N°. d'enregistrement
au C.N.R.S.

En communication

THESE

DE

DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

Jean-Michel BISMUT

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

ANALYSE CONVEXE ET PROBABILITÉS

Soutenue le 15 juin 1973 devant la Commission d'examen

MM.	J.L. LIONS	Président
	A. BENSOUSSAN	Examinateurs
	J.P. KAHANE	
	J. NEVEU	
	L. SCHWARTZ	

3.7
5.2
+ Convexe (Analyse)

A mes parents

A ma soeur

REMERCIEMENTS

Ce travail n'a été possible qu'avec l'appui de tous ceux qui, par leur soutien intellectuel, moral et matériel, m'ont permis de le mener à bien.

Mes remerciements vont tout d'abord à la Direction des Mines et au Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, M.LAFFITTE, qui m'ont permis de consacrer les dix-huit mois de stage prévus pour les Ingénieurs du Corps à la préparation de ce travail, et qui m'ont toujours soutenu dans son accomplissement.

Je voudrais exprimer à MM. LIONS et NEVEU toute ma reconnaissance pour avoir bien voulu accepter de diriger cette thèse, pour m'avoir fait part de leurs suggestions et de leurs critiques tout au long des multiples rédactions définitives que je leur ai soumises, et pour avoir guidé mes pas dans le dédale des références bibliographiques relatives aux matières où mon ignorance était complète. Mes remerciements vont aussi à M.BENSOUSSAN qui a suivi, semaine après semaine, mes hésitations et mes progrès, et dont les critiques et les suggestions m'ont été extrêmement précieuses.

Je voudrais aussi remercier vivement M.SCHWARTZ pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail. Je lui sais gré d'avoir bien voulu accepter de participer au jury de thèse . Mes remerciements vont aussi à M.KAHANE, qui m'a fourni le deuxième sujet de thèse et qui a accepté de faire partie du jury.

J'ai aussi considérablement profité pour ce travail de l'enseignement de tous ceux qui m'ont appris certaines des matières utilisées ici, ainsi que des conversations multiples que j'ai pu avoir soit sur le sujet de la thèse lui-même, soit sur ses applications. Je suis particulièrement reconnaissant envers tous ceux qui, alors que j'hésitais encore sur le contenu de ce travail, ont bien voulu me recevoir pendant plusieurs heures, et écouter patiemment ce qui n'en était alors que la trame. Je voudrais citer particulièrement :

M.C.CASTAING de l'Université de Montpellier
M.M.H.DAVIS de Imperial College (Londres)
M.J.DREZE du C.O.R.E. (Université de Louvain)
M.I.EKELAND de l'Université de Paris (Dauphine)
M.W.H.FLEMING de Brown University
M.Y.C.HO de Harvard University
M.P.KLEINDORFER du M.I.T.
M.H.J.KUSHNER de Brown University
M.J.F.MERTENS du C.O.R.E. (Université de Louvain)
M.R.C.MERTON du M.I.T.
M.S.K. MITTER du M.I.T.
M.T. de MONTBRIAL de l'Ecole Polytechnique (Paris)
M.R.T. ROCKAFELLAR de l'Université de Washington (Seattle)
M.J. SHAPIRO du M.I.T.
M.M.VALADIER de l'Université de Montpellier
M.B.Van CUTSEM de l'Université de Grenoble
M.S.R.S. VARADHAN de l'Université de New-York
M.R.WETS de l'Université du Kentucky.

Ce que je dois aux travaux que j'ai utilisés est suffisamment clair dans le texte lui-même pour qu'il soit inutile d'en rappeler les auteurs. Je dirai seulement que ma dette à leur égard est considérable.

J'ai trouvé à l'I.R.I.A. un environnement idéal, où j'ai pu user - et parfois même abuser - de la compétence et de la gentillesse des membres de l'équipe où je me trouvais. Ils ont, pour certains d'entre eux, subi presque quotidiennement les humeurs changeantes que connait celui qui accomplit ce genre de travail.

Je voudrais aussi remercier M.J.ULLMO pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de cette recherche et pour l'intérêt qu'il a pris à son avancement.

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien matériel de l'I.R.I.A. et de l'Université de Harvard. Que ces deux institutions trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Madame K.YOUNG a dactylographié la majeure partie du manuscrit. Dire ce qu'ont été les difficultés conjuguées dues à la frappe dans deux langues, à l'éloignement géographique, et surtout à ma mauvaise écriture suffit à exprimer tout ce que je lui dois.

Je mentionnerai enfin celles et ceux qui par la force de leur affection et de leur amitié m'ont permis de garder calme et confiance, de conserver le nécessaire équilibre malgré les exigences et contraintes qu'impose l'activité de recherche, bref à faire en sorte que rétrospectivement ce travail ne m'apparaisse que comme une partie de mes activités au cours de ces deux dernières années. Sans eux, il n'aurait pas vu le jour.

oOo

INTRODUCTION

Sous sa forme la plus générale, un problème de décision se définit par la recherche d'une suite d'actions appliquées de manière séquentielle à un système, qui soit optimale pour un critère donné. Dans un modèle probabiliste de décision, l'information que possède le décideur joue un rôle fondamental. Tout d'abord elle résume à un instant donné tout ce que le décideur connait du système. Mais l'information a aussi une caractéristique dynamique : en effet, au fur et à mesure que le temps s'écoule, l'information du décideur s'améliore - au moins s'il a une mémoire - ses prévisions sur l'avenir se précisent, ou se modifent. C'est donc dans l'articulation dans le temps du couple information-action que réside la difficulté du problème ainsi posé.

Ce travail ne traite que certains aspects de ce problème, dans le formalisme de la théorie du contrôle. Avant de préciser les méthodes mathématiques utilisées, j'exposerai brièvement les objectifs que j'ai poursuivis dans cette recherche.

oOo

J'ai dit précédemment que le problème de décision résidait dans l'articulation dans le temps du couple information-action. On peut alors se demander s'il y a effectivement interaction des dynamiques de l'information et de l'action ; plus précisément, dans un tel modèle, doit-on admettre que l'action du décideur peut modifier l'information que celui-ci possède sur l'environnement du système qu'il contrôle, environnement qui échappe lui-même à cette action ? Encore qu'il soit facile de donner des exemples simples de modèles où une telle condition est réalisée, la résolution du problème devient elle-même extrêmement complexe, car le décideur doit évaluer les conséquences d'un acte pris à un instant donné non seulement sur la situation du système qu'il contrôle, mais aussi sur la qualité de l'information dont il disposera ultérieurement sur l'environnement du système. Par contre, si l'on admet que la génération de l'information est en un sens "indépendante" de l'action du décideur, on est ramené à un problème complexe certes, mais plus aisément formalisable, puisque mathématiquement, il s'exprime par une optimisation pour un certain critère sur l'ensemble des suites d'actions qui sont "fonction" de l'information dont dispose le décideur. Après que j'ai exhibé un exemple très simple de problème sans solution, lorsque l'information dépend du contrôle (*), je devais montrer qu'une théorie supposant une génération fixe d'information pouvait être développée, et qu'elle englobait toutes les théories existantes, qui avaient donné des résultats satisfaisants.

Une seconde difficulté est liée à l'information que possède le décideur sur l'état du système qu'il contrôle. On peut admettre en effet qu'il connait parfaitement cet état, ou qu'il ne le connait qu'imparfaitement. Pour des raisons méthodologiques, nous avons admis que l'observation sur l'état du système était parfaite. Mais il fallait là encore montrer que tous les problèmes qui avaient eu une solution

...

(*) cet exemple fera l'objet d'une publication.

lorsque l'observation sur l'état est incomplète peuvent se ramener à des problèmes où l'observation sur l'état est complète.

Une fois ces difficultés résolues, il devenait alors possible de poser le problème de contrôle sous forme de programme, et en particulier de rechercher comment s'effectue le lien entre prévision et programmation, c'est-à-dire entre les anticipations effectuées à chaque instant par le décideur et ses actions : autrement dit, il faut pouvoir estimer l'impact d'une action prise à un instant donné sur tout l'avenir du système. En particulier, le choix d'une action pouvant moduler les risques que court le décideur dans l'avenir, il faut pouvoir réaliser une allocation intertemporelle optimale des risques. C'est dire que les méthodes de dualité se prêtent particulièrement bien à une telle approche. Il était donc logique d'appliquer les méthodes de programmation convexe à un tel problème, de définir la notion de programme dual d'un problème de contrôle stochastique, et d'en déduire les règles de décentralisation des décisions dans le temps. Ces règles devaient en particulier permettre de définir l'information minimale nécessaire pour la recherche de la chaîne optimale d'actions.

De même, il était important de savoir comment certaines actions passées pouvaient déterminer de manière irréversible la suite des actions ultérieures ; il est en effet facile d'exhiber un modèle possédant de telles caractéristiques : il suffit d'imaginer que l'on ne dispose que d'une "quantité" limitée de moyens d'action, et que l'on ne peut en aucun cas dépasser cette quantité. Dans ce dernier exemple, on conçoit que deux tendances contraires apparaissent. La première pousse le décideur à utiliser le plus rapidement possible les ressources existantes, pour profiter au maximum des "gains" présents ; la seconde au contraire tend à différer l'utilisation, des moyens d'action dans l'attente de gains ultérieurs plus élevés, en particulier grâce à une information meilleure.

Enfin, il convenait aussi de considérer des systèmes sans passé, c'est-à-dire des systèmes où l'état présent résume toute l'information qui expliquera l'évolution ultérieure de l'environnement du système. Ce sont évidemment les systèmes markoviens. La distinction entre les systèmes sans passé et les systèmes ayant un passé est d'ailleurs formellement peu rigoureuse car il suffirait de considérer l'information sur le système comme une "composante" de l'état pour transformer un système quelconque en système sans passé. La distinction a une valeur essentiellement méthodologique, et le traitement mathématique clarifie cette question.

oOo

Pour résoudre ces différents problèmes, des méthodes de l'analyse convexe sont utilisées dans un cadre probabiliste.

Les différentes difficultés liées à l'information du décideur sont traitées dans A, J et E. A donne une méthode qui ramène un problème

...

élémentaire d'optimisation avec information incomplète à un problème avec information complète. Après le traitement de certaines difficultés techniques dans J , ces résultats sont appliquées dans E , où on ramène certains problèmes de contrôle à information incomplète à un problème avec information complète générée d'une manière ne dépendant pas du contrôle choisi.

Les méthodes de la programmation convexe sont utilisées dans B, C, D, F, et K . Dans B , nous définissons un problème de contrôle stochastique et son problème dual, en suivant les travaux effectués par R.T.ROCKAFELLAR dans un contexte déterministe. Les conditions permettant d'effectuer la décentralisation des décisions dans le temps y sont exprimées. On trouve alors que l'état dual est, dans les cas classiques, solution d'une équation différentielle stochastique avec une condition terminale. Pour prouver des résultats d'existence et d'unicité des solutions de ces équations, nous sommes amenés à démontrer certaines propriétés fonctionnelles des équations différentielles stochastiques linéaires dans I, et à les appliquer dans C pour obtenir les résultats d'existence et d'unicité des équations à condition terminale. Les résultats de I et C sont appliqués dans D pour obtenir des résultats d'existence dans le formalisme de B . Il apparait d'ailleurs que les conditions d'existence de contrôles optimaux données dans D exigent des hypothèses de linéarité très fortes. Ces conditions sont vérifiées dans le cas linéaire -quadratique, qui est développé indépendemment également dans C : les méthodes utilisées par J.L.LIONS pour le contrôle des équations aux dérivées partielles y sont utilisées pour la démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions de certaines équations. de RICCATI stochastiques, qui sont d'ailleurs déterministes quand les coefficients du problème sont déterministes. Bien qu'il soit probable que des méthodes de démonstration plus directes existent pour ce dernier cas, il y a là un exemple intéressant d'utilisation de méthodes probabilistes pour la démonstration de résultats strictement déterministes.

Pour comprendre l'influence qu'exercent des actions passées lorsque la "quantité" de moyens d'actions est limitée, un problème de formulation très simple est traité dans F . Une application d'une forme élémentaire du théorème de HAHN-BANACH permet de définir une multiplicateur de Lagrange qui est une martingale locale et qui possède des propriétés bien précises liées à une décomposition de certains processus. Les résultats sont immédiatement généralisés dans K à des problèmes plus généraux.

Cependant, ces méthodes sont peu adaptées à des problèmes trop fortement non linéaires - encore que cette inadaptation soit compensée mais en partie seulement dans N - et de plus, elles ne permettent en aucun cas de démontrer des résultats d'existence de contrôles optimaux "markoviens", c'est-à-dire qui ne dépendent que de l'état présent, pour les systèmes markoviens. Il fallait donc employer des méthodes différentes qui utilisent de manière plus fine les propriétés probabilistes des processus considérés. C'est l'objet de G et H . Le plan de la démonstration de G est simplifié en H. J'ai d'ailleurs donné dans un troisième article des résultats plus généraux, où la démonstration d'existence évite certains problèmes de théorie du potentiel évoqués dans G et H , en utilisant la topologie fine. Cependant l'interprétation des résultats par la théorie du potentiel est singulièrement éclairante.

...

L et M sont de simples annexes techniques de G et H. Il faut remarquer que les hypothèses de convexité jouent aussi un rôle important dans G et H, bien quà priori, le problème posé ne soit pas un problème de programmation convexe. Un lien partiel est cependant établi dans N entre les méthodes de la programmation convexe et les méthodes de G et H.

oOo

sur

Examinons enfin la forme même du travail. Pour des raisons multiples lesquelles il serait vain d'épiloguer, j'ai été amené à passer d'une rédaction unifiée à une rédaction par articles; celle-ci a l'avantage de faciliter la lecture des différents chapitres, puisque les résultats d'un chapitre sont presque toujours rappelés dans un autre chapitre qui fait appel à eux. Chaque article a de plus sa propre bibliographie. (1)

En plus des répétitions internes au travail lui-même, j'ai été conduit à redémontrer certains résultats dont les démonstrations que je pouvais connaitre me paraissaient insuffisantes ou mal adaptées à l'utilisation qui devait en être faite : c'est par exemple le cas de J Proposition 1. De même M étend de manière élémentaire le résultat cité en référence sous une hypothèse légèrement plus restrictive. Un autre exemple est le chapitre I : il ne s'agit pas d'y prouver de résultats d'existence d'équations linéaires, mais d'établir à leur sujet des résultats simples d'analyse fonctionnelle. En règle générale, nous avons mis les parties qui ne sont pas centrales en Annexes.

Sans doute, une telle étude est-elle incomplète. Elle est d'abord partielle dans la mesure où elle aborde les problèmes évoqués par des méthodes essentiellement probabilistes, en évitant d'autres approches possibles : c'est ainsi que les méthodes d'équations aux dérivées partielles ne sont jamais utilisées pour la résolution des problèmes de contrôle de diffusions. Indépendemment du fait que ces dernières méthodes avaient déjà été utilisées avec succès, il semble que l'outil probabiliste permette d'obtenir des résultats plus forts et plus généraux. De plus, cette étude ne traite que certaines classes de problèmes de contrôle. Il apparait cependant que l'extension des résultats à des problèmes plus généraux, ou à des problèmes dérivés, tels les problèmes de jeux ne présente guère de difficultés.

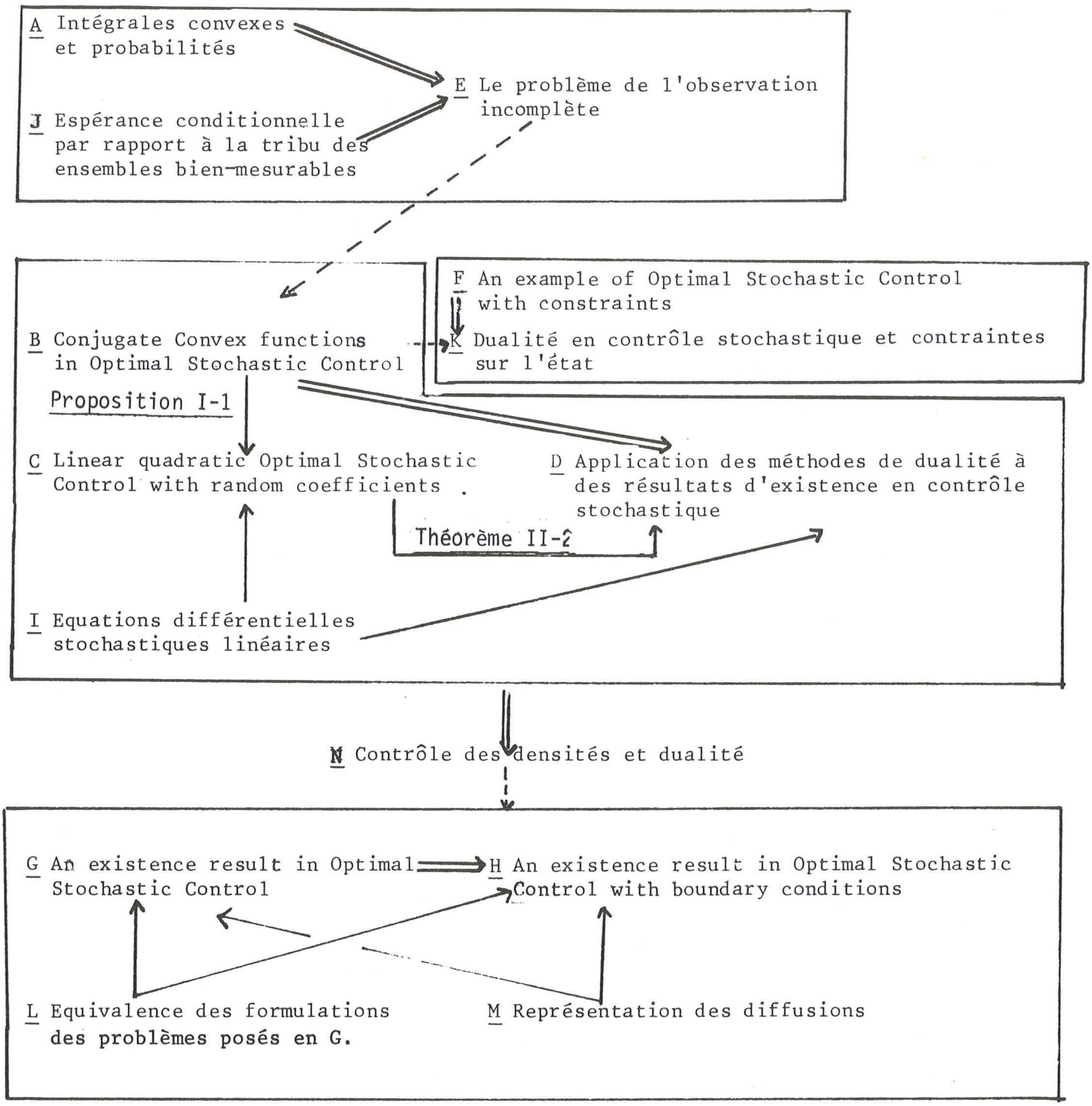
Enfin, je n'ai indiqué aucune méthode de détermination pratique des solutions optimales, faute de temps, et sans doute de compétence. Il faut toutefois pas se dissimuler que certains des problèmes posés requièrent, pour leur solution pratique, une masse vertigineuse de calculs.

Il reste que, bien que les objectifs initiaux fussent assez précis, un tel travail représente une marche au hasard difficilement contrôlée. Sans analyse convexe ni probabilités.

Les articles présentés ici sont des versions préliminaires dont les versions définitives doivent être publiés dans différentes revues.

Table des matières

Tableau des dépendances entre les différentes parties



Les flèches en pointillé indiquent un lien logique.

Les flèches simples indiquent qu'un résultat d'une partie est utilisé dans l'autre.

Les flèches doubles indiquent que la lecture d'une partie est indispensable pour comprendre la partie qui lui est reliée.

A

Intégrales convexes et probabilités

TABLE DES MATIERES

A

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude d'un certain nombre de propriétés des intégrales convexes d'un point de vue probabiliste.

L'approche qui en avait été faite par ROCKAFELLAR dans [13] [14] [15] [16] avait essentiellement pour objectif des applications à des problèmes déterministes où "l'observation" n'intervient pas de façon essentielle. -Pour les utilisations que nous avons en vue- contrôle stochastique, problèmes de décision- il est nécessaire de s'intéresser à l'observation et en conséquence de pouvoir définir l'espérance conditionnelle d'une intégrale convexe, et par dualité son inf. convoluée par rapport à une σ- algèbre

Nous avons largement utilisé [11] et [17] pour les résultats généraux d'analyse convexe et les travaux de

CASTAING	[2] , [3] , [4] , [5]
ROCKAFELLAR	[13] , [14] , [15] , [16]
VALADIER	[18] , [19] , [20]
VAN CUTSEM	[22] , [23]

Il en sera d'ailleurs constamment fait mention dans la suite.

Nous avons adopté une approche plus fonctionnelle que géométrique. Il va de soi que ces deux approches se recoupent parfaitement.

Principales notations utilisées :

$\|k\|$	:	$\sup_{x\in k} \|x\|$
$\varphi(.\mid k)$	:	fonction d'appui de k .
ψ_k	:	indicatrice de k : $\begin{cases}\psi_k(x) = 0 & \text{si } x\in k \\ \psi_k(x) = +\infty & \text{si } x\notin k\end{cases}$
$\hat{k}$	:	enveloppe convexe fermée de k
int k	:	ensembre des points internes de k .
ri k	:	intérieur relatif de k .
0^+k	:	cône de récession de k .
j^*	:	duale de j .
$j0^+$	:	récession de j .
∂j	:	sous différentiel de j .
$j'(x\mid y)$	:	$\left.\frac{d}{d\lambda^+} j(x+\lambda y)\right\|_{\lambda=0}$
dom j	:	$\{x \; ; \; j(x) < +\infty\}$.
$j \nabla j'$	:	inf convoluée de j et j'
$L_p^a(v)$	:	espace des classes de fonctions a-mesurables X à valeurs dans V telles que $\|X\| \in L_p$.
L_p	:	$1 \leq p < +\infty$ espace des classes de v.a.r. Y telles que $\int \|Y\|^p \, dp < +\infty$. $p = +\infty$ espace des classes de v.a.r. Y telles que sup ess $\|Y\| < +\infty$.
L_p^+	:	ensemble des éléments positifs de L_p .
$L_p^a(A ; V)$	:	espace des classes de fonctions a mesurables X à valeurs dans V définis sur A a mesurable, telles que $\|X\| \in L_p^a(A)$
$L_p^a(A)$		espace des classes de v.a.r. Y définies sur A a mesurable telles que : $1 \leq p < +\infty \int_A \|Y\|^p \, dp < +\infty$ $p = +\infty$ $\sup \operatorname{ess}_A \|Y\| < +\infty$
p'	:	conjugué de $p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$
$\mathcal{L}_\infty^a(A)$	:	espaces de v.a.r. Y définies sur A a mesurable telles que $\sup_A \|Y\| < +\infty$
$X \in E^{\mathcal{B}} Y$	:	X est une version de l'espérance conditionnelle de Y .
$a \vee b$	:	max (a,b).
$\bar{\mathcal{B}}(x,r)$	:	boule fermée de centre x et de rayon r .

0 **RAPPELS SUR LES MULTIAPPLICATIONS MESURABLES.**

(Ω, a, p) désigne un espace de probabilité complet, V un espace de Banach séparable réflexif.
On se réfèrera à [2] , [6] , [14] , [16] pour les démonstrations.

A) Soit Γ une multiapplication à valeurs fermées dans V définie sur Ω.
Alors Γ est dite mesurable si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

a) Γ est de graphe $a \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable
b) $\Gamma^{-1}(C)$ est mesurable pour tout fermé C de V .
c) $D(\Gamma) = \{\omega ; \Gamma(\omega) \neq \emptyset\}$ est mesurable, et il existe une famille dénombrable de sections mesurables de Γ définies sur $D(\Gamma)$ et notée $\{f_n\}_{n \in N}$ telle que pour tout ω de $D(\Gamma)$, $\{f_n(\omega)\}_{n \in N}$ est dense dans $\Gamma(\omega)$.

On en déduit :

B) Si Γ est une multiapplication mesurable à valeurs fermées non vides dans V , $\omega \dashrightarrow \|\Gamma(\omega)\|$ est mesurable.

$$\text{En effet } \|\Gamma(.)\| = \sup_{n \in N} \|f_n(.)\|$$

C) Si Γ est une multiapplication mesurable, à valeurs fermées non vides dans V . alors la fonction définie sur $\Omega \times V'$:

$$(\omega, v') \dashrightarrow \varphi(v'|\Gamma(\omega)) \text{ est } a \otimes \mathcal{B}(V') \text{ mesurable.}$$

En effet
$$\varphi(v'|\Gamma(\omega)) = \sup_n \langle v' , f_n(\omega) \rangle$$

D) Si Γ est une multiapplication mesurable à valeurs convexes fermées non vides dans V , si $(\omega , v') \dashrightarrow \varphi(v'|\Gamma(\omega))$ est $a \otimes \mathcal{B}(V')$ mesurable, Γ est mesurable.

En effet $\varphi(.|\Gamma(.))$ est un intégrant normal au sens de ROCKAFELLAR (voir [16] et II-1-(2))
Alors $\Psi_{\Gamma(.)}(.)$ est aussi un intégrant normal défini sur $\Omega \times V$.
Γ est donc de graphe mesurable.

E) Si Γ est une multiapplication mesurable à valeurs fermées non vides dans V
$\hat{\Gamma}$ est mesurable.

On applique C) et D) successivement.

I PRELIMINAIRES.

Dans toute la suite, (Ω, a, p) désigne un espace de probabilité complet, $\mathcal{B}$ une sous σ- algèbre complète de a.
On notera par V un espace de Banach séparable réflexif, et par V' son dual $<\ >$ est le crochet de dualité.

1 Espaces décomposables.

Suivant ROCKAFELLAR dans [13] et [16] on pose la définition suivante :

Définition 1 : On dit qu'un espace $L^a(V)$ de classes de fonction mesurables à valeurs dans V est décomposable si : a) $L^a_\infty(V) \subset L^a(V)$

b) $x \in L^a(V)\quad A \in a \Longrightarrow 1_A\, x \in L^a(V)$.

Lemme 1 : Soient $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ deux espaces décomposables, mis en dualité par : $(x, \alpha) \longrightarrow E<x,\alpha>$

Alors $L^a(V) \subset L^a_1(V)$ (resp. $L'^a(V') \subset L^a_1(V')$) et $L^a_\infty(V)$ est dense dans $L^a(V)$ (resp. $L^a_\infty(V')$ est dense dans $L'^a(V')$)

PREUVE :

En effet montrons que si $x \in L^a(V)$, alors $x \in L^a_1(V)$. Pour tout élément v de V, il existe v' dans V', avec $\|v'\| = 1$, tel que $<v',v> = \|v\|$.
En identifiant x à l'une de ses versions, on peut définir une multiapplication de Ω à valeurs fermées non vides dans la boule unité de V' (qui est aussi réflexif et séparable)

$$\omega \xrightarrow[\Gamma]{} \{v' ;\ \|v'\| = 1 ,\ <v',x(\omega)> = \|x(\omega)\|\} .$$

Or $\omega \longrightarrow \|x(\omega)\|$ est mesurable. Γ étant de graphe $a \otimes \mathcal{B}(V')$ mesurable est mesurable. Il existe donc une section mesurable γ de Γ .
Or $\gamma \in L^a_\infty(V')$, donc $\gamma \in L'^a(V')$. On en déduit que $<x,\gamma>$ est dans L_1 , et x est bien dans $L^a_1(V)$.
De plus si $x \in L^a(V)$, et si $E\ \|x(.)\| = 0$ alors $x = 0$ p.s. et x appliqué à $L'^a(V')$ est bien la forme nulle.
V' étant réflexif, on obtient les mêmes résultats pour $L'^a(V')$

Si $L^a_\infty(V)$ n'était pas dense dans $L_a(V)$, il existerait α dans $L'^a(V')$ non nul, avec :

$$x \in L^a_\infty(V) \Longrightarrow E(\langle \alpha , x \rangle) = 0$$

Or $\alpha \in L^a_1(V)$. Il y a contradiction.

<u>Définition 2</u> : Si $L^a(V)$ est un espace décomposable, on note $L^{\mathcal{B}}(V)$ l'ensemble des éléments de $L^a(V)$ qui sont $\mathcal{B}$ mesurables.

Remarquons que $\mathcal{B}$ étant complète, il n'y a pas de difficulté d'identifications de classes de variables aléatoires a ou $\mathcal{B}$ mesurable coïncidant p.s.

<u>Lemme 2</u> : Si $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ sont deux espaces décomposables en dualité, $L^{\mathcal{B}}(V)$ est un espace fermé dans $L^a(V)$ (pour toute topologie compatible avec la dualité) et décomposable. Son dual $L'^{\mathcal{B}}(V')$ s'identifie à $L'^a(V')/\ker E^{\mathcal{B}}$ et est également décomposable.

PREUVE

En effet comme $L^{\mathcal{B}}_\infty(V) \subset L^a_\infty(V)$, $L^{\mathcal{B}}_\infty(V) \subset L^{\mathcal{B}}(V)$. Soit $x \in L_{\mathcal{B}}(V)$ et $B \in \mathcal{B}$. Alors $1_B\, x \in L^a(V)$ et de plus $1_B\, x$ est $\mathcal{B}$ mesurable. Donc $1_B x \in L^{\mathcal{B}}(V)$

De plus $L^{\mathcal{B}}(V)$ est fermé dans $L^a(V)$. En effet la topologie faible de $L^a(V)$ est plus forte que la topologie induite par la topologie faible de $L^a_1(V)$ sur $L^a(V)$. Or $L^{\mathcal{B}}_1(V)$ est faiblement fermé dans $L^a_1(V)$, et $L^{\mathcal{B}}(V) = L^a(V) \cap L^{\mathcal{B}}_1(V)$.

Soit β une forme linéaire continue sur $L^{\mathcal{B}}(V)$. $L^{\mathcal{B}}(V)$ étant fermé dans $L^a(V)$, il existe $\tilde{\beta}$ dans $L'^a(V')$, tel que :

$$x \in L^{\mathcal{B}}(V) \Longrightarrow \langle \beta, x \rangle = E(\langle \tilde{\beta}, x \rangle) .$$

Or montrons qu'alors : $E \langle \tilde{\beta}, x \rangle = E \langle E^{\mathcal{B}} \tilde{\beta}, x \rangle$.

Si $x \in L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$, cela résulte de la définition de l'espérance conditionnelle.

En général soit $\Omega_n = \{ \omega ;\ n \leq \|x(\omega)\| < n+1 \}$.

Alors comme $\langle \tilde{\beta}, x \rangle$ est dans L_1 $\langle \tilde{\beta}, x \rangle = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_1^n 1_{\Omega_n} \langle \tilde{\beta}, x \rangle$,

la limite étant prise dans L_1 , et $\sum\limits_1^\infty E \left| 1_{\Omega_n} \langle \tilde{\beta}, x \rangle \right| < +\infty$

Or $1_{\Omega_n} <\tilde{\beta}, x> = <\tilde{\beta}, 1_{\Omega_n} x>$ et de plus :

$$\sum_1^{+\infty} E \; |<E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta}, 1_{\Omega_n} x>| \leqslant \sum_1^{+\infty} E|<\tilde{\beta}, 1_{\Omega_n} x>| \quad <+\infty \; .$$

On en déduit que $\sum_1^n <E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta} \; , 1_{\Omega_n} x>$ a une limite p.s. et dans L_1 précisément égale à $<E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta} \; , x>$.

On peut donc bien écrire : $E<\tilde{\beta} \; , x> \; = \; E<E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta} \; , x>$.

Réciproquement il est évident que des éléments de $L'^a(V')$ restreints à $L^{\mathcal{B}}(V)$ définissent des formes linéaires continues sur $L^{\mathcal{B}}(V)$. De plus si $E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta} \neq E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta}'$, alors les formes linéaires sont distinctes : cela résulte de $L_\infty^{\mathcal{B}}(V) \subset L^{\mathcal{B}}(V)$. $L'^{\mathcal{B}}(V')$ peut donc s'identifier à $E^{\mathcal{B}} L'^a(V')$, qui s'identifie lui-même à $L'^a(V')/\ker E^{\mathcal{B}}$.

$E^{\mathcal{B}} L'^a(V')$ est bien un espace de fonctions $\mathcal{B}$ mesurables à valeurs dans V' .

Montrons qu'il est décomposable.

En effet comme $L_\infty^{\mathcal{B}}(V') \subset L^{\mathcal{B}}(V')$, $L_\infty^{\mathcal{B}}(V')$ est effectivement inclus dans $L'^{\mathcal{B}}(V')$ (deux éléments distincts de $L_\infty^{\mathcal{B}}(V')$ ayant une "image" différente dans $L'^{\mathcal{B}}(V')$) .

Enfin si $\beta \in L'^{\mathcal{B}}(V')$, $\beta = E^{\mathcal{B}}\tilde{\beta}$ avec $\tilde{\beta} \in L'^a(V')$. Si B est $\mathcal{B}$ mesurable, $1_B \beta = E^{\mathcal{B}} 1_B \tilde{\beta}$, et comme $1_B \tilde{\beta} \in L'^a(V')$, $1_B \beta \in L'^{\mathcal{B}}(V')$.

Le lemme en résulte.

<u>Remarque 1</u> : Ces deux lemmes sont de nature purement technique, mais ils seront utilisés dans la suite de l'étude.

2 <u>Quelques propriétés de multiapplications mesurables.</u>

<u>Théorème 1</u> : Si une multiapplication mesurable Γ à valeurs fermées non vides dans V est telle que l'ensemble des sections intégrables de Γ est non vide et borné dans $L_1^a(V)$, alors $\|\Gamma(.)\|$ appartient à L_1^+ . Toute les sections mesurables de Γ sont dans $L_1^a(V)$ et forment un ensemble faiblement relativement compact.

PREUVE

Montrons tout d'abord que toute section x de Γ qui est mesurable est intégrable. Soit x_o une section intégrable de Γ . On pose :

$$\Omega_n = \{\omega \; ; \; \|x(\omega)\| \leqslant n\}$$

$$x_n = 1_{\Omega_n} x + 1_{\complement\Omega_n} x_o$$

Alors x_n est une section mesurable de Γ , et de plus elle est intégrable.

L'ensemble des sections intégrables étant borné, il existe $M > 0$, tel que pour tout n : $E\|x_n(.)\| \leqslant M$

On en déduit : $E(1_{\Omega_n} \|x(.)\|) \leqslant M$ pour tout n . Comme $\bigcup_1^{+\infty} \Omega_n = \Omega$

x est bien dans $L_1^a(V)$

Soit $\{f_n\}$ une famille dénombrable de sections mesurables telles que pour tout ω , $\{f_n(\omega)\}$ est dense dans $\Gamma(\omega)$. (voir O.A.C) pour ce résultat).

Pour tout m, $E \sup\limits_{i \leqslant m} \|f_i(.)\| \leqslant M$. En effet $\Omega = \bigcup\limits_1^m \Omega_j$ avec

$\Omega_j = \{\omega \; ; \; \|f_j(\omega)\| = \sup\limits_{i \leqslant m} \|f_i(\omega)\|\}$ et on sait que $E\|\sum\limits_1^m 1_{\Omega_j} f_j(.)\| \leqslant M$.

En faisant tendre m vers l'infini, la suite $\sup\limits_{i \leqslant m} \|f_i(.)\|$ étant croissante,

on aura : $E \sup\limits_i \|f_i(.)\| \leqslant M$.

Or $\|\Gamma(\omega)\| = \sup\limits_i \|f_i(\omega)\|$. $\|\Gamma(.)\|$ est donc dans L_1^+ .

