_{v,2}$ dans le chapitre 3. Il s'agit du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^{v_0}$ (dont la loi a été rappelée dans la sous-section 1.1.2), pour l'action de certains sous-groupes K du groupe unitaire U_{v_0} donc du groupe d'automorphismes de $\mathbb{H}^{v_0}$:

$$\forall (z,t) \in \mathbb{H}^{v_0} = \mathbb{C}^{v_0} \times \mathbb{R},\ u \in k, \qquad u.(z,t) = (u.z, t) \quad .$$

1.2.2 Sur le groupe de Heisenberg

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\boldsymbol{U_n}$ désigne le groupe des matrices unitaires de taille n. On identifie une matrice de U_n avec l'endomorphisme sur $\mathbb{C}^n$, qu'elle représente dans la base canonique.

On se donne deux entiers $v_0, v_1 \in \mathbb{N}$, puis un v_1-uplet d'entiers $m = (m_1, \ldots, m_{v_1}) \in \mathbb{N}^{v_1}$ tels que $\sum_{j=1}^{v_1} m_j = v_0$. Nous nous intéressons à tous les groupes K de la forme :

$$K(m; v_1; v_0) \;=\; U_{m_1} \times \ldots \times U_{m_{v_1}} \quad .$$

Le groupe U_{m_j} agit sur les m_j variables $z_i, m'_{j-1} < i \leq m'_j$, où l'on a noté :

$$m_0 := m'_0 := 0 \qquad \text{et} \qquad m'_j := \sum_{i=1}^{j} m_i \;, \quad j = 1, \ldots v_1 \quad .$$

On dit qu'une fonction sur $\mathbb{H}^{v_0}$ est radiale si elle est invariante sous $K(m; v_0; v_1)$; une fonction $f : \mathbb{H}^{v_0} \mapsto \mathbb{C}$ est donc radiale si et seulement si elle peut s'écrire :

$$f(z,t) = f^{\natural}(r_1, \ldots, r_{v_1}, t) \qquad \text{où} \qquad r_j = \sum_{m'_{j-1} < i \leq m'_j} z_i^2 \quad . \tag{1.5}$$

Théorème 1.10 ($(\mathbb{H}^{v_0}, \boldsymbol{K(m; v_1; v_0)})$)
a) $(\mathbb{H}^{v_0}, K(m; v_1; v_0))$ *est une paire de Guelfand.*
b) *Les fonctions sphériques bornées de cette paire sont :*

1. *les fonctions* $\omega = \omega_{\lambda,l}$ *paramétrées par* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *et* $l = (l_1, \ldots, l_{v_1}) \in \mathbb{N}^{v_1}$:

$$\omega(z,t) = e^{-i\lambda t} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j, m_j - 1}\left(\frac{|\lambda|}{2} |\mathrm{pr}_j(z)|^2\right) \quad ,$$

où on a noté pr_j *la projection sur les* m_j *variables* $z_i, m'_{j-1} < i \leq m'_j$, *et* $\bar{\mathcal{L}}_{l,m}$ *la fonction de Laguerre normalisée (voir sous-section 5.1.3).*

2. *les fonctions* $\omega = \omega_\mu$ *paramétrées par* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{v_1}) \in \mathbb{R}^{+v_1}$:

$$\omega(z,t) = \prod_{j=1}^{v_1} \mathcal{J}_{m_j - 1}(\mu_j |\mathrm{pr}_j(z)|) \quad ,$$

où $\mathcal{J}_\alpha$ *est la fonction de Bessel réduite (voir sous-section 5.1.2).*

La démonstration de la partie a) est analogue à la preuve du cas $(\mathbb{H}^n, U_n)$, [FH87] théorème V.6.

Démonstration du théorème 1.10.a): On pose $K = K(m; v_1, v_0)$. Il suffit de montrer que l'ensemble $L^{1\natural}$ des fonctions radiales intégrables sur $\mathbb{H}^{v_0}$ est une algèbre de convolution commutative.

On définit le morphisme θ du groupe $\mathbb{H}^{v_0}$ par : $\theta(z,t) = (\bar{z}, -t)$. Pour une fonction $f : \mathbb{H}^{v_0} \rightarrow \mathbb{C}$, on adopte les notations (pour $h \in \mathbb{H}^{v_0}, k \in K$) :

$$\check{f}(h) = f(h^{-1}) \qquad f^k(h) = f(k.h), \qquad f^\theta(h) = f(\theta(h)) \quad ;$$

On a alors les propriétés suivantes :
- une fonction f est radiale si et seulement si on a : $f^k = f$ pour tout $k \in K$;
- si une fonction f est radiale, alors la fonction $\check{f}$ est aussi radiale.

Comme le groupe K est un sous-groupe du groupe d'automorphismes de $\mathbb{H}^{v_0}$, on voit que pour deux fonctions f, g sur $\mathbb{H}^{v_0}$, on a : $(f * g)^k = f^k * g^k$ pour tout $k \in K$. En conséquence, le produit de convolution de deux fonctions radiales est encore une fonction radiale et $L^1_K(\mathbb{H}^{v_0})$ est une algèbre de convolution.

On constate que θ est un automorphisme involutif, et que par contre, l'inverse est un antiautomorphisme involutif de $\mathbb{H}^{v_0}$; ainsi, pour deux fonctions f, g, on a :

$$f * g = (f^\theta * g^\theta)^\theta \qquad \text{et} \qquad f * g = (\check{g} * \check{f})\check{} \quad .$$

De plus, on la propriété suivante :

$$\forall h \in \mathbb{H}^{v_0}, \quad \exists k \in K : \qquad \theta(h) = k.h^{-1} \quad ;$$

donc pour une fonction f radiale, on a : $f^\theta = \check{f}$. Puis pour deux fonctions radiales f, g, on a :

$$f * g \;=\; \left(f^\theta * g^\theta\right)^\theta \;=\; (\check{f} * \check{g})\check{} \;=\; g * f$$

L'algèbre de convolution $L^{1\natural}$ est donc commutative.

Pour la démonstration du théorème 1.10.b), on fait les remarques suivantes : d'une part, les groupes $K(m; v_1; v_0)$ et $\mathbb{H}^{v_0}$ sont des groupes de Lie ; d'autre part, on connait l'algèbre $D^\natural$ des opérateurs différentiels sur $\mathbb{H}^{v_0}$ invariants à gauche et sous $K(m; v_1; v_0)$, [Hel62] chapter X section 2 :

Proposition 1.11 ($D^\natural$)
L'algèbre $D^\natural$, est engendrée par les sous-laplaciens :

$$\Delta_j \;=\; -\sum_{m'_{j-1} < i \leq m'_j} X_i^2 + Y_i^2 \;, \quad j = 1, \ldots, v_1 \quad ,$$

et la dérivation en la variable du centre T

La preuve du théorème 1.10.b) est analogue à $(\mathbb{H}^n, U_n)$, [FH87] théorème V.12. Elle utilise les propriétés des fonctions hypergéométriques confluentes (lemme 5.4), et des fonctions de Bessel (lemme 5.3), ainsi que l'expression des sous-laplaciens Δ_j en coordonnées radiales :

Lemme 1.12
Soit une fonction f sur $\mathbb{H}^{v_0}$, radiale et assez régulière. Si $f^\natural$ désigne la fonction définie en (1.5), on a :

$$\Delta_j.f \;=\; \Delta_j^\natural.f^\natural \quad , \quad j = 1, \ldots, v_1 \quad ,$$

où $\Delta_j^\natural$ est l'opérateur différentiel sur les fonctions $g(r_j, t)$ donné par :

$$-\Delta_j^\natural.g(r_j, t) \;=\; 4r_j \frac{\partial^2 g}{\partial r_j^2} + 4m_j \frac{\partial g}{\partial r_j} + \frac{1}{4} r_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad , \quad j = 1, \ldots, v_1 \quad .$$

Démonstration du théorème 1.10.b): D'après les théorèmes 1.6 et 1.7, une fonction ω : $\mathbb{H}^{v_0} \to \mathbb{C}$ est sphérique bornée si et seulement si elle est radiale, bornée par sa valeur 1 en 0, et fonction propre des générateurs de $D^\natural$:

$$\Delta_j.\omega \;=\; \alpha_j \omega \;, \quad j = 1, \ldots, v_1 \;, \tag{1.6}$$
$$T.\omega \;=\; \beta\omega \;, \tag{1.7}$$

où $\alpha_j, j = 1, \ldots, v_1$ et β sont des nombres complexes, d'après la proposition 1.11.

Supposons que ω soit une telle fonction. L'opérateur T étant la dérivée selon la variable du centre, la solution de l'équation (1.7) est de la forme :

$$\omega(z,t) \;=\; e^{\beta t}\Omega(z) \quad .$$

Comme ω est bornée et radiale, $\beta = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Omega(z) \;=\; \Omega(r_1,\ldots,r_{v_1}) \qquad \text{avec} \qquad r_j = \sum_{m'_{j-1}<i\leq m'_j} z_i^2 \quad .$$

ω étant solution des équations (1.6), l'expression radiale des sous-laplaciens (lemme 1.12) implique :

$$4r_j\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_j^2} + 4m_j\frac{\partial\Omega}{\partial r_j} + \frac{1}{4}r_j\beta^2\Omega \;=\; -\alpha_j\Omega\;, \quad j=1,\ldots,v_1 \quad ;$$

et Ω est nécessairement de la forme :

$$\Omega(r_1,\ldots,r_{v_1}) \;=\; \Omega_1(r_1)\ldots\Omega_{v_1}(r_{v_1}) \quad ,$$

où chaque fonction $\Omega_j(r_j)$ est C^∞, bornée et vérifie l'équation :

$$4r_j\frac{\partial^2\Omega_j}{\partial r_j^2} + 4m_j\frac{\partial\Omega_j}{\partial r_j} + \frac{1}{4}r_j\beta^2\Omega_j \;=\; -\alpha_j\Omega_j \quad .$$

Puisque la fonction ω est bornée par sa valeur 1 en 0, il en va de même pour $\Re\omega$ sur $\mathbb{H}^{v_0}$. Par conséquent, la fonction $\Re\Omega$, puis les fonctions $\Re\Omega_j$ sont bornée par leurs valeurs 1 en 0. On en déduit :

$$\Re\Omega'_j(0) \leq 0 \qquad \text{et donc} \qquad \Re\alpha_j \geq 0 \quad . \tag{1.8}$$

Nous devons distinguer deux cas $\lambda = 0, \lambda \neq 0$.

$\boldsymbol{\lambda}$ est nul : chaque fonction Ω_j est une fonction C^∞ bornée, prenant la valeur 1 en 0 et qui vérifie l'équation :

$$4r_j\frac{\partial^2\Omega_j}{\partial r_j^2} + 4m_j\frac{\partial\Omega_j}{\partial r_j} + \alpha_j\Omega_j \;=\; 0 \quad .$$

D'après le lemme 5.3, la fonction Ω_j est donnée par $\Omega_j(r_j) = \mathcal{J}_{m_j-1}(\mu_j\sqrt{r_j})$ avec $\mu_j^2 = \alpha_j \in \mathbb{R}$. Grâce à (1.8), on a aussi $\alpha_j \geq 0$; on peut ainsi supposer $\mu_j = \sqrt{\alpha_j} \in \mathbb{R}^+$. On en déduit que la fonction $\omega = \omega_\mu$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_{v_1})$ est de la forme :

$$\omega_\mu(z,t) \;=\; \prod_{j=1}^{v_1}\mathcal{J}_{m_j-1}(\mu_j\sqrt{r_j}) \qquad \text{où} \qquad r_j = \sum_{m'_{j-1}<i\leq m'_j} z_i^2 \quad .$$

λ n'est pas nul : on effectue les changements de variables et de fonctions suivants :

$$v_j = \frac{|\lambda|}{2} r_j \qquad \text{et} \qquad \Omega_j(r_j) = e^{-\frac{v_j}{2}} F_j(v_j) \ , \quad j = 1, \ldots, v_1 \quad .$$

La fonction $F_j(v_j)$ vérifie alors l'équation hypergéométrique confluente (5.8) de paramètres $m_j > 0$ et $(|\lambda| m_j - \alpha_j)/(2|\lambda|)$. D'après le lemme 5.4, la fonction F_j est donc la fonction hypergéométrique confluente :

$$F_j \ = \ F(|\lambda| m_j - \alpha_j / 2|\lambda|, m_j, .) \quad .$$

De plus on voit $\Re(|\lambda| m_j - \alpha_j)/(2|\lambda|) < m_j$. Et le premier paramètre peut se mettre sous la forme d'un entier négatif :

$$\frac{|\lambda| m_j - \alpha_j}{2|\lambda|} \ = \ -l_j \qquad \text{avec} \quad l_j \in \mathbb{N} \quad ,$$

car sinon la fonction

$$\Omega_j : \ r_j \in \mathbb{R}^+ \longmapsto e^{-\frac{|\lambda|}{4} r_j} F_j(\frac{|\lambda|}{2} r_j)$$

ne serait pas bornée.

Ainsi, on trouve : $F_j = F(-l_j, m_j, .) = {C_{l_j+m_j-1}^{l_j}}^{-1} L_{l_j}^{m_j-1}$, puis :

$$\Omega(r_j) \ = \ \frac{1}{C_{l_j+m_j-1}^{l_j}} e^{-\frac{|\lambda|}{4} r_j} L_{l_j}^{m_j-1}(\frac{|\lambda|}{2} r_j) \ = \ \bar{\mathcal{L}}_{l_j, m_j - 1}(\frac{|\lambda|}{2} r_j) \quad .$$

On en déduit la forme suivante de $\omega = \omega_{\lambda,l}$:

$$\omega_{\lambda,l}(z,t) \ = \ e^{-i\lambda t} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j, m_j-1}(\frac{|\lambda|}{2} r_j) \qquad \text{où} \qquad r_j = \sum_{m'_{j-1} < i \leq m'_j} z_i^2 \quad .$$

Réciproquement, on peut "remonter" les calculs pour voir que les solutions trouvées sont bien radiales, C^∞, bornées par leur valeur 1 en 0, et fonctions propres communes aux opérateurs T et $\Delta_j, j = 1, \ldots, v_1$.

Il découle de cette preuve que la valeur propre associée à la fonction sphérique $\omega = \omega_{\lambda,l}$ pour le sous-laplacien Δ_j vaut $\alpha_j = |\lambda|(2l_j + m_j)$.

1.2.3 Sur les groupes de type H

On convient dans tout ce texte que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $\boldsymbol{O(n)}$ désigne le groupe des matrices orthogonales de taille n. On confondra souvent une matrice de $O(n)$ et l'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique sur $\mathbb{R}^n$.

On reprend également les notations pour un groupe N de type H de la sous-section 1.1.2, et on note $v = \dim \mathcal{V}$ et $z = \dim \mathcal{Z}$. D'après la remarque 1, v est paire : $v = 2v'$.

Le groupe compact $O(v)$ agit sur l'espace $\mathcal{V} \sim \mathbb{R}^v$. On dit qu'une fonction est radiale lorsqu'elle est $O(v)$-invariante. Par dualité, on définit les distributions radiales. Pour une classe de distributions $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}^\natural$ l'ensemble de ses distributions radiales.

Le groupe $O(v)$ agit, mais généralement pas par automorphismes sur le groupe N. Il ne peut donc pas être question de fonctions sphériques de N sous K, ni de paire de Guelfand $(N, O(v))$. Toutefois, dans l'article [DR92], les auteurs donnent un sens aux fonctions sphériques bornées, en considérant l'opérateur de radialisation sous $O(v)$:

$$f \longrightarrow f^\natural : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{V} \times \mathcal{Z} & \mapsto & \mathbb{C} \\ (X, Z) & \rightarrow & \int_{O(v)} f(k.X, Z) dk \end{array} \right. ,$$

où dk est la mesure de Haar de masse 1 du groupe compact $O(v)$. Cet opérateur vérifie les mêmes propriétés que l'opérateur analogue sur une paire de Guelfand; les auteurs de l'article [DR92] définissent alors les fonctions sphériques comme les fonctions radiales au sens ci-dessus, et propres pour les opérateurs différentiels invariants sous radialisation. Comme sur le groupe de Heisenberg, ces opérateurs différentiels forment une algèbre notée $D^\natural$ qui admet pour générateurs :

$$L = -\sum_{i=1}^{v} X_i^2 \qquad \text{et} \qquad U_i\ , \quad i = 1, \ldots, z \quad ,$$

où $X_1, \ldots, X_v$ est une base orthonormale de $\mathcal{V}$, et $U_1, \ldots, U_z$ une base orthonormale de $\mathcal{Z}$. Les fonctions sphériques sont explicites et ont les mêmes propriétés spectrales que dans le cas d'une paire de Guelfand. Nous redonnons ici une partie du contenu de cet article, essentiellement le théorème (3.3) page 227, avec nos notations.

Théorème 1.13 (Fonctions sphériques sur un groupe de type H)
L'ensemble $L^{1\natural}$ des fonctions intégrables sur N et radiales est une sous-algèbre commutative de $L^1(N)$ pour la convolution.

On note Ω l'union (disjointe) des ensembles de fonctions sur N :

$$\begin{array}{lcl} \Omega_L & = & \{\Phi_{\zeta,l} \quad : \quad \zeta \in \mathcal{Z} - \{0\} \quad l \in \mathbb{N}\} \quad , \\ \Omega_B & = & \{\Phi_r \quad : \quad r \geq 0\} \quad , \end{array}$$

où les fonctions sont données par :

$$\begin{array}{lcl} \Phi_{\zeta,l}(X, Z) & = & e^{i<\zeta,Z>} \bar{\mathcal{L}}_{l,v'-1}(\frac{1}{2}|\zeta||X|^2) \quad , \\ \Phi_r(X, Z) & = & \mathcal{J}_{v'-1}(r|X|) \quad ; \end{array}$$

$\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha}$ désigne la fonction de Laguerre normalisée, et $\mathcal{J}_\alpha$ la fonction de Bessel réduite (voir section 5.1).

Les fonctions de Ω sont C^∞, bornées par leur valeur 1 en 0. De plus, elles sont sphériques dans le sens où ce sont des fonctions continues radiales qui vérifient les deux propriétés suivantes :

1. *elles vérifient l'équation fonctionelle (1.4) ; et donc, pour f_1, f_2 deux distributions radiales telles que $f_1 * f_2$, $< f_i, \phi >, i = 1, 2, \phi \in \Omega$ ont un sens, on a :*

$$\forall \phi \in \Omega \quad : \quad < f_1 * f_2, \phi > = < f_1, \phi >< f_2, \phi > \quad ; \tag{1.9}$$

2. *elles sont les fonctions C^∞, bornées par leur valeur 1 en 0, fonctions propres communes aux opérateurs différentiels de $D^\natural$.*

On retrouve le cas de Heisenberg $N = \mathbb{H}^n$, non pas pour U_n mais pour $O(2n)$, ce qui ne change rien aux fonctions sphériques.

D'après (1.9), les fonctions sphériques sont les caractères de l'algèbre $L^{1\natural}$. Le théorème 1.9 s'étend aussi au cas d'un groupe de type H.

Pour le lecteur intéressé par la preuve du théorème 1 sur les groupes de type H (inégalité L^p pour la fonction maximale pour les sphères homogènes), il est inutile d'aller plus loin dans cette section.

1.2.4 Sur le groupe $N_{v,2}$

D'après [BJR90, Theorem 5.12], $(N_{v,2}, SO(v))$ est une paire de Guelfand ; donc les fonctions intégrables invariantes sous $SO(v)$ forment une algèbre de convolution radiale ; a fortiori, c'est également le cas des fonctions intégrables invariantes sous $O(v)$. Les distributions invariantes sous $O(v)$ seront appelées radiales.

Théorème 1.14
$(N_{v,2}, O(v))$ et $(N_{v,2}, SO(v))$ sont deux paires de Guelfand.

Dans le chapitre 3, nous déterminons les fonctions sphériques bornées associées à cette paire avec la méthode suivante : comme les fonctions sphériques bornées d'une paire de Guelfand (G, K) sont les fonctions de type positif associées aux représentations du groupe G qui ont les propriétés d'être irréductible et d'avoir un vecteur K-fixe non nul, nous allons construire ces représentations en suivant la théorie de Mackey.

Nous rappelons ces notions dans la section qui suit.

1.3 Représentations

Dans cette section, nous rappelons d'abord les propriétés des fonctions de type positif, puis le lien entre les fonctions sphériques bornées d'une paire de Guelfand et les représentations, ainsi que des éléments de théorie des représentations (théorèmes de Kirillov et de Mackey) que nous utiliserons dans le chapitre 3.

Tout au long de ce travail, nous ne considérons que des groupes localement compacts, et sur ces groupes des représentations unitaires et continues sur des espaces de Hilbert séparables. Nous renvoyons par exemple à [Mac76] pour les définitions de représentation, représentation irréductible et équivalente. Pour un groupe G (localement compact), on note

$\hat{G}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G quotienté par cette relation d'équivalence (notée $\sim$). On confond souvent une classe et la donnée d'un de ses éléments.

1.3.1 Cas d'une paire de Guelfand

Voici d'abord les propriétés du sous-espace des vecteurs K-invariants [Far82] :

Théorème 1.15 (Sous-espace invariant)
Soient G un groupe et K un de ses sous-groupes compacts.
Soit $(\Pi, \mathcal{H})$ une représentation de G.
On note $\mathcal{H}_K$ le sous-espace des vecteurs K-invariants de $\mathcal{H}$.
- *Si $\dim \mathcal{H}_K = 1$, alors la représentation Π est irréductible.*
- *Si (G, K) est une paire de Guelfand et si Π est irréductible, alors $\dim \mathcal{H}_K \leq 1$.*

On peut caractériser les fonctions sphériques bornées de type positif d'une paire de Guelfand à l'aide des représentations [Far82, Hel62]. Dan le cas qui va nous intéresser, les fonctions sphériques bornées sont de type positif [BJR90, Corollary 8.4] :

Théorème 1.16 (Fonctions sphériques et représentations)
Soit (G, K) une paire de Guelfand.
a) Les fonctions sphériques bornées de type positif sont les fonctions de type positif Φ associées à une classe de représentations irréductibles qui possèdent au moins un vecteur K-fixe non nul.
Dans ce cas, l'espace des vecteurs K-invariants est la droite $\mathbb{C}\Phi$.
b) Si de plus G est le produit semi-direct $K \lhd N$, où N est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe et K un groupe de Lie compact, alors les fonctions sphériques bornées sont de type positif.

Exemple : la paire de Guelfand $(K(m; v_0; v_1), \mathbb{H}^{v_0})$. Reprenons les notations et les résultats développés dans la sous-section 1.2.2. D'après le théorème 1.10, les fonctions sphériques bornées sont les fonctions $\omega = \omega_{\lambda,l}$ ou $\omega = \omega_\mu$ définies sur $\mathbb{H}^{v_0}$, ou encore leurs extensions Ω^ω au groupe entier $H_{heis} = K(m; v_0; v_1) \lhd \mathbb{H}^{v_0}$:

$$\forall\, (k, h) \in H_{heis} = K(m; v_0; v_1) \lhd \mathbb{H}^{v_0} \qquad \Omega^\omega(k, h) \;=\; \omega(h) \quad .$$

Pour une fonction sphérique bornée ω, on note $(\mathcal{H}_\omega, \Pi_\omega)$ la représentation irréductible de H_{heis} associée à Ω^ω comme fonction de type positif, [Far82, Hel62].

Lemme 1.17
- *Les représentations irréductibles sur $K(m; v_0; v_1) \lhd \mathbb{H}^{v_0}$ ayant un vecteur $K(m; v_0; v_1)$-fixe (non nul) sont les représentations $(\mathcal{H}_\omega, \Pi_\omega)$ associées aux fonctions de type positif Ω^ω, extension des fonctions $\omega = \omega_{\lambda,l}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*, l \in \mathbb{N}^{v_1}$ et $\omega = \omega_\mu$, $\mu \in \mathbb{R}^{+v_1}$.*
L'espace des vecteurs $K(m; v_0; v_1)$-fixes pour la représentation Π_ω est la droite $\mathbb{C}\Omega^\omega$.

– *Sur le centre* $Z := \{(0,t) \; : \; t \in \mathbb{R}\}$ *du groupe de Heisenberg* $\mathbb{H}^{v_0} = \mathbb{C}^{v_0} \times \mathbb{R}$, *la représentation* Π_ω *coïncide avec le caractère :*

$$\begin{cases} (0,t) \mapsto e^{i\lambda t} & si\, \omega = \omega_{\lambda,l} \;, \\ (0,t) \mapsto 1 & si\, \omega = \omega_\mu \;. \end{cases}$$

Démonstration du lemme 1.17: La première partie du lemme est une conséquence du théorème 1.16.

Pour la seconde, comme la représentation Π_ω est irréductible, sa restriction au centre Z est de dimension 1. Grâce à l'expression de $\omega = \omega_{\lambda,l}, \omega_\mu$ théorème 1.10, on calcule :

$$\forall\,(0,t) \in Z \;, \forall\,(z',t') \in \mathbb{H}^{v_0} \quad : \quad \omega(z',t+t') \;=\; \omega(0,t)\omega(z',t') \quad ;$$

on en déduit grâce à la définition de Ω^ω, pour $(0,t) \in Z$ et $g' = (k';z',t') \in H_{heis}$:

$$\begin{aligned} \Omega^\omega\left((\mathrm{Id};0,-t)g'\right) &= \Omega^\omega(k';z',t'-t) \;=\; \omega(z',t'-t) \\ &= \omega(0,-t)\omega(z',t') \;=\; \omega(0,-t)\Omega^\omega(g') \quad . \end{aligned}$$

Ainsi sur Z, la représentation Π_ω coïncide avec la représentation de dimension 1, donnée par le caractère $(0,t) \mapsto \omega(0,-t)$ sur la droite $\mathbb{C}\Omega$ donc sur l'espace de Hilbert tout entier.

Rappelons maintenant quelques éléments de la théorie des représentations dont nous aurons besoin pour utiliser le théorème 1.16.

1.3.2 Méthode des orbites

Redonnons la méthode des orbites pour les groupes nilpotents (voir par exemple [Puk67], partie II, chapitre III §3 et [Kir74], §15), et appliquons-la au groupe $N_{v,2}$. La description de $\hat{N}$ est déja connue (voir [Gav77] avec une autre méthode que celle des orbites).

Théorème 1.18 (Kirillov)
Soient N *un groupe de Lie nilpotent et* $\mathcal{N}$ *son algèbre de Lie.*

Pour une forme linéaire $f \in \mathcal{N}^*$ *et un polarisation* $\mathcal{N}_0$ *en* f, *on définit* χ *l'homomorphisme dont la différentielle est* if *sur le sous-groupe* $N_0 = \exp \mathcal{N}_0$, *et* $\mathrm{Ind}_{N_0}^N \chi$ *la représentation induite par* χ *de* N_0 *sur* N. *Cette représentation est irréductible, et sa classe d'équivalence notée* T_f *ne dépend pas de la polarisation* $\mathcal{N}_0$ *en* f.

On a la bijection de Kirillov :

$$\begin{cases} \mathcal{N}^*/N & \longrightarrow & \hat{N} \\ N.f & \longmapsto & N.T_f \end{cases} \quad .$$

Nous l'appliquons au groupe libre nilpotent à deux pas noté dans cette sous section $N = N_{v,2}$. On note aussi ici $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{v,2}$ son algèbre de Lie, et $\mathcal{N}^*$ son dual; $\mathcal{V}^*$ et $\mathcal{Z}^*$ désignent les espaces duaux de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}$ respectivement ; lorsque l'on écrit $X^* + A^* \in \mathcal{N}^*$, on sous-entend $X^* \in \mathcal{V}^*$ et $A^* \in \mathcal{Z}^*$.

Les expressions des représentations T_f, $f \in \mathcal{N}^*/N$, peuvent s'obtenir et s'écrire (longuement) en utilisant les bases canoniques, et l'image de leurs vecteurs par des transformations orthogonales ; mais cette démarche rend les choix effectués peu lisibles. Ici, nous allons utiliser la seconde réalisation de l'algèbre de Lie $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{v,2}$, que nous avons décrite dans la sous-section 1.1.3.

Conventions concernant les éléments de $\mathcal{Z}^*$. Rappelons que l'espace vectoriel $\mathcal{Z}^*$ est identifié par le produit scalaire naturel à $\mathcal{Z}$, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques. Supposons $A^* \in \mathcal{Z}^*$ fixé. On lui associe alors la forme bilinéaire antisymétrique ω_{A^*} sur $\mathcal{V}$ donnée pour $X, Y \in \mathcal{V}$ par :

$$\omega_{A^*}(X,Y) = < A^*X, Y > \quad .$$

D'après l'égalité (1.3), on a aussi $\omega_{A^*}(X,Y) =< A^*, [X,Y] >$.

Le radical de la forme ω_{A^*} est égal au noyau $\ker A^*$ de l'endomorphisme antisymétrique A^* ; son supplémentaire orthogonale dans $(\mathcal{V}, <,>)$ est l'image de A^*, notée $\Im A^*$. Ainsi, ω_{A^*} induit sur $\Im A^*$ la forme sympléctique notée $\omega_{A^*,r}$; en particulier, la dimension de l'espace $\Im A^*$ est paire et sera notée $2v_0$.

Choix d'un sous espace isotrope. Fixons E_1, un espace vectoriel maximal totalement isotrope pour $\omega_{A^*,r}$. Sa dimension est v_0. On pose $E_2 = A^*E_1$. Comme E_1 est inclus dans le supplémentaire $\Im A^*$ de $\ker A^*$, les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont isomorphes donc la dimension de E_2 est aussi v_0.

Par définition de $\omega_{A^*,r}$ et comme E_1 est totalement isotrope pour $\omega_{A^*,r}$, on voit que l'espace vectoriel E_2 est aussi le supplémentaire orthogonal de E_1 dans $(\Im A^*, <,>)$. Comme l'endomorphisme A^* est un isomorphisme normal en restriction à $\Im A^*$, on en déduit dans $(\Im A^*, <,>)$:

$$A^*E_2 = A^*(E_1)^\perp = (A^*E_1)^\perp = E_2^\perp = E_1 \quad .$$

Finalement, E_2 est aussi un sous-espace totalement isotrope de $\omega_{A^*,r}$, qui est maximal à cause des dimensions.

On note $p_0 : \mathcal{V} \to \ker A^*$, $p_1 : \mathcal{V} \to E_1$ et $p_2 : \mathcal{V} \to E_2$ les projections orthogonales. On a $\mathrm{Id}_\mathcal{V} = p_0 + p_1 + p_2$.

Définition des représentations associées. Soit $X^* \in \ker A^*$. On définit les représentations $(\mathcal{H}_{X^*,A^*}, U_{X^*,A^*})$ par ce qui suit :

- si $A^* = 0$, c'est la représentation de dimension 1 (i.e. $\mathcal{H}_{X^*,A^*} = \mathbb{C}$), donnée par le caractère : $\exp(X + A) \mapsto \exp(i < X^*, X >)$.
- si $A^* \neq 0$, $\mathcal{H}_{X^*,A^*} = L^2(E_1)$, $F \in \mathcal{H}_{X^*,A^*}$, $n = \exp(X + A)$, $X' \in E_1$:

$$U_{X^*,A^*}(n).F(X') = \exp\left(i < A^*, \frac{1}{2}[p_1(X + 2X'), p_2(X)] + A >\right) e^{i<X^*,X>} F(p_1(X) + X')$$

On montrera dans ce qui suit, que le choix de E_1 pour la construction de cette reprsén-tation $(\mathcal{H}_{X^*,A^*}, U_{X^*,A^*})$ avec $A^* \neq 0$, n'en change pas la classe d'équivalence.

Remarque 3 *L'algèbre de Lie du noyau* $\ker U_{X^*,A^*}$ *de* U_{X^*,A^*} *est*

$$\left(\ker A^* \cap (X^*)^{\perp}\right) \oplus (A^*)^{\perp} \quad ,$$

où $(X^*)^{\perp}$ *est l'espace vectoriel orthogonal à* X^* *dans* $(\mathcal{V}, <,>)$*, et* $(A^*)^{\perp}$ *est l'espace vectoriel orthogonal à* A^* *dans* $(\mathcal{Z}, <,>)$*. En effet, avec les notations ci-dessus, on a l'équivalence :*

$$\forall X' \in E_1 \quad U_{X^*,A^*}(n).F(X') = F(X') \Longleftrightarrow \begin{cases} p_1(X) = p_2(X) = 0 \\ < X^*, X >= 0 \\ A = 0 \end{cases} \quad .$$

Remarque 4 *La représentation* U_{X^*,A^*} *s'identifie sur le centre* $\mathcal{Z}$ *avec le caractère :*

$$\exp A \longrightarrow \exp(i < A^*, A >) \quad .$$

Ces représentations sont celles données par la méthodes des orbites :

Proposition 1.19
Le représentant privilégie de chaque orbite $\mathcal{N}^*/N$ *est* $f = A^* + X^*$*, où* $A^* \in \mathcal{Z}^*$ *et* $X^* \in \mathcal{V}^*$ *tel que* $X^* \in \ker A^*$*. On a* $(\mathcal{H}_{X^*,A^*}, U_{X^*,A^*}) \in T_f$*.*

On obtient donc $\hat{N}$ comme l'ensemble des classes $T_{X^*+A^*}$ des représentations U_{X^*,A^*}, avec $A^* \in \mathcal{Z}^*$ et $X^* \in \ker A^*$.

Le reste de cette sous section est consacré à la démonstration de cette proposition.

Représentant de $\mathcal{N}^*/N$. Donnons l'expression des représentations adjointe et coadjointe pour $n = \exp(X + A) \in N$:

$$\begin{array}{lll} \forall X' + A' \in \mathcal{N} & \mathrm{Ad}.n(X' + A') & = X' + A' + [X, X'] \quad , \\ \forall X^* + A^* \in \mathcal{N}^* & \mathrm{Coad}.n(X^* + A^*) & = X^* + A^* - A^*.X \quad . \end{array}$$

Ainsi, l'orbite $N.f$ de $f = X^* + A^* \in \mathcal{N}^*$ pour l'action coadjointe de N est l'espace affine $X^* + \Im A^* + A^* \subset \mathcal{N}^*$. Décomposons $X^* = (X^* - X_0^*) + X_0^*$ où en identifiant $\mathcal{V} \sim \mathcal{V}^*$ par le produit scalaire, $p_0(X^*) = X_0^* \in \ker A^*$, $X^* - X_0^* \in \ker A^{*\perp} = \Im A^*$; on a $\mathrm{Coad.}\exp(-(X^* - X_0^*).(f) = p_0(X^*) + A^*)$. Ainsi, on peut choisir comme représentant privilègié d'une orbite $X_0^* + A^*$ avec $X_0^* \in \ker A^*$.

Construction d'une représentation associée. Fixons une forme linéaire $f = X^* + A^*$ avec $X^* \in \ker A^*$. On définit la forme B_f bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{N}$ associée à f :

$$\forall\, V, V' \in \mathcal{N} \quad : \quad B_f(V, V') = f([V, V']) \quad .$$

Or on voit facilement grâce à l'égalité (1.3) :

$$B_f(X + A, X' + A') = f([X, X']) =< A^*, [X, X'] >= w_{A^*}(X, X') \quad .$$

puis que :

- si $A^* = 0$, alors B_f est nulle, et $\mathcal{L}_f = \mathcal{N}$ est une polarisation en f,
- si A^* est non nul, et si E_1 est un sous-espace totalement isotrope pour $\omega_{A^*,r}$, alors en posant $E_2 := A^* E_1 \subset \Im A^*$, le sous espace $\mathcal{L}_f := E_2 \oplus \ker A^* \oplus \mathcal{Z}$ est une polarisation en f.

On note
- $L = L_f = \exp \mathcal{L}_f$ le sous-groupe de N d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_f$.
- χ le caractère sur L dont la différentielle est if.
- U la représentation de N induite par χ.

Lorsque $A^* = 0$, alors on a $L = N$, et U est la représentation sur N qui s'identifie au caractère χ :

$$\forall n = \exp(X + A) \in N, \qquad \chi(n) = \exp(i < X^*, X >) \quad .$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas $A^* \neq 0$, et explicitons U.

L'espace de la représentation est $\mathcal{H}_U$ est l'ensemble des fonctions $G : N \to \mathbb{C}$ telles que :

1. $\forall l \in L, n \in N \quad G(ln) = \chi(l) F(n) \quad ,$
2. $\dot{n} \to |G(n)| \in L^2(N/L) \quad .$

La représentation est donnée par :

$$\forall G \in \mathcal{H}_U \ , \quad \forall n, n' \in N \ , \qquad U(n).G(n') \ = \ G(n'n) \quad .$$

Explicitons l'expression de la représentation $(\mathcal{H}_U, U)$.

Lemme 1.20

Soit $G \in \mathcal{H}_U$ et $n = \exp(X + A)$ et $n' = \exp(X' + A')$. On a :

$$\begin{aligned} U(n).G(n') \ &= \ \exp\left(i < A^*, \frac{1}{2} \left([p_1(X + 2X'), p_2(X)] + [p_1(X'), p_2(X')] \right) + A' + A > \right) \\ & \qquad e^{i<X^*, X+X'>} G \circ \exp \circ p_1(X + X') \quad . \end{aligned}$$

On utilise les notations E_2, p_0, p_1, p_2 développées plus haut (E_1 étant fixé). Rappelons $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} = p_0 + p_1 + p_2$.

*Démonstration :*On garde les notations du lemme. On a $n'n = abc$ où :

$$\begin{aligned} a \ &= \ \exp(A' + A + \frac{1}{2}[X', X]) \quad , \quad c \ = \ \exp(p_1(X + X')) \quad , \\ b \ &= \ \exp\left(X + X'\right) \, \exp\left(-p_1(X + X')\right) \\ &= \ \exp(X + X' - p_1(X + X') + \frac{1}{2}[X + X', -p_1(X + X')]) \\ &= \ \exp((p_2 + p_0)(X + X') + \frac{1}{2}[X + X', -p_1(X + X')]) \quad . \end{aligned}$$

On remarque $a, b \in L$, donc $G(n'n) = \chi(a)\chi(b)G(c)$. Or par définition de χ, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\chi(a) &= \exp(if(A' + A + \frac{1}{2}[X', X])) \\
&= \exp(i < A^*, A' + A > + \frac{i}{2} < A^*, [X', X] >) \quad ,
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\chi(b) &= \exp\left(if\left((p_2 + p_0)(X + X') + \frac{1}{2}[X + X', -p_1(X + X')]\right)\right) \\
&= \exp\left(i < X^*, (p_2 + p_0)(X + X') > + \frac{i}{2} < A^*, [X + X', -p_1(X + X')] >\right)
\end{aligned}$$

Comme on a choisi $X^* \in \ker A^*$, on a $< X^*, p_1(X + X') >= 0$ et :

$$< X^*, (p_2 + p_0)(X + X') > = < X^*, X + X' > \quad ;$$

On a comme le sous espace E_1 est isotrope pour $\omega_{A^*,r}$,

$$\begin{aligned}
&< A^*, [X + X', -p_1(X + X')] > = \omega_{A^*}(X + X', -p_1(X + X')) \\
&\quad = \omega_{A^*,r}((p_1 + p_2)(X + X'), -p_1(X + X')) = \omega_{A^*,r}(p_2(X + X'), -p_1(X + X')) \\
&\quad = < A^*, [p_1(X + X'), p_2(X + X')] > \quad ,
\end{aligned}$$

et comme le sous espace E_2 l'est aussi :

$$\begin{aligned}
< A^*, [X', X] > &= \omega_{A^*}(X', X) = \omega_{A^*,r}((p_1 + p_2)X', (p_1 + p_2)X) \\
&= \omega_{A^*,r}(p_1(X'), p_2(X)) + \omega_{A^*,r}(p_2(X'), p_1(X)) \\
&= < A^*, [p_1(X'), p_2(X)] + [p_2(X'), p_1(X)] > \quad .
\end{aligned}$$

En rassemblant les termes, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
G(n'n) &= \exp(i < A^*, A' + A > + \frac{i}{2} < A^*, [p_1(X'), p_2(X)] + [p_2(X'), p_1(X)] >) \\
&\quad \exp(i < X^*, X + X' > + \frac{i}{2} < A^*, [p_1(X + X'), p_2(X + X')] >) \\
&\quad G(\exp(p_1(X + X'))) \quad ,
\end{aligned}$$

puis l'expression de $(\mathcal{H}_U, U)$.

Maintenant la transformation unitaire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_U &\longrightarrow \mathcal{H}_{X^*,A^*} = L^2(E_1) \\
G &\longmapsto F = \{X_1 \mapsto G \circ \exp \circ p_1(X_1))\}
\end{aligned}$$

entrelace les représentations U et U_{X^*,A^*} de N.

Deux choix différents de sous espace E_1 totalement isotrope pour $\omega_{A^*,r}$ conduisent à deux polarisations pour la même forme linéaire $f = X^* + A^*$, et donc à deux représentations U équivalentes, puis à deux représentations U_{X^*,A^*} équivalentes.

Ceci achève la démonstration de la proposition 1.19.

1.3.3 Description de $\hat{N}/G$

Nous démontrons ici le corollaire du théorème de Kirillov suivant :

Corollaire 1.21 ($\hat{N}/G$)
Soient G, N deux groupes. On suppose que N est nilpotent; on note $\mathcal{N}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{N}^*$ le dual de cette algèbre. On suppose également que G agit continûment par automorphismes sur N ; le groupe G agit alors sur l'ensemble $\hat{N}$ et sur le dual $\mathcal{N}^*$ (par automorphismes) :

$$\left\{\begin{array}{ccc} G\times\hat{N} & \longrightarrow & \hat{N} \\ (g,\rho) & \longmapsto & g.\rho=\{n\mapsto\rho(g^{-1}.n)\} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} G\times\mathcal{N}^* & \longrightarrow & \mathcal{N}^* \\ (g,f) & \longmapsto & g.f=\{n\mapsto f(g^{-1}.n)\} \end{array}\right. .$$

Pour un élément $f\in\mathcal{N}^*$, on note $G.f$ l'orbite pour cette dernière action, et T_f la représentation de N associée par le théorème de Kirillov.

On a pour $f\in\mathcal{N}^*$ et $g\in G$:

$$g.T_f \;=\; T_{g.f} \quad . \tag{1.10}$$

On en déduit la bijection :

$$\left\{\begin{array}{ccc} N\backslash\mathcal{N}^*/G & \longrightarrow & \hat{N}/G \\ G.f & \longmapsto & G.T_f \end{array}\right. .$$

Démonstration du corollaire 1.21: Montrons l'égalité (1.10). Fixons $f\in\mathcal{N}^*$ et $g\in G$. On choisit une polarisation $\mathcal{N}_0$ en f. On note alors $g.\mathcal{N}_0=\mathcal{N}_0'$. Comme G agit par automorphismes sur N, on vérifie aisément que $\mathcal{N}_0'$ est une polarisation en $f':=g.f$. On note χ et χ' les homomorphismes sur $N_0=\exp\mathcal{N}_0$ et $N_0'=\exp\mathcal{N}_0'$ ayant pour différentielles if et if' respectivement. On a :

$$\mathrm{Ind}_{N_0}^N\chi=(\mathcal{H},\Pi)\in T_f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ind}_{N_0'}^N\chi'=(\mathcal{H}',\Pi')\in T_{f'} \quad .$$

Mesures choisies. Dans ces inductions, on suppose que les mesures ont été choisies de la manière suivante :

- Les mesures dn et dn_0 sur N et N_0 sont choisies telle qu'il existe une mesure $d\dot{n}$ sur N/N_0, N-invariante et qu'elles vérifient pour toute fonction continue h à support compact sur N :

$$\int_N h(n)dn \;=\; \int_{N/N_0}\left(\int_{N_0} h(n\,n_0)dn_0\right)d\dot{n} \quad .$$

- Le groupe G agit sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ par automorphismes. Le jacobien du changement de variable $n\mapsto g.n$ est donc la valeur absolue du déterminant de l'application $X\mapsto g.X$ sur $\mathcal{N}$; en particulier, il est constant sur N ; on le note $|\det g|$.
  On définit la mesure dn_0' sur N_0' comme la mesure-image par $n\mapsto g.n$ de $|\det g|dn_0$: c'est-à-dire pour toute fonction continue h à support compact sur N_0' :

$$\int_{N_0} h(g.n_0)|\det g|dn_0 \;=\; \int_{N_0'} h(n_0')dn_0' \quad ;$$

– On définit l'ensemble $C_0(N; N_0)$ des fonctions continues sur N, invariantes par N_0, qui passées au quotient sur N/N_0, sont à support compact ; on fait de même pour $C_0(N; N'_0)$. Les mesures (positives de Radon) sur N/N_0 s'identifient aux formes linéaires positives sur $C_0(N; N_0)$; et de même sur N/N'_0.
Comme g est un automorphisme continu qui envoie N_0 sur N'_0, on a la bijection :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_0(N; N_0) & \longrightarrow & C_0(N; N'_0) \\ h & \longmapsto & h(g.) : n \mapsto h(g.n) \end{array} \right. ;$$

cela permet de définir $d\dot{n}'$ la mesure sur N/N'_0 comme la forme linéaire positive sur $C_0(N; N'_0)$ donnée par :

$$h \longmapsto \int_{N/N_0} h(g.n) d\dot{n} \qquad \text{i.e.} \qquad \int_{N/N_0} h(g.n) d\dot{n} = \int_{N/N'_0} h(n) d\dot{n}' \quad .$$

La mesure $d\dot{n}'$ est N-invariante car $d\dot{n}$ l'est ; en effet, on a pour $h \in C_0(N; N'_0), n_1 \in N$:

$$\int_{N/N'_0} h(n_1 n) d\dot{n}' = \int_{N/N_0} h(n_1\, g.n) d\dot{n} = \int_{N/N_0} h(\, g.n) d\dot{n} \quad .$$

De plus, la mesure $d\dot{n}'$ vérifie pour toute fonction h continue à support compact dans N :

$$\begin{aligned} \int_N h(n) dn &= \int_N h(g.n) |\det g| dn = \int_{N/N_0} \left(\int_{N_0} h(g.(n\, n_0)) |\det g| dn_0 \right) d\dot{n} \\ &= \int_{N/N_0} \left(\int_{N_0} h(g.n\, g.n_0)) |\det g| dn_0 \right) d\dot{n} = \int_{N/N'_0} \left(\int_{N'_0} h(n'\, n'_0) dn'_0 \right) d\dot{n}' \quad . \end{aligned}$$

par définition de dn'_0 et $d\dot{n}'$.

Opérateur d'entrelacement entre $g.\Pi$ et Π'. On pose pour une fonction $u \in \mathcal{H}'$ et pour $n \in N$: $\{A.u\}(n) = u(g.n)$.

Montrons $A : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$. Soit $u \in \mathcal{H}'$. On a pour $n_0 \in N_0$ et $n \in N$:

$$A.u(n_0\, n) = u(g.(n_0\, n)) = u(g.n_0\, g.n) = \exp(if'(g.n_0)) u(g.n) \quad ,$$

par définition de $\mathcal{H}'$, car $g.n_0 \in N'_0$. Comme $f' = g.f$ et $u(g.n) = A.u(n)$, on a bien :

$$A.u(n'_0 n) = \exp(if(n'_0) A.u(n)) \quad .$$

De plus, la fonction $|A.u|$ passe au quotient en une fonction sur N/N_0 qui est localement intégrable car $n \mapsto g.n$ est continue ; d'après le choix des mesures $d\dot{n}$ et $d\dot{n}'$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{N/N_0} |A.u(n)|^2 d\dot{n} &= \int_{N/N_0} |u(g.n)|^2 d\dot{n} \\ &= \int_{N/N'_0} |u(n')|^2 d\dot{n}' = \|u\|^2_{\mathcal{H}'} < \infty \quad ; \end{aligned}$$

et donc $A.u \in \mathcal{H}$ et $\|A.u\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}'}$.

Montrons $g.\Pi \circ A = A \circ \Pi'$. En effet pour $g \in G, u \in \mathcal{H}', n, n' \in N$, on a :

$$\begin{aligned} \{g.\Pi(n) \circ A.u\}(n') &= \left\{\Pi(g^{-1}.n) \circ A.u\right\}(n') = A.u(n'\,g^{-1}.n) \\ &= u(g.(n'\,g^{-1}.n)) = u(g.n'\,n) \quad , \\ \{A \circ \Pi'(n).u\}\ (n') &= \Pi'(n).u(g.n') = u(g.n'\,n) \quad . \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que A est un opérateur unitaire qui entrelace $g.\Pi$ et Π'. L'égalité (1.10) entre classe de représentations est donc démontrée.

D'après cette égalité, les classes de représentations associées aux formes linéaires de $G.f$ sont les éléments de $G.T_f$.

Sous les hypothèses du corollaire précédent, pour un élément $\rho \in \hat{N}$, on note G_ρ son **groupe stabilisateur** :

$$G_\rho = \{g \in G; \quad g.\rho = \rho\} \quad .$$

Proposition 1.22 (Stabilisateur)
Soient N un groupe nilpotent, et K un groupe (localement compact) qui agit continûment sur N comme groupe d'automorphismes. On note $G = K \lhd N$ leur produit semi-direct; le groupe G agit continûment par automorphisme sur N.