Or $\omega \longrightarrow \hat{\Gamma}(\omega)$ est mesurable d'après O.E et $\|\hat{\Gamma}(\omega)\| = \|\Gamma(\omega)\|$.

On applique alors le théorème de CASTAING ([4]) :

Les sections de $\hat{\Gamma}$ formeront un ensemble faiblement compact dans $L_1^a(V)$.

Remarque 2 : On aurait pu aussi condidérer l'intégrant fonction indicatrice des sections intégrables de $\hat{\Gamma}$ et appliquer ensuite le résultat de ROCKAFELLAR ([16] ; voir II-1-(4)) pour démontrer la compacité faible des sections intégrables de $\hat{\Gamma}$.

<u>Corollaire</u> : Soient $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ deux espaces décomposables en dualité.

Si une multiapplication mesurable à valeurs fermées non vides. dans V est telle que l'ensemble des sections mesurables de Γ appartenant à $L^a(V)$ forment un ensemble non vide faiblement compact dans $L^a(V)$, alors toutes les sections mesurables de Γ sont dans $L^a(V)$. De plus $\|\Gamma(.)\|$ est dans L_1^+.

Si $L^a(V) = L_p^a(V)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, $L'^a(V') = L_{p'}^a(V')$, $\|\Gamma(.)\|$ est dans L_p^+.

PREUVE

En effet on sait que $L^a(V) \subset L_1^a(V)$

Soit x_o une section mesurable de Γ incluse dans $L^a(V)$, et x une section mesurable de Γ.

Soit $\Omega_n = \{\omega ;\ \|x(\omega)\| \leqslant n\}$.

On pose $x_n = 1_{\Omega_n}\ x + 1_{\complement \Omega_n}\ x_o$. Alors x_n est une section mesurable de Γ et appartient à $L^a(V)$. La suite $\{x_n\}_{n \in N}$ est donc faiblement relativement compacte dans $L^a(V)$, et en conséquence dans $L_1^a(V)$. Par le théorème d' EBERLEIN-SMULIAN ([8] p 430), il existe une sous-suite, notée (x_{n_s}), convergeant faiblement vers $\hat{x}$ dans $L_1^a(V)$. .

Montrons que $\hat{x} = x$. En effet pour tout v' de V', $\langle v',\hat{x}\rangle$ est limite de $\{\langle v',x_{n_s}\rangle\}$ dans L_1 faible. De plus $\langle v',x_{n_s}\rangle$ converge p.s. vers $\langle v',x\rangle$.

On applique alors le théorème T 21 de [10] (p.37) et $\langle v',\hat{x}\rangle = \langle v',x\rangle$ p.s. On en déduit : $\hat{x} = x$ p.s.

Les topologies $\sigma(L^a(V), L'^a(V'))$ et $\sigma(L_1^a(V), L_\infty^a(V'))$ étant équivalentes sur l'ensemble des sections mesurables de Γ appartenant à $L^a(V)$, le corollaire en résulte.

Lorsque $L^a(V) = L_p^a(V)$, on appliquera une méthode identique à celle du théorème 1 en considérant $\sup_i \|f_i(.)\|^p$, pour démontrer que $\|\Gamma(.)\|$ est dans L_p^+.

<u>Remarque 3</u> : x est donc <u>limite faible</u> de $\{x_{n_s}\}$ dans $L'^a(V')$.

II INTEGRALES CONVEXES.

1) Quelques résultats :

Rappelons la définition par ROCKAFELLAR d'un intégrant normal ([13] , [14] , [16])

Définition 1 : Une fonction j définie sur $\Omega \times V$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ est dite intégrant normal si :

a) j est $a \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable.

b) Pour tout ω, $j(\omega, .)$ est s.c.i. sur V et non identiquement $+\infty$.

On a alors les résultats suivants, donnés par ROCKAFELLAR ([13] , [14] , [16]) .

(1) j est un intégrant normal si et seulement si $\omega \longrightarrow \text{epi } j_\omega$ est mesurable à valeurs fermées non vides.

(2) Si la duale j^* est propre pour tout ω alors j^* est un intégrant normal.

(3) Si un espace décomposable $L^a(V)$ est en dualité avec un espace de fonctions mesurables à valeurs dans V' $L'^a(V')$ on pose :

$$\text{pour } x \in L^a(V) , \quad I(x) = \int j(\omega, x(\omega))dp$$

$$\text{pour } \alpha \in L'^a(V') , \quad I^*(\alpha) = \int j^*(\omega, \alpha(\omega))dp$$

en égalant ces quantités à $+\infty$ si il n'y a pas d'espérance généralisée.
Alors : s'il existe $x \in L^a(V)$, avec $I(x) < +\infty$, I^* est la duale de I .
Si $L'^a(V')$ est décomposable, si j est convexe sur V pour tout ω , et s'il existe α dans $L'^a(V')$ avec $I^*(\alpha) < +\infty$, I et I^* sont duales l'une de l'autre.

Enfin on a le résultat suivant quand j est un intégrant convexe normal:

(4) Si $L^a(V) = L^a_1(V)$, $L'^a(V') = L^a_\infty(V')$, s'il existe x et α respectivement dans $L^a_1(V)$ et $L^a_\infty(V')$ avec :

$I(x) < +\infty$ $I^*(\alpha) < +\infty$, alors la duale de I^* dans $(L^a_\infty(V))^*$ s'écrit :

si $y^* \in (L^a_\infty(V))^*$, si x est sa partie totalement continue, et y^*_s sa partie singulière (voir [16]) alors $I^{**}(y^*) = I(x) + \varphi(\mathcal{X} \mid \text{dom } I^*)$

Dans toute la suite, on supposera (sauf exception) :

a) Que $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ sont décomposables.

b) Que I et I^* sont convexes, propres, et donc en dualité.

Proposition 1 : Si IO^+ est la fonction de recession de I alors

$$(IO^+)(y) = \int jO^+(\omega, y(\omega))\, dp .$$

PREUVE

En effet soit $x \in L^a(V)$, avec $I(x) < +\infty$

Alors $(IO^+)(y) = \sup\limits_{\lambda \to +\infty} \int \frac{j(\omega, x(\omega) + \lambda y(\omega)) - j(\omega, x(\omega))}{\lambda}\, dp$

En utilisant le fait que le terme sous l'intégrale croît quand $\lambda \to +\infty$ et possède une intégrale généralisée, la proposition en résulte.

2) Conditions de continuité et de semi-continuité inférieure.

Il est important d'étudier sous quelles conditions la continuité d'un intégrant convexe en un point entraîne la continuité en tout point.

Proposition 2 : Si Ω est sans atomes, si $L^a(V) = L^a_p(V)$, $L'^a(V') = L_{p'}(V')$, et si $1 \leqslant p < +\infty$, si I est continu en un point, il est continu partout.

PREUVE

Par [11] p. 26, il suffit de démontrer que I est fini partout.

On peut supposer I continu en 0. Alors on sait qu'il existe $\alpha > 0$, tel que si $\|x\|_{L^a_p(V)} < \alpha$ alors $I(x) \leqslant I(0) + 1$.

Soit maintenant x quelconque dans $L^a_p(V)$. On sait alors qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $A \in a$ tel que $p(A) \leqslant \delta$, $\|1_A x\|_{L^a_p(V)} < \alpha$

Ω étant sans atome, il existe une partition finie de Ω par des ensembles mesurables de mesure inférieure à δ. On pose donc $\Omega = \bigcup\limits_1^n \Omega_i$, avec $p(\Omega_i) \leqslant \delta$ pour $i = 1 \dots n$

Or $\int_{\Omega_i} j(\omega, x(\omega))dp = \int j(\omega, 1_{\Omega_i} x(\omega))dp - \int_{\complement\Omega_i} j(\omega, 0)dp$

Mais $\|1_{\Omega_i} x\|_{L_p^a(V)} < \alpha$, donc $\int j(\omega, 1_{\Omega_i} x(\omega))dp \leq I(0) + 1$

et de plus $$\int_{\complement\Omega_i} j(\omega, 0)dp < +\infty$$

On en déduit par somme sur les Ω_i :

$$\int j(\omega, x(\omega))dp < +\infty \quad .$$

<u>Proposition 3</u> : Si Ω est sans atome, si V est de dimension finie, si $L^a(V) = L_\infty^a(V)$, $L'^a(V') = L_1^a(V')$, si I est continu en un point pour la topologie de MACKEY, il est continu partout.

PREUVE

On peut supposer que I est continu en 0 pour la topologie de MACKEY .

On va encore montrer que I est fini partout.

I étant continu en 0 , il existe un voisinage de 0 pour la topologie de MACKEY, V, tel que si $x \in V$, $I(x) \leq I(0) + 1$.

Les polaires des parties faiblement relativement compacts étant une base fondamentale de voisinages de 0 , il existe une partie $\mathcal{H}$ faiblement relativement compacte dans $L_1^a(V')$ telle que :

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \int \langle x(\omega) , h(\omega) \rangle dp \leq 1 \Longrightarrow I(x) \leq I(0) + 1$$

V' étant de dimension finie, h s'écrit $h_1 \vec{v}'_1 + \dots + h_n \vec{v}'_n$ et on en déduit que $\mathcal{H}$ est faiblement relativement compact si et seulement si $\{h_i\}_{h \in \mathcal{H}\; h = \sum h_i \vec{v}'_i}$ est faiblement relativement compact dans L_1 , ou encore grâce à [8] (corollaire 10 p 293) si $\{\|h(.)\|\}_{h \in \mathcal{H}}$ est faiblement relativement compact dans L_1 .

Mais grâce à [8] (corollaire 11 p 294) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que si $p(A) \leq \delta$ alors $\sup_{h \in \mathcal{H}} \int_A \|h\| dp \leq \varepsilon$

Soit x dans $L^a_\infty(V)$, distinct de 0 . On choisit $\varepsilon = \frac{1}{\|x\|_{L^a_\infty(V)}}$

Alors $\sup\limits_{h \in \mathcal{H}} \int_A \langle x(\omega), h(\omega) \rangle dp \leqslant 1$ quand $p(A) \leqslant \delta$

On fait alors une partition finie de Ω et on procède comme pour la proposition précédente.

Nous allons maintenant montrer un résultat étendant un résultat de ROCKAFELLAR [15]
On suppose ici que I est défini par un intégrant normal non nécessairement convexe. On fait les hypothèses suivantes :

$$\text{il existe } x_o \in L^a_1(V) \qquad I(x_o) < +\infty \quad .$$

$$\text{il existe } \alpha_o \in L^a_\infty(V') \qquad I^*(\alpha_o) < +\infty \quad .$$

<u>Théorème 1</u> : Si V est de dimension finie, si Ω est sans atome et si I est faiblement s.c.i. sur $L^a_1(V)$, I est un intégrant convexe.

PREUVE ———————

Ce résultat généralise celui de ROCKAFELLAR dans [15] , avec une démonstration sans doute plus simple. Nous obtenons le théorème en trois étapes.

<u>Lemme 1</u> : Pour que I soit faiblement s.c.i., il faut que l'ensemble non vide des sections intégrables de $\omega \longrightarrow \operatorname{epi} j_\omega$ soit faiblement fermé.

PREUVE ———————

Soit A une partie mesurable de Ω . Alors $x \longrightarrow \int_A j(\omega, x(\omega))dp$ est également faiblement s.c.i. En effet $\int_A j(\omega, x(\omega))dp = I(1_A x + 1_{\complement A} x_o) - \int_{\complement A} j(\omega, x_o(\omega))\, dp$
Or $I(x_o) < +\infty$ et l'application $x \longrightarrow 1_A x + 1_{\complement A} x_o$ est affine continue de $L^a_1(V)$ dans lui-même.

Soit alors $\hat{x}$, $\hat{\alpha}$ adhérents faiblement à l'ensemble des sections intégrables de $\omega \dashrightarrow \text{epi } j_\omega$

De la semi-continuité inférieure faible de $x \longrightarrow \int_A j(\omega , x(\omega))dp$,

on déduit : $\int_A j(\omega ,\hat{x}(\omega))dp \leqslant \int_A \hat{\alpha}(\omega)dp$

et en conséquence $j(\omega , \hat{x}(\omega)) \leqslant \hat{\alpha}(\omega)$ p.s. $(\hat{x} , \hat{\alpha})$ est donc une section intégrable de $\omega \dashrightarrow \text{epi } j\omega$.

<u>Remarque 1</u> : La dimension finie de V n'est pas encore intervenue.

<u>Lemme 2</u> : Soit Γ une multiapplication mesurable à valeurs faiblement compactes dans V de dimension finie telle que $\|\Gamma(.)\|$ appartient à L_1^+

Si Ω est sans atomes, pour que l'ensemble des sections intégrables soit faiblement compact dans $L_1^a(V)$, il faut et il suffit que Γ soit p.s. à valeurs convexes.

PREUVE

La condition suffisante est classique. Nous donnons une démonstration de la nécessité de la condition de convexité.

Soit f une section mesurable de $\omega \dashrightarrow \hat{\Gamma}(\omega)$. ($\hat{\Gamma}$ est mesurable par O.E) .

Soit A une partie mesurable de Ω . On note $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des sections mesurables x de Γ telles que :

$$\int_A x = \int_A f \quad .$$

Par le théorème de LIAPOUNOV, $\mathcal{B}(A)$ est non vide.

Si f n'est pas une section de Γ , on a :

$$\bigcap_A \mathcal{B}(A) = \emptyset$$

Or $\mathcal{B}(A)$ est faiblement compact pour tout A . On en déduit : il existe une famille finie de A_i mesurables tels que $\bigcap \mathcal{B}(A_i) = \emptyset$.

Or considérons la famille finie des parties minimales (ne contenant strictement aucune autre partie) engendrée par $\complement$ et $\bigcap$ par les A_i . Sur chacune de ces parties B_j par le théorème de LIAPOUNOV, il existe x_j section de Γ avec

$$\int_{B_j} x_j \, dp = \int_{B_j} f \quad .$$

En recollant les x_j (car les B_j sont disjoints) on a une contradiction, car on trouve un x section de Γ avec pour tout i :

$$\int_{A_i} x \, dp = \int_{A_i} f \, dp \quad .$$

Enfin on a le lemme suivant :

<u>Lemme 3</u> : Soit Γ une multiapplication mesurable à valeurs fermées non vides dans V de dimension finie possédant une section intégrable. Si Ω est sans atome, pour que l'ensemble des sections intégrables de Γ soit faiblement fermé dans $L_1^a(V)$, il faut et il suffit que Γ soit p.s. à valeurs convexes.

PREUVE

La condition suffisante est classique. Montrons la condition nécessaire. Soit x_o une section intégrable de Γ . On pose :

$$\beta(\omega) = \|x_o(\omega)\| \vee 1 \quad .$$

Soit Γ_i' la multiapplication à valeurs convexes fermées non vides :

$$\omega \dashrightarrow \mathcal{B}(0 \, , \, i\beta(\omega)) \quad \text{définie pour} \quad i \in \mathbb{N} \, .$$

Γ_i' est mesurable. En effet $\varphi(v \mid \Gamma_i'(\omega)) = i\,\beta(\omega) \, \|v\|$ et la condition O-D est bien vérifiée.

On pose $$\Gamma_i''(\omega) = \Gamma(\omega) \cap \Gamma_i'(\omega) \quad .$$

Γ_i'' est une multiapplication à valeurs faiblement compactes non vides, et elle est mesurable, car son graphe est l'intersection des graphes de Γ et Γ_i' .
L'ensemble des sections intégrables de Γ_i'' est non vide (il contient x_o) et faiblement compact dans $L_1^a(V')$ (c'est l'intersection d'un ensemble faiblement fermé et d'un ensemble faiblement compact). Par le lemme 2 , Γ_i'' est donc p.s. à valeurs convexes.
En éliminant une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, on voit donc que p.s., pour tout i , $\Gamma_i''(\omega)$ est convexe. Donc p.s., $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i''(\omega)$ est convexe. Or comme $\beta(\omega) \geqslant 1$, $\Gamma(\omega) = \bigcup \Gamma_i''(\omega)$. Γ est donc p.s. à valeurs convexes.

On rassemble alors le lemme 1 et le lemme 3. Sous les conditions du théorème 1 , $\omega \dashrightarrow \operatorname{epi} j\omega$ est p.s. à valeurs convexes, ce qu'il fallait démontrer.

Sous-différentiation des intégrants convexes.

On a les résultats de ROCKAFELLAR ([14] et [16])

(5) Si $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ sont deux espaces décomposables en dualité, si I et I* sont deux intégrants convexes propres en dualité, alors :

a) Pour tout x de $L^a(V)$, $\omega \dashrightarrow \partial j(\omega, x(\omega))$ est une multiapplication mesurable ([14] corollaire 4.6)

b) Pour que α appartienne à $\partial I(x)$, il faut et il suffit que :

$$\alpha(\omega) \in \partial j(\omega, x(\omega)) \text{ p.s. avec } \alpha \in L'^a(V') .$$

Théorème 2 : Si I est continue en x_o élément de $L^a(V)$ (pour une topologie compatible avec la dualité) (1) , alors $\partial I(x_o)$ est non vide, faiblement compact, et est formé de toutes les classes de sections mesurables de $\omega \dashrightarrow \partial j(\omega , x(\omega))$. De plus $\|\partial j(. , x(.))\|$ est dans L_1^+ .

PREUVE

Si I est continu en x_o , $\partial I(x_o)$ est non vide et faiblement compact par [11] p. 60 . Grâce à (5) , on applique le corollaire du théorème I-2-1 .

Corollaire : Si $L^a(V) = L^a_\infty(V)$, $L'^a(V') = L_1^a(V')$, si I est continu en $x_o \in L^a_\infty(V)$ pour la topologie forte, $\partial I(x_o)$ est non vide et faiblement compact dans $L_1^a(V')$. Il est formé de toutes les sections mesurables de $\omega \dashrightarrow j(\omega , x(\omega))$. et $\omega \dashrightarrow \|\partial j(\omega, x(\omega))\|$ appartient à L_1^+ .

PREUVE

La topologie forte de $L^a_\infty(V)$ n'étant généralement pas compatible avec la dualité, ce résultat ne peut être obtenu directement. Nous allons utiliser le résultat II-1-(4) de ROCKAFELLAR.

La duale de I dans $(L^a_\infty(V))^*$ s'écrit :

$$I^{*\prime}(\alpha^*) = I^*(\alpha) + \psi(\chi \mid \operatorname{dom} I) \quad \text{pour } \alpha^* = \alpha + \chi .$$

(1) Nous ne donnerons plus cette indication dans la suite.

Pour que α^* appartienne à $\partial I(x_0)$, il faut et il suffit que, si $\alpha^* = \alpha + \chi$, alors :

$$I^*(\alpha) + I(x_0) + \varphi(\chi \mid \text{dom } I) = \langle \alpha, x_0 \rangle + \langle \chi, x_0 \rangle.$$

Cela s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha \in \partial I(x_0) \\ \varphi(\chi \mid \text{dom } I) = \langle \chi , x_0 \rangle \end{cases}$$

Or si I est continu pour la topologie forte de $L^a_\infty(V)$ en x_0, $\partial' I(x)$ dans $(L^a_\infty(V))^*$ est non vide et faiblement compact. De plus, $x_0 \in$ int dom I, ce qui entraîne, si $\chi \neq 0$ $\varphi(\chi \mid \text{dom } I) > \langle \chi, x_0 \rangle$.

On en déduit : si $\alpha^* = \alpha + \chi$ est dans $\partial' I(x)$, $\chi = 0$ et $\alpha \in \partial I(x)$.

Le sous-différentiel de I dans $L^a_1(V')$ est donc non vide et faiblement compact. On réapplique le corollaire du théorème I-2-1.

__Remarque 2__ : Ce dernier résultat n'entraîne évidemment pas que les ensembles

$$\{\alpha ; \ I^*(\alpha) - \langle \alpha \, x_0 \rangle \leqslant p\} \quad \text{pour}$$

$$p > \inf I^*(\alpha) - \langle \alpha \, x_0 \rangle$$

sont faiblement compacts, mais ils sont seulement non vides, fermés et bornés.

III ESPERANCE CONDITIONNELLE D'UN INTEGRANT CONVEXE.

L'objet de cette partie est le suivant : étant donné un intégrant convexe, peut-on définir sa restriction aux fonctions $\mathcal{B}$ mesurable par un intégrant convexe dépendant de façon $\mathcal{B}$ mesurable de ω ?

On procède en deux étapes :

- espérance conditionnelle d'un intégrant suffisamment régulier ;
- passage aux intégrants généraux.

1 Espérance conditionnelle d'un intégrant régulier.

On considère ici un intégrant convexe normal j tel qu'il existe h et h' dans L_1^+ avec :

$$|j(\omega, x)| \leqslant h(\omega) \|x\| + h'(\omega) \quad \text{p.s. pour tout } x \text{ de } V .$$

(Propriété p).

Théorème 1 : Si un intégrant convexe normal possède la propriété p, il existe un intégrant convexe normal $j_{\mathcal{B}}$ tel que : a) il existe des versions $h'_{\mathcal{B}}$ et $h'_{\mathcal{B}}$ de $E^{\mathcal{B}}h$ et $E^{\mathcal{B}}h'$ telles que p.s. pour tout x de V :

$$|j_{\mathcal{B}}(\omega, x)| \leqslant h_{\mathcal{B}}(\omega) \|x\| + h'_{\mathcal{B}}(\omega)$$

b) Pour tout x $\mathcal{B}$ mesurable à valeurs dans V, si $j(., x(.))$ possède une espérance conditionnelle généralisée(1) alors,

$$j_{\mathcal{B}}(., x(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x(.))$$

PREUVE

En effet, on peut considérer pour tout x de V la classe de v.a.r. $\mathcal{B}$ mesurables $(E^{\mathcal{B}}j)(., x)$, et on aura :

$$|(E^{\mathcal{B}}j)(., x)| \leqslant (E^{\mathcal{B}}h)(.) \|x\| + E^{\mathcal{B}}h' .$$

Soient $\tilde{h}_{\mathcal{B}}$ et $\tilde{h}'_{\mathcal{B}}$ des versions de $E^{\mathcal{B}}h$ et $E^{\mathcal{B}}h'$.
Soient (Ω_n) une partition dénombrable $\mathcal{B}$ mesurable de Ω, telle que sur chaque Ω_n, $\tilde{h}_{\mathcal{B}}$ et $\tilde{h}'_{\mathcal{B}}$ soient essentiellement bornés : on peut prendre par exemple la partition de Ω constituée par :

$$\{\omega, n \leqslant (\tilde{h}_{\mathcal{B}} \vee \tilde{h}'_{\mathcal{B}})(\omega) < n + 1\}$$

(1) Pour la définition, voir [10] p 49. Ici cela signifie que $j(.,x(.))$est minorée par une fonction intégrable.

Alors considérons les restrictions de $(E^{\mathcal{B}}j)(.,x)$ de $E^{\mathcal{B}}h$ et $E^{\mathcal{B}}h'$ à Ω_n.

On peut écrire :

$$\begin{cases} (E^{\mathcal{B}}j)(.,x) \in L_{\infty}^{\mathcal{B}}(\Omega_n) \\ (E^{\mathcal{B}}h)(.) \in L_{\infty}^{\mathcal{B}}(\Omega_n) \\ (E^{\mathcal{B}}h')(.) \in L_{\infty}^{\mathcal{B}}(\Omega_n) \end{cases}$$

On applique alors le théorème de IONESCU-TULCEA à l'espace probabilisé complet $(\Omega_n, \mathcal{B}, p)$: il existe un relèvement isométrique linéaire, préservant l'ordre et les constantes de $L_{\infty}^{\mathcal{B}}(\Omega_n)$ dans $\mathcal{L}_{\infty}^{\mathcal{B}}(\Omega_n)$. Soit ρ_n ce relèvement.

Quand ω appartient à Ω_n on pose :

$$j_{\mathcal{B}}(\omega, x) = \rho_n((E^{\mathcal{B}}j)(.,x))(\omega)$$

$$h_{\mathcal{B}}(\omega) = \rho_n((E^{\mathcal{B}}h(.))(\omega)$$

$$h'_{\mathcal{B}}(\omega) = \rho_n((E^{\mathcal{B}}h'(.))(\omega)$$

Or les relèvements préservant l'ordre, on a :

a) p.s. , pour tout x ,

$$-h_{\mathcal{B}}(\omega)\|x\| - h'_{\mathcal{B}}(\omega) \leq j_{\mathcal{B}}(\omega, x)$$
$$\leq h_{\mathcal{B}}(\omega)\|x\| + h'_{\mathcal{B}}(\omega)$$

C'est à dire :

$$|j_{\mathcal{B}}(\omega, x)| \leq h_{\mathcal{B}}(\omega)\|x\| + h'_{\mathcal{B}}(\omega)$$

b) p.s. , $j_{\mathcal{B}}(\omega,.)$ est convexe sur V .

P.s., $j(\omega,.)$ est donc convexe, et majorée sur tout borné. $x \longrightarrow j(\omega, x)$ est donc p.s. continu ; $j_{\mathcal{B}}$ est donc bien $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable. C'est donc un intégrant normal qui possède la propriété p .

(Cette méthode a été utilisée par VAN CUTSEM pour la construction d'espérances conditionnelles de multiapplications à valeurs faiblement compactes. On se reportera à [22] et [23]).

Soit x une fonction $\mathcal{B}$ mesurable à valeurs dans V telle que $j(.,x(.))$ possède une espérance conditionnelle généralisée.

Si $j_{\mathcal{B}}(., x(.)) \notin E^{\mathcal{B}}j(., x(.))$, il existe B non négligeable $\mathcal{B}$ mesurable tel que :

$$\text{ou bien} \quad j_{\mathcal{B}}(., x(.)) > E^{\mathcal{B}}j(., x(.)) \quad \text{sur } B$$

$$\text{ou bien} \quad j_{\mathcal{B}}(., x(.)) < E^{\mathcal{B}}j(., x(.)) \quad \text{sur } B$$

Soit $B_n = \{\omega \in B \ ; \ n \leqslant \|x(\omega)\| < n+1\}$ Alors $\bigcup\limits_1^\infty B_n = B$

On va montrer que pour tout n :

$$\int_{B_n} j(\omega , x(\omega))dp = \int_{B_n} j_{\mathcal{B}}(\omega , x(\omega))dp \ .$$

ce qui entraînera une contradiction.

On peut supposer B_n non négligeable. Alors $x \in L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n \ ; V)$.

Considérons sur $L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n \ ; V)$ les deux fonctionnelles :

$$y \xrightarrow[I_1]{} \int_{B_n} j(\omega , y(\omega))dp$$

$$y \xrightarrow[I_2]{} \int_{B_n} j_{\mathcal{B}}(\omega , y(\omega))dp \ .$$

Alors, I_1 et I_2 sont telles que :

pour tout y :

$$I_1(y) \leqslant \|h\|_{L_1} \|y\|_{L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n \ ; V)} + \|h'\|_{L_1}$$

$$I_2(y) \leqslant \|h\|_{L_1} \|y\|_{L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n \ ; V)} + \|h'\|_{L_1} \ .$$

I_1 et I_2 sont des intégrants convexes partout finis sur $L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n \ ; V)$.

Elles sont donc continues pour la topologie de Mackey , par II- 1-(4)

Supposons y étagée :

$$y = \sum_{i=1}^{m} 1_{B_i^n} \, y_i \ , \quad (B_i^n)_{i=1\ldots m}$$

étant une partition $\mathcal{B}$ mesurable finie de B_n

Alors :

$$\int_{B_n} j_{\mathcal{B}}(\omega\ ,\ y(\omega))dp = \sum_{i=1}^{m} \int_{B_i^n} j_{\mathcal{B}}(\omega,\ y_i)dp$$

Or comme $j_{\mathcal{B}}(.,\ y_i) \in E^{\mathcal{B}} j(.,\ y_i)$, on aura :

$$\int_{B_i^n} j_{\mathcal{B}}(\omega\ ,\ y_i)dp = \int_{B_i^n} j(\omega\ ,\ y_i)dp\ .$$

et en conséquence, si y est étagée, $I_1(y) = I_2(y)$.

Or les fonctions étagées sont denses dans $L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n\ ;\ V)$ pour la topologie de Mackey.

Donc, pour tout y de $L_\infty^{\mathcal{B}}(B_n\ ;\ V)$, on aura : $I_1(y) = I_2(y)$.

Cela entraîne bien :

$$\int_{B_n} j(\omega\ ,\ x(\omega))dp = \int_{B_n} j_{\mathcal{B}}(\omega\ ,\ x(\omega))dp\ .$$

Le résultat est bien démontré.

<u>Remarque 1</u> : L'hypothèse de convexité à joué un rôle essentiel mais on peut lever cette hypothèse en choisissant un intégrant qui est, par exemple, uniformément LIPSCHITZIEN, tout en possédant la propriété p . La continuité de l'espérance conditionnelle se démontre alors en utilisant l'isométrie des relèvements.

2 <u>Espérance conditionnelle d'integrants convexes généraux.</u>

On considère ici un intégrant convexe normal j tel que :

a) Il existe x_o $\mathcal{B}$ mesurable à valeurs dans V avec

$$j(.,\ x_o(.)) \in L_1\ .$$

b) Il existe $\alpha_o \in L_1^a(V')$ avec

$$j^*(.,\alpha_o(.)) \in L_1\ .$$

L'ensemble de ces deux propriétés sera désigné par <u>(Propriété Q)</u>

<u>Théorème 2</u> : Si un intégrant convexe normal possède la propriété Q , il existe un intégrant convexe normal $j_{\mathcal{B}}$ tel que pour tout x $\mathcal{B}$ mesurable à valeurs dans V , si $j(.,x(.))$ a une espérance conditionnelle généralisée, $j_{\mathcal{B}}(.,x(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(.,x(.))$. $j_{\mathcal{B}}$ est l'unique intégrant convexe normal possédant cette propriété (en identifiant deux intégrants coïncidant p.s.)

PREUVE

On identifie x_o (resp. α_o) à l'une de ses versions.

On pose $\beta = \|\alpha_o\| \vee 1$ Alors $\beta \in L_1^+$

On note j_i^* l'intégrant défini par :

$$j_i^*(\omega,\alpha) = j^*(\omega,\alpha) + \psi_{\mathcal{B}(0\,,\,i\beta(\omega))}(\alpha)$$

pour tout i entier j_i^* est normal car il est bien $a \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable, p.s. s.c.i. sur V , et $j_i^*(\omega,\alpha_o(\omega)) < +\infty$ p.s.

Alors comme $\beta(\omega) \geqslant 1$, $j^*(\omega,\alpha) = \lim\limits_{i \to +\infty} \downarrow j_i^*(\omega,\alpha)$ p.s. pour tout α .

Donc, en posant $j_i = (j_i^*)^*$, il vient :

$$j(\omega,x) = \lim_{i \to +\infty} \uparrow j_i(\omega,x) \quad \text{p.s. pour tout } x .$$

Or on a :

$$j_i^*(\omega,\alpha_o(\omega)) = j^*(\omega,\alpha_o(\omega)) \text{ pour tout } \omega .$$

Donc

$$j_i(\omega,x) \geqslant \langle \alpha_o(\omega), x \rangle - j^*(\omega,\alpha_o(\omega))$$

De plus

$$j_i^*(\omega,\alpha) \geqslant j^*(\omega,\alpha) \geqslant \langle \alpha, x_o(\omega) \rangle - j(\omega,x_o(\omega))$$

On en déduit :

$$j_i(\omega,x) \leqslant j(\omega,x_o(\omega)) + i\beta(\omega)\,(\|x\| + \|x_o(\omega)\|) .$$

et par suite

$$-\beta(\omega)\ \|x\| - j^*(\omega\ ,\ \alpha_o(\omega)) \leqslant j_i(\omega\ ,\ x) \leqslant j(\omega\ ,\ x_o(\omega)) + i\beta(\omega)\ (\ \|x\| + \|x_o(\omega)\|\ )\ .$$

On identifie x_o et l'une de ses versions. x_o étant $\mathcal{B}$-mesurable, on fait une première partition $(\Omega_n)_{n \in N}$ $\mathcal{B}$-mesurable de Ω :

$$\Omega_n = \{\ \omega\ ;\ n \leqslant \|x_o(\omega)\| < n+1\ \}\ .$$

Sur chaque Ω_n , on aura donc :

$$-\beta(\omega)\ \|x\| - j^*(\omega\ ,\ \alpha_o(\omega)) \leqslant j_i(\omega\ ,\ x) \leqslant j(\omega\ ,\ x_o(\omega)) + i\beta(\omega)\ (\ \|x\| + n + 1)$$

Puis on constate qu'on peut reprendre sur chaque Ω_n la méthode de construction de l'espérance conditionnelle du théorème précédent mais avec certaines précautions : on remarque en effet que la construction de l'espérance conditionnelle de j_i sur Ω_n dépend :

a) De la partition dénombrable de Ω_n choisie.

b) Des relèvements choisis.

On procèdera alors de la manière suivante :

- On note $h^n_{\mathcal{B}}$, $h^n_{1\mathcal{B}}$, $h^n_{2\mathcal{B}}$ des versions des espérances conditionnelles de β , $j^*(.,\alpha_o(.))$, $j(.,\ x_o(.))$ sur Ω_n .

- On fait une partition dénombrable <u>fixe</u> (indépendante de i) de Ω_n en ensemble $\mathcal{B}$ mesurables $\{\Omega^m_n\}_{m \in N}$ où, à la fois $h^n_{\mathcal{B}}$, $h^n_{1\mathcal{B}}$, $h^n_{2\mathcal{B}}$ restent essentiellement bornés.

- On construit l'espérance conditionnelle de j_i , $j^n_{\mathcal{B}i}$ sur chaque Ω_n , par une famille <u>fixe</u> de relèvements $\{\rho^m_n\}_{m \in N}$

Ceci est possible en appliquant le théorème 1 , car si $h^n_{\mathcal{B}}$ est essentiellement borné sur Ω^m_n , cela entraîne nécessairement que $ih^n_{\mathcal{B}}$ est essentiellement borné sur Ω^m_n pour tout i entier.

- On recolle les $j^n_{\mathcal{B}i}$ pour obtenir $j_{\mathcal{B}i}$.

Or : - Sur chaque Ω_n , donc sur tout Ω , $j_{\mathcal{B}i}$ possède les propriétés a) et b) du théorème 1 .

- p.s., pour tout x , la suite $j_{\mathcal{B}i}(\omega , x)$ croît. En effet le relèvement de IONESCU-TULCEA conserve l'ordre, et on a eu la précaution de choisir pour tout i la même famille de relèvements .

On pose alors :

$$j_{\mathcal{B}}(\omega , x) = \lim_{i \to +\infty} \uparrow j_{\mathcal{B}\, i}(\omega, x)$$

Alors :

a) $j_{\mathcal{B}}$ étant une limite de fonctions $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable est $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(V)$ mesurable.

b) Pour p.t. ω , $j_{\mathcal{B}}(\omega ,.)$ étant un sup de fonctions convexes s.c.i. est convexe s.c. i .

Soit alors x $\mathcal{B}$ mesurable, tel que $j(., x(.))$ possède une espérance conditionnelle généralisée.

Soit $\Omega'_n = \{\omega \; ; \; n \leq \|x(\omega)\| < n+1\}$, x étant identifié à une de ses versions.

Alors sur Ω'_n j_i possède une espérance conditionnelle généralisée puisque :

$$-\beta(\omega) \, \|x\| - j^*(\omega , \alpha_o(\omega)) \leq j_i(\omega, x)$$

j_i possédant les propriétés a) et b) du théorème 2 sur tout Ω les possède sur Ω'_n pour tout n : $j_{\mathcal{B}\, i}(., x(.)) \in E^{\mathcal{B}} j_i(., x(.))$ sur Ω'_n pour tout n

En faisant tendre i vers l'infini, en profitant du fait que j_i croît, on a :

$$j_{\mathcal{B}}(., x(.)) \in E^{\mathcal{B}'} j(., x(.)) \text{ sur } \Omega'_n \text{ pour tout } n$$

Or $j(., x(.))$ a une espérance conditionnelle généralisée sur Ω .

Donc :

$$j_{\mathcal{B}}(., x(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x(.))$$

En conséquence, $j_{\mathcal{B}}(., x_o(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x_o(.))$ et $j_{\mathcal{B}}(., x_o(.)) \in L_1$, ce qui prouve que p.s. $j_{\mathcal{B}}(\omega, x_o(\omega)) < +\infty$ et donc que $j_{\mathcal{B}}$ est normal.

Il reste à montrer que $j_{\mathcal{B}}$ ainsi construit est bien le seul (à un ensemble de mesure nulle près) à posséder cet ensemble de propriétés.
Soit donc $j'_{\mathcal{B}}$ un autre intégrant normal possédant ces propriétés.
Si $j_{\mathcal{B}}$ et $j'_{\mathcal{B}}$ ne sont pas équivalents, les multiapplications mesurables à valeurs fermées non vide $\omega \longrightarrow \mathrm{epi}\, j_{\mathcal{B}\omega}$ et $\omega \longrightarrow \mathrm{epi}\, j'_{\mathcal{B}\omega}$ ne coïncident pas sur un ensemble de mesure non nulle.
Alors sachant que $\omega \longrightarrow \complement \mathrm{epi}\, j_{\mathcal{B}\omega}$ et $\omega \longrightarrow \complement \mathrm{epi}\, j'_{\mathcal{B}\omega}$ sont mesurables,
$\omega \underset{\Gamma_1}{\longrightarrow} \mathrm{epi}\, j_{\mathcal{B}\omega} \cap \complement \mathrm{epi}\, j'_{\mathcal{B}\omega}$ et $\omega \underset{\Gamma_2}{\longrightarrow} \mathrm{epi}\, j'_{\mathcal{B}\omega} \cap \complement \mathrm{epi}\, j_{\mathcal{B}\omega}$ sont mesurables.

Alors puisque $\hat{\Omega}_1 = \{\omega, \Gamma_1(\omega) \neq \emptyset\}$ et $\hat{\Omega}_2 = \{\omega ; \Gamma_2(\omega) \neq \emptyset\}$ sont mesurables (voir O-A-C), si $j_{\mathcal{B}}$ et $j'_{\mathcal{B}}$ ne sont pas équivalents, $\hat{\Omega}_1$ ou $\hat{\Omega}_2$ sont non négligeables.
Supposons $\rho(\hat{\Omega}_1) > 0$. Soit $\omega \longrightarrow (x_1(\omega), z_1(\omega))$ une section $\mathcal{B}$ mesurable de Γ_1 définie sur $\hat{\Omega}_1$.
Soit $\hat{\Omega}'_1$ une partie $\mathcal{B}$ mesurable non négligeable de $\hat{\Omega}_1$ sur laquelle x_1 et z_1 restent bornés.
Alors sur $\hat{\Omega}'_1$, $j(., x_1(.))$ a une espérance conditionnelle généralisée, car $j(\omega , x_1(\omega)) \geqslant < \alpha_0(\omega), x_1(\omega)> - j^*(\omega , \alpha_0(\omega))$.

On en déduit que sur $\hat{\Omega}'_1$:

$$j_{\mathcal{B}}(., x_1(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x_1(.))$$
$$j'_{\mathcal{B}}(., x_1(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x_1(.))$$

Or :

$$\begin{cases} j_{\mathcal{B}}(\omega , x_1(\omega)) \leqslant z_1(\omega) & \text{p.s. sur } \hat{\Omega}'_1 \\ \\ j'_{\mathcal{B}}(\omega , x_1(\omega)) > z_1(\omega) & \end{cases}$$

Il y a donc contradiction.

3 <u>Espérance conditionnelle d'un intégrant convexe sur un espace décomposable.</u>

Soient $L^a(V)$ et $L'^a(V')$ deux espaces décomposables en dualité.
Soient j et j^* deux intégrants normaux en dualité.
<u>On fait l'hypothèse qui sera conservée jusqu'à la fin</u> :

a) il existe $x_o \in L^{\mathcal{B}}(V)$ $\quad j(.,x_o(.)) \in L_1$

b) il existe $\alpha_o \in L'^a(V')$ $\quad j^*(.,\alpha_o(.)) \in L_1$

<u>Théorème 3</u> : On peut construire un intégrant convexe normal $j_{\mathcal{B}}$ tel que si $x \in L^{\mathcal{B}}(V)$ $\quad j_{\mathcal{B}}(\cdot,x(\cdot)) \in E^{\mathcal{B}} j(\cdot,x(\cdot))$, qui sera l'espérance conditionnelle de j. De plus si $j^*_{\mathcal{B}}$ est l'intégrant dual de $j_{\mathcal{B}}$ alors les fonctionnelles $x \longrightarrow \int j_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))dp$ et $\alpha \longrightarrow \int j^*_{\mathcal{B}}(\omega,\alpha(\omega))dp$ définies respectivement sur $L^{\mathcal{B}}(V)$ et $L'^{\mathcal{B}}(V')$ sont convexes, propres, et duales l'une de l'autre.

PREUVE

En effet x_o est bien $\mathcal{B}$ mesurable et par le lemme I-1-1.

α_o appartient à $L_1^a(V')$. De plus, si $x \in L^{\mathcal{B}}(V)$, comme :

$$j(\omega, x(\omega)) \geqslant \langle \alpha_o(\omega), x(\omega)\rangle - j^*(\omega,\alpha_o(\omega)),$$

$j(.,x(.))$ a une espérance conditionnelle généralisée. On peut donc appliquer les résultats du théorème 2. Or par le lemme I-1-2, $L^{\mathcal{B}}(V)$ est fermé dans $L^a(V)$.
La restriction de la fonctionnelle $x \xrightarrow[I_j]{} \int (\omega, x(\omega))dp$ est donc convexe, propre, et s.c.i. sur $L^{\mathcal{B}}(V)$. De plus $L^{\mathcal{B}}(V)$ et $L'^{\mathcal{B}}(V')$ sont deux espaces décomposables en dualité par le lemme I-1-2 .
Alors comme $j_{\mathcal{B}}(.,x_o(.)) \in L_1$, on applique le résultat II-1-(3) de ROCKAFELLAR : la duale de $x \xrightarrow[I_{\mathcal{B}}]{} \int j_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))dp$ définie sur $L^{\mathcal{B}}(V)$ sera

$\alpha \xrightarrow[I^*_{\mathcal{B}}]{} \int j^*_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))dp.$

Or $I_{\mathcal{B}}$ est propre et s.c.i. sur $L^{\mathcal{B}}(V)$. $I^*_{\mathcal{B}}$ est donc aussi propre. Le théorème en résulte.

<u>Corollaire 1</u> : Si y appartient à $L^{\mathcal{B}}(V)$, $j_{\mathcal{B}}0^+(., y(.)) \in E^{\mathcal{B}} j0^+(., y(.))$

PREUVE

En effet : $$j_{\mathcal{B}}0^+(\omega , y(\omega)) = \sup_{n \to +\infty} \frac{j_{\mathcal{B}}(\omega , x_o(\omega) + ny(\omega)) - j_{\mathcal{B}}(\omega, x_o(\omega))}{n}$$

Or :

$$j_{\mathcal{B}}(., x_o(.)) \in E^{\mathcal{B}} j(., x_o(.)) \quad \text{et} \quad j(., x_o(.)) \in L_1 \ .$$

De plus pour tout n entier :

$$\frac{j(., x_o(.) + n\, y(.)) - j(., x_o(.))}{n}$$

possède une espérance conditionnelle généralisée et la suite ainsi formée tend en croissant vers $j0^+(., y(.))$ quand $n \to +\infty$.

Enfin :

$$\frac{j_{\mathcal{B}}(., x(.) + n\, y(.)) - j_{\mathcal{B}}(., x(.))}{n} \in E^{\mathcal{B}} \frac{j(., x(.) + n\, y(.)) - j(., x(.))}{n}$$

pour tout n entier. Le corollaire en résulte.

<u>Remarque 2</u> : $j0^+$ est lui-même un intégrant normal. En effet $j0^+(\omega , 0) = 0$ p.s. De plus l'intégrant dual n'est autre que $(\omega, x) \to \psi_{\mathrm{dom}\, j^*(\omega_i)}(x)$,

(voir II p 52) et comme $I^*(\alpha_o) < +\infty$, on aura : $\psi_{\mathrm{dom}\, j^*(\omega_i)}(\alpha_o(\omega)) = 0$ p.s.

$j_{\mathcal{B}}0^+$ n'est donc autre chose que l'espérance conditionnelle de l'intégrant $j0^+$

<u>Corollaire 2</u> : Si x et y sont dans $L^{\mathcal{B}}(V)$, si $I(x) < +\infty$, et si $I'(x|y) < +\infty$, alors $j'_{\mathcal{B}}(., x(.)|y(.)) \in E^{\mathcal{B}} j'(., x(.)|y(.))$

PREUVE

En effet comme $I'(x|y) = \inf_{n \to +\infty} n(I(x + \frac{y}{n}) - I(x))$, si $I'(x|y) < +\infty$, il existe N , tel que pour $n \geq N$, $I(x + \frac{y}{n}) < +\infty$, ou encore tel que pour $n \geq N$, $j(., x(.) + \frac{y}{n}(.))$ appartient à L_1 .

Or pour tout ω, $j'_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega)|y(\omega)) = \inf_{n \to +\infty} n(j_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega) + \frac{y(\omega)}{n}) - j_{\mathcal{B}}(\omega, x(\omega)))$

et pour tout n de N_1 comme $j(., x(.))$ appartient à L_1 on aura :

$$n(j_{\mathfrak{B}}(., x(.) + \frac{y(.)}{n}) - j_{\mathfrak{B}}(., x(.))) \in E^{\mathfrak{B}}\, n(j(., x(.) + \frac{y(.)}{n}) - j(., x(.))) .$$

De plus, quand n est supérieur à N, la suite $n(j(., x(.) + \frac{y(.)}{n}) - j(.)\, x(.))$ est majorée par une fonction intégrable fixe et décroît p.s. Le corollaire en résulte.

Remarque 3 : On ne doit pas espérer construire l'espérance conditionnelle de $(\omega, y) \longrightarrow j'(\omega, x(\omega)|y)$ au sens où nous l'entendons. En effet cette expression n'est en général pas p.s. s.c.i. en y.

Application : Construction de l'espérance conditionnelle d'une multiapplication.

Définition 1 : Soit Γ une multiapplication mesurable à valeurs convexes fermées non vides dans V' possédant une section intégrable α_0. On appelle "espérance conditionnelle" de Γ et on note $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ la multiapplication construite pas espérance conditionnelle de l'intégrant normal des fonctions d'appui de Γ.

Considérons en effet les intégrants :

$$\begin{cases} (\omega, x) \dashrightarrow \varphi(x|\Gamma(\omega)) \\ (\omega, \alpha) \dashrightarrow \psi_{\Gamma(\omega)}(\alpha) \end{cases} .$$

Ils sont duaux l'un de l'autre. On a de plus :

$$\begin{cases} \varphi(0|\Gamma(\omega)) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad 0 \in L^a_\infty(V) \\ \psi_{\Gamma(\omega)}(\alpha_0(\omega)) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \alpha_0 \in L^a_1(V') \end{cases}$$

On peut donc construire $\varphi_{\mathfrak{B}}$ possédant les propriétés du théorème 3 pour

$$L^a(V) = L^a_\infty(V) \quad , \quad L'^a(V') = L^a_1(V') \quad .$$

De plus les relèvements ayant servi à construire $\varphi_{\mathfrak{B}}$ étant linéaires et conservant l'ordre, $\varphi_{\mathfrak{B}}$ sera positivement homogène et sous-additive.
Il existe donc une multiapplication mesurable notée $\Gamma_{\mathfrak{B}}$, à valeurs convexes fermées non vides dans V', telle que $\varphi_{\mathfrak{B}}(., \Gamma(.))$ et $\psi_{\Gamma_{\mathfrak{B}}(.)}(.)$

soient duales l'une de l'autre (cet argument est identique à celui de VAN CUTSEM dans [23])

4 <u>Sous-différentiel de</u> $I_{\mathfrak{B}}$.

Rappelons que nous avons identifié $L'^{\mathfrak{B}}(V')$ à $E^{\mathfrak{B}}L'^{a}(V')/\ker E^{\mathfrak{B}}$.

Alors on vérifie tout de suite que dans le cas général

$$\partial I_{\mathfrak{B}}(x) \supset E^{\mathfrak{B}}\,\partial I(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } L^{\mathfrak{B}}(V)\,.$$

En effet, si $\alpha \in \partial I(x)$, pour tout y de $L^{\mathfrak{B}}(V)$:

$$I(y) - I(x) \geqslant \langle \alpha\,,\, y - x\rangle$$

et donc :

$$I_{\mathfrak{B}}(y) - I_{\mathfrak{B}}(x) \geqslant \langle E^{\mathfrak{B}}\alpha\,,\, y - x\rangle\,.$$

Mais on a le résultat suivant :

<u>Théorème 4</u> : Si I est continu en x_0 élément de $L^{\mathfrak{B}}(V)$, alors, pour tout x de $L^{\mathfrak{B}}(V)$, $\partial I_{\mathfrak{B}}(x) = E^{\mathfrak{B}}\partial I(x)$.

PREUVE

En effet considérons la fonctionnelle définie sur $L^{a}(V)$ $I + \Psi_{L^{\mathfrak{B}}(V)}$.

Si β appartient à $\partial I_{\mathfrak{B}}(x)$, il existe α_1 dans $L'^{a}(V')$, avec : $E^{\mathfrak{B}}\alpha_1 = \beta$.

On vérifie tout de suite qu'alors α_1 est dans $\partial\,(I + \Psi_{L^{\mathfrak{B}}(V)})(x)$.

Or I étant continu en x_0, par [11] (p 62), on sait que :

$$\partial(I + \psi_{L^{\mathfrak{B}}})\,(x) = \partial I(x) + \partial\psi_{L^{\mathfrak{B}}(V)}(x)\,.$$

Comme

$$\partial\psi_{L^{\mathfrak{B}}(V)}(x) = L^{\mathfrak{B}}(V)^{\perp}\,,$$

on peut écrire : $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_2'$ avec :

$$\begin{cases} \alpha_2 \in \partial I(x) \\ E^{\mathfrak{B}}\alpha_2' = 0\,. \end{cases}$$

Donc : $\beta = E^{\mathcal{B}}\alpha_2$ avec α_2 dans $\partial I(x)$

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème 4, si x appartient à $L^{\mathcal{B}}(V)$, si $\partial I(x) \neq \emptyset$. La multiapplication $\omega \longrightarrow \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))$ est une version de l'espérance conditionnelle de $\omega \longrightarrow \partial_j(\omega, x(\omega))$.

PREUVE

En effet par le résultat (5) de ROCKAFELLAR, $\partial I_{\mathcal{B}}(x)$ est formé des sections mesurables de $\omega \longrightarrow \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))$ incluses dans $L'^{\mathcal{B}}(V')$.

Supposons $\partial I_{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset$.

Alors $\beta \longrightarrow \int \psi_{\partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))}(\beta(\omega))\, dp$ est l'indicatrice de $\partial I_{\mathcal{B}}(x)$.

La fonction d'appui de $\partial I_{\mathcal{B}}(x)$ sera donc par II-1-3 :

$$y \longrightarrow \int \varphi(y(\omega) \mid \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))\, dp \quad \text{pour } y \in L^{\mathcal{B}}(V) .$$

Si $\partial I_{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset$, $\partial I(x) \neq \emptyset$ et sa fonction d'appui sera de même

$$y \longrightarrow \int \varphi(y(\omega) \mid \partial_j(\omega, x(\omega))dp \quad \text{pour } y \in L^a(V) .$$

Or

$$\partial I_{\mathcal{B}}(x) = E^{\mathcal{B}} \partial I(x) .$$

Donc quand y est dans $L^{\mathcal{B}}(V)$:

$$\int \varphi(y(\omega) \mid \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))dp = \int \varphi(y(\omega) \mid \partial_j(\omega, x(\omega))dp .$$

En annulant y sur une partie $\mathcal{B}$ mesurable quelconque, ce qu'on peut faire puisque $L^{\mathcal{B}}(V)$ est décomposable, on aura pour tout B $\mathcal{B}$ mesurable :

$$\int_B \varphi(y(\omega) \mid \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega))dp = \int_B \varphi(y(\omega)) \mid \partial_j(\omega, x(\omega))dp .$$

On en conclut :

$$\varphi(y(\omega) \mid \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x(\omega)) \in E^{\mathcal{B}} \varphi(y(\omega)) \mid \partial_j(\omega, x(\omega))$$

On applique alors le résultat d'unicité du théorème III-2-3

Théorème 5 :

$$\text{Si} \quad L^a(V) = L^a_\infty(V) \, , \, L'^a(V') = L^a_1(V') \, ,$$

si I est fortement continu en $x_o \in L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$, alors $\partial I_{\mathcal{B}}(x_o) = E^{\mathcal{B}} \, \partial I(x_o)$,

et $\omega \longrightarrow \partial_{j\mathcal{B}}(\omega, x_o(\omega))$ est une version de l'espérance conditionnelle de $\omega \longrightarrow \partial_j(\omega, x_o(\omega))$. De plus, pour tout x de $L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$, on aura :

$$\partial I_{\mathcal{B}}(x) = E^{\mathcal{B}}(\partial I)(x) + 0^+ \partial I_{\mathcal{B}}(x)$$

PREUVE

Soit $\partial' I(x)$ et $\partial' I_{\mathcal{B}}(r)$ les sous-différentiels de I et $I_{\mathcal{B}}$ dans

$$(L^a_\infty(V))^* \quad \text{et} \quad (L^{\mathcal{B}}_\infty(V))^*$$

Alors de la même manière, pour tout x de $L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$, on aura :

$$\partial' I_{\mathcal{B}}(x) = \text{rest}_{\mathcal{B}} \, \partial' I(x)$$

(en notant par $\text{rest}_{\mathcal{B}} \, y^*$ la <u>restriction</u> à $L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$ d'un élément y^* de $(L^a_\infty(V))^*$.

Or en x_o , par le corollaire du théorème I-2-2 , $\partial' I(x_o) = \partial I(x_o)$ et $\partial' I_{\mathcal{B}}(x_o) = \partial I_{\mathcal{B}}(x_o)$, aucune des ces expressions n'étant vide. On a donc bien :

$$\partial I_{\mathcal{B}}(x_o) = E^{\mathcal{B}} \, \partial I(x_o) \, .$$

On montre le résultat sur la multiapplication sous-différentiel comme précédemment.

De même, en reprenant les calculs du corollaire du théorème I-2-2 on aura :

$$\beta \in \partial I_{\mathcal{B}}(x) \iff \exists \, (\alpha, \chi) \in (L^a_\infty(V))^* \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} &a) \; \alpha \in \partial I(x) \\ &b) \; \beta = E^{\mathcal{B}} \alpha + \text{rest}_{\mathcal{B}} \, \chi \\ &c) \; \langle \chi, x \rangle = \varphi(\chi \mid \text{dom } I) \, . \end{aligned}$$

Donc si $\partial I_{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset$ il existe $\alpha \in \partial I(x)$, avec en conséquence $E^{\mathcal{B}}\alpha \in \partial I_{\mathcal{B}}(x)$,
Montrons que $\mathrm{rest}_{\mathcal{B}} \chi \in 0^+ \partial I_{\mathcal{B}}$. En effet pour $\lambda > 0$

a) Si χ est totalement discontinu $\lambda \chi$ est totalement discontinu

b) Si $\mathrm{rest}_{\mathcal{B}} \chi \in L_1^{\mathcal{B}}(V')$, $\mathrm{rest}_{\mathcal{B}} \lambda \chi \in L_1^{\mathcal{B}}(V')$

c) Si $\langle \chi , x \rangle = \varphi(\chi | \mathrm{dom}\ I)$

$\langle \lambda\chi , x \rangle = \varphi(\lambda X | \mathrm{dom}\ I)$.

Donc $E^{\mathcal{B}}\alpha + \lambda\ \mathrm{rest}_{\mathcal{B}}\ \chi \in \partial I_{\mathcal{B}}(x)$

De plus, comme :

$E^{\mathcal{B}} \partial I(x) \subset I_{\mathcal{B}}(x)$, on a : $\partial I_{\mathcal{B}}(x) \supset E^{\mathcal{B}} \partial I(x) + 0^+ \ \partial I_{\mathcal{B}}(x)$

On en déduit :

$$\partial I_{\mathcal{B}}(x) = E^{\mathcal{B}}\ \partial I(x) + 0^+ \partial I_{\mathcal{B}}(x)$$

<u>Remarque 4</u> : Pour des raisons qui n'apparaîtront clairement que dans la suite $\partial_{j\mathcal{B}}(., x(.))$ n'est en général pas l'espérance conditionnelle de $\partial_j(., x(.))$.

5 <u>Propriétés de</u> $I^*_{\mathcal{B}}$

<u>Théorème 6</u> : $I^*_{\mathcal{B}}$ est la régularisée s.c.i. de la fonctionnelle convexe propre $\beta \xrightarrow[\mathcal{Y}]{} \inf I^*(\alpha)$ défini sur $L'^{\mathcal{B}}(V')$, et

$$E^{\mathcal{B}}\alpha = \beta$$
$$\alpha \in L'^{a}(V')$$

$$\overline{\mathrm{dom}\ I^*_{\mathcal{B}}} = \overline{E^{\mathcal{B}}\ \mathrm{dom}\ I^*}$$

PREUVE

En effet comme il existe $x_o \in L^{\mathcal{B}}(V)$ avec $I(x_o) < +\infty$, on aura :

$$\mathcal{Y}(\beta) \geqslant \langle \beta, x_o \rangle - I(x_o)$$

De plus comme :

$$I^*(\alpha_o) < +\infty,\ \mathcal{Y}(E^{\mathcal{B}}\alpha_o) < +\infty \quad .$$

Enfin $\mathcal{Y}$ est classiquement convexe.

Calculons $\mathcal{Y}^*$, défini sur $L^{\mathcal{B}}(V)$

$$\mathcal{Y}^*(x) = \sup_{\beta} \langle \beta, x \rangle - \inf_{E^B\alpha = \beta} I^*(\alpha) = \sup_{\alpha} \langle \alpha\, x \rangle - I^*(\alpha) = I_{\mathcal{B}}(x) \quad .$$

Comme $\mathcal{Y}^* = I_{\mathcal{B}}$, $I^*_{\mathcal{B}}$ est bien la régularisée s.c.i. de $\mathcal{Y}$.
Les propriétés d'une régularisée montrent alors que $\overline{\text{dom}\ I^*_{\mathcal{B}}} = \overline{E^{\mathcal{B}}\ \text{dom}\ I^*}$
(voir [II] p 29)

<u>Corollaire 1</u>: Si I est continu en x_o élément de $L^{\mathcal{B}}(V)$, alors $I^*_{\mathcal{B}} = \mathcal{Y}$ et pour tout β, de $L'^{\mathcal{B}}(V')$, il existe $\alpha \in L'^{a}(V')$ tel que $I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = I^*(\alpha)$. En conséquence $\text{dom}\ I^*_{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}}\ \text{dom}\ I^*$.

PREUVE

En effet en x_o I est continu, et de plus, $\psi_{L^{\mathcal{B}}(V)}(x_o) = 0$. On en déduit que $I^* \nabla\ \psi^*_{L^{\mathcal{B}}(V)}$ est s.c.i. et que l'inf convolution est exacte par [11](p57). Comme : $\psi^*_{L^{\mathcal{B}}(V)} = \psi_{(L^{\mathcal{B}}(V))^{\perp}}$,

on a :

$$(I^* \nabla\ \psi^*_{L^{\mathcal{B}}(V)})(\alpha') = \inf_{E^{\mathcal{B}}\alpha = E^{\mathcal{B}}\alpha'} I^*(\alpha) \quad .$$

Or

$$I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \sup_{x \in L^{\mathcal{B}}(V)} \langle \beta, x \rangle - I_{\mathcal{B}}(x)$$

$$= \sup_{x \in L^{\mathcal{B}}(V)} \langle \beta, x \rangle - I(x)$$

Or : $\beta = E^{\mathcal{B}} \alpha'$ avec $\alpha' \in L'^a(V')$.

Donc :

$$I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \sup_{x \in L^a(V)} \langle \alpha' , x \rangle - (I + \psi_{L^{\mathcal{B}}(V)}) (x)$$

Et comme :

$$(I + \psi_{L^{\mathcal{B}}(V)})^* = I^* \nabla \psi_{(L^{\mathcal{B}}(V))^\perp}$$

il vient :

$$I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \inf_{E^{\mathcal{B}}\alpha = E^{\mathcal{B}}\alpha'} I^*(\alpha) .$$

On en déduit :

$$I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \inf_{E^{\mathcal{B}}\alpha = \beta} I^*(\alpha)$$

<u>Remarque 5</u> : Si on applique ce résultat aux multiapplications mesurables, cela signifie que les sections mesurables de $\Gamma_{\mathcal{B}}$ éléments de $L'^{\mathcal{B}}(V')$ sont précisément les images par $E^{\mathcal{B}}$ des sections mesurables de Γ éléments de $L'^a(V')$. On fera le lien entre ce résultat et le théorème III-4-4 et son corollaire : en effet si I est continu en x_o , la fonction d'appui du sous-différentiel en x élément de $L^{\mathcal{B}}(V)$, s'il est non vide, est continue en $x - x_o$ (elle est majorée sur un voisinage de $x - x_o$)

<u>Corollaire 2</u> : Si $L^a(V) = L^a_\infty(V)$, $L'^a(V') = L^a_1(V')$, si I est fortement continu en $x_o \in L^{\mathcal{B}}_\infty(V)$, alors $\operatorname{dom} I^*_{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}} \operatorname{dom} I^* + 0^+ \operatorname{dom} I^*_{\mathcal{B}}$

PREUVE

En effet considérons les duales $I^{*\prime}$ et $I^{*\prime}_{\mathcal{B}}$ respectivement de I et $I_{\mathcal{B}}$, définies sur $(L^a_\infty(V))^*$ et $(L^{\mathcal{B}}_\infty(V))^*$.

Grâce à la continuité forte de I en x_o , en se restreignant aux éléments de $(L^{\mathcal{B}}_\infty(V))^*$ qui sont dans $L^{\mathcal{B}}_1(V')$, on aura :

$$I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \inf_{E^{\mathcal{B}}\alpha + \mathrm{rest}_{\mathcal{B}}\chi = \beta} I^*(\alpha) + \varphi(\chi \mid \operatorname{dom} I) ,$$

le minimum étant effectivement atteint.

Pour que β appartienne à dom $I^*_{\mathfrak{B}}$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha \in$ dom I^* et x totalement discontinu tel que $\varphi(x \mid \text{dom } I) < +\infty$, avec $E^{\mathfrak{B}}\alpha + \text{rest}_\beta x = \beta$

On vérifiera comme au théorème III-4-5 que $\text{rest}_\beta x \in 0^+$ dom $I^*_{\mathfrak{B}}$.

Donc dom $I^*_{\mathfrak{B}} \subset E^{\mathfrak{B}}$ dom $I^* + 0^+$ dom $I^*_{\mathfrak{B}}$. Or dom $I^*_{\mathfrak{B}} \supset E^{\mathfrak{B}}$ dom I^*.

Le corollaire en résulte.

<u>Remarque 6</u> : Dans le cas de l'espérance conditionnelle de multiapplications, cela signifie que si les hypothèses du corollaire 2 sont vérifiées l'ensemble des sections mesurables de $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ éléments de $L'^{\mathfrak{B}}(V')$ est la somme de l'image par $E^{\mathfrak{B}}$ de l'ensemble des sections mesurables de Γ éléments de $L'^{a}(V')$ et de son propre cône de récession. On comprend pourquoi alors dans le théorème III-4-5 on ne pouvait pas dire que le sous-différentiel en x de $I_{\mathfrak{B}}$ est "l'espérance conditionnelle" (au sens des multiapplications) du sous-différentiel en x de I : "l'équation" $A = E^{\mathfrak{B}}(\partial I)(x) + 0^+ A$ peut en effet avoir plusieurs solutions.

<u>Exemple</u> : Les hypothèses du corollaire sont vérifiées si Γ est une multiapplication mesurable possédant une section intégrable, à valeur dans un cône K de sommet 0 à base faiblement compacte dans V'.

En effet : $\psi_{\Gamma(\omega)}(\alpha) \geqslant \psi_K(\alpha)$ Pour tout α de V'.

Et en conséquence :

$$\varphi(x \mid \Gamma(\omega)) \leqslant \varphi(x \mid K) \quad . \text{ pour tout } x \text{ de } V .$$

Or si K est un cône de sommet 0 à base faiblement compact, le cône orthogonal $K^{\perp}$ a un intérieur non vide. Soit x_1 un point intérieur.

Comme

$$\varphi(x|K) = \psi_{K^{\perp}}(x) ,$$

on aura

$$\varphi(x|\Gamma(\omega)) \leqslant \psi_{K^{\perp}}(x) .$$

La constante x_1 est bien $\mathcal{B}$ mesurable, et $x \longrightarrow \int \varphi(x(\omega)|\Gamma(\omega))dp$ est continu en x_1 pour la topologie forte de $L^a_{\infty}(V)$. En appliquant le corollaire 2 on retrouve le résultat de VALADIER dans [19] pour l'intégration de multiapplications à valeurs dans des espaces de dimension finie. ($\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$)

6 <u>Sous-différentiel de $I^*_{\mathcal{B}}$</u>

<u>Théorème 7</u> : Si I est continu en x_0 élément de $L^{\mathcal{B}}(V)$, pour que x élément de $L^{\mathcal{B}}(V)$ soit dans $\partial I^*_{\mathcal{B}}(\beta)$, avec β dans $L'^{\mathcal{B}}(V')$, il faut et il suffit qu'il existe α dans $L'^{a}(V')$, possédant les propriétés :

a) $E^{\mathcal{B}}\alpha = \beta$

b) $x \in \partial I^*(\alpha)$.

PREUVE <u>Les $\{\alpha\}$ possédant</u> les propriétés a) et b) sont tels que $I^*(\alpha) = I^*_{\mathcal{B}}(\beta)$.

En effet pour que x soit dans $\partial I^*_{\mathcal{B}}(\beta)$, il faut et il suffit que β soit dans $\partial I_{\mathcal{B}}(x)$. Or par le théorème III-4-4, β est alors de la forme $E^{\mathcal{B}}\alpha$, avec $\alpha \in \partial I(x)$, et en conséquence $x \in \partial I^*(\alpha)$.

On a alors, pour tout α' de $L'^{a}(V')$:

$$I^*(\alpha') - I^*(\alpha) \geqslant \langle x, \alpha' - \alpha \rangle$$

Donc si $\quad E^{\mathcal{B}}\alpha' = E^{\mathcal{B}}\alpha , \quad I^*(\alpha') - I^*(\alpha) \geqslant 0 .$

Or : $\quad I^*_{\mathcal{B}}(\beta) = \inf\limits_{E^{\mathcal{B}}\alpha'' = \beta} I^*(\alpha'')$ par le corollaire du théorème III-5-6

On en déduit :

$$I^*(\alpha) = I^*_{\mathcal{B}}(\beta)$$

IV **PROBLEMES D'APPROXIMATION MARTINGALES.**

Nous allons chercher maintenant comment varient les différents objets que nous avons défini lorsque l'on fait "croître" la σ- algèbre $\mathcal{B}$.
Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \in N}$ une suite croissante de sous σ-algèbres de a . On note :

$$\mathcal{B}_\infty = \bigvee_1^\infty \mathcal{B}_n \quad :$$

1 **Martingale d'intégrants convexes.**

Définition 1 : On dit qu'une suite d'intégrants normaux $(j_n)_{n \in N}$ est une martingale par rapport à la suite $\mathcal{B}_n$ si :

a) Pour tout n de N , pour tout x de V , $j_{n+1}(., x)$ possède une espérance conditionnelle généralisée par rapport à $\mathcal{B}_n$.

b) Pour tout n de N , pour tout x de V

$$j_n(.,x) \in E^{\mathcal{B}_n} j_{n+1}(., x)$$

Théorème 1 : **Si V est de dimension finie, si $\{j_n\}_{n \in N}$ est une martingale d'intégrants convexes continus, telle que pour tout x d'une partie Q dénombrable dense dans V**

$$\sup_{n \in N} E|j_n(., x)| < +\infty$$

il existe alors un intégrant convexe p.s. continu j_∞ unique à un ensemble de mesure nulle près, tel que p.s., $j_n(\omega,.)$ converge vers $j_\infty(\omega,.)$ pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions continues sur les parties compactes de V .

PREUVE

En effet pour tout x d'une partie dénombrable dense, on peut appliquer le théorème de Doob. (se réferer à [10]). Donc en éliminant une partie de mesure nulle, p.s., la suite $j_n(\omega, x)$ est convergente quand x est dans Q .

On applique alors le résultat donné par ROCKAFELLAR dans [13] (théorème 10-6) : la famille $\{j_n(\omega,.)\}_{n \in N}$ est p.s. équicontinue en tout x de V , et il existe j_∞ p.s. convexe et continu, tel que j_∞ est p.s. la limite de j_n pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de V .

Si j'_∞ est un autre intégrant possédant les mêmes propriétés, on a p.s., pour tout x de Q, $j'_\infty(\omega,x) = j_\infty(\omega,x)$. j_∞ et j'_∞ étant continus, p.s. pour tout x de V, $j'_\infty(\omega, x) = j_\infty(\omega, x)$.

Remarque 1 : Si V est de dimension finie, la condition :

$$x \in Q \Longrightarrow \sup_n E\,|j_n(.,x)| < +\infty \text{ entraîne } x \in V \Longrightarrow \sup_n E\,|j_n(.,x)| < +\infty$$

En effet, tout x de V s'écrit comme combinaison convexe finie de points de Q, et $x \longrightarrow \sup_n E\,|j_n(.,x)|$ est convexe sur V.

Corollaire : Si pour tout x, la suite $\{j_n(.,x)\}_{n\in N}$ est uniformément intégrable, alors la suite $\{j_n\}_{n\in N\cup\{\infty\}}$ est aussi une martingale.

PREUVE

En effet pour tout x de V, $j_n(\omega, x)$ converge p.s. vers $j'_\infty(\omega,x)$ avec $j_n(.,x) \in E^{\mathcal{B}_n} j'_\infty(.,x)$, par [1C] (T 18, p 118). Or $j_n(\omega, x)$ converge p.s. vers $j_\infty(\omega, x)$. Donc pour tout x, $j_\infty(.,x)$ et $j'_\infty(.,x)$ sont équivalents. Alors pour tout x, $j_n(.,x) \in E^{\mathcal{B}_n} j_\infty(.,x)$.

Remarque 2 : Comme V est de dimension finie, il suffit de supposer que la suite $\{j_n(.,x)\}$ est uniformément intégrable pour tout x d'une partie dénombrable dense Q de V. En effet:

a) Si quand x est dans Q, $\sup_n E\,|j_n(.,x)|$ $+\infty$, par la remarque précédente, pour tout x, $\sup_n E\,|j_n(.,x)| < +\infty$.

b) Supposons que si une suite décroissante d'éléments de a, $(A_m)_{m\in N}$ est telle que si $p(A_m) \searrow 0$, alors quand x est dans Q, $\sup_n \int_{A_m} |j_n(\omega, x)|\,dp \to 0$. Soit x un élément de V.

x peut s'écrire comme combinaison convexe finie d'éléments de Q :

$$x = \sum_{i=1}^{p} t_i\, x_i \qquad \begin{cases} x_i \in Q & t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \quad 1 \leqslant i \leqslant p \ . \\ \sum t_i = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\sup_{n \in N} \int_{A_m} |j_n(\omega, x)|\, dp \leqslant \sum_i^p t_i \sup_{n \in N} \int_{A_m} |j_n(\omega, x_i)|\, dp$$

et quand :

$$m \longrightarrow +\infty, \quad \sup_n \int_{A_m} |j_n(\omega, x)|\, dp \longrightarrow 0 \ .$$

Remarque 3 : Nous ne nous occuperons pas ici de la manière dont varient les sous-différentiels. Pour plus de détails (en particulier sur les martingales multivoques, on se reportera à [22]) .