Fixons $\rho \in \hat{N}$. Alors le groupe G_ρ stabilisateur de ρ peut s'écrire comme $K_\rho \lhd N$, où K_ρ est le sous-groupe :

$$K_\rho := \{k \in K : \ k.\rho = \rho\} \subset K \quad .$$

On peut toujours supposer $\rho = T_f, f \in \mathcal{N}^*$, et dans ce cas :

$$K_\rho = \{k \in K \subset G : \ k.f \in N.f\} \quad .$$

Démonstration de la proposition 1.22: D'après le théorème 1.18 de Kirillov, il existe une forme linéaire $f \in \mathcal{N}^*$ tel que $T_f = \rho$. D'après le théorème 1.18 de Kirillov et son corollaire 1.21, on a :

$$g \in G_\rho \iff g.\rho = \rho \iff g.T_f = T_{g.f} = T_f \iff g.f \in N.f \quad ,$$

d'où :

$$\forall g = (k,n) \in G \quad : \quad g \in G_\rho \iff k.f \in N.f \quad .$$

On en déduit que le groupe G_ρ peut s'écrire comme $K_\rho \lhd N$, où K_ρ est le sous-groupe :

$$K_\rho = \{k \in K : \ k.f \in N.f\} \subset K \quad .$$

Or "en remontant les équivalences" précédentes, on voit :

$$k.f \in N.f \iff T_{k.f} = k.T_f = T_f \iff k.\rho = \rho \quad .$$

On obtient la première caractérisation de K_ρ donnée dans la proposition 1.22.

Nous ne considérerons ici que le cas d'un sous groupe normal N d'un group G; le groupe G agit alors sur N par conjugaison, donc sur le dual $\mathcal{N}^*$ par la représentation coadjointe.

1.3.4 Théorème de Mackey

Une partie de la théorie de Mackey décrit $\hat{G}$ en fonction de $\hat{N}$ lorsque N est un sous groupe distingué fermé de type I de G ; le problème est d'étendre les représentations ρ de N à leurs stabilisateurs G_ρ lorsque le quotient $\hat{N}/G$ a une structure mesurable "raisonnable". Ce problème fut étudié plus avant en considérant les multiplicateurs de G_ρ/N ; nous n'irons pas dans cette direction.

Pour l'énoncé du théorème ci-dessous, nous renvoyons par exemple à [Lip74, ch.III sec.B theorem 2].

Théorème 1.23 (Mackey)
Soient N un groupe nilpotent, et K est un groupe compact qui agit continûment sur N par automorphismes. On note $G = K \triangleleft N$ le produit semi-direct.

Le groupe G agit sur N par conjugaison, donc sur $\hat{N}$. Pour $\rho \in \hat{N}$, on note G_ρ le stabilisateur de ρ, et on pose

$$\check{G}_\rho = \{\nu \in \hat{G}_\rho; \quad \nu_{|N} \text{ est un multiple de } \rho\} \quad .$$

Alors pour $\rho \in \hat{N}$ et $\nu \in \check{G}_\rho$, la représentation $\Pi_\nu = \mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu$ est irréductible ; $\hat{G}$ est l'union disjointe :

$$\hat{G} = \bigcup_{\rho \in \hat{N}/G} \{\Pi_\nu; \quad \nu \in \check{G}_\rho\} \quad .$$

Ce théorème est vrai lorsque G est un groupe localement compact et N un sous-groupe distingué fermé régulièrement plongé de type I de G.

Propriétés utilisées avec le théorème 1.23

Nous utiliserons le corollaire suivant du théorème des sous-groupes de Mackey (voir par exemple [Lip74, ch.II sec.A subsec.1 theorem 1]) :

Corollaire 1.24 (Théorème des sous-groupes)
Soient G_1, G_2 deux sous-groupes fermés d'un groupe G.

Si l'ensemble des doubles classes de G sous G_1 et G_2 est réduit à celle de l'élément neutre, alors pour toute représentation ν de G_1, on a :

$$\left[\mathrm{Ind}_{G_1}^G \nu\right]_{|G_2} \sim \mathrm{Ind}_{G_1 \cap G_2}^{G_2} (\nu_{|G_1 \cap G_2}) \quad .$$

De plus, nous utiliserons une version faible du théorème du nombre d'entrelacement (voir par exemple [Lip74, ch.II sec.A lemma 5]) :

Lemme 1.25 (Théorème du nombre d'entrelacement)
Soient H un sous-groupe fermé d'un groupe G et γ une représentation de H, tels que la variété homogène G/H admette une mesure G-invariante finie. Le nombre de fois que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G \gamma$ contient 1_G (comme un facteur direct discret) est égale au nombre de fois que γ contient 1_H (comme un facteur direct discret).

Chapitre 2

Fonction maximale sphérique

Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème 1, c'est-à-dire des inégalités L^p pour la fonction maximale sphérique associée à la norme de Korányi sur les groupes de type H ou $N_{v,2}$. Le résultat est déja connu sur les groupes de Heisenberg [Cow81], et sur les groupes de type H [Sch98], mais pas pour les groupes $N_{v,2}$.

Tout au long des deux sections qui suivent, N désigne un groupe de type H, ou un groupe libre nilpotent de pas deux. On reprend les notations de la section 1.1, en particulier $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$. On pose $\dim \mathcal{V} = v$ et $\dim \mathcal{Z} = z$, $Q = v + 2z$ et $v = 2v'$ ou $2v' + 1$. Le groupe N est muni de sa structure de groupe homogène et d'une norme homogène, sur lequel on a fixé un mesure de Haar dn (sous-section 1.1.4). On note μ la mesure pour laquelle on a le passage en coordonnées polaires (1.1) ; on en connait facilement l'expression (voir proposition 2.7). On note $\mathcal{A}$ la fonction maximale sphérique (sous-section 1.1.1).

Dans les deux section qui suivent, nous montrons le théorème 1 :

Théorème principal 2.1 ($\|\mathcal{A}\|_{p \to p}$)
Pour $v' \geq 2$ et pour $p \in [1, \infty]$ tel que :

a) $2 \leq p \leq \infty$ si $v' = 2$,

b) si $v' > 2$, dans le cas d'un groupe de type H, $(v' - 1)/(v' - 3/2) < p \leq \infty$,

c) si $v' \geq 2$, dans le cas $N = N_{v,2}$, $2h_0/(2h_0 - 1) < p \leq \infty$ où h_0 est le minimum de $v + 1$ et de la partie entière de $(z - 1)/4$,

la fonction maximale sphérique $\mathcal{A}$ vérifie des inégalités L^p :

$$\forall f \in L^p , \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p} \quad ,$$

où C est une constante de v, z, p.

Ce résultat est déjà connu sur les groupes de Heisenberg [Cow81], et on peut le déduire de [Sch98] pour les groupes de type H. Les indices pour p alors obtenus sont optimaux : $p > n/(n-1)$, où $n = v + z$ est la dimension topologique du groupe. Nous n'obtiendrons pas l'optimalité dans le cas des groupes de type H, mais nous couvrirons le cas du groupe libre nilpotent de pas deux. En effet, la courbure rotationnelle de la sphère de Kornáyi du groupe $N_{v,2}$ s'annule sur le centre.

Notre démonstration va suivre le même point de départ que [Ste76] ; nous serons amenés à étudier les fonctions d'aires définies pour des fonctions $f \in \mathcal{S}(N)$ de la classe de Schwartz sur N par :

$$S^j(f) := \sqrt{\int_0^\infty |\partial_s^j(f * \mu_s)|^2 s^{2j-1} ds} \quad ;$$

elle repose sur les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.2 ($\|\mathcal{A}\|_{p \to p}$ **et** $\|S^j\|_{2 \to 2}$)
Soit $h \in \mathbb{N}$. *On suppose* $v' \geq 2$ *et* $1 \leq h < (Q-2)/2$. *Si on a un contrôle* L^2 *pour les fonctions d'aires* $S^j, j = 1, \dots h$:

$$\forall j = 1, \dots h \quad \exists C > 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(N) \qquad \|S^j(f)\| \leq C \, \|f\|$$

alors pour $p \in [1, \infty]$ *tel que :*
a) $2 \leq p \leq \infty$ *si* $h = 1$,
b) $(2h)/(2h-1) < p \leq \infty$ *si* $h > 1$,
la fonction maximale sphérique $\mathcal{A}$ *vérifie des inégalités* L^p :

$$\forall f \in L^p \,, \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^p} \leq C \, \|f\|_{L^p} \quad ,$$

où C *est une constante de* v, z, p, h.

Le théorème ci-dessus se généralise au groupe stratifié de rang 2.

Théorème 2.3 ($\|S^j\|_{2 \to 2}$)
On suppose $v' \geq 2$. *On a :*
a) dans le cas d'un groupe de type H :

$$\forall h = 1, \dots, v' - 1 \quad \forall f \in L^2(N) \qquad \|S^h(f)\| \leq C \, \|f\| \quad ,$$

b) dans le cas d'un groupe $N_{v,2}$,

$$\forall h \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq h \leq \frac{z-1}{4}, v+1 \quad \forall f \in L^2(N) \qquad \|S^h(f)\| \leq C \, \|f\| \quad ,$$

où C *est une constante de* v, z.

Ces deux derniers théorèmes impliquent le théorème 2.1.

2.1 Inégalité L^p, $p \geq 2$ pour $\mathcal{A}$

Le but de cette section est de démontrer le théorème 2.2.a). Il repose sur le contrôle L^2 de la fonction maximale pour les boules, l'interpolation de Marcinkiewicz, et la proposition suivante :

Proposition 2.4
Soit $f \in \mathcal{S}(N)$. *On a :*

$$\mathcal{A}.f \leq Q|B_1|\mathcal{M}.f + \frac{1}{\sqrt{2Q}} S^1.f \quad .$$

2.1.1 Démonstration du théorème 2.2.a)

Admettons la proposition 2.4, et supposons que les hypothèses du théorème 2.2.a) sont vérifiées ; c'est-à-dire que la fonction d'aire S^1 vérifie une inégalité L^2.

Montrons que $\mathcal{A}$ vérifie des inégalités L^2 et L^∞. La fonction maximale $\mathcal{M}$ vérifie des inégalités L^p (voir (1.2)), en particulier L^2. Comme S^1 vérifie aussi une inégalité L^2, on en déduit que c'est aussi le cas pour $\mathcal{A}$; il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\forall f \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^2} \leq C_2 \|f\|_{L^2} \quad . \tag{2.1}$$

Trivialement $\mathcal{A}$ vérifie une inégalité L^∞ ; il existe une constante $C_\infty > 0$ telle que :

$$\forall f \qquad \|\mathcal{A}.f\|_{L^\infty} \leq C_\infty \|f\|_{L^\infty} \quad . \tag{2.2}$$

Interpolons. Fixons momentanément $r(.) : (N, dn) \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable, et considérons l'opérateur T défini sur les fonctions simples de N par :

$$T.f(n) = \left(\mu_{r(n)} * f\right)(n) \quad .$$

D'après (2.1) et (2.2), T est borné sur L^2 et sur L^∞ ; d'après l'interpolation de Marcinkiewicz [SW71], T s'étend en un opérateur borné sur chaque L^p pour $2 \leq p \leq \infty$, avec des constantes qui ne dépendent que de p, C_2, C_∞. Ceci est vrai pour toute fonction $r(.) : (N, dn) \mapsto \mathbb{R}^+$ mesurable. On peut donc repasser au supremum : la fonction maximale $\mathcal{A}$ vérifie une inégalité L^p, $2 \leq p \leq \infty$.

Le théorème 2.2.a) sera ainsi démontré lorsque nous aurons prouvé la proposition 2.4.

2.1.2 Contrôle de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{M}$ et S^1

Le but de cette sous-section est de démontrer la proposition 2.4. On procède comme dans le cas euclidien [Ste93].

Soit $f \in \mathcal{S}(N)$. La fonction $(s, n) \mapsto f * \mu_s(n)$ est alors dérivable et de dérivée continue selon $(s, n) \in \mathbb{R}^{*+} \times N$, et on a :

$$\begin{aligned} f * \mu_t(n) &= \frac{1}{t^Q} \int_0^t \partial_s(s^Q f * \mu_s(n)) ds \\ &= \frac{1}{t^Q} \int_0^t Q s^{Q-1} f * \mu_s(n) ds + \frac{1}{t^Q} \int_0^t s^Q \partial_s(f * \mu_s(n)) ds \quad , \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite, on voit d'une part d'après la formule (1.1) du passage en coordonnées polaires :

$$\int_0^t s^{Q-1} f * \mu_s(n) ds = \int_0^t \int_{S_1} f(n\, s.n'^{-1}) d\mu(n') s^{Q-1} ds = \int_{B(0,t)} f(nn'^{-1}) dn' \quad ,$$

d'autre part $|B(n,t)| = |B(0,t)| = t^Q|B(0,1)|$ d'où :
$$\frac{1}{t^Q} = \frac{|B_1|}{|B(n,t)|} \quad .$$
On a donc :
$$\frac{1}{t^Q}\int_0^t Qs^{Q-1} f * \mu_s(n) ds \;=\; Q|B_1|\frac{1}{|B(n,t)|}\int_{B(n,t)} f(n'')dn'' \quad .$$
Pour le second terme, on utilise Hölder :
$$\begin{aligned}\frac{1}{t^Q}\left|\int_0^t s^Q\partial_s(f*\mu_s(n))ds\right| &\leq \frac{1}{t^Q}\left(\int_0^t |s^{Q-\frac{1}{2}}|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |s^{\frac{1}{2}}\partial_s(f*\mu_s(n))|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2Q}}\left(\int_0^\infty s|\partial_s(f*\mu_s(n))|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2Q}}S^1.f(n) \quad .\end{aligned}$$
On a donc pour tout $t > 0$:
$$|f*\mu_t(n)| \leq Q|B_1|\frac{1}{|B(n,t)|}\int_{B(n,t)} f(n'')dn'' + \frac{1}{\sqrt{2Q}}S^1.f(n) \quad .$$
Prenons le supremum en t dans ce qui précède :
$$\mathcal{A}.f(n) \leq Q|B_1|\mathcal{M}.f(n) + \frac{1}{\sqrt{2Q}}S^1.f(n) \quad .$$
Ceci achève la démonstration de la proposition 2.4, et donc celle du théorème 2.2.a).

2.2 Inégalité L^p, $p < 2$ pour $\mathcal{A}$

Le but de cette section est de démontrer le théorème 2.2.b). Pour cela, nous allons placer l'opérateur de convolution par μ dans une famille analytique d'opérateurs A^α, pour laquelle nous montrerons des inégalités maximales à l'aide des fonctions d'aires. Nous finirons par un argument d'interpolation.

Nous choisissons la même famille analytique d'opérateurs A^α que dans [Ste76].

Proposition 2.5 (A^α)
Nous définissons pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}^+$ la fonction m^α et sur N la fonction F^α par :
$$m^\alpha(x) := 2\frac{(1-x^2)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \;,\; x\in\mathbb{R}^+ \quad et \quad F^\alpha(n) := m^\alpha(|n|) \;,\; n \in N \quad .$$

Pour $\Re\alpha > 0$, nous définissons ainsi l'opérateur A^α de convolution avec F^α. Il est continu sur $L^p, 1 < p \leq \infty$.

Cette famille d'opérateurs $\{A^\alpha\}$ est analytique dans le demi-plan $\Re\alpha > 0$, et se prolonge analytiquement dans le demi-plan $\Re\alpha > 1-h$ lorsque $h < (Q-2)/2$ en une famille d'opérateurs sur la classe de fonctions $\mathcal{S}(N)$ de Schwartz. Pour $\alpha = 0$, A^0 est l'opérateur de convolution avec μ.

2.2.1 Famille d'opérateurs $\{A^\alpha\}$

Le but de cette sous-section est de démontrer la proposition 2.5 On remarque :

Lemme 2.6
Pour $\Re\alpha > 0$, F^α est intégrable et radiale sur N. Pour $\alpha > 1$, m^α est décroissante.

Démonstration :En effet, on a :

$$\int_N |F^\alpha(n)|dn \leq \int_0^1 \frac{(1-r^2)^{\Re\alpha-1}}{|\Gamma(\alpha)|} r^{Q-1}dr \quad ,$$

Ainsi pour $\Re\alpha > 0$, l'opérateur A^α est l'opérateur de convolution avec la fonction $F^\alpha \in L^1$; c'est donc un opérateur borné sur $L^p, 1 < p \leq \infty$. De plus, la famille d'opérateurs $\{A^\alpha\}$ est analytique sur le demi-plan $\Re\alpha > 0$. Nous avons à montrer qu'elle se prolonge analytiquement, et que A^0 est l'opérateur de convolution avec μ

Nous aurons besoin de l'expression de μ :

Proposition 2.7
On note $\tilde{\sigma}_n$ la mesure de la spère unité euclidienne $S_1^{(n)}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Avec les notations ci-dessus, on a pour une fonction g localement intégrable sur N :

$$\begin{aligned}\int_{S_1} g(n)d\mu(n) = 2\int_0^1 \int_{S_1^{(v)}} \int_{S_1^{(z)}} & g(\exp(rX + \sqrt{(1-r^4)}Z)) \\ & d\tilde{\sigma}_z(Z)d\tilde{\sigma}_v(X)r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}}dr \quad .\end{aligned}$$

On remarque que la mesure μ est symétrique et radiale c'est-à-dire invariante sous $n \mapsto n^{-1}$ et sous $O(v)$ respectivement.

Démonstration de la proposition 2.7: Posons :

$$I(g) := \int_N g(n)dn = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{Z}} g(\exp(X+Z))dXdZ \quad .$$

En effectuant un passage en coordonnée polaire en $X \in \mathcal{V} \sim \mathbb{R}^v$ et en $Z \in \mathcal{Z} \sim \mathbb{R}^z$,

$$I(g) = \int_0^\infty \int_{S_1^{(v)}} \int_0^\infty \int_{S_1^{(z)}} g(\exp(r_1X + r_2Z))d\tilde{\sigma}_z(Z)r_2^{z-1}d\tilde{\sigma}_v(X)r_1^{v-1}dr_1 \quad .$$

Considérons le changement de variables suivant :

$$(r_1, r_2) \longrightarrow (r_1', r') \quad \text{où} \quad r_1 = r'r_1' \quad \text{et} \quad r'^4 = r_1^4 + r_2^2 \quad ,$$

dont le jacobien est $r_2 dr_2 \wedge dr_1 = 2r'^4 dr' \wedge dr'_1$. Avec ce changement de variable, on a :

$$I(g) = 2\int_0^\infty \int_0^1 \int_{S_1^{(v)}} \int_{S_1^{(z)}} g(r' \exp(r'_1 X + (1-{r'_1}^4)^{\frac{1}{2}} Z)) d\tilde{\sigma}_z(Z) d\tilde{\sigma}_v(X)$$
$$ {r'_1}^{v-1}(1-{r'_1}^4)^{\frac{z-2}{2}} r'^{Q-1} dr'_1 dr' \quad .$$

De l'unicité de la mesure μ vérifiant la formule (1.1) du passage en coordonnée polaire, on trouve l'expression de μ donnée dans la proposition.

Pour montrer la proposition 2.5, nous aurons également besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.8
On note D_r l'opérateur différentiel sur les fonctions de la variable $r \in \mathbb{R}$:

$$D_r := \partial_r \frac{1}{2r} = \frac{1}{2r}\partial_r - \frac{1}{2r^2} \quad .$$

On peut écrire l'opérateur $f \mapsto D_r^h.\left[f * \mu_r r^{Q-1}\right]$ comme une combinaison linéaire sur $j = 0, \ldots, h$ de : $f \mapsto r^{Q-1-2h+j}\partial_r^j(f * \mu_r)$.

Démonstration du lemme 2.8: On a :

$$\begin{aligned} D_r.\left[r^{Q-1-2h+j}\partial_r^j f * \mu_r\right] &= \frac{1}{2}\partial_r\left[r^{Q-2-2h+j}\partial_r^j f * \mu_r\right] \\ &= \frac{1}{2}(Q-2-2h+j)r^{Q-3-2h+j}\partial_r^j f * \mu_r + \frac{1}{2} r^{Q-2-2h+j}\partial_r^{j+1} f * \mu_r \\ &= K_1 r^{Q-1-2(h+1)+j}\partial_r^j f * \mu_r + K_2 r^{Q-1-2(h+1)+(j+1)}\partial_r^{j+1} f * \mu_r \quad , \end{aligned}$$

où les $K_i, i = 1, 2$ sont des constantes de Q, h, j. On en déduit le lemme par récurrence.

La proposition 2.5 sera démontrée lorsque nous aurons montré le lemme suivant :

Lemme 2.9
Pour $\Re\alpha > 1-h$, l'opérateur A^α coïncide sur $\mathcal{S}(N)$ avec l'opérateur :

$$A^{\alpha,h} := f \longmapsto \int_0^1 m^{\alpha+h+1}(r)\, D_r^h.\left[f * \mu_r r^{Q-1}\right] dr \quad .$$

En effet, d'une part, en utilisant le lemme 2.8, on voit facilement que la famille d'opérateur $A^{\alpha,h}, \Re\alpha > 1-h$ sur $\mathcal{S}(N)$ est analytique. D'autre part, l'opérateur $A^{0,1}$ coïncide avec l'opérateur de convolution avec μ :

$$A^{0,1}.f = -\int_0^1 2\partial_r\left(\frac{1}{-2r} f * \mu_r r^{Q-1}\right) dr = \left[\frac{1}{r} f * \mu_r r^{Q-1}\right]_0^1 = f * \mu \quad .$$

Démonstration du lemme 2.9: Montrons d'abord $A^\alpha = A^{\alpha,0}$: par passage en coordonnées polaires (1.1), pour $f \in \mathcal{S}(N)$, on a :

$$A^\alpha.f(n) = \int_N f(nn'^{-1})F^\alpha(n')dn' = \int_0^\infty f * \mu_r m^\alpha(r) r^{Q-1} dr \quad .$$

En intégrant par partie, on a donc :

$$\begin{aligned} A^\alpha.f &= \int_0^1 \frac{2(1-r^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f * \mu_r r^{Q-1} dr \\ &= \left[\frac{2(1-r^2)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \frac{1}{-2r} f * \mu_r r^{Q-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2(1-r^2)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \partial_r \left(\frac{1}{-2r} f * \mu_r r^{Q-1} \right) dr \, . \end{aligned}$$

Le crochet est nul (on a supposé $Q \geq 3$). En utilisant l'équation fonctionnelle (5.1) pour Γ, l'opérateur A^α coïncide avec $A^{\alpha,1}$ qui a un sens pour $\Re\alpha > -1$.

Si à l'ordre h, l'opérateur A^α coïncide avec $A^{\alpha,h}$, alors effectuons une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^1 m^{\alpha+h}(r) D_r^h . \left[f * \mu_r r^{Q-1} \right] dr &= \int_0^1 \frac{2(1-r^2)^{\alpha+h-1}}{\Gamma(\alpha+h)} D_r^h . \left[f * \mu_r r^{Q-1} \right] dr \\ = \left[\frac{2(1-r^2)^{\alpha+h}}{(\alpha+h)\Gamma(\alpha+h)} \frac{1}{-2r} D_r^h . \left[f * \mu_r r^{Q-1} \right] \right]_0^1 \\ - \int_0^1 \frac{2(1-r^2)^{\alpha+h}}{(\alpha+h)\Gamma(\alpha+h)} \partial_r . \left[\frac{1}{-2r} D_r^h . \left[f * \mu_r r^{Q-1} \right] \right] dr \end{aligned}$$

Le crochet en $r = 1$ est nul. D'après le lemme 2.8, on peut mettre $r^{Q-1-2h-1}$ en facteur et donc le crochet en $r = 0$ est nul. En utilisant l'équation fonctionnelle (5.1) pour Γ et la définition de D_r, l'opérateur A^α coïncide avec $A^{\alpha,h+1}$.

On a donc montré par récurence $A^\alpha = A^{\alpha,h}$ lorsque $\Re\alpha > 1-h$, pour tout $0 \leq h < (Q-2)/2$.

Grâce aux lemmes 2.8 et 2.9, en développant $D_r^h . \left[f * \mu_r r^{Q-1} \right]$ dans l'écriture $A^\alpha = A^{\alpha,h}$, on obtient :

Corollaire 2.10 ($B_{h,j}^\alpha$)
Pour $\Re\alpha > 1-h$ et $1 \leq h < (Q-2)/2$, l'opérateur A^α coïncide avec une combinaison linéaire sur $0 \leq j \leq h$ des opérateurs suivants :

$$B_{h,j}^\alpha := f \longmapsto \int_0^1 m^{\alpha+h}(r) r^{Q-1-2h+j} \partial_r^j f * \mu_r dr \quad .$$

2.2.2 Inégalités maximales pour A^α

Nous donnons le sens suivant à la notion de dilatation :
- pour une fonction f sur N :

$$(f)_r(n) = r^{-Q} f(\frac{1}{r}.n) \quad ,$$

- pour une mesure ν sur N :

$$\nu_r(n) = \nu(r.n) \quad \text{et donc} \quad \int_N f d\nu_r = \int_N f(r.n) d\nu(n) \quad ,$$

- pour un opérateur T qui opère sur un espace de fonctions stables par dilatations au sens ci-dessus :

$$T_r.f(n) = (T\, f(r.))\,(r^{-1}.n) \quad \text{où} \quad f(r.) = n \mapsto f(r.n) \quad .$$

Ces notations sont cohérentes dans le sens où : si T est un opérateur de convolution avec une fonction ou une mesure ψ, alors T_r est un opérateur de convolution avec la fonction ou la mesure ψ_r respectivement.

Pour un opérateur T qui opère sur un espace de fonctions stables par dilatation, on peut ainsi considérer la **fonction maximale associée à la famille de ses dilatées $T_r, r > 0$** : $\sup_{r>0} |T_r|$.

On définit $\mathcal{A}^\alpha$ la fonction maximale associée aux dilatés de A^α : $\mathcal{A}^\alpha := \sup_r |A^\alpha_r|$, et $\mathcal{B}^\alpha_{h,j}$ la fonction maximale associée aux dilatés de B^α : $\mathcal{B}^\alpha_{h,j} := \sup_r |(B^\alpha_{h,j})_r|$.

Nous souhaitons montrer des inégalités maximales L^2 et L^p :

Proposition 2.11 ($\|\mathcal{A}\|_{p\to p}$, $\Re\alpha \geq 1$)
On a un contrôle maximal L^p pour A^α :

$$\begin{gathered}\forall [a,b] \subset [1,\infty[\quad \forall p \in]1,\infty] \quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{S}(N) \\ \|\mathcal{A}^{x+iy}.f\|_{L^p(N)} \leq C\, e^{2y} \, \|f\|_{L^p(N)} \quad .\end{gathered}$$

Proposition 2.12 ($\|\mathcal{A}\|_{2\to 2}$, $\Re\alpha < 0$)
Soit $1 \leq h < (Q-2)/2$. Si on a un contrôle L^2 des fonctions d'aires $S^j, j = 1, \ldots, h$:

$$\forall j = 1, \ldots h \quad \exists C > 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(N) \qquad \left\|S^j(f)\right\| \leq C\, \|f\|$$

alors on a un contrôle maximal L^2 pour A^α :

$$\begin{gathered}\forall [a,b] \subset [1-h,\infty[\quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{S}(N) \\ \|\mathcal{A}^{x+iy}.f\|_{L^2(N)} \leq C\, e^{2y} \, \|f\|_{L^2(N)} \quad .\end{gathered}$$

La preuve de la proposition 2.11 repose sur le corollaire 1.1.

Démonstration de la proposition 2.11: On a :

$$|A^\alpha.f| = |f * F^\alpha| \leq |f| * |F^\alpha| \quad .$$

et :

$$|F^\alpha(n)| = |\frac{(1-|n|^2)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}| \leq \frac{(1-|n|^2)_+^{\Re\alpha-1}}{|\Gamma(\alpha)|} = |\frac{\Gamma(\Re\alpha)}{\Gamma(\alpha)}| F^{\Re\alpha}(n) \quad .$$

On en déduit localement en $x = \Re\alpha$, uniformément en $y = \Im\alpha$, grâce à la majoration (5.3) :

$$|A^\alpha.f| \leq |\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(\alpha)}||f| * F^x \leq |\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(\alpha)}| A^x.|f| \leq C\, e^{2y} A^x.|f| \quad ,$$

C étant une constante issue de la majoration (5.3). D'après le lemme 2.6, la fonction F^x vérifie les hypothèses du corollaire 1.1 : l'opérateur $\mathcal{A}^x$ vérifie une inégalité L^p. On obtient la majoration voulue de $\|\mathcal{A}^\alpha.f\|_{L^p}$, pour tout $1 < p \leq \infty$.

La proposition 2.12 repose sur le corollaire 2.10 et les deux lemmes suivants :

Lemme 2.13
Pour $0 < j \leq h < (Q-2)/2$, on a un contrôle ponctuel des $\mathcal{B}^\alpha_{h,j}$ par les fonctions d'aires S^j :

$$\forall [a,b] \subset [\tfrac{1}{2} - h, \infty[\quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{S}(N)$$
$$|\mathcal{B}^{x+iy}_{h,j}.f| \leq C\, e^{2y} S^j(f) \quad .$$

Lemme 2.14
Pour $1 \leq h < (Q-2)/2$, on a un contrôle L^2 de $\mathcal{B}^\alpha_{h,0}$:

$$\forall [a,b] \subset [1 - h, \infty[\quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{S}(N)$$
$$\left\|\mathcal{B}^{x+iy}_{h,0}.f\right\| \leq C\, e^{2y} \left\|f\right\| \quad .$$

La proposition 2.12 sera donc démontrée lorsque l'on aura prouvé ces deux lemmes.

Démonstration du lemme 2.13: Pour $f \in \mathcal{S}(N)$ et $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_r \left[f(t.) * \mu_r(t^{-1}n)\right] &= \partial_r \int_{r.S_1} f(t(t^{-1}n\, n'^{-1}) d\mu_r(n') \\
&= \partial_r \int_{r.S_1} f(n\, tn'^{-1}) d\mu_r(n') = \partial_r \int_{S_1} f(n\, rtn'^{-1}) d\mu(n') \\
&= t\partial_{r'} \left[\int_{S_1} f(n\, r'n'^{-1}) d\mu(n')\right]_{|r'=rt} = t\left[\partial_{r'}\left[f * \mu_{r'}(n)\right]\right]_{|r'=rt} \quad ,
\end{aligned}$$

puis par récurence, pour $h \geq 1$:

$$\partial_r^h \left[f(t.) * \mu_r(t^{-1}n)\right] = t^h \left[\partial_{r'}^h \left[f * \mu_{r'}(n)\right]\right]_{|r'=rt} \quad ,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
(B^\alpha_{h,j})_t.f &= \int_0^1 m^{\alpha+h}(r)r^{Q-1-2h+j}t^j[\partial^j_{r'}f*\mu_{r'}]_{|r'=rt}dr \quad ,\\
|(B^\alpha_{h,j})_t.f|^2 &\leq \int_0^1 |r^{j-\frac12}t^j[\partial^j_{r'}f*\mu_{r'}]_{|r'=rt}|^2dr\int_0^1|m^{\alpha+h}(r)r^{Q-1-2h+\frac12}|^2dr \quad , \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

par Hölder. On pose $\alpha = x+iy$. La seconde intégrale du membre de droite de (2.3) est majorée par :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |m^{\alpha+h}(r)r^{Q-1-2h+\frac12}|^2dr &\leq \int_0^1 \frac{4(1-r^2)^{2(x+h-1)}}{|\Gamma(\alpha+h)|^2}r^{2Q-1-4h}dr\\
= \frac{4}{|\Gamma(\alpha+h)|^2}\int_0^1 (1-r')^{2(x+h-1)}r'^{Q-1-2h}\frac{dr'}{2} &= 2\frac{\Gamma(2x+2h-1)\Gamma(Q-2h)}{\Gamma(2x+Q-1)|\Gamma(\alpha+h)|^2}
\end{aligned}$$

grâce à (5.2) lorsque $2x+2h-1, Q-2h>0$. En utilisant l'estimation (5.3), lorsque $h<Q/2$, le terme précédent est majoré à une constante près localement en $x>-h+\frac12$ et $x>-(Q-1)/2$ uniformément en $y\in\mathbb{R}$ par : e^{4y}.

Pour la première intégrale du membre de droite de l'inégalité (2.3), effectuons le changement de variable $r'=rt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |r^{j-\frac12}t^j[\partial^j_{r'}f*\mu_{r'}]_{|r'=rt}|^2dr &= \int_0^t |(\frac{r'}{t})^{j-\frac12}t^j\partial^j_{r'}f*\mu_{r'}|^2\frac{dr'}{t}\\
&\leq \int_0^\infty |\partial^j_{r'}f*\mu_{r'}|^2 r'^{2j-1}dr' = S^j(f)^2 \quad .
\end{aligned}$$

Passons à la preuve du lemme 2.14 ; elle repose sur le corollaire 1.1.

Démonstration du lemme 2.14: $B^\alpha_{h,0}$ est un opérateur de convolution avec la fonction G^α_h donnée par : $G^\alpha_h(n) := F^{\alpha+h}(n)|n|^{-2h}$. En effet, grâce à la formule (1.1), le passage en coordonnées polaires donne :

$$B^\alpha_{h,0}.f(n) = \int_0^1 m^{\alpha+h}(r)r^{Q-1-2h}f*\mu_r(n)dr = f*G^\alpha_h(n) \quad .$$

On note $\alpha = x+iy$ et on a :

$$|G^\alpha_h(n)| \leq \frac{\Gamma(x+h)}{|\Gamma(\alpha+h)|}F^{x+h}(n)|n|^{-2h} = \frac{\Gamma(x+h)}{|\Gamma(\alpha+h)|}G^{x+h}(n) \leq C\,e^{2y}G^x_h(n) \quad ,$$

le dernière majoration étant due à (5.3), d'où localement en x :

$$|B^\alpha_{h,0}.f| \leq |f|*|G^\alpha_h| \leq C\,e^{2y}B^x_{h,0}.|f| \quad . \qquad (2.4)$$

Pour $Q-1-2h > -1$, elle est intégrable :

$$\int_N G_h^x(n')dn' = \int_0^1 \frac{(1-r^2)^{\alpha+h-1}}{\Gamma(x+h)} r^{Q-1-2h} dr \quad .$$

Ainsi, localement en x tel que $x+h-1>0$ et pour $h<Q/2$, la fonction G_h^x vérifie les hypothèses du corollaire 1.1 ; on en déduit que l'opérateur $B_{h,0}^x$ vérifie une inégalité maximale L^p pour tout $1<p\leq\infty$ en particulier L^2. Avec la majoration (2.4), on en déduit le lemme 2.14.

2.2.3 Interpolation

On achève ici la démonstration du théorème 2.2.b). On suppose comme dans les hypothèses du théorème, $h>1$ et que chaque fonction d'aire $S^j, j=1,\dots,h$ vérifie une inégalité L^2.

Linéarisation. Fixons momentanément $r(.) : (N,dn) \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. Pour $z\in\mathbb{C}$ dans la bande $0\leq \Re z\leq 1$, on définit l'opérateur T^z sur les fonctions simples de N :

$$T^z.f(n) = e^{z^2} A_{r(n)}^{\alpha(z)}.f(n) \quad ,$$

où on a noté $\alpha(z) = z + (1-z)x_1$ avec $0 > x_1 > 1-h$ fixé.

On a la majoration ponctuelle de $T^z.f$ grâce à la fonction maximale sphérique :

$$\forall f \qquad \forall z \in \mathbb{C}, 0\leq \Re z \leq 1 \qquad |T^z.f| \leq e^{-(\Im z)^2} \mathcal{A}^{\alpha(z)}.f \quad .$$

D'après les propositions 2.11 et 2.12, l'opérateur T^z vérifie :
- lorsque $\Re z = 1$, une inégalité L^p avec $1<p\leq\infty$,
- lorsque $\Re z = 0$, une inégalité L^2.

Interpolation. Grâce à la nouvelle famille d'opérateurs $\{T^z\}_{0\leq\Re z\leq 1}$ est une famille analytique d'opérateurs admissible au sens de [SW71]. On interpole en z_0 tel que $\alpha(z_0)=0$. L'opérateur T^{z_0} vérifie donc une inégalité L^q où le paramètre q est tel que :

$$\frac{1}{q} = \frac{1-z_0}{2} + \frac{z_0}{p} \quad \text{et} \quad 1<p\leq\infty \quad . \tag{2.5}$$

La constante de cette inégalité L^q ne dépend que de N et des constantes des inégalités obtenues pour $\mathcal{A}^\alpha$ (propositions 2.11 et 2.12). Elle est en particulier indépendante du choix de $r(.)$.

Fin de la démonstration du théorème 2.2.b) On peut donc "repasser au supremum" : l'opérateur $e^{z_0^2}\mathcal{A}^{\alpha(z_0)}$ vérifie la même inégalité L^q, et ce pour tout q tel que (2.5) avec $z_0 = \frac{x_1}{x_1-1} \in [0,(h-1)/h]$ (car $1-h<x_1<0$). Par conséquent, la fonction maximale sphérique $\mathcal{A}$ vérifie à une constante près une inégalité L^q pour $(2h)/(2h-1) < q \leq 2$.

D'après la partie a) déjà démontrée, la fonction maximale sphérique $\mathcal{A}$ satisfait également une inégalité L^q pour $2\leq q\leq\infty$. Le théorème 2.2 est ainsi complètement démontré.

2.3 Fonctions d'aire pour un groupe de type H

Le but de cette section est de démontrer le théorème 2.3.a). Nous montrerons la partie b) correspondant à $N_{v,2}$ dans la section 4.1.

Comme dans le chapitre 1, on note Ω l'ensemble des fonctions sphériques bornées de N pour $O(v)$. On pose pour $\omega \in \Omega$:

$$\hat{S}^j(\omega) := \sqrt{\int_0^\infty |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2 s^{2j-1} ds} \quad .$$

Le théorème 2.3.a) sera démontré une fois que l'on aura démontré les deux propositions suivantes :

Proposition 2.15 (S^j et $\hat{S}^j$)
Pour $j \in \mathbb{N} - \{0\}$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \hat{S}^j(\omega) \leq C \quad ,$$

alors

$$\forall f \in L^2(N) \qquad \|S(f)\| \leq C \, \|f\| \quad ,$$

Au cours de la preuve, on utilisera une mesure spectrale E sur Ω, qui nous amènera à estimer $\hat{S}^j$ sur Ω tout entier. On pourrait donner une expression explicite de E, grâce à une formule de Plancherel non radiale, “adaptée aux fonctions sphériques” dans le sens de [BJR90, theorem G] dans le cas d'une “vraie” paire de Gelfand. On peut par exemple choisir la formule donnée par les représentations de Bargmann ou de Schrödinger. Nous utiliserons cette autre méthode sur le groupe nilpotent libre à deux pas.

Proposition 2.16 ($\left\|\hat{S}^j\right\|_\infty$)
Si $v' \geq 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall j = 1, \ldots, v' - 1 \quad \forall \omega \in \Omega \qquad \hat{S}^j(\omega) \leq C \quad .$$

2.3.1 Fonction d'aire et mesure spectrale

Cette sous-section est consacrée à la preuve de la proposition 2.15. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.17
On note End $L^2(N)$ les endomorphismes continus de l'espace de Hilbert $L^2(N)$.

Il existe une mesure spectrale E pour l'algèbre commutative $L^{1\natural}$ à valeur dans End $L^2(N)$ telle que :

$$\forall F \in L^{1\natural} \quad \forall f, g \in L^2(N) \qquad < f * F, g >= \int_\Omega < F, \omega > dE_{f,g}(\omega) \quad . \tag{2.6}$$

On a :

$$\left\|\partial_s^j(f*\mu_s)\right\|^2 \leq \int_\Omega |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2 dE_f(\omega) \quad . \tag{2.7}$$

Lorsqu'on admet la proposition ci-dessus, la démonstration de la proposition 2.15 est aisée.

Démonstration de la proposition 2.15: Grâce à Fubini, puis à (2.7), et enfin de nouveau par Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \left\|S^j(f)\right\|^2 &= \int_0^\infty \left\|\partial_s^j f * \mu_s\right\|^2 s^{2j-1} ds \\ &\leq \int_0^\infty \int_\Omega |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2 dE_f(\omega) s^{2j-1} ds = \int_\Omega |\hat{S}^j(\omega)|^2 dE_f(\omega) \quad . \end{aligned}$$

Donc si $\hat{S}^j(\omega)$ est borné par C indépendemment de $\omega \in \Omega$, alors, $\left\|S^j(f)\right\|^2$ est borné par C^2 multiplié par

$$\int_\Omega dE_f(\omega) \leq \|f\|^2 \quad .$$

Remarque 5 *Comme c'était déjà le cas dans [Nev94, Nev97, MNS00, NS97], nous avons besoin d'une estimation L^∞ de $\hat{S}^j$ sur tout le spectre Ω. Nous pourrions nous passer de l'estimations de $\hat{S}^j$ sur la partie Ω_B en utilisant une formule de Plancherel non-radiale adaptée. Dans le cas d'un groupe de type H, ces deux méthodes conduisent au même résultat.*

Démonstration de la proposition 2.17

On utilisera le lemme suivant, qui construit une approximation de l'unité radiale :

Lemme 2.18
Il existe une fonction $\phi : N \mapsto [0,1]$, C^∞, radiale, à support dans la boule unité B_1, vérifiant $\int_N \phi(n)dn = 1$.

Pour une telle fonction ϕ, on définit alors pour $\eta > 0$ les fonctions ϕ_η par :

$$\phi_\eta(n) := \eta^{-Q}\phi(\eta^{-1}.n) \ , \quad n \in N \quad .$$

Les fonctions $\phi_\eta, \eta > 0$ forment une approximation radiale de l'unité sur N.

Démonstration du lemme 2.18: Il existe $\phi_1 : N \mapsto [0,1]$ une fonction C^∞, à support dans la boule unité B_1, et telle que $\phi_1(0) = 1$. On définit :

$$\phi_2(n) = \int_{O(v)} \phi_1(k.n)dk \quad \text{puis} \quad \phi(n) = \frac{\phi_2(n)}{\int_N \phi_2(n)dn} \quad .$$

La fonction ϕ ainsi définie convient.

Démontrons la première partie de la proposition 2.17, c'est-à-dire l'existence d'une mesure spectrale E satisfaisant (2.6). Considérons le morphisme d'algèbre :

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(N) & \longrightarrow & \mathrm{End}\ L^2(N) \\ F & \longmapsto & \{\Pi(F) : f \mapsto f * F\} \end{array} \right. .$$

Notons C l'adhérence de $\Pi L^{1\natural}$ dans l'algèbre normée End $L^2(N), \|.\|$ par la norme des opérateurs. Comme d'une part Π est un morphisme continu d'algèbres normées et que d'autre part d'après le théorème 1.13, l'algèbre de convolution $L^{1\natural}$ est commutative, l'ensemble C est une sous-algèbre commutative de End $L^2(N), \|.\|$. De plus l'algèbre C est aussi normale :

$$(\Pi(F))^* = \Pi(F^*) \quad \text{où} \quad F \in L^1(N) \quad \text{en notant} \quad F^*(n) = \bar{F}(n^{-1}) \quad . \tag{2.8}$$

D'après les propriétés spectrales des C^*-algèbre commutatives (voir par exemple [Rud73]), l'algèbre C admet un mesure spectrale $E^\Pi : Sp(C) \to \mathcal{P}$, où on a noté $Sp(C)$ le spectre de l'algèbre C et $\mathcal{P}$ l'ensemble des projections continues de $L^2(N)$:

$$\forall T \in C, \qquad T = \int_{Sp(C)} \widehat{T} dE^\Pi \quad .$$

On définit l'application :

$$\Pi' : \left\{ \begin{array}{ccc} Sp(C) & \longrightarrow & Sp(L^{1\natural}) \\ \Lambda & \longmapsto & \Lambda \circ \Pi \end{array} \right. .$$

On en déduit une mesure spectrale E du spectre de $L^{1\natural}$, identifié à Ω par le théorème 1.9 en posant :

$$E = \Pi^* E^\Pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ B & \longmapsto & E^\Pi(\Pi'^{-1}(B)) \end{array} \right. ,$$

où $\mathcal{B}(\Omega)$ désigne les boréliens sur Ω. Cette mesure spectrale vérifie bien la propriété (2.6).

Démontrons la seconde partie de la proposition 2.17, c'est-à-dire l'inégalité (2.7). Fixons une approximation radiale de l'unité $\phi_\eta, \eta > 0$ comme dans le lemme 2.18.

Nous allons appliquer la formule (2.6) à la fonction $F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}$ où $F_{s,\eta,j} = \partial^j_s(\phi_\eta * \mu_s)$ et la fonction $F^*_{s,\eta,j}$ est donné par (2.8). On vérifie facilement que la fonction $F_{s,\eta,j}$ est radiale car μ_s et ϕ_η le sont, puis qu'elle est intégrable :

$$\begin{aligned} \phi_\eta * \mu_s(n) &= \int_{s.S_1} \phi_\eta(ng^{-1}) d\mu_s(g) = \int_{S_1} \phi_\eta(n\, s.g^{-1}) d\mu(g) \quad , \\ \partial^j_s(\phi_\eta * \mu_s)(n) &= \int_{S_1} \partial^j_s \phi_\eta(n\, s.g^{-1}) d\mu(g) \quad , \\ |\partial^j_s(\phi_\eta * \mu_s)|(n) &\leq \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si}\, sg^{-1} \notin \eta.B_1 \, , \\ \int_{S_1} \sup |D^j \phi_\eta| 1_{\eta.B_1}(n\, s.g^{-1}) d\mu(g) & \text{si}\, sg^{-1} \in \eta.B_1 \, . \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\int_N |F_{s,\eta,j}(n)|dn = \int_N |\partial_s^j(\phi_\eta * \mu_s)|(n)dn \leq \eta^{-Q+j} \sup |D\phi||\eta.B_1| \leq \eta^j|B_1| \sup |D\phi| \quad .$$

d'où $F_{s,\eta,j} \in L^{1\natural}$, puis $F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j} \in L^{1\natural}$. Appliquons (2.6) à cette dernière fonction :

$$\forall f \in L^2(N) \qquad < f * F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}, f >_{L^2(N)} = \int_{\omega\in\Omega} < F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}), \omega > dE_f(\omega) \quad , \tag{2.9}$$

Or on voit pour le membre de gauche de cette égalité, d'après (2.8) :

$$\begin{aligned} < f * F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}, f > &= < \Pi(F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}).f, f > \\ &= < \Pi(F_{s,\eta,j}).f, \Pi(F_{s,\eta,j}).f > = \|\Pi(F_{s,\eta,j}).f\|^2 \\ &= \|\partial_s(f * \phi_\eta * \mu_s)\|^2 = \|\phi_\eta * \partial_s(f * \mu_s)\|^2 \quad , \end{aligned}$$

et pour le membre de droite comme $< ., \omega >$ est un caractère de $L^{1\natural}$:

$$< F^*_{s,\eta,j} * F_{s,\eta,j}, \omega > = | < F_{s,\eta,j}, \omega > |^2 = |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2| < \phi_\eta, \omega > |^2 \quad .$$

L'égalité (2.9) devient donc :

$$\left\|\phi_\eta * \partial_s^j(f * \mu_s)\right\|^2 = \int_\Omega |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2| < \phi_\eta, \omega > |^2 dE_f(\omega) \quad .$$

Maintenant comme la fonction ω est bornée par 1, et que l'intégrale de ϕ_η vaut 1, on a $| < \phi_\eta, \omega > | \leq 1$, et le membre de droite de l'égalité précédente est majorée par

$$\int_\Omega |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2 dE_f(\omega) \quad ;$$

et comme $\phi_\eta, \eta > 0$ est une approximation de l'unité, le membre de droite tend vers $\|\partial_s^j(f * \mu_s)\|^2$ lorsque η tend vers 0. On en déduit la majoration (2.7).

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.17.

2.3.2 Contrôle L^∞ de $\hat{S}^j$ dans le cas d'un groupe de type H

Cette sous-section est consacrée à la preuve de la proposition 2.16 dans le cas d'un groupe de type H.

Nous aurons besoin du lemme technique :

Lemme 2.19 (Dérivée d'une fonction de s^2)
Soit f est une fonction régulière et $h \in \mathbb{N}$. On pose $g(s) = f(s^2)$.
$g^{(h)}$ s'écrit comme combinaisons linéaires de $s^{d(j,h)} f^{(h'+j)}(s^2)$,
– où $d(j,h) = 2j$, sur $0 \leq j \leq h'$, si $h = 2h'$,
– où $d(j,h) = 2j + 1$, sur $0 \leq j \leq h' - 1$, si $h = 2h' - 1$.

On remarque :

$$d(j,h) + h = 2h' + 2j \quad . \tag{2.10}$$

Nous supposons dans cette section $v' \geq 2$. Dans le cas d'un groupe de type H, comme $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_B$, la proposition 2.16 est équivalente aux deux propositions suivantes :

Proposition 2.20
Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall h = 1, \ldots, v' - 1 \quad \forall \omega \in \Omega_B \quad \hat{S}^h(\omega) \leq C \quad .$$

Proposition 2.21
Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall h = 1, \ldots, v' - 1 \quad \forall \omega \in \Omega_L \quad \hat{S}^h(\omega) \leq C \quad .$$

Démonstration de la proposition 2.20: Soit $\omega = \Phi_r$. On a pour $n = (X, Z) \in N$:

$$\begin{aligned} \omega(s.n) &= \Phi_r(sX, s^2 Z) = \mathcal{J}_{v'-1}(rs|X|) \quad , \\ \partial_s^h \omega(s.n) &= (r|X|)^h \mathcal{J}_{v'-1}^{(h)}(rs|X|) \quad , \end{aligned}$$

d'où :

$$|\hat{S}^h(\omega)|^2 \leq \int_0^\infty s^{2h-1} \int_{S_1} |(r|X|)^h \mathcal{J}_{v'-1}^{(h)}(rs|X|)|^2 d\mu(X, Z) ds \quad ;$$

par le changement de variable $s' = rs|X|$, cette dernière intégrale vaut :

$$\int_{S_1} \int_0^\infty s'^{2h-1} |\mathcal{J}_{v'-1}^{(h)}(s')|^2 ds' d\mu(X, Z) = |\mu| \int_0^\infty s'^{2h-1} |\mathcal{J}_{v'-1}^{(h)}(s')|^2 ds' \quad ,$$

qui est finie d'après le lemme 5.1, lorsque $-1 < 2h - 1 < 2(v' - 1)$.

Démonstration de la proposition 2.21: Soit $\omega = \Phi_{\zeta,l}$. Ici, on a $\omega(s.n) = \Phi_{s^2\zeta,l}(n)$; avec les notations du lemme 2.19, $\partial_s^h \omega(s.n)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de : $s^{d(j,h)} f^{(h'+j)}(s^2)$ où

$$f(s) := \Phi_{s\zeta,l}(n) = e^{is<\zeta,Z>} \bar{\mathcal{L}}_{l,v'-1}(\frac{1}{2} s|\zeta||X|^2) \quad \text{et} \quad n = (X, Z) \in N \quad .$$

Calculons les dérivées de cette dernière fonction :

$$\partial_s^j f(s) = \sum_{m=0}^{j} C_j^m < \zeta, Z >^{j-m} (\frac{1}{2}|\zeta||X|^2)^m \bar{\mathcal{L}}_{l,v'-1}^{(m)}(\frac{1}{2} s|\zeta||X|^2) \quad e^{is<\zeta,Z>}$$

et donc le terme $|\partial_s^j f(s)|$ est majoré à une constante (de j) près par :

$$|\zeta|^j \sum_{m=0}^{j} |Z|^{j-m} |X|^{2m} |\bar{\mathcal{L}}_{l,v'-1}^{(m)}(\frac{s}{2}|\zeta||X|^2)| \quad .$$

Grâce à cette majoration, l'expression $|\hat{S}^h(\omega)|^2$ est ainsi majorée à une constante (de h) près par le maximum sur $0 \leq j \leq h/2$ et $0 \leq m \leq h'+j$ de :

$$\begin{aligned} I(j,h,l,m) &:= \int_0^\infty \left(\int_{S_1} s^{d(j,h)} |\zeta|^{h'+j} |Z|^{h'+j-m} |X|^{2m} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(\frac{s^2}{2}|\zeta||X|^2)| d\mu(X,Z) \right)^2 s^{2h-1} ds \\ &= \int_0^\infty |\zeta|^{2(h'+j)} \left(\int_{S_1} |Z|^{h'+j-m} |X|^{2m} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(\frac{s^2}{2}|\zeta||X|^2)| d\mu(X,Z) \right)^2 s^{4(h'+j)-1} ds \quad , \end{aligned}$$

grâce à (2.10).

Utilisons l'expression de μ donnée dans la proposition 2.7 dans ce qui suit :

$$\int_{S_1} |Z|^{h'+j-m} |X|^{2m} |\bar{\mathcal{L}}^{(l)}_{l,v'-1}(s')| d\mu(X,Z) \leq \int_0^1 r^{2m} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(s')| (1-r^4)^{\frac{w-2}{2}} r^{v-1} dr \quad ,$$

et donc par Hölder :

$$\begin{aligned} &\left(\int_{S_1} |Z|^{h'+j-m} |X|^{2m} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(s')| d\mu(X,Z) \right)^2 \\ &\leq \int_0^1 (1-r^4)^{-\frac{1}{2}} dr \int_0^1 |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(s')|^2 r^{2(2m+v-1)} (1-r^4)^{w-\frac{3}{2}} dr \quad , \end{aligned}$$

L'intégrale $I(j,h,l,m)$ est donc majorée à une constante près par :

$$\int_0^\infty |\zeta|^{2(h'+j)} \int_0^1 |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(\frac{s^2}{2}|\zeta|r^2)|^2 r^{2(2m+v-1)} (1-r^4)^{w-\frac{3}{2}} dr s^{4(j+h')-1} ds \quad ;$$

cette dernière intégrale est égale par Fubini et le changement de variable $s' = \frac{s^2}{2}|\zeta|r^2$ à :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^\infty |\zeta|^{2(h'+j)-1} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(s')|^2 \left(\frac{2s'}{|\zeta|r^2} \right)^{2(j+h')-1} \frac{ds'}{|\zeta|r^2} r^{2(2m+v-1)} (1-r^4)^{w-\frac{3}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^{2(-2(j+h')+2m+v-1)} (1-r^4)^{w-\frac{3}{2}} dr \int_0^\infty |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,v'-1}(s')|^2 (2s')^{2(j+h')-1} ds' \quad . \end{aligned}$$

La première intégrale ci-dessus est bien finie car $-2(j+h')+2l+v-1 \geq -2h+v-1 > -\frac{1}{2}$ lorsque $h \leq v'-1$. D'après le lemme 5.5 la seconde est finie tant que $j+h' \leq v'-1$, donc tant que $h \leq v'-1$.

Chapitre 3

Transformée de Fourier radiale pour $N_{v,2}$

Dans ce chapitre, nous explicitons les fonctions sphériques bornées du groupe nilpotent libre à 2 pas et à v générateurs noté $N_{v,2}$, et la mesure de Plancherel associée.

Notations. On convient dans cette section d'identifier par la base canonique les éléments de $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}^*$ à des matrices antisymétriques. On associe à un élément $\Lambda^* \in \overline{\mathcal{L}}$, $v_0 \in \mathbb{N}$, et si $\Lambda^* \neq 0$, $v_1 \in \mathbb{N}$, le multi-indice d'entier $m \in \mathbb{N}^{v_1}$ et le v_1-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{v_1}) \in \mathbb{R}^{v_1}$ de la manière suivante :

- l'entier v_0 est tel que $\lambda^*_{v_0} > 0$ et $\lambda^*_{v_0+1} = 0$: c'est le nombre de λ^*_i non nuls ;
- v_1 est le nombre de λ^*_i non nuls distincts, et les λ_j sont les λ^*_i non nuls et distincts, ordonnés de façon strictement décroissante :

$$\{\lambda^*_1 \geq \ldots \geq \lambda^*_{v_0} > 0\} = \{\lambda_1 > \ldots > \lambda_{v_1} > 0\} \quad ;$$

- pour $j = 1, \ldots, v_1$, m_j est le nombre de paramètres λ^*_i égaux à λ_j ; on définit également :

$$m_0 := m'_0 := 0 \qquad \text{et} \qquad m'_j := \sum_{i=1}^{j} m_i \,, \quad j = 1, \ldots v_1 \quad ;$$

  on a $m'_{v_1} := m_1 + \ldots + m_{v_1 - 1} + m_{v_1} = v_0$.

Si $\Lambda^* \neq 0$, on peut donc mettre la matrice antisymétrique $D_2(\Lambda^*)$ sous la forme (pour les notations voir les sous-sections 5.2.1 et 5.2.2) :

$$D_2(\Lambda^*) = \begin{bmatrix} \lambda^*_1 J & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & \lambda^*_{v'} J & \\ & & & (0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 J_{m_1} & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & \lambda_{v_1} J_{m_{v_1}} & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right] .$$

On convient de noter :

– $\mathcal{Q}$ l'ensemble des $(r^*, \Lambda^*) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{L}}$ vérifiant $r^* = 0$ si $2v_0 = v$,
– $\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha}$ la fonction de Laguerre normalisée (voir section 5.1.3),
– pr_j la projection sur l'espace vectoriel engendré par les $2m_j$ vecteurs

$$X_{2i-1}\,,\ X_{2i}\,,\quad m'_{j-1} < i \leq m'_j \quad .$$

Avec ces notations, nous redonnons maintenant l'énoncé du théorème 2 :

Théorème principal 3.1 (Fonctions sphériques bornées pour $N_{v,2}, O(v)$)
Les paramètres des fonctions sphériques bornées sont $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$, puis le multi-indice $l \in \mathbb{N}^{v_1}$ si $\Lambda^* \neq 0$, $\emptyset$ sinon.

Avec ces paramètres, les fonctions sphériques bornées pour $N_{v,2}, O(v)$ sont données par :
Si $\Lambda^* \neq 0$

$$\phi^{r^*,\Lambda^*,l}(n) \;=\; \int_{O(v)} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(k.n)dk, \quad n \in N_{v,2} \quad ,$$

où $\Theta^{r^*,\Lambda^*,l}$ est la fonction donnée pour $n = \exp(X + A) \in N_{v,2}$ par :

$$\Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(n) \;=\; e^{ir^*<X_v^*,X>} e^{i<D_2(\Lambda^*),A>} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j,m_j-1}(\frac{\lambda_j}{2}|\mathrm{pr}_j(X)|^2) \quad ,$$

où on a noté dk la mesure de Haar de masse 1 du groupe $O(v)$.
Si $\Lambda^* = 0$

$$\phi^{r^*,0}(n) \;=\; \int_{O(v)} e^{ir^*<X_v^*,k.X>}dk, \quad n = \exp(X + A) \in N_{v,2} \quad .$$

On trouve aussi les fonctions sphériques pour $N_{v,2}, SO(v)$:

Théorème principal 3.2 (Fonctions sphériques bornées pour $N_{v,2}, SO(v)$)
Les paramètres des fonctions sphériques bornées sont $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$, ainsi que si $\Lambda^* \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$ et le multi-indice $l \in \mathbb{N}^{v_1}$.

Avec ces paramètres, les fonctions sphériques bornées pour $N_{v,2}, SO(v)$ sont données par :
Si $\Lambda^* \neq 0$

$$\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}(n) \;=\; \int_{SO(v)} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}(k.n)dk, \quad n \in N_{v,2} \quad ,$$

où on a noté dk la mesure de Haar de masse 1 du groupe $SO(v)$, et $\Theta^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ la fonction donnée pour $n = \exp(X + A) \in N_{v,2}$ par :

$$\Theta^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}(n) \;=\; e^{ir^*<X_v^*,X>} e^{i<D_2^\epsilon(\Lambda^*),A>} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j,m_j-1}(\frac{\lambda_j}{2}|\mathrm{pr}_j(X)|^2) \quad .$$

Si $\Lambda^* = 0$

$$\phi^{r^*,0}(n) \;=\; \int_{SO(v)} e^{ir^*<X_v^*,k.X>}dk, \quad n = \exp(X + A) \in N_{v,2} \quad .$$

Pour les deux théorèmes précédents, dans le cas $\Lambda^* = 0$, on retrouve les fonctions de Bessel "comme dans le cas des groupes de Heisenberg et des groupes de type H" (lemme 5.2) :

$$\phi^{r^*,0}(\exp(X + A)) = \mathcal{J}_{\frac{v-2}{2}}(r^*|X|) \quad ,$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathcal{V}$ pour la base canonique des générateurs. Si de plus, $r^* = 0$, on trouve la fonction constante 1.

3.1 Expression des fonctions sphériques bornées

Le but de cette section est de démontrer les deux théorèmes précédents, c'est-à-dire de donner les expressions des fonctions sphériques bornées de la paire de Guelfand

$$N = N_{v,2} \ , \ K = O(v) \text{ ou } SO(v) \ , \qquad \text{ou encore} \qquad G = K \lhd N \ , \ K \quad .$$

Nous convenons dans cette section que le terme "fonction sphérique" signifie "fonction sphérique bornée" ou encore "fonction sphérique de type positif" (théorème 1.16b).

Pour $\rho \in \hat{N}$, on note :

- G_ρ et K_ρ les groupes de stabilité de la classe de ρ sous G et K respectivement,
- $\check{G}_\rho$ l'ensemble des classe de représentations $\nu \in \hat{G}_\rho$ telles que $\nu_{|N}$ est un multiple de ρ,
- $\tilde{G}_\rho$ l'ensemble des classes $\nu \in \check{G}_\rho$ telles que l'espace des vecteurs K-invariants de la représentation $\mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu$ est de dimension 1.

Grâce aux théorèmes des sous groupes et du nombre d'entrelacement, on verra que $\nu \in \check{G}_\rho$ est dans $\tilde{G}_\rho$ si et seulement si l'espace de ses vecteurs K_ρ-invariants est une droite (voir plus loin le lemme 3.7).

Les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2 reposent sur les deux théorèmes et la proposition qui suivent :

Théorème 3.3 ($\tilde{G}_\rho$)

a) Fixons $\rho \in \hat{N}$ et $(\mathcal{H}^\nu, \nu)$ un représentant d'une classe de $\tilde{G}_\rho$. Soit $\vec{u}_\nu$ un vecteur unitaire K_ρ-invariant pour ν. On lui associe un vecteur unitaire K-invariant $f_{\vec{u}_\nu}$ pour $\mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu$; la fonction de type positif alors associée à $\mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu \in \hat{G}$ pour ce vecteur $f_{\vec{u}_\nu}$ est la fonction notée ϕ^ν donnée par :

$$\phi^\nu(n) = \int_{k\in K} \langle \nu(I, k.n).\vec{u}_\nu \, , \, \vec{u}_\nu \rangle_{\mathcal{H}^\nu} dk, \quad n \in N \quad , \tag{3.1}$$

où dk désigne la mesure de Haar de masse 1 du groupe compact 1.

b) On obtient toutes les fonctions sphériques bornées comme les fonctions sphériques de type positifs ϕ^ν lorsque ρ parcourt un ensemble de représentants de $\hat{N}/G$, et que ν parcourt un ensemble de représentants de $\tilde{G}_\rho$.

Proposition 3.4 ($\mathcal{N}^*/G$)

a) Si $K = O(v)$, les orbites de l'action coadjointe de N sous G sont paramètrées par $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$. Elles sont notées $O(r^*, \Lambda^*)$. Le représentant privilégié de $O(r^*, \Lambda^*)$ est $r^* X_v^* + D_2(\Lambda^*)$.

b) Si $K = SO(v)$, les orbites de l'action coadjointe de N sous G sont paramètrées par $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$ et $\epsilon = \pm 1$. Elles sont notées $O(r^*, \Lambda^*, \epsilon)$. Le représentant privilégié de $O(r^*, \Lambda^*)$ est $r^* X_v^* + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$.

Evidemment, les orbites $O(r^*, \Lambda^*, 1)$ et $O(r^*, \Lambda^*, -1)$ se confondent lorsque la dernière coordonnée de Λ^* est $\lambda_{v'} = 0$.

Théorème 3.5 (ϕ^ν)
Soient $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$ et $\epsilon = \pm 1$ si $\Lambda^* \neq 0$, sinon $\emptyset$. Soit $\rho \in T_f$ une représentation associée au représentant privilégié $f = r^* X_v^* + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$.

a) Si $\Lambda^* = 0$, $\tilde{G}_\rho$ est l'ensemble des classes des représentations $\nu^{r^*,0}$.
La fonction ϕ^ν associée à $\nu = \nu^{r^*,0}$ par (3.1) est $\phi^{r^*,0}$ (donnée dans les théorèmes 3.1 et 3.2).

b) Si $\Lambda^* \neq 0$, $\tilde{G}_\rho$ contient les classes des représentations irréductibles $\nu^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$, $l \in \mathbb{N}^{v_1}$; ces dernières possèdent une droite invariante sous K_ρ.
La fonction ϕ^ν associée à $\nu = \nu^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ par (3.1) est $\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ (donnée dans le théorème 3.2).

Lors de la démonstration de ce dernier théorème (sous-sections 3.1.6 et 3.1.7), nous donnerons les expressions des représentations $\nu^{r^*,0}$ et $\nu^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$.

3.1.1 Démarche de la preuve

Admettons les deux théorèmes et la proposition qui précèdent, et conservons leurs notations. Du corollaire 1.21 et de la proposition 3.4, on en déduit que $\hat{N}/G$ est l'ensemble des classes des représentations associées à $f = r^* X_v^* + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$, lorsque les paramètres (r^*, Λ^*) parcourt $\mathcal{Q}$, et le paramètre ϵ parcourt ± 1 si $K = SO(v)$ et vaut $\emptyset$ si $K = O(v)$. D'après le théorème 3.3.b), et les premières parties du théorème 3.5.a) et b), on en déduit que toutes les classes des représentations de G qui ont une droite invariante par K sont obtenues en considérant les représentations induites par $\nu^{r^*,0}$, et $\nu^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$, $l \in \mathbb{N}^{v_1}$, lorsque les paramètres (r^*, Λ^*) parcourt $\mathcal{Q}$ et si $K = SO(v)$ et $\Lambda^* \neq 0$, ϵ égale ± 1 ; si $K = O(v)$, alors ϵ vaut toujours $\emptyset$.

Et donc d'après le théorème 3.3.a), les fonctions sphériques sont les fonctions ϕ^ν données par (3.1), lorsque ν parcourt $\nu^{r^*,0}$ et $\nu^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$. D'après les secondes parties du théorème 3.5.a) et b), les fonctions sphériques sont donc :

- les fonctions $\phi^{r^*,0}, r^* \in \mathbb{R}^+$,
- et les fonctions $\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ où $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$ et $l \in \mathbb{N}^{v_1}$ ainsi que $\epsilon = \pm 1$, si $K = SO(v)$ et $\epsilon = \emptyset$ si $K = O(v)$.

Les théorèmes 3.1 et 3.2 seront donc démontrés lorsque nous aurons prouvé les théorèmes 3.3 et 3.5, ainsi que la proposition 3.4. Le reste de cette section est consacré à leurs démonstrations. Nous commençons par démontrer le théorème 3.3 et la proposition 3.4. Ensuite, nous décrivons le stabilisateur et le groupe quotient $\overline{N} = N/\ker \rho$ pour une représentation $\rho \in T_{r^* X_v^* + D_2^\epsilon(\Lambda^*)}$. Nous pourrons alors démontrer le théorème 3.5 grâce au lemme suivant :

Lemme 3.6 (Représentation quotientée par son noyau)

a) *Une représentation d'un groupe (comme tout morphisme) passe au quotient par le noyau ou un sous-groupe du noyau.*
De plus, si la représentation du groupe est irréductible, alors la représentation quotientée l'est aussi.

b) *Soient ν_1 et ν_2 deux représentations d'un groupe G.*
Si elles sont équivalentes alors leurs noyaux coïncident $\ker \nu_1 = \ker \nu_2$, et les représentations passées au quotient à tout sous-groupe de leurs noyaux communs, sont équivalentes.
Réciproquement, si leurs noyaux coïncident et les représentations passées au quotient sous leur noyau commun, sont équivalentes, alors les représentation ν_1 et ν_2 sont équivalentes.

3.1.2 Ensemble $\tilde{G}_\rho$

Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème 3.3.

Fixons $\rho \in \hat{N}$. Nous reprenons les notations qui lui ont été associées au début de la sous section précédente. D'après la proposition 1.22, le groupe de stabilité de la classe de ρ sous G se met sous la forme $G_\rho = K_\rho \triangleleft N$, où K_ρ est le sous-groupe compact :

$$K_\rho = \{k \in K : k.\rho = \rho\} \subset K \quad .$$

Lemme 3.7 ($\tilde{G}_\rho$)
Soit $\nu \in \hat{G}_\rho$. La classe de ν est dans $\tilde{G}_\rho$ si et seulement si la représentation ν restreinte à K_ρ contient exactement une fois 1_{K_ρ}.

Démonstration du lemme 3.7: Par définition de $\tilde{G}_\rho$, une représentation $\nu \in \hat{G}_\rho$ est dans $\tilde{G}_\rho$ si et seulement si la représentation $[\mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu]_{|K}$ contient exactement une fois 1_K.

Comme $G_\rho = K_\rho \triangleleft N$, où K_ρ est un sous-groupe (fermé) de K, la double classe $G_\rho \backslash G / K$ est triviale. Appliquons le corollaire 1.24 du théorème des sous-groupes aux sous-groupes :

$$G_1 = G_\rho, \qquad G_2 = K, \qquad G_1 \cap G_2 = G_\rho \cap K = K_\rho, \quad .$$

On obtient :

$$\forall \nu \in \hat{G}_\rho, \qquad [\mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu]_{|K} = \mathrm{Ind}_{K_\rho}^K (\nu_{|K_\rho}) \quad .$$

Nous appliquons alors le lemme 1.25 aux groupes compacts $K_\rho \subset K$ et à la représentation $\gamma = \nu_{|K_\rho}$.

Fixons $(\mathcal{H}^\nu, \nu) \in \tilde{G}_\rho$. D'après le lemme 3.7, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}^\nu$ des vecteurs K-invariants est une droite $\mathbb{C}\vec{u}_\nu$, $\vec{u} = \vec{u}_\nu$ étant l'un de ses deux vecteurs unitaires. On cherche à en déduire un vecteur K-fixe de la représentation $(\mathcal{H}^\Pi, \Pi) = \mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu$.

L'espace $\mathcal{H}^\Pi$ est l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathcal{H}^\nu$ telles que :

1. $\forall g_\rho \in G_\rho, g \in G \quad f(g_\rho g) = \nu(g_\rho) f(g) \quad ,$
2. $\dot{g} \to \|f(g)\|_{\mathcal{H}^\nu} \in L^2(G/G_\rho) \quad .$

Faisons un petit aparté sur les mesures choisies :

- sur $G = K \lhd N$: la mesure de Haar $dg = dkdn$,
- sur $G_\rho = K_\rho \lhd N$: la mesure de Haar $d\dot{g} = dk_\rho dn$, où dk_ρ est la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact K_ρ ;
- sur $G/G_\rho \sim K/K_\rho$: la mesure $d\dot{k}$ identifiée à la mesure de masse 1 sur K/K_ρ invariante par translation sous K.

La représentation Π est donnée par :

$$\forall g, g' \in G,\ f \in \mathcal{H}^\Pi \qquad \Pi(g).f(g') = f(g'g) \quad .$$

Lemme 3.8
*Soit la fonction f sur G donnée par : $f(k,n) = \nu(I,n).\vec{u}$ pour $(k,n) \in G$.
Le vecteur $f_{\vec{u}_\nu} = f \in \mathcal{H}^\Pi$ est K-invariant et unitaire.*

Démonstration :Montrons que la fonction f est dans l'espace $\mathcal{H}^\Pi$.
Pour $g = (k,n) \in G$ et $g_\rho = (k_\rho, n_\rho) \in G_\rho$, on a $g_\rho g = (k_\rho k, n_\rho k_\rho.n)$ et donc par définition de f : $f(g_\rho g) = \nu(I, n_\rho k_\rho.n).\vec{u}$; or $(I, n_\rho k_\rho.n) = (k_\rho, n_\rho)(I,n)(k_\rho^{-1}, 0)$. Comme ν est un morphisme, on a :

$$\begin{aligned} f(g_\rho g) &= \nu\left((k_\rho, n_\rho)(I,n)(k_\rho^{-1},0)\right).\vec{u} = \nu(k_\rho,n_\rho)\,\nu(I,n)\,\nu(k_\rho^{-1},0).\vec{u} \\ &= \nu(k_\rho,n_\rho)\,\nu(I,n).\vec{u} \end{aligned}$$

car $\vec{u} \in \mathcal{H}^\nu$ est invariant sous K_ρ. On obtient donc $f(g_\rho g) = \nu(g_\rho).f(g)$, d'où $f \in \mathcal{H}^\Pi$.

Montrons que f est un vecteur K-invariant.
Pour $g = (k', n') \in G$ et $k \in K$, on a :

$$\Pi(k,0).f(g') = f\left(g'(k,0)\right) = f(k'k, n') = \nu(I,n').\vec{u} = f(g') \quad ;$$

il est aussi unitaire :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{G/G_\rho} \|f(g)\|^2_{\mathcal{H}^\nu}\, d\dot{g} = \int_{K/K_\rho} \|f(k,0)\|^2_{\mathcal{H}^\nu}\, d\dot{k} \\ &= \int_{K/K_\rho} \|\nu(I,0).\vec{u}\|^2_{\mathcal{H}^\nu}\, d\dot{k} = \int_{K/K_\rho} 1 d\dot{k} = 1 \quad ; \end{aligned}$$

car $d\dot{k}$ est de masse 1.

On obtient donc la fonction sphérique, comme fonction de type positif associée à la représentation Π, que l'on note ϕ^ν :

$$\phi^\nu(g) = \langle \Pi(g).f, f\rangle_{\mathcal{H}^\Pi} = \int_{G/G_\rho} \langle \Pi(g).f(g')\,,\, f(g')\rangle_{\mathcal{H}^\nu} d\dot{g}' \quad .$$

Or d'après les expressions de Π et f, pour $g = (k,n), g' = (k',n') \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \Pi(g).f(g') &= f(g'g) = f(k'k, n'k'.n) \\ &= \nu(I, n'k'.n).\vec{u} = \nu(I,n')\nu(I,k'.n).\vec{u} \quad , \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\left\langle \Pi(g).f(g'), f(g')\right\rangle_{\mathcal{H}^\nu} &= \left\langle \nu(I,n')\nu(I,k'.n).\vec{u}\,,\, \nu(I,n')\vec{u}\right\rangle_{\mathcal{H}^\nu}\\ &= \left\langle \nu(I,k'.n).\vec{u}\,,\, \vec{u}\right\rangle_{\mathcal{H}^\nu} \quad .\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression (3.1) :

$$\phi^\nu(g) = \int_{K/K_\rho} \left\langle \nu(I,k'.n).\vec{u}\,,\, \vec{u}\right\rangle_{\mathcal{H}^\nu} d\dot{k'} = \int_K \left\langle \nu(I,k.n).\vec{u}\,,\, \vec{u}\right\rangle_{\mathcal{H}^\nu} dk \quad ,$$

d'après le choix de la mesure sur l'espace homogène K/K_ρ et la K-invariance de $\vec{u}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.3.a).

Maintenant, démontrons le théorème 3.3.b). Lorsque ρ parcourt un ensemble de représentants de $\hat{N}/G$ et lorsque ν parcourt un ensemble de représentants de $\tilde{G}_\rho$, on obtient toutes les représentations irréductibles $\Pi = \mathrm{Ind}_{G_\rho}^G \nu$ qui ont une droite K-fixe d'après le théorème 1.23 ; d'après les théorèmes 1.15 et 1.16, on obtient donc toutes les fonctions sphériques bornées en considérant les fonctions sphériques de type positif associées à Π.

3.1.3 Description de $\mathcal{N}^*/G$

Nous démontrons ici la proposition 3.4. On garde les notations de la sous-section 1.3.2.

Proposition 3.9 (Coad de G)
Soit $g = (k,n) \in G$ avec $n = \exp(X + A) \in N$. On a :

$$\forall f = X^* + A^* \in \mathcal{N}^*, \qquad \mathrm{Coad}.g(f) = k.X^* + k.A^* - (k.A^*).X \quad .$$

Démonstration de la proposition 3.9: Gardons les notations de la proposition. Pour tout $X' + A' \in \mathcal{N}$ on a :

$$\begin{aligned} g\exp(t(X'+A')g^{-1}) &= (k, nk.\exp(t(X'+A')))(k^{-1}, k^{-1}n^{-1})\\ &= (I, nk.\exp(t(X'+A'))\, kk^{-1}n^{-1}) = (I, n\exp(t(k.X'+k.A'))n^{-1}) \quad .\end{aligned}$$

On en déduit pour $X' + A' \in \mathcal{N}$:

$$\mathrm{Ad}.g(X'+A') = \mathrm{Ad}.n(k.X'+k.A') = k.X' + k.A' + [X, k.X'] \quad .$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathrm{Coad}.g(f)(X'+A') &= f\left(\mathrm{Ad}.g^{-1}(X'+A')\right)\\ &= < X^*, k^{-1}.X' > + < A^*, k^{-1}.A' > - < A^*, [k^{-1}.X, k^{-1}.X'] > \quad .\end{aligned}$$

Or on a par définition de l'action de K sur $\mathcal{N}^*$:

$$< X^*, k^{-1}.X' > = < k.X^*, X' > \quad \text{et} \quad < A^*, k^{-1}.A' > = < k.A^*, A' > \quad ;$$

et aussi :

$$\begin{aligned} < A^*, [k^{-1}.X, k^{-1}.X'] > &= < A^*, k^{-1}.[X, X'] > = < k.A^*, [X, X'] > \\ &= < k.A^*.X, X' > \quad . \end{aligned}$$

Cette proposition nous permet de déterminer toutes les orbites de $\mathcal{N}^*/G$ dans les deux cas $K = O(v)$ et $SO(v)$.

Fixons une orbite O. Toutes les formes linéaires $f = X_f^* + A_f^* \in O$ sont telles que les matrices antisymétriques A_f^* sont toutes orthogonalement semblables et nous leur associons $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{v'}^*) \in \overline{\mathcal{L}}$ (proposition 5.8).

On note v_0 la dimension des sous espaces isotropes maximals pour $\omega_{A_f^*,r}$ où $A_f^* \in O$; c'est aussi le nombre de λ_i^* non nuls.

Pour chaque $f = X_f^* + A_f^* \in O$, nous choisissons alors :

1. Distingons les cas :
   - si $K = O(v)$, $k \in K$ tel que la matrice antismétrique $k.A_f^* = D_2(\Lambda^*)$ soit diagonalisée par bloc 2-2 ;
   - si $K = SO(v)$, $k \in K$ et $\epsilon = \pm 1$ tels que la matrice antismétrique $k.A_f^* = D_2^\epsilon(\Lambda^*)$ soit diagonalisée par bloc 2-2 avec $\Lambda^* \in \overline{\mathcal{L}}$ (proposition 5.9) ;
2. $X \in \mathcal{V}$ est tel que $(k.A_f^*).X \in \mathcal{V}^*$ soit égale à la projection orthogonale X_0^* de $k.X_f^* \in \mathcal{V}^*$ sur $\Im k.A_f^* = \Im D_2(\Lambda^*)$; en particulier, $X_0^* = 0$ si $\Im D_2(\Lambda^*)$, c'est-à-dire si $v = 2v'$ et $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{v'}^*)$, avec aucun λ_i nul ;
3. $k' \in K$ qui laisse stable $\Im D_2(\Lambda^*)$, donc également $(\Im D_2(\Lambda^*))^\perp$, tel que $k'.X_0^* = x^* X_v^*, x^* \in \mathbb{R}$.
   Si $K = O(v)$ ou $\dim(\Im D_2(\Lambda^*))^\perp > 1$, on peut supposer $x^* = r^* \geq 0$.
   Si $x^* < 0$, $K = SO(v)$ et $\dim(\Im D_2(\Lambda^*))^\perp = 1$ c'est-à-dire $v = 2v_0 + 1$, on pose $r^* = -x^*$ et :
$$k'' = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_{2v'-2} & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{Id}_2 \end{array}\right] \quad .$$

On obtient :
- si $K = O(v)$, $(k'k, \exp X).f = r^* X_v^* + D_2(\Lambda^*)$,
- si $K = SO(v)$ et $2v_0 + 1 < v$, $(k'k, \exp X).f = r^* X_v^* + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$,
- si $K = SO(v)$ et $2v_0 + 1 = v$, $(k'k, \exp X).f = r^* X_v^* + D_2^{-\epsilon}(\Lambda^*)$,

La proposition 3.4 est donc démontrée.

3.1.4 Stablisateur de ρ

Le but de cette sous-section est de décrire le stabilisateur K_ρ d'une représentation ρ associée à $f = r^* X_v + D_2^\epsilon(\Lambda^*) \in \mathcal{N}^*$. Rappelons (proposition 1.22) que c'est le stabilisateur l'orbite coadjointe dans K de f.

Proposition 3.10 (K_ρ)
Soit $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$. v_0 désigne le nombre de λ_i^* non nuls, où $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{v'}^*)$; On note $\tilde{\Lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{v_0}^*) \in \mathbb{R}^{v_0}$. Soit ρ une représentation associée à $f = r^* X_v + D_2^\epsilon(\Lambda^*) \in \mathcal{N}^*$, où $\epsilon = \emptyset$ si $K = O(v)$, et $\epsilon = \pm 1$ si $K = SO(v)$.

Si $\Lambda^* = 0$, alors le groupe K_ρ est le sous-groupe de $O(v)$ qui stabilise $r^* X_v^*$.

Si $\Lambda^* \neq 0$, alors le groupe K_ρ est le produit direct $K_1 \times K_2$, où

1. *le groupe K_1 est le groupe formé des éléments $k_1 \in SO(v)$ de la forme :*

$$k_1 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \quad ;$$

tels que $\tilde{k}_1 \in SO(2v_0)$ commute (matriciellement) avec $D_2(\tilde{\Lambda}^*) \in \mathcal{A}_{2v_0}$;

2. *le groupe K_2 est le groupe formé des éléments $k_2 \in K$ de la forme :*

$$k_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

tels que $\tilde{k}_2 \in O(v - 2v_0 - 1)$ laisse stable $r^* X_v^*$.

Dans la démonstration de cette proposition, on reprend les notations de son énoncé et on convient de noter $A^* = D_2^\epsilon(\Lambda^*)$ et $X^* = r^* X_v^*$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.11

$$K_\rho = \{k \in K \ : \ kA^* = A^* k \quad \text{et} \quad kX^* = X^*\} \quad .$$

Démonstration du lemme 3.11: D'après la proposition 3.9, pour $f = X^* + A^* \in \mathcal{N}^*$, on a :

$$\forall k \in K \quad \mathrm{Coad}.k(f) = k.X^* + k.A^* \quad \text{et} \quad N.f = X^* + \Im A^* \quad .$$

Fixons momentanément $k \in K_\rho$. On a $\mathrm{Coad}.k(f) \in N.f$. Comme la décomposition $\mathcal{N}^* = \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{Z}^*$ est en somme directe, on a :

$$(1)\ k.A^* = A^* \qquad \text{et} \qquad (2)\ k.X^* \in X^* + \Im A^* \quad .$$

La condition (1) implique que les matrices k et A^* commutent. Donc en particulier, comme $X^* \in \Im A^{*\perp}$, kX^* puis $kX^* - X^*$ sont aussi dans $\Im A^{*\perp}$. Or la condition (2) implique $kX^* - X^* \in \Im A^*$: ce vecteur est donc nul. Ainsi k commute avec A^* et stabilise X^*.

Réciproquement, si k commute avec A^* et stabilise X^*, alors on a $\mathrm{Coad}.k(f) \in N.f$ et $k \in K_\rho$.

Démonstration de la proposition 3.10: Lorsque $\Lambda^* = 0$, K_ρ est le fixateur dans K du vecteur $X^* \in \mathcal{V}^* \sim \mathbb{R}^v$. La première partie de la proposition 3.10 est donc démontrée.

Démontrons la seconde partie. On adopte les notations de la section 5.2, ainsi que $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ si $K = SO(v)$ et $v_0 = v'$, et 1 sinon. Nous sommes dans le cas $\Lambda^* \neq 0$. A^* se met sous la forme :

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c} D_2(\tilde{\Lambda}^*) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad D_2(\tilde{\Lambda}^*) = \begin{bmatrix} \lambda_1 J_{m_1} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_{v_1} J^{\tilde{\epsilon}}_{m_{v_1}} \end{bmatrix} ,$$

où on a noté $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{v_1} > 0$ les paramètres λ_i^* notés de manière distincte, et m_i le nombre des $\lambda_i^* = \lambda_i$. On convient également :

$$m_0 := m'_0 := 0 , \qquad \text{et} \qquad m'_j = \sum_{i=1}^{j} m_i , \quad j = 1, \ldots v_1 \quad .$$

Soit $k \in K_\rho$. L'image de A^* est l'espace vectoriel engendré par $X_1, \ldots, X_{2v_0}$; le noyau de A^* est l'espace vectoriel engendré par $X_{2v_0+1}, \ldots, X_v$. Comme les matrices k et A^* commutent, l'image et le noyau de A^* sont stables par k ; la matrice k peut donc s'écrire sous la forme :

$$k = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tilde{k}_1 \in O(2v_0) \text{ et } \tilde{k}_2 \in O(v - 2v_0 - 1) \quad ;$$

de plus la matrice $\tilde{k}_1$ commute avec $D_2(\tilde{\Lambda}^*)$, et la matrice $\tilde{k}_2$ stabilise le vecteur X^* car k stabilise le vecteur $X^* \in \ker A^*$. Maintenant, les espaces propres pour A^* sont les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs $X_{2i-1}, X_{2i}, m'_{j-1} < i \leq m_j$ avec $j = 1, \ldots v_1$. Comme les matrices $\tilde{k}_1$ et $D_2(\tilde{\Lambda}^*)$ commutent, ces sous espace sont propres pour $\tilde{k}_1$; on peut donc écrire $\tilde{k}_1$ avec des blocs $[\tilde{k}_1]_j \in O(m_j)$, $i = 1, \ldots, v_1$ sur la diagonale ; de plus, vu la forme de $D_2(\tilde{\Lambda}^*)$, chaque bloc $[\tilde{k}_1]_j$, commute avec J_{m_j} pour $j < v_1$, ou avec $\tilde{\epsilon} J_{m_{v_1}}$ pour $j = v_1$.

Appliquons la proposition 5.10 à chaque bloc de $\tilde{k}_1$: $\det [\tilde{k}_1]_j = 1$. Avec la décomposition de $\tilde{k}_1$ en bloc matriciel, on en déduit : $\det \tilde{k}_1 = \Pi_j \det [\tilde{k}_1]_j = 1$.

On peut donc écrire k comme le produit $k = k_1 k_2 = k_2 k_1$ avec $k_i \in K_i, i = 1, 2$ pour les groupes K_1, K_2 donnés dans la proposition 3.10.

Réciproquement, toute matrice $k \in K_\rho$ s'écrit sous cette forme-là.

On peut davantage décrire le sous-groupe K_1 :

Corollaire 3.12 (Isomorphisme entre K_1 et $K(m; v_0; v_1)$)
Fixons le paramètre $\Lambda^* \in \overline{\mathcal{L}} - \{0\}$ et éventuellement si $K = SO(v)$, $\epsilon = \pm 1$. On leur associe comme ci-dessus les indices v_0, v_1 et $m = (m_1, \ldots, m_{v_1})$.

On définit l'application si $K = SO(v)$ et $v_0 = v', \epsilon = -1$,

$$\Psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} K_1 & \longrightarrow & K(m; v_0; v_1) \\ k_1 & \longmapsto & \left(\psi_1^{(m_1)}([\tilde{k}_1]_1), \ldots, \psi_1^{(m_{v_1-1})}([\tilde{k}_1]_{v_1-1}), \psi_1^{(m_{v_1},-1)}([\tilde{k}_1]_{v_1})\right) \end{array} \right. ,$$

sinon :

$$\Psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccl} K_1 & \longrightarrow & K(m; v_0; v_1) \\ k_1 & \longmapsto & \left(\psi_1^{(m_1)}([\tilde{k}_1]_1), \ldots, \psi_1^{(m_{v_1}-1)}([\tilde{k}_1]_{v_1-1}), \psi_1^{(m_{v_1})}([\tilde{k}_1]_{v_1})\right) \end{array} \right. \quad ;$$

le groupe $K(m; v_0; v_1) = U_{m_1} \times U_{m_2} \times \ldots \times U_{m_{v_1}}$ a déjà été décrit dans la sous-section 1.2.2.
L'application Ψ_1 est un isomorphisme de groupe entre K_1 et $K(m; v_0; v_1)$.

Démonstration du corollaire 3.12: On reprend les notations de la démonstration de la proposition 3.10. Appliquons la proposition 5.10. Pour $k_1 \in K_1$,

- chaque bloc $[\tilde{k}_1]_j, j = 1, \ldots, v_1 - 1$ commute avec J_{m_j}, et donc est isomorphe par $\psi_1^{(m_j)}$ à une matrice unitaire de taille m_j ;
- si $K = SO(v), v_0 = v', \epsilon = -1$, le bloc $[\tilde{k}_1]_{v_1}$ avec $-J_{m_{v_1}}$; et donc est isomorphe par $\psi_1^{(m_{v_1}, -1)}$ à une matrice unitaire de taille m_j.
- sinon, le bloc $[\tilde{k}_1]_{v_1}$ avec $J_{m_{v_1}}$; et donc est isomorphe par $\psi_1^{(m_{v_1})}$ à une matrice unitaire de taille m_j.

Réciproquement, on a pour $(u_1, \ldots, u_{m_{v_1}}) \in K(m; v_0; v_1)$ selon les cas :

$$(\psi_1^{(m_1)^{-1}} u_1, \ldots, \psi_1^{(m_{v_1}, -1)^{-1}} u_{m_{v_1}}) \quad \text{ou} \quad (\psi_1^{(m_1)^{-1}} u_1, \ldots, \psi_1^{(m_{v_1})^{-1}} u_{m_{v_1}}) \in K_1 \quad .$$

L'application Ψ_1 est donc un morphisme de groupe entre K_1 et $K(m; v_0; v_1)$.

Remarque 6 *Toujours d'après la proposition 5.10, l'application Ψ_1 est compatible avec la complexification dans le sens où on a selon les cas :*

$$\psi_c^{(v', -1)}\{\tilde{k}_1.(x_1, y_1, \ldots, x_{v'}, y_{v'})\} = \Psi_1(k_1).\psi_c^{(v', -1)}(x_1, y_1, \ldots, x_{v'}, y_{v'}) \quad .,$$

ou

$$\psi_c^{(v_0)}\{\tilde{k}_1.(x_1, y_1, \ldots, x_{v_0}, y_{v_0})\} = \Psi_1(k_1).\psi_c^{(v_0)}(x_1, y_1, \ldots, x_{v_0}, y_{v_0}) \quad .$$

3.1.5 Groupe quotient $\overline{N} = N / \ker \rho$

Expression des représentants ρ considérés. Nous allons maintenant donner l'expression de $\rho_{r^*, \Lambda^*, \epsilon}$ associée à la forme linéaire $r^* X_v + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$ que nous allons considérer.

Vu la construction effectuée dans la sous-section 1.3.2, dans le cas $\Lambda^* = 0$, on pose $\rho_{r^*, 0} = U_{X^*, 0}$ la représentation de dimension 1 donnée par le caractère :

$$\exp(X + A) \in N \longmapsto \exp(i < X^*, X >) \quad ;$$

dans le cas $\Lambda^* \neq 0$, il reste à choisir un sous espace E_1 ; nous allons le faire grâce à la base canonique.

Supposons donc $\Lambda^* \neq 0$. On note $A^* \in \mathcal{Z}^*$ identifié par la base canonique $X_{i,j}$, $i < j$ à la matrice antisymétrique $D_2(\Lambda^*) \neq 0$ et $2v_0$ la dimension de l'image $\Im A^*$ de A^* ; l'expression de la représentation $U_{r^* X_v, D_2^\epsilon(\Lambda^*)}$ (mais pas sa classe) dépend du choix de E_1, sous espace maximal totalement isotrope pour la forme $(X,Y) \mapsto < A^*X, Y >$ restreinte à $\Im A^* \times \Im A^*$. Ici, grâce à la base canonique, on pose :

$$E_1 = \mathbb{R}X_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}X_{2j-1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}X_{2v_0-1} \quad .$$

On note $\rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ la représentation $U_{r^*X_v,D_2^\epsilon(\Lambda^*)}$ correspondant à ce choix. On peut donner explicitement l'expression de $\rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$, ainsi que des représentations $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_1$, et $\overline{\rho}_2$ que nous allons définir dans la suite.

Notations. Fixons une des représentations $(\mathcal{H},\rho) = (\mathcal{H}_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}, \rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon})$ avec Λ^* nul ou non. On convient de noter :
- $\ker\rho$ le noyau de ρ,
- $\overline{N} = N/\ker\rho$ le groupe quotient et $\overline{\mathcal{N}}$ son algèbre de Lie,
- $\overline{\rho}$ le morphisme induit sur $\overline{N}$ (qui est une représentation sur le même espace que ρ, dont on peut donner une expression explicite),
- $\overline{n} \in \overline{N}$ l'image de $n \in N$ par la projection canonique $N \to \overline{N}$,
- $\overline{Y} \in \overline{\mathcal{N}}$ l'image de $Y \in \mathcal{N}$ par la projection canonique $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{N}}$,
- si $\Lambda^* \neq 0$: $\overline{B} = |\Lambda^*|^{-1}\overline{D_2^\epsilon(\Lambda^*)}$. où pour $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{v'}^*) \in \overline{\mathcal{L}}$, $|\Lambda^*|^2 = \sum_{j=1}^{v'} \lambda_j^{*2}$; on remarque $|\Lambda^*| = |D_2(\Lambda^*)|$, où la norme précédente est la norme pour laquelle la base $X_{i,j}, i < j$ est orthonormale.

Le but de cette sous-section est de démontrer les trois propositions suivantes :

Proposition 3.13 ($\overline{N}$ et $\overline{\rho}$)
Soit $(\mathcal{H},\rho) = (\mathcal{H}_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}, \rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon})$.
a) Si $\Lambda^* \neq 0$, le groupe $\overline{N}$ est isomorphe au produit (direct) des deux groupes $\overline{N_1}$ et $\overline{N_2}$, et la représentation $\overline{\rho}$ est équivalente au produit tensoriel des représentations $\overline{\rho_1}$ sur $\overline{N_1}$ et $\overline{\rho_2}$ sur $\overline{N_2}$, où :
- *le groupe de Lie nilpotent $\overline{N_1}$ a pour algèbre de Lie $\overline{\mathcal{N}_1}$ qui admet pour base comme espace vectoriel : $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_{2v_0}}, \overline{B}$; son centre est $\mathbb{R}\overline{B}$;*
- *la représentation $\overline{\rho}_1$ induit sur le centre le caractère :*

$$\exp(a\overline{B}) \longmapsto \exp(ia|\Lambda^*|) \quad .$$

- *$\overline{N_2}$ et $\overline{\rho}_2$ sont décrits par :*
  - *ou bien $r^* = 0$ et $\overline{N_2}$ est le groupe trivial, et $\overline{\rho}_2$ la représentation triviale ;*
  - *ou bien $r^* \neq 0$ et $\overline{N_2}$ est le groupe d'algèbre de Lie $\mathbb{R}\overline{X}_v$, et $\overline{\rho}_2$ est la représentation associée au caractère :*

$$\exp x\overline{X}_v \longrightarrow \exp(ix) \quad .$$

b) Si $\Lambda^* = 0$, alors $\overline{N}$ et $\overline{\rho}$ ont la même description que $\overline{N_2}$ et $\overline{\rho}_2$ ci-dessus.

Avec les conventions de notations du début de cette sous-section, pour $k \in K_\rho$, les représentations ρ et $k.\rho$ sont équivalentes ; en particulier, elles ont même noyau. Donc l'action de K_ρ laisse stable $\ker\rho$ et passe au quotient sur $\overline{N}$. Nous décrivons cette dernière action.

Proposition 3.14 (K_ρ et $\overline{N}$)
On garde les notations des propositions 3.10 et 3.13.

a) *Si $\Lambda^* \neq 0$, le groupe K_1 agit sur $\overline{N_1}$, et le groupe K_2 agit trivialement sur $\overline{N_2}$: le produit semi-direct $K_\rho \triangleleft \overline{N}$ peut s'écrire : $K_\rho \triangleleft \overline{N} \sim (K_1 \triangleleft \overline{N_1}) \times K_2 \times \overline{N_2}$.*

b) *Si $\Lambda^* = 0$, l'action de K_ρ est triviale sur $\overline{N}$: le produit semi-direct $K_\rho \triangleleft \overline{N}$ est en fait direct : $K_\rho \triangleleft \overline{N} \sim K_\rho \times \overline{N}$.*

L'utilisation de la base canonique dans l'expression de $\rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ nous permet d'établir simplement un isomorphisme entre $\overline{N_1}$ et le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^{v_0} = \mathbb{C}^{v_0} \times \mathbb{R}$. Gardons les notations de la proposition 3.13, dans le cas $\Lambda^* \neq 0$, et du corollaire 3.12. On définit l'application $\Psi_2 : \mathbb{H}^{v_0} \to \overline{N_1}$ donnée par si $v_0 = v'$, $K = SO(v)$, $\epsilon = -1$:

$$\begin{aligned}
&\Psi_2(x_1 + iy_1, \ldots, x_{v'} + iy_{v'}, t) \\
&= \exp\left(\left\{\sum_{j=1}^{v'-1} \sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda_j^*}} \left(x_j\overline{X_{2j-1}} + y_i\overline{X_{2j}}\right) - \sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda_j^*}} \left(y_{v'}\overline{X_{2v'-1}} + x_{v'}\overline{X_{2v'}}\right)\right\} \quad + t\overline{B}\right) \quad .
\end{aligned}$$

sinon :

$$\Psi_2(x_1 + iy_1, \ldots, x_{v_0} + iy_{v_0}, t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{v_0} \sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda_j^*}} \left(x_j\overline{X_{2j-1}} + y_i\overline{X_{2j}}\right) \quad + t\overline{B}\right) \quad .$$

Proposition 3.15 (N_1 et K_1)
L'application Ψ_2 est un ismorphisme entre les groupes N_1 et $\mathbb{H}^{v_0}$. Les groupes $H := K_1 \triangleleft \overline{N_1}$ et $H_{heis} := K(m; v_0; v_1) \triangleleft \mathbb{H}^{v_0}$ sont isomorphes par l'application :

$$\Psi_0 \; : \; \left\{ \begin{array}{rcl} H_{heis} = K(m; v_0; v_1) \triangleleft \mathbb{H}^{v_0} & \longrightarrow & H = K_1 \triangleleft \overline{N_1} \\ \Psi_1^{-1}(k_1)\,,\, h & \longmapsto & k_1\,,\, \Psi_2(h) \end{array} \right. \quad .$$

Les démonstrations du cas $\Lambda^* = 0$ sont directes.