2) Sous-martingale duale.

On fait l'hypothèse :

a) Il existe x_1 élément de $L^{\mathcal{B}1}(V)$, avec :

$$j(., x_1(.)) \in L_1 \ .$$

b) Il exite α_0 élément de $L'^{a}(V')$ avec $j^*(., \alpha_0(.)) \in L_1$.

Cette hypothèse garantit que $I_{\mathcal{B}_n}$, $I^*_{\mathcal{B}_n}$, sont convexes propres et duales l'une de l'autre pour tout $n \in N \cup \{\infty\}$

Théorème 2 : Soit β_1 appartenant à $L'^{\mathcal{B}\infty}(V')$, tel que $I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\beta_1) < +\infty$.

Alors la suite $\{ j^*_{\mathcal{B}\, n}(., (E^{\mathcal{B}n}\beta_1)(.))\}_{n \in N}$ est une sous-martingale intégrable, convergeant p.s. vers χ élément de L_1 , avec $\chi(.) \leqslant j^*_{\mathcal{B}_\infty}(., \beta_1(.))$.
Si $I_{\mathcal{B}_\infty}$ est continu en x'_k élément de $L^{\mathcal{B}k}(V)$, alors $\chi(.) = j^*_{\mathcal{B}_\infty}(., \beta_1(.))$ et la convergence a lieu dans L_1 fort .

PREUVE

En effet :

$$I^*_{\mathcal{B}\, n}(E^{\mathcal{B}n}\beta_1) = \sup_{x \in L^{\mathcal{B}n}(V)} \langle \beta_1 , x \rangle - I(x) \ .$$

Or si : $m \geq n \; (m \in N \cup \{\infty\})$, $L^{\mathcal{B}_n}(V) \subset L^{\mathcal{B}_m}(V)$.

Donc, si $m \geq n$, $I^*_{\mathcal{B}_m}(E^{\mathcal{B}_m}\beta_1) \geq I^*_{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)$

Or si on se restreint à une partie B_n $\mathcal{B}_n$ mesurable, sachant que $1_{B_n}\, x_1$ est $\mathcal{B}_n$ mesurable, et appartient à $L^{\mathcal{B}_n}(V)$, que $1_{B_n}\, \alpha_0$ appartient à $L^{\mathcal{B}_n}(V')$, on pourra écrire de la même manière :

$$\text{si } m \geq n \; (m \in N \cup \{\infty\}) : \int_{B_n} j^*_{\mathcal{B}_m}(\omega, (E^{\mathcal{B}_m}\beta_1)(.))dp \geq \int_{B_n} j^*_{\mathcal{B}_n}(\omega, (E^{\mathcal{B}_n}\beta)(.))dp$$

On en déduit :

$$E^{\mathcal{B}_n}\, j^*_{\mathcal{B}_{n+1}}(., (E^{\mathcal{B}_{n+1}}\beta_1)(.) \geq j^*_{\mathcal{B}_n}(., (E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)\;(.))$$

De plus, comme :

$$I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\beta_1) < +\infty \quad , \quad \sup_{n \in N} \int j^*_{\mathcal{B}_n}(\omega, (E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(\omega))dp < +\infty .$$

Or :

$$j^*_{\mathcal{B}_n}(., (E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.)) \geq <(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.),\; x_1(.)> - E^{\mathcal{B}_n}\, \overset{*}{j}(., x_1(.))$$

Alors :

$$\left\{ X_n = j^*_{\mathcal{B}_n}(., (E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.)) - <(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.),\; x,(.)> - E^{\mathcal{B}_n}\, j(., x_1(.)) \right\}_{n \in N}$$

reste une sous-martingale, mais $X_n \geq 0$, et de plus, comme la martingale :

$$\left\{ Y_n(.) = <(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.),\; x,(.)> - E^{\mathcal{B}_n}\, \overset{*}{j}(., x_1(.)) \right\}_{n \in N}$$

converge p.s. et dans L_1 vers $<\beta,(.),\; x,(.)> - j_{\mathcal{B}_\infty}(., x_1(.))$

on aura nécessairement : $\sup E\,(X_n) < +\infty$

On applique alors le théorème 17 (p 117) de [10] : $\{X_n\}$ converge p.s. vers X_∞ élément de L_1 , et en conséquence $j^*_{\mathcal{B}_n}(., (E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.))$ converge p.s. vers $\mathcal{X}$ élément de L_1 .

Comme $j^*_{\mathcal{B}_n}(.,(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1)(.)) \leq E^{\mathcal{B}_n} j^*_{\mathcal{B}_\infty}(.,\beta_1(.))$, en appliquant le théorème desmartingales, $\chi \leq j^*_{\mathcal{B}_n}(.,\beta,(.))$.

Supposons $I_{\mathcal{B}_\infty}$ continu en x'_k élément de $L^{\mathcal{B}_k}(V)$.

Alors par le corollaire 1 du théorème III-5-6, on aura, pour $n \geq k$:

$$I^*_{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1) = \inf_{\substack{E^{\mathcal{B}_n}\alpha = E^{\mathcal{B}_n}\beta_1 \\ \alpha \in L'^{\mathcal{B}_\infty}(V')}} I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha)$$

et il existe α_n élément de $L'^{\mathcal{B}_\infty}(V')$, tel que :

$$\begin{cases} E^{\mathcal{B}_n}\alpha_n = E^{\mathcal{B}_n}\beta_1 \\ I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha_n) = I^*_{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1) \end{cases}$$

Alors :

$$I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha_n) - \langle\alpha_n , x'_k\rangle = I^*_{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1) - \langle\beta_1, x'_k\rangle \quad \text{pour} \quad n \geq k$$

Comme la suite $\left\{I^*_{\mathcal{B}_n}(E^{\mathcal{B}_n}\beta_1) - \langle\beta_1, x'_k\rangle\right\}_{n\in N}$ reste bornée, la suite

$$\left\{I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha_n) - \langle\alpha_n, x'_k\rangle\right\}_{n\geq k}$$

reste bornée supérieurement .

Comme I est continu en x'_k , la suite $\{\alpha_n\}_{n\geq k}$ est faiblement relativement compacte dans $L'^{\mathcal{B}_\infty}(V')$ par [11] (p 41)

En raisonnant comme pour le corollaire du théorème I-2-1 et la remarque 3 qui le suit, soit α_∞ un élément de $L'^{\mathcal{B}_\infty}(V')$ limite d'une sous suite (α_{n_s}) à la fois dans $L'^{\mathcal{B}_\infty}(V')$ faible et dans $L_1^{\mathcal{B}_\infty}(V')$ faible.

Alors comme pour $n_s \geqslant n$, $E^{\mathcal{B}_n} \alpha_{n_s} = E^{\mathcal{B}_n} \beta_1$, on aura (l'opérateur $E^{\mathcal{B}_n}$ étant continu sur $L_1^{\mathcal{B}_\infty}(V')$) : $E^{\mathcal{B}_n} \alpha_\infty = E^{\mathcal{B}_n} \beta_1$ et en appliquant un théorème de martingale vectorielle : (le théorème donné en [9] s'applique car V' est séparable et réflexif) : $\alpha_\infty = \beta_1$

On aura donc, puisque $I^*_{\mathcal{B}_\infty}$ est s.c.i. :

$$I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\beta_1) \leqslant \liminf I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha_{n_s}) \ .$$

Or

$$I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\beta_1) \geqslant E(\mathcal{X}) \geqslant \limsup I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\alpha_{n_s}) \ .$$

On a donc $E(\mathcal{X}) = I^*_{\mathcal{B}_\infty}(\beta_1)$, et en conséquence :

$$\mathcal{X} = j^*_{\mathcal{B}_\infty}(\cdot, \beta_1(\cdot)).$$

On applique alors le théorème 17 b) et c) de [10] (p 117).

On a donc bien convergence p.s. et dans L_1 de la suite $\left\{j^*_{\mathcal{B}_n}(\cdot, E^{\mathcal{B}_n}\beta_1(\cdot))\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ vers $j^*_{\mathcal{B}_\infty}(\cdot, \beta_1(\cdot))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUMANN R. : Measurable utility and measurable choice theorem
La décision C.N.R.S. 15-26.

[2] CASTAING C. : Sur les multiapplications mesurables.
Thèse 1967 Faculté des Sciences de Caen.

[3] CASTAING C. : Proximité et mesurabilité faible.
Séminaire d'Analyse unilatérale Montpellier 1968.

[4] CASTAING C. : Quelques résultats de compacité liés à l'ingration C.R.A.S.
1970 p 1 732-1 735 .

[5] CASTAING C. : Le théorème de Dunford-Pettis généralisé.
C.R.A.S. 1969 p 327-329.

[6] DEBREU G. : Integration of correspondences.
Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on probability and statistics. University of California Press 1968
p 351-372.

[7] DEBREU G. SCHMEIDLER D. : The Radon-Nikodym derivative of a correspondence.
CORE Discussion Paper n° 7006.

[8] DUNFORD N. SCHWARTZ J.T. : Linear operators. Part I Interscience.

[9] METIVIER M. : Martingales à valeurs vectorielles.
Annales de l'Institut Fourier. Vol. 17 n° 2 1967 p 175-208.

[10] MEYER P.A. : Probabilités et potentiel Hermann (Paris) , Blaisdell(Boston).

[11] MOREAU J.J. : Fonctionnelles convexes.
Séminaire d'équations aux dérivées partielles
Collège de France 1966-1967.

[12] NEVEU J. : Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.

[13] ROCKAFELLAR R.T. : Integrals which are convex functionals.
Pacific J. of mathematics vol. 24-3, 1968, p 525-539.

[14] ROCKAFELLAR R.T. : Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. j. of mathematics analysis and applications.
28-1, 1969, p 4-25.

[15] ROCKAFELLAR R.T. : Weak compactness of level sets of integral functionals
Proceedings of the Liège Colloquium on Functional Analysis 1970, (H.G. Garnir ed.)

[16] ROCKAFELLAR R.T. : Convex integral functionals and duality.
To appear in : contribution to non linear Functional Analysis.
Zarantonello (ed) , 1971, Academic Press.

[17] ROCKAFELLAR R.T. : Convex Analysis.
Princeton University Press.

[18] VALADIER M. : Contribution à l'Analyse convexe.
Thèse. Faculté des Sciences de Montpellier 1970.

[19] VALADIER M. : Intégration d'ensemble convexes fermés, notamment d'épigraphes.
I.R.I.A. AUT 7007.

[20] VALADIER M. : Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie.
C.R.A.S., 1968 p 14-16.

[21] VALADIER M. : Multiapplications mesurables à valeurs convexes compactes
j. Mathématiques pures et appliquées. 1971 p 265-297.

[22] VAN CUTSEM B. : Martingales de multiapplications à valeurs convexes compactes.
C.R.A.S. 1969 p 429-432.

[23] VAN CUTSEM B. : Thèse. Faculté des Sciences de Grenoble 1971.

B

Conjugate convex functions in optimal stochastic control

B

Conjugate Convex Functionals in Optimal Stochastic Control

by

Jean-Michel Bismut

Ingenieur au Corps des Mines

Personal address: 4, rue des Mariniers
Appt 107
75014 Paris 14^{o}
FRANCE

This paper has been written after the second part of a thesis to be submitted at the Faculté des Sciences de Paris. It has been partially supported by I. R. I. A. (Institut de Recherches en Informatique et Automatique 78 Rocquencourt FRANCE)

Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control

This paper is concerned with the applications of general methods of convex analysis to problems of optimal stochastic control. In particular we will define what dual problems are in optimal stochastic control, and what are the coextremality conditions for dual optimums. The problem that we solve here being more general than a purely deterministic one, the results which are given include the results of deterministic control.

The methods and the expositions of the results are very similar to the corresponding methods used by Rockafellar in [13], to which we will refer constantly.

One of the apparent shortcomings of the method is that, using strictly variational methods, it must suppose that the information σ-fields are fixed. In some cases, where the information σ-fields are generated by the state variable, it is possible to apply the duality methods to a modified problem. But they will not give us the strong results it is possible to obtain, by studying more specialized problems, like existence of optimal Markov controls. We develop other methods in [2] for this type of problem. The obvious reason is that, by developing a formalism applicable to purely deterministic cases as to stochastic cases, it does not use the stochastic features of the problem in some purely stochastic cases.

Due to their very technical nature, existence results will not be given here, but are developed extensively in [1] and [2].

The results of probability theory which we use can be found in [7] and [8], which we will take as references.

I **Notations**

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ is a complete probability space.

$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ is an increasing sequence of complete sub σ-fields of $\mathscr{F}$, which has the following properties:

a) It is right-continuous. ([7] IV - 30)

b) It has no time of discontinuity ([7] VII - D39)

This last assumption is not strictly necessary, but we make it to simplify the results.

$\mathscr{T}$ is the σ-field of $\Omega \times [0, +\infty[$ of the well-measurable sets ([7] VIII D. 14). $\mathscr{T}^*$ is its completion for the measure $dP \otimes dt$ (*) .

V is a n dimensional vector space $(n \geq 1)$

w is a m dimensional Brownian motion on $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, non anticipating relative to $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$. w may be defined equivalently as a square-integrable a. s. continuous martingale on $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ with values in R^m, such that, by writing $w = (w_1, \ldots, w_m)$, one has, with the notations of [8] :

$$d \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij} \, dt \tag{1.1}$$

This definition is correct by the result of P. Levy ([8] p. 110). Moreover, we extend the definitions for $m = 0$, by taking conventionally w as the one dimensional null process.

(*) For our purpose $\mathscr{T}$ could have been only the σ-field of non-anticipating sets.

w having continuous paths, formula (1. 1) and the results of [8] show that it is possible to define unambiguously the stochastic integral of a $\mathscr{T}^*$ class of $\mathscr{T}$-measurable processes H such that for any t, one has:

$$(1.2) \qquad E \int_0^t |H_s|^2 \, ds < +\infty .$$

One can use for that purpose the "classical" definitions of the stochastic integral of [8] (p. 80 Remark) or the definition of [8] (p. 86 Theorem 7)

More generally, we could have supposed that w is only a square-integrable martingale, such that $d\langle w_i, w_j\rangle$ is a. s. absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $[0, +\infty[$, by taking the "classical" definition of the stochastic integral for well-measurable processes. The reader will do this extension easily.

For any stopping time σ , L_2^σ is the space of square-integrable $\mathscr{F}_\sigma$-measurable random variables, with values in V .

S is a a. s. non null stopping time, a. s. bounded by a finite constant T .

L_{21} is the space of the $dP \otimes dt$ classes u of $\mathscr{T}^*$-measurable functions with values in V , such that:

$$(1.3) \qquad E \left(\int_0^S |u_t| \, dt \right)^2 < +\infty$$

We define then a norm on L_{21} by:

$$\|u\|_{21} = \left\{ E \left(\int_0^S |u_t| \, dt \right)^2 \right\}^{1/2} \tag{1.4}$$

$L_{2\infty}$ is the space of the $dP \otimes dt$ classes y of $\mathscr{T}^*$-measurable functions with values in V , such that:

$$E\left(\operatorname*{sup\,ess}_{0 \leq t \leq S} |x_t|^2 \right) < +\infty \tag{1.5}$$

We define then a norm on $L_{2\infty}$ by:

$$\|x\|_{2\infty} = \left\{ E\left(\operatorname*{sup\,ess}_{0 \leq t \leq S} |x_t|^2 \right) \right\}^{1/2} \tag{1.6}$$

L_{22} is the space of the $dP \otimes dt$ classes H of $\mathscr{T}^*$-measurable functions with values in V^m such that:

$$E \int_0^S |H_t|^2 \, dt < +\infty \tag{1.7}$$

We define then a norm on L_{22} by:

$$\|H\|_{22} = \left(E \int_0^S |H_t|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{1.8}$$

By convention, we assume that the elements of L_{21}, $L_{2\infty}$, L_{22} are equal to 0 for $t > S$.

Duality brackets are then defined:

a) between L_2^σ and L_2^σ by the standard scalar product.

b) between L_{21} and $L_{2\infty}$ by:

(1.9) $$E \int_0^S \langle u_t, y_t \rangle \, dt$$

c) between L_{22} and L_{22} by:

(1.10) $$E \int_0^S \langle H_t, H_t' \rangle \, dt .$$

We consider on the previous spaces only locally convex topologies compatible with the duality previously defined. In particular, L_2^σ and L_{22} being Hilbert spaces, the norm topology is compatible with the duality.

$\underline{L}$ is the space of square-integrable martingales with values in V stopped at S, null at 0. $\underline{L}$ can be identified to a closed subspace of L_2^S, on which we put the induced topology.

W is the subspace of $\underline{L}$ generated by the stochastic integrals relative to w of elements of L_{22}. W is a stable space, in the sense of [8] (p. 80 no. 4). Let $W^\perp$ be the orthogonal of W in $\underline{L}$ in the sense of [8] (p. 81 Theorem 5).

We suppose then that $W^\perp$ is decomposed in the sum of two orthogonal subspaces of martingales W_1 and W_2:

(1.11) $$W^\perp = W_1 \oplus W_2$$

Practically W_1 will be either $W^{\perp}$, either $\{0\}$. This decomposition will be justified afterwards. In particular, if $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ is the family of σ-fields generated by w, a result of Ito ([8] p. 135) shows that $W^{\perp} = \{0\}$.

Proposition I-1: Let $(x_0, \dot{x}, H, M)$ and $(p_0, \dot{p}, H', M')$ be two elements of $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^{\perp}$. Then, if one defines the right continuous processes x and p by:

$$(1.12) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t \dot{x}_s \, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_t \\[2ex] p_t = p_0 + \int_0^t \dot{p}_s \, ds + \int_0^t H'_s \cdot dw_s + M'_t \end{cases}$$

then the process N_t defined by:

$$(1.13) \qquad N_t = \langle p_t, x_t \rangle - \langle p_0, x_0 \rangle - \int_0^t \langle \dot{p}_s, x_s \rangle \, ds - \int_0^t \langle p_s, \dot{x}_s \rangle \, ds$$

$$- \int_0^t \langle H_s, H'_s \rangle \, ds - \langle M_t, M'_t \rangle$$

is a martingale, null at the origin.

Proof: The formula of change of variables in [8] p. 111 on local semi-martingales proves that:

$$(1.14) \qquad \langle p_t, x_t\rangle = \langle p_0, x_0\rangle + \int_0^t \langle \dot{p}_s, x_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle p_s, \dot{x}_s\rangle\, ds$$

$$+ \int_0^t \langle H_s, H'_s\rangle\, ds + \int_0^t d[M_s, M'_s] + \int_0^t \langle x_s, H'_s\rangle \cdot dw_s$$

$$+ \int_0^t \langle p_s, H_s\rangle . dw_s + \int_0^t \langle x_{s-}, dM'_s \rangle + \int_0^t \langle p_{s-}, dM_s\rangle \quad .$$

Moreover, we know that

$$\langle M_t, M'_t\rangle - \int_0^t d[M_s, M'_s]$$

is a martingale. (1.14) proves then that N is a local martingale, stopped at S. What is left to be proved is that for any t in [0, T], $\{N_{t\wedge S'}\}_{S' \text{ stopping time}}$ is a uniformly integrable family of random variables.

Remark 2 of VI in [7] proves that:

$$(1.15) \quad \begin{cases} E\left(\sup_{0\le t\le T} |M_t|^2\right) \le 4E|M_s|^2 \\ E\left(\sup_{0\le t\le T} |M'_t|^2\right) \le 4E|M'_s|^2 \\ E\left(\sup_{0\le t\le T} \left|\int_0^t H_s \cdot dw_s\right|^2\right) \le 4\|H\|_{22}^2 \\ E\left(\sup_{0\le t\le T} \left|\int_0^t H'_s \cdot dw_s\right|^2\right) \le 4\|H\|_{22}^2 \end{cases} \quad .$$

One deduces immediately that:

$$(1.16)\quad \begin{cases} E\left(\sup_{0\le t\le T} |x_t|^2\right) < +\infty \\ E\left(\sup_{0\le t\le T} |p_t|^2\right) < +\infty \end{cases}$$

One has then:

$$(1.17)\qquad |\langle p_t, x_t\rangle| \le \sup_{0\le u\le T} |p_u| \sup_{0\le u\le T} |x_u| \ .$$

In the same way, one has:

$$(1.18)\quad \begin{cases} \left|\int_0^t \langle \dot{p}_s, x_s\rangle\, ds\right| \le \left(\int_0^t |\dot{p}_s|\, ds\right) \sup_{0\le u\le T} |x_u| \\ \left|\int_0^t \langle p_s, \dot{x}_s\rangle\, ds\right| \le \left(\int_0^t |\dot{x}_s|\, ds\right) \sup_{0\le u\le T} |p_u| \\ \left|\int_0^t \langle H_s, H'_s\rangle\, ds\right| \le \left(\int_0^t |H_s|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t |H'_s|^2\, ds\right)^{1/2} \\ |\langle M_t, M'_t\rangle| \le \sup_{0\le u\le T} |M_u| \sup_{0\le u\le T} |M'_u| \end{cases}$$

The assumptions that we have made prove then that each of the random variables on the right-hand side of (1.18) is integrable. (1.17) and (1.18) prove then that:

$$(1.19)\qquad E\left(\sup_{0\le u\le T} |N_u|\right) < +\infty$$

The result is then proved ■

Corollary: Under the assumptions of proposition I-1, one has:

$$(1.20)\quad E(\langle p_S, x_S\rangle = E(\langle p_0, x_0\rangle) + E\int_0^S (\langle \dot{p}_t, x_t\rangle + \langle p_t, \dot{x}_t\rangle)\, dt$$

$$+ E\int_0^S \langle H_t, H_t'\rangle\, dt + E(\langle M_S, M_S'\rangle)$$

Proof: N_t being a martingale, N_T has a null mean, and $N_T = N_S$. The result follows. ■

II The problem of control

A Preliminaries

Let L be a normal convex integrand in the sense of [10], defined on $(\Omega \times [0,+\infty[\,) \times V \times V \times V^m$, $\Omega \times [0,+\infty[$ being considered as the measured space:

$$(\Omega \times [0,+\infty[\,,\ \mathscr{T}^*,\ dP \otimes dt\,)\ .$$

Let L^* be the dual integrand of L. L^* is then normal by [10] .

Let M be defined by:

$$M(\omega, t, p, s, H') = L^*(\omega, t, s, p, H') \ . \tag{2.1}$$

Let ℓ_0 and ℓ_S be two convex lower semi-continuous functionals defined respectively on L_2^0 and L_2^S with values in $R \cup \{+\infty\}$, and non identically $+\infty$. Let ℓ_0^* and ℓ_S^* be their duals. One defines ℓ and m on $L_2^0 \times L_2^S$ by:

$$\begin{cases} \ell(c_0, c_S) = \ell_0(c_0) + \ell_S(c_S) \\ m(c_0, c_S) = \ell_0^*(c_0) + \ell_S^*(-c_S) \end{cases} \tag{2.2}$$

We make the following assumptions on L and M :

II-1: One can find (p_0, s_0, H_0') in $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22}$ such that:

$$E \int_0^S M(\omega, t, p_0(\omega,t), s_0(\omega,t), H_0'(\omega,t)\,)\, dt < +\infty \tag{2.3}$$

II-2: One can find (x_0, y_0, H_0) in $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22}$ such that

$$(2.4) \qquad E \int_0^S L(\omega, t, x_0(\omega, t), y_0(\omega, t), H_0(\omega, t))dt < +\infty$$

Let us notice here that all the spaces of measurable functions which have been introduced are decomposable in the sense of [10] , and this will entitle us to use the results of Rockafellar in [10] and [11] .

B The problem of control

We define R, R_1 and R_2 by:

$$(2.5) \quad \begin{cases} R = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^{\perp} \\ R_1 = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W_1 \\ R_2 = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W_2 \end{cases}$$

To any $(x_0, \dot{x}, H, M)$ in R we associate the process x_t by:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \dot{x}_s \, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_t \; .$$

The proof of proposition I-1 shows that:

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t|^2 \right) < +\infty \; .$$

x defines then an element of $L_{2\infty}$.

Moreover, the general properties of stochastic processes say that decomposition (2. 6) is unique. We can identify then R to a space of right-continuous stochastic processes.

In the same way, R_1 and R_2 will be identified to the stochastic processes that their elements define.

Definition II-1: $\Phi_{\ell, L}$ is the functional defined on R by:

(2. 6)
$$x = (x_0, \dot{x}, H, M) \xrightarrow[\Phi_{\ell, L}]{} \begin{cases} \ell(x_0, x_S) + E \int_0^S L(\omega, t, x(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t))\, dt & \text{if } x \in R_1 \\ + \infty & \text{if } x \notin R_1 \end{cases}$$

$\Phi_{m, M}$ is the functional defined on R by:

(2. 7)
$$p = (p_0, \dot{p}, H', M') \xrightarrow[\Phi_{m,M}]{} \begin{cases} m(p_0, p_S) + E \int_0^S M(\omega, t, p(\omega, t), \dot{p}(\omega, t), H'(\omega, t))\, dt & \text{if } p \in R_2 \\ + \infty & \text{if } p \notin R_2 \end{cases}$$

II-1 and II-2 prove that $\Phi_{\ell, L}$ and $\Phi_{m, M}$ are defined unambiguously. Moreover, they are obviously convex on R.

Definition II-2; The problem of control consists in the minimization of $\Phi_{\ell, L}$ on R.

The dual problem of control consists in the minimization of $\Phi_{m, M}$ on R . ■

B

The distinction between a problem of control and its dual is arbitrary. The reader will see easily that the dual problem of the dual problem of control is the initial problem of control.

Example II-1: We assume that $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ is the family of σ-algebras generated by w. The continuity of the martingales relative to $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ proved in [8] (p. 135), proves that the assumptions made in I are satisfied. Moreover, the same results show that $W^{\perp} = \{0\}$.

Let (A, B, C, D) be a family of $\mathscr{T}^*$ measurable family of matrices bounded on $\Omega \times [0,T]$. Let U_d be a compact convex set of a finite-dimensional space U.

For u $\mathscr{T}^*$ measurable with values in U_d, let Z be the solution of:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} dZ = (AZ + Cu)\,dt + (BZ + Du).dw \\ Z_0 = 0 \end{cases}$$

(For general existence and uniqueness results see [1].)

Let K be a positive normal finite convex integrand on

$$(\Omega \times [0, +\infty[\,) \times V \times U \quad ,$$

$\Omega \times [0, +\infty[$ being considered as the measured space

$$(\Omega \times [0, +\infty[\, , \ \mathscr{T}^*, \ dP \otimes dt)$$

One wants to minimize:

$$(2.9) \qquad E \int_0^T K(\omega, t, Z(\omega, t), u(\omega, t))\, dt \quad .$$

Let (L,ℓ) be defined by:

$$
(2.10)\quad
\begin{cases}
L(\omega,t,x,y,H) = \begin{cases} K(\omega,t,x,u) & \text{if } \begin{cases} y = Ax+Bu \\ H = Cx+Du \end{cases} \\ +\infty \quad \text{elsewhere} & \text{with } u \in U_d \end{cases} \\[2ex]
\ell(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_0 = 0 \text{ a.s} \\ +\infty & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{cases}
$$

It is then equivalent to minimize $\Phi_{\ell,L}$ on R: this comes from the fact that it is proved in [1]that if Z is a solution of (2.8), then

$$E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z_T|^2\right) < +\infty \quad .$$

Consequently (AZ + Cu) and (BZ + Du) are respectively in L_{21} and L_{22}.

Example II-2: In example II-1, let us assume now that w is replaced by η, where η is a square integrable martingale such that:

$$(2.11)\qquad d\langle \eta_i, \eta_j\rangle = r_{ij}(t)\, dt \quad .$$

By the adjunction procedure (generalized to the multi-dimensional case) given in [4] (p. 449), one can find H^0 defined on $[0,+\infty[$, with values in V^m, and a Brownian motion w such that:

$$(2.12)\quad \text{-for any } T > 0\ ,\quad \int_0^T |H_s^0|^2\, ds < +\infty \quad .$$

$$(2.13) \qquad -\eta_t = \int_0^t H_s^0 \cdot dw_s \quad .$$

One changes then the definition of L into:

$$(2.14) \qquad \begin{cases} L(\omega, t, x, y, H) = K(\omega, t, x, u) & \text{when } \begin{cases} y = Ax + Cu \\ H = (Bx + Du)\cdot H^0 \end{cases} \\ \\ +\infty \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ will be the family of σ-fields generated by w.

<u>Example II-3:</u> Let f, σ, and K be functions defined on $\Omega \times [0,T] \times V \times U$ with values respectively in V, V^m and R. U is assumed here to be a compact metrisable space. We assume moreover that:

- For a. s. ω $(f(\omega,\cdot), \sigma(\omega,\cdot), K(\omega,\cdot))$ are continuous on $[0,T]\times V \times U$.

- For every (x, u) in $V \times U$, $(f(\cdot, x, u), \sigma(\cdot, x, u), K(\cdot, x, u))$ are $\mathscr{T}^*$ measurable processes.

- One can find $k \geq 0$ such that for every (x, u) in $V \times U$, one has a. s. :

$$(2.15) \qquad |f(\omega, t, x, u)| + |\sigma(\omega, t, x, u)| + |K(\omega, t, x, u)|^{\frac{1}{2}} \leq k(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

- One can find $k' \geq 0$ such that for any (x, x', u) in $V \times V \times U$, one has a. s. :

$$(2.16) \qquad |f(\omega, t, x, u) - f(\omega, t, x', u)| + |\sigma(\omega, t, x, u) - \sigma(\omega, t, u', u)| \leq K'|x'-x|$$

- K is positive

For u $\mathscr{T}$*measurable, let x be the only solution of:

$$(2.17) \quad \begin{cases} dx = f(\omega, t, x, u_t)\,dt + \sigma(\omega, t, x, u_t)\,dw \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

By using the methods of Gikhman - Shorokhod in [5], existence and uniqueness of the solution of (2.17) follow immediately. Moreover one will have:

$$(2.18) \qquad E\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t|^2\Big) < +\infty \quad .$$

Then (2.15) will prove that $f(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))$, $\sigma(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))$ are in L_{21} and L_{22} respectively.

The goal of the problem of control is to find u minimizing:

$$(2.19) \qquad E\int_0^T K(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))\,dt \quad .$$

We change the problem in the following way (the method is very similar to the treatment of Example 3 in [13]): let L be defined by:

$$L(\omega, t, x, y, H) = \inf K(\omega, t, x, u)$$

$$(2.20) \qquad \begin{cases} f(\omega, t, x, u) = y \\ \sigma(\omega, t, x, u) = H \end{cases}$$

giving to this expression the value $+\infty$ if there is no u such that:

$$(2.21) \qquad \begin{cases} f(\omega, t, x, u) = y \\ \sigma(\omega, t, x, u) = H \end{cases}$$

Then for any (ω, t), $L(\omega, t, \cdot)$ is lower semi-continuous. Moreover, if (x,y,H) are $\mathscr{T}^*$measurable functions, then $L(\omega, t, x(\omega, t), y(\omega, t), H(\omega, t))$ is $\mathscr{T}^*$ measurable: this follows from the fact that

$$(\omega, t) \xrightarrow[\Gamma]{} \{u : \begin{array}{l} f(\omega, t, x(\omega, t), u) = y(\omega, t) \\ \sigma(\omega, t, x(\omega, t), u) = H(\omega, t) \} \end{array}$$

is a $\mathscr{T}^*$measurable correspondence by theorem 2 of [11], because its graph is $\mathscr{T}^* \otimes B(U)$ measurable. If u_n is a countable family of $\mathscr{T}^*$ measurable selections of Γ, such that $\{u_n(\omega, t)\}$ is dense in $\Gamma(\omega, t)$ for any (ω, t), then:

$$(2.22) \qquad L(\omega, t, x, y, H) = \inf_n K(\omega, t, x(\omega, t), u_n(\omega, t)$$

because of the continuity of K.

Besides,

$$(\omega, t) \xrightarrow[\Delta]{} \{x, f(\omega, t, x, u), \sigma(\omega, t, x, u) ; u \in U_d \}$$

is a $\mathscr{T}^*$ measurable correspondance, because, if $\{x_n, u_n\}_{n \in N}$ is a dense countable family in $V \times U$,

$$\{x_n, f(\omega, t, x_n, u_n), \sigma(\omega, t, x_n, u_n\}_{n \in N}$$

is dense in $\Delta(\omega, t)$ for every (ω, t).

By writing: $W_1 = \{0\}$, the given control problem is equivalent to minimizing the integral:

$$(2.23) \qquad E\int_0^T L(\omega, t, x(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t))\, dt$$

for the x of R_1 satisfying $x(0) = x_0$.

Indeed, the integral is well-defined, by the measurability of $L(\omega, t, x(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t))$ and its positivity. Moreover, by using the criteria of theorem 2 of [11], it can be seen that the integral is finite if and only if one can find u $\mathscr{T}^*$ measurable with values in U such that:

$$(2.24) \qquad dP \otimes dt \text{ a.s.:} \qquad \begin{aligned} f(\omega, t, x(\omega,t), u(\omega,t)) &= \dot{x}(\omega,t) \\ \sigma(\omega, t, x(\omega,t), u(\omega,t)) &= H(\omega,t) \end{aligned}$$

If for $dP \otimes dt$ almost every (ω, t), $L(\omega, t, \cdot)$ is convex, then L is a normal convex integrand, by the measurability of Δ, because we can apply the criteria a) and b) of I-[11].

In this case, the approach that we have taken can be used: one checks in particular that assumptions II-1 and II-2 are satisfied; this follows from the inequalities:

$$(2.25) \qquad 0 \leq L(\omega, t, x, y, H) \leq k(1 + |x|^2)$$

The first part of the inequality gives then:

$$(2.26) \qquad M(\omega, t, 0, 0, 0) \leq 0 \quad .$$

(2.25) and (2.26) prove that II-1 and II-2 are satisfied.

III Perturbation methods

One defines a duality between R (which we have identified to a space of right continuous stochastic processes) and $R' = L_{2\infty} \times L_2^S$ by:

$$(3.1) \qquad \{x = (x_0, \dot{x}, H, M), \ (y, b)\} \longrightarrow E \int_0^S \langle \dot{x}_t, y_t \rangle \, dt + E\langle x_S, b \rangle .$$

This duality defines on R and R' a locally convex topology, which is Hausdorff:

- indeed if for any (y, b) in R', $\langle x, (y, b) \rangle = 0$ then obviously $\dot{x} = 0$ $x_S = 0$. Then x being a martingale stopped at S is null and $x_0 = 0$, $H = 0$ and $M = 0$.

- if for any x in R, $\langle x, (y, b) \rangle = 0$, then $y = 0$. Moreover, the process $E^{\mathscr{F}_t} b$ is in R. Then, obviously, $b = 0$.