Démonstration des propositions 3.13 et 3.14 si $\Lambda^* = 0$: Dans ce cas, la représentation ρ s'identifie au caractère χ dont la différentielle est $ir^*X_v^*$. Son noyau $\ker \rho$ a donc pour algèbre de Lie l'ensemble des vecteurs $X \in \mathcal{V}$ qui vérifient $< r^*X_v^*, X >= 0$. Le groupe $\overline{N}$ a alors une algèbre de Lie isomorphe à $\mathbb{R}$ si r^* est non nul, et à $\{0\}$ sinon.

La représentation ρ se factorise en une représentation unitaire irréductible $\overline{\rho}$ sur $\overline{N}$, qui est associée au caractère si r^* est non nul :

$$\exp x\overline{X}_v \longrightarrow \exp(ix) \quad ,$$

et si r^* est nul, le caractère trivial 1.

Jusqu'à la fin de cette sous-section, on convient de noter $A^* = D_2(\Lambda^*)$ et $X^* = r^*X_v$, ainsi que d'omettre r^* et $\overline{X_v}$ si $r^* = 0$.

On connait :

– grâce à la remarque 3, le noyau de la représentation $\rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$, dont on déduit la base voulue pour $\mathcal{N}$,
– grâce à la remarque 4, son expression sur le centre de N, dont on déduit l'expression de $\overline{\rho}_1$ sur $\mathbb{R}B$.

Pour démontrer la proposition 3.13.a), il reste à exhiber le centre de $\mathcal{N}$. Pour cela, nous calculons tous les crochets de la base considérée.

Lemme 3.16
Dans ce qui suit, on suppose $\Lambda^* \neq 0$; on garde les notations de la proposition 3.13.

L'algèbre de Lie $\overline{N}$ admet pour base comme espace vectoriel la famille de vecteurs :

$$\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_{2v_0}}, \overline{B}, \quad \text{à laquelle on ajoute} \quad \overline{X_v} \text{ si } 2v_0 < v \text{ et } r^* \neq 0 \quad .$$

Les crochets des vecteurs de cette base valent 0, sauf :

$$[\overline{X_{2i-1}}, \overline{X_{2i}}] = \begin{cases} \epsilon \frac{\lambda^*_{v'}}{|\Lambda^*|}\overline{B} & \text{si } i = v' \text{ et } K = SO(v), \\ \frac{\lambda^*_i}{|\Lambda^*|}\overline{B} & \text{sinon.} \end{cases} .$$

En particulier, X^* commute avec tous les vecteurs $\overline{X_i}, i = 1, \ldots, 2v_0$.

Démonstration du lemme 3.16: On déduit la base de $\overline{N}$ de l'expression du noyau (voir remarque 3). On voit directement d'après (1.3) :
– si $(i,j) \neq (2i'-1, 2i')$, $< A^*, [X_i, X_j] >=< A^*.X_i, X_j >= 0$ et donc $[\overline{X_i}, \overline{X_j}] = 0$,
– $< A^*, [X_{2i'-1}, X_{2i'}] >=< A^*.X_{2i'-1}, X_{2i'} >$ vaut $\epsilon\lambda^*_{v'}$ si $i = v'$ et $K = SO(v)$, et $\lambda_{i'}$ sinon ; et donc $[\overline{X_{2i'-1}}, \overline{X_{2i'}}]$ vaut $\epsilon\lambda^*_{v'}|\Lambda^*|^{-1}\overline{B}$ si $i = v'$ et $K = SO(v)$, et $\lambda_{i'}|\Lambda^*|^{-1}\overline{B}$ sinon.

Démonstration de la proposition 3.14 si $\Lambda^* \neq 0$: Soit $n = \exp(X + A)$ avec X décomposé selon la base canonique :

$$X = \sum_{i=1}^{v} x_i X_i \quad . \tag{3.2}$$

On a :

$$\overline{n} = \exp(\overline{X} + < D_2(\Lambda^*), A > \overline{B}) \ , \quad \text{avec} \quad \overline{X} = \sum_{j=1}^{2v_0} x_j \overline{X_j} + x_v \overline{X_v} \quad .$$

Donc pour $k \in K_\rho$, on a : $k.n = \exp(k.X + k.A)$, et $\overline{k.n} = \exp(\overline{k.X} + \overline{k.A})$, avec :

$$\begin{aligned} \overline{k.X} &= \sum_{j=1}^{2v_0} \overline{x_j k.X_j} + x_v \overline{X_v} \quad , \\ \overline{k.A} &= < A^*, k.A > \overline{B} = < k^{-1}.A^*, A > \overline{B} = < A^*, A > \overline{B} = \overline{A} \quad , \end{aligned}$$

car $k^{-1}.A^* = A^*$ et $k.X^* = X^*$. On peut donc directement définir l'action (par automorphisme) du groupe K_ρ sur le groupe $\overline{N}$. De plus, on remarque les propriétés suivantes :

- Si $k \in K_1$ et $\overline{n} \in \overline{N_1}$ alors $k.\overline{n} \in \overline{N_1}$; et donc K_1 agit sur $\overline{N_1}$.
- Si $k \in K_2$ et $\overline{n} \in \overline{N_2}$ alors $k.\overline{n} = \overline{n}$; et donc K_2 agit trivialement sur $\overline{N_2}$.

Démonstration de la proposition 3.15: Notons $(z,t),(z',t') \in \mathbb{H}^{v_0}$ avec :

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_{v_0} + iy_{v_0}) \quad \text{et} \quad z' = (x'_1 + iy'_1, \dots, x'_{v_0} + iy'_{v_0}) \quad .$$

D'après l'expression de $(z,t).(z',t')$ et Ψ_2, on a si $v_0 = v'$, $K = SO(v)$, $\epsilon = -1$:

$$\begin{aligned}\Psi_2\left((z,t).(z',t')\right) = \exp\Bigg(&\left\{\sum_{j=1}^{v'-1}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x_j + x'_j)\overline{X_{2j-1}} + (y_j + y'_j)\overline{X_{2j}}\right.\\ &\left.-\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_{v'}}}(y_{v'} + y'_{v'})\overline{X_{2v'-1}} + (x_{v'} + x'_{v'})\overline{X_{2v'}}\right\} + (t + t' + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v_0} x_j y'_j - y_j x'_j)\overline{A}\Bigg)\end{aligned}$$

sinon :

$$\begin{aligned}\Psi_2\left((z,t).(z',t')\right) = \exp\Bigg(&\sum_{j=1}^{v_0}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x_j + x'_j)\overline{X_{2j-1}} + (y_j + y'_j)\overline{X_{2j}}\\ &+ (t + t' + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v_0} x_j y'_j - y_j x'_j)\overline{A}\Bigg) \quad .\end{aligned}$$

Or d'après la valeur des crochets des $\overline{X_j}$ donnée dans le lemme 3.16, on voit :

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{j=1}^{v_0}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x_j\overline{X_{2j-1}} + y_j\overline{X_{2j}}) \, , \, \sum_{j=1}^{v_0}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x'_j\overline{X_{2j-1}} + y'_j\overline{X_{2j}})\right]\\ &= \sum_{j=1}^{v_0}\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}x_j y'_j\left[\overline{X_{2j-1}}, \overline{X_{2j}}\right] + \frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}y_j x'_j\left[\overline{X_{2j}}, \overline{X_{2j-1}}\right] = \sum_{j=1}^{v_0}(x_j y'_j - y_j x'_j)\overline{B} \quad ,\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}&\left[-\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_{v'}}}(y_{v'}\overline{X_{2v'-1}} + x_{v'}\overline{X_{2v'}}) \, , \, -\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_{v'}}}(y'_{v'}\overline{X_{2v'-1}} + x'_{v'}\overline{X_{2v'}})\right]\\ &= \frac{1}{\lambda^*_{v'}}\left(y_{v'}x'_{v'}\left[\overline{X_{2v'-1}}, \overline{X_{2v'}}\right] + x_{v'}y'_{v'}\left[\overline{X_{2v'}}, \overline{X_{2v'-1}}\right]\right) = (x_{v'}y'_{v'} - y_{v'}x'_{v'})\overline{B} \quad .\end{aligned}$$

On en déduit dans les deux cas :

$$\begin{aligned}\Psi_2\left((z,t).(z',t')\right) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{v_0}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x_j\overline{X_{2j-1}} + y_j\overline{X_{2j}}) + t\overline{A}\right)\\ &\qquad \exp\left(\sum_{j=1}^{v_0}\sqrt{\frac{|\Lambda^*|}{\lambda^*_j}}(x'_j\overline{X_{2j-1}} + y'_j\overline{X_{2j}}) + t'\overline{A}\right)\\ &= \Psi_2(z,t).\Psi_2(z',t') \quad .\end{aligned}$$

L'application Ψ_2 est donc un morphisme de groupe et il est clairement bijectif. Par définition de Ψ_1 et Ψ_2, et d'après la remarque 6, on a :

$$\forall\, \tilde{k}_1 \in K_1\ , h \in \mathbb{H}^{v_0} \quad : \quad \Psi_1^{-1}(k_1).h \;=\; \Psi_2^{-1}(k_1.\Psi_2(h)) \quad ;$$

ainsi l'application Ψ_0 est un isomorphisme de groupe $K(m; v_0; v_1) \triangleleft \mathbb{H}^{v_0} \to K_1 \triangleleft \overline{N_1}$.

3.1.6 Cas $O(r^*, 0)$

Nous montrons ici le théorème 3.5.a). Fixons $\rho = \rho_{r^*,0}$, et $\nu \in \tilde{G}_\rho$. On note $\nu_{|N} = c.\rho$, $1 \leq c \leq \infty$ et $\overline{\nu}$ la représentation donnée par le passage au quotient du groupe G_ρ par $\ker \rho$ de la représentation ν.

Description de $\tilde{G}_\rho$. D'après la proposition 3.14 dans le cas $\Lambda^* = 0$, le produit semi-direct $K_\rho \triangleleft \overline{N}$ est en fait direct, donc la représentation $\overline{\nu}$ s'écrit comme le produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles :

- l'une de $\overline{N}$, qui coïncide avec $c.\overline{\rho}$ (étant irréductible $c = 1$),
- et l'autre de K_ρ ayant un vecteur K_ρ-fixe (étant irréductible, elle est triviale).

La représentation $\overline{\nu}$ coincide donc avec la représentation : $(k, n) \in K_\rho \times \overline{N} \mapsto \overline{\rho}(n)$. Or d'après la proposition 3.13 dans le cas $\Lambda^* = 0$, si $r^* \neq 0$, la représentation $\overline{\rho}$ est associée au caractère $\exp x\overline{X}_v \mapsto e^{ix}$. Donc $\overline{\nu}$ est la représentation associée au caractère :

$$(k, \exp(x\overline{X})) \longmapsto \exp(ix)$$

On en déduit que la représentation $\nu = \nu^{r^*,0}$ est donnée par :

$$k, \exp(X + A) \longmapsto e^{i<r^* X_v^*, X>} \quad ,$$

si $r^* \neq 0$. C'est aussi le cas si $r^* = 0$, car alors $\overline{\rho}$ est la représentation triviale 1.

Nous venons donc de trouver que $\tilde{G}_\rho$ est l'ensemble des classes des représentations $\nu^{r^*,0}$ lorsque r^* parcourt $\mathbb{R}^+$. L'espace de la représentation de $\nu^{r^*,0}$ est de dimension 1. On note $\vec{u}$ un de ses vecteurs unitaires.

Formule pour $\phi^\nu, \nu \in \tilde{G}_\rho$. Explicitons d'après la formule (3.1), la fonction sphérique ϕ^ν associée à la représentation $\nu = \nu^{r^*,0}$. On a :

$$\langle \nu(I, n).\vec{u}\,,\, \vec{u}\rangle_{\mathcal{H}^\nu} \;=\; e^{i<r^* X_v^*, X>} \quad \text{d'où} \quad \phi^\nu(\exp(X + A)) \;=\; \int_{k\in K} e^{i<r^* X_v^*, k.X>} dk \quad .$$

$\phi^\nu = \phi^{r^*,0}$, et le théorème 3.5.a) est ainsi démontré.

3.1.7 Cas $O(r^*, \Lambda^*, \epsilon)$

Nous montrons ici le théorème 3.5.b). Fixons $\rho = \rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ avec $\Lambda^* \neq 0$, et $\nu \in \tilde{G}_\rho$. On note : $\nu_{|N} = c.\rho$, $1 \leq c \leq \infty$ et $\overline{\nu}$ la représentation donnée par le passage au quotient du groupe G_ρ par $\ker \rho$ de la représentation ν.

Description de $\tilde{G}_\rho$. D'après la proposition 3.14 dans le cas $\Lambda^* = 0$, le groupe $K_\rho \lhd \overline{N}$ est isomorphe au produit direct de $H = K_1 \lhd \overline{N_1}$ et de K_2 et $\overline{N_2}$. La représentation $\overline{\nu}$ s'écrit donc comme le produit tensoriel de trois représentations unitaires irréductibles :

1. l'une de H dont les vecteurs K_1-invariants forment une droite,
2. l'autre de K_2 dont les vecteurs K_2-invariants forment une droite,
3. la dernière, de $\overline{N_2}$.

À cause de l'irréductibilité, la représentation sur K_2 est triviale : $K_2 \subset \ker \overline{\nu}$; d'après le lemme 3.6, $\overline{\nu}$ passe au quotient en une représentation unitaire irréductible $\overline{\overline{\nu}}$ sur $H \times \overline{N_2}$ qui coïncide avec $c.\overline{\rho}$ sur $\overline{N}$ et dont les vecteurs K_1-invariants forment une droite. Nous reprenons les notations du lemme 1.17, ainsi que celle de Ψ_0 (proposition 3.15). Pour une fonction sphérique ω de $(\mathbb{H}^{v_0}, K(m; v_0; v_1))$, on définit les représentations $(\mathcal{H}^\omega, \Pi^\omega)$ de H par :

$$\mathcal{H}^\omega = \{F \circ \Psi_0 \,, \quad F \in \mathcal{H}_\omega\} \quad , \quad \Pi^\omega = \Pi_\omega(\Psi_0 .) \quad .$$

Lemme 3.17
La représentation $\overline{\overline{\nu}}$ est de la forme :

$$\forall \quad (k_1, \overline{n_1}) \in H = K_1 \lhd \overline{N_1} \,, \quad \overline{n_2} = \exp(x\overline{X}) \in \overline{N_2} \,, \quad k_2 \in K_2 \quad :$$
$$\overline{\overline{\nu}}\left((k_1, \overline{n_1}).(k_2, \overline{n_2})\right) = \gamma_1(k_1, \overline{n_1}) \exp(ix) \quad ,$$

où γ_1 est une représentation du $K_1 \lhd N_1$ équivalente à Π^ω avec $\omega = \omega_{|\Lambda^*|, l}$, $l \in \mathbb{N}^{v_1}$; la droite K_1-fixe de $\mathcal{H}^\omega$ est $\mathbb{C}\Omega^\omega \circ \Psi_0$.

Démonstration :La représentation $\overline{\overline{\nu}}$ s'écrit comme le produit tensoriel de γ_1 et γ_2 tel que

(a) la représentation γ_1 du groupe H est irréductible ; ses vecteurs K_1-invariants forment une droite ; elle coïncide avec $c.\overline{\rho}$ sur $\overline{N_1}$;

(b) la représentation γ_2 du groupe $\overline{N_2}$ est irréductible et coïncide avec $c.\overline{\rho}$ sur $\overline{N_2}$.

À cause de l'irréductibilité d'après la condition (a), on a $c = 1$. Donc si $N_2 \neq \{0\}$ c'est-à-dire $r^* \neq 0$, on voit :

$$\overline{\rho}(\exp(x\overline{X_v})) = \gamma_2(\exp(x\overline{X_v})) = \exp(ix) \quad .$$

De plus, d'après la proposition 3.15, H est isomorphe à $H_{heis} = K(m; v_0; v_1) \lhd \mathbb{H}^{v_0}$ par Ψ_0 ; et d'après la première partie du lemme 1.17, on connait les représentations irréductibles $(\mathcal{H}_\omega, \Pi_\omega)$ sur H_{heis} dont les vecteurs K_1-invariants forment une droite. On en déduit que les représentations irréductibles de H dont les vecteurs K_1-invariants forment une droite, sont toutes les représentations $(\mathcal{H}_\omega, \Pi_\omega)$ données dans l'énoncé, lorsque ω parcourt l'ensemble des fonctions sphériques de H_{heis}. De plus, la droite K_1-fixe de $\mathcal{H}^\omega$ est $\mathbb{C}\Omega^\omega \circ \Psi_0$.

Ainsi les représentations γ_1 vérifiant (a) sont les représentations γ_1 équivalentes à une représentation Π^ω satisfaisant : $\Pi^\omega_{|\overline{N_1}} \sim \overline{\rho}_1$. Supposons cette condition vérifiée. D'après la restriction des représentations Π^ω et $\overline{\rho}_1$ sur le centre $\exp \mathbb{R}\overline{B}$ de $\overline{N_1}$ (voir respectivement la seconde partie du lemme 1.17, et la proposition 3.13), le cas $\omega = \omega_\mu$ est impossible, et la fonction ω est de la forme $\omega = \omega_{|\Lambda^*|, l}$. Par conséquent, les représentations γ_1 vérifiant (a) sont parmi les représentations γ_1 équivalentes à une représentation Π^ω avec $\omega = \omega_{|\Lambda^*|, l}$.

$\tilde{G}_\rho \subset \tilde{G}'_\rho$. On note la projection canonique (X est décomposé selon (3.2)) :

$$q_1 \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \overline{N_1} \\ n = \exp(X + A) & \longmapsto & \exp\left(\sum_{j=1}^{2v_0} x_j \overline{X_j} + \frac{<A^*, A>}{|\Lambda^*|} \overline{B}\right) \end{array} \right. \quad .$$

Par la projection canonique :

$$\begin{array}{rcl} K_\rho \lhd N = K_1 \times K_2 \lhd N & \longrightarrow & \left(K_1 \lhd \overline{N_1}\right) \times \left(K_2 \times \overline{N_2}\right) \\ k = k_1 k_2, n = \exp(X + A) & \longmapsto & \left((k_1, q_1(n)), (k_2, \exp(r^* < X_v^*, X > \overline{X}))\right) \end{array} \quad ,$$

la représentation $\overline{\overline{\nu}}$ se relève en la représentation ν ; grâce au lemme 3.17, ν est équivalente à une représentation $(\mathcal{H}^\omega, \nu^{r^*, \Lambda^*, l})$ sur $K_\rho \lhd N$ avec $\omega = \omega_{|\Lambda^*|, l}$, donnée par :

$$\forall \quad k = k_1 k_2 \in K_\rho = K_1 \times K_2 \ , \quad n = \exp(X + A) \in N \quad :$$

$$\nu^{r^*, \Lambda^*, l}(k, n) = e^{ir^* < X_v^*, X>} \, \Pi^\omega(k_1, q_1(n)) \quad .$$

On note $\tilde{G}'_\rho$ l'ensemble des classes des représentations $\nu^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}$, $l \in \mathbb{N}^{v_1}$. C'est un ensemble de classe de représentations de $K_\rho \lhd N$, qui contient $\tilde{G}_\rho$; les restrictions à N de ses représentants $(\mathcal{H}^\omega, \nu^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon})$ peuvent (a priori) ne pas être équivalentes à ρ. Cependant, par construction, elles ont une droite K_ρ-fixe dont un des vecteurs unitaires est $\vec{u} = \Omega^\omega \circ \Psi_0$. Notons ϕ^ν la fonction sphérique associée.

Lemme 3.18 (Calcul de $\phi^\nu, \nu \in \tilde{G}'_\rho$)
La fonction ϕ^ν est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}(n) &= \int_{k \in K} e^{ir^* < X_v^*, k.X>} \omega \circ \tilde{\Psi}_2(k.n) dk \\ &= \int_{k \in K} \Theta^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}(k.n) dk \quad , \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\omega = \omega_{|\Lambda^*|, l}$ et $\tilde{\Psi}_2 = \Psi_2^{-1} \circ q_1$, et la fonction $\Theta^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}$ est donnée par :

$$\Theta^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}(\exp(X + A)) \ = \ e^{ir^* < X_v^*, X>} e^{i < D_2^\epsilon(\Lambda^*), A>} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j, m_j - 1}\left(\frac{\lambda_j}{2} |pr_j(X)|^2\right) \quad .$$

Démonstration du lemme 3.18: D'après l'expression de la représentation $\nu = \nu^{r^*, \Lambda^*, l, \epsilon}$, on a :

$$\nu(I, n)\vec{u} = e^{ir^* < X_v^*, X>} \, \Pi^\omega(I, q_1(n)) \Omega^\omega \circ \Psi_0 \quad ,$$

puis :

$$\left\langle \nu(I, n).\vec{u}, \, \vec{u} \right\rangle_{\mathcal{H}^\nu} \ = \ e^{ir^* < X_v^*, X>} \left\langle \Pi^\omega(I, q_1(n)) \Omega^\omega \circ \Psi_0 \, , \, \Omega^\omega \circ \Psi_0 \right\rangle_{H^\omega} \quad .$$

L'isomorphisme Ψ_0 donne :

$$\left\langle \Pi^\omega(I, q_1(n)) \Omega^\omega \circ \Psi_0 \, , \, \Omega^\omega \circ \Psi_0 \right\rangle_{H^\omega} \ = \ \left\langle \Pi_\omega(I, \Psi_2^{-1} \circ q_1(n)) \Omega^\omega, \, \Omega^\omega \right\rangle_{H_\omega} \quad .$$

De l'expression de Ψ_2 (proposition 3.15), on en déduit une expression $\tilde{\Psi}_2 = \Psi_2^{-1} \circ q_1$ (X étant décomposé selon (3.2)) si $K = SO(v), v_0 = v', \epsilon = -1$:

$$\tilde{\Psi}_2(\exp(X + A)) = (\sqrt{\frac{\lambda_1}{|\Lambda^*|}}(x_1 + ix_2), \ldots, -\sqrt{\frac{\lambda_{v'}}{|\Lambda^*|}}(x_{2v'} + ix_{2v'-1}), \frac{< D_2^\epsilon(\Lambda^*), A >}{|\Lambda^*|}) \quad ,$$

sinon :

$$\tilde{\Psi}_2(\exp(X + A)) = (\sqrt{\frac{\lambda_1}{|\Lambda^*|}}(x_1 + ix_2), \ldots, \sqrt{\frac{\lambda_{v_0}}{|\Lambda^*|}}(x_{2v_0-1} + ix_{2v_0}), \frac{< D_2(\Lambda^*), A >}{|\Lambda^*|}) \quad .$$

Par définition de la représentation Π_ω, la fonction Ω^ω étant la fonction de type positif associée à cette représentation (ou par l'équation fonctionnelle (1.4) des fonctions sphériques pour Ω^ω), on a :

$$\left\langle \Pi_\omega(I, \tilde{\Psi}_2(n))\Omega^\omega, \Omega^\omega \right\rangle_{H_\omega} = \Omega^\omega\left(I, \tilde{\Psi}_2(n)\right) = \omega \circ \tilde{\Psi}_2(n) \quad .$$

Grâce à l'expression de $\tilde{\Psi}_2$, en renommant les λ_i^* en les λ_j distincts, et grâce à l'expression de $\omega = \omega_{|\Lambda^*|,l}$ théorème 1.10, on obtient dans les deux cas :

$$\omega \circ \tilde{\Psi}_2(\exp(X + A)) = e^{i<D_2^\epsilon(\Lambda^*),A>} \prod_{j=1}^{v_1} \bar{\mathcal{L}}_{l_j,m_j-1}(\frac{\lambda_j}{2}|\mathrm{pr}_j(X)|^2) \quad ,$$

puis l'expression (3.1) de la fonction $\phi^\nu = \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ donnée dans le lemme.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.5.
Les théorèmes 3.1 et 3.2 sont ainsi démontrés.

3.2 Remarques

Nous confrontons ici les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 avec ceux déjà connus, ou ceux issus d'autres propriétés des fonctions sphériques. Nous obtiendrons des propriétés du sous-laplacien de Kohn.

3.2.1 Représentation sur $N_{v,2}$

Dans la section précédente, nous avons caractérisé les fonctions sphériques bornées des paires $(N_{v,2}, O(v))$ et $(N_{v,2}, SO(v))$ grâce aux représentations des groupes $O(v) \ltimes N_{v,2}$ et $SO(v) \ltimes N_{v,2}$. On peut aussi le faire grâce aux représentations sur $N = N_{v,2}$ [BJR90, theorem G]. Rappelons brièvement une partie de ce résultat. Pour une représentation $(\mathcal{H}, \Pi)$ irréductible de N, on définit pour un élément k du stabilisateur K_Π dans K, l'opérateur d'entrelacement W_Π, donné (à une constante complexe de module 1 près) par : $W_\Pi(k) \circ \Pi(n) =$

$\Pi(k.n) \circ W_\Pi(k)$. On obtient ainsi la représentation projective $W_\Pi : K_\Pi \mapsto \mathrm{End}\mathcal{H}$. On décompose $\mathcal{H} = \sum_l V_l$ en une somme orthogonale de sous espaces irréductibles invariants sous l'action de W_Π. Les fonctions sphériques sont données par

$$\phi_{\Pi,\zeta}(n) = \int_K < \Pi(k.n).\zeta, \zeta > dk \quad ,$$

lorsque $\Pi \in \hat{N}$ et $\zeta \in V_l$, $|\zeta| = 1$ (deux représentations Π équivalentes ou deux vecteurs du même espace V_l donnent la même fonction sphérique). Au cours de la preuve de [BJR90, theorem 8.7] (et des lemmes qui le précèdent), on utilise que pour une fonction $f \in L^1(N)^\natural$, $\Pi(f)$ préserve chaque sous espace V_l et vaut en restriction à ce sous espace, à une constante près Id_{V_l} (lemme de Schur). Cette constante vaut $< \phi_{\Pi,\zeta}, f >$, $\zeta \in V_l, |\zeta| = 1$. Cette propriété est aussi vrai pour les mesures radiales de masses finies. On a donc aussi pour $\zeta \in E_l, \zeta' \in E_{l'}$:

$$\int_K < \Pi(k.n).\zeta, \zeta' > dk = \phi_{\Pi,\zeta}(n) < \zeta, \zeta' > \quad ,$$

qui vaut 0, si $l \neq l'$.

Cas $\Lambda^* = 0$. Chaque fonction sphérique $\phi^{r^*,0}$ est trivialement associée par [BJR90, theorem G] à la représentation de N de dimension 1 donnée par le caractère :

$$n = \exp(X + A) \longmapsto \exp(ir^* < X_v^*, X >) \quad .$$

Cas $\Lambda^* \neq 0$. Soient $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}$ avec $\Lambda^* \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}^{v_1}, \epsilon = \pm 1, \emptyset$. On considère la représentation $\Pi = \Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ de N sur l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{v_0})$ donnée pour une fonction $f \in \mathcal{H}$ de la variable $(y_1, \ldots, y_{v_0}) \in \mathbb{R}^{v_0}$, et pour $n = \exp(X + A) \in N$ avec X décomposé selon (3.2) si $v_0 = v'$ et $\epsilon = -1$ par :

$$\begin{aligned} \Pi(n).f(y) &= \exp\left(ir^* x_v + < D_2^\epsilon(\Lambda^*), A >\right) \\ &\quad \exp i \left(\sum_{j=1}^{v'-1} \frac{\lambda_j^*}{2} x_{2j} x_{2j-1} + \sqrt{\lambda_j^*} x_{2j} y_j - \frac{\lambda_{v'}^*}{2} x_{2v'} x_{2v'-1} - \sqrt{\lambda_{v'}^*} x_{2v'} y_{v'} \right) \\ &\quad f(y_1 + \sqrt{\lambda_1^*} x_1, \ldots, y_{v'} + \sqrt{\lambda_{v'}^*} x_{2v'-1}) \quad , \end{aligned}$$

et sinon par :

$$\begin{aligned} \Pi(n).f(y) &= \exp i \left(r^* x_v + < D_2^\epsilon(\Lambda^*), A > + \sum_{j=1}^{v_0} \frac{\lambda_j^*}{2} x_{2j} x_{2j-1} + \sqrt{\lambda_j^*} x_{2j} y_j \right) \\ &\qquad\qquad f(y_1 + \sqrt{\lambda_1^*} x_1, \ldots, y_{v_0} + \sqrt{\lambda_{v_0}^*} x_{2v_0-1}) \quad . \end{aligned}$$

Cette représentation $\Pi = \Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ est équivalente à $\rho_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ grâce à l'opérateur d'entrelacement :

$$F \in \mathcal{H}_{r^*,\Lambda^*,\epsilon} \longmapsto f \in \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad f(y_1, \ldots, y_{v'}) = \left(\prod_{j=1}^{v_0} \lambda_j^*\right)^{\frac{1}{4}} F(\sqrt{\lambda_1^*} y_1, \ldots, \sqrt{\lambda_{v_0}^*} y_{v_0}) \quad .$$

La représentation Π est donc irréductible; on peut aussi le voir directement en s'inspirant du cas du groupe de Heisenberg [Fol89]. Ainsi, c'est une représentation de N associée par Kirillov, à l'orbite contenant $r^*X_v + D_2^\epsilon(\Lambda^*)$. Nous avons déjà décrit son noyau $\ker\Pi$ dans la remarque 3, puis son stabilisateur K_Π dans la sous-section 3.1.4, enfin le groupe quotient $N/\ker\Pi$ dans la section 3.1.5. Rappelons que le groupe $N/\ker\Pi$ est isomorphe par Ψ_2 au groupe de Heisenberg, à une éventuel facteur euclidien près, et que K_Π est isomorphe par Ψ_1 au groupe $K(m, v_0, v_1) \subset U_{v_0}$.

La décomposition de $\mathcal{H}$ par W_Π se ramène au même problème sur le groupe de Heisenberg pour le groupe $K(m, v_0, v_1)$. Ce dernier est connu : en effet, par exemple pour $K = U_{v_0}$, et pour les représentations de Bargmann sur $\mathbb{H}^{v_0}$, ces espaces sont les espaces de polynômes homogènes de degré fixé [FH87, ch.IV,III.2]; les représentations de Bargmann et de Schrödinger sont équivalentes et leur opérateur d'entrelacement envoie le monôme homogène sur la fonction de Hermite tel que le degré égale le paramètre (à une normalisation près) [FH87, ch.IV,III.1].

On obtient ainsi une autre construction des fonctions sphériques bornées de $(N_{v,2}, SO(v))$, dans la forme que nous donnons maintenant (mais que nous ne démontrons pas).

Pour $l = (l_1, \ldots, l_{v_1}) \in \mathbb{N}^{v_1}$, on note E_l l'ensemble des $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{v_1})$ tels que $\alpha^j \in \mathbb{N}^{m_j}, |\alpha^j| = l_j$ pour $j = 1, \ldots, v_1$; pour un tel $\alpha \in E_l$, nous considérons la fonction unitaire $\zeta_\alpha \in \mathcal{H}$ donnée grâce aux fonctions de Hermite (voir sous-section 5.1.5) par :

$$\zeta_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{v_0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y_1, \ldots, y_{v_0} & \longmapsto & \Pi_{j=1}^{v_1} h_{\alpha^j}(y_{m'_{j-1}+1}, \ldots, y_{m'_j}) \end{array} \right. .$$

Comme les fonctions de Hermite sur $\mathbb{R}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, la famille $\zeta_\alpha, \alpha \in E_l, l \in \mathbb{N}^{v_1}$ est une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On peut montrer que les espaces V_l, engendrés par $\zeta_\alpha, \alpha \in E_l$ sont irréductibles pour l'action de K_Π.

On sait donc déjà que pour $\alpha \in E_l$ et $\alpha' \in E_{l'}$, la fonction

$$n \longmapsto \int_K < \Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}(k.n).\zeta_\alpha, \zeta_{\alpha'} >_{\mathcal{H}} dk \quad ,$$

est une fonction sphérique si $l = l'$ et $\alpha = \alpha'$, et nulle sinon. On montre que cette fonction sphérique est

$$\phi_{\Pi,\zeta_\alpha} = \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} \quad , \alpha \in E_l \quad ;$$

pour cela, par exemple, on peut considérer le vecteur :

$$\zeta_l = (\mathrm{Card} E_l)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha \in E_l} \zeta_\alpha \in V_l \quad ,$$

et utiliser les propriétés des fonctions de Hermite et de Laguerre. En particulier, pour $\alpha \in E_l$, $\alpha' \in E_{l'}$ et $l, l' \in \mathbb{N}^{v_1}$, on a :

$$\int_K < \Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}(k.n).\zeta_\alpha, \zeta_{\alpha'} >_{\mathcal{H}} dk = \left\{ \begin{array}{ll} \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}(n) & \text{si } l = l', \alpha = \alpha' \quad , \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{array} \right. \tag{3.4}$$

pour $K = SO(v)$ ou $O(v)$.

Soit une fonction $f \in L^1(N)^\natural$. Grâce à ce qui a été rappelé sur $\Pi(f)$ ou par calcul direct, on a pour $\alpha \in E_l$:

$$\Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}(f).\zeta_\alpha = < f, \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} > \zeta_\alpha \quad . \tag{3.5}$$

3.2.2 Sous-laplacien

Le **sous-laplacien "de Kohn"** est l'opérateur différentiel :

$$L := -\sum_{i=1}^{v} X_i^2 \quad .$$

C'est un opérateur sous-elliptique (à coefficients analytiques) invariant par translation à gauche et par $O(v)$ et $SO(v)$; donc les fonctions sphériques (qui en sont des fonctions propres) sont analytiques (ce que l'on pouvait déjà voir sur leurs expressions explicites).

Chaque représentation $\Pi = \Pi_{r^*,\Lambda^*,\epsilon}$ induit la représentation suivante, notée $d\Pi$ de l'algèbre des opérateurs différentiels sur N invariants à gauche sur l'espace des fonctions de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{v_0})$:

$$\begin{array}{lrcl} j = 1, \ldots, v_0 & d\Pi(X_{2j-1}) & = & \sqrt{\lambda_j^*}\partial_{y_j} \quad \text{et} \quad d\Pi(X_{2j}) = i\sqrt{\lambda_j^*}y_j \quad , \\ 2v_0 < j < v & d\Pi(X_j) & = & 0 \quad \text{et} \quad d\Pi(X_v) = ir^*\mathrm{Id} \quad , \\ \forall i < j & d\Pi(X_{i,j}) & = & \left\{ \begin{array}{ll} i\sqrt{\lambda_{j'}^*}\mathrm{Id} & \text{si } (i,j) = (2j'-1, 2j'), j' \neq v' \ , \\ i\epsilon\sqrt{\lambda_{j'}^*}\mathrm{Id} & \text{si } (i,j) = (2v'-1, 2v') \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

En particulier, pour le sous-laplacien L, on a :

$$d\Pi(L) = r^{*2}\mathrm{Id} - \sum_{i=1}^{v_0} \lambda_i^* \left(\partial_{y_i}^2 - y_i^2\right) \quad .$$

Comme chaque fonction de Hermite-Weber $h_k, k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle : $y'' + (2k + 1 - x^2)y = 0$, on calcule facilement pour $\alpha \in E_l$:

$$d\Pi(L).\zeta_\alpha = \left(\sum_{j=1}^{v_1} \lambda_j(2l_j + m_j) + r^{*2}\right) \zeta_\alpha \quad . \tag{3.6}$$

Ainsi, les fonctions $\zeta_\alpha, \alpha \in E_l, l \in \mathbb{N}^{v_1}$ forment une base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur $d\Pi(L)$.

Grâce aux égalités (3.4) et (3.6), on déduit la valeur propre associée à une fonction sphérique bornée $\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ pour le sous-laplacien L :

$$L.\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} = \left(\sum_{j=1}^{v_1} \lambda_j(2l_j + m_j) + r^{*2}\right) \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} \quad . \tag{3.7}$$

Cette égalité a un sens pour $\Lambda^* = 0$, en convenant toujours que si $\Lambda^* = 0$, $\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ signifie $\phi^{r^*,0}$ (et évidemment $\lambda_i^* = 0$ et $\lambda_j = 0$ aussi). Sa preuve est directe lorsque l'on considère les expressions des fonctions sphériques bornées données dans le théorème 3.2. En particulier pour $\epsilon = 1$, on trouve les valeurs propres pour le sous laplacien et les fonction sphériques de la paire $N_{v,2}, O(v)$

Dans le cas $\Lambda^* \neq 0$, on a donné une ébauche de preuve ci dessus. On peut aussi faire le calcul direct et utiliser des identités remarquables sur les fonctions de Laguerre, ou encore en utilisant notre construction des fonctions sphériques bornées et ce que l'on a rappelé dans la sous-section 1.2.2 sur le groupe de Heisenberg.

Corollaire 3.19 (Transformée de Fourier du noyau de $m(L)$)
Soit $m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le noyau $M \in \mathcal{S}(N)$ de l'opérateur $m(L)$ est une fonction radiale dont on connait la transformée de Fourier sphérique :

$$\langle M, \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}\rangle = m(\sum_{j=1}^{v_1} \lambda_j(2l_j + m_j) + r^{*2}) \quad ,$$

pour tout $(r^*, \Lambda) \in \mathcal{Q}$, $l \in \mathbb{N}^{v_1}$ si $\Lambda^* \neq 0$, et $\epsilon = \pm 1, \emptyset$.

3.2.3 Autres opérateurs différentiels

Une autre méthode pour déterminer les fonctions sphériques, serait d'utiliser le théorème 1.7, c'est à dire de considérer les fonctions sphériques comme fonctions propres communes des opérateurs différentiels invariants à gauche et par $O(v)$ ou $SO(v)$. C'est ce que nous avions fait pour les paires de Guelfand $(\mathbb{H}^{v_0}, K(m; v_0; v_1))$. Mais sur le groupe $N = N_{v,2}$, il n'est pas aisé de trouver des générateurs pour ces opérateurs.

Outre le sous-laplacien L, on connait d'autres opérateurs différentiels invariants à gauche et par K. Citons d'abord le laplacien du centre :

$$\Delta_{\mathcal{Z}} = -\sum_{i<j} X_{i,j}^2 \quad ,$$

dont on calcule facilement la valeur propre associée à une fonction sphérique :

$$\Delta_{\mathcal{Z}}.\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} = \left(\sum_{i=1}^{v'} \lambda_i^{*2}\right) \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} \quad . \tag{3.8}$$

Il y a également les opérateurs différentiels associés à polynôme K-invariant en les coefficients de matrice et de vecteur ; par exemple, le polynôme $P(A, X) = \|A.X\|^2$, et tous les polynômes $P(A, X) = \|A^n.X\|^2, n \in \mathbb{N}$.

On peut donner des exemples d'opérateurs D_P issus de polynôme P seulement en les coefficients de matrice invariant sous l'action par conjugaison de K sur les matrices :

- avec le polynôme $P(A) = \|A\|^2 = \text{trace}\,(A^t A)$, on retrouve le laplacien du centre $D_P = 2\Delta_{\mathcal{Z}}$;

– si l'on considère le polynôme caractéristique d'une matrice A :

$$X^p + c_{p-1}(A)X^{p-1} + \dots c_0(A) \quad .$$

Le polynôme c_i est symétrique en les coefficients de la matrice A et K-invariant. On peut donc lui associer un opérateur différentiel sur $\mathcal{N}$ invariant à gauche et sous K, en identifiant une matrice antisymétrique A de coefficient antisymétrique $A_{i<j}$ et l'élément $\sum A_{i,j}X_{i,j}$ du centre de $\mathcal{N}$.
Par exemple, en étendant les notations $X_{i,j} = -X_{j,i}, i < j$ et $X_{i,i} = 0$, on peut considérer le polynôme en les coefficients matriciels $c_0(A) = \det A$; L'opérateur différentiel associé est :

$$D_{c_0} = \sum \epsilon(\sigma)\Pi_i X_{i,\sigma(j)} \quad ,$$

la somme étant sur toutes les bijections σ de $\{1, \dots, p\}$ et $\epsilon(\sigma)$ désignant la signature de σ. On connait pour cet opérateur les valeurs propres associées à chaque fonction sphérique :

$$D_{c_0}\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{v'} \lambda_i^{*2}\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} & \text{si } v = 2v' \ , \\ 0 & \text{si } v = 2v' + 1 \ . \end{cases}$$

Avec les égalités (3.8) et (3.7), on démontre :

Lemme 3.20 (Une famille de fermés de Ω)
L'ensemble des fonctions sphériques bornées Ω (pour $SO(v)$ ou $O(v)$), muni la convergence uniforme sur tout compact, s'identifie au spectre de l'algèbre $L^1(N)^\natural$, muni de la topologie faible-. Le sous-ensemble $\Omega^N, N > 0$ de Ω formé :*
- *des fonctions sphériques $\phi^{r^*,0}$ avec $r^* \leq N$,*
- *des fonctions sphériques $\phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon}$ avec $\Lambda^* \in \overline{\mathcal{L}} - \{0\}$ et $\epsilon = \pm 1, \emptyset$ vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{v'} \lambda_i^{*2} \leq N^2 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{j=1}^{v_1} \lambda_j(2l_j + m_j) + r^{*2} \leq N^2 \quad ,$$

est fermé dans l'ensemble Ω.

De ce lemme, on déduit facilement :

Corollaire 3.21 (Identification des structures boréliennes de Ω)
Lorsque l'on identifie les fonctions sphériques et leurs paramètres, les structures boréliennes de l'ensemble (topologique) Ω et des paramètres $(r^*, \Lambda^*) \in \mathcal{Q}, l \in \mathbb{N}^{v_1}, \epsilon = \pm 1, \emptyset$ des fonctions sphériques bornées pour $SO(v)$ ou $O(v)$, s'identifient également.

3.3 Mesure de Plancherel radiale

Dans cette section, nous explicitons la mesure de Plancherel radiale pour les fonctions sphériques pour $O(v)$. La mesure de Plancherel radiale est la mesure pour laquelle on a la formule de Plancherel radiale :

$$\forall f \in L^1_{loc}(N)^\natural \quad : \quad \|f\|_{L^2(N)} = \|< f, \phi >\|_{L^2(dm(\phi))} \quad . \tag{3.9}$$

Nous avons déjà donné son expression dans le théorème 3. Dans cette section, après avoir redonné l'énoncé de ce théorème, nous le démontrons.

3.3.1 Expression de la mesure de Plancherel radiale

On identifie les fonctions sphériques et leurs paramètres. Le corollaire 3.21 nous permet d'identifier aussi les structures boréliennes. Le théorème qui suit montre que la mesure de Plancherel radiale est supportée par les fonctions sphériques $\phi^{r^*,\Lambda^*,l}$, dont les paramètres r^*, Λ^*, l sont dans l'ensemble $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}$ donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2v'} &= \{(0,\Lambda^*,l)\,, \quad \Lambda^* \in \mathcal{L}\,,\ l \in \mathbb{N}^{v'}\} \quad , \\ \mathcal{P}_{2v'+1} &= \{(r^*,\Lambda^*,l)\,, \quad r^* \in \mathbb{R}^+\,,\ \Lambda^* \in \mathcal{L}\,,\ l \in \mathbb{N}^{v'}\} \quad , \end{aligned}$$

avec les notations du théorème 3.1.

On note η' la mesure sur le simplexe $\mathcal{L}$ donnée par :

$$d\eta'(\Lambda) = \Pi_j \lambda_j d\eta(\Lambda) \quad , \quad \Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \quad ,$$

où η est la mesure sur le simplexe $\mathcal{L}$ dont l'expression est donnée dans le lemme 5.11,

On note également m sur $\mathcal{P}$, produit tensoriel :

- de la mesure η',
- de la mesure $\sum$ de comptage sur $\mathbb{N}^{v'}$,
- et si $v = 2v'+1$ de la mesure de Lebesgue dr^* sur $\mathbb{R}^+$,

à la constante de normalisation près :

$$c(v) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{v(v-1)}{2}-v'} & \text{si } v = 2v' \ , \\ 2(2\pi)^{-\frac{v(v-1)}{2}-1-v'} & \text{si } v = 2v'+1 \ . \end{cases}$$

Dans le cas $v = 2v'$, on note la mesure :

$$dm(\Lambda^*, l) = dm(\phi^{0,\Lambda^*,l}) = c(v) d\eta' \otimes \sum \quad ,$$

et dans le cas $v = 2v'+1$:

$$dm(r^*, \Lambda^*, l) = dm(\phi^{r^*,\Lambda^*,l}) = c(v) d\eta' \otimes \sum \otimes dr^* \quad .$$

Rappelons l'énoncé du théorème 3 :

Théorème principal 3.22 (Mesure de Plancherel radiale)
La mesure de Plancherel est supportée par $\mathcal{P}$ et s'identifie à m.

Dorénavant, on confond les fonctions sphériques ϕ et leurs paramètres : on écrira pour une fonction $g : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, $g(\phi)$ ou $g(r^*, \Lambda^*, l)$ pour $g(r^*, \Lambda^*, l)$ lorsque $\phi = \phi^{r^*,\Lambda^*,l}$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous donnons quelques notations et proprités concernant la transformée de Fourier euclidienne. Nous utiliserons les notations suivantes pour la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}_{\zeta/x}.f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix.\zeta}dx \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{F}}_{\zeta/x}.f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{ix.\zeta}dx \quad .$$

On identifie $\mathcal{V}, \mathcal{V}^*$ et $\mathbb{R}^v$, ainsi que $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*$ et $\mathbb{R}^z$, $z = v(v-1)/2$; cela nous permet de considérer les transformées de Fourier euclidienne en ces variables.

On remarque :

Lemme 3.23
Soit $f \in \mathcal{S}(N)^\natural$. Soient $A^* \in \mathcal{A}_v$ et $k \in O(v)$ tels que $k.A^* = A^*$. On a :

$$\forall X \in \mathcal{V} \sim \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(\exp(X + A))\right] = \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(\exp(X + k^{-1}.A))\right] \quad .$$

On a aussi pour $A^* \in \mathcal{A}_v$ et $k \in O(v)$:

$$\int_{\mathbb{R}^v} \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(\exp(X + A))\right]dX = \int_{\mathbb{R}^v} \mathcal{F}_{k.A^*/A}.\left[f(\exp(X + A))\right]dX \quad .$$

Démonstration du lemme 3.23: Pour la première égalité, effectuons le changement de variable $A' = k^{-1}.A$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(k.\exp(X + A))\right] &= \int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X + k^{-1}.A))e^{-i<A^*,A>}dA \\ &= \int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X + A'))e^{-i<A^*,k.A'>}dA' \quad . \end{aligned}$$

On a d'une part, par dualité $:< A^*, k.A > = < k^{-1}.A^*, A >$, d'autre part $k^{-1}.A^* = A^*$ car A^* et k commute par hypothèse.

Pour la seconde égalité, commençons par remarquer :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k.A^*/A}.\left[f(\exp(X + A))\right] &= \int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X + A))e^{-i<k.A^*,A>}dA \\ = \int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X + A'))e^{-i<A^*,k^{-1}.A>}dA &= \int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X + k.A'))e^{-i<A^*,A'>}dA' \quad , \end{aligned}$$

après le changement de variable $A' = k^{-1}.A$. Maintenant, comme f est radiale, on voit : $f(\exp(X + k.A')) = f(\exp(k^{-1}.X + A'))$; on en déduit :

$$\mathcal{F}_{k.A^*/A}.\left[f(\exp(X + A))\right] = \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(\exp(X + k.A))\right] = \mathcal{F}_{A^*/A}.\left[f(\exp(k^{-1}.X + A))\right] \quad ,$$

puis :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^v} \mathcal{F}_{k.A^*/A^.}\left[f(\exp(X+A))\right] dX &= \int_{\mathbb{R}^v} \mathcal{F}_{A^*/A^.}\left[f(\exp(k^{-1}.X+A))\right] dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^v} \mathcal{F}_{A^*/A^.}\left[f(\exp(X'+A))\right] dX'\end{aligned}$$

après le changement de variable $X' = k^{-1}.X$.

Démontrons le théorème 3.22. On définit les sous groupes $K_i, i = 1, \ldots, v_0$ de K de la manière suivante : K_i est l'ensemble des éléments $k \in SO(v)$ tels que $k.X_j = X_j$ pour tout $j \neq 2i-1, 2i$, qui laissent stable le plan $P_i := \mathbb{R}X_{2i-1} \oplus \mathbb{R}X_{2i}$. On note dk_i la mesure de Haar (de masse 1) du groupe compact K_i, $i = 1, \ldots, v_0$. Par restriction à P_i, les éléments de K_i sont des transformations orthogonales directes du plan P_i, et on a le passage en coordonnées polaires :

$$\int_{P_i} f(x_{2i-1}X_{2i-1} + x_{2i}X_{2i}) dx_{2i-1}dx_{2i} = 2\pi \int_{K_i}\int_0^\infty f(r_ik_i.X_{2i-1})r_idr_idk_i \quad . \tag{3.10}$$

On note $\tilde{K} = K_1 \times \ldots \times K_{v'}$; c'est un groupe compact, dont on note $d\tilde{k} = dk_1 \ldots dk_{v'}$ la mesure de Haar de masse 1. On définit la mesure sur $\mathbb{R}^{+v'}$: $\tilde{r}d\tilde{r} = r_1dr_1 \ldots r_{v'}dr_{v'}$.

Par approximation, pour montrer le théorème 3.22, il suffit de montrer la formule (3.9) pour la classe de fonctions $\mathcal{S}(N)^\natural$. Soit donc $f \in \mathcal{S}(N)^\natural$.

Soit $\phi = \phi^{r^*,\Lambda^*,l}$ une fonction spérique telle que $\Lambda^* \in \mathcal{L}$ et $r^* = 0$ si $v = 2v'$. D'après son expression donnée dans le théorème 3.1, on a :

$$\begin{aligned}< f, \phi > &= \int_{\mathbb{R}^v}\int_{\mathcal{A}_v} f(\exp(X+A))e^{ir^*x_v}e^{i<D_2(\Lambda^*),A>}\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2))dAdX \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathcal{A}_v}\int_{P_{v'}}\cdots\int_{P_{v_1}} f\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{v'} x_{2i-1}X_{2i-1} + x_{2i}X_{2i} \ + x_{2v'+1}X_{2v'+1} + A\right) \\ &\qquad e^{ir^*x_v}e^{i<D_2(\Lambda^*),A>}\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2))dx_1\ldots dx_{2v'}\,dAdx_{2v'+1} \quad .\end{aligned}$$

Appliquons aux v' plans $P_i, i = 1, \ldots, v'$ la formule (3.10). On obtient :

$$\begin{aligned}< f, \phi >= (2\pi)^{v'}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathcal{A}_v}\int_{\mathbb{R}^{+v'}}\int_{\tilde{K}} f\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{v'} r_ik_i.X_{2i-1} \ + x_{2v'+1}X_{2v'+1} + A\right) \\ \prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}r_j^2)d\tilde{k}\,\tilde{r}d\tilde{r}\, e^{ir^*x_v}e^{i<D_2(\Lambda^*),A>}\, dAdx_{2v'+1} \quad .\end{aligned}$$

On a donc :

$$< f, \phi >= (2\pi)^{v'}\int_{\mathbb{R}^{+v'}}\int_{\tilde{K}} F(\tilde{r}, \Lambda^*, r^*, \tilde{k})\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}r_j^2)d\tilde{k}\,\tilde{r}d\tilde{r} \quad ,$$

où on a posé pour $\tilde{r}=(r_1,\ldots,r_{v'})\in\mathbb{R}^{+v'}$, $\Lambda^*\in\mathcal{L}, r^*\in\mathbb{R}^+$ et $\tilde{k}=(k_1,\ldots,k_{v'})\in\tilde{K}$:

$$\begin{aligned}&F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*,\tilde{k})\\&:= \mathcal{F}_{r^*/x_{2v'+1}}\cdot\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}\cdot\left[f\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_ik_i.X_{2i-1}+x_{2v'+1}X_{2v'+1}+A\right)\right]\ .\end{aligned}$$

Montrons que l'expression $F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*,\tilde{k})$ ne dépend pas de $\tilde{k}=(k_1,\ldots,k_{v'})$: par défintion des sous-groupes K_i, on a :

$$\begin{aligned}&f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_ik_i.X_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+A\right)\right)\\&\quad= f\left(k_1\ldots k_{v'}.\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_iX_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+(k_1\ldots k_{v'})^{-1}.A\right)\right)\quad ;\\&\quad= f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_iX_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+\tilde{k}^{-1}.A\right)\right)\quad ,\end{aligned}$$

car la fonction f est radiale. Maintenant comme les matrices orthogonales directes du plan commutent avec J, la matrice $D_2(\Lambda^*)$ commute avec tous les $k_i\in K_i, i=1,\ldots,v'$ donc avec $\tilde{k}$. Ainsi d'après la première égalité du lemme 3.23 et celle qui précède, on a :

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}\cdot\left[f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_ik_i.X_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+A\right)\right)\right]\\&\quad=\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}\cdot\left[f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_iX_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+A\right)\right)\right]\quad ,\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*,\tilde{k})&=\mathcal{F}_{r^*/x_{2v'+1}}\cdot\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}\cdot\left[f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{v'}r_iX_{2i-1}\ +x_{2v'+1}X_{2v'+1}+A\right)\right)\right]\\&:= F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*)\quad .\end{aligned}$$

Avec cette nouvelle notation, on a :

$$\begin{aligned}<f,\phi> &= (2\pi)^{v'}\int_{\mathbb{R}^{+v'}}\int_{\tilde{K}}F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*)\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}r_j^2)d\tilde{k}\,\tilde{r}d\tilde{r}\\&= (2\pi)^{v'}\int_{\mathbb{R}^{+v'}}F(\tilde{r},\Lambda^*,r^*)\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j}{2}r_j^2)\tilde{r}d\tilde{r}\quad .\end{aligned}$$

Effectuons les changements de variables $r'_j=\lambda_jr_j^2/2, j=1,\ldots,v'$; on a

$$dr'=dr'_1\ldots dr'_{v'}=\prod_{j=1}^{v'}\lambda_j\tilde{r}d\tilde{r}\quad ,$$

d'où :

$$< f, \phi >= (2\pi)^{v'} \prod_{j=1}^{v'} \lambda_j^{-1} \int_{\mathbb{R}^{+v'}} \tilde{F}(r', \Lambda^*, r^*) \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(r'_j)\, dr' \quad , \tag{3.11}$$

où on a posé pour $r' = (r'_1, \ldots, r'_{v'}) \in \mathbb{R}^{+v'}$, $\Lambda^* \in \mathcal{L}$, et $r^* \in \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{F}(r', \Lambda^*, r^*) := F(\sqrt{\frac{2r'_1}{\lambda_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{2r'_{v'}}{\lambda_{v'}}}, \Lambda^*, r^*) \quad .$$

Or les fonctions $\Pi_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}, l \in \mathbb{N}^{v'}$ forment une base orthonormale de l'espace $L^2(\mathbb{R}^{v'})$ (voir sous-section 5.1.4). Donc on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{+v'}} |\tilde{F}(r', \Lambda^*, r^*)|^2 dr' = \sum_l | \int_{\mathbb{R}^{+v'}} \tilde{F}(r', \Lambda^*, r^*) \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(r'_j)\, dr'|^2 \quad .$$

Le membre de droite d'après l'égalité (3.11), vaut $\left((2\pi)^{-v'} \Pi_j \lambda_j\right)^2 \sum_l | < f, \phi > |^2$.
Le membre de gauche se calcule directement d'abord en effectuant les changements de variable $r'_j = \lambda_j r_j^2/2$,

$$\int_{\mathbb{R}^{+v'}} |\tilde{F}(r', \Lambda^*, r^*)|^2 dr' = \prod_{j=1}^{v'} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^{+v'}} |F(\tilde{r}, \Lambda^*, r^*)|^2 \tilde{r} d\tilde{r} \quad ,$$

puis en remarquant que par définition de F, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{+v'}} |F(r, \Lambda^*, r^*)|^2 r_1 dr_1 \ldots r_{v'} dr_{v'} &= \int_{\mathbb{R}^{+v'}} \int_{\tilde{K}} |F(\tilde{r}, \Lambda^*, r^*, \tilde{k})|^2 d\tilde{k}\, \tilde{r} d\tilde{r} \\ = \int_{\mathbb{R}^{2v'}} |\mathcal{F}_{r^*/x_{2v'+1}} \mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}. & \left[f \circ \exp \left(\sum_{i=1}^{v'} x_{2i-1} X_{2i-1} + x_{2i} X_{2i} + x_{2v'+1} X_{2v'+1} + A \right) \right] |^2 \\ & (2\pi)^{-v'} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2v'-1} dx_{2v'} \quad . \end{aligned}$$

en ayant appliqué aux v' plans $P_i, i = 1, \ldots, v'$ la formule (3.10).

On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} & \left((2\pi)^{-v'} \Pi_j \lambda_j\right)^2 \sum_l | < f, \phi > |^2 \\ & = (2\pi)^{-v'} \Pi_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^{2v'}} |\mathcal{F}_{r^*/x_{2v'+1}} \mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A}. \left[f \circ \exp \left(\sum_{i=1}^{v} x_i X_i + A \right) \right] |^2 dx_1 \ldots dx_{2v'} \quad . \end{aligned}$$

Dans le cas $v = 2v'$, on a :

$$(2\pi)^{-v'} \Pi_j \lambda_j \sum_l | < f, \phi > |^2 = \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX \quad .$$

Dans le cas $v = 2v' + 1$, par parité pour la variable r^*, après intégration contre dr^*, d'après la formule de Plancherel sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$(2\pi)^{-v'}\Pi_j\lambda_j 2 \int_{\mathbb{R}^+} \sum_l | < f, \phi > |^2 dr^* = 2\pi \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX \quad .$$

Appliquons la seconde égalité du lemme 3.23 pour tout $k \in O(v)$:

$$\int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + k.A))] |^2 dX = \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{k.D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX$$
$$= \int_{SO(v)} \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{k.D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX dk \quad ;$$

et donc en intégrant sur $\mathcal{L}$, il vient :

$$\int_{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}} \sum_l | < f, \phi > |^2 dr^* d\eta(\Lambda^*)$$
$$= 2\pi \int_{SO(v)} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{k.D_2(\Lambda^*)/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX \; d\eta(\Lambda^*) dk \quad ,$$

sachant que dans le cas paire, le terme 2π et l'intégrale contre dr^* n'y sont pas.

Effectuons le passage en coordonnées polaires sur $\mathcal{A}_v$ (voir section 5.2) : le membre de droite de cette dernière égalité peut s'écrire :

$$\int_{\mathcal{A}_v} \int_{\mathbb{R}^v} |\mathcal{F}_{A^*/A} \cdot [f(\exp(X + A))] |^2 dX dA^* \quad ,$$

ou encore grâce à la formule de Plancherel euclidienne :

$$(2\pi)^{\frac{v(v-1)}{2}} \int_{\mathcal{A}_v} \int_{\mathbb{R}^v} |f(\exp(X + A))|^2 dX \; dA = (2\pi)^{\frac{v(v-1)}{2}} \|f\|^2 \quad .$$

Finalement, on a obtenu :

$$(2\pi)^{-v'} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}} \sum_l | < f, \phi > |^2 dr^* \Pi_j\lambda_j d\eta(\Lambda^*) = 2.2\pi(2\pi)^{\frac{v(v-1)}{2}} \|f\|^2 \quad ,$$

sachant que dans le cas paire, le terme 2.2π et l'intégrale contre dr^* n'y sont pas.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.22.

3.3.2 Inversion

Pour toute fonction $f \in L^2(N)$ radiale, on définit au sens L^2 :

$$f(n) = \int_{\mathcal{P}} \bar{\phi}(n) < f, \phi > dm(\phi) \quad ,$$

c'est-à-dire que f est la fonction de $L^2(N)^\natural$ qui correspond à la forme sesquilinéaire de l'espace de Hilbert $L^2(N)^\natural$:

$$h \in L^2(N)^\natural \mapsto \int_{\mathcal{P}} < h, \phi > g(\phi) dm(\phi) \quad ;$$

les intégrales ci-dessus ont bien un sens, car on a :

– d'une part $g(\phi) \in L^2(dm(\phi))$ par hypothèse,

– d'autre part $< h, \phi > \in L^2(dm(\phi))$ d'après la formule (3.9) de Plancherel,

– d'où $< h, \phi > g(\phi) \in L^1(dm(\phi))$.

Réciproquement, soit g une fonction sur $\mathcal{P}$. Si $g \in L^2(m)$, on définit au sens L^2 la fonction $f : N \to \mathbb{C}$ suivante :

$$f(n) = \int_{\mathcal{P}} \bar{\phi}(n) g(\phi) dm(\phi) \quad .$$

C'est une fonction radiale de carrée intégrable, et sa transformée de Fourier est donnée par : $< f, \phi >= g(\phi)$.

On peut aussi définir les distributions radiales à partir des distributions sur $\mathcal{P}$. En effet, si h est une fonction C^∞ à support compact sur N (on note $h \in C_0^\infty(N)$), alors la fonction $\phi \mapsto < h, \phi >$ est à décroissance rapide sur $\mathcal{P}$ (d'après la forme des fonctions ϕ et les propriétés des fonctions de Laguerre) et on a : $< h, \phi >=< h^\natural, \phi >$ où on a noté :

$$h^\natural : n \in N \longmapsto \int_{O(v)} h(k.n) dk \quad .$$

Pour g une distribution de Schwarz sur $\mathcal{P}$, en particulier pour $g \in L^\infty(\mathcal{P})$, on définit alors l'application linéaire

$$f : h \in C_0^\infty(N) \longmapsto \int_N < h^\natural, \phi > g(\phi) dm(\phi) \quad ;$$

l'application f est ainsi une distribution (radiale) sur N, dont la transformée de Fourier est $< f, \phi >= g$.

3.3.3 Lien avec le cas non radial

Nous donnons ici avec nos notations la formule de Plancherel non radiale, qui est déjà connue [Str91] section 6.

On note m' la mesure produit tensoriel des mesures suivantes :

– dk^* la mesure de Haar sur $O(v)$,

– m sur $\mathcal{P}$.

Théorème 3.24 (Formule de Plancherel non radiale)
Soit $\psi \in \mathcal{S}(N)$.

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \int \text{trace } (k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\psi)) dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \quad , \\
\|\psi\|^2_{L^2(N)} &= \int \|k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\psi)\|^2_{HS} dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \quad ,
\end{aligned}$$

où $\|.\|_{HS}$ désigne la norme de Hilbert-Schmitt sur les opérateurs de l'espace de Hilbert $L^2(R^{v'})$, et où on convient dans le cas $v = 2v'$, $\Pi_{r^*,\Lambda^*} = \Pi_{0,\Lambda^*}$ et d'omettre l'intégration contre dr^*.

On pose pour une fonction f sur N : $f^*(n) = \overline{f(n^{-1})}$. On déduit de ce théorème, ainsi que de l'égalité (3.5) :

Corollaire 3.25
Soient h_1, h_2 C^∞ deux fonctions à support compact sur N, et $F \in L^{1\natural}$ On a :

$$| < F * h_1, h_2 > | \leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \; \|h_1\|_{L^2(N)} \|h_2\|_{L^2(N)} \quad ,$$

Démonstration :On déduit de l'égalité (3.5), que pour deux fonctions $F_1, h \in L^1(N)$ avec F_1 radiale, on a, en notant $\Pi = \Pi_{r^*,\Lambda^*}$ et pour $\alpha \in E_l$:

$$\begin{aligned} < k^*.\Pi(F_1 * h).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > &= < \Pi(F_1)k^*.\Pi(h).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > = < k^*.\Pi(h).\zeta_\alpha, \Pi(F_1)^*\zeta_\alpha > \\ < k^*.\Pi(F_1 * h).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > &= < \bar{F}, \phi >< k^*.\Pi(h).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > \quad . \end{aligned}$$

Grâce à une approximation de l'unité radiale, cette dernière égalité est encore valable dans le cas $F_1 = F$, distribution radiale dont la transformée de Fourier radiale est bornée sur $\mathcal{P}$.

Reprenons les notations du corollaire. D'après ce qui précède, on a, toujours en notant $\Pi = \Pi_{r^*,\Lambda^*}, \Lambda^* \in \mathcal{L}$:

$$< k^*.\Pi(F * h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > = < \bar{F}, \phi^{r^*,\Lambda^*,l,\epsilon} >< k^*.\Pi(h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > \quad .$$

Comme la famille $\zeta_\alpha, \alpha \in E_l, l \in \mathbb{N}^{v'}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^{v'})$, on a en utilisant l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} \text{trace } (k^*.\Pi(F * h_1 * h_2^*)) &= \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha \in E_l} < k^*.\Pi(F * h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} < \bar{F}, \phi^{r^* X_{2v'+1},\Lambda^*,l} > \sum_{\alpha \in E_l} < k^*.\Pi_{r^* X_{2v'+1},\Lambda^*}(h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > \quad ; \end{aligned}$$

d'où :

$$|\text{trace } (k^*.\Pi(F * h_1 * h_2^*))| \leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha \in E_l} | < k^*.\Pi(h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > | \quad .$$

Or on a par Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathbb{R}^{v'})$:

$$\begin{aligned} | < k^*.\Pi(h_1 * h_2^*).\zeta_\alpha, \zeta_\alpha > | &= | < k^*.\Pi(h_1).\zeta_\alpha, k^*.\Pi(h_2).\zeta_\alpha > | \\ &\leq \|k^*.\Pi(h_1).\zeta_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^{v'})} \|k^*.\Pi(h_2).\zeta_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^{v'})} \quad , \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |\text{trace } (k^*.\Pi(F * h_1 * h_2^*))| &\leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha \in E_l} | < k^*.\Pi(h_1).\zeta_\alpha, k^*.\Pi(h_2).\zeta_\alpha > | \\ &\leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \; \|k^*.\Pi(h_1)\|_{HS} \|k^*.\Pi(h_2)\|_{HS} \quad . \end{aligned}$$

Utilisons la formule de Plancherel non radiale :

$$< F * h_1, h_2 >= F * h_1 * h_2^*(0) = \int \text{trace } (k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(F * h_1 * h_2^*))dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) ,$$

puis l'inégalité ci-dessus (en omettant les indices des représentations Π et certains arguments de m') :

$$\begin{aligned} | < F * h_1, h_2 > | &\leq \int \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \, \|k^*.\Pi(h_1)\|_{HS} \, \|k^*.\Pi(h_2)\|_{HS} \, dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \\ &\leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \left(\int \|k^*.\Pi(h_1)\|_{HS}^2 \, dm' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \|k^*.\Pi(h_2)\|_{HS}^2 \, dm' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\phi \in \mathcal{P}} | < F, \phi > | \, \|h_1\|_{L^2(N)} \, \|h_2\|_{L^2(N)} \quad , \end{aligned}$$

d'après Cauchy-Schwarz puis le corollaire 3.24.

Chapitre 4

Utilisation du calcul de Fourier radiale sur $N_{v,2}$

Grâce au calcul de Fourier obtenu dans le chapitre précédent, nous controlons la norme L^2 des fonctions d'aires dans le cas du groupe nilpotent libre à deux pas, et nous étudions le problème des multiplicateurs.

4.1 Contrôle L^2 des fonctions d'aire pour $N_{v,2}$

Le but de cette section est de démontrer le théorème 2.3.b).

Comme dans le cas d'un groupe de type H, on pose pour une fonction sphérique bornée $\omega \in \Omega$ de N pour $O(v)$:

$$\hat{S}^j(\omega) := \sqrt{\int_0^\infty |\partial_s^j < \mu_s, \omega > |^2 s^{2j-1} ds} \quad .$$

Nous reprenons les mêmes notations et conventions pour le groupe $N = N_{v,2}$ que dans le chapitre 2 et pour les fonctions sphériques bornées $\phi = \phi^{r^*,\Lambda^*,l} \in \mathcal{P}$ que dans la sous-section 3.3.1. En particulier $z = v(v-1)/2$ et $v = 2v'$ ou $2v'+1$. On suppose $v' \geq 2$ dans toute cette section.

Le théorème 2.3.b) sera démontré une fois que l'on aura démontré les deux propositions suivantes :

Proposition 4.1 (S^j et $\hat{S}^j$)
Pour $j \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a :

$$\forall f \in L^2(N) \qquad \|S(f)\| \leq \sup_{\phi \in \mathcal{P}} |\hat{S}^j(\phi)| \; \|f\| \quad ,$$

Proposition 4.2 ($\left\|\hat{S}^j\right\|_\infty$)
Si $v' \geq 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall j \leq \frac{z-1}{4}, v+1 \quad \forall \omega \in \mathcal{P} \qquad \hat{S}^j(\omega) \leq C \quad .$$

Nous pourrions utiliser la même démarche que sur le groupe de type H ; c'est-à-dire utiliser une mesure spectrale E abstraite sur le spectre de l'algèbre commutative $L^{1^\natural}$, en identifiant ce spectre à l'ensemble des fonctions sphériques Ω. Nous serions alors amenés à faire des estimations sur Ω tout entier. Nous allons plutot utiliser la mesure de Plancherel non radiale du théorème 3.24. Cela nous permettra de ne demander des estimations de $\hat{S}^j$ que sur la partie $\mathcal{P}$ des fonctions sphériques.

4.1.1 Fonction d'aire et $\hat{S}^j(\omega)$

Nous démontrons ici la proposition 4.1. Dans cette sous-section, on utilise les notations des sous-sections 3.2.1, 3.3.1, et 3.3.3. En particulier, en utilisant la formule de Plancherel non radiale donnée dans le théorème 3.24, et la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^{v'})$ $\zeta_\alpha, \alpha \in E_l, l \in \mathbb{N}^{v'}$ pour calculer la norme Hilbert-Schmidt des opérateurs, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(N)$:

$$\|f\|^2_{L^2(N)} = \int \sum_l \sum_{\alpha \in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \quad . \tag{4.1}$$

La proposition 4.1 découle du lemme suivant :

Lemme 4.3 ($\|S^j(f)\|$)
Soit $f \in \mathcal{S}(N)$. On a :

$$\left\|S^j(f)\right\|^2_{L^2(N)} = \int \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} |\hat{S}^j(\phi^{r^*,\Lambda^*,l})|^2 \sum_{\alpha \in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \quad .$$

En effet, admettons ce lemme. On a donc :

$$\begin{aligned}
\left\|S^j(f)\right\|^2_{L^2(N)} &\leq \int \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} |\sup_{\phi \in \mathcal{P}} \hat{S}^j(\phi)|^2 \sum_{\alpha \in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \\
&= |\sup_{\phi \in \mathcal{P}} \hat{S}^j(\phi)|^2 \int \sum_{l \in \mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha \in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \\
&= |\sup_{\phi \in \mathcal{P}} \hat{S}^j(\phi)|^2 \int \|k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f)\|^2_{HS} dm'(r^*, k^*, \Lambda^*) \\
&= |\sup_{\phi \in \mathcal{P}} \hat{S}^j(\phi)|^2 \, \|f\|^2_{L^2(N)} \quad ,
\end{aligned}$$

grâce à la formule de Plancherel (4.1).

Démontrons le lemme 4.3. Par Fubini, on a :

$$\left\|S^j(f)\right\|^2_{L^2(N)} = \int_{s=0}^{\infty} \left\|\partial_s^j(f*\mu_s)\right\|^2_{L^2(N)} s^{2j-1}ds \quad .$$

Appliquons la formule de Plancherel (4.1) à $\partial_s^j(f*\mu_s) \in \mathcal{S}(N)$;

$$\left\|\partial_s^j(f*\mu_s)\right\|_{L^2(N)} = \int \sum_{l\in\mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\partial_s^j(f*\mu_s)).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*,k^*,\Lambda^*) \quad .$$

Appliquons le lemme suivant à $\Pi = k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}$ et $\zeta = \zeta_\alpha$:

Lemme 4.4
Pour une représentation $(\mathcal{H},\Pi) \in \hat{N}$ et un vecteur $\zeta \in \mathcal{H}$, on a :

$$\Pi(\partial_s^j(f*\mu_s)).\zeta = \partial_s^j.\left(\Pi(f)\Pi(\mu_s).\zeta\right) \quad .$$

Ce lemme sera démontré à la fin de cette sous-section.

Comme μ_s est une mesure radiale de masse finie, l'opérateur $k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\mu_s)$ vaut d'une part toujours $\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\mu_s)$ et d'autre part en restriction à chaque sous espace V_l, l'identité à la constante $<\mu_s, \phi^{r^*,\Lambda^*,l}>$ près (voir sous-section 3.2.1). On en déduit :

$$\begin{aligned} k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f)k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\mu_s).\zeta_\alpha &= k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f)\left(<\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}> \mathrm{Id}.\zeta_\alpha\right) \\ &= <\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}> k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha \quad . \end{aligned}$$

Rassemblons les deux arguments précédents ; on a :

$$k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\partial_s^j(f*\mu_s)).\zeta_\alpha = \partial_s^j.<\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}> k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha \quad ,$$

et

$$\sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\partial_s^j(f*\mu_s)).\zeta_\alpha|^2 = |\partial_s^j.<\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}>|^2 \sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 \quad .$$

Revenons à

$$\begin{aligned} \left\|S^j(f)\right\|_{L^2(N)} &= \int_{s=0}^{\infty}\int \sum_{l\in\mathbb{N}^{v'}} \sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(\partial_s^j(f*\mu_s)).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*,k^*,\Lambda^*) s^{2j-1}ds \\ &= \int_{s=0}^{\infty}\int \sum_{l\in\mathbb{N}^{v'}} |\partial_s^j.<\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}>|^2 \sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*,k^*,\Lambda^*) \\ &\qquad s^{2j-1}ds \quad . \end{aligned}$$

En utilisant Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \left\|S^j(f)\right\|_{L^2(N)} &= \int \sum_{l\in\mathbb{N}^{v'}} \int_{s=0}^{\infty} |\partial_s^j.<\mu_s,\phi^{r^*,\Lambda^*,l}>|^2 s^{2j-1}ds \\ &\qquad \sum_{\alpha\in E_l} |k^*.\Pi_{r^*,\Lambda^*}(f).\zeta_\alpha|^2 dm'(r^*,k^*,\Lambda^*) \quad . \end{aligned}$$

Grâce à la définition de $\hat{S}^j$, on en déduit le lemme 4.3. Pour que la preuve soit complète, il reste à montrer le lemme 4.4.

Démonstration du lemme 4.4: Comme μ_s est une mesure de probabilité, $\Pi(\mu_s).\zeta$ est bien définie (par dualité) comme vecteur de $\mathcal{H}$.

Comme $f * \mu_s$ et $\partial_s^j(f * \mu_s) \in \mathcal{S}(N)$, on voit pour un vecteur $\zeta' \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} < \Pi(\partial_s^j(f * \mu_s)).\zeta, \zeta' > &= \int_N \partial_s^j(f * \mu_s)(n) < \Pi(n^{-1}).\zeta, \zeta' > dn \\ &= \partial_s^j \int_N (f * \mu_s)(n) < \Pi(n).\zeta, \zeta' > dn \quad . \end{aligned}$$

On définit donc par dualité le vecteur de $\mathcal{H}$:

$$\Pi(\partial_s^j(f * \mu_s)).\zeta = \partial_s^j \int_N (f * \mu_s)(n)\Pi(n).\zeta dn \quad .$$

On peut aisément calculer (car $f \in \mathcal{S}(N)$ et μ_s est une mesure de probabilité à support compact) :

$$\begin{aligned} \int_N (f * \mu_s)(n)\Pi(n^{-1}).\zeta dn &= \int_N \int_N f(n'^{-1}n)\Pi(n^{-1}).\zeta dn d\mu_s(n') \\ &= \int_N \int_N f(n_1)\Pi(n_1^{-1}n'^{-1}).\zeta dn d\mu_s(n') \quad , \end{aligned}$$

après le changement de variable $n_1 = n'^{-1}n$; grâce à $\Pi(n_1^{-1}n'^{-1}) = \Pi(n_1^{-1})\Pi(n'^{-1})$, on a finalement :

$$\int_N (f * \mu_s)(n)\Pi(n^{-1}).\zeta dn = \int_N f(n_1)\Pi(n_1^{-1}). \int_{S_1} \Pi(n'^{-1}).\zeta d\mu_s(n')\, dn \quad .$$

Ainsi, le lemme 4.4 est démontré, donc le lemme 4.3, puis la proposition 4.1 le sont également.

4.1.2 Estimations de $\hat{S}^j$

Cette sous-section est consacrée à la démonstration de la proposition 4.2. Nous admettrons plusieurs lemmes, qui seront démontrés dans la sous-section suivante.

Fixons $\phi = \phi^{r^*, \Lambda^*, l} \in \mathcal{P}$, et $h \in \mathbb{N} - \{0\}$. On note $A^* = D_2(\Lambda^*)$.

Lemme 4.5
L'expression $\partial_s^h < \mu_s, \phi >$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire sur les deux couples d'entiers $g = (h_1, h_2)$ et $j = (j_1, j_2)$ (et l'entier $\tilde{h}$ si v est impaire) tels que :

- $h_1 + h_2 = h$ *si* v *est paire, et* $h_1 + h_2 + \tilde{h} = h$ *si* v *est impaire (et dans ce cas, on note* $\bar{h} = h_1 + h_2$*),*
- *et* $0 \leq j_i \leq h_i/2$, $i = 1, 2$,

de :

$$b^{g,h}(s) := s^{d_1+d_2} \int_{r=0}^{1} \breve{b}^{\tilde{h},h'_1+j_1}(r,s) \quad \mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h'_2+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|) \\ (\sqrt{1-r^4}|A^*|)^{h'_2+j_2}\, r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \quad ,$$

où on a noté :

- *les entiers* $d_i = d(j_i, h_i)$, $i = 1, 2$, *(décrits dans le lemme 4.5),*
- $h_i = 2h'_i, 2h'_i + 1$ *pour* $i = 1, 2$,

ainsi que :

$$\breve{b}^{\tilde{h},n}(r,s) = \int_{S_1^{(v)}} (irr^*x_v)^{\tilde{h}} e^{irsr^*x_v} \partial_{s'}^n \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j^* s' r^2 \frac{|pr_j(X)|^2}{2}) \right]_{s'=s^2} d\tilde{\sigma}_v(X) \quad .$$

Jusqu'à la fin de cette section, nous gardons les notations de ce lemme, que nous démontrerons dans la sous-section 4.1.3. La proposition 4.2 est donc équivalente à la proposition suivante :

Proposition 4.6
Les intégrales :

$$I^{g,j} := \int_0^\infty |b^{g,j}(s)|^2 s^{2h-1} ds$$

sont bornées indépendemment de Λ^*, r^*, l, *et ce pour tous les paramètres* g, j *comme dans le lemme 4.5, tant que* $h < v + 1 + 3/4, (z-1)/4, (z-2)/2$.

Le reste de cette sous-section est consacrée à sa démonstration, d'abord dans le cas $\bar{h} \neq 0, r^* \neq 0$ ou $r^* = 0$, puis dans le cas $\bar{h} = 0, r^* \neq 0$.

Majorations des $I^{\tilde{h},h'_1,j_1,h_2,j_2}$ si $\bar{h} \neq 0$ ou $r^* = 0$

Nous souhaitons montrer la proposition 4.6 lorsque ($\bar{h} \neq 0, r^* \neq 0$) ou ($r^* = 0$), si $h < (z-2)/2$. On utilise la majoration des intégrales $\breve{b}^{\tilde{h},n}(r,s)$, donnée dans le lemme :

Lemme 4.7
Les expressions $\breve{b}^{\tilde{h},n}(r,s)$ *pour* $0 \leq n \leq \tilde{h}$, *sont majorées à une constante près de* $v, \tilde{h}$ *par :*

$$(|A^*|r^2)^n s^{-\tilde{h}} \quad \sum_{0 \leq i \leq \tilde{h}} (|A^*|s^2r^2)^i \quad .$$

Admettons ce dernier lemme, et montrons la proposition 4.6 lorsque $\bar{h} \neq 0, r^* \neq 0$ ou $r^* = 0$.

Commençons par majorer l'expression de $b^{g,j}(s)$ (voir lemme 4.5) par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|b^{g,j}(s)|^2 \quad \leq \quad & s^{2(d_1+d_2)}|A^*|^{2(h_2'+j_2)} \int_0^1 |\breve{b}^{\tilde{h},h_1'+j_1}(r,s) r^{v-1}(1-r^4)^{-\frac{1}{4}}|^2 dr \\ & \int_0^1 |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{h_2'+j_2}{2}+\frac{1}{4}}|^2 dr \quad .\end{aligned}$$

Utilisons le lemme 4.7. Si $r^* \neq 0$, l'expression $|b^{g,j}(s)|^2$ est majorée à une constante près par :

$$\begin{aligned}& s^{2(d_1+d_2)}|A^*|^{2(h_2'+j_2)} \int_0^1 \left(s^{-\tilde{h}}(|A^*|r^2)^{h_1'+j_1}(|A^*|s^2r^2)^i r^{v-1}(1-r^4)^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dr \\ & \int_0^1 |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{h_2'+j_2}{2}+\frac{1}{4}}|^2 dr \\ = \; & |A^*|^{2(h_2'+j_2+h_1'+j_1+i)} s^{2(d_1+d_2)-2\tilde{h}+4i} \int_0^1 r^{2(v-1+2i+2(h_1'+j_1))}(1-r^4)^{-\frac{1}{2}} dr \\ & \int_0^1 |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{h_2'+j_2}{2}+\frac{1}{4}}|^2 dr \quad .\end{aligned}$$

Si $r^* = 0$, on obtient la même expression avec $\tilde{h} = i = 0$. Comme la première intégrale en r est finie, $I^{g,j}$ est majorée à une constante près qui ne dépend que de v et h par le maximum sur $0 \leq i \leq \tilde{h}$ des intégrales :

$$\begin{aligned}J^{(i)} \quad := \quad & |A^*|^{2(h_2'+j_2+h_1'+j_1+i)} \int_0^\infty s^{2(d_1+d_2)-2\tilde{h}+4i} \\ & \int_0^1 |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{h_2'+j_2}{2}+\frac{1}{4}}|^2 dr \quad s^{2h-1} ds \quad .\end{aligned}$$

Rassemblons les exposants de s dans chaque intégrale $J^{(i)}$; on utilise d'abord $-\tilde{h} + h = \overline{h} = h_1 + h_2$, puis l'égalité (2.10) :

$$2(d_1+d_2) - 2\tilde{h} + 4i + 2h - 1 \;=\; 2(d_1+h_1+d_2+h_2) + 4i - 1 \;=\; 4(h_1'+j_1+h_2'+j_2) + 4i - 1 \quad .$$

Effectuons le changement de variable $s' = s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|$:

$$J^{(i)} = \int_{s'=0}^\infty |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s')|^2 s'^{h_2'+j_2+h_1'+j_1+2i-1} \frac{ds'}{2} \int_0^1 (1-r^4)^{z-2+\frac{1}{2}-(h_1'+j_1+2i)} dr \quad .$$

Dans la dernière expression de $J^{(i)}$, l'intégrale contre dr est finie lorsque pour tout j_1 et i :

$$z - 2 + \frac{1}{2} - (h_1' + j_1 + 2i) > -1 \quad ;$$

or on a :

$$h_1' + j_1 + 2i \leq \overline{h} + 2\tilde{h} \;=\; h + \tilde{h} \leq 2h \quad ;$$

donc ces intégrales sont finies lorsque $2h < z-1/2$ (qui est toujours vérifié). L'exposant de s' dans l'intégrale contre ds' dans la dernière expression de $J^{(i)}$, est :

$$h_2' + j_2 + h_1' + j_1 + 2i - 1 \;=\; d_1 + d_2 + \overline{h} + 2i - 1 \quad ;$$

Comme nous nous sommes placés dans le cas où $\overline{h} \neq 0$, cet exposant est positif ou nul. D'après le lemme 5.1, cette intégrale est finie lorsque $h_2' + j_2 + h_1' + j_1 + 2i - 1 < 2(z-2)/2$; or on a :

$$h_2' + j_2 + h_1' + j_1 + 2i \leq h_1 + h_2 + 2\tilde{h} \;=\; \overline{h} + 2\tilde{h} \;=\; h + \tilde{h} \;\leq\; 2h \quad ;$$

donc l'intégrale contre ds' sera finie lorsque $1 - q + 2h < -1$ ou encore $h < (z-2)/2$.

La proposition 4.6 est donc démontrée dans les cas $(\overline{h} \neq 0, r^* \neq 0)$ ou $(r^* = 0)$, car dans ce dernier cas $\overline{h} = h \geq 1$.

Majorations des $I^{0,0}$

Nous souhaitons montrer la proposition 4.6 lorsque $\overline{h} = 0$ et $r^* \neq 0$. Nous supposons donc ici $r^* \neq 0$ et $h = \tilde{h}$, ou encore $g = j = (0,0) = 0$. On utilise deux majorations de $|\check{b}^{h,0}(r,s)|$ données dans le lemme qui suit, ainsi qu'un lemme technique.

Lemme 4.8
Si $\Lambda^* \neq 0, r^* \neq 0$, l'expression $\check{b}^{h,0}(r,s)$ est majorée à une constante près d'une part par : $(rr^*)^h$, d'autre part par :

$$\frac{1}{(rr^*s^2)^h} \sum_{0 \leq j \leq 2h} (|A^*|s^2r^2)^j \quad .$$

Lemme 4.9
Fixons $j \in \mathbb{N} - \{0\}$. On pose pour $x > 0, a > 0$:

$$J^{(i)}_{a,x;j} \;:=\; \int_{x^{-\frac{1}{j}}}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(as^2r^2)^i}{xr^j s^{2j}} |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}a)| r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^2 s^{2j-1} ds \quad .$$

Ces intégrales pour $i = 0, \dots 2j$ sont majorées indépendamment de $a > 0, x > 0$ lorsque $z > 3/4$, $j < (z-1)/4$, et $j < v + 1 + 3/4$.

Admettons ces deux lemmes et montrons la proposition 4.6 lorsque $\overline{h} = 0$ et $r^* \neq 0$, si $v > 3$, $h < v + 1 + 3/4, (z-1)/4$.

L'intégrale $I^{0,0}$ est la somme des deux intégrales :

$$\begin{aligned} J^{\infty} \;&:=\; \int_0^{1/r^*} |b^{0,0}(s)|^2 s^{2h-1} ds \quad , \\ J_0 \;&:=\; \int_{1/r^*}^{\infty} |b^{0,0}(s)|^2 s^{2h-1} ds \quad . \end{aligned}$$

Comme $\check{b}^{h,0}(r,s)$ est majorée par $(rr^*)^h$ à une constante près (lemme 4.8), et comme les fonctions de Bessel sont bornées par 1, l'expression $b^{0,0}(s)$ est bornée à une constante près par r^{*h}. On obtient donc que l'intégrale J^∞ est majorée à une constante près par :

$$\int_0^{1/r^*} r^{*2h} s^{2h-1} ds = r^{*2h} \frac{(1/r^*)^{2h}}{2h} = \frac{1}{2h} \quad .$$

D'après la seconde majoration de $\check{b}^{h,0}(r,s)$ du lemme 4.8, l'expression $b^{0,0}(s)$ est majorée à une constante près par le maximum des intégrales

$$\int_0^1 \frac{(|A^*|s^2r^2)^i}{(r^*rs^2)^h} |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)| r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \ , \quad i = 0, \ldots, 2h \quad .$$

Ainsi, l'intégrale J_0 est majorée à une constante près qui ne dépend que de v, h par le maximum sur $i = 0, \ldots, 2h$ des intégrales $J^{(i)}_{|A^*|, r^{*h}, h}$; d'après le lemme 4.9, J_0 est donc majoré indépendemment de r^*, A^*, l lorsque $h < (z-1)/4$ et $h < v + 1 + 3/4$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.6 dans le cas $r^* \neq 0$ et $\overline{h} = 0$. Comme les autres cas ont été précédemment démontrés, la proposition 4.6 est prouvée sous réserve que les lemmes 4.5, 4.7, 4.8, et 4.9 soient démontrés.

4.1.3 Démonstration des lemmes techniques

Dans cette sous-section, nous démontrons les lemmes techniques utilisées dans la sous-section précédente.

Démonstration du lemme 4.5

Pour démontrer le lemme 4.5, nous avons besoin de l'expression de $< \mu_s, \phi >$:

Lemme 4.10
Rappelons que pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\tilde{\sigma}_n$ désigne la mesure de masse 1 sur la sphère euclidienne $S_1^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$< \mu_s, \phi > = 2 \int_0^1 \int_{S_1^{(v)}} e^{itr^* x_v} \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j^* t^2 \frac{|pr_j(X)|^2}{2}) d\tilde{\sigma}_v(X)$$
$$\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)\, r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \quad .$$

Démonstration du lemme 4.10: D'après l'expression de ϕ donnée dans le théorème 3.1, et comme la mesure μ_s est radiale, on a :

$$< \mu_s, \phi > = < \mu_s, \Theta^{r^*,\Lambda^*,l} > = \int_{S_1} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(s.n) d\mu(n)$$
$$= 2 \int_0^1 \int_{S_1^{(v)}} \int_{S_1^{(z)}} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(srX, s^2\sqrt{(1-r^4)}A) d\tilde{\sigma}_z(A) d\tilde{\sigma}_v(X) r^{v-1}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \ ,$$

grâce à l'expression de μ, proposition 2.7. Par définition de $\Theta^{r^*,\Lambda^*,l}$ théorème 3.1, il vient :

$$\int_{S_1^{(v)}}\int_{S_1^{(z)}} \Theta^{r^*,\Lambda^*,l}(srX, s^2\sqrt{(1-r^4)}A)d\tilde{\sigma}_z(A)d\tilde{\sigma}_v(X)$$
$$= \int_{S_1^{(v)}} e^{isrr^*x_v}\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\frac{\lambda_j^*}{2}|\mathrm{pr}_j(srX)|^2)d\tilde{\sigma}_v(X)$$
$$\int_{S_1^{(z)}} e^{is^2\sqrt{(1-r^4)}<A^*,A>}d\tilde{\sigma}_z(A) \quad .$$

Or la dernière intégrale contre $\tilde{\sigma}_z$ vaut $\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)$, lemme 5.2.

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 4.5.

L'expression :

$$\partial_s^h\left[e^{irsr^*x_v}\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)\right] \quad ,$$

est égale à une combinaison linéaire sur $\tilde{h}+\overline{h}=h$ et $h_1+h_2=\overline{h}$ du produit des 3 fonctions :

$$\partial_s^{\tilde{h}}\left[e^{irsr^*x_v>}\right]\partial_s^{h_1}\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})\right]\partial_s^{h_2}\left[\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)\right] \quad .$$

1. On calcule aisément :

$$\partial_s^{\tilde{h}}\left[e^{irsr^*x_v>}\right] = (irr^*x_v>)^{\tilde{h}}e^{irsr^*x_v} \quad .$$

2. D'après le lemme 2.19, comme fonction de s^2 dérivée h_1 fois, l'expression :

$$\partial_s^{h_1}\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})\right] \quad ,$$

est combinaison linéaire sur $0\leq j_1\leq h_1/2$ de :

$$s^{d_1}\partial_{s'}^{h_1'+j_1}\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s'r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})\right]_{s'=s^2} \quad .$$

3. D'après le lemme 2.19, comme fonction de s^2 dérivée h_2 fois, l'expression :

$$\partial_s^{h_2}\left[\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|)\right] \quad ,$$

est combinaison linéaire sur $0\leq j_2\leq h_2/2$ de :

$$s^{d_2}\partial_{s'}^{h_2'+j_2}\left[\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s'\sqrt{1-r^4}|A^*|)\right]_{s'=s^2}$$
$$= s^{d_2}(\sqrt{1-r^4}|A^*|)^{h_2'+j_2}\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}^{(h_2'+j_2)}(s^2\sqrt{1-r^4}|A^*|) \quad .$$

On conclut grâce à l'expression de $<\mu_s,\phi>$ donnée dans le lemme 4.10.

Démonstration du lemme 4.7 dans le cas $r^* = 0$

Dans le cas $r^* = 0$, on a $h = \overline{h}, \tilde{h} = 0$ et :

$$\check{b}^{0,n}(r,s) \doteq \int_{S_1^{(v)}} \partial_{s'}^n \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s' r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \right]_{s'=s^2} d\tilde{\sigma}_v(X) \quad .$$

L'expression :

$$\partial_{s'}^n \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s' r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \quad , \tag{4.2}$$

est combinaison linéaire de :

$$\prod_{j\in J} (\lambda_j r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})^{e_j} \mathcal{L}_{l_j}^{(e_j)}(\lambda_j s' r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \quad , \tag{4.3}$$

où J parcourt les sous-ensembles de $\mathbb{N} \cap [1, v']$ tel que $e_j \in \mathbb{N}$ et $\sum_{j \in J} e_j = n$. Comme les fonctions de Laguerre et leurs dérivées sont bornées, on en déduit que l'expression (4.2) est majorée à une constante près de n, v par la somme de

$$|A^*|^n \prod_{j\in J} (r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})^{e_j} = (r^2|A^*|)^n \prod_{j\in J} (\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})^{e_j} \quad ,$$

puis que $|\check{b}^{0,n}(r,s)|$ est majorée à une constante près de n, v par $(r^2|A^*|)^n$.

Le lemme 4.7 est donc démontré dans le cas $r^* = 0$.

Démonstration du lemme 4.7 dans le cas $r^* \neq 0, \overline{h} \neq 0$

La démonstration du lemme 4.7 repose sur $\tilde{h}$ intégrations par partie. Avant de donner une démonstration générale, nous allons d'abord montrer le cas particulier :

Lemme 4.11
L'expression $\check{b}^{1,0}(r,s)$ est majorée à une constante près de v par :

$$\frac{1 + (|A^*|s^2 r^2)}{s} \quad .$$

Démonstration de lemme 4.11: Choisissons pour atlas de la sphère $S_1^{(v)}$ euclidienne de $\mathbb{R}^v$ les deux calottes sphériques de pôles X_1 et $-X_1$:

$$C_1 := \{X \in S_1^{(v)}, < X, X_1 > > -\frac{1}{2}\} \quad \text{et} \quad C_2 := \{X \in S_1^{(v)}, < X, -X_1 > > \frac{1}{2}\} \quad .$$

Fixons une partition de l'unité de la sphère pour cet atlas : c'est-à-dire deux fonctions C^∞ ψ_1, ψ_2 définies sur la sphère $S_1^{(v)}$ telles que :

$$\text{supp } \psi_i \subset C_i \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \; i = 1,2 \quad \text{et} \quad \psi_1 + \psi_2 = 1 \quad \text{sur } S_1^{(v)} \quad .$$

Comme carte pour C_1, on considère la projection stérérographique de pôle X_1 et on note C_1' son image sur $\mathbb{R}^{v-1}$. De même, pour C_2, on considère la projection stérérographique de pôle $-X_1$ et on note C_2' son image sur $\mathbb{R}^{v-1}$. C_1' et C_2' sont compacts. Par ces changements de cartes, les points $X = \sum_i x_i X_i$ de la sphère sont paramètrés par les coordonnées $x_i, i \neq 1$; de plus, la mesure $\tilde{\sigma}_v$ s'envoie sur une mesure de densité contre la mesure de Lebesgue dx sur chaque domaine $C_i, i = 1, 2$. La densité $D_i, i = 1, 2$ est C^∞.

On a donc en décomposant sur cet atlas puis en effectuant une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\check{b}^{1,0}(r,s) &= \int_{S_1^{(v)}} irr^* x_v e^{irsr^* x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s' r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \right]_{s'=s^2} d\tilde{\sigma}_v(X) \\
&= \int_{S_1^{(v)}} \frac{x_v}{s} \partial_{x_v} e^{isrr^* x_v} \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} d\tilde{\sigma}_v(X) \\
&= \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \frac{x_v}{s} \partial_{x_v} e^{isrr^* x_v} \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} \psi_i(X) d\tilde{\sigma}_v(X) \\
&= \sum_{i=1,2} \int_{C_i'} \frac{1}{s} e^{isrr^* x_v} \partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} x_v \psi_i(X) D_i \right] dx \quad .
\end{aligned}$$

Nous avons omis l'argument des fonctions $\mathcal{L}_{m_j}$, lorsqu'il vaut $\lambda_j s^2 r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|}{2}$, avec X fonction des paramètres de la cartes C_i. On a donc :

$$|\check{b}^{1,0}(r,s)| \leq \frac{1}{s} \sum_{i=1,2} \int_{C_i'} |\partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} x_v \psi_i(X) D_i \right] | dx \quad . \tag{4.4}$$

Estimons la dérivée :

$$\begin{aligned}
\partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} x_v \psi_i(X) D_i \right] &= \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} \partial_{x_v} \left[x_v \psi_i(X) D_i \right] \\
&\quad + x_v \psi_i(X) D_i \partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} \right] \quad .
\end{aligned}$$

Comme les fonctions de Laguerre et leurs dérivées sont bornées, on a :

$$\begin{aligned}
|\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}| &\leq C \quad , \\
\partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} \right] &= \sum_{j_0} \lambda_{j_0} s^2 r^2 \partial_{x_v} \left[\frac{|\mathrm{pr}_{j_0}(X)|^2}{2} \right] \mathcal{L}_{l_{j_0}}' \Pi_{j \neq j_0} \mathcal{L}_{l_j} \quad , \\
|\partial_{x_v} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j} \right] | &\leq C s^2 r^2 \sum_{j_0} \lambda_{j_0} |\partial_{x_v} \left[\frac{|\mathrm{pr}_{j_0}(X)|^2}{2} \right] | \quad ,
\end{aligned}$$

où C est une constante de v. On en déduit pour $i=1,2$:

$$\int_{C_i'} \left|\partial_{x_v}\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j} x_v\psi_i(X)D_i\right]\right| dx \leq \int_{C_i'} C\left|\partial_{x_v}\left[x_v\psi_i(X)D_i\right]\right| dx$$
$$+\sum_{j_0}\lambda_{j_0}Cs^2r^2\int_{C_i'}\left|\partial_{x_v}\left[\frac{|\mathrm{pr}_{j_0}(X)|^2}{2}\right]\right| |x_v\psi_i(X)D_i dx \quad .$$

Or chaque domaine C_i' compact ; la fonction densité D_i est C^∞ ; les intégrales des normes de $x_v\psi_i(X)D_i$ et de sa dérivée, multiplié par 1 ou par la dérivé de $|\mathrm{pr}_{j_0}(X)|^2$ sont finies et bornées par une constante notée encore C qui ne dépend que de v. On obtient donc :

$$\int_{C_i'} \left|\partial_{x_v}\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j} x_v\psi_i(X)D_i\right]\right| dx \leq C\left(1+s^2r^2\sum_{j_0}\lambda_{j_0}\right) \quad .$$

On conclut grâce à la majoration ci dessus et $|A^*|\sim\sum_{j_0}\lambda_{j_0}$ ainsi que (4.4).