<u>Definition III-1:</u> For (y, b) in R', we define the functional $\Phi^{y,b}_{\ell, L}$ on R by:

$$(3.2) \qquad x = (x_0, \dot{x}, H, M) \xrightarrow[\Phi^{y,b}_{\ell,L}]{} \begin{cases} \ell(x_0, x_S - b) + E \int_0^S L(\omega, t, (x+y)(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t)) dt \\ \qquad \text{if } x \text{ is in } R_1 \\ +\infty \quad \text{elsewhere.} \end{cases}$$

We define in the same way the functional $\Phi^{y,b}_{\ell, L}$ on R by:

$$(3.2') \qquad p = (p_0, \dot{p}, H', M) \xrightarrow[\Phi^{y,b}_{m,M}]{} \begin{cases} m(p_0, p_S - b) + E \int_0^S M(\omega, t, (p+y)(\omega, t), \dot{p}(\omega, t), H(\omega, t)) dt \\ \qquad \text{if } p \text{ is in } R_2 \\ +\infty \quad \text{elsewhere.} \ \blacksquare \end{cases}$$

$\Phi^{y,b}_{\ell,L}$ and $\Phi^{y,b}_{m,M}$ are then convex functionals on R. One defines then $\varphi_{\ell,L}$ and $\varphi_{m,M}$ on R' by:

(3. 3)
$$\begin{cases} \varphi_{\ell,L}(y,b) = \inf\limits_{x\in R} \Phi^{y,b}_{\ell,L}(x) \\ \\ \varphi_{m,M}(y,b) = \inf\limits_{p\in R} \Phi^{y,b}_{m,M}(p) \end{cases}$$

<u>Theorem III-1:</u> $\varphi_{\ell,L}$ and $\varphi_{m,M}$ are convex functionals on R' and their duals are defined by:

(3. 4)
$$\begin{cases} \varphi^*_{\ell,L} = \Phi_{m,M} \\ \\ \varphi^*_{m,M} = \Phi_{\ell,L} \end{cases}$$

In the same way one has:

(3. 5)
$$\Phi^*_{\ell,L}(y,b) = \liminf_{(y',b')\to(y,b)} \varphi_{m,M}(y',b')$$

except in the case where $\Phi_{\ell,L}$ is identically $+\infty$, and where $\varphi_{m,M}$ is equal to $+\infty$ on a neighborhood of (y,b) (the topology is any topology compatible with the duality (R,R')). One has the corresponding result for $\Phi^*_{m,M}$.

<u>Proof:</u> This result is closely related to theorem 3 of [13], given by Rockafellar. We will prove only its first part, the second following from general convex analysis results as used in [13].

For p in R, one must calculate:

$$(3.6) \qquad \varphi^*_{\ell,L}(p) = \sup_{\substack{x \in R_1 \\ (y,b) \in R'}} E\int_0^S \langle \dot{p}_t, y_t\rangle \, dt + E\langle p_S, b\rangle$$

$$- E\int_0^S L(\omega, t, (x+y)(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t)) \, dt$$

$$- \ell_0(x_0) - \ell_S(x_S - b)$$

But x defining an element of $L_{2\infty}$, one has then:

$$(3.7) \qquad \varphi^*_{\ell,L}(p) = \sup_{\substack{x \in R_1 \\ (z,b') \in L_{2\infty} \times L_2^S}} E\int_0^S \langle \dot{p}_t, z_t\rangle dt - E\int_0^S \langle \dot{p}_t, x_t\rangle \, dt - E\langle p_S, b'\rangle$$

$$+ E\langle p_S, x_S\rangle - E\int_0^S L(\omega, t, z(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t)) \, dt$$

$$- \ell_0(x_0) - \ell_S(b')$$

But x in R_1 and p in R may be written:

$$(3.8)\qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t \dot{x}_s\, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_{1t} & M_1 \in W_1 \\ p_t = p_0 + \int_0^t \dot{p}_s\, ds + \int_0^t H'_s \cdot dw_s + M'_{1t} + M'_{2t} & M'_1 \in W_1 \\ & M'_2 \in W_2 \end{cases}$$

By proposition I-1, and the definition of R, R_1 and R_2, one has:

$$(3.9)\qquad E\langle p_S, x_S\rangle = E\langle p_0, x_0\rangle + E\int_0^S \langle \dot{p}_t, x_t\rangle\, dt + E\int_0^S \langle p_t, \dot{x}_t\rangle\, dt$$

$$+ E\int_0^S \langle H_t, H'_t\rangle\, dt + E\langle M_{1S}, M'_{1S}\rangle$$

One deduces then:

$$(3.10)\qquad \varphi^*_{\ell, L}(p) = \sup_{M_1 \in W_1} E\langle M'_{1S}, M_{1S}\rangle + \sup_{\substack{(\dot{x}, H, z)\\ \in L_{21} \times L_{22} \times L_{2\infty}}} E\int_0^S \langle \dot{p}_t, z_t\rangle\, dt$$

$$+ E\int_0^S \langle p_t, \dot{x}_t\rangle\, dt + E\int_0^S \langle H'_t, H_t\rangle\, dt$$

$$- E\int_0^S L(\omega, t, z(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t))\, dt$$

$$+ \sup_{(x_0, b') \in L_2^0 \times L_2^S} E\langle p_0, x_0\rangle - E\langle p_S, b'\rangle - \ell_0(x_0) - \ell_S(b') .$$

But one has:

$$(3.11) \qquad \sup_{M_1 \in W_1} E\langle M'_{1S}, M_{1S}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } M'_1 = 0 . \\ +\infty & \text{if } M'_1 \neq 0 . \end{cases}$$

Moreover the results of Rockafellar in [10], which can be applied, because all the considered spaces are decomposable, and because of assumptions II-1 and II-2, prove that:

$$(3.12) \qquad \sup_{(\dot{x}, H, z) \in L_{21} \times L_{22} \times L_{2\infty}} E\int_0^S \langle \dot{p}_t, z_t\rangle \, dt + E\int_0^S \langle p_t, \dot{x}_t\rangle \, dt$$

$$+ E\int_0^S \langle H'_t, H_t\rangle \, dt - E\int_0^S L(\omega, t, z(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t)) \, dt$$

$$= E\int_0^S L^*(\omega, t, \dot{p}(\omega, t), p(\omega, t), H'(\omega, t)) \, dt$$

and this last quantity is never $-\infty$. Finally, one has:

$$(3.13) \qquad \sup_{(x_0, b') \in L_2^0 \times L_2^S} E\langle p_0, x_0\rangle - E\langle p_S, b'\rangle - \ell_0(x_0) - \ell_S(b')$$

$$= \ell_0^*(p_0) + \ell_S^*(-p_S)$$

and this last quantity is never $-\infty$.

By adding (3.11), (3.12) and (3.13), one finds:

$$(3.14) \qquad \varphi^*_{\ell, L}(p) = \Phi_{m,M}(p) .$$

The second part of (3. 4) will be proved in the same way. ■

<u>Remark:</u> This result proves that $\Phi_{\ell, L}$ and $\Phi_{m,M}$ are lower-semi continuous on R for any topology compatible with the duality (R, R').

IV Duality of infima

When x is in R_1 and p in R_2, one has:

$$(4.1) \qquad \ell(x_0, x_S) + m(p_0, p_S) \geq E\langle x_0, p_0\rangle - E\langle x_S, p_S\rangle$$

Moreover, one will have:

$$(4.2) \qquad E\int_0^S L(\omega, t, x(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t)\ )\ dt\ +$$

$$+ E\int_0^S M(\omega, t, p(\omega, t), \dot{p}(\omega, t), H'(\omega, t)\ )\ dt$$

$$\geq E\int_0^S \langle x(\omega, t), \dot{p}(\omega, t)\rangle dt + E\int_0^S \langle \dot{x}(\omega, t), p(\omega, t)\rangle\ dt$$

$$+ E\int_0^S \langle H(\omega, t), H'(\omega, t)\rangle\ dt$$

But this last quantity is by proposition I-1 precisely:

$$(4.3) \qquad E\langle p_S, x_S\rangle - E\langle p_0, x_0\rangle \ .$$

Moreover, knowing that $\Phi_{\ell, L}$ and $\Phi_{m,M}$ are respectively equal to $+\infty$ out of R_1 and of R_2, one has:

<u>Proposition IV-1:</u> For any couple (x, p) in $R \times R$, one has:

$$(4.4) \qquad \Phi_{\ell, L}(x) + \Phi_{m,M}(p) \geq 0 \ .$$

In particular:

(4.5) $$\inf\{\Phi_{\ell,L}(x),\ x \in R_1\} \geq -\inf\{\Phi_{m,M}(p)\ ;\ p \in R_2\}$$

<u>Theorem IV-1:</u> If $\Phi_{\ell,L}$ or $\Phi_{m,M}$ are not identically $+\infty$, the following assertions are equivalent:

(4.6) a) $$\inf_{x \in R} \Phi_{\ell,L}(x) = - \inf_{p \in R} \Phi_{m,M}(p)$$

(4.7) b) $$\inf_{x \in R} \Phi_{\ell,L}(x) = \liminf_{(y,b)\to(0,0)} \inf_{x \in R} \Phi^{y,b}_{\ell,L}(x)$$

(4.8) c) $$\inf_{p \in R} \Phi_{m,M}(p) = \liminf_{(y,b)\to(0,0)} \inf_{p \in R} \Phi^{y,b}_{m,M}(p)$$

<u>Proof:</u> Each of the stated relations is equivalent to the lower semi-continuity at (0, 0) of $\varphi_{\ell,L}$ and $\varphi_{m,M}$. ■

<u>Remark:</u> All the proofs concerning purely convex analysis results are formally the same as the ones in the purely deterministic case. We refer to [13] for more detailed proofs of these points.

<u>Definition IV-1:</u> x in R_1 and p in R_2 will be said to be coextremal if:

(4.9) a) $dP \otimes dt$ a. s. $(\dot{p}(\omega,t), p(\omega,t), H'(\omega,t)) \in \partial L(\omega,t,x(\omega,t),\dot{x}(\omega,t),H(\omega,t))$

$$(4.10) \quad b) \begin{cases} p_0 \in \partial \ell_0(x_0) \\ -p_S \in \partial \ell_S(x_S) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

The conditions of coextremality may be written:

$$(4.9') \quad a') \quad dP \otimes dt \text{ a. s. } (\dot{x}(\omega,t), x(\omega,t), H(\omega,t)) \in \partial M(\omega,t,p(\omega,t),\dot{p}(\omega,t),H'(\omega,t))$$

$$(4.10') \quad b') \begin{cases} x_0 \in \partial m_0(p_0) \\ -x_S \in \partial m_S(p_S) \end{cases}$$

The definition of coextremality is then symetric with respect to the two control problems.

Theorem IV-2: The following assertions are equivalent:

a) x and p are coextremal.

b) x minimizes $\Phi_{\ell,L}$ on R, p minimizes $\Phi_{m,M}$ on R, and the equivalent conditions of theorem IV-1 are satisfied .

c) $\Phi_{\ell,L}(x) = -\Phi_{m,M}(p)$.

Proof: The conditions of coextremality are equivalent to:

$$(4.11) \quad L(\omega, t, x(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t)) + M(\omega, t, p(\omega, t), \dot{p}(\omega, t), H'(\omega, t))$$

$$- \langle x(\omega, t), \dot{p}(\omega, t)\rangle - \langle \dot{x}(\omega, t), p(\omega, t)\rangle - \langle H(\omega, t), H'(\omega, t)\rangle = 0$$

$dP \otimes dt$ a. s.

$$(4.12) \qquad \ell(x_0, x_S) + m(p_0, p_S) - E\langle x_0, p_0\rangle + E\langle x_S, p_S\rangle = 0 \quad .$$

By taking (4.11) and (4.12), and using the same argument as for proposition IV-1, one has:

$$(4.13) \qquad \Phi_{\ell, L}(x) + \Phi_{m,M}(p) = 0$$

$\Phi_{\ell, L}$ and $\Phi_{m,M}$ taking nowhere the value $-\infty$, (4.13) proves that $\Phi_{\ell, L}(x)$ and $\Phi_{m,M}(p)$ are both finite, and proposition IV-1 proves that x minimizes $\Phi_{\ell, L}$ on R, and p minimizes $\Phi_{m,M}$ on R. Moreover, condition a) of theorem IV-1 are satisfied.

Conversely if condition b) is satisfied, by proposition IV-1 and theorem IV-1, one will have:

$$\Phi_{\ell, L}(x) = -\Phi_{m,M}(p) \quad .$$

The same proof as the one used to prove proposition IV-1 shows then that (4.11) and (4.12) are satisfied. But (4.11) and (4.12) are precisely the coextremality conditions. ■

<u>Example IV-1:</u> We take again example II-1. For k in L_{21}, let p the unique solution of:

$$(4.14) \qquad \begin{cases} dp = (k - A^*p - B^*H)\, dt + H \cdot dw + dM \\ p_S = 0 \end{cases}$$

with (p_0, H, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$: existence and uniqueness are generally non trivial in the multidimensional case, and are proved in [1].

The dual problem consists then in the minimization of:

$$(4.15) \qquad E\int_0^S L^*(\omega, t, k(\omega, t), (C^*p+D^*H)(\omega, t))\, dt$$

The coextremality conditions can be written:

$$(4.16) \qquad (k(\omega, t), (C^*p + D^*H)(\omega, t)) \in \partial L(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t)) \quad dP \otimes dt \text{ a. s.}$$

For an extensive analysis, especially of the linear-quadratic case with random coefficients, we refer to [1] .

V A Pontryagin - type principle for Ito equations

We consider again example II-3. In the same way than in [13], we are going to deduce a generalized Pontryagin principle for Ito equations. We assume that the convexity assumptions given in Example II-3 are satisfied.

We have here:

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} W_1 &= \{0\} \\ W_2 &= W^{\perp} \end{aligned}$$

Let us then write that x in R_1 and p in R_2 are coextremal. We will have:

$dP \otimes dt$ a. s.:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \langle x(\omega,t), \dot{p}(\omega,t)\rangle + \langle \dot{x}(\omega,t), p(\omega,t)\rangle + \langle H(\omega,t), H'(\omega,t)\rangle \\ \quad - L(\omega,t,x(\omega,t),\dot{x}(\omega,t),H(\omega,t)) = L^*(\omega,t,\dot{p}(\omega,t),p(\omega,t),H'(\omega,t)) \\ p_T = 0 \;. \end{cases}$$

But

$$(5.3)\qquad L(\omega,t,x(\omega,t),\dot{x}(\omega,t),H(\omega,t)) = \inf_{\begin{cases} u\in U \\ f(\omega,t,x(\omega,t),u) = \dot{x}(\omega,t) \\ \sigma(\omega,t,x(\omega,t),u) = H(\omega,t) \end{cases}} K(\omega,t,x(\omega,t),u)$$

Then:

$$(5.4)\qquad L^*(\omega,t,\dot{p}(\omega,t),p(\omega,t),H'(\omega,t)) = \sup_{x\in V}\ \sup_{(v,H)\in V\times V^m} \{\langle x,\dot{p}(\omega,t)\rangle + $$
$$+\langle v,p(\omega,t)\rangle + \langle H,H'(\omega,t)\rangle - L(\omega,t,x,v,H)\}$$

Equivalently:

$$(5.5) \qquad L^*(\omega, t, \dot{p}(\omega, t), p(\omega, t), H'(\omega, t)) = \sup_{x \in V} \max_{u \in U} \langle x, \dot{p}(\omega, t)\rangle + \langle f(\omega, t, x, u), p(\omega, t)\rangle + \langle \sigma(\omega, t, x, u), H'(\omega, t)\rangle - K(\omega, t, x, u)$$

By comparing with (5.2), one sees there must exist $u(\omega, t)$ with values in U such that:

- u is $\mathscr{T}^*$ measurable.
- $dP \otimes dt$ a. s. :

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \dot{x}(\omega, t) = f(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t)) \\ H(\omega, t) = \sigma(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t)) \end{cases}$$

(5.7) - $dP \otimes dt$ a. s. the "sup max" in (5.5) is attained at $x(\omega, t), u(\omega, t)$.

The possibility of a $\mathscr{T}^*$ measurable choice of u follows from the $\mathscr{T}^*$measurability of the set-valued function Δ' defined by:

$$(5.8) \qquad (\omega, t) \xrightarrow[\Delta']{} \{u \in U;\ \langle f(\omega, t, x(\omega, t), u), p(\omega, t)\rangle + \langle \sigma(\omega, t, x(\omega, t), u), H'(\omega, t)\rangle - K(\omega, t, x(\omega, t), u) = \varphi(\omega, t)\}$$

$\varphi(\omega, t)$ being precisely the maximum in u of the left-hand member of the equality defining $\Delta'(\omega, t)$.
φ is then $\mathscr{T}^*$ measurable, because one can take the "maximum" on a countable dense subset of U. Δ' is $\mathscr{T}^*$ measurable (with non empty values), because its graph is measurable. One applies then theorem 2 of [11].

One will have then from (5. 5):

$$(5.9)\qquad \langle f(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)),p(\omega,t)\rangle+\langle\sigma(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)),H'(\omega,t)\rangle$$

$$-K(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)) = \varphi(\omega,t)$$

$$(5.10)\qquad \langle x(\omega,t),\dot{p}(\omega,t)\rangle+\langle f(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)),p(\omega,t)\rangle$$

$$+\langle\sigma(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)),H'(\omega,t)\rangle - K(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t))$$

$$=\max_{x\in V}\langle x,\dot{p}(\omega,t)\rangle+\langle f(\omega,t,x,u(\omega,t)),p(\omega,t)\rangle+\langle\sigma(\omega,t,x,u(\omega,t)),$$

$$H'(\omega,t)\rangle - K(\omega,t,x,u(\omega,t))\rangle$$

If f, σ, K are differentiable in x, (5. 10) implies:

$$(5.11)\qquad \dot{p}(\omega,t) = -\langle\frac{\partial}{\partial x}f(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t)),p\rangle-\langle\frac{\partial}{\partial x}\sigma(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t))$$

$$,H'(\omega,t)\rangle+\frac{\partial}{\partial x}K(\omega,t,x(\omega,t),u(\omega,t))$$

From (5. 2), (5. 9) and (5. 11), one deduces

Theorem V-1: Under the assumptions of example II-3, let us suppose that (f,σ,K) are differentiable in x. Let $\mathscr{H}$ be the random functional defined by:

$$(5.12)\qquad \mathscr{H}(\omega,t,x,u,p,H') = \langle f(\omega,t,x,u),p\rangle+\langle\sigma(\omega,t,x,u),H'\rangle$$

$$-K(\omega,t,x,u)$$

Then for x in R_1 and p in R_2 to be coextremal, it is necessary that one can find u $\mathcal{T}^*$ measurable with values in U, H' in L_{22} and M in $W^{\perp}$ such that:

$$(5.13)\qquad \begin{cases} dx = f(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t)) \, dt + \sigma(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t)) \cdot dw \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$(5.14)\qquad \begin{cases} dp = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \, dt + H' \cdot dw + dM \\ p_T = 0 \end{cases}$$

$dP \otimes dt$ a. s. $\mathcal{H}(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t), p(\omega, t), H'(\omega, t))$

$$(5.15) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\omega, t, x(\omega, t), u, p(\omega, t), H'(\omega, t)) \qquad \blacksquare$$

This result allows us to make very clearly the connection between deterministic optimization and stochastic optimization. Moreover all the various necessary and sufficient conditions for optimality of a given control derive from these conditions. For various applications of this principle, especially to the linear quadratic case with random coefficients, we refer to [1]. It is a remarkable feature of the dual problem that the dual state variable p can have jumps, corresponding to the jumps of M.

<u>Relation between the stochastic Pontryagin principle and the dynamic programming equation</u>

We assume here that (f, σ, K) do not depend on ω, and that $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in R^+}$

is the family of σ-algebras generated by w. Moreover, to simplify the calculations, we suppose that $n = 1$.

If we assume (without having any justification other than a purely intuitive approach) that $p(\omega, t) = p(t, x(\omega, t))$, p being a sufficiently smooth function of (t, x), then by the Ito formula, theorem V-1 can be written, knowing that here $W^{\perp} = \{0\}$.

$$(5.16) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} f + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} |\sigma|^2 = - \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} . \qquad dP \otimes dt \text{ a. s.} \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} \sigma = H' \end{cases}$$

Without justification, we can write that at least formally, p is a solution of the partial differential equation

$$(5.17) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} |\sigma|^2 = - \frac{\partial f}{\partial x} p - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sigma \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x}$$

Moreover, one maximizes in u the expression

$$(5.18) \quad f(t, x, u)p + \sigma(t, x, u)H' - K(t, x, u)$$

to get an optimal control u_0.

If we write (formally) the derivative of (5.18), we get:

$$(5.19) \quad \frac{\partial f}{\partial u} p + \frac{\partial \sigma}{\partial u} H' - \frac{\partial K}{\partial u} = 0 .$$

But H' is equal to $\frac{\partial p}{\partial x}\sigma$.

(5. 19) is then a "formal" condition for $\mathcal{H}_0(t, x, u)$ defined by:

$$(5.20) \qquad \mathcal{H}_0(t, x, p, \frac{\partial p}{\partial x}) = f(t, x, u)p + \frac{1}{2}|\sigma|^2(t, x, u)\frac{\partial p}{\partial x} - K(t, x, u)$$

to be extremum at u_0 .

If we consider how the dynamic programming equation (see for instance [6] p. 105)

$$(5.21) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = -\max_{u \in U}\left(f(t, x, u)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}|\sigma|^2(t, x, u)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - K(t, x, u)\right)$$

we see that by comparing the right-hand side of (5. 12) and (5. 20), by writing formally:

$$(5.22) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = p$$

then (5. 17) is the derivative in x of (5. 21). ■

These calculations are purely formal. In particular, we must remember that in the general duality approach, we optimize with respect to the controls nonanticipating with respect to w , whereas in the partial differential equation approach, we optimize with pure Markov controls. More generally, it is in most cases not true that x generates the same σ-fields as w; this prevents us in general to identify the two problems. For a general case in which the actual solution is Markov, we refer to [2].

For existence results in the general case, we refer to [1].

[1] Bismut J. M.: Analyse convexe et Probabilites. Doctoral Dissertation. Faculté des Sciences de Paris. To appear.

[2] Bismut J. M.: An existence result in optimal stochastic control. To appear.

[3] Davis M. H. - Varaiya P. P.: Dynamic Programming conditions for partially observable systems. To appear.

[4] Doob J. L.: Stochastic processes. Wiley and Sons, 1952.

[5] Gikhman I. I. - Shorokhod A. V.: Introduction to the theory of random processes. W. B. Saunders Company 1969.

[6] Kushner H. J.: Stochastic stability and control. Academic Press 1967.

[7] Meyer P. A.: Probabilités et Potentiels. Hermann Paris, English Translation, Blaisdell, Boston.

[8] Meyer P. A.: Intégrales stochastiques. Seminaire de Probabilités I Lecture notes in Mathematics no. 39 p. 72-162, 1967.

[9] Moreau J. J.: Fonctionnelles convexes. Seminaire d'équations aux dérivées partielles. Collège de France, 1966-1967.

[10] Rockafellar R.T.: Integrals which are convex functionals. Pacific J. of Math. vol. 24. 3, 1968, p. 525-539. Part II to appear.

[11] Rockafellar R.T.: Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. J. of Math. Anal. and Appl. vol. 28. 1, p. 4-25, 1969

[12] Rockafellar R.T.: Convex analysis. Princeton University press, 1970.

[13] Rockafellar R.T.: Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. J. of Math. Analysis and Appl. vol. 32., p. 174-222, 1970

C

Linear quadratic optimal stochastic control

with random coefficients

C

Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients

By

Jean-Michel Bismut

Ingénieur au Corps des Mines

Personal address:
4 rue des Mariniers
Appt 107
75014 Paris 14°
FRANCE

This paper has been written after the third part of a Thesis to be submitted at the Faculté des Sciences of Paris. It has been partially supported by Institut de Recherches en Informatique et Automatique. (Domaine de Voluceau 78 Rocquencourt FRANCE)

C

2

Linear quadratic optimal stochastic control
with random coefficients

The purpose of this paper is to apply the methods developed in [1] and [2] to solve the problem of optimal stochastic control with random coefficients.

After having proved some preliminary existence results on stochastic differential equations, the existence of an optimal control is shown.

The introduction of an adjoint variable enables us to derive extremality conditions: the control is thus obtained in random "feedback" form. By using a method closed to the corresponding one used by Lions in [4] for the control of partial differential equations, a priori majorations are obtained.

A formal Riccati equation is then written, and the existence of its solution is proved under rather general assumptions.

For a more detailed treatment of some examples, the reader is referred to [1].

C

I Notations

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ is a complete probability space.

$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ is an increasing sequence of complete sub σ-fields of $\mathscr{F}$, which has the following properties:

a) It is right-continuous. ([5] IV - 30)

b) It has no time of discontinuity ([5] VII - D39)

This last assumption is not strictly necessary, but we make it to simplify the results.

$\mathscr{T}$ is the σ-field of $\Omega \times [0, +\infty[$ of the well-measurable sets ([5] VIII D. 14). $\mathscr{T}^*$ is its completion for the measure $dP \otimes dt$ (*).

V is a n dimensional vector space ($n \geq 1$)

w is a m dimensional Brownian motion on $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, non anticipating relative to $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$. w may be defined equivalently as a square-integrable a. s. continuous martingale on $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ with values in R^m, such that, by writing $w = (w_1, \ldots, w_m)$, one has, with the notations of [6] :

(1. 1) $$d \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij} \, dt$$

This definition is correct by the result of P. Levy ([6] p. 110). Moreover, we extend the definitions for $m = 0$, by taking conventionally w as the one dimensional null process.

(*) For our purpose $\mathscr{T}$ could have been only the σ-field of non-anticipating sets.

C

w having continuous paths, formula (1. 1) and the results of [6] show that it is possible to define unambiguously the stochastic integral of a $\mathcal{T}^*$ class of $\mathcal{F}$-measurable processes H such that for any t, one has:

$$(1.2) \qquad E \int_0^t |H_s|^2 \, ds < +\infty .$$

One can use for that purpose the "classical" definitions of the stochastic integral of [6] (p. 80 Remark) or the definition of [6] (p. 86 Theorem 7)

For any stopping time σ, L_2^σ is the space of square-integrable $\mathcal{F}_\sigma$-measurable random variables, with values in V .

T is a strictly positive constant.

L_{21} is the space of the $dP \otimes dt$ classes u of $\mathcal{T}^*$-measurable functions with values in V , such that:

$$(1.3) \qquad E \left(\int_0^T |u_t| \, dt \right)^2 < +\infty$$

C

We define then a norm on L_{21} by:

$$(1.4) \qquad \|u\|_{21} = \left\{ E\left(\int_0^T |u_t| \, dt \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$L_{2\infty}$ is the space of the $dP \otimes dt$ classes y of $\mathscr{T}^*$-measurable functions with values in V , such that:

$$(1.5) \qquad E\left(\underset{0 \le t \le T}{\sup \text{ess}} |x_t|^2 \right) < +\infty$$

We define then a norm on $L_{2\infty}$ by:

$$(1.6) \qquad \|x\|_{2\infty} = \left\{ E\left(\underset{0 \le t \le T}{\sup \text{ess}} |x_t|^2 \right) \right\}^{1/2}$$

L_{22} is the space of the $dP \otimes dt$ classes H of $\mathscr{T}^*$-measurable functions with values in V^m such that:

$$(1.7) \qquad E \int_0^T |H_t|^2 \, dt < +\infty$$

We define then a norm on L_{22} by:

$$(1.8) \qquad \|H\|_{22} = \left(E \int_0^T |H_t|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

C

By convention, we assume that the elements of L_{21}, $L_{2\infty}$, L_{22} are equal to 0 for $t > T$.

Duality brackets are then defined:

a) between L_2^σ and L_2^σ by the standard scalar product.

b) between L_{21} and $L_{2\infty}$ by:

$$(1.9) \qquad E \int_0^T \langle u_t, y_t \rangle \, dt$$

c) between L_{22} and L_{22} by:

$$(1.10) \qquad E \int_0^T \langle H_t, H_t' \rangle \, dt .$$

We consider on the previous spaces only locally convex topologies compatible with the duality previously defined. In particular, L_2^σ and L_{22} being Hilbert spaces, the norm topology is compatible with the duality.

$\underline{L}$ is the space of square-integrable martingales with values in V stopped at T, null at 0. $\underline{L}$ can be identified to a closed subspace of L_2^T, on which we put the induced topology.

W is the subspace of $\underline{L}$ generated by the stochastic integrals relative to w of elements of L_{22}. W is a stable space, in the sense of [6] (p. 80 no. 4). Let $W^\perp$ be the orthogonal of W in $\underline{L}$ in the sense of [6] (p. 81 Theorem 5).

C

In particular, if $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ is the family of σ-fields generated by w , a result of Ito ([6] p. 135) shows that $W^{\perp} = \{0\}$.

Proposition I-1: Let $(x_0, \dot{x}, H, M)$ and $(p_0, \dot{p}, H', M')$ be two elements of $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^{\perp}$. Then, if one defines the right continuous processes x and p by:

$$(1.11) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t \dot{x}_s \, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_t \\ p_t = p_0 + \int_0^t \dot{p}_s \, ds + \int_0^t H'_s \cdot dw_s + M'_t \end{cases}$$

then the process N_t defined by:

$$(1.12) \qquad N_t = \langle p_t, x_t \rangle - \langle p_0, x_0 \rangle - \int_0^t \langle \dot{p}_s, x_s \rangle \, ds - \int_0^t \langle p_s, \dot{x}_s \rangle \, ds$$

$$- \int_0^t \langle H_s, H'_s \rangle \, ds - \langle M_t, M'_t \rangle$$

is a martingale, null at the origin.

Proof: This simple result is proved in [2] ■

II Linear stochastic differential equations

Let A and $(B_i)_{i=1\cdots m}$ be a family of functions defined on $\Omega \times [0, +\infty[$ with values in $V \otimes V$, which are bounded and $\mathcal{T}^*$ measurable.

C_{2d}^T is the space of right-continuous processes x adapted to $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in R^+}$ and such that:

$$(2.1) \qquad E\left(\sup_{0 \le t \le T} |x_t|^2\right) < +\infty .$$

A norm is defined on C_{2d}^T by:

$$(2.2) \qquad \|x\|_d = \left\{E\left(\sup_{0 \le t \le T} |x_t|^2\right)\right\}^{1/2}$$

Theorem II-1: For (Z_0, u, v, M) in $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^\perp$, the equation:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} dZ = (AZ + u)\, dt + (BZ + v) \cdot dw + dM \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

has one and only one solution with right-continuous paths. Moreover these paths have no oscillatory discontinuities ([5]-IV - 20)

Z is then in C_{2d}^T and the linear mapping defined on $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^\perp$ with values in C_{2d}^T by:

$$(Z_0, u, v, M) \xrightarrow[f]{} Z$$

is continuous.

Proof: The proof is merely technical, and follows from a simple fixed point theorem. We refer the reader to [1].[(1)] ■

Let φ be the operator, which associates to (Z_0, v, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$ Z_T in L_2^T through the equation:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} dZ = AZ\,dt + (v + BZ)\cdot dw + dM \, . \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

Let ψ be the operator which associates to (p_0, v', M') in $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$ p_T in L_2^T through the equation:

$$(2.5) \qquad \begin{cases} dp = -(A^* p + B^* v')\,dt + v'\cdot dw + dM' \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Theorem II-2: φ and ψ are both continuous one-to-one operators, and one has:

$$(2.6) \qquad \psi = \varphi^{*-1}$$

Proof: If v' is in L_{22}, $B^* v'$ is in L_{22} and then in L_{21}. One applies then Proposition I-1 to the processes Z and p defined in (2.4) and (2.5):

---

(1) Voir l'Annexe I.

$$(2.7) \qquad E\langle p_T, Z_T\rangle = E\langle p_0, Z_0\rangle + E\int_0^T \langle p_t, A_t Z_t\rangle\, dt$$

$$+ E\int_0^T (-A_t^* p_t - B_t^* v_t', Z_t\rangle\, dt$$

$$+ E\int_0^T \langle v_t', v_t + B_t Z_t\rangle\, dt + E\langle M_T', M_T\rangle$$

Then (2.7) can be written:

$$(2.8) \qquad E\langle p_T, Z_T\rangle = E\langle p_0, Z_0\rangle + E\int_0^T \langle v_t', v_t\rangle dt + E\langle M_T', M_T\rangle$$

From (2.8) one deduces necessarily that if $Z_T = 0$ then:

$$(2.9) \qquad (Z_0, v, M) = (0, 0, 0)$$

φ is then an injection.

Let us prove that for any Z_T in L_2^T, one can find (Z_0, v, M) such that:

$$(2.10) \qquad \varphi(Z_0, v, M) = Z_T$$

We define $\tilde{Z}_t$ by:

$$(2.11) \qquad \begin{cases} d\tilde{Z}_t = A\tilde{Z}\, dt \\ \tilde{Z}(T) = Z_T \end{cases}$$

A being bounded, it is easily proved that:

$$(2.12) \qquad E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{Z}_t|^2\right) \leq k E|Z_T|^2$$

Let Z_t be the process $E^{\mathscr{F}_t} \tilde{Z}_t$. One has then:

$$(2.13) \qquad Z_t = E^{\mathscr{F}_t} \tilde{Z}_0 + E^{\mathscr{F}_t} \int_0^t A_s \tilde{Z}_s \, ds \quad .$$

A being bounded and $\mathscr{T}^*$ measurable, and $\sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{Z}_t|$ being integrable, it is proved in [1] that

$$(2.14) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_0^t A_s \tilde{Z}_s \, ds - \int_0^t A_s Z_s \, ds$$

is a martingale (to be rigorous, the proof is somewhat technical; we refer to [1] for more details).

$$(2.15) \qquad Z_t - \int_0^t A_s Z_s \, ds$$

is then a martingale. Let us prove that this martingale is square integrable, or equivalently that:

$$(2.16) \qquad E\left|Z_T - \int_0^T A_s Z_s \, ds\right|^2 < +\infty \quad .$$

But $Z_T = \tilde{Z}_T$.

Moreover:

$$(2.17) \qquad E\left|\int_0^T A_s Z_s \, ds\right|^2 \leq k' \int_0^T E\,|\tilde{Z}_s|^2 \, ds$$

and (2.17) may be written using (2.12):

$$(2.18) \qquad E\left|\int_0^T A_s Z_s \, ds\right|^2 < +\infty \; .$$

(2.16) is then proved.

By theorem 5 of [6] (p. 81), one can find (Z_0, H, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$ such that:

$$(2.19) \qquad Z_t = Z_0 + \int_0^t A_s Z_s \, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_t$$

This equality can be written:

$$(2.20) \qquad \begin{cases} dZ = AZ\,dt + H \cdot dw + dM \\ Z(0) = Z_0 \; . \end{cases}$$

Theorem II-1 proves that:

$$(2.21) \qquad E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t|^2\right) < +\infty$$

B being bounded, BZ is in L_{22}. If we define v by:

$$(2.22) \qquad v = H - BZ$$

v is in L_{22}, and moreover, one has:

$$(2.23) \qquad \begin{cases} dZ = AZ\,dt + (v + BZ)\cdot dw + dM \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

with $Z(T) = Z_T$.

This is equivalent to:

$$(2.24) \qquad \varphi(Z_0, v, M) = Z_T$$

φ is then a continuous one to one operator. All the considered spaces being Banach spaces, φ has a continuous inverse.

But the relation (2. 8) can be written:

$$(2.25) \qquad \langle \psi(p_0, v', M'), Z_T \rangle = \langle (p_0, v', M'), \varphi^{-1}(Z_T) \rangle$$

This proves necessarily that:

$$(2.26) \qquad \psi = \varphi^{*-1} \quad \blacksquare$$

III The problem of control

H and U are two new finite dimensional vector spaces.

• $A, (B_i)_{i=1\cdots m}$ is a family of functions defined on $\Omega \times [0, +\infty[$ with values in $V \otimes V$, which are bounded and $\mathcal{T}^*$ measurable.

• $C, (D_i)_{i=1\cdots m}$ is a family of functions defined on $\Omega \times [0, +\infty[$ with values in $U \otimes V$, which are bounded and $\mathcal{T}^*$ measurable.

• M is a function defined on $\Omega \times [0, +\infty[$ with values in $V \otimes H$, which is bounded and $\mathcal{T}^*$ measurable.

• N is a function defined on $\Omega \times [0, +\infty[$ with values in $U \otimes U$, which is bounded and $\mathcal{T}^*$ measurable, and such that one can find $\lambda > 0$ for which one has:

for any u in U,

$$(3.1) \qquad \langle Nu, u \rangle \geq \lambda |u|^2 \qquad dP \otimes dt \quad \text{a.s.}$$

• M_1 is a function defined on Ω with values in $V \otimes H$, bounded and $\mathscr{F}_T$ measurable.

• f is an element of L_{21}.

• g is an element of L_{22}.

<u>Definition III-1:</u> L_{22}^U is the set of $dP \otimes dt$ classes of functions u defined on $\Omega \times [0, T]$ with values in U, which are $\mathcal{T}^*$ measurable, and such that:

$$E \int_0^T |u_t|^2 \, dt < +\infty$$

A norm is defined on L_{22}^U by:

$$\|u\| = \left\{ E \int_0^T |u_t|^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

L_{22}^U is then a Hilbert space

Definition III-2: The problem of linear quadratic control (LQC) consists in the minimization of the criteria defined on L_{22}^U by:

$$(3.2) \qquad u \xrightarrow[I]{} E \left\{ \int_0^T |M_t x_t|^2 \, dt + \int_0^T \langle N_t u_t, u_t \rangle \, dt \right\} + E \, |M_1 x_T|^2$$

x being given by:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} dx = (Ax + Cu + f) \, dt + (Bx + Du + g) \cdot dw \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

with x_0 in L_2^0 .

Theorem III-1: The problem LQC has one unique solution.

Proof: The result is proved according to classical methods. By theorem II-1, the mapping:

$$u \longrightarrow x$$

is affine and continuous from L_{22}^{U} in C_{2d}^{T} (here x is a. s. continuous).

This proves easily that I is continuous and convex.

Moreover, when $\|u\| \to +\infty$, $I(u) \to +\infty$ by (3. 1). L_{22}^{U} being a Hilbert space, these facts prove that I attains its minimum. I being strictly convex, this optimum is unique (for more details for the formal reasoning, we refer to the methods used by Lions in [4]) ■

We are now going to introduce a dual variable p.

Theorem III-2: A necessary and sufficient condition for u to be optimal is:

if p is the unique solution of:

$$(3.4) \quad \begin{cases} dp = (M^*Mx - A^*p - B^*H)\,dt + H\cdot dw + dM \\ p_T = -M_1^* M_1 x_T \end{cases}$$

with (p_0, H, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$, then:

$$(3.5) \qquad Nu = C^*p + D^*H \; .$$

Proof: The proof can be done very rapidly by using the general duality results of [2]. We give here a direct proof.

If is easily checked that I is derivable. I being convex, u is a solution to the problem LQC iff $I'(u) = 0$.

But one has:

$$(3.6)\qquad \langle I'(u), v - u\rangle = 2\Big\{E\int_0^T \langle M_t^* M_t x_t^u, x_t^v - x_t^u\rangle\, dt +$$

$$+ E\int_0^T \langle N_t u_t, v_t - u_t\rangle dt + E\langle M_1^* M_1 x_T^u, x_T^v - x_T^u\rangle.$$

Let us prove then that the system:

$$(3.7)\qquad \begin{cases} dp = (M^*Mx^u - A^*p - B^*H)\, dt + H\cdot dw + dM \\ p_T = -M_1^* M_1 x_T^u \end{cases}$$

has a unique solution with (p_0, H, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$.

Let q be the unique solution of:

$$(3.8)\qquad \begin{cases} dq = (M^* Mx^u - A^*q)\, dt \\ q_0 = 0 \quad . \end{cases}$$

Theorem II-1 shows that q_T is in L_2^T, because x^u is in C_{2d}^T.

It is then equivalent to prove that the system:

$$(3.9)\qquad \begin{cases} dq' = (-A^*q' - B^*H)\cdot dt + H\cdot dw + dM \\ q'_T = - M_1^* M_1 x_T^u - q_T \end{cases}$$

has a unique solution, with (q'_0, H, M) in $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$. But theorem II-2 says precisely that (3.9) has a unique solution.

By applying proposition I-1, one has:

$$(3.10)\quad E\langle -M_1^* M_1 x_T^u, x_T^v - x_T^u\rangle = E\int_0^T \langle M^* M x_t^u - A^* p_t - B^* H_t, x_t^v - x_t^u\rangle dt$$

$$+ E\int_0^T \langle p_t, A_t(x_t^v - x_t^u) + C_t(v_t - u_t)\rangle\ dt$$

$$+ E\int_0^T \langle H_t, B_t(x_t^v - x_t^u) + D_t(v_t - u_t)\rangle\ dt$$

(3. 10) may be written:

$$E\int_0^T \langle M_t^* M_t x_t^u, x_t^v - x_t^u\rangle + E\langle M_1^* M_1 x_T^u . x_T^v - x_T^u\rangle$$

$$= - E\int_0^T \langle C_t^* p_t + D_t^* H_t, v_t - u_t\rangle\ dt \quad .$$

From (3. 6) and (3. 10), the relation

$$I'(u) = 0$$

is equivalent to:

$$(3.11)\qquad Nu = C^*p + D^*H \quad . \blacksquare$$

IV <u>The "feedback" problem.</u>

The purpose of this part is to find the dual variable in feedback form.

<u>Proposition IV-1:</u> For any s in $[0, T]$ and h in L_2^s, the system:

$$
(4.1)\quad
\begin{cases}
d\varphi = (A\varphi + CN^{-1}C^*\psi + CN^{-1}D^*\chi + f)\,dt \\
\qquad\qquad + (B\varphi + DN^{-1}C^*\psi + DN^{-1}D^*\chi + g)\cdot dw \\
d\psi = (M^*M\varphi - A^*\psi - B^*\chi)\,dt + \chi\cdot dw + dM \\
\text{with } (\chi, M) \text{ in } L_{22} \times W^{\perp}
\end{cases}
$$

$$
(4.1')\quad
\begin{cases}
\varphi(s) = h \\
\psi(T) = - M_1^* M_1 \varphi(T)
\end{cases}
$$

has a unique solution.

Proof: By using the methods of [4] (Chapter 3 lemma 4.1) and theorem III-1, it is easily proved that φ and ψ are respectively the optimal state variable and the dual variable of the problem LQC starting at time s with the "value" h. The proof being formally exactly the same, we do not repeat it. ■

Proposition IV-2: The mapping $h \to \{\varphi, \psi\}$ defined in proposition IV-1 is continuous and affine from L_2^s into $C_{2d}^T \times C_{2d}^T$.

Proof: The proof is formally exactly the same as the proof of [4] Ch. 3, lemma 4.2. One proves that the given mapping is continuous from L_2^s in $C_{2d}^T \times C_{2d}^T$, this last space having its weak topology. All the spaces considered being Banach spaces, the closed graph theorem proves that the affine mapping which is considered is necessarily continuous from L_2^s into $C_{2d}^T \times C_{2d}^T$. ■

Corollary: The mapping $h \to \psi(s)$ is continuous and affine from L_2^s in L_2^s.

Proof: $h \to \{\varphi, \psi\}$ being continuous from L_2^s into $C_{2d}^T \times C_{2d}^T$, and $\{\varphi, \psi\} \to \psi(s)$ being continuous from $C_{2d}^T \times C_{2d}^T$ into L_2^s, the result is proved. ■

Proposition IV-3: One can find P_s and r_s $\mathscr{F}_s$ measurable such that:

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad P_s(\omega) \in \mathscr{L}(V, V) \\ &\text{b)} \quad r_s(\omega) \in V \\ &\text{c)} \quad \psi_s = -(P_s h + r_s) \end{aligned}$$

P_s and r_s are then determined in a unique way. Moreover P_s is essentially bounded and r_s is in L_2^s. $P_s h$ is determined by the solution of (4.1) with f and g null, and r_s by the solution of (4.1) with h null.

Proof: By the existence and uniqueness of the solution of (4.1) one checks immediately that if A is $\mathscr{F}_s$ measurable, and if h and h' are two elements of L_2^s, then:

$$\text{(4.3)} \qquad \{\varphi, \psi\}(1_A h + 1_{CA} h') = 1_A\{\varphi, \psi\}(h) + 1_{CA}\{\varphi, \psi\}(h') \quad .$$

We consider then two cases:

1) $f = 0 \quad g = 0$. If $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ is a basis of V, the continuity of the mapping $h \to \psi_s$ proves that

$$(4.4) \qquad A \xrightarrow[\pi_{ij}]{} E(\langle \psi_s(1_A \vec{e}_i), \vec{e}_j \rangle)$$

defines an additive measure on $(\Omega, \mathscr{F}_s, p)$, which is absolutely continuous with respect to P. By the theorem of Radon-Nikodym, one can find p_{ij} $\mathscr{F}_s$ measurable and integrable such that:

$$(4.5) \qquad \pi_{ij}(A) = - \int P_{ij} \, dP \quad .$$

Let $P_s(\omega)$ be the operator defined by $(P_{ij}(\omega))$. If h is a step function, which is $\mathscr{F}_s$ measurable, the relation (4.5) proves that:

$$(4.6) \qquad \psi_s(h) = - P_s h \quad .$$

Moreover, the mapping $h \to \psi_s(h)$ being continuous, one can find $k > 0$ such that:

$$(4.7) \qquad E|P_s h|^2 \leq k^2 E|h|^2 \quad .$$

The mapping $h \to P_s h$ can then be extended in a unique way to a continuous mapping from L_2^s into itself, because the step functions are dense in L_2^s. One deduces that for any h in L_2^s:

$$(4.8) \qquad \psi_s(h) = - P_s h \quad .$$

Moreover the relation (4.7) proves that P_s is essentially bounded.

2) In the general case, $\psi_s(h) + P_s h$ is a random variable r_s, which does not depend on h. r_s being equal to $\psi_s(0)$, r_s is square integrable.■

<u>Proposition IV-4:</u> P_s is a. s. a self-adjoint positive operator. One can find $C_2 > 0$ such that for any s, then for any h of V:

(4. 9) $\quad |P_s h| \leq C_2 |h| \quad$ a. s.

<u>Proof:</u> Let h and h' be two elements of L_2^s. Let (φ, ψ) (resp. (φ', ψ')) be the solutions of (4. 1) for $\varphi_s = h$ (resp. $\varphi'_s = h'$). u_t(resp u'_t) is the corresponding control.

Let $F_s(h, h')$ be the expression defined by:

(4. 10)
$$F_s(h, h') = E \int_s^T \langle M_t \varphi_t, M_t \varphi'_t \rangle \, dt + E \int_s^T \langle N_t u_t, u'_t \rangle \, dt$$
$$+ E \langle M_1 \varphi_T, M_1 \varphi'_T \rangle$$

$F_s(h, h')$ is symmetric in (h, h'). By the same technique already used in the previous parts, and by a method comparable to the method used in [4] Chapter 3 (lemma 4. 4) one proves that

(4. 11) $\quad F_s(h, h') = E \langle P_s h, h' \rangle$

(4. 11) shows that P_s is a. s. self adjoint. Moreover $F_s(h, h') \geq 0$. Then P_s is a. s. positive. But the expression of $F_s(h, h)$ is precisely the minimal value of the criteria for the problem LQC starting at s from h.

If x_h is the solution of:

$$(4.12)\qquad \begin{cases} dx_h = Ax_h dt + Bx_h \cdot dw \\ x_h(s) = h \end{cases}$$

One has:

$$(4.13)\qquad F_s(h,h) \le E \int_s^T |Mx_{h_t}|^2 \, dt + E|M_1 x_{h_T}|^2$$

But it is proved in [1] that the mapping $h \xrightarrow[\tau_s]{} x_n$ is continuous from L_2^s in C_{2d}^T and moreover one can find $C_0 > 0$ such that for any s in $[0,T]$, then:

$$(4.14)\qquad \|\tau_s\| \le C_0$$

From (4.11), (4.13) and (4.14), one deduces that one can find $C_1 > 0$ such that for any s in $[0,T]$, for any h in L_2^s, one has:

$$(4.15)\qquad E\langle P_s h, h\rangle \le C_1 E|h|^2 .$$

P_s being self-adjoint and positive, one deduces that one can find C_2 such that:

$$(4.16)\qquad E|P_s h|^2 \le C_2 E|h|^2 .$$

This implies that $\sup \operatorname{ess} |P_s(\cdot)|$ is bounded by a constant independent of s. ■

<u>Theorem IV-1:</u> The solution p of the system (3.4) is such that for any s, one has:

(4.17) $p_s = -(P_s \; x_s + r_s)$ a. s.

Proof: This is obvious from the previous results. ■

Remark: The previous theorem says nothing on the trajectories of P

V The Riccati equation: a formal approach.

A natural idea is to write formally that P_t can be decomposed in the following way:

$$(5.1) \qquad P_t = P_0 + \int_0^t \dot{P}_s \, ds + \int_0^t \mathscr{H}_s \cdot dw_s + \mathscr{M}_t$$

$\mathscr{H} = (\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_m)$ being such that:

$$E \int_0^T |\mathscr{H}_s|^2 \, ds < +\infty$$

and $\mathscr{M}$ being in $W^{\perp}$.

Proposition V-1: The formal Riccati equation determining P is:

$$(5.2) \quad \begin{cases} dP + \{PA + A^*P + B^*PB + B^*\mathscr{H} + \mathscr{H}B - (B^*PD + PC + \mathscr{H}D) \\ (N + D^*PD)^{-1}(D^*PB + C^*P + D^*\mathscr{H}) + M^*M\} \; dt \\ - \mathscr{H} \cdot dw - d\mathscr{M} = 0 \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

C

where $\mathscr{H} = (\mathscr{H}_1, \dots \mathscr{H}_m)$ is a family of self-adjoints operators depending of (ω, t) and $\mathscr{T}^*$ measurable, where $\mathscr{M}$ is a martingale of self adjoint operators element of $W^{\perp}$, and with the conventions:

$$\begin{cases} B^*PB = \sum_1^m B_i^* PB_i \\ B\mathscr{H} = \sum_1^m B_i \mathscr{H}_i \end{cases}$$

and the corresponding conventions for all the other terms.

Proof: In (5.1), if we write that P is self-adjoint, necessarily $\dot{P}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}$ are self-adjoint, by the uniqueness of the decomposition (5.1).

If we consider the system (3.3), (3.4), with f and g null, we have:

$$(5.3) \qquad \begin{cases} dx = (Ax + Cu)\,dt + (Bx + Du)\cdot dw \\ x(0) = x_0 \\ dp = (M^*Mx - B^*H - A^*p)\,dt + H\cdot dw + dM \\ p_T = -M_1^* M_1 x_T \\ Nu = C^*p + D^*H \end{cases}$$

But by theorem IV-1, one has for any s

$$(5.4) \qquad p_s = -P_s x_s$$

Moreover, if we assume that P can be written in the fo m (5.1), (5.4) implies that the right-continuous processes p_s and $-P_s x_s$ are equal.

If we replace p_s by $-P_s x_s$ in (5. 3), one gets:

$$(5.5) \qquad -\{dPx + Pdx + \mathscr{H}\cdot(Bx + Du)\,dt\}$$

$$= (M^*Mx - B^*H + A^*Px)\,dt + H\cdot dw + dM$$

(5. 5) can be written:

$$(5.6) \qquad \begin{cases} -\{\dot{P}x + P(Ax + Cu) + \mathscr{H}\cdot(Bx + Du)\} = M^*Mx - B^*\cdot H + A^*Px \\ -\{\mathscr{H}_i x + P(B_i x + D_i u)\} = H_i \qquad i = 1\cdots m \end{cases}$$

From (5. 3) and (5. 6), one gets:

$$(5.7) \qquad (N + D^*PD)\,u = -(D^*PB + C^*P + D^*\cdot\mathscr{H})\,x$$

P being positive, $N + D^*PD$ is positive definite. One can write from (5. 7):

$$u = -(N + D^*PD)^{-1}(D^*PB + C^*P + D^*\mathscr{H})\,x$$

By replacing u and H by their values, one gets:

$$(5.8) \qquad \{\dot{P} + PA + A^*P + B^*PB + B^*\cdot\mathscr{H} + \mathscr{H}\cdot B - (B^*PD + PC + \mathscr{H}D)$$

$$(N + D^*PD)^{-1}(D^*PB + C^*P + D^*\mathscr{H}) + M^*M\}\,x = 0$$

By writing that the previous result is true for any x, we get equation (5. 2). ■

Proposition V-2: r is the formal solution of:

$$(5.9)\quad \begin{cases} dr = \{(PC + B^*PD + \mathscr{H}D)(N + D^*PD)^{-1}C^* - A^*\}\, r\, dt \\ \quad + [\{(PC + B^*PD + \mathscr{H}D)(N + D^*PD)^{-1} D^* - B^*\} \\ \quad (Pg + h) - Pf - \mathscr{H}g]\, dt + h \cdot dw + dM' \\ r_T = 0 \end{cases}$$

with (h, M') in $L_{22} \times W^{\perp}$.

<u>Proof:</u> We write in the same way:

$$(5.10)\qquad r_t = r_0 + \int_0^t \dot{r}_s\, ds + \int_0^t h_s \cdot dw_s + \int_0^t dM'$$

with (h, M') in $L_{22} \times W^{\perp}$.

We take now the complete system (3.3), (3.4), and we know here that:

$$(5.11)\qquad p_s = -(P_s x_s + r_s)$$

One gets then:

$$(5.12)\quad \begin{cases} -\{\dot{P}x + P(Ax + Cu + f) + \mathscr{H}\cdot(Bx + Du + g) + \dot{r}\} \\ = M^* Mx - B^*H + A^*Px + A^*r \\ -\{\mathscr{H}_i x + P(B_i x + D_i u + g_i) + h_i\} = H_i \\ dM' + d\mathscr{M}x = -dM \end{cases}$$

One has then for u:

$$(5.13)\qquad u = -(N + D^*PD)^{-1}\{C^*r + (C^*P + D^*PB + D^*\mathscr{H})x + D^*Pg + D^*h\}$$

One gets then:

$$(5.14)\qquad \dot{r} = \{(PC + B^*PD + \mathscr{H}D)(N + D^*PD)^{-1} C^* - A^*\} r + \{PC + B^*PD + \mathscr{H}D)(N + D^*PD)^{-1} D^* - B^*)\} (Pg + h) - Pf - \mathscr{H}g \qquad \blacksquare$$

<u>Corollary:</u> The formal expression of the optimal control is:

$$(5.15)\qquad u = -(N + D^*PD)^{-1}\{(C^*P + D^*PB + D^*\mathscr{H})x + C^*r + D^*(Pg + h)\}$$

VI <u>The Riccati equation: existence of the solution.</u>

The proof of the existence of the solution of equation (5.2) is not straightforward in the general case. We will prove existence and uniqueness in a particular case, which applies especially when the coefficients of the equation, the coefficients of the criteria on the one hand, and the Brownian motion on the other hand, are independent.

<u>Theorem VI-1:</u> The Riccati equation:

$$(6.1)\quad \begin{cases} dP + \{PA + A^*P + B^*PB - (B^*PD + PC)(N + D^*PD)^{-1} \\ \qquad (D^*PB + C^*P) + M^*M\}\, dt - d\mathcal{M} = 0 \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

where $\mathcal{M}$ is a square integrable martingale of linear operators, has a unique solution in the space of adapted a.s. right continuous processes $\widetilde{P}_T$ with values in $\mathscr{L}(V,V)$ such that one can find $C' > 0$ with:

$$(6.2)\quad \begin{cases} \operatorname{sup\,ess}\, \sup_{0\le t\le T} |\widetilde{P}_t| \le C' \\ \operatorname{sup\,ess}_{(\omega,t)} \|(N + D^*PD)^{-1}\| \le C' \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ is then a martingale of self-adjoint operators, and P is a process of self-adjoint positive operators.

<u>Proof:</u> For P in $\mathscr{L}(V,V)$, let $\varphi_t(P)$ be formally defined by:

$$(6.3)\quad \varphi_t(P) = -\{PA_t + A_t^* P + B_t^* PB_t - (B_t^* PD_t + PC_t)$$
$$(N_t + D_t^* PD_t)^{-1}(D_t^* PB_t + C_t^* P) + M_t^* M_t\}$$

We want to solve the equation:

$$(6.4)\quad \begin{cases} dP = \varphi_t(P_t)\, dt + d\mathcal{M} \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

Let P' be a self-adjoint positive operator. Then if P is a linear operator such that:

$$(6.5) \qquad \|P - P'\| \leq \frac{\lambda}{2 \operatorname{supess} \|D\|^2}$$

N + D*PD has dP ⊗ dt a. s. an inverse, and moreover:

$$(6.6) \qquad \|(N + D^*PD)^{-1}\| \leq \frac{2}{\lambda}$$

To prove the first part of this assertion, N + D*P'D having an inverse dP ⊗ dt a. s. one needs only to prove that, under (6. 5):

$$(6.7) \qquad \|D^*(P - P')D\| < \|(N + D^*P'D)^{-1}\|^{-1}$$

But one has necessarily:

$$(6.8) \qquad N + D^*P'D \geq N$$

Then:

$$(6.9) \qquad \|(N + D^*P'D)^{-1}\| \leq \|N^{-1}\|$$

From (6. 9) one gets:

$$(6.10) \qquad \|(N + D^*P'D)^{-1}\|^{-1} \geq \|N^{-1}\|^{-1} \geq \lambda$$

If P satisfies (6. 5), then:

$$(6.11) \qquad \|D^*(P - P')D\| \leq \frac{\lambda}{2}$$

and λ being strictly positive

$$(6.12) \qquad \frac{\lambda}{2} < \lambda \quad .$$

(6.7) follows from (6.11), (6.12) and (6.10). Then necessarily:

$$(6.13) \qquad \|(N + D^*PD)^{-1}\| \leq \|(N + D^*P'D)^{-1}\| / (1 - \|D^*(P - P')D\| \, \|(N + D^*P'D)^{-1}\|) \leq \frac{2}{\lambda}$$

(6.6) is also proved.

We notice here that the different majorations are not related only to the fact that P' is self adjoint and positive.

Let R be defined by:

$$(6.14) \qquad R = \frac{\lambda}{2 \text{ supess } \|D\|^2}$$

For $\alpha > 0$, and for $\mathscr{P}$ function $\mathscr{F}_t$ measurable and a. s. bounded with values in $\mathscr{L}(V,V)$, let $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$ the set of right-continuous adapted processes defined on $[T - \alpha, T]$, with values in $\mathscr{L}(V,V)$ such that:

$$(6.15) \qquad \|P_t - E^{\mathscr{F}_t}\mathscr{P}\| \leq R \quad .$$

We put on $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$ the distance defined by:

$$(6.16) \qquad d(P, P') = \text{supess} \sup_{T-\alpha \leq t \leq T} \|P'_t - P_t\|$$

Then if $\mathscr{P}$ has self adjoint positive values, the relations (6.5), (6.14) and (6.6) prove that one can find a positive finite number $M(\mathscr{P})$ such that, if P is in $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$, then:

(6. 17) $\quad \|\varphi_t(P_t)\| \leq M(\mathscr{P}) \quad dP \otimes dt \quad$ a. s.

Moreover, if C_2 is the constant defined in (4. 9), the same relation will prove that:

(6. 18) $\quad \sup\limits_{\substack{\mathscr{P} \text{ self adjoint } \geq 0 \\ \|\mathscr{P}\| \leq C_2}} M(\mathscr{P}) \leq M < +\infty \quad .$

In the same way, the calculation of the derivative in P of φ_t will prove that one can find $k > 0$ such that if P and P' are in $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathscr{P}}$, with $\mathscr{P}$ self-adjoint, positive, and with $\|\mathscr{P}\| \leq C_2$, then:

(6. 19) $\quad \|\varphi_t(P_t) - \varphi_t(P'_t)\| \leq k \|P_t - P'_t\| \quad dP \otimes dt \quad$ a. s.

Let us notice finally that $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathscr{P}}$ is a metrizable complete space.

We take here:

(6. 20) $$\mathscr{P} = M_1^* M_1$$

From (4. 9), one has necessarily:

(6. 21) $$\|M_1^* M_1\| \leq C_2 \quad .$$

We take for α the value:

(6. 22) $$\alpha = {}^R/_M$$

Let G the mapping which to $\tilde{P}$ in $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$ associates $\tilde{Q}$ by:

$$(6.23)\qquad \tilde{Q}_t = E^{\mathscr{F}_t}\left(\mathscr{P} - \int_t^T \varphi_s(\tilde{P}_s)\,ds\right)$$

Then we prove that Q is in $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$.

- $\tilde{Q}_t$ is a right continuous process because one can write:

$$(6.24)\qquad \tilde{Q}_t = E^{\mathscr{F}_t}\left(\mathscr{P} - \int_{T-\alpha}^T \varphi_s(\tilde{P}_s)\,ds\right) + \int_{T-\alpha}^t \varphi_s(\tilde{P}_s)\,ds$$

$$(6.25)\qquad \operatorname{sup\,ess}\sup_{T-\alpha\le t\le T} \|\tilde{Q}_t - E^{\mathscr{F}_t}\mathscr{P}\| \le \frac{R}{M}\, M(\mathscr{P}) \le R$$

For $\tilde{P}$ and $\tilde{P}'$ in $\varkappa_{\mathscr{P}}^{\alpha}$, let us calculate

$$(6.26)\qquad G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}')\ .$$

One has:

$$(6.27)\qquad \left(G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}')\right)_t = E^{\mathscr{F}_t}\left(\int_t^T \varphi_s(\tilde{P}'_s)\,ds - \int_t^T \varphi_s(P_s)\,ds\right)$$

Then, by (6.19), one has:

$$(6.28)\qquad \left\|\left(G(\tilde{P}) - G(\tilde{P}')\right)_t\right\| \le E^{\mathscr{F}_t}\int_t^T k\,\|\tilde{P}_s - \tilde{P}'_s\|\,ds\ .$$

From (6.28) one deduces:

$$(6.29) \qquad \left\| \left(G^2(\tilde{P}) - G^2(\tilde{P}') \right)_t \right\| \leq k^2 E^{\mathscr{F}_t} \int_t^T ds\, E^{\mathscr{F}_s} \int_s^T \| \tilde{P}_u - \tilde{P}'_u \| \, du \ .$$

But (6.29) can be written:

$$(6.30) \qquad \left\| \left(G^2(\tilde{P}) - G^2(\tilde{P}') \right)_t \right\| \leq k^2 E^{\mathscr{F}_t} \int_t^T ds \int_s^T \| \tilde{P}_s - \tilde{P}'_s \| \, ds$$

From (6.30) one deduces:

$$(6.31) \qquad d(G^2(\tilde{P}), G^2(\tilde{P}')) \leq \frac{k^2 \alpha^2}{2} \, d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

In the same way, one will have:

$$(6.32) \qquad d(G^n(\tilde{P}), G^n(\tilde{P}')) \leq \frac{k^n \alpha^n}{n!} \, d(\tilde{P}, \tilde{P}')$$

For n large enough:

$$(6.33) \qquad \frac{k^n \alpha^n}{n!} < 1 \ .$$

From [7] II §12 Remark 2, one deduces that G has a unique fixed point in the metrizable complete space $\varkappa^{\alpha}_{\mathscr{P}}$, which we call P.

Let then $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}_t, \tilde{P})$ be the space of continuous functions defined on $[0, +\infty[$ with values in R^m, on which one has put the Brownian measure $\tilde{P}$ relative to a m dimensional Brownian motion w starting from 0 at time 0.

Let $(\Omega', \mathscr{F}'_t, P')$ be the probability space:

$$(6.34) \qquad (\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathscr{F}_t \otimes \tilde{\mathscr{F}}_{t-T+\alpha}, P \otimes \tilde{P})$$

with $t \geq T - \alpha$.

Then on this space, the process $\mathcal{M}_t$ defined for $t \geq T-\alpha$ by:

$$(6.35) \qquad \mathcal{M}_t = E^{\mathcal{F}_t}\left[M_1^* M_1 - \int_{T-\alpha}^{T} \varphi_s(P_s)\, ds\right]$$

is a martingale: this follows from the independence of $\mathcal{F}_t$ and $\tilde{\mathcal{F}}_{t-T+\alpha}$

Moreover, $(\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_{T-\alpha})$ is a martingale which is orthogonal to w.

P is then a solution on $[T-\alpha, T]$ of:

$$(6.36) \qquad \begin{cases} dP = \varphi_s(P_s)\, ds + d\mathcal{M} \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

and $\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_{T-\alpha}$ is in $W^{\perp}$.

If we come back to the problem of control, we check now that P_t is precisely the operator defined in proposition IV-3.

To prove this property, we need only to prove that for any s in $[T-\alpha, T]$ and any h in L_2^s, then if x is a solution of:

$$(6.37) \qquad \begin{cases} dx = \{A - C(N + D^*PD)^{-1}(C^*P + D^*PB)\}\, x\, dt \\ \qquad + \{B - D(N + D^*PD)^{-1}(C^*P + D^*PB)\}\, x\, dw \\ x_s = h \end{cases}$$

then $(x, -Px)$ is the solution of the system (4.1) with f and g null.

We prove first that (6.37) has a solution. This is obvious, because all the linear operators appearing in (6.37) are bounded (this follows in particular from (6.6)). One applies then theorem II-1.

By doing the same calculations as are in the proof of proposition V-1, we find easily that $(x, -Px)$ corresponds to (φ, ψ) in (4.1) with:

$$(6.38)\quad \begin{cases} \chi = -P\{B - D(N + D^*PD)^{-1}(D^*PB + C^*P)\}x \\ M_t = -\int_{T-\alpha}^{t} \langle d\mathcal{M}_s, x_s \rangle \end{cases}$$

x being in C_{2d}^{T}, χ is necessarily in L_{22}. Moreover, by proposition I-1, one has:

$$(6.39)\quad \left\{ -\int_{T-\alpha}^{t} \chi_s \cdot dw_s + \int_{T-\alpha}^{t} \langle d\mathcal{M}_s, x_s \rangle \right\} =$$

$$P_t x_t - P_{T-\alpha} x_{T-\alpha} - \int_{T-\alpha}^{t} \varphi_s(P_s) x_s \, ds - \int_{T-\alpha}^{t} P_s \dot{x}_s \, ds$$

Then P being bounded, one has

$$(6.40)\quad \begin{cases} E\left(\sup_{T-\alpha \leq t \leq T} |P_t x_t|^2\right) < +\infty \\ E\left(\sup_{T-\alpha \leq t \leq T} \left| \int_{T-\alpha}^{t} \varphi_s(P_s) x_s \, ds \right|^2\right) \leq k \, E\left(\sup_{T-\alpha \leq s \leq T} |x_s|^2\right) < +\infty \\ E\left(\sup_{T-\alpha \leq t \leq T} \left| \int_{T-\alpha}^{t} P_s \dot{x}_s \, ds \right|^2\right) \leq k' \, E\left(\sup_{T-\alpha \leq s \leq T} |x_s|^2\right) < +\infty \end{cases}$$

(6.40) proves that the local martingale M is a square integrable martingale. $(x, -Px)$ is then the unique solution of the system (4.1), (4.1'). One then applies proposition IV-4: a.s., for any s in $[T-\alpha, T]$, P_s is self-adjoint positive, and:

(6.41) $$|P_s| \leq C_2$$

In particular:

(6.42) $$|P_{T-\alpha}| \leq C_2$$

One can then start again the procedure from time $T-\alpha$, and in a finite number of steps reach 0.

Uniqueness is easily proved under the given assumption: if P' is a second solution of (6.1) on $[0,T]$, right-continuous and bounded, one will have:

(6.43) $$P'_t = E^{\mathscr{F}_t}\left(M_1^* M_1 - \int_t^T \varphi_s(P'_s)\, ds\right)$$

with $\varphi_s(P_s)$ uniformly bounded by a constant M'. Then if $t \geq T - \frac{R}{M'}$, one has:

(6.44) $$|P'_t - E^{\mathscr{F}_t} M_1^* M_1| \leq R$$

We define then α' by:

$$\alpha' = \alpha \wedge \frac{R}{M'} \quad .$$

P' is necessarily a fixed point of G on $\varkappa^{\alpha'}_{M_1^* M_1}$. P' is then equal to P on $[T-\alpha', T]$, because G has a unique fixed point. One iterates the procedure a finite number of steps, to reach 0.

Remark: In the case where all the coefficients are deterministic, the restriction on the boundedness of P and of $\varphi(P)$ is unnecessary to prove the uniqueness of the solution. To prove this point, one needs only to see that P'_t converging necessarily to $M_1^* M_1$ when $t \to T$, for t close enough to T, one has:

$$|P'_t - M_1^* M_1| \leq R \quad .$$

The deterministic differential equation defined by (6. 1) with $\mathscr{M} = 0$ has then a unique solution.

<u>Theorem VI-2:</u> Under the assumptions of theorem VI-1, the equation:

$$(6.45) \quad \begin{cases} dr = \{(PC + B^*PD)(N + D^*PD)^{-1} C^* - A^*\} \; r\,dt \\ \quad + [\{(PC + B^*PD)(N + D^*PD)^{-1} D^* - B^*\}(Pg + h) - Pf]\,dt \\ \quad + h \cdot dw + dM' \\ r_T = 0 \quad . \end{cases}$$

has a unique solution with (h, M') in $L_{22} \times W^{\perp}$.

<u>Proof:</u> One must solve an equation of type:

$$(6.46) \quad \begin{cases} dr = -(\mathscr{A}^* r + \mathscr{B}^* h + \varphi_1 dt) + (h + \varphi_2) \cdot dw + dM' \\ r_T = 0 \end{cases}$$

with $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ bounded and (φ_1, φ_2) in $L_{21} \times L_{22}$. Let r_1 be the solution of:

$$(6.47) \quad \begin{cases} dr_1 = -(\mathscr{A}_1^* r_1 + \varphi_1)\,dt + \varphi_2 \cdot dw \\ r_1(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

By theorem I-1, $r_1(T)$ is in L_2^T. One needs to find the solution of:

$$(6.48) \quad \begin{cases} dr_1 = -(\mathscr{A}^* r_2 + \mathscr{B}^* h)\,dt + h \cdot dw + dM' \\ r_2(T) = -r_1(T) \end{cases}$$

One applies theorem II-2 ∎

Example 1: $\mathscr{U} = U_1 \times U_2$.

All the operators are supposed to be constant. w is 1-dimensional. We suppose:

$$C = (C\,,\ 0) \qquad D = (0, D) \qquad N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

The Riccati equation is then:

$$(6.49) \quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} + PA + A^*P + B^*PB - PCN_1^{-1}\, C^*P - B^*PD \\ \qquad (N_2 + D^*PD)^{-1}\, D^*PB + M^*M = 0 \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

The optimal control is given by:

$$(6.50) \quad \begin{cases} u_1 = -\, N_1^{-1}\, C^*\, Px \\ u_2 = -\, (N_2 + D^*PD)^{-1}\, D^*PBx \quad . \end{cases}$$

Example 2: We consider the equation

$$\begin{cases} dx = (Ax + Cu)\, dt + Bx\, dw_1 + Du\, dw_2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

with the criteria:

$$(6.51) \qquad E\int_0^T |M_t x_t|^2\, dt + E\int_0^T \langle N_t u_t, u_t\rangle\, dt + E\,|M_1 x_1|^2$$

We suppose that the operators are constant. Then P is a solution of:

$$(6.52) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} + PA + A^*P + B^*PB - PC(N + D^*PD)^{-1}C^*P + M^*M = 0 \\ P_T = M_1^* M_1 \end{cases}$$

u is given by:

$$(6.53) \qquad u = -(N + D^* PD)^{-1}\, C^* Px$$

These formulas are the same as the ones given by Wonham in [8].