Nous pouvons maintenant utiliser la méthode que nous venons de décrire pour montrer le lemme 4.7.

On a :

$$\begin{aligned}
\check{b}^{\tilde{h},n}(r,s) &= \int_{S_1^{(v)}}\dots d\tilde{\sigma}_v(X) = \sum_{i=1,2}\int_{C_i'}\dots\psi_i D_i dx \\
&= \sum_{i=1,2}\int_{C_i'}(irx_v)^{\tilde{h}}(irs)^{-\tilde{h}}\partial_{x_v}^{\tilde{h}}\left[e^{irsr^*x_v}\right] \\
&\qquad \partial_{s'}^n\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s'r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})\right]_{s'=s^2}\psi_i D_i dx \quad .
\end{aligned}$$

Après $\tilde{h}$ intégrations par partie, on a :

$$\begin{aligned}
\check{b}^{\tilde{h},n}(r,s) &= (-s)^{-\tilde{h}}\sum_{i=1,2}\int_{C_i'}e^{irsr^*x_v} \\
&\qquad \partial_{x_v}^{\tilde{h}}\partial_{s'}^n\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s'r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})x_v^{\tilde{h}}\psi_i D_i\right]_{s'=s^2} dx \quad .
\end{aligned}$$

Or l'expression (4.2) est combinaison linéaire de (4.3) où J parcourt les sous-ensembles de $\mathbb{N}\cap[1,v']$ tel que $e_j\in\mathbb{N}$ et $\sum_{j\in J}e_j=n$; puis l'expression :

$$\partial_{x_v}^{\tilde{h}}\partial_{s'}^n\left[\prod_{j=1}^{v'}\mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s'r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})x_v^{\tilde{h}}\psi_i D_i\right]_{s'=s^2} \quad , \tag{4.5}$$

est combinaison des :

$$\partial_{x_v}^{\tilde{h}}.\left[\prod^{j\in J}(\lambda_j r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})^{e_j}\mathcal{L}_{l_j}^{(e_j)}(\lambda_j s^2r^2\frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2})x_v^{\tilde{h}}\psi_i D_i\right] \quad ;$$

donc grâce aux estimations des fonctions de Laguerre et de ses dérivées, l'expression (4.5) est majorée à une constante près qui ne dépend que de v et $\tilde{h}$ par :

$$(|A^*|r^2)^n \quad \sum_{0\leq j\leq \tilde{h}} (|A^*|s^2r^2)^j \quad .$$

Après intégration sur chaque domaine C_i', puis sommation et multiplication par $s^{-\tilde{h}}$, on obtient la majoration voulue de $|\check{b}^{\tilde{h},n}(r,s)|$.

Le lemme 4.7 est donc démontré dans le cas $r^* \neq 0, \overline{h} \neq 0$.

Démonstration du lemme 4.8

On a une majoration grossière de

$$\check{b}^{h,0}(r,s) = \int_X (irr^*x_v)^h e^{irsr^*x_v} \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2 r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) d\tilde{\sigma}_v(X) \quad ,$$

à une constante près par $(rr^*)^h$ car les fonctions de Laguerre sont bornées.

Pour la seconde majoration donnée dans le lemme, nous procédons comme dans la démonstration du lemme 4.11. On a :

$$\begin{aligned}
\check{b}^{h,0}(r,s) &= \int_{S_1^{(v)}} \dots d\tilde{\sigma}_v(X) = \sum_{i=1,2} \int_{C_i'} \dots \psi_i D_i dx \\
&= \sum_{i=1,2} \int_{C_i'} (irr^*x_v)^h (irr^*s)^{-2h} \partial_{x_v}^{2h}. \left[e^{irsr^*x_v}\right] \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2 r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \psi_i D_i dx \quad ,
\end{aligned}$$

et donc après $2h$ intégrations par partie :

$$\begin{aligned}
\check{b}^{h,0}(r,s) &= s^{-2h}(irr^*)^{-h} \sum_i \int_{C_i} e^{irsr^*x_v} \\
&\qquad \partial_{x_v}^{2h}. \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2 r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) x_v^h \psi_i D_i\right] dx \quad .
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.7, on obtient que l'expression

$$\partial_{x_v}^{2h} \left[\prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j s^2 r^2 \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) x_v^h \psi_i D_i\right] \quad ,$$

est majorée à une constante près (de v, h) par :

$$\sum_{0\leq j\leq 2h} (|A^*|s^2r^2)^j \quad ;$$

puis la majoration voulue de $|\check{b}^{h,0}(r,s)|$.

Ceci achève la démonstration du lemme 4.8.

Démonstration du lemme 4.9

Dans le cas où $i = 0$, en majorant les fonctions de Bessel par 1, on voit :

$$\begin{aligned} J^{(0)}_{a,x;j} &\le |x|^{-2} \int_{x^{-\frac{1}{j}}}^{\infty} \left(\int_0^1 r^{v-1-j}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^2 s^{-2j-1} ds \\ &= \left(\int_0^1 r^{v-1-j}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^2 x^{-2} \int_{x^{-\frac{1}{j}}}^{\infty} s^{-2j-1} ds \quad . \end{aligned}$$

et donc l'intégrale $J^{(0)}_{a,x;j}$ est majorée à une constante près par $1/(2j)$.

Dans le cas où $i = 1, \ldots, 2j$, par Cauchy-Schwarz, l'expression $\left(J^{(i)}_{a,x;j}\right)^2$ est majorée par le produit de :

$$x^{-4} \int_{x^{-\frac{1}{j}}}^{\infty} \left(s^{-2j-\frac{1}{2}} \right)^2 ds = \frac{1}{4j} \quad ,$$

et de l'intégrale :

$$\begin{aligned} &\int_{x^{-1}}^{\infty} \left(\int_0^1 (as^2r^2)^i |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}a)| r^{v-1-k}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^4 s^{2\frac{-1}{2}} ds \\ &\le \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 (as^2r^2)^i |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s^2\sqrt{1-r^4}a)| r^{v-1-k}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^4 \frac{ds}{s} \\ &= \int_{s'=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (s'r^2)^i |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s'\sqrt{1-r^4})| r^{v-1-j}(1-r^4)^{\frac{z-2}{2}} dr \right)^4 \frac{ds'}{s'} \end{aligned}$$

après le changement de variable $s' = as^2$. Cette dernière expression est majorée grâce à l'inégalité de Hölder appliquée à l'intégrale contre dr par :

$$\begin{aligned} \int_{s'=0}^{\infty} s'^{4i} \quad &\int_0^1 \left(|\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s'\sqrt{1-r^4})| (1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{3}{8}} \right)^4 dr \\ &\left(\int_0^1 \left(r^{v-1-j+2i}(1-r^4)^{-\frac{3}{8}} \right)^{\frac{4}{3}} dr \right)^3 \quad \frac{ds'}{s'} \quad . \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, la seconde intégrale contre dr est bien finie lorsque

$$\forall i = 1, \ldots, 2j \quad : \quad v - 1 - j + 2i > -3/4 \quad ,$$

c'est-à-dire lorsque $j < v+1+3/4$; donc les intégrales $\left(J^{(i)}_{a,x;j}\right)^2$ sont majorées à une constante près par le maximum sur $i = 1, \ldots, 2j$ des intégrales :

$$\begin{aligned} &\int_{s'=0}^{\infty} \int_0^1 \left(|\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(s'\sqrt{1-r^4})| (1-r^4)^{\frac{z-2}{2}+\frac{3}{8}} \right)^4 dr s'^{4i} \frac{ds'}{s'} \\ &= \int_{\tilde{s}=0}^{\infty} |\mathcal{J}_{\frac{z-2}{2}}(\tilde{s})|^4 \tilde{s}^{4i-1} d\tilde{s} \int_0^1 (1-r^4)^{4(\frac{z-2}{2}+\frac{3}{8})-4i\frac{1}{2}} dr \quad , \end{aligned}$$

après Fubini et le changement de variable $\tilde{s} = s'\sqrt{1-r^4}$. Dans l'expression précédente, l'intégrale contre dr est finie tant que :

$$\begin{aligned} 4(\frac{z-2}{2}+\frac{3}{8})-4i\frac{1}{2} > -1, i=1,\ldots,2j &\iff 4(\frac{z-2}{2}+\frac{3}{8})-4\frac{1}{2} > -1 \\ &\iff z > \frac{3}{4} \quad , \end{aligned}$$

ce qui est le cas. D'après le lemme 5.1, l'intégrale contre $d\tilde{s}$ est finie lorsque $4i-1-1 < 4(z-2)/2$ pour $i=1,\ldots,2j$ donc lorsque $j < (z-1)/4$ ce qui est le cas.

Ceci achève la démonstration du lemme 4.9, et de tous les lemmes utilisés dans la sous-section précédente.

4.2 Multiplicateurs de Fourier sur $N_{v,2}$

Dans cette section, on s'intéresse aux multiplicateurs définis par passage en Fourier sphérique sur le groupe $N = N_{v,2}$ nilpotent libre à 2 pas. C'est le problème défini comme suit : soit $f \in L^\infty(m)$; on définit la fonction F la distribution radiale dont la transformée de Fourier est f (sous-section 3.3.2) ; on définit l'opérateur de convolution par F sur les fonctions simples de N : $T_f(h) = h * F$. Le problème des multiplicateurs en Fourier consiste à trouver des conditions sur la fonction f pour que l'opérateur T_f s'étende en un opérateur continu $L^p(N) \to L^p(N)$ pour chaque $p \in]1,\infty[$.

Autre problème des multiplicateurs. Le problème des multiplicateurs de Fourier a été étudié dans le cas euclidien et indirectement sur les groupes de type H, groupes nilpotents ayant un calcul de Fourier. En fait, l'étude dans ces cas est équivalente à un problème de multiplicateurs pour des opérateurs différentiels radiaux. En effet, dans le cas euclidien, cela se ramène au problème des multiplicateurs pour le laplacien $-\Delta$ standard : chercher des conditions sur la fonction m pour que l'opérateur $m(-\Delta)$ s'étende en un opérateur continu $L^p \to L^p$ revient à considérer le problème des multiplicateurs en Fourier pour la fonction $m(t^2)$, auquel Hörmander a apporté une réponse optimale. Dans le cas des groupes de Heisenberg, le problème des multiplicateurs de Fourier se ramène au problème des multiplicateurs pour les deux opérateurs : le sous-laplacien "de Kohn", et la dérivation du centre. Il en va de même plus généralement sur les groupes de type H [MRS96].

Notre travail repose sur le théorème des intégrales singulières, puis des estimations de normes L^2 à poids sur N. Cela conduit à effectuer de longs calculs techniques "côté Fourier" proches du cas des groupes de type H [MRS96]. Le résultat n'est qu'un premier pas dans l'étude du problème. Il n'inclut pas les fonctions constantes. Nous souhaitons essentiellement présenter nos solutions à quelques points techniques. En particulier, nous proposons une décomposition de l'espace "côté Fourier" et nous traduisons la multiplication par la norme "côté groupe", en opérateur "côté Fourier" (voir les opérateurs Ξ et $\aleph$ plus loin).

Organisation de cette section. Apres avoir posé plusieurs notations, en particulier celle d'une partition de l'unité côté Fourier, nous donnons l'énoncé du théorème annoncé dans l'introduction, puis la démarche de la preuve. Cette dernière utilise des estimations de normes L^2 sur le groupe, que nous démontrons dans la section suivante grâce à de opérations effectuées "côté Fourier".

4.2.1 Notations et résultat

Nous supposerons $v' > 2$.

Partition de l'unité sur $\mathcal{P}$

La partition est indicée par le produit des ensembles $I := I_r \times I_\Lambda \times I_l$ où :
- I_l est l'ensemble des v'-uplets $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{v'}) \in \mathbb{N}^{v'}$;
- I_Λ est l'ensemble :

$$I_\Lambda := \{(\eta, \delta) \quad : \quad \eta \in I^1_\Lambda \ , \ \delta \in I^2_\Lambda(\eta)\} \quad ,$$

où I^1_Λ est l'ensemble des v'-uplets $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{v'}) \in \mathbb{Z}^{v'}$ vérifiant :

$$\eta_i \ \leq \ \eta_{i+1} + 1 \ , \quad i = 1, \ldots, v' - 1 \quad ,$$

et pour $\eta \in I^1_\Lambda$, $I^2_\Lambda(\eta)$ est l'ensemble des v'-uplets $\delta = (\delta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq v'} \in \mathbb{Z}^{v'(v'-1)/2}$ vérifiant la condition :

$$2^{\eta_j} - 4.2^{\eta_i} \ \leq \ 2^{\delta_{i,j}} \ \leq \ 4.2^{\eta_j} - 2^{\eta_i} \quad 1 \leq i < j \leq v' \quad .$$

- I_r est l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$, qui est omis si $v = 2v'$.

Soit χ une fonction C^∞, supportée dans l'intervalle $[1/1, 2]$ telle que :

$$\chi \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, y > 0 \quad : \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \chi(2^{-j} y) \ = \ 1 \quad .$$

On définit la fonction $\chi_\iota : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ pour $\iota = (\theta, (\eta, \delta), \zeta) \in I$ par :

$$\chi_\iota(r, \Lambda, l) \ = \ \chi(2^{-\theta}|r|^4) \prod_{1 \leq i \leq v'} \chi(2^{-\zeta_i}(l_i + 1)) \ \chi(2^{-\eta_i}\lambda_i^2) \prod_{i<j} \chi(2^{-\delta_{i,j}}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)) \quad ,$$

en convenant que dans le cas $v = 2v'$, les termes en r sont omis. Les χ_ι ont un sens pour des paramètres $\iota \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{v'} \times \mathbb{Z}^{\frac{v'(v'-1)}{2}} \times \mathbb{N}^{v'}$, mais dans ce cas $\chi_\iota = 0$ sur $\mathcal{P}$.

On obtient une partition de l'unité de $\mathcal{P}$:

$$\forall\, \phi \in \mathcal{P} \quad : \quad \sum_{\iota \in I} \chi_\iota(\phi) \ = \ 1 \quad . \tag{4.6}$$

C'est une somme localement uniformément finie c'est-à-dire qu'il existe une borne C (ne dépendant que de χ et v') telle que pour tout $\phi \in \mathcal{P}$, le nombre de paramètre ι vérifiant $\chi_\iota(\phi) \neq 0$ est au plus C.

Partition de l'unité de supp χ_ι

On définit pour $h \in \mathbb{Z}$ la fonction $\chi_h \in L^2(m)$ par :

$$\chi_h(\phi) = \chi\left(2^{-h}(\sum_{i=1}^{v'} \lambda_i(2l_i+1) + |r|^2)\right) \quad .$$

On pose pour des paramètres $h \in \mathbb{Z}$, et $\iota = (\theta, \eta, \delta, \zeta) \in I$:

$$s_\iota := \sum_i 2^{\frac{\eta_i}{2}+\zeta_i} \quad \left(+2^{\frac{\theta}{2}}\right) \quad .$$

Sur le support de la fonction χ_ι, on a :

$$2^{-2}s_\iota \leq \sum_i \lambda_i(2l_i+1) \quad \left(+|r|^2\right) \leq 2^4 s_\iota \quad .$$

On a une partition de l'unité finie sur le support de χ_ι :

$$\forall \phi \in \operatorname{supp} \chi_\iota \quad : \quad \sum_{h\in\mathbb{Z}\,:\, 2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota} \chi_h(\phi) = 1 \quad . \tag{4.7}$$

Opérateurs sur $\mathcal{P}$

Nous avons déjà rappelé nos conventions de notation sur le transformée de Fourier euclidienne. On utilisera aussi ici la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}^{v'}$ et $\mathbb{T}^{v'}$, où $\mathbb{T}$ désigne le tore $\mathbb{R}/[0, 2\pi]$.

On définit les opérateurs $\Delta_i, \partial_{\lambda_i}, \partial_r$ sur les fonctions tests $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C} \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$ par ($\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \in \mathcal{L}, l = (l_1, \ldots, l_{v'}) \in \mathbb{N}^{v'}, r \in \mathbb{R}^+$) :

$$\begin{aligned}
\Delta_i.f(r,\Lambda,l) &= f(r,\Lambda,(l_1,\ldots,l_i+1,\ldots,l'_v)) - f(r,\Lambda,l) \quad , \\
\partial_{\lambda_i}.f(r,\Lambda,l) &= \partial_{\lambda_i}.[\lambda_i \mapsto f(r,(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_{v'}),l)] \quad , \\
\partial_r.f(r,\Lambda,l) &= \partial_r.[r \mapsto f(r,(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_{v'}),l)] \quad .
\end{aligned}$$

On étend ces opérateurs par dualité sur l'ensemble $\mathcal{D}'(\mathcal{P})$ des distributions de $\mathcal{P}$.

On étend les fonctions $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ de manière triviale en une fonction

$$\tilde{f} : \left\{\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'} & \to & \mathbb{C} \\
(r,\Lambda,l) & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} f(r,\Lambda,l) & \text{si } (r,\Lambda,l)\in\mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.
\end{array}\right. \quad , \tag{4.8}$$

On identifie souvent une fonction sur $\mathcal{P}$, et son extension triviale.

On remarque :

Lemme 4.12
Soit $\iota = (\theta, (\eta, \delta), \zeta) \in I$. Sur le support de la fonction χ_ι, on a l'équivalence de la fonction densité de la mesure η' sur le simplexe $\mathcal{L}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\Lambda$

$$\frac{d\eta}{d\Lambda} \sim 2^{2d(\eta,\delta)} \quad ,$$

où on a noté :

$$d(\eta, \delta) := \begin{cases} |\delta| + \frac{1}{4}|\eta| & \text{dans le cas } v = 2v' \quad , \\ |\delta| + \frac{3}{4}|\eta| & \text{dans le cas } v = 2v' + 1 \quad . \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall f \in L^\infty(m) \quad : \quad \|f\chi_\iota\|_{L^2(m)} \sim 2^{d(\eta,\delta)} \|f\chi_\iota\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})} \quad ,$$

où on a identifié $f\chi_\iota \in L^2(m)$ et sa fonction étendue de manière triviale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'}$.

Opérateurs sur $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'})$

On associe à un paramètre $\iota = (\theta, (\eta, \delta), \zeta) \in I$, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} L_\iota &= \min_{i<j} \delta_{i,j} + 4 \max_{i_0} |\eta_{i_0} - \min_{i<j} \delta_{i,j}| \quad , \\ R_\iota &= \frac{1}{2} \max(\theta, \min_{i<j} \delta_{i,j}) \quad , \\ D_\iota &= 8 \max_{i_0} |\eta_{i_0} - \min_{i<j} \delta_{i,j}| + \max(- \min_{i<j} \delta_{i,j} + \theta, 0) + 4 \max_i \zeta_i \quad , \end{aligned}$$

et l'opérateur non borné auto-adjoint positif sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'})$ donné par :

$$T_\iota := \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{v'} 2^{\frac{L_\iota}{2}} \partial_{\lambda_i}^2 + 2^{\frac{R_\iota}{2}} \partial_r^2 + 2^{\frac{D_\iota}{2}} \sum_{i=1}^{v'} \Delta_i^2 \quad .$$

Énoncé du théorème

Avec les notations précédentes, on peut énoncer le résultat de notre étude :

Théorème 4.13 (Multiplicateurs)
Soit $f \in L^\infty(m)$, une fonction de $\mathcal{P}$.

On note F la distribution radiale dont la transformée de Fourier est f. On définit alors l'opérateur T_f de convolution par F sur les fonctions simples de $N = N_{v,2}$.

On identifie $f_\iota = f\chi_\iota$ à son extension triviale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'}$.

S'il existe $\epsilon > Q/2$ tel que la somme suivante :

$$\sum_{\iota\in I} s_\iota^{-\frac{Q}{4}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\| T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}} . f_\iota \right\| \quad ,$$

est finie, alors l'opérateur T_f s'étend en un opérateur continu $L^p \to L^p$ pour tout $1 < p < \infty$.

Les hypothèses de régularité ("plus de $Q/2$ dérivées"), et de décroissance ne sont pas vérifiées pour les fonctions f constantes. Cependant, les moyens mis en oeuvre dans cette étude (en particulier l'expression des opérateurs Ξ et $\aleph$) permettront dans des travaux ultérieurs d'améliorer ce premier pas pour des fonctions assez régulières mais peu décroissantes, puis éventuellement d'adapter certaines méthodes des groupes de type H.

Remarquons que dans le cas d'un groupe de type H, la forme des valeurs propres pour les fonctions sphériques du sous-laplacien de Kohn et des dérivations du centre permet de regarder de manière équivalente les problèmes des multiplicateurs de Fourier et spectraux conjoints pour ces opérateurs différentiels radiaux ; en particulier, certaines propriétés connues des multiplicateurs spectraux sur les groupes de Lie nilpotents [Chr91, Ale94] sont utilisées dans [MRS96]. De tels phénomènes dans le cas de $N_{v,2}$ ne semblent pas aussi directs. En effet, le centre est de dimension $v(v-1)/2$, il n'y a pas de "directions indépendantes" et $\sum_{j=1}^{v'} \lambda_j(2l_j+1)+r^2$ est la valeur propre du sous-laplacien L pour la fonction sphérique bornée $\phi^{r,\Lambda,l} \in \mathcal{P}$ (voir (3.7)). Il sera aussi moins facile que dans la cas d'un groupe de type H d'utiliser sur $N_{v,2}$ les résultat sur les multiplicateurs de Fourier au problème des multiplicateurs spectraux pour le sous-laplacien (i.e. trouver un exposant optimal pour la classe de Sobolev locale des fonctions qui sont des mutliplicateurs spectraux).

4.2.2 Démarche de la démonstration du théorème 4.13

D'après le théorème des intégrales singulières [CW71], pour que l'opérateur T_f s'étende en un opérateur continu $L^p(N) \to L^p(N)$, il suffit de montrer :

$$\exists\, C_1 > 0 \quad : \quad \forall h \quad \|T_f(h)\|_{L^2} \leq C_1 \|h\|_{L^2} \tag{4.9}$$

$$\exists\, C_2, C_3 > 0 \quad : \quad \forall y, y_0 \in N \quad \int_{|ny_0^{-1}|>C_2|yy_0^{-1}|} |F(ny^{-1}) - F(ny_0^{-1})|dn < C_3 \tag{4.10}$$

D'après le corollaire 3.25, la condition (4.9) est déjà vérifiée avec $C_1 = \|f\|_{L^\infty}$.

Avant de passer à l'étude de la condition (4.10), nous explicitons les décompositions de fonctions dont nous aurons besoin pour cette étude.

Décompositions des fonctions sur $\mathcal{P}$

Soit $f \in L^\infty(m)$. On définit pour $\iota \in I$ la fonction $f_\iota := f\chi_\iota \in L^2(m)$. D'après la décomposition (4.6) de l'unité, on voit que l'on a décomposé :

$$f = \sum_{\iota \in I} f_\iota \quad .$$

Nous décomposons aussi f_ι sur supp χ_ι. On définit les fonctions $f_{\iota,h} \in L^2(m)$ par :

$$f_{\iota,h} := f_\iota \chi_h = f\chi_\iota\chi_h \;, \quad \iota \in I,\ h \in \mathbb{Z} \;:\; 2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota \quad .$$

D'après la décomposition (4.7) de l'unité, on a :

$$f_\iota = \sum_{h\in\mathbb{Z}\,:\,2^{-3}s_\iota<2^h<2^5 s_\iota} f_{\iota,h} \quad .$$

Décompositions de fonctions radiales sur N

On définit les fonctions $F_\iota, F_{\iota,h} \in L^2(N)^\natural$ comme les fonctions radiales dont les transformées de Fourier sphériques sont respectivement $f_\iota, f_{\iota,h}$. D'après la proposition 3.19, la fonction $\chi_h \in L^2(m)$ est la transformée de Fourier du noyau de l'opérateur $\chi(2^{-h}L)$,

On décompose :

$$F = \sum_{\iota \in I} F_\iota \qquad \text{et} \qquad F_\iota = \sum_{2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota} F_{\iota,h} \quad , \tag{4.11}$$

la somme pour F converge dans $\mathcal{S}(N)'$ (l'ensemble des distributions tempérées), et la somme pour F_ι est finie. Pour F_ι, on voit :

$$F_{\iota,h} = F_\iota * \chi(2^{-h}L).\delta_0 \quad , \tag{4.12}$$

où l'on a noté $\chi(2^{-h}L).\delta_0$ le noyau de l'opérateur $\chi(2^{-h}L)$.

Par homogénéité du sous-laplacien on a :

$$\chi(2^{-h}L).\delta_0(y) = 2^{h\frac{Q}{2}}\, \chi(L).\delta_0\,(2^{\frac{h}{2}}y) \quad . \tag{4.13}$$

En effet, on a : $L^{\delta_r} = r^2 L$, où on a noté δ_r la dilatation sur des fonctions $h : N \to \mathbb{C}$ et sur des opérateurs T sur un espace de fonctions stables par dilatation :

$$\delta_r.h := h(r.) \qquad \text{et} \qquad T^{\delta_r}.h := \delta_{r^{-1}}.(T.(\delta_r.h)) \quad .$$

On en déduit que pour une fonction $m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en notant $M \in \mathcal{S}(N)$ le noyau de l'opérateur $m(L)$, et $M_r \in \mathcal{S}(N)$ le noyau de l'opérateur $m(r^2L)$, on a la propriété d'homogénéité du sous-laplacien :

$$M_r = r^{-Q}\delta_{\frac{1}{r}}.M \quad .$$

Étude de la condition (4.10)

Pour les paramètres :

$$\iota \in I\ , \quad h \in \mathbb{Z}\ :\ 2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota\ , \quad y,z \in N\ , \quad r > 0 \quad ,$$

on note l'intégrale :

$$I_{\iota,h;y,z;r} := \int_{|yn^{-1}|>4r} |F_{\iota,h}(yn^{-1}) - F_{\iota,h}(zn^{-1})| dn \quad ,$$

et son supremum sur $|yz^{-1}| < r$ et h :

$$S_{\iota,r} := \sup \left\{ I_{\iota,h;y,z;r} \;\middle|\; \begin{array}{l} y,z \in N \quad \text{vérifiant} \quad |yz^{-1}| < r \\ h \in \mathbb{Z} \quad \text{vérifiant} \quad 2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota \end{array} \right\} \quad .$$

D'après les décompositions (4.11) et le fait que le nombre des entiers $h \in \mathbb{Z}$ vérifiant $2^{-3}s_\iota < 2^h < 2^5 s_\iota$ est borné indépendemment de $\iota \in I$, la deuxième condition (4.10) sera vérifiée, si la condition suivante est satisfaite :

$$\exists C > 0 \quad : \quad \forall r > 0 \qquad \sum_{\iota \in I} S_{\iota,r} \ < \ C \quad . \tag{4.14}$$

Pour étudier l'intégrale $I_{\iota,h;y,z;r}$, nous avons besoin de définir pour $\iota \in I$, pour $\epsilon' > 0$ et $g \in L^\infty(m)$ dont le support est inclus dans celui de χ_ι (en particulier $g \in L^2(m)$),

$$N_{\iota,\epsilon'}(g) := \left\| (1 + s_\iota^2 |n|^4)^{\epsilon'} G(n) \right\|_{L^2(n\in N)} \quad ,$$

en notant $G \in L^2(N)^\natural$ la fonction dont la transformée de Fourier est g.

Proposition 4.14
Pour $(Q+1)/2 > \epsilon > Q/2$, l'expression $S_{\iota,r}$ est majorée à une constante qui ne dépend que de ϵ, p, par :

$$\min(s_\iota^{\frac{1}{2}} r, 1) \ s_\iota^{-\frac{Q}{4}} (r s_\iota^{\frac{1}{2}})^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} N_{\iota,\frac{\epsilon}{4}}(f_\iota) \quad .$$

Dans la section qui suit, nous montrerons la proposition suivante :

Proposition 4.15
Soit $\iota(\theta,(\eta,\delta),\zeta) \in I$ un paramètre.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a pour toute fonction $g \in L^\infty(m)$ identifiée à sa fonction étendue de manière triviale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'}$:

$$\text{supp } g \subset \text{supp } \chi_\iota \implies N_{\iota,\epsilon}(g) \leq C \, 2^{d(\eta,\delta)} \left\| T_\iota^{2\epsilon}.g \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})} \ ,$$

où C désigne une constante qui ne dépend que de v, ϵ, et en particulier pas de la fonction g ou du paramètre ι.

Admettons ces deux propositions. On en déduit que l'expression $S_{\iota,r}$ est majorée à une constante près par :

$$\min(s_\iota^{\frac{1}{2}} r, 1) \ s_\iota^{-\frac{Q}{4}} (r s_\iota^{\frac{1}{2}})^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\| T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}}.f_\iota \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})} \quad . \tag{4.15}$$

– Si ι est tel que $s_\iota^{\frac{1}{2}} r \leq 1$, alors l'expression (4.15) est majorée par :

$$s_\iota^{\frac{1}{2}} r s_\iota^{-\frac{Q}{4}} (r s_\iota^{\frac{1}{2}})^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\| T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}}.f_\iota \right\| \quad ;$$

de plus, on a $r \leq s_\iota^{-\frac{1}{2}}$ d'où :

$$s_\iota^{\frac{1}{2}} r s_\iota^{-\frac{Q}{4}} (r s_\iota^{\frac{1}{2}})^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} = s_\iota^{\frac{1}{2}(1-\epsilon)} r^{1-\epsilon+\frac{Q}{2}} \leq s_\iota^{-\frac{1}{2}\frac{Q}{2}} \quad .$$

– Sinon, on a : $s_\iota^{\frac{1}{2}}r \geq 1$, et l'expression (4.15) est majorée par :

$$s_\iota^{-\frac{Q}{4}}\left(rs_\iota^{\frac{1}{2}}\right)^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\|T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}}.f_\iota\right\| \leq s_\iota^{-\frac{Q}{4}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\|T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}}.f_\iota\right\| \quad .$$

La somme sur $\iota \in I$ de ce terme est bornée pour une puissance $\epsilon \in]Q/2, -(Q+1)/2$, indépendemment de $r > 0$ lorsque la somme

$$\sum_{\iota\in I} s_\iota^{-\frac{Q}{4}} 2^{d(\eta,\delta)} \left\|T_\iota^{\frac{\epsilon}{2}}.f_\iota\right\| \quad ,$$

sera finie. C'est exactement l'hypothèse du théorème 4.13.

Donc le théorème 4.13 sera démontré lorsque les propositions 4.14 et 4.15 seront prouvées. C'est ce que nous faisons dans la sous-section et dans la section qui suivent.

4.2.3 Étude de l'intégrale $I_{\iota,h;y,z;r}$

Cette sous-section est consacrée à la démonstration de la proposition 4.14. C'est une conséquence du lemme qui suit lorsque $K = s_\iota^{\frac{1}{2}}$.

Lemme 4.16
On se donne un paramètre $K > 0$ inférieur (à une constante qui ne dépend que de ϵ, v) à $2^{\frac{h}{2}}$. Pour $|yz^{-1}| < r$ et $\epsilon > Q/2$, l'intégrale $I_{\iota,h;y,z;r}$ est majorée à une constante qui ne dépend que de v, ϵ, par :

$$\{\min_{d=0,1} 2^{\frac{h}{2}d} r^d\}\; K^{-\frac{Q}{2}}(1+rK)^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} \left\|(1+K|n|)^\epsilon F_\iota(n)\right\|_{L^2(n\in N)} \quad .$$

Démonstration du lemme 4.16: Dans la preuve, C désigne une constante qui ne dépend que des dimensions du groupe N, et éventuellement de ϵ et qui pourra évoluer au cours du calcul. Lorsque $|yz^{-1}| < r$, on contrôle l'intégrale $I_{\iota,h;y,z;r}$ soit d'après l'inégalité triangulaire, soit grâce aux inégalités de Taylor ([VSCC92], Théorème IV.7.3) :

$$\text{soit par} \quad 2\int_{|n'|>2r} |F_{\iota,h}(n')|dn' \ , \quad \text{soit par} \quad Cr\max_i \int_{|n'|>2r} |X_i.F_{\iota,h}(n')|dn' \quad .$$

On cherche donc à contrôler pour $D = \mathrm{Id}$ ou $X_i, i = 1,\dots,v$ les intégrales :

$$\int_{|n'|>2r} |D.F_{\iota,h}(n')|dn' \quad ;$$

En utilisant l'écriture (4.12), on a :

$$\int_{y'\in N} |D.\chi(2^{-h}L).\delta_0(y')| \int_{|n'|>2r} |F_\iota(n'y'^{-1})|dn'\,dy' \;\leq\; J_{r,h,\epsilon,D} \left\|(1+K|n|)^\epsilon F_\iota(n)\right\|_{L^2(n\in N)} \quad ,$$

par Cauchy-Schwarz et un changement de variable $n = n'y'^{-1}$, en dénotant l'intégrale :

$$J_{r,h,\epsilon,D} := \int_{y' \in N} |D.\chi(2^{-h}L)(y')| \sqrt{\int_{|n'|>2r} (1 + K|n'y'^{-1}|)^{-2\epsilon} dn'dy'}$$

Il suffit donc d'estimer les intégrales $J_{r,h,\epsilon,D}$. Or d'une part, d'après l'égalité (4.13), on a :

$$D.\chi(2^{-h}L).\delta_0(y') = 2^{\frac{h}{2}(Q+d(D))} D.\chi(L).\delta_0(2^{\frac{h}{2}}y') \quad ,$$

où $d(D) = 0$ si $D = \mathrm{Id}$ et 1 si $D = X_i$ est le degré de l'opérateur différentiel D ; d'autre part, on obtient de l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in N \quad : \quad (1 + |xy|) \leq C'(1 + |x|)(1 + |y|) \quad ,$$

où C' désigne la constante de l'inégalité triangulaire ; on en déduit :

$$\int_{|n'|>2r} (1 + K|n'y'^{-1}|)^{-2\epsilon} dn' \leq C'^{2\epsilon}(1 + K|y'|)^{2\epsilon} \int_{|n'|>2r} (1 + K|n'|)^{-2\epsilon} dn' \quad .$$

On calcule facilement cette dernière intégrale : grâce au passage en coordonnées polaires (voir (1.1)), puis au changement de variable $\rho' = K\rho$:

$$\begin{aligned}
\int_{|n'|>2r} (1 + K|n'|)^{-2\epsilon} dn' &= \int_{\rho=2r}^{\infty} (1 + K\rho)^{-2\epsilon} \rho^{Q-1} d\rho \\
&= K^{-Q} \int_{\rho=2rK}^{\infty} (1 + \rho')^{-2\epsilon} \rho'^{Q-1} d\rho' \leq K^{-Q} \int_{\rho=2rK}^{\infty} (1 + \rho')^{-2\epsilon+Q-1} d\rho' \\
&= K^{-Q}(2\epsilon - Q)^{-1}(1 + 2rK)^{-2\epsilon+Q} \quad .
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_{|n'|>2r} (1 + K|n'y'^{-1}|)^{-2\epsilon} dn' \leq C(1 + K|y'|)^{2\epsilon} K^{-Q}(1 + rK)^{-2\epsilon+Q} \quad ,$$

puis en rassemblant ce qui précède et en utilisant l'hypothèse sur K :

$$\begin{aligned}
J_{r,h,\epsilon,D} \leq\ & C\, 2^{\frac{h}{2}(Q+d(D))} \sqrt{K^{-Q}(1 + rK)^{-2\epsilon+Q}} \\
& \int_{y' \in N} |D.\chi(L).\delta_0(2^{\frac{h}{2}}y')|(1 + 2^{\frac{h}{2}}|y'|)^{\epsilon} dy' \\
=\ & C\, 2^{\frac{h}{2}d(D)} K^{-\frac{Q}{2}}(1 + rK)^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} \int_N |D.\chi(L).\delta_0(y'')|(1 + |y''|)^{\epsilon} dy'' \quad ,
\end{aligned}$$

grâce au changement de variable $y'' = 2^{\frac{h}{2}}y'$. Or on a $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, d'où $\chi(L).\delta_0 \in \mathcal{S}(N)$; les dernières intégrales contre dy'' sont donc finies. On en déduit que pour tous les opérateurs $D = \mathrm{Id}$ ou $X_i, i = 1, \ldots, v$, les intégrales $J_{r,h,\epsilon,D}$ sont bornées à une constante près par :

$$2^{\frac{h}{2}d(D)} K^{-\frac{Q}{2}}(1 + rK)^{-\epsilon+\frac{Q}{2}} \quad .$$

4.3 Contrôle de la norme $N_{\iota,\epsilon}$

Le but de cette section est de démontrer la proposition 4.15.

Par la formule (3.9) de Plancherel, on a :

$$\begin{aligned} N_{\iota,\epsilon}^2(g) &= \int_{\mathcal{P}} |<(1+s_\iota^2|n|^4)^\epsilon G, \phi>|^2 dm(\phi) \\ &= \int_{\mathcal{P}} |<G, (1+s_\iota^2(|X|^4+|A|^2))^\epsilon \phi>|^2 dm(\phi) \end{aligned}$$

Nous cherchons donc à exprimer les termes $|X|^2\phi$ et $|A|^2\phi$ en fonction des opérateurs de décalage et de dérivation appliqués aux paramètres de $\phi = \phi^{r,\Lambda,l}(n = \exp(X+A))$.

Rappelons :

$$\phi^{r,\Lambda,l}(\exp(X+A)) = \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} f_{r,\Lambda,l}(k^{-1}.X)dk$$

où la fonction $f_{r,\Lambda,l} = f_\phi$ est paramétrée par $\mathcal{P}$ et est définie sur $\mathbb{R}^v$ par :

$$f_\phi(X) := e^{i<rX_v^*,X>} \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(\lambda_j \frac{|\mathrm{pr}_j(X)|^2}{2}) \quad .$$

Opérateurs de décalage et de dérivation

On utilisera les opérateurs de décalage $\Delta, \alpha, \beta, \gamma$ sur les fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ définis dans la sous-section 5.1.4. Pour une fonction donnée sur $\mathbb{N}^{v'}$, on définit les opérateurs Δ_i, α_i, β_i, et γ_i pour $i = 1, \ldots, v'$ comme les opérateurs $\tau^\pm, \alpha, \beta, \gamma$ agissant respectivement sur la $i$ème variable entière de l. Les propriétés pour ces opérateurs données dans la sous-section 5.1.4 conduisent aux propriétés suivantes pour les $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\alpha_i . \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) = y_i \mathcal{L}'_{l_i} \prod_{j\neq i} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) \quad , \tag{4.16}$$

$$\beta_i . \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) = y_i \mathcal{L}_{l_i} \prod_{j\neq i} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) \quad , \tag{4.17}$$

$$\gamma_i . \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) = \alpha_i \mathcal{L}'_{l_i} \prod_{j\neq i} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) \quad .$$

On remarque que l'on peut déduire en dérivant encore l'égalité (4.16) suivant y_i une autre égalité :

$$\gamma_i . \prod_{j=1}^{v'} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) = \alpha_i . \mathcal{L}'_{l_i} \prod_{j\neq i} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) = (\mathcal{L}'_{l_i} + y_i \mathcal{L}''_{l_i}) \prod_{j\neq i} \mathcal{L}_{l_j}(y_j) \quad . \tag{4.18}$$

Grâce à ces égalités, on a facilement quelques propriétés de dérivation et de décalage pour la fonction f_ϕ :

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathrm{pr}_i(X)|^2}{2} f_\phi(X) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i}.f_\phi(X) \quad , & (4.19)\\
\partial_{\lambda_i}.f_\phi(X) &= \frac{\alpha_i}{\lambda_i}.f_\phi(X) \quad , & (4.20)\\
\partial^2_{\lambda_i}.f_\phi(X) &= \left(-\frac{\alpha_i}{\lambda_i^2} + (\frac{\alpha_i}{\lambda_i})^2\right).f_\phi(X) \quad . & (4.21)
\end{aligned}$$

On définit l'opérateur Ξ sur les fonctions sur $\mathcal{P}$:

$$\Xi := 2\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad \left(-\frac{1}{2}\partial_r^2 \quad \text{si } v = 2v'+1\right) \quad .$$

De l'égalité (4.19), on obtient facilement pour $n = \exp(X+A)$:

$$|X|^2\phi(n) = \Xi.\phi(n) \quad .$$

On définit aussi l'opérateur sur les fonctions de $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\aleph := \sum_m \partial^2_{\lambda_m} - 2\frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m} + \frac{\alpha_m^2+\alpha_m}{\lambda_m^2} + \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i} - \alpha_i - \lambda_j\partial_{\lambda_j} + \alpha_j)\\
+4\sum_{i<j}\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(-\alpha_j + \lambda_j\gamma_j\frac{\beta_i}{\lambda_i} - \alpha_i + \lambda_i\gamma_i\frac{\beta_j}{\lambda_j} - 2\alpha_i\alpha_j)\\
+\left(\sum_i \frac{2}{\lambda_i^2}(-\lambda_i\gamma_i\partial_r^2 - 2ri\partial_r\alpha_i + r^2\frac{\beta_i}{\lambda_i} + ir\partial_r) - \frac{2}{\lambda_i}\partial_{\lambda_i} \quad \text{si } v = 2v'+1.\right)
\end{aligned}$$

Lemme 4.17 (Expression de $|X|^2\phi$ et $|A|^2\phi$)
On a :

$$\begin{aligned}
\Xi.\phi(\exp(X+A)) &= |X|^2\phi(\exp(X+A))\\
\aleph.\phi(\exp(X+A)) &= |A|^2\phi(\exp(X+A))
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer la première égalité. La sous-section qui suit sera consacrée à montrer la seconde.

Remarque 7 *Nous remarquons grâce à (5.10), (5.14), (5.15), (5.16), au lemme 5.6, que chaque terme de $\aleph$, et de Ξ, puis Ξ^2 se développe en des termes comportant au moins "une dérivation discrète ou non".*

4.3.1 Étude de $|A|^2\phi$

Dans cette sous-section, pour alléger les notations, on sous-entendra les arguments et les paramètres du terme $\phi = \phi^{r,\Lambda,l}(\exp(X+A))$.

On remarque :

$$|A|^2\phi = \int_{O(v)} \Delta_{A^*=k.D_2(\Lambda)} \left\{A^* \to e^{i<A^*,A>}\right\} f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad ,$$

où Δ est le laplacien sur l'ensemble $\mathcal{A}_v$ des matrices antisymétriques. D'après son expression "en coordonnées polaires" (lemme 5.12), on a :

$$|A|^2\phi = F_1 + F_2 + F_3 \quad (+F_4 + F_5 \quad \text{si } v = 2v'+1) \quad ,$$

où les F_i sont données par :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{O(v)} \sum_m \partial^2_{\lambda_m} \left\{\Lambda \to e^{i<k.D_2(\Lambda),A>}\right\} f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad , \\
F_2 &= \int_{O(v)} \sum_{i<j} \sum_{(m,n)\in I_{i,j}} D^2[k \to e^{i<k.D_2(\Lambda),A>}](\psi^{-1}(k.E_{m,n}), \psi^{-1}(k.E_{m,n})) \\
&\qquad\qquad f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad , \\
F_3 &= \int_{O(v)} \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i} - \lambda_j\partial_{\lambda_j}).\left\{\Lambda \to e^{i<k.D_2(\Lambda),A>}\right\} f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad ,
\end{aligned}$$

et dans le cas $v = 2v'+1$:

$$\begin{aligned}
F_4 &= \int_{O(v)} \sum_{i,\bar{i}=2i,2i-1} \frac{1}{\lambda_i} D^2[k \to e^{i<k.D_2(\Lambda),A>}](\vec{E}_{\bar{i},v}, \vec{E}_{\bar{i},v})\, f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad , \\
F_5 &= \int_{O(v)} \sum_i \frac{2}{\lambda_i} - \partial_{\lambda_i} \left\{\Lambda \to e^{i<k.D_2(\Lambda),A>}\right\} f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad .
\end{aligned}$$

Exprimons différemment F_1

On a :

$$F_1 = \sum_m \partial^2_{\lambda_m}.\phi - E_1 - E_2$$

où les termes "correctifs" E_1 et E_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2\sum_m \int_{O(v)} \partial_{\lambda_m}.e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \partial_{\lambda_m}.f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad , \\
E_2 &= \sum_m \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \partial^2_{\lambda_m} f_\phi(k^{-1}.X)\, dk \quad .
\end{aligned}$$

On peut exprimer à l'aide du terme ϕ décalé ou dérivé ces termes E_1, E_2. D'abord pour le terme E_1, on voit que d'après les égalités (4.20) et la linéarité des opérateurs α_m, on a :

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2\sum_m \int_{O(v)} \partial_{\lambda_m} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \quad \frac{\alpha_m}{\lambda_m}.f_\phi(k^{-1}.X) \ ; dk \\
&= 2\sum_m \frac{\alpha_m}{\lambda_m}. \int_{O(v)} \partial_{\lambda_m} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \quad f_\phi(k^{-1}.X)\ dk \quad .
\end{aligned}$$

Or on voit :

$$\begin{aligned}
&\int_{O(v)} \partial_{\lambda_m} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \ f_\phi(k^{-1}.X)\ dk \\
&= \partial_{\lambda_m}. \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} f_\phi(k^{-1}.X)dk - \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \partial_{\lambda_m} f_\phi(k^{-1}.X)dk \quad .
\end{aligned}$$

D'où on déduit d'après les égalités (4.20) et la linéarité des opérateurs α_m :

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2\sum_m \frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m}.\phi - \frac{\alpha_m}{\lambda_m}. \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \partial_{\lambda_m} f_\phi(k^{-1}.X)dk \\
&= 2\sum_m \frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m}.\phi - \frac{\alpha_m}{\lambda_m}. \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \frac{\alpha_m}{\lambda_m} f_\phi(k^{-1}.X)dk \\
&= 2\sum_m \frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m} - \left(\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\right)^2 \quad .\phi \quad .
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le terme E_2, d'après les égalités (4.21), on a :

$$E_2 = \sum_m -\frac{\alpha_m}{\lambda_m^2} + \left(\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\right)^2 \quad .\phi \quad .$$

On voit donc que l'on peut exprimer le terme F_1 comme :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left[\sum_m \partial^2_{\lambda_m} - \left(2\sum_m \frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m} - \left(\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\right)^2\right) - \left(\sum_m -\frac{\alpha_m}{\lambda_m^2} + \left(\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\right)^2\right)\right].\phi \\
&= \left[\sum_m \partial^2_{\lambda_m} - 2\frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m} + \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m}{\lambda_m^2}\right].\phi \quad .
\end{aligned}$$

Exprimons différemment le terme F_3

On a :

$$F_3 = \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\lambda_i \partial_{\lambda_i} - \lambda_j \partial_{\lambda_j}).\phi - E_3 \quad .$$

où le terme "correctif" E_3 est donné par :

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i}-\lambda_j\partial_{\lambda_j}).f_\phi(k^{-1}.X)\,dk \\
&= \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\alpha_i-\alpha_j).\phi \quad ,
\end{aligned}
$$

d'après (4.20). On voit donc que l'on peut exprimer le terme F_3 comme :

$$
\begin{aligned}
F_3 &= \left[\sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i}-\lambda_j\partial_{\lambda_j}) - \sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\alpha_i-\alpha_j)\right].\phi \\
&= \left[\sum_{i<j} \frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i}-\alpha_i-\lambda_j\partial_{\lambda_j}+\alpha_j)\right].\phi \quad .
\end{aligned}
$$

Exprimons différemment F_2

La somme est sur $(m,n) \in I_{i,j}$ et $i<j$:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \sum 2 \frac{d}{dt}^2_{t=0} \int_{O(v)} e^{i<ke^{tD_{k,\Lambda}\psi^{-1}(k.B^{i,j}_{m,n})}.D_2(\Lambda),A>} f_\phi(k^{-1}.X)\,dk \\
&= \sum 2 \int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-t.D_{k,\Lambda}\psi^{-1}(k.B^{i,j}_{m,n})})^{-1}.X)\,dk \quad ,
\end{aligned}
$$

où on a noté : (les $\{E_{m,n}\}$ designent la base canonique des matrices antisymétriques)

$$
B^{i,j}_{m,n} = D_{k,\Lambda}\psi^{-1}(k.E_{m,n}) = \frac{1}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\epsilon_j\lambda_j E_{m_j,n_j}+\epsilon_i\lambda_i E_{m_i,n_i}) \quad ,
$$

et où les indices et les signes sont donnés par le tableau :

(m,n)	ϵ_j	(m_j,n_j)	ϵ_i	(m_i,n_i)
(2i-1,2j)	-	(2i-1,2j)	+	(2i,2j-1)
(2i,2j)	+	(2i,2j-1)	-	(2i-1,2j)
(2i-1,2j)	+	(2i-1,2j-1)	+	(2i,2j)
(2i,2j-1)	-	(2i,2j)	-	(2i-1,2j-1)

Fixons $i<j$, et $(m,n) \in I_{i,j}$ et calculons

$$
\frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-tB})^{-1}.X) \,, \quad B = B^{i,j}_{m,n} \quad .
$$

Pour cela, nous allons effectuer un développement limité à l'ordre 2. Commençons par :

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{pr}_p((ke^{-tB})^{-1}.X)|^2 &= |\mathrm{pr}_p(e^{tB}k^{-1}.X)|^2 = |\mathrm{pr}_p((I+tB+\frac{t^2}{2}B^2)k^{-1}.X)|^2 + o(t^2) \\
&= |\mathrm{pr}_p(k^{-1}.X)|^2 + 2t < \mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}.X) > \\
&\quad + t^2(< \mathrm{pr}_p(B^2k^{-1}.X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}.X) > + |\mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X)|^2) + o(t^2) \quad .
\end{aligned}
$$

On obtient donc le développement limité (en convenant que lorsque leurs arguments ne sont pas explicités, les fonctions $\mathcal{L}_{l_p}$ et leurs dérivées sont prises en l'argument $(\lambda_p \frac{|\mathrm{pr}_p(X)|^2}{2})$) :

$$\mathcal{L}_{l_p}(\lambda_p \frac{|\mathrm{pr}_p((ke^{-tB})^{-1}X)|^2}{2}) = \mathcal{L}_{l_p} + ta_p\mathcal{L}'_{l_p} + \frac{t^2}{2}(b_p\mathcal{L}'_{l_p} + a_p^2\mathcal{L}''_{l_p}) + o(t^2) \quad ,$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} a_p &= a_p(B) = \lambda_p < \mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}.X) > \quad , \\ b_p &= b_p(B) = \lambda_p(< \mathrm{pr}_p(B^2k^{-1}.X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}.X) > + |\mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X)|^2) \quad . \end{aligned}$$

On voit :

- $a_p(B) = b_p(B) = 0$ lorsque $p \neq i, j$,
- dans le cas $v = 2v' + 1$, $< X_v^*, (ke^{-tB})^{-1}.X > = < X_v^*, k^{-1}.X >$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-t.B^{i,j}_{m,n}})^{-1}.X) \\ &= \left((b_j\mathcal{L}'_{l_j} + a_j^2\mathcal{L}''_{l_j})\mathcal{L}_{l_i} + (b_i\mathcal{L}'_{l_i} + a_i^2\mathcal{L}''_{l_i})\mathcal{L}_{l_j} + 2a_ia_j\mathcal{L}'_{l_i}\mathcal{L}'_{l_j}\right) \prod_{p\neq i,j} \mathcal{L}_{l_p} \left(e^{i<rX_v^*, k^{-1}X>}\right) . \end{aligned}$$

Pour calculer

$$\sum_{(m,n)\in I_{i,j}} \frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-t.B^{i,j}_{m,n}})^{-1}.X) \quad , \tag{4.22}$$

il suffit donc

1. de calculer les expressions a_i^2, a_j^2, a_ia_j,
2. de calculer les expressions b_i, b_j,
3. puis de les sommer sur $(m, n) \in I_{i,j}$, ces expressions étant dépendante de la matrice antisymétrique $B = B^{i,j}_{m,n}$.