Example 3: We take the general case with:

$$\begin{cases} f = 0 \\ B_i \text{ or } D_i \neq 0 \Rightarrow g_i = 0 \end{cases}$$

Then the solution of (6.45) is $r = 0$. The "random" feedback has no "constant" term.

Example 4: Let (A_1, C_1, M_1, N_1) and (A_2, C_2, M_2, N_2) be two families of constant operators having the properties given in III.

Let γ a positive random variable defined on R^+, the density of which is $\lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

Let $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ the family of σ-algebras defined on R by:

$$\{\mathscr{F}(\gamma \wedge t)\}_{t \in R^+}$$

Then by the results of [5] (VII-54-6), $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ is a right-continuous family of σ-algebras, with no times of discontinuity, and γ is a totally inaccessible stopping time.

Let T a positive constant, γ_T the stopping time $\gamma \wedge T$. We consider the system:

$$(6.54) \qquad \begin{cases} dx = 1_{\{t < \gamma_T\}} (A_1 x + B_1 u)\, dt + 1_{\{t \geq \gamma_T\}} (A_2 x + B_2 u)\, dt \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

One wants to minimize:

$$(6.55) \qquad E \int_0^T \{1_{\{t < \gamma_T\}}(|M_1 x_t|^2 + \langle N_1 u_t, u_t\rangle)$$

$$+ 1_{\{t \geq \gamma_T\}} (|M_2 x_t|^2 dt + \langle N_2 u_t, u_t\rangle\} dt$$

One must solve (6.1).

One has necessarily:

$$(6.56) \qquad \mathscr{M}_t = E^{\mathscr{F}_t} \widetilde{\mathscr{M}}_{\gamma_T}$$

But on $t < \gamma_T$, a simple calculation done in [5] (VII 54 b)) proves that:

$$(6.57) \qquad d\mathscr{M}_s = \lambda(\mathscr{M}_s - \widetilde{\mathscr{M}}_s)\, ds \quad .$$

Moreover, (6.1) proves that:

$$(6.58) \qquad P_{\gamma_T} - P_{\gamma_T^-} = \tilde{\mathcal{M}}_{\gamma_T} - \mathcal{M}_{\gamma_T^-}$$

Let P_2 be the solution of:

$$(6.59) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_2}{dt} + P_2A_2 + A_2^*P_2 - P_2C_2N_2^{-1}C_2P_2^* + M_2^*M_2 = 0 \\ P_{2_T} = 0 \end{cases}$$

P_2 is then self-adjoint and positive. Let P_1 the solution of:

$$(6.60) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} + P_1A_1 + A_1^*P_1 - P_1C_1N_1^{-1}C_1^*P_1 + M_1^*M_1 + \lambda(P_2 - P_1) = 0. \\ P_{1_T} = 0 . \end{cases}$$

(6.60) has a solution because it can be written:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} + P_1(A_1 - \frac{\lambda}{2} I) + (A_1^* - \frac{\lambda}{2} I) P_1 - P_1C_1N_1^{-1}C_1^*P_1 + M_1^*M_1 + \lambda P_2 = 0. \\ P_{1_T} = 0 . \end{cases}$$

and $M_1^*M_1 + \lambda P_2$ is self adjoint and positive. Then one will check that P is the process:

$$P_t = 1_{\{t < \gamma_T\}} P_{1_t} + 1_{\{t \geq \gamma_T\}} P_{2_t} .$$

Remark: Simpler methods are available in this case.

[1] Bismut, J. M.: Analyse Convexe et probabilités. Doctoral Dissertation. Faculté des Sciences de Paris. To appear.

[2] Bismut, J. M.: Conjugate convex functions in optimal stochastic control. To appear.

[3] Haussman, O. G.: Optimal stationary control with state and control dependent noise SIAM J. of Control. vol. 9, no. 2, May, 1971.

[4] Lions, J. L.: Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux derivés partielles, Dunod 1968. English Translation, Springer Verlag, 1971.

[5] Meyer, P. A.: Probabilités et Potentiel Hermann ,Paris . English Translation, Blaisdell, Boston.

[6] Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités no. 1, Lecture notes in Mathematics, no. 39, pp. 72-162, Springer-Verlag, 1967.

[7] Schwartz, L.: Cours de l'Ecole Polytechnique, Hermann, Paris.

[8] Wonham, W. M.: On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM J. of Control, 6 (1968), pp. 312-326.

D

Application des méthodes de dualité à des résultats d'existence en contrôle stochastique

D

Application des méthodes de dualité à des résultats d'existence en contrôle stochastique

par

Jean-Michel Bismut

Ingénieur au Corps des Mines

Adresse personnelle: 4 rue des Mariniers
Appt. 107
Paris 14°
FRANCE.

Cet article est une partie d'une Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques Pures, qui sera soumise par l'auteur à la Faculté des Sciences de Paris. Les recherches correspondant à cet article ont été partiellement subventionnées par l'I.R.I.A. (Domaine de Voluceau 78 Rocquencourt).

D

Abstract.

The purpose of this paper is to apply the duality methods to obtain existence results in stochastic control. The approach is very similar to the approach of Rockafellar in [9]. Conditions for existence are given. The methods developed here are implicitly used in [4], and results are obtained from them in [1].

Application des méthodes de dualité à des résultats d'existence en contrôle stochastique

L'objet de cet article est d'établir des résultats d'existence de contrôles optimaux, dans le formalisme de l'analyse convexe développé dans [1] et [2].

Les hypothèses nécessaires pour assurer l'existence d'un contrôle optimal dans le cas stochastique seront plus sévères que les hypothèses correspondantes faites par Rockafellar dans [9] pour le cas déterministe, en particulier parce qu'il n'est, dans la plupart des cas, pas possible de borner les solutions d'une diffusion.

De plus nous serons conduits à donner des formes différentes pour les conditions d'existence correspondant généralement aux problèmes primal ou dual.

Enfin rappelons que l'utilisation de méthodes plus fines nous a permis d'obtenir des résultats beaucoup plus forts que ceux-ci pour une large classe de problèmes de "contrôle markovien"; on se réferera pour cela à [3].

Nous suivrons tout au long de cet article un plan proche du plan correspondant suivi par Rockafellar dans [9].

Tous les résultats de théorie des Probabilités dont nous nous servirons peuvent être trouvés dans [5] et [6]. Pour des réferences plus détaillées pour renvoyons à [2].

I Rappels

Nous supposons connus les principaux résultats de [2]. Les rappels qui sont donnés ici ne servent qu'à clarifier la suite de l'exposé.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet. $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ est une suite croissante de sous-tribus complètes de $\mathscr{F}$, continue à droite, et dépourvue de temps de discontinuité.

$\mathscr{T}$ est la tribu de $\Omega \times [0, +\infty[$, formée des ensembles bien-mesurables. $\mathscr{T}^*$ est sa complétée pour $dP \otimes dt$.

S est un temps d'arrêt majoré par une constante positive T.

V est un espace vectoriel de dimension n.

w est un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à valeurs dans R^m, et adapté à $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$.

Pour tout temps d'arrêt σ, L_2^σ est l'espace des variables aléatoires de carré intégrable et $\mathscr{F}_\sigma$ mesurables, à valeurs dans V.

L_{21} (resp. $L_{2\infty}$) est l'espace des $dP \otimes dt$ classes y de fonctions $\mathscr{T}^*$ mesurables à valeurs dans V, telles que:

$$(1.1) \qquad E\left(\int_0^S |y_t|\, dt\right)^2 < +\infty$$

$$\left(\text{resp. } (1.2)\ E\left(\operatorname*{sup\,ess}_{0 \le t \le S} |y_t|^2\right) < +\infty \qquad (1)\ \right)$$

---

(1) En général, pour tout z positif et $\mathscr{T}^*$ mesurable, $\operatorname*{sup\,ess}_{0 \le t \le S} z_t$ est mesurable. En effet pour tout intervalle $]a, b[$, on a:

Une norme est définie sur L_{21} (resp. $L_{2\infty}$) par:

$$(1.3) \qquad \|y\|_{21} = \left\{E\left(\int_0^S |y_t|\ dt\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$(\text{resp. } (1.4) \quad \|y\|_{2\infty} = \left\{E\left(\sup_{0\le t\le S}\text{ess}\ |y_t|^2\right)\right\}^{1/2}$$

De même L_{22} est l'espace des $dP \otimes dt$ classes H de fonctions $\mathscr{T}^*$ mesurables à valeurs dans V^m telles que:

$$(1.5) \qquad E\int_0^S |H_t|^2\ dt < +\infty \ .$$

Une norme est définie sur L_{22} par:

$$(1.6) \qquad \|H\|_{22} = \left\{E\int_0^S |H_t|^2\ dt\right\}^{1/2}$$

$\underline{L}$ est l'espace des martingales de carré intégrable, nulles à l'origine et arrêtées en S.

W est le sous-espace de $\underline{L}$ engendré par les intégrales stochastiques par rapport à w. $W^{\perp}$ est l'orthogonal de W dans $\underline{L}$ au sens de [6] (p. 81 Theorème 5). On suppose que $W^{\perp}$ est décomposé en la somme de

---

(1) (cont.)

$$\left\{\omega;\ \sup_{0\le t\le S}\text{ess}\ z_t \in\ ]a,b[\right\} = \left\{\omega;\ \int_0^S 1_{\{z_t\in\,]a,b[}\ dt > 0\right\}$$

De plus $1_{\{z_t\in\,]a,b[\}}$ étant $\mathscr{T}^*$ mesurable, $\int_0^S 1_{\{z_t\in\,]a,b[\,\}}\ dt$ est mesurable.

deux sous-espace orthogonaux W_1 et W_2 :

(1.7) $$W^{\perp} = W_1 \oplus W_2$$

L désigne un intégrant convexe normal défini sur

(1.8) $$(\Omega \times [0,+\infty[\,) \times V \times V \times V^m$$

au sens de [10] $\Omega \times [0,+\infty[$ étant considéré comme l'espace mesuré:

(1.9) $$(\Omega \times [0,+\infty[\,,\ \mathscr{T}^*,\ dP \otimes dt\,)\ .$$

L* est l'intégrant dual de L

M est défini par:

(1.10) $$M(\omega, t, p, s, H') = L^*(\omega, t, s, p, H')$$

On fait les hypothèses:

<u>H I-1</u>: Il existe (p_0, s_0, H'_0) dans $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22}$ tels que:

(1.11) $$E \int_0^S M(\omega, t, p_0(\omega, t), s_0(\omega, t), H'_0(\omega, t)\,)\, dt < +\infty \ ■$$

<u>H I-2</u>: Il existe (x_0, y_0, H_0) dans $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22}$ tel que:

(1.12) $$E \int_0^S L(\omega, t, x_0(\omega, t), y_0(\omega . t), H_0(\omega, t)\,)\, dt < +\infty\ .\ ■$$

ℓ_0 et ℓ_S désignent deux fonctionnelles convexes et propres, semi-continues inférieurement, définies respectivement sur L_2^0 et L_2^S. ℓ_0^* et ℓ_S^* sont leurs duales. On définit ℓ et m sur $L_2^0 \times L_2^S$ par:

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \ell(c_0, c_S) = \ell_0(c_0) + \ell_S(c_S) \\ m(c_0, c_S) = \ell_0^*(c_0) + \ell_S^*(-c_S) \end{cases}$$

On pose:

$$(1.14)\qquad \begin{cases} R = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^{\perp} \\ R_1 = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W_1 \\ R_2 = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W_2 \\ R' = L_{2\infty} \times L_2^S \end{cases}$$

A $x = (x_0, \dot{x}, H, M)$ dans R, on associe le processus x défini par:

$$(1.15)\qquad x_t = x_0 + \int_0^t \dot{x}_s \, ds + \int_0^t H_s \cdot dw_s + M_t \quad .$$

$\Phi_{\ell, L}$ est alors une fonctionnelle définie sur R par:

$$(1.16)\qquad x \rightarrow \begin{cases} \ell(x_0, x_S) + E \displaystyle\int_0^S L(\omega, t, x(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t))dt & \text{si } x \in R_1 \\ +\infty & \text{si } x \notin R_1 \end{cases}$$

On définit $\Phi_{m, M}$ de la même manière, en remplaçant ℓ par m, L par M et R_1 par R_2.

Le problème de contrôle est défini dans [2] par la minimisation de $\Phi_{\ell, L}$ sur R.

Par l'introduction d'une classe convenable de perturbations, on montre dans [2] que le problème dual du problème de contrôle est la minimisation de $\Phi_{m,M}$ sur R.

Pour les définitions de $\varphi_{\ell,L}$, $\varphi_{m,M}$, $\Phi_{\ell,L}^{(y,b)}$, $\Phi_{m,M}^{y,b}$ et la dérivation des conditions de coextrémalité, nous renvoyons à [2].

II Un résultat préliminaire

L_{11} désigne l'espace des classes de fonctions z $\mathscr{T}^*$ mesurables[1] telles que:

$$(2.1) \qquad E \int_0^S |z_t| \, dt < +\infty \ .$$

$(L_{2\infty})^*$ est le dual fort de $L_{2\infty}$.

Proposition II-1: $(L_{2\infty})^* \cap L_{11} = L_{21}$.

Preuve: $L_{\infty\infty}$, espace des classes de fonctions $\mathscr{T}^*$ mesurables et $dP \otimes dt$ essentiellement bornées est dense dans $L_{2\infty}$. En effet si x est un élément de $L_{2\infty}$, on pose:

$$(2.2) \qquad x_n = 1_{\{\|x\| < n\}} \, x \ .$$

Alors x_n est dans $L_{\infty\infty}$. De plus,

$$\operatorname*{sup\,ess}_{0 \le t \le S} \|x(\omega, t) - x_n(\omega, t)\|$$

converge p.s. vers 0, et est majoré par $\|x(\omega, t)\|$. Le théorème de Lebesgue montre alors que $\|x - x_n\|_{2\infty}$ tend vers 0.

Soit alors y élément de $(L_{2\infty})^* \cap L_{11}$. Pour x dans $L_{\infty\infty}$, on a:

$$(2.3) \qquad \langle y, x \rangle = E \int_0^S \langle y_t, x_t \rangle \, dt \ .$$

---

(1) Nous ne précisons pas l'espace des valeurs, qui sera soit V, soit R. Il sera toujours évident dants le contexte.

Montrons que l'égalité est vraie pour x dans $L_{2\infty}$. En raisonnant composante par composante, on se ramène à la dimension 1 pour V.

On definit alors y^+ dans $(L_{2\infty})^* \cap L_{11}$ par

$$(2.4) \qquad \langle y^+, x\rangle = \langle y, 1_{\{y>0\}} x\rangle \quad .$$

On definit de même y^-.

On peut donc se ramener à démontrer l'égalité (2.3) pour y positif. De même, on se limitera à x élément de $L_{2\infty}$ à valeurs positives.

Si x_n est la suite d'approximations définie précédemment, la suite $y_t x_{n_t}$ croît vers $y_t x_t$. On a donc:

$$(2.5) \qquad E\int_0^S \langle y_t, x_t\rangle\, dt = \lim_{n\to+\infty} E\int_0^S \langle y_t, x_{n_t}\rangle\, dt \quad .$$

Mais puisque x_n tend vers x dans $L_{2\infty}$, on a:

$$(2.6) \qquad \langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$$

On a donc bien:

$$(2.7) \qquad \langle y, x\rangle = E\int_0^S \langle y_t, x_t\rangle\, dt \quad .$$

y étant dans $(L_{2\infty})^*$, on a:

$$(2.8) \qquad |\langle y, x\rangle| \leq k\|x\|_{2\infty} \quad .$$

En posant:

$$(2.9) \qquad x_t = \alpha_t \operatorname{sgn}(-y_t) \quad (1)$$

avec α à valeurs réelles tel que:

$$(2.10) \qquad E\left(\operatorname*{sup\,ess}_{0\le t\le S} |\alpha_t|^2\right) < +\infty$$

on en déduit:

$$(2.11) \qquad \left| E \int_0^S \alpha_t \, |y_t| \, dt \right| \le k\|\alpha\|_{2\infty} \ .$$

Soit alors u une v. a. r. de carré intégrable $\mathscr{F}_S$ mesurable, u_t la martingale $E^{\mathscr{F}_t} u$.

On a, par l'inégalité de Doob ([5] VI Remarque 2):

$$(2.12) \qquad E\left(\operatorname*{sup\,ess}_{0\le t\le S} |u_t|^2\right) \le 4E\,|u|^2$$

u_t est donc dans $L_{2\infty}$.

On en déduit:

$$(2.13) \qquad \left| E \int_0^S u_t \, |y_t| \, dt \right| \le k' \, E\,|u|^2$$

Mais, par [5] VII T 16, on a, puisque $|y|$ est dans L_{11}:

$$(2.14) \qquad E \int_0^S u_t \, |y_t| \, dt = E\, u \int_0^S |y_t| \, dt$$

---

(1) La fonction sgn est définie par:

$$\operatorname{sgn}(y_1, \dots, y_n) = (\operatorname{sgn} y_1, \dots, \operatorname{sgn} y_n)$$

Donc:

$$(2.15) \qquad \left| Eu \int_0^S |y_t| \, dt \right| \leq k' E |u|^2 \quad .$$

$$\int_0^S |y_t| \, dt$$

définit donc une forme linéaire continue sur L_2^S. Il appartient donc à L_2^S. ■

Soit maintenant j un intégrant convexe normal défini sur $(\Omega \times [0,T], \mathscr{T}^*, dP \otimes dt) \times V$. Soit j^* l'intégrant dual.

On suppose que:

a) Pour tout x de V:

$$(2.16) \qquad E \int_0^S j(\omega, t, x) \, dt < +\infty \quad .$$

b) Il existe α_0 dans L_{21} tel que:

$$(2.17) \qquad E \int_0^S j^*(\omega, t, \alpha_0(\omega, t)) \, dt < +\infty$$

On sait alors par [9] que les fonctionnelles I et I* définies respectivement sur $L_{2\infty}$ et L_{21} par:

$$(2.18) \qquad \begin{cases} x \underset{I}{\longrightarrow} E \displaystyle\int_0^S j(\omega, t, x(\omega, t)) \, dt \\ \alpha \underset{I^*}{\longrightarrow} E \displaystyle\int_0^S j^*(\omega, t, \alpha(\omega, t)) \, dt \end{cases}$$

sont convexes, propres, et duales l'une de l'autre.

Proposition II-2: La duale $I^{*'}$ de I définie sur le dual fort $(L_{2\infty})^*$ de $L_{2\infty}$ coïncide avec I^* sur L_{21} et est égale à $+\infty$ sur $(L_{2\infty})^*/L_{21}$.

Preuve: $L_{\infty\infty}$ étant dense dans $L_{2\infty}$, on a:

$$(2.19) \qquad (L_{2\infty})^* \subset (L_{\infty\infty})^* \quad .$$

Pour y dans $(L_{2\infty})^*$, on a:

$$(2.20) \qquad I^{*'}(y) = \sup_{x \in L_{2\infty}} \langle y, x\rangle - I(x) \geq \sup_{x \in L_{\infty\infty}} \langle y, x\rangle - I(x)$$

Or α_0 est dans L_{21}, donc dans L_{11}, et pour tout x de V

$$(2.21) \qquad E \int_0^S j(\omega, t, x)\, dt < +\infty \quad .$$

Par le résultat de Rockafellar donné dans [11] on sait que si y n'appartient pas à L_{11}, alors:

$$(2.22) \qquad \sup_{x \in L_{\infty\infty}} \langle y, x\rangle - I(x) = +\infty \quad .$$

Donc si y n'est pas dans L_{11}, on a:

$$(2.23) \qquad I^{*'}(y) = +\infty \quad .$$

De plus si y est dans L_{11}, par la proposition II-1, il est aussi dans L_{21}. La proposition en résulte. ■

III Un résultat de dualité

Définitions: On dit que l'hypothèse H III-1 est vérifiée par L si pour tout p de V, il existe (s, H', α) dans $L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ tel que, pour tout (x, v, H) élément de $V \times V \times V^m$, on a:

$$(3.1) \qquad L(\omega, t, x, v, H) \geq \langle x, s(\omega, t)\rangle + \langle v, p\rangle + \langle H, H'(\omega, t)\rangle - \alpha(\omega, t)$$

On dit que l'hypothèse H III-2 est vérifiée par L si pour tout x de V, il existe (v, H, β) dans $L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ tel que:

$$(3.2) \qquad L(\omega, t, x, v(\omega, t), H(\omega, t)) \leq \beta(\omega, t) \quad . \quad \blacksquare$$

Ces hypothèses sont très proches des hypothèses C_0) et D_0) de Rockafellar données dans [9]. On vérifie immédiatement que si L vérifie H III-1, M vérifie H III-2.

Par une démonstration identique à la démonstration utilisée par Rockafellar dans [9] (proposition 2-3) on a, de façon évidente:

Proposition III-1: Une forme équivalente de H III-2 est: pour tout borné X de V, il existe A_X et B_X fonctions $\mathscr{T}^*$ mesurables à valeurs respectivement dans $\mathscr{L}(V, V)$ et $\mathscr{L}(V^m, V)$ tels que:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \cdot\, E\left\{\int_0^S \|A_X(\omega, t)\| \, dt\right\}^2 < +\infty \\ \cdot\, E \int_0^S \|B_X(\omega, t)\|^2 \, dt < +\infty \end{cases}$$

et il existe (b_X, b'_X, β_X) dans $L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ tels que si x est dans $L_{\infty\infty}$ à valeurs dans X, alors:

$$(3.4) \qquad L(\omega, t, x(\omega, t), A_X(\omega, t)\, x(\omega, t) + b_X(\omega, t), B_X(\omega, t)\, x(\omega, t) + b'_X(\omega, t))$$

$$\leq \beta_X(\omega, t) \qquad \blacksquare$$

Remarquons que H III-2 est plus forte que H I-2.

On note par R'^* le dual fort de $R' = L_{2\infty} \times L_2^S$.

<u>Théorème III-1:</u> Si L vérifie H III-2, alors la duale $\varphi^*_{\ell, L}$ de $\varphi_{\ell, L}$ sur R'^* coïncide avec $\Phi_{m, M}$ sur R et est égale à $+\infty$ sur R'^*/R.

<u>Preuve:</u> Ce résultat correspond à une partie du théorème 2 donné par Rockafellar dans [9] dans le cas déterministe.

Nous avons prouvé la première partie du résultat dans le théorème III-1 de [2]. Montrons la seconde.

Soit s un élément de $(L_{2\infty})^*/L_{21}$. On va montrer que si a est dans L_2^S, alors:

$$(3.5) \qquad \varphi^*_{\ell, L}(s, a) = +\infty \quad .$$

En effet on a, comme pour le théorème III-1 de [2]:

$$(3.6) \qquad \varphi^*_{\ell, L}(s, a) = \sup_{\substack{x \in R_1 \\ (y, b) \in R'}} \langle s, y \rangle + E \langle a, b \rangle - E \int_0^S L(\omega, t, (x + y)(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t))\, dt$$

$$- \ell_0(x_0) - \ell_S(x_S - b) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in R_1 \\ (z,b')\in L_{2\infty}\times L_2^S}} \langle s,z\rangle - \langle s,x\rangle - E\langle a,b'\rangle + E\langle a,x_S\rangle$$

$$- E\int_0^S L(\omega,t,z(\omega,t),\dot{x}(\omega,t),H(\omega,t))\,dt - \ell_0(x_0) - \ell_S(b') .$$

Mais $x \to \langle s,x\rangle - E\langle a,x_S\rangle$ est une forme linéaire continue sur l'espace $R = L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times W^\perp$ qui par ailleurs s'identife à $L_{21} \times L_2^S$ par l'homéomorphisme:

(3.7) $\qquad (x_0, \dot{x}, H, M) \to (\dot{x}, x_S) \quad .$

Il existe donc (r, q_S) dans $(L_{21})^* \times L_2^S$ tel que:

(3.8) $\qquad \langle s,x\rangle - E\langle a,x_S\rangle = -\langle r,\dot{x}\rangle - E\langle q_S,x_S\rangle \quad .$

Comme L_{22} est dense dans L_{21}, $(L_{21})^*$ est inclus dans L_{22} et est un espace décomposable au sens de [9] puisque:

a) $L_{\infty\infty} \subset (L_{21})^*$

b) Si A est $\mathscr{Y}^*$ mesurable et si y est dans $(L_{21})^*$, $1_A y$ est dans $(L_{21})^*$.

r est donc dans L_{22}, et on aura nécessairement, en utilisant la même méthode qu'en (2.5)

(3.9) $\qquad \langle r,\dot{x}\rangle = E\int_0^S \langle r_t,\dot{x}_t\rangle\,dt \quad .$

De plus, si q_t est la martingale $E^{\mathscr{F}_t} q_S$, on peut trouver (q_0, H', M') dans $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$ tel que:

$$(3.10) \qquad q_t = q_0 + \int_0^t H'_s \cdot dw_s + M'_t \quad .$$

Alors, par la proposition I-1 de [2], on a:

$$(3.11) \qquad E\langle q_S, x_S\rangle = E\langle q_0, x_0\rangle + E\int_0^S \langle q_t, \dot{x}_t\rangle\, dt + \int_0^S \langle H'_t, H_t\rangle\, dt$$

$$+ E\langle M'_S, M_{1S}\rangle$$

Donc:

$$(3.12) \qquad \varphi^*_{\ell, L}(s,a) = \sup_{M_1 \in W_1} \langle M'_S, M_{1S}\rangle + \sup_{\substack{(\dot{x}, H, z) \in \\ L_{21} \times L_{22} \times L_{2\infty}}} \langle s, z\rangle$$

$$+ E\int_0^S \langle q_t + r_t, \dot{x}_t\rangle\, dt + E\int_0^S \langle H'_t, H_t\rangle\, dt$$

$$- E\int_0^S L(\omega, t, z(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t))\, dt$$

$$+ \sup_{\substack{(x_0, b') \in \\ L_2^0 \times L_2^S}} E\langle q_0, x_0\rangle - E\langle a, b'\rangle - \ell_0(x_0) - \ell_S(b') \quad .$$

Le premier et le dernier terme ne posent pas de difficultés, car ils ne sont jamais égaux à $-\infty$.

On va montrer que le second prend la valeur $+\infty$. On pose

$$(3.13) \qquad q_t + r_t = u_t \quad .$$

u est alors dans $(L_{21})^*$.

Pour z dans $L_{\infty\infty}$, soit f l'intégrant convexe défini par:

$$(3.14) \qquad f(\omega, t, v, H) = L(\omega, t, z(\omega, t), v, H) \quad .$$

La proposition III-1 implique qu'il existe (v, H) dans $L_{21} \times L_{22}$ tels que:

$$(3.15) \qquad E \int_0^S f(\omega, t, v(\omega, t), H(\omega, t)) \, dt < +\infty \quad .$$

De plus f est trivialement un intégrant normal. On définit k par:

$$(3.16) \qquad k(\omega, t, z, u, H') = \sup_{(v, H) \in V \times V^m} \langle u, v \rangle + \langle H', H \rangle - L(\omega, t, z, v, H).$$

Alors:

$$(3.17) \qquad f^*(\omega, t, u, H') = k(\omega, t, z(\omega, t), u, H') \quad .$$

De plus, par H I-1, il existe $(p_o, s_0, H'_0, \overline{\alpha})$ dans $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ tel que pour tout (z, v, H) dans $V \times V \times V^m$ on ait:

$$(3.18) \qquad L(\omega, t, z, v, H) \geq \langle z, s_0(\omega, t) \rangle + \langle v, p_0(\omega, t) \rangle + \langle H, H'_0(\omega, t) \rangle - \overline{\alpha}(\omega, t)$$

Alors nécessairement:

$$(3.19) \qquad k(\omega, t, z(\omega, t), p_0(\omega, t), H'_0(\omega, t)) \leq \overline{\alpha}(\omega, t) - \langle z(\omega, t), s_0(\omega, t) \rangle$$

Or $\overline{\alpha}$ et $\langle z, s_0 \rangle$ sont dans L_{11}.

Donc:

$$(3.20) \qquad E \int_0^S k(\omega, t, z(\omega, t), p_0(\omega, t), H_0'(\omega, t)) \, dt < +\infty \quad .$$

Les espaces L_{21} et $(L_{21})^*$ étant décomposables, on peut appliquer le résultat de Rockafellar donné dans [10]:

$$(3.21) \qquad \sup_{(\dot{x}, H) \in L_{21} \times L_{22}} E \int_0^S \langle u_t, \dot{x}_t \rangle \, dt + E \int_0^S \langle H_t', H_t \rangle \, dt$$

$$- E \int_0^S L(\omega, t, z(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t)) \, dt =$$

$$E \int_0^S k(\omega, t, z(\omega, t), u(\omega, t), H'(\omega, t)) \, dt \quad .$$

Il suffit alors de démontrer la relation:

$$(3.22) \qquad \sup_{z \in L_{\infty\infty}} \langle s, z \rangle + E \int_0^S k(\omega, t, z(\omega, t), u(\omega, t), H'(\omega, t)) \, dt = +\infty$$

On pose:

$$(3.23) \qquad g(\omega, t, z) = - \min \{ k(\omega, t, z, u, H') \; |u| \leq |u(\omega, t)| + |p_0(\omega, t)|$$

$$|H'| \leq |H'(\omega, t)| + |H_0'(\omega, t)| \}$$

k étant semi-continue inferieurement en (u, H'), le minimum est effectivement atteint. De plus pour tout (u, H'), on vérifie que k est concave en z parce que L est convexe. $g(\omega, t, \cdot)$ est donc convexe. De plus $g(\cdot, \cdot, z)$ est $\mathscr{T}^*$ mesurable: en effet $k(\cdot, \cdot, z, \cdot, \cdot)$ est un intégrant convexe normal, puisqu'il est conjugué de l'intégrant convexe normal $L(\cdot,\cdot,z,\cdot,\cdot)$; on applique alors [12] corollaire 4. 3. On a:

$$(3.24) \qquad g(\omega,t,z) \geq -k(\omega,t,z,p_0(\omega,t),H'_0(\omega,t)) \geq \langle z, s_0(\omega,t)\rangle - \overline{\alpha}(\omega,t)$$

Soit (v,H,β) le triplet construit grâce à l'hypothèse H III-2, correspondant à z dans V, tel que:

$$(3.25) \qquad L(\omega,t,z,v(\omega,t),H(\omega,t)) \leq \beta(\omega,t) \quad .$$

Alors:

$$(3.26) \qquad k(\omega,t,z,u,H') \geq \langle u, v(\omega,t)\rangle + \langle H', H(\omega,t)\rangle - \beta(\omega,t)$$

Donc:

$$(3.27) \qquad g(\omega,t,z) \leq |u(\omega,t)| \; |v(\omega,t)| + |H'(\omega,t)| \; |H(\omega,t)| + \beta(\omega,t) \quad .$$

On déduit de (3. 19) et (3. 27):

- Pour $dP \otimes dt$ puisque tout (ω,t), $g(\omega,t,\cdot)$ est finie. Etant convexe, $g(\omega,t,\cdot)$ est continue. g est donc un intégrant convexe et normal.
- Si g^* est l'intégrant convexe normal dual de g, (3. 24) montre que:

$$(3.28) \qquad E\int_0^S g^*(\omega,t,s_0(\omega,t))\,dt < +\infty \quad .$$

- Pour tout z de V, on a:

$$(3.29) \qquad E\int_0^S g(\omega,t,z)\,dt < +\infty$$

En effet, par un raisonnement similaire à celui qui est utilisé dans (2.9), on vérifie que comme v est dans L_{21} et u dans $(L_{21})^*$, $|u|\ |v|$ est dans L_{11}. De même $|H|\ |H'|$ est dans L_{11}.

La proposition II-1 et sa démonstration prouvent alors la relation:

$$(3.30) \qquad \sup_{z \in L_{\infty\infty}} \langle r, z \rangle - E \int_0^S g(\omega, t, z(\omega, t))\, dt = +\infty \quad .$$

Donc:

$$(3.31) \qquad \sup_{z \in L_{2\infty}} \langle r, z \rangle + E \int_0^S k(\omega, t, z(\omega, t), u(\omega, t), H'(\omega, t))\, dt$$

$$\geq \sup_{z \in L_{\infty\infty}} \langle r, z \rangle - E \int_0^S g(\omega, t, z(\omega, t))\, dt = +\infty \quad .$$

Le théorème en résulte. ∎

<u>Corollaire III-1:</u> Sous l'hypothèse H III-2, tout élément z de R'^* majoré sur $\operatorname{dom} \varphi_{\ell, L}$ appartient à R_2.

<u>Preuve:</u> Par une méthode semblable à celle qui est utilisée pour le corollaire 2 du théoreme 2 de [9], en remplaçant L par $L\,V\,O$ et ℓ par $\ell\,V\,O$, on vérifie que $L\,V\,O$ et $\ell\,V\,O$ satisfont toutes les hypothèses que L et ℓ verifient. On en déduira que $\varphi^*_{\ell VO, LVO}(z) < +\infty$. Donc z est dans R_2. ∎

IV Régularité de $\varphi_{\ell, L}$

Definitions: On dit que L vérifie l'hypothèse H IV-1 si:

a) il existe A et B $\mathscr{T}^*$ mesurable à valeurs respectivement dans $\mathscr{L}(V, V)$ et $\mathscr{L}(V^m, V)$ tels que:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \bullet \displaystyle\int_0^S \|A(\omega, t)\|^2 \, dt \quad \text{est dans } L_\infty^S \\ \bullet \displaystyle\int_0^T \operatorname{supess} \|B(\omega, t)\|^2 \, dt \; < \; +\infty \end{cases}$$

b) il existe (b, b') dans $L_{21} \times L_{22}$ tels que la fonctionnelle I_1 définie sur $L_{2\infty}$:

$$(4.2) \qquad x \xrightarrow[I_1]{} E \int_0^S L(\omega, t, x(\omega, t), A(\omega, t)x(\omega, t) + b(\omega, t), B(\omega, t)x(\omega, t) + b'(\omega, t)\,)\, dt$$

est finie et continue en un point x_1 pour la topologie forte. ■

On dit que L vérifie l'hypothèse H IV-2 si:

a) il existe A et B vérifiant les même propriétés que précedemment.

b) il existe (b, b') dans $L_{21} \times L_{22}$ tels que la fonctionnelle I_2 définie sur $L_{2\infty} \times L_{22}$ par:

$$(4.3) \qquad (x, H) \xrightarrow[I_2]{} E \int_0^S L(\omega, t, x(\omega, t), A(\omega, t)x(\omega, t) + B(\omega, t)H(\omega, t) + b(\omega, t), H'(\omega, t) + b'(\omega, t)\,)\, dt$$

est finie et continue en un point (x_2, H_2) pour la topologie forte. ■

H IV-2 est plus forte que H IV-1. De plus H III-2 et H IV-1 (ou H IV-2) ne sont pas a priori comparables.

Cependant on a le résultat suivant:

<u>Lemme IV-1:</u> Si H IV-1 est vérifiée, I_1 est partout finie et continue sur $L_{2\infty}$ si l'une des deux conditions suivantes est réalise:

a) $\mathscr{F}_0$ est sans atomes.

b) S est p. s. borné inferieurement par $c > 0$ et w est non dégénéré $(m \geq 1)$.