Calculons les expressions a_i et a_j. Comme on a :

$$< \mathrm{pr}_p(\vec{E}_{m,n}k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) > = \begin{cases} [k^{-1}X]_n[k^{-1}X]_m & \text{si } p = i \quad , \\ -[k^{-1}X]_m[k^{-1}X]_n & \text{si } p = j \quad , \end{cases}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda_i}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\epsilon_j\lambda_j[k^{-1}.X]_{n_j}[k^{-1}.X]_{m_j} + \epsilon_i\lambda_i[k^{-1}.X]_{n_i}[k^{-1}.X]_{m_i}) \quad , \\ a_j &= -\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\epsilon_j\lambda_j[k^{-1}.X]_{n_j}[k^{-1}.X]_{m_j} + \epsilon_i\lambda_i[k^{-1}.X]_{n_i}[k^{-1}.X]_{m_i}) \quad . \end{aligned}$$

On en déduit les expressions a_i^2, a_j^2, a_ia_j : par exemple,

$$\begin{aligned} a_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}&(\lambda_j^2[k^{-1}.X]^2_{n_j}[k^{-1}.X]^2_{m_j} + \lambda_i^2[k^{-1}.X]^2_{n_i}[k^{-1}.X]^2_{m_i} \\ &+ 2\epsilon_i\epsilon_j\lambda_i\lambda_j[k^{-1}.X]_{n_j}[k^{-1}.X]_{m_j}[k^{-1}.X]_{n_i}[k^{-1}.X]_{m_i}) \quad . \end{aligned}$$

Calculons les expressions b_i et b_j. Commençons par le premier terme de $b_p, p = i, j$. Comme on a d'une part :

$$B^2 = \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2 E^2_{m_j,n_j} + \lambda_i^2 E^2_{m_i,n_i}) \quad ,$$

et d'autre part :

$$< \mathrm{pr}_p(\vec{E}^2_{m,n}k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) >= \begin{cases} -[k^{-1}X]^2_m & \text{si } p = i \quad , \\ -[k^{-1}X]^2_n & \text{si } p = j \quad , \end{cases}$$

on en déduit que $< \mathrm{pr}_p(B^2 k^{-1}.X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}.X) >$ vaut :

$$\begin{array}{ll} \frac{-1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2[k^{-1}X]^2_{m_j} + \lambda_i^2[k^{-1}X]^2_{m_i}) & \text{si } p = i \quad , \\ \frac{-1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2[k^{-1}X]^2_{n_j} + \lambda_i^2[k^{-1}X]^2_{n_i}) & \text{si } p = j \quad . \end{array}$$

Maintenant, calculons le deuxième terme de $b_p, p = i, j$. Comme on a d'une part :

$$|\mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X)|^2 = \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2|\mathrm{pr}_p(E_{m_j,n_j}k^{-1}.X)|^2 + \lambda_i^2|\mathrm{pr}_p(E_{m_i,n_i}k^{-1}.X)|^2) \quad ,$$

et d'autre part :

$$|\mathrm{pr}_p(\vec{E}_{m,n}k^{-1}X)|^2 = \begin{cases} [k^{-1}X]^2_n & \text{si } p = i \quad , \\ [k^{-1}X]^2_m & \text{si } p = j \quad , \end{cases}$$

on en déduit :

$$|\mathrm{pr}_p(Bk^{-1}.X)|^2 = \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2} \begin{cases} (\lambda_j^2[k^{-1}X]^2_{n_j} + \lambda_i^2[k^{-1}X]^2_{n_i}) & \text{si } p = i \quad , \\ (\lambda_j^2[k^{-1}X]^2_{m_j} + \lambda_i^2[k^{-1}X]^2_{m_i}) & \text{si } p = j \quad . \end{cases}$$

Rassemblons les deux termes de $b_p, p = i, j$. On obtient :

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}\left(\lambda_j^2([k^{-1}X]^2_{n_j} - [k^{-1}X]^2_{m_j}) + \lambda_i^2([k^{-1}X]^2_{n_i} - [k^{-1}X]^2_{m_i})\right) \quad , \\ b_j &= -\frac{\lambda_j}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^2}\left(\lambda_j^2([k^{-1}X]^2_{n_j} - [k^{-1}X]^2_{m_j}) + \lambda_i^2([k^{-1}X]^2_{n_i} - [k^{-1}X]^2_{m_i})\right) \quad . \end{aligned}$$

Nous allons maintenant sommer sur $(m, n) \in I_{i,j}$ chacune des nouvelles expressions des $b_i, b_j, a_i^2, a_j^2, a_i a_j$.

Sommons a_i^2, a_j^2, a_ia_j. On remarque que lorsque l'on va sommer sur $(m,n) \in I_{i,j}$, les doubles produits

$$2\epsilon_i\epsilon_j\lambda_i\lambda_j[k^{-1}.X]_{n_j}[k^{-1}.X]_{m_j}[k^{-1}.X]_{n_i}[k^{-1}.X]_{m_i} \quad ,$$

vont disparaître et l'on va obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)} a_i^2(B_{m,n}) &= \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2+\lambda_i^2)|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2 \quad , \\
\sum_{(m,n)} a_j^2(B_{m,n}) &= \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2+\lambda_i^2)|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2 \quad , \\
\sum_{(m,n)} a_ia_j(B_{m,n}) &= -\frac{\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(\lambda_j^2+\lambda_i^2)|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2 \quad .
\end{aligned}$$

Sommons b_i, b_j. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n)} b_i &= 2\lambda_i\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}\left(|\mathrm{pr}_j(k^{-1}X)|^2-|\mathrm{pr}_i(k^{-1}X)|^2\right) \quad , \\
\sum_{(m,n)} b_j &= -2\lambda_j\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}\left(|\mathrm{pr}_j(k^{-1}X)|^2-|\mathrm{pr}_i(k^{-1}X)|^2\right) \quad .
\end{aligned}$$

Autre expression de F_2. On en déduit donc que la somme (4.22) est le produit de

$$\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}\Pi_{p\neq i,j}\mathcal{L}_{l_p}\quad\left(e^{i<rX_v^*,k^{-1}.X>}\right) \quad ,$$

avec :

$$\begin{aligned}
&-2\lambda_j(|\mathrm{pr}_j(k^{-1}X)|^2-|\mathrm{pr}_i(k^{-1}X)|^2)\mathcal{L}'_{l_j}\mathcal{L}_{l_i}+\lambda_j^2|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2\mathcal{L}''_{l_j}\mathcal{L}_{l_i} \\
&+2\lambda_i(|\mathrm{pr}_j(k^{-1}X)|^2-|\mathrm{pr}_i(k^{-1}X)|^2)\mathcal{L}'_{l_i}\mathcal{L}_{l_j}+\lambda_i^2|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2\mathcal{L}''_{l_i}\mathcal{L}_{l_j} \\
&\qquad -2\lambda_i\lambda_j|\mathrm{pr}_j(k^{-1}.X)|^2|\mathrm{pr}_i(k^{-1}.X)|^2\mathcal{L}'_{l_i}\mathcal{L}'_{l_j} \quad .
\end{aligned}$$

Grâce aux égalités (4.17), (4.16) et (4.18), on peut réécrire ce qui précède de la manière suivante :

$$\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(-4\alpha_j+4\lambda_j\gamma_j\frac{\beta_i}{\lambda_i}-4\alpha_i-4\lambda_i\gamma_i\frac{\beta_j}{\lambda_j}-8\alpha_i\alpha_j)f_\phi(k^{-1}.X) \quad .$$

On voit donc que l'on peut exprimer le terme F_2 comme :

$$F_2 = \left[4\sum_{i<j}\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(-\alpha_j+\lambda_j\gamma_j\frac{\beta_i}{\lambda_i}-\alpha_i+\lambda_i\gamma_i\frac{\beta_j}{\lambda_j}-2\alpha_i\alpha_j)\right].\phi \quad .$$

Supposons maintenant $v = 2v'+1$. Il reste à exprimer comme opérateur de dérivé et de décalage sur ϕ les termes F_4, F_5.

Exprimons différemment F_5

D'après les égalités (4.20), on a :

$$F_5 = \sum_m -\frac{2}{\lambda_m}\partial_{\lambda_m}.\phi - E_5 \quad ,$$

où le terme "correctif" E_5 est donné par :

$$E_5 = \sum_m -\frac{2}{\lambda_m}\int_{O(v)} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \quad \partial_{\lambda_m}.f_\phi(k^{-1}.X)\,dk = \sum_m -\frac{2}{\lambda_m}\frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\phi \quad ,$$

grâce à (4.20). On voit donc que l'on peut exprimer le terme F_5 comme :

$$F_5 = \sum_m \left[-\frac{2}{\lambda_m}(\partial_{\lambda_m} + \frac{\alpha_m}{\lambda_m})\right].\phi \quad .$$

Exprimons différemment F_4

Comme dans le cas du terme F_2, on voit :

$$F_4 = \int_{O(v)} \sum_{i,\tilde{i}=2i,2i-1} \frac{1}{\lambda_i^2} e^{i<k.D_2(\Lambda),A>} \frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X)\,dk \quad ,$$

Développement limité de $f_\phi((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X)$. On a pour $\tilde{i} = 2i$ ou $2i-1$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{pr}_p((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X)|^2 &= |\mathrm{pr}_p(k^{-1}X)|^2 + 2t < \mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) > \\ &\quad + t^2(< \mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}^2 k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) > + |\mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}k^{-1}X)|^2) + \ldots\end{aligned}$$

Or ici, on voit :

$$\begin{aligned}< \mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) > &= \begin{cases} [k^{-1}X]_v[k^{-1}X]_{\tilde{i}} & \text{si } p = i \quad , \\ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases} \\ < \mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}^2 k^{-1}X), \mathrm{pr}_p(k^{-1}X) > &= \begin{cases} -[k^{-1}X]_{\tilde{i}}^2 & \text{si } p = i \quad , \\ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases} \\ |\mathrm{pr}_p(E_{\tilde{i},v}k^{-1}X)|^2 &= \begin{cases} [k^{-1}X]_v^2 & \text{si } p = i \quad , \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}\end{aligned}$$

On peut donc faire un développement limité :

$$\begin{aligned}\Pi_i \mathcal{L}_{l_i}(\lambda_i \frac{|\mathrm{pr}_p((ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X)|^2}{2}) &= \Big(\mathcal{L}_{l_i} + \frac{\lambda_i}{2}2t[k^{-1}X]_v[k^{-1}X]_{\tilde{i}}\mathcal{L}'_{l_i} \\ &+ \frac{\lambda_i}{2}t^2(-[k^{-1}X]_{\tilde{i}}^2 + [k^{-1}X]_v^2)\mathcal{L}'_{l_i} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda_i}{2}2t[k^{-1}X]_v[k^{-1}X]_{\tilde{i}})^2 \mathcal{L}''_{l_i} + o(t^2)\Big)\,\Pi_{p\neq i}\mathcal{L}_{l_p} \quad .\end{aligned}$$

On peut aussi faire un développement limité de $e^{i<rX_v^*,(ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X>}$. Commençons par :

$$
\begin{aligned}
< X_v^*, (ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X > &= < X_v^*, e^{t.E_{\tilde{i},v}}k^{-1}X > \\
&= < X_v^*, k^{-1}X > +t < X_v^*, E_{\tilde{i},v}k^{-1}X > +\tfrac{t^2}{2} < X_v^*, E_{\tilde{i},v}^2 k^{-1}X > +o(t^2) \quad .
\end{aligned}
$$

On voit :

$$
\begin{aligned}
< X_v^*, E_{\tilde{i},v}k^{-1}X > &= [k^{-1}X]_{\tilde{i}} \\
< X_v^*, E_{\tilde{i},v}^2 k^{-1}X > &= -[k^{-1}X]_v \quad .
\end{aligned}
$$

On en déduit le développement limité :

$$
\begin{aligned}
e^{i<rX_v^*,(ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X>} &= e^{i<rX_v^*,k^{-1}X>} \\
&\left(1 + x(t[k^{-1}X]_{\tilde{i}} - \frac{t^2}{2}[k^{-1}X]_v) + \frac{1}{2}(xt[k^{-1}X]_{\tilde{i}})^2 + o(t^2)\right) \quad .
\end{aligned}
$$

On peut donc obtenir le développement limité de $f_\phi((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X)$ comme produit des développements de

$$
\Pi_i \mathcal{L}_{l_i}(\lambda_i \frac{|\mathrm{pr}_p((ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X)|^2}{2}) \qquad \text{et} \qquad e^{i<rX_v^*,(ke^{-t.E_{\tilde{i},v}})^{-1}X>} \quad .
$$

Le terme en $\frac{1}{2}t^2$ donne une autre expression de :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X) \\
&= \Big(\lambda_i(-[k^{-1}X]_{\tilde{i}}^2 + [k^{-1}X]_v^2)\mathcal{L}'_{l_i} + (\lambda_i[k^{-1}X]_v[k^{-1}X]_{\tilde{i}})^2\mathcal{L}''_{l_i} + 2r\lambda_i[k^{-1}X]_v[k^{-1}X]_{\tilde{i}}^2\mathcal{L}'_{l_i} \\
&\quad +((r[k^{-1}X]_{\tilde{i}})^2 - r[k^{-1}X]_v)\mathcal{L}_{l_i}\Big) \Pi_{i\neq p}\mathcal{L}_{l_p}\, e^{i<rX_v^*,k^{-1}X>} \quad .
\end{aligned}
$$

Autre expression de F_4. Il reste à sommer sur $\tilde{i}$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{i}=2i,2i-1} \frac{d}{dt}^2_{t=0} f_\phi((ke^{-tE_{\tilde{i},v}})^{-1}.X) \\
&= \Big(\lambda_i(-|\mathrm{pr}_i([k^{-1}X])|^2 + 2[k^{-1}X]_v^2)\mathcal{L}'_{l_i} + \lambda_i^2[k^{-1}X]_v^2|\mathrm{pr}_i([k^{-1}X])|^2\mathcal{L}''_{l_i} \\
&\quad +2r\lambda_i[k^{-1}X]_v|\mathrm{pr}_i([k^{-1}X])|^2\mathcal{L}'_{l_i} + (r^2|\mathrm{pr}_i([k^{-1}X])|^2 - 2r[k^{-1}X]_v)\mathcal{L}_{l_i}\Big) \\
&\qquad \Pi_{i\neq p}\mathcal{L}_{l_p}\, e^{i<rX_v^*,k^{-1}X>} \\
&= \left(-2\alpha_i - 2\lambda_i\gamma_i\partial_r^2 - 4ri\partial_r\alpha_i + (r^2 2\frac{\beta_i}{\lambda_i} + 2ir\partial_r)\right).f_\phi(k^{-1}.X) \quad ,
\end{aligned}
$$

grâce aux égalités (4.16), (4.17) et (4.18). Par linéarité des opérateurs $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \partial_r$, on a :

$$
F_4 = \left[\sum_i \frac{2}{\lambda_i^2}(-\alpha_i - \lambda_i\gamma_i\partial_r^2 - 2ri\partial_r\alpha_i + r^2\frac{\beta_i}{\lambda_i} + ir\partial_r)\right].\phi \quad .
$$

Résumons

On obtient donc l'expression :

$$\begin{aligned}
|A|^2\phi \quad := \quad & \sum_m \partial^2_{\lambda_m} - 2\frac{\alpha_m}{\lambda_m}.\partial_{\lambda_m} + \frac{\alpha_m^2+\alpha_m}{\lambda_m^2} + \sum_{i<j}\frac{-4}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_i\partial_{\lambda_i} - \alpha_i - \lambda_j\partial_{\lambda_j} + \alpha_j) \\
& +4\sum_{i<j}\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^2}(-\alpha_j + \lambda_j\gamma_j\frac{\beta_i}{\lambda_i} - \alpha_i + \lambda_i\gamma_i\frac{\beta_j}{\lambda_j} - 2\alpha_i\alpha_j) \quad ,
\end{aligned}$$

à laquelle il faut ajouter si $v = 2v' + 1$:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \frac{2}{\lambda_i^2}(-\alpha_i - \lambda_i\gamma_i\partial_r^2 - 2ri\partial_r\alpha_i + r^2\frac{\beta_i}{\lambda_i} + ir\partial_r) + \sum_m -\frac{2}{\lambda_m}(\partial_{\lambda_m} + \frac{\alpha_m}{\lambda_m}) \\
& \qquad = \sum_i \frac{2}{\lambda_i^2}(-\lambda_i\gamma_i\partial_r^2 - 2ri\partial_r\alpha_i + r^2\frac{\beta_i}{\lambda_i} + ir\partial_r) - \frac{2}{\lambda_i}\partial_{\lambda_i}
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 4.17.

4.3.2 Propriétés des opérateurs $\Xi, \aleph$

Nous aurons besoin de connaître une expression manipulable des puissances de l'opérateur $\Xi^2 + \aleph$. Nous utiliserons toujours dans ce qui suit, la notation $|a| = \sum_i a_i$ pour un n-upplet $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Lemme 4.18 (Expression des puissances de $\Xi^2 + \aleph$)
Pour $\epsilon \in \mathbb{N}$, dans le cas $v = 2v'$, l'opérateur $(\Xi^2 + \aleph)^\epsilon$ peut se mettre sous la forme de la somme des termes suivants :

$$E_P := Q_P(\tau)\ \Pi_{i<j}\frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{N_{i,j}}}{(\lambda_j^2-\lambda_j^2)^{D_{i,j}}} \quad \Pi_i\ \lambda_i^{a_i^+-a_i^-}\partial_{\lambda_i}^{b_i}\ \{l_i^{c_i}\Delta_i^{d_i}\} \quad \left(r^e(i\partial_r)^f\right) \quad ,$$

où $Q_P \in \mathbb{Q}[X_1^+, X_1^-, \dots, X_{v'}^+, X_{v'}^-]$ et $\tau = (\tau_1^+, \tau_1^-, \dots, \tau_{v'}^+, \tau_{v'}^-)$. La somme est à prendre sur l'ensemble des paramètres I_ϵ qui est décrit dans ce qui suit :

- *I_ϵ est l'ensemble des paramètres $P = (A, F)$ où $A = (a, b, c, d)$ si $v = 2v'$ et $A = (a, b, c, d, e, f)$ si $v = 2v' + 1$, et $F = (N, D)$;*
- *les paramètres $a = (a^+, a^-) \in \mathbb{N}^{v'} \times \mathbb{N}^{v'}$ et $b, c, d \in \mathbb{N}^{v'}$, et dans le cas $v = 2v' + 1$, $e, f \in \mathbb{N}$ vérifient :*

$$2|N| + |a-| + |a+| \le 4(|b| + 2|d|) - 2\epsilon, \quad e \le f + 2|d| - 2\epsilon, \quad |c| \le 2|d| \quad ,$$
$$\text{(et les entiers } e, f \text{ ont même parité si v=2v'+1)} \quad , \tag{4.23}$$

et :

$$0 < |b| + f + |d| \le 4\epsilon \quad . \tag{4.24}$$

– *les paramètres* $N = (N_{i,j}), D = (D_{i,j}) \in \mathbb{N}^q$ *vérifient :*

$$|N| \leq \epsilon \,, \qquad |D| \leq 2\epsilon \quad ; \tag{4.25}$$

– *les paramètres* a, b, N, D *et* e, f *dans le cas* $v = 2v' + 1$ *"qui sont les paramètres portant sur* Λ *et* r *dans le cas* $v = 2v' + 1$*", vérifient la relation d'homogénéité :*

$$2|N| - 2|D| + |a^+| - |a^-| - |b| \qquad \left(+ \frac{e-f}{2} \right) \;=\; -2\epsilon \quad . \tag{4.26}$$

Les polynômes $Q_P, P \in I_\epsilon$ *sont tels que la somme* $\sum_P E_P$ *soit symétrique en chacun des groupes de termes*

$$\lambda_i \,,\ i = 1, \ldots, v' \qquad l_i \,,\ i = 1, \ldots, v' \qquad \lambda_i^2 \pm \lambda_j^2 \,,\ i < j \quad ,$$
$$\Delta_i \,,\ i = 1, \ldots, v' \qquad \partial_{\lambda_i} \,,\ i = 1, \ldots, v' \quad .$$

En particulier, le cardinal de l'ensemble I_ϵ *est finie, et ne dépend que de* ϵ.

La condition (4.24) exprime le fait que dans chaque terme E_P, il y a au moins un dérivation (discrète ou non), et qu'il ne peut y avoir en tout que 4ϵ. D'après la remarque 7, c'est déjà le cas pour $\epsilon = 1$. La preuve est faite par récurrence sur ϵ.

Démonstration du lemme 4.18: Le pas $\epsilon = 1$ est vrai, d'après les égalités (5.11), (5.12), (5.13), (5.15), (5.16) et les lemmes 5.6 et 5.7 donnés dans la sous-section 5.1.4. Supposons le pas ϵ vrai. Montrons que le pas $\epsilon + 1$ est alors vrai. Commençons par montrer que l'opérateur $\Xi^2(\Xi^2 + \aleph)^\epsilon$ est de la forme voulue. D'après le lemme 5.6 et l'hypothèse de récurrence en particulier la symétrie des termes, il suffit de montrer que les opérateurs

$$\lambda_{i_0}^{-1}\{l_{i_0}^{q_{i_0}} \Delta_{i_0}^{p_{i_0}+q_{i_0}}\}\ \lambda_{j_0}^{-1}\{l_{j_0}^{q_{j_0}} \Delta_{j_0}^{p_{j_0}+q_{j_0}}\}\ \left((i\partial_r)^{2p*}\right) Q_P(\tau)\Pi_i\ \lambda_i^{a_i^+ - a_i^-}\ \partial_{\lambda_i}^{b_i}\ \{l_i^{c_i} \Delta_i^{d_i}\} \quad \left(r^e (i\partial_r)^f \right) \quad ,$$

pour les paramètres :

$$p_{i_0} + p_{j_0}\ (+p^*) = 2 \quad , \quad p_{i_0}, p_{j_0}, p^* \in \mathbb{N} \quad , \quad 0 \leq q_{i_0} \leq p_{i_0} \quad , \quad 0 \leq q_{j_0} \leq p_{j_0} \quad ,$$

et $a, b, c, d(, e, f)$ vérifiant les conditions (4.23) et (4.24) peuvent s'écrire comme une somme d'opérateurs de la forme :

$$\tilde{Q}_P(\tau)\ \Pi_i\ \lambda_i^{\tilde{a^+}_i - \tilde{a^-}_i} \partial_{\lambda_i}^{\tilde{b}_i}\ \{l_i^{\tilde{c}_i} \Delta_i^{\tilde{d}_i}\} \quad \left(r^{\tilde{e}} (i\partial_r)^{\tilde{f}} \right) \quad .$$

avec $\tilde{Q}_P \in \mathbb{Q}[X_1^+, X_1^-, \ldots, X_{v'}^+, X_{v'}^-]$, $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}(, \tilde{e}, \tilde{f})$ vérifiant les conditions (4.23) pour $\epsilon + 1$. Les propriétés de dérivation en r, et les égalités (5.18)-(5.19) donnés dans la sous-section 5.1.4 permettent d'affirmer que c'est vrai.

Ensuite montrons que l'opérateur

$$\sum_m (\partial_{\lambda_m} - \frac{\alpha_m}{\lambda_m})^2 (\Xi^2 + \aleph)^\epsilon \quad ,$$

est de la forme voulue. D'après le lemme 5.7 et l'hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que l'opérateurs

$$\sum_{i_0} \lambda_{i_0}^{-a'} \partial_{\lambda_{i_0}}^{b'} \{l_{i_0}^{d'} \Delta_{i_0}^{c'}\} \; Q_P(\tau) \; \Pi_{i<j} \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{N_{i,j}}}{(\lambda_j^2-\lambda_j^2)^{D_{i,j}}} \; \Pi_i \; \lambda_i^{a_i^+ - a_i^-} \partial_{\lambda_i}^{b_i} \; \{l_i^{c_i} \Delta_i^{d_i}\} \quad ,$$

pour les paramètres $P=(a,b,c,d(,e,f);N,D) \in I_\epsilon$ et :

$$(a',b',c',d') \in \mathbb{N}^4 \quad , \quad a'+b'=2 \quad , \quad b'+c' \leq 2 \quad , \quad c' \leq 2d' \quad ,$$

peuvent s'écrire comme une somme d'opérateurs de la forme :

$$\tilde{Q}_P(\tau) \; \Pi_{i<j} \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{\tilde{N}_{i,j}}}{(\lambda_j^2-\lambda_j^2)^{\tilde{D}_{i,j}}} \quad \Pi_i \; \lambda_i^{\tilde{a}_i} \partial_{\lambda_i}^{\tilde{b}_i} \; \{l_i^{\tilde{c}_i} \Delta_i^{\tilde{d}_i}\} \quad \left(r^{\tilde{e}}(i\partial_r)^{\tilde{f}}\right) \quad ;$$

la somme se fait sur les paramètres $\tilde{P}=(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}(,\tilde{e},\tilde{f});\tilde{N},\tilde{D}) \in I_{\epsilon+1}$; les polynômes $\tilde{Q}_P \in \mathbb{Q}[X_1^+,X_1^-,\ldots,X_{v'}^+,X_{v'}^-]$ sont tels que la somme est symétrique. Les deux égalités qui suivent, et celles (5.18)-(5.19) permettent d'affirmer que c'est vrai.

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_1^{-1}\partial_{\lambda_1}+\lambda_2^{-1}\partial_{\lambda_2}\right) \frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^N}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} &= 2N\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{N-1}}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} \quad , \\
\left(\partial_{\lambda_1}^2+\partial_{\lambda_2}^2\right) . \frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^N}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} &= (2N-8ND)\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{N-1}}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} + 4D(D+1)\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^N}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^{D+1}} \quad .
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments montrent que l'opérateur

$$\sum_m \frac{2}{\lambda_m}(\partial_{\lambda_m}-\frac{\alpha_m}{\lambda_m}).Q_P(\tau) \; \Pi_{i<j} \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{N_{i,j}}}{(\lambda_j^2-\lambda_j^2)^{D_{i,j}}} \; \Pi_i \; \lambda_i^{a_i} \partial_{\lambda_i}^{b_i} \; \{l_i^{c_i} \Delta_i^{d_i}\} \quad ,$$

est également de la forme voulue.

On calcule directement :

$$\left(\lambda_1\partial_{\lambda_1}+\lambda_2\partial_{\lambda_2}\right) \frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^N}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} = 2N\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{N-1}}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^{D-1}} + 2D\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^N}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^D} \quad ,$$

ce qui permet d'affirmer que l'opérateur

$$\frac{1}{\lambda_{j_0}^2-\lambda_{i_0}^2}\left(\lambda_{i_0}\partial_{\lambda_{i_0}}-\lambda_{j_0}\partial_{\lambda_{j_0}}\right).(\Xi^2+\aleph)^\epsilon \quad ,$$

est de la forme voulue.

Enfin, les propriétés de dérivation en r, et les égalités (5.18)-(5.19) permettent d'affirmer que les autres opérateurs de $\aleph$ appliqués à $(\Xi^2+\aleph)^\epsilon$ sont également de la forme voulue.

Ce lemme technique permet d'estimer les normes $N_{\iota,\epsilon}$, objet de la proposition 4.15.

4.3.3 Démonstration de la proposition 4.15

Dans cette preuve, C désigne une constante qui ne dépend que de v, ϵ et qui peut évoluer au cours du calcul. Nous convenons aussi que le signe $\sim$ entre deux expressions a et b strictement positives, signifie qu'il existe une constante C telle que $C^{-1}b \leq a \leq Cb$.

Soit $\iota \in I$, $\epsilon > 0$ et $g \in L^\infty(m)$. On suppose que le support de g est inclus dans celui de χ_ι (en particulier $g \in L^2(m)$), et que g est assez régulière. On note $G \in L^2(N)^\natural$ la fonction dont la transformée de Fourier est g.

D'après la formule (3.9) de Plancherel, on a :

$$\begin{aligned} N_{\iota,\epsilon}(g)^2 &\sim \left\|(1+s_\iota^{2\epsilon}|n|^{4\epsilon})G(n)\right\|^2_{L^2(n\in N)} \\ &= \int_{\mathcal{P}} | < (1+s_\iota^{2\epsilon}|n|^{4\epsilon})G(n), \phi > |^2 dm(\phi) \quad . \end{aligned}$$

Maintenant utilisons les opérateurs $\Xi, \aleph$ que nous avons définis sur les fonctions $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ assez régulières. D'après le lemme 4.17, on a :

$$(1+s_\iota^{2\epsilon}|n|^{4\epsilon})\phi(n) = (\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon).\phi(n) \quad ,$$

et dans cette dernière expression, l'opérateur $(\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon)$ agit sur les paramètres de la fonction sphérique ϕ (nous identifions la fonction ϕ et ses paramètres dans $\mathcal{P}$).

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} < (1+s_\iota^{2\epsilon}|n|^{4\epsilon})G(n), \phi > &= \int_N G(n)(1+s_\iota^{2\epsilon}|n|^{4\epsilon})\phi(n)dn \\ &= \int_N G(n)(\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon).\phi(n)dn \\ &= (\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon). \int_N G(n)\phi(n)dn \\ &= (\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon).g(\phi) \quad , \end{aligned}$$

puis :

$$N_{\iota,\epsilon}(g)^2 \sim \left\|(\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon)g\right\|^2_{L^2(m)} \quad .$$

Supposons $\epsilon \in \mathbb{N}$. Comme on a $s_\iota \sim \sum_i \lambda_i(2l_i+1)+r^2$, et d'après le lemme 4.18, on voit :

$$\left\|(\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon)g\right\|^2_{L^2(m)} \leq C^2 \left(\|g\|^2_{L^2(m)} + \sum_{P\in J_\epsilon} \|F_P.g\|^2_{L^2(m)} \right) \quad ,$$

où :

$$F_P := Q_P(\tau)\ \Pi_{i<j}\frac{1}{(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^{D_{i,j}}} \quad \Pi_i \lambda_i^{a_i}\partial_{\lambda_i}^{b_i}\{l_i^{c_i}\Delta_i^{d_i}\} \quad \left(r^e(i\partial_r)^f\right) \quad ,$$

où $Q_P \in \mathbb{Q}[X_1^+, X_1^-, \dots, X_{v'}^+, X_{v'}^-]$ et $\tau = (\tau_1^+, \tau_1^-, \dots, \tau_{v'}^+, \tau_{v'}^-)$. La somme est à prendre sur l'ensemble des paramètres J_ϵ qui est décrit dans ce qui suit :

- J_ϵ est l'ensemble fini des paramètres $P = (A, D)$ où $A = (a, b, c, d)$ si $v = 2v'$ et $A = (a, b, c, d, e, f)$ si $v = 2v' + 1$;
- les paramètres $a \in \mathbb{Z}^{v'}$ et $b, c, d \in \mathbb{N}^{v'}$, et dans le cas $v = 2v' + 1$, $e, f \in \mathbb{N}$ vérifient :

$$\begin{array}{c} 2|N| + |a-| + |a+| \leq 4(|b| + 2|d|) \,, \quad e \leq f + 2|d| \,, \quad |c| \leq 2|d| \quad , \\ (\text{et} \quad \text{les entiers} \quad e, f \text{ ont même parité si v=2v'+1}) \quad , \end{array} \tag{4.27}$$

et :

$$0 < |b| + f + |d| \leq 4\epsilon \quad . \tag{4.28}$$

- le paramètre $D = (D_{i,j}) \in \mathbb{N}^q$ vérifie :

$$|D| \leq 2\epsilon \quad ; \tag{4.29}$$

- les paramètres a, b, N, D et e, f dans le cas $v = 2v' + 1$ "qui sont les paramètres portant sur Λ et r dans le cas $v = 2v' + 1$", vérifient la relation d'homogénéité :

$$-2|D| + |a| - |b| \qquad \left(+ \frac{e - f}{2} \right) = 0 \quad . \tag{4.30}$$

Majoration de $\|F_P.g\|^2$, $P \in J_\epsilon$

Les opérateurs τ^+ de translations ne changent pas la somme sur $\mathbb{N}^{v'}$; et les opérateurs τ^- peuvent juste faire disparaître quelques termes. Donc on a :

$$\begin{aligned} \|F_P.g\|^2 \;\leq\; C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathcal{L}} \sum_l \Pi_{i<j} \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)^{2D_{i,j}}} \; \Pi_i \; \lambda_i^{2a_i} l_i^{2c_i} \; |r|^{2e} \\ |\Pi_i \partial_{\lambda_i}^{b_i} \Delta_i^{d_i} \; \partial_r^f .g|^2 \frac{d\eta'}{d\Lambda} d\Lambda dr \quad , \end{aligned}$$

les paramètres pour les termes en r, étant omis dans le cas $v = 2v'$, $d\eta'/d\Lambda$ désignant la fonction densité de la mesure η' sur le simplexe $\mathcal{L}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\Lambda$. Or le support de la fonction g est inclus dans celui de χ_ι. Outre l'équivalent de $d\eta'/d\Lambda$ du lemme 4.12, on a sur le support de χ_ι, les estimations suivantes :
- $|r|^4 \sim 2^\theta$, d'où $|r|^{2e} \leq C 2^{\theta \frac{e}{2}}$,
- $\lambda_i^2 \sim 2^{\eta_i}$ d'où $\Pi_i \lambda_i^{2a_i} \leq C \Pi_i 2^{\eta_i a_i}$,
- $l_i \sim 2^{\zeta_i}$ d'où $\Pi_i \; l_i^{2c_i} \leq C^2 \Pi_i \; 2^{2c_i \zeta_i}$,
- $\lambda_j^2 - \lambda_i^2 \sim 2^{\delta_{i,j}}$ d'où $\Pi_{i<j}(\lambda_j^2 - \lambda_j^2)^{2D_{i,j}} \geq C^{-2} \Pi_{i<j} 2^{2\delta_{i,j} D_{i,j}}$.

On obtient la majoration :

$$\|F_P.g\|^2 \;\leq\; C^2 \, 2^{2d(\eta,\delta)} 2^{\exp} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}} \sum_l |\Pi_i \partial_{\lambda_i}^{b_i} \Delta_i^{d_i} \partial_r^f .g|^2 dr d\Lambda \quad ,$$

où on note momentanément l'exposant :

$$\exp := -2\delta.D + a.\eta + \frac{e}{2}\theta + 2c.\zeta \quad .$$

Notons $\delta_\iota^m = \min_{i<j} \delta_{i,j}$ et $\zeta_\iota^M = \max_i \zeta_i$. On a $\delta.D \geq \delta_\iota^m |D|$. Utilisons $P \in J_\epsilon$. On a d'après la condition (4.30) :

$$-2\delta.D \leq -2\delta_\iota^m |D| = (|b| - |a| + \frac{f-e}{2})\delta_\iota^m \quad ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \exp &\leq (|b| - |a| + \frac{f-e}{2})\delta_\iota^m + a.\eta + \frac{e}{2}\theta + 2c.\zeta \\ &= |b|\delta_\iota^m + \sum_i a_i(\eta_i - \delta_\iota^m) + \frac{e}{2}(-\delta_\iota^m + \theta) + \frac{f}{2}\delta_\iota^m + 2c.\zeta \quad . \end{aligned}$$

Or on a grâce à la condition (4.27) :

$$\begin{aligned} c.\zeta &\leq \zeta_\iota^M |c| \leq \zeta_\iota^M 2|d| \quad , \\ \frac{e}{2}(-\delta_\iota^m + \theta) &\leq \frac{1}{2}(f + 2|d|)\max(-\delta_\iota^m + \theta, 0) \quad , \\ \sum_i a_i(\eta_i - \delta_\iota^m) &\leq \sum |a_i||\eta_i - \delta_\iota^m| \leq 4(|b| + 2|d|)\max_i |\eta_i - \delta_\iota^m| \quad , \end{aligned}$$

On obtient donc que l'exposant exp est majoré par :

$$\begin{aligned} |b|\delta_\iota^m + 4(|b| + 2|d|)\max_i |\eta_i - \delta_\iota^m| + \frac{1}{2}(f + 2|d|)\max(-\delta_\iota^m + \theta, 0) + \frac{f}{2}\delta_\iota^m + 4\zeta_\iota^M |d| \quad , \\ = L_\iota |b| + R_\iota f + D_\iota |d| \end{aligned}$$

par définition de $L_\iota, R_\iota, D_\iota$, puis :

$$\|F_P.g\|^2 \leq C^2 2^{2d(\eta,\delta)} 2^{L_\iota |b| + R_\iota f + D_\iota |d|} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}} \sum_l |\Pi_i \partial_{\lambda_i}^{b_i} \Delta_i^{d_i} \partial_r^f .g|^2 dr d\Lambda \quad .$$

On note encore $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'} \to \mathbb{C}$ la fonction $g : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ étendue de manière triviale au sens (4.8). On a obtenu la majoration de la norme pour $P \in J_\epsilon$:

$$\|F_P.g\|_{L^2(m)}^2 \leq C^2 2^{2d(\eta,\delta)} \left\| \Pi_i (2^{\frac{L_\iota}{2}} \partial_{\lambda_i})^{b_i} (2^{\frac{D_\iota}{2}} \Delta_i)^{2d_i} (2^{\frac{R_\iota}{2}} \partial_r)^f g \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'})}^2 \quad .$$

Sommation sur $P \in J_\epsilon$

Grâce à la formule de Plancherel pour g, on a :

$$\left\|(\mathrm{Id} + s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2 + \aleph)^\epsilon) g\right\|_{L^2(m)}^2 \leq C^2\, 2^{2d(\eta,\delta)} \sum_{P \in J'_\epsilon} \|F_P.g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v'} \times \mathbb{Z}^{v'})}^2 \quad ,$$

où J'_ϵ est l'ensemble J_ϵ, auquel on a rajouté l'élément $P = 0$ et pour lequel $F'_P = \mathrm{Id}$.

Utilisons la formule de Plancherel sur $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})$; nous noterons les variables duales de $l\in\mathbb{Z}^{v'},\Lambda\in\mathbb{R}^{v'},r\in\mathbb{R}$ par $\widehat{l}\in\mathbb{T}^{v'},\widehat{\Lambda}\in\mathbb{R}^{v'}$ et $\widehat{r}\in\mathbb{R}$ si $v=2v'+1$.

$$\begin{aligned}&\left\|\Pi_i(2^{\frac{L_\iota}{2}}\partial_{\lambda_i})^{b_i}(2^{\frac{D_\iota}{2}}\Delta_i)^{2d_i}(2^{\frac{R_\iota}{2}}\partial_r)^f g\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})}\\&=\int_{\mathbb{T}^{v'}}\int_{\mathbb{R}^{v'}}\int_{\mathbb{R}}|\Pi_i(2^{\frac{L_\iota}{2}}\widehat{\lambda}_i)^{b_i}(2^{\frac{D_\iota}{2}}(\widehat{l}_i-1))^{d_i}(2^{\frac{R_\iota}{2}}\widehat{r})^f\mathcal{F}.g|^2d\widehat{r}d\widehat{\Lambda}d\widehat{l}\quad,\end{aligned}$$

avec $0\leq|b|+f+|d|\leq 4\epsilon$. En sommant sur ces paramètres, on a :

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leq|b|+f+|d|\leq 4\epsilon}|\Pi_i(2^{\frac{L_\iota}{2}}\widehat{\lambda}_i)^{b_i}(2^{\frac{D_\iota}{2}}(\widehat{l}_i-1))^{d_i}(2^{\frac{R_\iota}{2}}\widehat{r})^f|^2\\&=\left(1+2^{\frac{L_\iota}{2}}\sum_i\widehat{\lambda}_i^{\,2}+2^{\frac{R_\iota}{2}}\widehat{r}^2+2^{\frac{D_\iota}{2}}\sum_i|\widehat{l}_i-1|^2\right)^{4\epsilon}\quad.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{0\leq|b|+f+|d|\leq 4\epsilon}\|F_P.g\|^2\leq C^2\int_{\mathbb{T}^{v'}}\int_{\mathbb{R}^{v'}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{T_\iota}^{4\epsilon}|\mathcal{F}.g|^2d\widehat{r}d\widehat{\Lambda}d\widehat{l}\quad,$$

où on définit la fonction

$$\widehat{T_\iota}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{T}^{v'}&\longrightarrow&\mathbb{R}^{*+}\\(\widehat{r},\widehat{\Lambda},\widehat{l})&\longmapsto&1+2^{\frac{L_\iota}{2}}\sum_i\widehat{\lambda}_i^{\,2}+2^{\frac{R_\iota}{2}}\widehat{r}^2+2^{\frac{D_\iota}{2}}\sum_i|\widehat{l}_i-1|^2\end{array}\right.\quad.$$

Nous avons donc obtenu :

$$\left\|(\mathrm{Id}+s_\iota^{2\epsilon}(\Xi^2+\aleph)^\epsilon)g\right\|^2_{L^2(m)}\leq C^2\,2^{2d(\eta,\delta)}\left\|\widehat{T_\iota}^{2\epsilon}\mathcal{F}.g\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{T}^{v'})}\quad.$$

Majoration de $N_{\iota,\epsilon}(g)$ obtenue

Grâce à la formule de Plancherel sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'}$, la transformée de Fourier de l'opérateur T_ι, est égale à la multiplication par la fonction $\widehat{T_\iota}$. Et donc ici, on a :

$$\left\|\widehat{T_\iota}^{2\epsilon}\mathcal{F}.g\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{T}^{v'})}=\left\|T_\iota^{2\epsilon}g\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{v'}\times\mathbb{Z}^{v'})}\quad.$$

Résumons. Nous avons montré jusqu'à présent que pour tout $\epsilon\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{c}\exists C=C(p,\epsilon)>0\qquad\forall\iota\in I\qquad\forall g\in L^2(m)\qquad\mathrm{supp}\ g\subset\mathrm{supp}\ \chi_\iota\qquad:\\N_{\iota,\epsilon}(g)\leq C\,2^{d(\eta,\delta)}\,\|T_\iota^{2\epsilon}.g\|_{L^2(dr,d\Lambda,dl)}\quad.\end{array}$$

Par interpolation, ce résultat est vrai pour tout $\epsilon>0$. Ceci achève la démonstration de la proposition 4.15, et donc du théorème 4.13.

Chapitre 5

Appendice

La première section de ce chapitre est consacrée aux propriétés connues de certaines fonctions spéciales. La seconde section précise ce que nous avons appelé le passage en polaire sur les matrices antisymétriques.

5.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous donnons les propriétés des fonctions Γ, $\mathcal{J}_\alpha$ de Bessel, $\mathcal{L}_{n,\alpha}$ de Laguerre, h_k de Hermite Weber.

5.1.1 Fonction Γ

Nous rappelons :

– l'équation fonctionnelle :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, \ldots\}, \quad \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \quad ; \tag{5.1}$$

– pour $p, q > 0$,

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \;=\; \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5.2}$$

– l'estimation uniforme locale en $x > 0$ lorsque $y \to \infty$ [Tit75] :

$$\Gamma(x+iy) \;\sim\; \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}y}|y|^{x-\frac{1}{2}} \quad ,$$

dont on déduit :

$$\forall [a,b] \subset]0,\infty[\quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |\Gamma(x+iy)| \;\geq\; C^{-1}\, e^{-2y} \quad , \tag{5.3}$$

et lorsque $n \to \infty$:

$$C^n_{n+\alpha}{}^{-1} \;=\; \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \;\sim\; \left(\frac{e}{n}\right)^\alpha \Gamma(\alpha+1) \quad . \tag{5.4}$$

5.1.2 Fonction $\mathcal{J}_\alpha$

Pour $\alpha > 0$, on définit les **fonctions de Bessel réduites** (comme [FH87], chapitre II) :

$$\mathcal{J}_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)(\frac{z}{2})^{-\alpha} J_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}\Gamma(\alpha+1)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(\nu+\alpha+1)} \quad .$$

Souvent, on omettra le qualificatif "réduit".

Grâce à son expression en série entière et à l'estimation pour $z \to \infty$: $J_\alpha(z) = O(z^{-\frac{1}{2}})$ [Sze75] §1.71, la fonction $\mathcal{J}_\alpha$ vérifie :

$$\mathcal{J}'_\alpha(z) = -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} z\mathcal{J}_{\alpha+1}(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_\alpha(z) = O(z^{-\frac{1}{2}-\alpha}) \quad ,$$

et donc par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x > 0 \qquad |\mathcal{J}_\alpha^{(k)}(x)| \leq C_k x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \quad . \tag{5.5}$$

Lemme 5.1 (Majoration des intégrales pour $\mathcal{J}_\alpha$)
Les intégrales suivantes :

$$\int_{s=0}^{\infty} |\mathcal{J}_\alpha^{(k)}(s)|^2 s^\beta ds$$

sont finies lorsque $\beta > -1$ et $\beta < 2\alpha$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les intégrales suivantes :

$$\int_{s=0}^{\infty} |\mathcal{J}_\alpha^{(k)}(s)|^4 s^\beta ds$$

sont finies lorsque $\beta > -1$ et $\beta - 1 < 4\alpha$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration du lemme 5.1: La fonction $\mathcal{J}_\alpha$ est entière. Donc les intégrales en 0 sont finies. En ∞, d'après la majoration (5.5), la première intégrale est finie lorsque : $2(-\alpha-\frac{1}{2})+\beta < -1$, et la seconde lorsque $4(-\alpha-\frac{1}{2})+\beta < -1$.

Nous avons besoin des propriétés suivantes [FH87] :

Lemme 5.2
Pour un paramètre α de la forme $\alpha = (n-2)/2, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, la fonction de Bessel réduite se met sous la forme

$$\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|x|) = \int_{S_1^{(n)}} e^{i<x,y>} d\tilde{\sigma}_n(y) \quad ,$$

où $\tilde{\sigma}_n$ désigne la mesure sur la sphère unité euclidienne $S_1^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 5.3
Pour $n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} 4xy'' + 4ny' + \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a pour unique solution C^∞ au voisinage de 0 la fonction entière $y(x) = \mathcal{J}_{n-1}(\mu\sqrt{x})$ où $\mu^2 = \alpha$. Elle est bornée si et seulement si $\alpha \geq 0$.

5.1.3 Fonction $\mathcal{L}_{n,\alpha}$

On note $L_n^{(\alpha)}$ le polynôme de Laguerre de degré n et de paramètre $\alpha > -1$. On peut le définir par les conditions d'orthogonalité et de normalisation suivantes [Tha93, Sze75] :

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad : \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) dx \;=\; \Gamma(\alpha+1) C_{n+\alpha}^{n} \delta_{n,m} \quad . \tag{5.6}$$

On appelle **fonction de Laguerre** de degré n et de paramètre α la fonction notée $\mathcal{L}_{n,\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\mathcal{L}_{n,\alpha}(x) = L_n^{\alpha}(x) e^{-\frac{x}{2}} \quad .$$

On aura besoin de la fonction de Laguerre **normalisée** de degré n et de paramètre α que l'on note $\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha}$ et qui est donnée par :

$$\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha} \;:=\; \frac{\mathcal{L}_{n,\alpha}}{C_{n+\alpha}^{n}}$$

La fonction de Laguerre normalisée est bornée par sa valeur 1 en 0. On omettra souvent le qualificatif "normalisé".

Rappelons [Sze75] : d'une part le calcul des dérivés des polynômes de Laguerre : $L_k^{\alpha\prime} = -L_{k-1}^{\alpha+1}$, dont on déduit :

$$\mathcal{L}'_{k,\alpha} \;=\; \frac{-1}{2}\mathcal{L}_{k,\alpha} - \mathcal{L}_{k-1,\alpha+1} \quad , \tag{5.7}$$

d'autre part la décroissance exponentielle des fonctions de Laguerre :

$$\exists C > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N},\; x \in \mathbb{R}^+ \quad : \quad |\bar{\mathcal{L}}_{k,\alpha}(x)| \;\leq\; Ce^{-\gamma x} \quad ,$$

dont on déduit par récurrence sur l'égalité (5.7), que les fonctions de Laguerre normalisées $\bar{\mathcal{L}}_{n,\alpha}$ et leurs dérivées sont bornées indépendemment du degré k (mais pas du paramètre α et du nombre de dérivés).

Lemme 5.4 ([FH87] proposition V.11)
L'équation hypergéométrique confluente de paramètre $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ s'écrit :

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y \;=\; 0 \quad . \tag{5.8}$$

Pour $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, on appelle fonction hypergéométrique confluente de paramètres α, γ la fonction entière notée $F(\alpha, \gamma; .)$ et donnée par :

$$F(\alpha, \gamma; z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} \quad ,$$

où l'on note pour $\beta \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$: $(\beta)_k = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)$. La fonction $F(\alpha, \gamma; .)$ est solution de l'équation (5.8) de paramètre α, γ ; et toute solution C^{∞} au voisinage de 0 lui est proportionnelle.

Supposons $\gamma > 0$.

1. *Si α est un entier négatif : $\alpha = -l, l \in \mathbb{N}$, alors $F(\alpha, \gamma; .)$ est un polynôme, de Laguerre de degré l à un constante près :*

$$F(-l, \gamma; z) = \frac{1}{C^l_{l+\gamma-1}} L^{\gamma-1}_l(z) \quad .$$

2. *Si $\Re\alpha < \gamma$ et si α n'est pas un entier négatif, alors on a l'estimation suivante pour z grand :*

$$F(\alpha, \gamma; z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \quad .$$

D'après [Mar82], lorsque $\alpha, \alpha+\beta > -1$. on a les estimations suivantes :

$$\int_{x=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,\alpha+\beta}(x)|^2 x^\alpha dx \sim \left| \begin{array}{ll} n^\alpha & \text{si } \beta < \frac{1}{2} \\ n^\alpha \ln n & \text{si } \beta = \frac{1}{2} \\ n^{\alpha+2\beta-1} & \text{si } \beta > \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad . \tag{5.9}$$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.5
Pour $j, \alpha \in \mathbb{N} - \{0\}$, les intégrales :

$$\int_{x=0}^{\infty} |\bar{\mathcal{L}}^{(m)}_{l,\alpha}(x)|^2 x^{2j-1} dx \quad \text{où} \quad 0 \leq m \leq j \quad ,$$

sont bornées indépendemment de l tant que $j \leq \alpha$.

Démonstration du lemme 5.5: Grâce à une récurrence sur (5.7), $\mathcal{L}^{(m)}_{l,v'-1}$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{L}_{l-n,v'-1+n}$ où $0 \leq n \leq m$; ainsi il suffit de majorer pour $0 \leq n \leq m$ les intégrales :

$$I(\alpha, j, l, m, n) = \int_{x=0}^{\infty} |\frac{\mathcal{L}_{l-n,\alpha+n}(x)}{C^l_{l+\alpha}}|^2 x^{2j-1} dx \quad .$$

D'après l'estimation (5.9) et grâce à la formule (5.4), on a les équivalents pour l grand :

- si $\alpha + n - (2j-1) > \frac{1}{2}$,

$$I(\alpha, j, l, m, n) \sim (l-n)^{2j-1} \Big((\frac{e}{l})^\alpha \Gamma(\alpha+1) \Big)^2 \sim l^{2j-1-2\alpha} e^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1)^2 \quad ;$$

- si $\alpha + n - (2j-1) > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I(\alpha, j, l, m, n) &\sim (l-n)^{2j-1+2(\alpha+n-(2j-1))-1} \Big((\frac{e}{l})^\alpha \Gamma(\alpha+1) \Big)^2 \\ &\sim l^{-2j-1+2n} e^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1)^2 \quad . \end{aligned}$$

Donc les intégrales $I(\alpha, j, l, m, n), 0 \leq n \leq m \leq j$ sont bornées indépendemment de l tant que $2j - 1 - 2\alpha \leq 0$.

5.1.4 Propriétés des fonctions $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n,0}$

On adopte la notation :

$$\mathcal{L}_l \;:=\; \bar{\mathcal{L}}_{l,0} \;=\; \mathcal{L}_{l,0} \quad .$$

D'après les conditions (5.6) d'orthogonalité et de normalisation des polynômes de Laguerre, les fonctions :

$$\Pi_{j=1}^{p'}\mathcal{L}_{l_j} \;:\; x = (x_1, \dots, x_{p'}) \in \mathbb{R}^{p'} \;\mapsto\; \Pi_{j=1}^{p'}\mathcal{L}_{l_j}(x_j) \;, \quad l = (l_1, \dots, l_{p'}) \in \mathbb{N}^{p'} \quad ,$$

forment une base orthonormale de l'espace $L^2(\mathbb{R}^{p'})$.

Opérateurs de Décalage

Opérateurs $\boldsymbol{\tau^+, \tau^-, \Delta}$. Pour une fonction R définie sur $\mathbb{N}$, on définit les fonctions de décalage τ^+, τ^- par :

$$\tau^+ R(l) = R(l+1) \quad \text{et} \quad \tau^- R(l) = \begin{cases} R(l-1) & \text{si } l \geq 1 \\ 0 & \text{si } l = 0 \end{cases}$$

On définit l'opérateur de différence sur les fonctions de $\mathbb{N}$:

$$\Delta \;=\; \tau^+ - \mathrm{Id} \quad .$$

L'opérateur Δ commute avec τ^+ et τ^-.

Nous montrons ici que grâce aux propriétés des polynômes de Laguerre, certains opérateurs de décalage sur la fonction de Laguerre $\mathcal{L}_l$ sont égaux à des opérateurs de dérivation ou de multiplication par la variable.

Opérateur $\boldsymbol{\beta}$. D'après [Sze75] page 101, on a :

$$lL_l(x) = (-x + 2l - 1)L_{l-1}(x) - (l-1)L_{l-2}(x) \quad ,$$

donc ici :

$$x\mathcal{L}_l(x) \;=\; -(l+1)\mathcal{L}_{l+1}(x) + (2l+1)\mathcal{L}_l(x) - l\mathcal{L}_{l-1}(x) \quad .$$

On pose alors pour une fonction $R : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$:

$$\beta.R \;:=\; -(l+1)\tau^+.R + (2l+1)R - l\tau^-.R \quad ,$$

et on a :

$$\beta.\mathcal{L}_l(x) \;=\; x\mathcal{L}_l(x) \quad .$$

Opérateur α. Encore d'après [Sze75] page 102, on a :

$$xL_l'(x) = l\,(L_l(x) - L_{l-1}(x)) \quad ,$$

donc ici :

$$\begin{aligned} x\mathcal{L}_l'(x) &= xe^{-\frac{x}{2}}\left(L_l'(x) - \frac{1}{2}L_l(x)\right) \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left(l(L_l(x) - L_{l-1}(x)) - \frac{1}{2}xL_l(x)\right) \\ &= l(\mathcal{L}_l(x) - \mathcal{L}_{l-1}(x)) - \frac{1}{2}\beta.\mathcal{L}_l(x) \quad . \end{aligned}$$

On pose alors pour une fonction $R : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$:

$$\alpha.R := l(R - \tau^-.R) - \frac{1}{2}\beta.R := -\frac{1}{2}R - \frac{l}{2}\tau^-.R + \frac{l+1}{2}\tau^+.R \quad ,$$

et on a :

$$\alpha.\mathcal{L}_l(x) = x\mathcal{L}_l'(x) \quad .$$

Opérateur γ. Toujours d'après [Sze75] page 102, on a :

$$L_l^{(\alpha)} = L_l^{(\alpha+1)} - L_{l-1}^{(\alpha+1)} \quad \text{et} \quad L_l^{(\alpha)'} = -L_{l-1}^{(\alpha+1)} \quad ,$$

et donc :

$$L_l' - L_{l-1}' = -L_{l-1} \quad .$$

En utilisant l'expression de α et cette dernière égalité, on a :

$$\begin{aligned} \alpha.\mathcal{L}_l' &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_l' - \frac{l}{2}\mathcal{L}_{l-1}' + \frac{l+1}{2}\mathcal{L}_{l+1}' \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}L_l' - \frac{l}{2}L_{l-1}' + \frac{l+1}{2}L_{l+1}' \quad - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}L_l - \frac{l}{2}L_{l-1} + \frac{l+1}{2}L_{l+1})\right) \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{l}{2}L_{l-1} - \frac{l+1}{2}L_l \quad - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}L_l - \frac{l}{2}L_{l-1} + \frac{l+1}{2}L_{l+1})\right) \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{2l+1}{4}L_l - \frac{l}{4}L_{l-1} - \frac{l+1}{4}L_{l+1}\right) \quad . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\alpha.\mathcal{L}_l' = -\frac{2l+1}{4}\mathcal{L}_l - \frac{l}{4}\mathcal{L}_{l-1} - \frac{l+1}{4}\mathcal{L}_{l+1} \quad .$$

On définit l'opérateur sur les fonctions de $\mathbb{N}$:

$$\gamma := -\frac{2l+1}{4}I - \frac{l}{4}\tau^- - \frac{l+1}{4}\tau^+ \quad ,$$

et on a :

$$\gamma.\mathcal{L}_l = \alpha.\mathcal{L}_l' \quad .$$

Lien entre les opérateurs Δ et α, β, γ

On vérifie directement :

$$\begin{aligned}
4(\alpha^2+\alpha) &= -\tau^{-2}\left((l+2)(l+1)\Delta\right) - \tau^{-}\left((l+1)l\Delta\right) + (l+1)(l+2)(\Delta^2+2\Delta) && (5.10)\\
2\alpha &= (\mathrm{Id}+\tau^{-})(l\Delta) + \tau^{+} + \tau^{-} \quad , && (5.11)\\
\beta &= -\tau^{-}(l\Delta^2) - (2\mathrm{Id}-\tau^{-})\Delta \quad , && (5.12)\\
4\gamma &= -\tau^{-}(l\Delta^2) - (2\mathrm{Id}-\tau^{-})\Delta + 2(2l+1)\mathrm{Id} \quad . && (5.13)
\end{aligned}$$

Sur les fonctions de deux variables l_1, l_2 entières, on en déduit en particulier :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 &= (\tau_1^- + I)(l_1+1)\Delta_1 - (\tau_2^- + I)(l_2+1)\Delta_2 && (5.14)\\
2(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2) &= (\mathrm{Id}+\tau_1^-)(l_1+1)\Delta_1 + (\mathrm{Id}+\tau_2^-)(l_2+1)\Delta_2 &&\\
&\quad +(\mathrm{Id}+\tau_1^-)(\mathrm{Id}+\tau_2^-)\,(l_1+1)(l_2+1)\,\Delta_1\Delta_2 \quad , && (5.15)\\
4\gamma_1\beta_2 &= 4\beta_1\beta_2 - 2\tau_2^-(2l_1+1)l_2\Delta_2^2 - 2(2\mathrm{Id}-\tau_2^-)(2l_1+1)\Delta_2 \quad . && (5.16)
\end{aligned}$$

On cherche à écrire la puissance de certains opérateurs en fonction de Δ, la multiplication par l, à des décalages près. Précisons la forme de ces décalages : c'est une combinaison linéaire finie à coefficients rationnels en les opérateurs τ^{+k^+} et τ^{-k^-} où $k^+, k^- \in \mathbb{N}$. On peut donc l'écrire sous la forme : $P(\tau^+, \tau^-) := P(\tau^\pm)$, où $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ est un polynôme de deux variables à coefficients rationnels.

Comme on calcule directement : $[\tau^{+p}, l] = p\tau^{+p}$ et $[\tau^{-p}, l] = -p\tau^{-p}$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{Q}[X,Y], \quad \exists!\, Q_p \in \mathbb{Q}[X,Y] \quad : \quad [P(\tau^\pm), l] = Q_P(\tau^\pm) \quad . \qquad (5.17)$$

On remarque que les termes suivants (pour $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$) :

$$w := l\Delta P(\tau^\pm) l^q \quad , \qquad x := l\Delta^2 P(\tau^\pm) l^q \quad ,$$

peuvent se mettre sous la forme d'une somme de terme du type $R(\tau^\pm) l^r \Delta^s$ où $R \in \mathbb{Q}[X,Y]$ et $r, s \in \mathbb{N}$. En effet, d'une part, d'après la propriété (5.17) et la commutativité des opérateurs $\Delta, \tau^\pm$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tel que

$$w = \left(P(\tau^\pm)l + Q(\tau^\pm)\right)\Delta l^q \quad \text{et} \quad x = \left(P(\tau^\pm)l + Q(\tau^\pm)\right)\Delta^2 l^q \quad ;$$

d'autre part, on connait le commutateur : $[\Delta, l^q] = \tau^+(l^q - (l-1)^q)$; calculons l'autre commutateur $[\Delta^2, l^q]$. en commençant par :

$$\Delta^2 l^q = \Delta l^q \Delta - \Delta[l^q, \Delta] = (l^q\Delta - [l^q, \Delta])\Delta - \Delta[l^q, \Delta] \quad ;$$

on déduit de l'expression de $[\Delta, l^q]$:

$$\begin{aligned}
[\Delta^2, l^q] &= -[l^q, \Delta]\Delta - \Delta[l^q, \Delta]\\
&= -\tau^+\left(l^q - (l-1)^q\right)\Delta - \Delta\tau^+\left(l^q - (l-1)^q\right) \quad ;\\
\Delta\left(l^q - (l-1)^q\right) &= l^q\Delta - \tau^+\left(l^q - (l-1)^q\right)\\
&\quad -(l-1)^q\Delta + \tau^+\left((l-1)^q - (l-2)^q\right)\\
&= \left(l^q - (l-1)^q\right)\Delta + \tau^+\left(-l^q + 2(l-1)^q - (l-2)^q\right) \quad ,
\end{aligned}$$

puis grâce à la commutativité des opérateurs Δ et τ^+ :

$$[\Delta^2, l^q] = -\tau^+ \left\{2\left(l^q - (l-1)^q\right)\Delta + \tau^+\left(-l^q + 2(l-1)^q - (l-2)^q\right)\right\} \quad ;$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} w &= l\Delta P(\tau^\pm) l^q \\ &= \left(P(\tau^\pm)l + Q(\tau^\pm)\right)\left(l^q\Delta + \tau^+(l^q - (l-1)^q)\right) \quad , \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} x &= l\Delta^2 P(\tau^\pm) l^q \\ &= \left(P(\tau^\pm)l + Q(\tau^\pm)\right)\left(l^q\Delta^2\right. \\ &\qquad \left.+\tau^+\left\{2\left(l^q - (l-1)^q\right)\Delta + \tau^+\left(-l^q + 2(l-1)^q - (l-2)^q\right)\right\}\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Lemme 5.6 (Puissance de β)
Pour $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, l'opérateur β^p est la somme sur $q = 0, \ldots, p$ des opérateurs :

$$P_q(\tau^\pm) l^q \Delta^{p+q} \quad \text{où} \quad P_q \in \mathbb{Q}[X, Y] \quad .$$

Démonstration du lemme 5.6: Le cas $p = 1$ est évident d'après l'égalité (5.12). Montrons ce lemme par récurrence. On fixe p, et on suppose la propriété du lemme vraie au rang p. Montrons maintenant que la propriété du lemme est alors vraie au rang $p + 1$. D'après l'expression (5.12) de β, et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \beta^{p+1} &= \left(-\tau^-(l\Delta^2) - (2\mathrm{Id} - \tau^-)\Delta\right)\left(P_q(\tau^-) l^q \Delta^{p+q}\right) \\ &= -\tau^- l P_q(\tau^\pm)\Delta^2 l^q \Delta^{p+q} - (2\mathrm{Id} - \tau^-)\left(P_q(\tau^\pm)\Delta l^q \Delta^{p+q}\right) \quad , \end{aligned}$$

car les opérateurs τ^- et Δ commutent. Le premier terme du membre de gauche est de la forme voulue grâce au calcul (5.19) ; le deuxième l'est également, car on a déjà directement calculé : $[\Delta, l^q] = \tau^+(l^q - (l-1)^q)$.

On aura également besoin de l'expression des puissances de l'opérateur $\partial_\lambda - \alpha/\lambda$ en fonction de Δ :

Lemme 5.7 (Puissance de $\partial_\lambda - \alpha/\lambda$)
Pour une fonction

$$R : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ \lambda, l & \mapsto & R(\lambda, l) \end{array} \right. ,$$

l'expression

$$\left(\partial_\lambda - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^p . R(\lambda, l)$$

peut s'écrire sous la forme d'une somme sur

$$(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 \quad \textit{tels que} \quad a + b = p \,, \qquad b + c \leq p \,, \qquad d \leq c \quad ,$$

de termes de la forme :

$$P_{a,b,c,d}(\tau^\pm)\lambda^{-a}\partial_\lambda^b(l^d\Delta^c).R(\lambda, l) \quad , \quad \text{où} \quad P_{a,b,c,d} \in \mathbb{Q}[X, Y] \quad .$$

Démonstration du lemme 5.7: Le cas $p = 1$ est évident d'après l'égalité (5.11). Montrons ce lemme par récurrence. On fixe p, et on suppose la propriété du lemme vraie au rang p. Montrons maintenant que la propriété du lemme est alors vraie au rang $p + 1$. D'après l'expression (5.11) de α, et l'hypothèse de récurrence, l'expression

$$\left(\partial_\lambda - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^{p+1} .R\left(\lambda, l\right)$$

peut s'écrire sous la forme d'une somme sur le quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que $a + b = p$ et $b + c \leq p, d \leq c$ de :

$$\left(\partial_\lambda - \frac{(\mathrm{Id} + \tau^-)(l\Delta) + \tau^+ + \tau^-}{2\lambda}\right) P_{a,b,c,d}(\tau^\pm)\lambda^{-a}\partial_\lambda^b(l^d\Delta^c).R\left(\lambda, l\right) \quad ,$$

donc grâce à la commutativité des opérateurs en λ et l, sous la forme :

$$P_{a,b,c,d}(\tau^\pm)\partial_\lambda\lambda^{-a}\partial_\lambda^b(l^d\Delta^c).R\left(\lambda, l\right) + \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \tau^-)(l\Delta)P_{a,b,c,d}(\tau^\pm)\lambda^{-a-1}\partial_\lambda^b(l^d\Delta^c).R\left(\lambda, l\right)$$
$$+\frac{\tau^+ + \tau^-}{2}P_{a,b,c,d}(\tau^\pm)\lambda^{-a-1}\partial_\lambda^b(l^d\Delta^c).R\left(\lambda, l\right) \quad ,$$

Le dernier terme de la somme précédente se met sous la forme voulue. De même pour le deuxième grâce au calcul (5.18) et à la commutativité des opérateurs en λ et l, ainsi que pour le premier, car on voit : $\partial_\lambda\lambda^{-a}\partial_\lambda^b = -a\lambda^{-a-1}\partial_\lambda^b + \lambda^{-a}\partial_\lambda^{b+1}$.

5.1.5 Fonction de Hermite-Weber

Les **fonctions de Hermite-Weber** $h_k, k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ sont données par :

$$h_k(x) \;=\; (2^k k!\sqrt{\pi})^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \qquad \text{où} \qquad H_k(s) = (-1)^k e^{s^2}(d/ds)^k e^{-s^2} \quad ,$$

H_k est le polynôme de Hermite de degré k.

Rappelons (voir section 5.6 de [Sze75]), que les fonctions de Hermite-Weber $h_k, k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ et que chaque fonction h_k vérifie l'équation différentielle : $y'' + (2k + 1 - x^2)y = 0$.

On définit les **fonctions de Hermite-Weber** $h_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$h_\alpha \;=\; \Pi_{i=1}^n h_{\alpha_i} \quad .$$

5.2 Matrices antisymétriques

Nous précisons ici les coordonnées polaires sur l'ensemble $\mathcal{A}_v$ des matrices antisymétriques de taille v. On aura à distinguer les cas $v = 2v'$ et $v = 2v' + 1$. On note $O(v)$ le groupe des matrices orthogonales, et $SO(v)$ le groupe des matrices orthogonales de déterminant 1.

5.2.1 Réduction

Le groupe $O(v)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{A}_v$:

$$\forall k \in O(v)\ , A \in \mathcal{A}_v \ : \quad k.A \ = \ kAk^{-1} \quad .$$

Pour en décrire les orbites, on définit le simplexe $\mathcal{L}$, et son adhérence $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} & := & \{\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \in \mathbb{R}^{v'} \ : \ \lambda_1 \ > \ \ldots \ > \ \lambda_{v'} \ > \ 0\} \quad , \\ \bar{\mathcal{L}} & := & \{\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \in \mathbb{R}^{v'} \ : \ \lambda_1 \ \geq \ \ldots \ \geq \ \lambda_{v'} \ \geq \ 0\} \quad . \end{array}$$

À un élément $\Lambda \in \mathbb{R}^{v'}$, on associe la matrice antisymétrique $D_2(\Lambda)$ de taille v :

$$D_2(\Lambda) \ = \ \begin{bmatrix} \lambda_1 J & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & \lambda_{v'} J & \\ & & & (0) \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad J \ = \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

c'està dire :

$$\text{si v=2v' :} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 J & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_{v'} J \end{bmatrix} \qquad \text{et si v=2v'+1 :} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 J & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & \lambda_{v'} J & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Proposition 5.8 ($\mathcal{A}_v/O(v)$)
Toute matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_v$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonalisée par bloc 2-2. En effet, le polynôme caractéristique de A est de la forme :

$$P(x) \ = \ \begin{cases} \Pi_{i=1}^{v'}(x^2 - {\lambda_i}^2) & si\ v = 2v' \\ x\Pi_{i=1}^{v'}(x^2 - {\lambda_i}^2) & si\ v = 2v' + 1 \end{cases} \quad ,$$

où $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) \in \mathbb{R}^{v'}$; il existe une matrice orthogonale $k \in O(v)$ telle que : $A = k^{-1}D_2(\Lambda)k$. On peut choisir $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$.

La démonstration se fait de manière élémentaire par récurence sur la taille v de la matrice, et grâce aux propriétés des endomorphismes normaux.

On définit plus généralement pour $\Lambda \in \mathbb{R}^{v'}$, la matrice antisymétrique $D_2^\epsilon(\Lambda)$ de taille v :

$$D_2^\epsilon(\Lambda) \ = \ \begin{bmatrix} \lambda_1 J & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & \\ & & \lambda_{v'-1} J & & \\ & & & \epsilon\lambda_{v'} J & \\ & & & & (0) \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad \epsilon \in \{1, -1\} \quad .$$

Évidemment, on a $D_2^1(\Lambda) = D_2(\Lambda)$, et $D_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{v'}) = D_2(\lambda_1, \ldots, -\lambda_{v'})$.

Proposition 5.9 ($\mathcal{A}_v/SO(v)$)
Pour toute matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_v$ il existe $k \in SO(v)$, $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$ et $\epsilon = \pm 1$ tels que : $A = k^{-1}D_2^\epsilon(\Lambda)k$.

5.2.2 Isomorphisme $Sp(n) \cap O(n) \sim U_n$

Définissons pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, les matrices antisymétriques de taille $2n \times 2n$:

$$J_n := J_n^{+1} := \begin{bmatrix} J & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & J \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_n^{-1} := \begin{bmatrix} J & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & -J \end{bmatrix} \quad .$$

et la complexification :

$$\begin{aligned} \psi_c^{(n,+1)} = \psi_c^{(n)} \quad &: \quad x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \;\rightarrow\; x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n \quad , \\ \psi_c^{(n,-1)} \quad &: \quad x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \;\rightarrow\; x_1 + iy_1, \dots, x_{n-1} + iy_{n-1}, y_n + ix_n \quad . \end{aligned}$$

Proposition 5.10 (Matrices orthogonales commutant avec J_n^ϵ)
Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Les matrices orthogonales de taille $2n$ qui commutent avec J_n^ϵ ont pour déterminant 1. On a un isomorphisme $\psi_1^{(n,\epsilon)}$ entre
- *le groupe des matrices $2n - 2n$ orthogonales qui commutent avec J_n^ϵ,*
- *le groupe U_n des matrices unitaires de taille n.*

Il vérifie :

$$\forall\, k, X \quad : \quad \psi_c^{(n,\epsilon)}(k.X) = \psi_1^{(n,\epsilon)}(k).\psi_c^{(n,\epsilon)}(X) \quad .$$

On notera $\psi_1^{(n,+1)} = \psi_1^{(n)}$.

Démonstration rapide de la proposition 5.10: Soit $k \in O(2n)$ qui commute avec J_n^ϵ. Une base de l'espace propre associée à la valeur propre -1 pour k peut s'écrire sous la forme : $e_1, J_n^\epsilon.e_1, e_2, J_n^\epsilon.e_2 \dots$ donc la dimension de ce sous-espace propre est paire et $\det k = 1$.

Écrivons la matrice k par bloc 2-2 :

$$k = \begin{bmatrix} k'_{1,1} & \dots & k'_{1,n} \\ & \ddots & \\ k'_{n,1} & & k'_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad k'_{l,c} = \begin{bmatrix} k_{2l-1,2c-1} & k_{2l-1,2c} \\ k_{2l,2c-1} & k_{2l,2c} \end{bmatrix} \quad ;$$

On définit les coefficients d'une matrice complexe u $u_{l,c} = k_{2l-1,2c-1} + ik_{2l,2c-1}, 1 \le l, c \le n$, si $\epsilon = 1$, et si $\epsilon = -1$:

$$u_{l,c} = \begin{cases} k_{2l-1,2c-1} + ik_{2l,2c-1}, & \text{si} \quad 1 \le i, j < n, \\ k_{2l-1,2n} - ik_{2l-1,2n-1} & \text{si} \quad (i,j) = (i,n) \neq (n,n), \\ k_{2n,2c-1} - ik_{2n,2c} & \text{si} \quad (i,j) = (n,j) \neq (n,n), \\ k_{2n,2n} - ik_{2n,2n-1} & \text{si} \quad (i,j) = (n,n). \end{cases}$$

Comme la matrice k est orthogonale, la matrice u est unitaire.

5.2.3 Passage en coordonnées polaires

En fait, nous allons nous intéressés à l'ensemble $\mathcal{D}_v$ des matrices antisymétriques auxquelles on associe comme dans la proposition 5.8 $\Lambda \in \mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$. On obtient le passage en coordonnées polaires :

Lemme 5.11 (Passage en coordonnées polaires)
Il existe η une mesure sur le simplexe $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{v'}$ donnée par :

$$d\eta(\Lambda) = \begin{cases} c\Pi_{j<k}(\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 d\Lambda & si\ v = 2v' \\ c\Pi_i \lambda_i^2 \Pi_{j<k}(\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 d\Lambda & si\ v = 2v' + 1 \end{cases} \qquad (où \quad d\Lambda = d\lambda_1 \dots d\lambda_{v'}) \quad ;$$

la constante c est telle que l'on ait le passage en coordonnées polaires sur l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_v$:

$$\int_{\mathcal{A}_v} g(A)dA = \int_{O(v)} \int_{\mathcal{L}} g(k.D_2(\Lambda))d\eta(\Lambda)dk \quad . \tag{5.20}$$

Ce lemme est déjà bien connu : dans [Str91] (page 398), on renvoit à [Hel62] page 382. Nous le montrons ici "à la main".

Nous avons besoin aussi de résultats sur le Laplacien sur $\mathcal{A}_v$. Rappelons que lorsque la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_v$ est $E_{i,j}, i < j$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice antisymétrique dont toutes les entrées sont nulles sauf celle de la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1 et celle de la $j$ème ligne et $i$ème colonne qui vaut -1, le laplacien sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}_v$ est donné par :

$$\Delta f = \sum_{i<j} D^2 f(E_{i,j}, E_{i,j}) \quad .$$

Nous aurons en fait besoin de l'expression du Laplacien en coordonnées polaires sur le sous ensemble $\mathcal{D}_v$. Pour cela, définissons l'application

$$\psi : \begin{cases} O(v) \times \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{A}_v \\ k, \Lambda & \longmapsto & k.D_2(\Lambda) \end{cases} \quad ,$$

dont l'image est $\mathcal{D}_v$, le sous groupe K_r de $O(v)$ comme l'ensemble des matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} r_{\theta_1} & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & r_{\theta_{v'}} & \\ & & & (1) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{c}\text{la matrice } r_\theta \text{ désigne une rotation du plan :} \\ r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\end{array}$$

On voit :

$$K_r = \{k \in O(v) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L} \quad \psi(k, \Lambda) = D_2(\Lambda)\} \quad .$$

On note

- l'espace homogène $\tilde{K} = O(v)/K_r$ comme variété quotient de $O(v)$ par le sous groupe K_r (l'action considérée est celle à droite),
- $p : O(v) \to \tilde{K}$ la submersion canonique,
- $d\tilde{k}$ la mesure sur la variété homogène induite par les deux mesure de Haar normalisée de masse 1.

On peut donc définir l'application que l'on note encore ψ :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{K} \times \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{A}_v \\ p(k), \Lambda & \longmapsto & k.D_2(\Lambda) \end{array} \right. ,$$

qui devient une bijection sur $\mathcal{D}_v$, et aussi un difféomorphisme de variétés.

Précisons les espaces tangents de ces variétés. Évidemment, on identifie $\mathbb{T}\mathcal{L} \sim \mathbb{R}^{v'}$ et $\mathbb{T}\mathcal{A}_v \sim \mathbb{R}^{\frac{v(v-1)}{2}}$ en tout point. On munit l'espace $O(v)$ des cartes locales au point $k \in O(v)$:

$$(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq v} \longmapsto k \exp\left(\sum_{i<j} a_{i,j} E_{i,j}\right) ,$$

où exp désigne l'application matricielle exponentielle, et $E_{i,j}, 1 \leq i < j \leq v$ la base canonique des matrices antisymétriques donnée plus haut. L'espace tangent au point k peut donc s'identifier à

$$\mathbb{T}_k O(v) \sim \{k\vec{A} , \quad \vec{A} \text{ matrice antisymétrique de taille p}\} .$$

Par passage au quotient, lorsque l'on a choisi $k \in O(v)$ tel que $p(k) = \tilde{k}$ pour chaque $\tilde{k}$, la variétés $\tilde{K}$ est munie des cartes locales au point $\tilde{k}$:

$$(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq v, (i,j) \neq (2k-1,2k)} \longmapsto p\left(k \exp\left(\sum a_{i,j} E_{i,j}\right)\right) ,$$

et l'espace tangent au point $\tilde{k}$ peut donc s'identifier à

$$\mathbb{T}_{\tilde{k}} \tilde{K} \sim \left\{ k\vec{A} , \quad \vec{A} \begin{array}{c} \text{matrice antisymétrique de taille p,} \\ \text{dont les blocs 2-2 sur la diagonale sont nuls} \end{array} \right\} ,$$

dont nous fixons la base canonique formée par les vecteurs $kE_{i,j}$, pour $1 \leq i < j \leq v$ et $(i,j) \neq (2k-1, 2k)$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on notera de la même manière $k \in O(v)$ et son image $p(k)$, et de même pour les vecteurs des espaces tangents $\mathbb{T}O(v)$ et $\mathbb{T}\tilde{K}$. On identifie $\mathbb{T}_{\tilde{k},\Lambda}(\tilde{K} \times \mathcal{L}) \sim \mathbb{T}_{\tilde{k}}\tilde{K} \oplus \mathbb{T}_\Lambda \mathcal{L}$ et sa base canonique est donc formée par les vecteurs suivants :

- les vecteurs $\vec{E}_{i,j} = kE_{i,j}, i < j, (i,j) \neq (2l-1, 2l)$,
- les vecteurs $\vec{E}_{2l-1,2l}, l = 1, \ldots, v'$, le vecteur colonne de $\mathbb{T}\mathcal{L} \sim \mathbb{R}^{v'}$ dont toutes les entrées sont nulles sauf la $l$ème qui vaut 1; on peut les identifier au champs de vecteurs ∂_{λ_i} dérivée en les variables de Λ.

Dans la suite, on identifie la différentielle $D_{k,\Lambda}\psi$ à l'application linéaire sur $\mathbb{T}_{\tilde{k}}\tilde{K} \oplus \mathbb{T}_\Lambda \mathcal{L}$. Elle est donnée par :

$$D_{k,\Lambda}\psi(ke^{t\vec{A}}, \vec{\Lambda}) = \frac{d}{dt}_{t=0} \frac{d}{du}_{u=0} \psi(ke^{t\vec{A}}, \Lambda + u\vec{\Lambda}) .$$

Lemme 5.12 (Laplacien en coordonnées polaires)
Soit f une fonction sur $\mathcal{A}_v, v \geq 1$. On pose $g = f \circ \psi$: c'est une fonction sur $\tilde{K} \times \mathcal{L}$. On a pour $A = \psi(k, \Lambda)$:

$$\begin{aligned}
\Delta f(A) &= \sum_l \partial^2_{\lambda_l} g + \sum_{i<j} \sum_{(m,n)\in I_{i,j}} D^2_{k,\Lambda} g(D\psi^{-1}(k.E_{m,n}), D\psi^{-1}(k.E_{m,n})) \\
&\quad + \sum_{i<j} -\frac{4}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(\lambda_i \partial_{\lambda_i} - \lambda_j \partial_{\lambda_j}).g \\
&\quad \left\{ + \sum_i \sum_{\bar{i}=2i,2i-1} \frac{1}{\lambda_i^2} D^2.g(\vec{E}_{\bar{i},v}, \vec{E}_{\bar{i},v}) - \frac{2}{\lambda_i}\partial_{\lambda_i}.g \ si\, v = 2v' + 1 \right\} \quad ;
\end{aligned}$$

On a omis l'argument (k, Λ) de g et de ses dérivées. Les sommes sur un seul indice se font sur l'ensemble $\{1, \dots, v'\}$. Les sommes indicées par $i < j$ se font sur l'ensemble $\{1 \leq i < j < v'\}$, qui est vide lorsque $v' = 1$. Pour $1 \leq i < j \leq v', v' > 1$, on a noté $I_{i,j} = \{(2i-1, 2j-1), (2i, 2j), (2i-1, 2j), (2i, 2j-1)\}$.

On a le calcul explicite des $D\psi^{-1}(k.E_{m,n}) = D_{k,\Lambda}\psi^{-1}(k.E_{m,n}), (m, n) \in I_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
D\psi^{-1}(k.E_{2i-1,2j-1}) &= \tfrac{1}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(-\lambda_j \vec{E}_{2i-1,2j} + \lambda_i \vec{E}_{2i,2j-1}) \\
D\psi^{-1}(k.E_{2i,2j} \quad) &= \tfrac{1}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(-\lambda_i \vec{E}_{2i-1,2j} + \lambda_j \vec{E}_{2i,2j-1}) \\
D\psi^{-1}(k.E_{2i-1,2j} \quad) &= \tfrac{1}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\lambda_j \vec{E}_{2i-1,2j-1} + \lambda_i \vec{E}_{2i,2j}) \\
D\psi^{-1}(k.E_{2i,2j-1} \quad) &= \tfrac{1}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(-\lambda_i \vec{E}_{2i-1,2j-1} - \lambda_j \vec{E}_{2i,2j}) \quad ,
\end{aligned}$$

où on a noté $\vec{E}_{i,j} = kE_{i,j}, i < j, (i, j) \neq (2l - 1, 2l)$.

5.2.4 Démonstrations

Nous démontrons ici les deux lemmes de la sous section précédente.

Démonstration de lemme 5.11

Comme $\mathcal{D}_v$ est un ouvert dense de $\mathcal{A}_v$, on a :

$$\int_{\mathcal{A}_v} g(A)dA = \int_{\mathcal{D}_v} g(A)dA = \int_{\mathcal{L}} \int_{\tilde{K}} g(k.D_2(\Lambda)) |\det D_{k,\Lambda}\psi| \quad d\Lambda dk \quad ,$$

où $\det D_{k,\Lambda}\psi$ le déterminant de l'application linéaire $D_{k,\Lambda}\psi$ vue dans les bases canoniques des espaces tangents.

On note $I_{i,j}$ est l'ensemble ordonné :

$$I_{i,j} = \{(2i-1, 2j-1), (2i, 2j), (2i-1, 2j), (2i, 2j-1)\} \quad .$$

Nous allons expliciter $D_{k,\Lambda}\psi$, son déterminant et ainsi que son inverse $D\psi^{-1}$ dont nous aurons besoin dans la démonstration de lemme 5.12.

On a pour $k\vec{A} \in \mathbb{T}_k O(v)$:

$$D_{(k,\Lambda)}\psi(k\vec{A}) = k.[\vec{A}, D_2(\Lambda)] \quad \text{(le crochet est celui des matrices)} \quad .$$

On a pour $\vec{\Lambda} \in \mathbb{T}\mathcal{L}$

$$D_{(k,\Lambda)}\psi(\vec{\Lambda}) = k.D_2(\vec{\Lambda}) \quad .$$

L'application linéaire $D_{(k,\Lambda)}\psi$ envoie

- $\vec{E}_{2l-1,2l}$ sur $k.E_{2l-1,2l}$, $l = 1, \ldots, v'$. Donc on a :

$$D\psi^{-1}k.E_{2l-1,2l} = \vec{E}_{2l-1,2l} = \partial_{\lambda_l} \quad .$$

- pour tout $i < j$ (lorsque $v' > 1$), l'espace vectoriel $\vec{V}_{i,j}$ engendré par les vecteurs $\vec{E}_{l,m}, (l,m) \in I_{i,j}$ sur l'espace vectoriel $k.V_{i,j}$ engendré par les vecteurs $k.E_{l,m}, (l,m) \in I_{i,j}$. De plus l'application $D_{(k,\Lambda)}\psi$ restreinte au départ à $\vec{V}_{i,j}$ et à l'arrivée à $k.V_{i,j}$ se représente dans la base de départ $\vec{E}_{l,m}, (l,m) \in I_{i,j}$ et d'arrivée $k.E_{l,m}, (l,m) \in I_{i,j}$ par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda_j & -\lambda_i \\ 0 & 0 & \lambda_i & \lambda_j \\ \lambda_j & -\lambda_i & 0 & 0 \\ \lambda_i & -\lambda_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

dont le déterminant est $(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$, et l'inverse est :

$$\frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_j & -\lambda_i \\ 0 & 0 & \lambda_i & -\lambda_j \\ -\lambda_j & -\lambda_i & 0 & 0 \\ \lambda_i & \lambda_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

On en déduit le calcul explicite des $D\psi^{-1}(k.E_{m,n}), (m,n) \in I_{i,j}$ donné dans l'énoncé du lemme 5.12.

- $\vec{E}_{2i,v}$ sur $-\lambda_i k.E_{2i-1,v}$ et $\vec{E}_{2i-1,v}$ sur $\lambda_i k.E_{2i,v}$ (lorsque $v = 2v'+1$) pour $i = 1, \ldots, v'$. Et donc en restriction à $\vec{E}_{2i,v}, \vec{E}_{2i-1,v}$ et à son image, le déterminant de $D\psi$ est λ_i^2 et son inverse est donnée par :

$$D\psi^{-1}(k.E_{2i,v}) = \frac{1}{\lambda_i}\vec{E}_{2i-1,v} \quad \text{et} \quad D\psi^{-1}(k.E_{2i-1,v}) = -\frac{1}{\lambda_i}\vec{E}_{2i,v} \quad .$$

On en déduit :

$$|\det D_{k,\Lambda}\psi| = \begin{cases} \Pi_{j<k}(\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 & \text{si } v = 2v' \\ \Pi_i \lambda_i^2 \Pi_{j<k}(\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 & \text{si } v = 2v'+1 \end{cases} \quad ,$$

Démonstration du lemme 5.12

Comme le laplacien est égale à la trace de la matrice hessienne dans la base canonique $\{E_{m,n}\}$, et dans toute autre base orthonormée $\{k.E_{m,n}\}$ pour tout $k \in O(v)$ et en particulier pour k de la décomposition en polaire de A, on a :

$$\Delta f(A = k.D_2(\Lambda)) = \sum_{m<n} D^2 f(E_{m,n}, E_{m,n}) = \sum_{m<n} D^2 f(k.E_{m,n}, k.E_{m,n}) \quad .$$

Comme $Df \circ D\psi = Dg$, on a :

$$D^2 f(D\psi, D\psi) + Df D^2\psi = D^2 g \quad ,$$

et donc sur $\mathcal{D}_v$, on a :

$$D^2 f = \left(D^2 g - Dg \circ D\psi^{-1} \circ D^2\psi\right)(D\psi^{-1}, D\psi^{-1}) \quad . \tag{5.21}$$

Pour obtenir la formule, il nous suffit d'expliciter l'opérateur encore $D^2\psi$ ainsi que les expressions $D\psi^{-1}(A)$ et $D\psi^{-1} \circ D^2\psi(D\psi^{-1}A, D\psi^{-1}A)$ pour des matrices $A = k.E_{m,n}$.

Concernant $D^2\psi$, on voit que :

$$\begin{aligned} D^2\psi(k\vec{A}_1, k\vec{A}_2) &= k.[\vec{A}_2, [\vec{A}_1, D_2(\Lambda)]] \quad , & (5.22)\\ D^2\psi(\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}_2) &= 0 \quad . & (5.23)\end{aligned}$$

Explicitons $D\psi^{-1} \circ D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A))$:

- pour $A = k.E_{2l-1,2l}$, d'après (5.23) :

$$D^2\psi(D\psi^{-1}(k.E_{2l-1,2l}), D\psi^{-1}(k.E_{2l-1,2l})) = D^2\psi(\vec{E}_{2l-1,2l}, \vec{E}_{2l-1,2l}) = 0 \quad ,$$

  et donc $D\psi^{-1} \circ D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A)) = 0$.
- pour $A \in k.V_{i,j}$ (lorsque $v' > 1$) : on pose $k\vec{A} = D\psi^{-1}(A) \in \vec{V}_{i,j}$ calculé précédemment. On a donc d'une part :

$$D\psi(k\vec{A}) = A = k.[\vec{A}, D_2(\Lambda)] \quad ,$$

  et d'autre part, d'après (5.22) :

$$\begin{aligned} D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A)) &= D^2\psi(\vec{A}, \vec{A}) = k.[\vec{A}, [\vec{A}, D_2(\Lambda)]] \\ &= k.[\vec{A}, k^{-1}.A] = [k.\vec{A}, A] \quad . \end{aligned}$$

  Dans les 4 cas $A = k.E_{m,n}, (m,n) \in I_{i,j}$, on a $k.\vec{A} = \vec{E}_{m,n}$ par choix de notation donc :

$$[k.\vec{A}, A] = \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(-\lambda_j k.E_{2j-1,2j} + \lambda_i k.E_{2i-1,2i}) \quad ,$$

  d'après ce qui précède, puis :

$$D\psi^{-1} \circ D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A)) = \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}(-\lambda_j \vec{E}_{2j-1,2j} + \lambda_i \vec{E}_{2i-1,2i}) \quad .$$

– pour $A = k.E_{l,v}, l = 2i, 2i-1, 1 \leq i \leq v'$ (lorsque $v = 2v'+1$) dans les deux cas :

$$D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A)) = [k.\vec{A}, A] = -\lambda_i^{-1} k.E_{2i-1,2i} \quad ,$$

puis

$$D\psi^{-1} \circ D^2\psi(D\psi^{-1}(A), D\psi^{-1}(A)) = -\lambda_i^{-1} \vec{E}_{2i-1,2i} \quad .$$

Et donc, grâce à l'égalité (5.21), on obtient les expressions de $D^2 f(kE_{m,n})$, puis l'on somme. On obtient l'expression de lemme 5.12 voulue.

Index

Bibliographie

[Ale94] G. Alexopoulos. Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3) :973–979, 1994.

[BJR90] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff. On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 321(1) :85–116, 1990.

[BJR92] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff. Bounded K-spherical functions on Heisenberg groups. *J. Funct. Anal.*, 105(2) :409–443, 1992.

[Chr91] M. Christ. L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 328(1) :73–81, 1991.

[Cow81] M. G. Cowling. On Littlewood-Paley-Stein theory. In *Proceedings of the Seminar on Harmonic Analysis (Pisa, 1980)*, number suppl. 1, pages 21–55, 1981.

[CW71] R. R. Coifman and G. Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Étude de certaines intégrales singulières, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242.

[DR92] E. Damek and F. Ricci. Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups. *J. Geom. Anal.*, 2(3) :213–248, 1992.

[Far82] J. Faraut. *Analyse harmonique*, chapter IV, pages 315–446. Les cours du CIMPA. 1982.

[FH87] J. Faraut and K. Harzallah. *Deux cours d'analyse harmonique*, volume 69 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987. Papers from the Tunis summer school held in Tunis, August 27–September 15, 1984.

[Fol89] G. B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[FS82] G. B. Folland and E. M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume 28 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.

[Gav77] B. Gaveau. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta Math.*, 139(1-2) :95–153, 1977.

[Hel62] S. Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. Academic Press, New York, 1962.

[Jac62] N. Jacobson. *Lie algebras.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.

[Kap80] A. Kaplan. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 258(1) :147–153, 1980.

[Kir74] A. Kirillov. *Éléments de la théorie des représentations.* Éditions Mir, Moscow, 1974. Traduit du russe par A. Sossinsky [A. B. Sosinskiĭ].

[Lip74] R. L. Lipsman. *Group representations.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. A survey of some current topics, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 388.

[MA03] D. Müller and S. A. Singular spherical maximal operators on a class of step two nilpotent lie groups. *a paraitre*, 2003.

[Mac76] G. W. Mackey. *The theory of unitary group representations.* University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1976. Based on notes by James M. G. Fell and David B. Lowdenslager of lectures given at the University of Chicago, Chicago, Ill., 1955, Chicago Lectures in Mathematics.

[Mar82] C. Markett. Mean Cesàro summability of Laguerre expansions and norm estimates with shifted parameter. *Anal. Math.*, 8(1) :19–37, 1982.

[MNS00] G. A. Margulis, A. Nevo, and E. M. Stein. Analogs of Wiener's ergodic theorems for semisimple Lie groups. II. *Duke Math. J.*, 103(2) :233–259, 2000.

[MRS96] D. Müller, F. Ricci, and E. M. Stein. Marcinkiewicz multipliers and multi-parameter structure on Heisenberg (-type) groups. II. *Math. Z.*, 221(2) :267–291, 1996.

[Nev94] A. Nevo. Pointwise ergodic theorems for radial averages on simple Lie groups. I. *Duke Math. J.*, 76(1) :113–140, 1994.

[Nev97] A. Nevo. Pointwise ergodic theorems for radial averages on simple Lie groups. II. *Duke Math. J.*, 86(2) :239–259, 1997.

[NS97] A. Nevo and E. M. Stein. Analogs of Wiener's ergodic theorems for semisimple groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 145(3) :565–595, 1997.

[NT97] A. Nevo and S. Thangavelu. Pointwise ergodic theorems for radial averages on the Heisenberg group. *Adv. Math.*, 127(2) :307–334, 1997.

[Puk67] L. Pukanszky. *Leçons sur les représentations des groupes.* Monographies de la Société Mathématique de France, No. 2. Dunod, Paris, 1967.

[Rud73] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[Sch98] O. Schmidt. Maximaloperatoren zu hyperflächen in gruppen vom homogenen typ. Diplomarbeit an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Mai 1998.

[SS90] C. D. Sogge and E. M. Stein. Averages over hypersurfaces. Smoothness of generalized Radon transforms. *J. Analyse Math.*, 54 :165–188, 1990.

[Ste70] E. M. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[Ste76] E. M. Stein. Maximal functions. I. Spherical means. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 73(7) :2174–2175, 1976.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[Str91] R. S. Strichartz. L^p harmonic analysis and Radon transforms on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 96(2) :350–406, 1991.

[SW71] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

[SW78] E. M. Stein and S. Wainger. Problems in harmonic analysis related to curvature. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6) :1239–1295, 1978.

[Sze75] G. Szegő. *Orthogonal polynomials.* American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.

[Tha93] S. Thangavelu. *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, volume 42 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With a preface by Robert S. Strichartz.

[Tit75] E. Titchmarsh. *The theory of functions.* London : Oxford University Press, 2nd edition, 1975.

[VSCC92] N. T. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.