<u>Preuve:</u> Nous prouvons ce lemme quand b) est satisfaite. On note par $\varphi(\omega, t, x)$ l'intégrant $L(\omega, t, A(\omega, t)x + b(\omega, t), B(\omega, t)x + b'(\omega, t))$. On peut supposer $x_1 = 0$. Pour s tel que $0 < s < c$, soit I_1^s la fonctionnelle définie par:

$$(4.4) \qquad I_1^s(x) = E \int_s^S \varphi(\omega, t, x(\omega, t))\, dt \quad .$$

$I_1^s(x)$ est s. c. i., finie et continue en 0. En effet:

$$(4.5) \qquad I_1^s(x) = I_1(1_{t \geq s} x) - E \int_0^s \varphi(\omega, t, 0)\, dt$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|x\|_{2\infty} < \alpha$, $I_1(x) < I(0) + 1$. Donc si $\|x\|_{2\infty} < \alpha$, on a:

$$(4.6) \qquad I_1^s(x) < I(0) + 1 - E \int_0^s \varphi(\omega, t, 0)\, dt \quad .$$

Soit alors x dans $L_{2\infty}$.

$$\sup_{0 \le t \le S} \text{ess} \, |x_t|^2$$

étant intégrable, il existe $\delta > 0$ tel que si A est $\mathscr{F}_S$ mesurable et si $P(A) \le \delta$, alors

$$E\left(1_A \sup_{0 \le t \le S} \text{ess} \, |x_t|^2\right) < \alpha^2$$

Cela entraîne que si A est $\mathscr{F}_S$ mesurable et si $P(A) \le \delta$, on aura:

$$(4.7) \qquad \| 1_A \, 1_{t \ge s} \, x \|_{2\infty} < \alpha .$$

$\mathscr{F}_s$ étant sans atome, puisque w_s est gaussienne, il existe une partition finie $\mathscr{F}_s$ mesurable de Ω notée $(A_s^i)_{i=1 \cdots m_s}$ telle que, pour tout i, $\delta/2 \le P(A_s^i) \le \delta$.

m_s est donc borné par une constante C ne dependant pas de s.

Or:

$$(4.8) \qquad E\, 1_{A_i^s} \int_s^S \varphi(\omega, t, x(\omega, t))\, dt = E \int_s^S \varphi(\omega, t, 1_{A_i^s} x(\omega, t))\, dt$$

$$- E\, 1_{\complement A_i^s} \int_s^S \varphi(\omega, t, 0)\, dt = I_1^s\left(1_{A_s^i} x\right) - E\, 1_{\complement A_i^s} \int_s^S \varphi(\omega, t, 0)\, dt$$

De plus:

$$(4.9) \qquad \| 1_{A_s^i} \, 1_{t \ge s} \, x \|_{2\infty} < \alpha$$

Donc:

$$(4.10) \qquad I_1^s \left(1_{A_s^i}\, x\right) < I(0) + 1 - E \int_0^s \varphi(\omega, t, 0)\, dt = E \int_s^S \varphi(\omega, t, 0)\, dt + 1$$

on en déduit:

$$(4.11) \qquad E\, 1_{A_i^s} \int_s^S \varphi(\omega, t, x(\omega, t))\, dt < E\, 1_{A_i^s} \int_s^S \varphi(\omega, t, 0)\, dt + 1$$

Par sommation, on aura:

$$(4.12) \qquad I_1^s(x) < E \int_s^S \varphi(\omega, t, 0)\, dt + C$$

Comme $\varphi(\cdot, \cdot, x(\cdot, \cdot))$ est minoré par une fonction $dP \otimes dt$ intégrable, on aura, en faisant tendre s vers 0:

$$(4.13) \qquad I_1(x) < I(0) + C$$

I_1 est bien partout finie, donc partout continue par [7] (p. 26) ■

Corollaire: Si l'une des hypothèses a) ou b) du lemme IV-1 est verifiée, H IV-1 entraîne H III-2.

Preuve: Dans H III-1, on prendra:

$$(4.14) \qquad \begin{cases} v = Ax + b \\ H = Bx + b' \end{cases}$$

(v,H) est alors dans $L_{21} \times L_{22}$. ■

Remarque: Ce résultat prouve qu'en fait si H IV-1 est verifiée, le problème est très fortement linéaire. Remarquons aussi que dans le cas purement déterministe traité par Rockafellar, H IV-1 est vérifiée avec A tel que

$$\int_0^T |A_t| \, dt < +\infty \quad . \tag{4.15}$$

H IV-1 correspond en fait dans le cas déterministe à l'hypothèse D_0^2 de Rockafellar dans [9] (paragraphe 6).

H IV-1 et H IV-2 seront utilisées pour résoudre des équations "backward."

Théorème IV-1: Si on suppose que:

a) H IV-1 est satisfaite

b) ℓ_S est finie et continue en c_S élément de L_2^S

int dom $\varphi_{\ell,L}$ (construit pour la topologie forte de R') est non vide, et $\varphi_{\ell,L}$ est continue sur int dom $\varphi_{\ell,L}$ pour la topologie forte de R'.

Preuve: On a:

$$\varphi_{\ell,L}(y,a) = \inf_{x \in R_1} E \int_0^S L(\omega, t, (x+y)(\omega,t), \dot{x}(\omega,t), H(\omega,t))\, dt + \ell_0(x_0) - \ell_S(x_S - a) \tag{4.16}$$

On peut supposer I_1 continue en 0. En effet si on pose:

(4.17) $$L_1(\omega, t, x, v, H) = L(\omega, t, x + x_1(\omega, t), v, H) \quad ,$$

on a:

(4.18) $$\varphi_{\ell, L}(y, a) = \varphi_{\ell, L_1}(y - x_1, a)$$

De plus L_1 vérifie l'hypothèse H IV-1 avec $x_1 = 0$. On supposera donc $x_1 = 0$, puisque si on démontre les résultats pour φ_{ℓ, L_1}, ils seront vrais pour $\varphi_{\ell, L}$.

ℓ_0 étant propre, soit c_0 un élément de L_2^0 tel que

(4.19) $$\ell_0(c_0) < +\infty \quad .$$

On pose:

(4.20) $$x_t^0 = c_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t b'_s \, dw_s$$

x^0 est alors dans $\mathbb{R}_1$ et x_S^0 est dans L_2^S.

On définit a^0 dans L_2^S par:

(4.21) $$a^0 = x_S^0 \quad .$$

Grâce au résultat donné dans [1], soit x_y la solution unique de l'équation:

(4.22) $$\begin{cases} dx_y = A(x_y + y)\, dt + B(x_y + y) \cdot dw \\ x_y(0) = 0 \end{cases}$$

On sait par [1] que $y \to x_y$ et $y \to x_{y_S}$ sont des applications continues de $L_{2\infty}$ dans $L_{2\infty}$ et L_2^S.

On a alors, en posant $y_0 = -x_0$:

$$(4.23)\qquad L(\omega, t, (x^0 + x_y)(\omega, t) + (y^0 + y)(\omega, t), (\dot{x}^0 + \dot{x}_y)(\omega, t), (H^0 + H_y)(\omega, t))$$

$$= L(\omega, t, (x_y + y)(\omega, t), A(x_y + y)(\omega, t) + b(\omega, t), B(x_y + y)(\omega, t) + b'(\omega, t))$$

$$(4.24)\qquad \ell_0((x^0 + x^y)(0), (x^0 + x^y)_S - a^0 - a) = \ell_0(c_0) + \ell_S(c_S + x_{y_S} - a) .$$

Or x^0 est dans $L_{2\infty}$, et donc y^0 est aussi dans $L_{2\infty}$. Comme I_1 est continue en 0, et comme ℓ_S est continu en c_S, (4.23) et (4.24) montrent qu'il existe K, tels que si (y,a) est de norme assez petite dans R', on a:

$$(4.25)\qquad \varphi_{\ell, L}(y^0 + y, a^0 + a) < K \quad .$$

dom $\varphi_{\ell, L}$ contient donc un voisinage de (y^0, b^0) .

S'il existe $(\tilde{y}, \tilde{b})$ dans dom $\varphi_{\ell, L}$ tel que $\varphi_{\ell, L}(\tilde{y}, \tilde{b}) = -\infty$ la convexité de $\varphi_{\ell, L}$ fait que $\varphi_{\ell, L}$ est identiquement égal à $-\infty$ sur int dom $\varphi_{\ell, L}$. Sinon $\varphi_{\ell, L}$ étant finie et majorée sur un ouvert de int dom $\varphi_{\ell, L}$ y est continue par [7] (p. 26). ■

Théorème IV-2: On suppose que:

a) $W_1 = W^{\perp}$

b) H IV-2 est satisfaite

c) ℓ_0 est finie et continue en c_0 élément de L_2^0.

Alors int dom $\varphi_{\ell,L}$ est non vide, et $\varphi_{\ell,L}$ est continue sur int dom $\varphi_{\ell,L}$.

Preuve: On se ramène au cas: $(x_2, H_2) = (0,0)$. ℓ_S étant propre, soit c_S tel que $\ell_S(c_S) < +\infty$. Pour y dans $L_{2\infty}$, soit x^1 la solution de:

$$(4.26) \qquad \begin{cases} dx^1 = A(x^1 + y)\, dt \\ x^1(0) = 0 \end{cases}$$

Par le théorème II-2 de [4] (qui joue un rôle essentiel ici) (1), il existe un et un seul élément (x_0, H, M) de $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$ tel que x^2 est solution de:

$$(4.27) \qquad \begin{cases} dx^2 = (Ax^2 + BH)\, dt + H\, dw + dM \\ x^2(0) = x_0 \end{cases}$$

avec:

$$(4.28) \qquad x_S^2 = a - x_S^1$$

Posons:

$$(4.29) \qquad x = x^1 + x^2 .$$

x est solution de:

---

(1) Il n'est démontré dans [4] qu'avec A et B bornés. La démonstration dans ce cas est identique.

$$(4.30)\quad \begin{cases} dx = (A(x+y) + BH)\,dt + H\cdot dw + dM \quad . \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et de plus:

$$(4.31)\quad x_S = a \quad .$$

Le théorème II-2 de [4] prouve de plus que $(y,a) \to x$ et $(y,a) \to x_0$ sont continus de $L_{2\infty} \times L_2^S$ dans $L_{2\infty}$ et L_2^S. Soit enfin x^0, y^0, b^0 définis par:

$$(4.32)\quad \begin{cases} dx^0 = b\,dt + b'\,dw \\ x^0(0) = c_0 \end{cases}$$

$$(4.33)\quad \begin{cases} x^0 + y^0 = 0 \quad . \\ x_S^0 - b^0 = c_S \end{cases}$$

En raisonnant comme précedemment, on en déduira le théorème.■

<u>Théorème IV-3:</u> On suppose que:

a) $W_1 = W^{\perp}$

b) L'hypothèse H IV-2 est verifiée.

c) $\mathscr{F}_0$ est la tribu grossière.

Alors le plus petit sous-espace de R' engendré par $\operatorname{dom} \varphi_{\ell,L}$ est de codimension finie, au plus égale à la dimension de V. $\operatorname{ri} \operatorname{dom} \varphi_{\ell,L}$ est non vide et $\varphi_{\ell,L}$ est continue sur $\operatorname{ri} \operatorname{dom} \varphi_{\ell,L}$ pour la topologie forte.

Preuve: On reprend la démonstration du théorème IV-3, mais en se limitant à l'espace de codimension finie des (y, a) tels que si x est donné par (4.30)

$$x_0 = 0 \quad . \blacksquare$$

Corollaire IV-1: Si l'hypothèse H III-2 et les hypothèses des théorèmes IV-1, ou IV-2, (resp. IV-3) sont verifiées, pour tout (y, b) de int dom $\varphi_{\ell, L}$ (resp. ri dom $\varphi_{\ell, L}$), tel que $\varphi_{\ell, L}(y, b) > -\infty$, $\partial\varphi_{\ell, L}$ est non vide et continu dans R_2.

Preuve: En effet grâce aux résultats des théorèmes IV-1, IV-2(resp. IV-3), $\varphi_{\ell, L}$ étant continu en (y, b) sur int dom $\varphi_{\ell, L}$ (resp. ri dom $\varphi_{\ell, L}$ et ce dernier ensemble engendrant un sous-espace de codimension finie), $\partial\varphi_{\ell, L}(y, b)$ est non vide dans R', dual fort de R'. De plus si p est dans $\partial\varphi_{\ell, L}(y, b)$, $\varphi^*_{\ell, L}(p) < +\infty$. Le théorème III-1 montre que p est dans R. Sachant que $\varphi^*_{\ell, L}$ coïncide avec $\Phi_{m, M}$ sur R, p est dans R_2. $\blacksquare$

Corollaire IV-2: Si l'hypothèse H III-2 et les hypothèses des théorèmes IV-1 ou IV-2 (resp. IV-3) sont satisfaites, si $\varphi_{\ell, L}$ ne prend pas la valeur $-\infty$, $\Phi_{m, M}$ est convexe et propre. De plus $\Phi^*_{m, M}$ coïncide avec $\varphi_{\ell, L}$ sauf peut-être en des points du bord (resp. du bord relatif) de dom $\varphi_{\ell, L}$. Si $\varphi_{\ell, L}$ prend la valeur $-\infty$, $\Phi_{m, M}$ est identiquement égal à $+\infty$.

Preuve: La preuve est formellement identique à celle du corollaire 4 du théorème 2 de [9]. $\blacksquare$

V Existence d'un contrôle optimal.

On va maintenant chercher sous quelles conditions $(0,0)$ est dans l'intérieur ou dans l'intérieur relatif de $\mathrm{dom}\,\varphi_{\ell,L}$.

Soit $\hat{L}$ et $\hat{\ell}$ les récessions au sens de [13] de L et ℓ, $\hat{M}$ et $\hat{m}$ les récessions de M et m.

Proposition V-1: Les couples $(\hat{L},\hat{\ell})$ et $(\hat{M},\hat{m})$ possédent toutes les propriétés de (L,ℓ) donnés en I. Quand $\Phi_{\ell,L}$ n'est pas identiquement égal à $+\infty$, $\Phi_{\hat{\ell},\hat{L}}$ est la récession de $\Phi_{\ell,L}$ sur R (en lui donnant aussi la valeur $+\infty$ sur $\complement R_1$). De plus $\Phi_{\hat{\ell},\hat{L}}$ est la fonction d'appui de $\mathrm{dom}\,\varphi_{m,M}$. On a le résultat correspondant pour $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}$.

Preuve: La démonstration est identique à la démonstration de la proposition 6 dans [9]. ∎

Proposition V-2: Si les hypothèses des théorèmes IV-1 ou IV-2 sont vérifiées, tout élément de R'^* constant sur $\mathrm{dom}\,\varphi_{\ell,L}$ est nul.

Preuve: Comme $\mathrm{dom}\,\varphi_{\ell,L}$ a un intérieur non vide, la proposition est immédiate. ∎

Proposition V-3: Si l'hypothèse H III-2 et les hypothèses du théorème IV-3 sont verifiées, tout élément de R'^* constant sur $\mathrm{dom}\,\varphi_{\ell,L}$ est dans R_2 et tel que:

$$(5.1) \qquad \Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) = -\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(-z)$$

Il existe $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ qui possèdent les mêmes propriétés que (A,B) dans H IV-1 tel que tout z vérifiant (5.1) est tel que:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} dz = \mathscr{A} z\, dt + \mathscr{B} z\, dw \\ \hat{m}(z_0, z_S) = -\hat{m}(-z_0, -z_S) \end{cases}$$

Les arcs de R_2 vérifiant (5.2) forment un espace de dimension finie égale à la codimension de l'espace engendré par dom $\varphi_{\ell,L}$.

<u>Preuve:</u> Grâce à H IV-2, la preuve est pratiquement identique à la preuve de la proposition 7 de [9]. ■

<u>Définition:</u> Si z est un élément de R_2 tel que (5.1) est verifié, z sera dit arc de récession pour (m, M).

<u>Remarque:</u> Si dans l'énoncé de la proposition V-3, on remplace le théorème IV-3 par les théorèmes IV-1 ou IV-2, on trouve bien que l'arc nul est le seul arc de récession. En effet dans le premier cas on aura $z_S = 0$ puisque ℓ_S est continu en c_S. Le théorème II-2 de [4] entraîne $z = 0$. De même dans le deuxième cas, $z_0 = 0$ et donc $z = 0$.

<u>Théorème V-1:</u> Si l'hypothèse III-2 et les hypothèses des théorèmes IV-1 ou IV-2 (resp. IV-3) sont verifiées, les conditions suivants sont équivalentes:

a) $0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi_{\ell,L}$ (resp. $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} \varphi_{\ell,L}$).

b) Il n'existe aucun z dans R_2 sauf l'arc nul (resp. un arc de récession) tel que:

(5.3) $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) \leq 0$. (resp. et pour les arcs de récession

$$\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) = 0)$$

Preuve: Puisque int dom $\varphi_{\ell,L}$ est non vide (resp. puisque ri dom $\varphi_{\ell,L}$ est non vide et puisque la codimension de l'espace engendré par cet ensemble est finie), pour que O appartienne à int dom $\varphi_{\ell,L}$ (resp. ri dom $\varphi_{\ell,L}$), il faut et il suffit qu'il n'existe aucun z de R'* séparant O et dom $\varphi_{\ell,L}$ "proprement" au sens de [13].

Or un z séparant proprement dom $\varphi_{\ell,L}$ et O serait majoré sur dom $\varphi_{\ell,L}$, donc appartiendrait à R_2 par le corollaire III-1.

Sachant que:

$$(5.4) \qquad \sup_{x \in \mathrm{dom}\,\varphi_{\ell,L}} \langle z,x\rangle = \Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) \quad ,$$

on aurait donc:

$$(5.5) \qquad \begin{cases} \Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) \leq 0 \\ -\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(-z) < \Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) \end{cases}$$

Pour que a) soit satisfaite, il faut et il suffit donc que pour tout z de R_2 non nul $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) > 0$ (resp. $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z)$) n'est négatif que si z est un arc de récession et alors $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) = 0$. ■

Corollaire V-1: Sous les hypothèses du théorème V-1, si la condition b) est verifiée, $\Phi_{m,M}$ a un minimum sur R , et de plus, on a:

$$(5.6) \qquad \inf_{x \in R_1} \Phi_{\ell,L}(x) = -\min_{p \in R_2} \Phi_{m,M}(p) < +\infty \quad .$$

<u>Preuve:</u> Si $\varphi_{\ell,L}$ prend la valeur $-\infty$ sur int dom $\varphi_{\ell,L}$ (resp. ri dom $\varphi_{\ell,L}$), sachant que O est dans cet ensemble, $\varphi_{\ell,L}(0) = -\infty$, et le résultat est vrai.

Sinon $\varphi_{\ell,L}$ est fini et continu en 0. De plus, sa duale sur R'* est égale à $\Phi_{m,M}$. Enfin le corollaire IV-1 montre que $\partial\varphi_{\ell,L}(0,0)$ est non vide et contenu dans R_2. Le corollaire en résulte. ■

VI Régularité du contrôle.

Nous nous interessons ici à la régularité de $\dot{x}$ et $\dot{p}$, en temps. r désigne un réel tel que $1 \leq r \leq 2$.

Definitions: On note R^r l'ensemble des $x = (x_0, \dot{x}, H, M)$ de R tels que $\dot{x}$ appartient à L_{2r}, c'est à dire:

$$(6.1) \qquad E\left(\int_0^S |\dot{x}_t|^r \, dt\right)^{2/r} < +\infty .$$

On note R_1^r et R_2^r les espaces $R^r \cap R_1$ et $R^r \cap R_2$.

On dit que H^r I-2 est vérifiée si H I-2 est vérifiée avec y_0 dans L_{2r}.

On dit que H^r III-2 est vérifiée si H III-2 est vérifiée avec v dans L_{2r}.

On dit que H^r IV-1 est vérifiée si H IV-1 est vérifiée avec b dans L_{2r}.

On dit que H^r IV-2 est vérifiée si H IV-2 est vérifiée avec:

a) $\int_0^S \|B_t\|^{2r/(2-r)} dt$ est dans L_∞.

b) b est dans L_{2r}.

Quand $r = 2$ la condition a) s'interprète par:

B est essentiellemement borné. ■

Si H^r III-2 est satisfaite, on a un résultat équivalent à la proposition III-1.

Si H^r IV-1 est vérifiée, pour x dans $L_{2\infty}$, $Ax+b$ est dans L_{2r} (rappelons que $r \leq 2$).

Si H^r IV-2 est vérifiée, si (x, H) est dans $L_{2\infty} \times L_{22}$, $Ax + BH + b$ est dans L_{2r}.

On pose:

$$(6.2) \qquad \varphi^r_{\ell, L}(y, b) = \inf_{x \in R^r_1} \Phi^{y, b}_{\ell, L}(x)$$

Pour alléger les notations, on indexera le numéro d'une reférence par r chaque fois que les hypothèses doivent être indexées par r.

<u>Proposition VI-1:</u> Si H^r III-2 et les hypothèses des théorèmes IV-1-r ou IV-2-r (resp. IV-3-r) sont vérifiées, les conclusions des théorèmes IV-1 ou IV-2 (resp. IV-3) sont vraies pour $\varphi^r_{\ell, L}$. De plus $\varphi_{\ell, L}$ et $\varphi^r_{\ell, L}$ coïncident sauf peut-être en des points du bord (resp. du bord relatif) de dom $\varphi_{\ell, L}$.

<u>Preuve:</u> Si H^r III-2 est vérifiée, H^r I-2 est vérifiée, et on peut refaire les calculs du théorème III-1 de [2] pour montrer que la duale de $\varphi^r_{\ell, L}$ coïncide avec $\Phi_{m, M}$ sur R. De même H^r III-2 permettra de montrer que $\varphi^{r*}_{\ell, L}$ prend la valeur $+\infty$ sur R'*/R, comme pour le théorème III-1. Enfin, comme pour les théorèmes IV-1 ou IV-2 (resp. IV-3), on montrera que int dom $\varphi^r_{\ell, L}$ (resp. ri dom $\varphi^r_{\ell, L}$)

est non vide (resp. est non vide et engendre un espace de codimension finie) et que $\varphi^r_{\ell,L}$ est continue sur cet ensemble. Or $\varphi_{\ell,L}$ et $\varphi^r_{\ell,L}$ ont même duale sur R'^*. Donc $\overline{\text{dom}\,\varphi_{\ell,L}} = \overline{\text{dom}\,\varphi^r_{\ell,L}}$. De plus comme $\varphi_{\ell,L} \leq \varphi^r_{\ell,L}$, on a:

$$\text{dom}\,\varphi^r_{\ell,L} \subset \text{dom}\,\varphi_{\ell,L} .$$

Comme $\text{dom}\,\varphi^r_{\ell,L}$ a un intérieur non vide (resp. un intérieur relatif non vide de codimension finie), est convexe et a même adhérence que $\text{dom}\,\varphi_{\ell,L}$ on en déduit (par une application du théorème de Hahn-Banach) que

$$\text{int dom}\,\varphi_{\ell,L} = \text{int dom}\,\varphi^r_{\ell,L} .$$

Alors $\varphi_{\ell,L}$ et $\varphi^r_{\ell,L}$ coïncident sur $\text{int dom}\,\varphi_{\ell,L}$ (resp. $\text{ri dom}\,\varphi_{\ell,L}$). En effet si $\varphi^r_{\ell,L}$ prend la valeur $-\infty$ sur un des points de cet ensemble, elle la prend partout sur lui, et coïncide avec $\varphi_{\ell,L}$. Sinon par le corollaire IV-2-r, $\Phi_{m,M}$ est convexe et propre. $\varphi_{\ell,L}$ ayant pour duale $\Phi_{m,M}$ ne peut prendre la valeur $-\infty$. $\varphi_{\ell,L}$ et $\varphi^r_{\ell,L}$ sont continues sur $\text{int dom}\,\varphi_{\ell,L}$ (resp. $\text{ri dom}\,\varphi_{\ell,L}$), et coïncident avec leur $\sigma(R',R'^*)$ régularisée qui est $\Phi^*_{m,M}$ sur cet ensemble. ■

<u>Corollaire VI-1:</u> Sous les hypothèses de la proposition V-1, s'il n'existe aucun élément z de R_2 sauf 0 (resp. un arc de récession) tel que $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) \leq 0$, (resp. et si pour les arcs de récessions $\Phi_{\hat{m},\hat{M}}(z) = 0$), alors:

$$(6.3) \quad \inf_{x \in R_1} \Phi_{\ell,L}(x) = \inf_{x \in R_1^r} \Phi_{\ell,L}(x) = -\min_{p \in R_2} \Phi_{m,M}(p) < +\infty$$

Preuve: Le théorème V-1 implique que O est dans int dom $\varphi_{\ell,L}$ (resp. ri dom $\varphi_{\ell,L}$) et grâce à la proposition V-1, $\varphi_{\ell,L}(0) = \varphi^r_{\ell,L}(0)$. On utilise alors le corollaire V-1. ■

Ces résultats vont être utilisés dans la partie suivante.

VII Exemples

On suppose que le couple (L, M) satisfait l'hypothèse H I-1.

(L_1, M_1) désigne un deuxième couple d'intégrants construit comme précedemment.

Proposition VII-1: Les hypothèses H III-2 et H IV-1 sont satisfaites si:

a) il existe (A, B) possèdant les propriétés H IV-1 a)

b) il existe une fonctionnelle convexe propre sur V semi-continue inférieurement η telle que:

$$\text{(7.1)} \qquad \liminf_{\|\lambda\| \to +\infty} \frac{\eta(\lambda)}{\|\lambda\|^2} = +\infty \quad .$$

c) il existe un couple (L_1, M_1) verifiant H I-2.

d) il existe γ dans L_{21}

tels que

$$\text{(7.2)} \qquad M(\omega, t, p, s, H') \geq M_1(\omega, t, p, s, H') + \eta(s + A^*(\omega, t)p + B^*(\omega, t)H - \gamma(\omega, t))$$

Preuve: η et η^* étant deux intégrants convexes propres en dualité, par les résultats de [10], et les fonctionnelles $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}^*$ definies sur L_{22} par:

$$\text{(7.3)} \qquad x \xrightarrow[\mathscr{T}]{} E \int_0^S \eta(x(\omega, t))\, dt$$

$$u \xrightarrow[\mathscr{T}^*]{} E \int_0^S \eta^*(u(\omega, t))\, dt$$

sont duales l'une de l'autre.

b) implique que pour tout α de L_{22} $\{x \in L_{22}; \mathscr{T}(x) - \langle \alpha, x \rangle \leq p\}$ est fermé et borné dans L_{22}, donc faiblement compact. Cela entraîne que $\mathscr{T}^*$ est finie et continue en tout point de L_{22}.

Comme (L_1, M_1) possède la propriété H I-2, on sait qu'il existe (x_0, y_0, H_0, β) dans $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ tel que:

$$(7.4) \qquad M_1(\omega, t, p, s, H') \geq \langle y_0(\omega, t), p \rangle + \langle x_0(\omega, t), s \rangle + \langle H_0(\omega, t), H' \rangle - \beta(\omega, t) \quad .$$

On déduit de (7.2) et (7.4):

$$(7.5) \qquad \varphi(\omega, t, x) = L(\omega, t, x, A(\omega, t)x - A(\omega, t)x_0(\omega, t) + y_0(\omega, t), B(\omega, t)x - B(\omega, t)x_0 + H_0(\omega, t)) \leq \eta^*(x - x_0(\omega, t)) + \langle \gamma(\omega, t), x(\omega, t) - x_0(\omega, t) \rangle + \beta(\omega, t)$$

x_0 étant dans $L_{2\infty}$, (Ax_0, Bx_0) est dans $L_{21} \times L_{22}$. (L, M) possédant la propriété H I-1, la fonctionnelle

$$x \xrightarrow[I_1]{} E \int_0^S \varphi(\omega, t, x(\omega, t))\, dt$$

est bien définie sur $L_{2\infty}$. La relation (7.5) montre qu'elle est majorée par une fonctionnelle finie et continue sur $L_{2\infty}$, puisque $\mathscr{T}^*$ est continue sur L_{22}. I_1 est donc finie et continue partout sur $L_{2\infty}$, ce qui implique que H III-2 et H IV-1 sont satisfaites. ■

Proposition VII-2: Les hypothèses H III-2 et H IV-2 sont satisfaites si:

a) il existe (A, B) possédant les propriétés H IV-1 a)

b) il existe une fonctionnelle convexe propre sur $V \times V^m$, semi-continue inférieurement telle que:

$$(7.6) \qquad \liminf_{\|\lambda\| + \|\mu\| \to +\infty} \frac{\eta(\lambda, \mu)}{\|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2} = +\infty .$$

c) il existe (L_1, M_1) vérifiant H I-2.

d) il existe (γ, γ') dans $L_{21} \times L_{22}$

tels que

$$M(\omega, t, p, s, H') \geq M_1(\omega, t, p, s, H') + \eta(s + A^*(\omega, t)p - \gamma(\omega, t), H' + B^*(\omega, t)p - \gamma'(\omega, t))$$

Preuve: On utilise les mêmes méthodes que précedemment.

On montre en effet la relation:

$$(7.7) \qquad \varphi'(\omega, t, x, H) = L(\omega, t, x, A(\omega, t)x + B(\omega, t)H - A(\omega, t)x_0 + y_0(\omega, t), H + H_0(\omega, t)) \leq \eta^*(x - x_0(\omega, t), H) + \langle \gamma(\omega, t), x - x_0(\omega, t) \rangle + \langle \gamma'(\omega, t), H' \rangle \quad \blacksquare$$

Corollaire VII-1: Sous les hypothèses de la proposition VII-1, H^r III-2 et H^r IV-1 sont verifiées si (L_1, M_1) verifie H^r I-2.

Preuve: On peut choisir y_0 dans L_{2r}. $-Ax_0 + y_0$ étant dans L_{2r}, le corollaire en résulte. ■

Corollaire VII-2: Sous les hypothèses de la proposition VII-2, H^r III-2 et H^r IV-2 sont verifiées si:

a) $$\int_0^S \|B_t\|^{(2r)/(2-r)} \, dt \quad \text{est dans } L_\infty \ .$$

b) (L_1, M_1) verifie H^r I-2 .

Preuve: En effet en choisissant y_0 dans L_{2r}, $-Ax_0 + y_0$ est dans L_{2r}. a) implique bien alors que H^r III-2 et H^r IV-2 sont satisfaites. ■

Theoreme VII-1: On suppose satisfaites les hypothèses suivantes:

a) Les hypothèses de la proposition VII-1 sont vérifiées avec γ dans L_{2r} et B tel que

$$\int_0^S \|B_t\|^{(2r)/(2-r)} \, dt$$

est dans L_∞ .

b) ℓ_S est fini et continu en un élément c_S de L_2^S .

c) L'hypothèse b) du théorème V-1 est vérifiée. Alors:

$$(7.8) \qquad -\infty < \min_{p \in R_2} \Phi_{m,M}(p) = \min_{p \in R_2^r} \Phi_{m,M}(p)$$

$$= -\inf_{x \in R_1} \Phi_{\ell,L}(x) = -\inf_{x \in R_1^r} \Phi_{\ell,L}(x)$$

Preuve: Si $\Phi_{m,M}(p) < +\infty$, l'inégalité (7.2) montre que $\dot{p} + A^*p + B^*H - \gamma$ est dans L_{2r} .

Comme $r \leq 2$, et comme $A^*p + B^*H, - \gamma$ est dans L_{2r}, $\dot{p}$ est dans L_{2r} et p est dans R_2^r.

Soit (x_0, y_0, H_0, β) l'élément de $L_{2\infty} \times L_{21} \times L_{22} \times L_{11}$ introduit plus haut.

Si on pose:

$$(7.9) \qquad M'(\omega, t, p, s, H) = M(\omega, t, p, s, H) - \langle y_0(\omega, t), p \rangle$$

on aura:

$$(7.10) \qquad M'(\omega, t, p, s, H) \geq \langle x_0(\omega, t), s \rangle + \langle H_0(\omega, t), H' \rangle - \beta(\omega, t)$$
$$+ \eta(s + A^*(\omega, t)p + B^*(\omega, t)H' - \gamma(\omega, t)) \quad .$$

L'intégrant correspondant à M' est L' défini par:

$$(7.11) \qquad L'(\omega, t, x, v, H) = L(\omega, t, x, v + y_0(\omega, t), H) \quad .$$

Par le corollaire VI-1, H^r III-2 et H^r IV-1 sont vérifiées par (L', M').

Grâce à b), par la proposition VI-1, $\varphi_{\ell, L'}$ et $\varphi^r_{\ell, L'}$ coïncident sur $\operatorname{dom} \varphi_{\ell, L'}$ sauf peut-être en des points du bord.

Or on vérifie immédiatement les relations:

$$(7.12) \qquad \begin{cases} \varphi_{\ell, L'}(y, b) = \varphi_{\ell, L}(y + \bar{y}, b + \bar{b}) \\ \varphi^r_{\ell, L'}(y, b) = \varphi^r_{\ell, L}(y + \bar{y}, b + \bar{b}) \end{cases}$$

avec

$$(7.13) \qquad \overline{y}(\omega,t) = \int_0^t y_0(\omega,s)\,ds \qquad \overline{b}(\omega = \int_0^S y_0(\omega,t)\,dt$$

$\varphi_{\ell,L}$ et $\varphi^r_{\ell,L}$ coïncident donc sur dom $\varphi_{\ell,L}$ sauf peut-être au bord.

Or l'hypothèse b) du théorème V-1 garantit que 0 est intérieur à dom $\varphi_{\ell,L}$. On applique alors le corollaire V-1. ∎

Théorème VII-2: On suppose satisfaites les hypothèses suivantes:

a) les hypothèses de la proposition VII-2 sont vérifiées avec γ dans L_{2r}, et B tel que

$$\int_0^S \|B_t\|^{(2r)/(2-r)}\,dt$$

est dans L_∞.

b) les hypothèses a) et c) des théorèmes IV-2 (resp. IV-3) sont satisfaites

c) l'hypothèse b) du théorème V-1 est vérifiée (resp. relativement aux hypothèses du théorème IV-3).

Alors:

$$-\infty < \min_{p\in R_2} \Phi_{m,M}(p) = \min_{p\in R_2^r} \Phi_{m,M}(p) = -\inf_{x\in R_1} \Phi_{\ell,L}(x)$$

$$= -\inf_{x\in R_1^r} \Phi_{\ell,L}(x)$$

Preuve: La démonstration est très semblable à la démonstration précédente. ∎

VIII Conclusion.

Les conditions d'existence de contrôle, tout en coïncidant pratiquement avec les conditions de Rockafellar dans le cas déterministe, sont très fortement linéaires dans le cas général.

Elles s'appliquent en conséquence particulièrement bien au contrôle d'équations linéaires. Bien que nous utilisions une méthode directe dans [4] pour le cas linéaire quadratique, le lecteur vérifiera que les conditions d'existence de solutions pour les problèmes primal et dual sont vérifiées.

Cependant une classe importante de problèmes de contrôle stochastique ne sont pas "fortement consistentes"* au sens de [13] et admettent pourtant des solutions, ainsi que leur problème dual : il s'agit en particulier des cas où on contrôle en fait une densité de probabilité: nous utilisons pour ces cas des méthodes plus fortes et plus fines, qui utilisent la convexité de façon différente dans [3]: on obtient pour ces cas, en relaxant la condition de convexité, des conditions très générales d'existence de contrôles markoviens. Il va de soi que les critères d'existence donnés ici, qui sont basés entièrement sur la "strong consistency" du problème pour une classe de perturbations ne s'appliquent pas.

* (Strongly consistent)

[1] Bismut, J. M.: Analyse convexe et probabilités. Thèse. Faculté des Sciences de Paris. A paraître.

[2] Bismut, J. M.: Conjugate convex functionals in optimal stochastic control. A paraître dans J. of Math. Anal. and Appl.

[3] Bismut, J. M.: An existence result in optimal stochastic control. Soumis pour publication aux Trans. of the Am. Math. Society.

[4] Bismut, J. M.: Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. A paraître.

[5] Meyer, P. A.: Probabilités et Potentiels. Hermann, Paris. Traduction englaise: Blaisdell, Boston.

[6] Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités no. 1. Lecture Notes in Mathematics no.39 p. 72-162. Springer-Verlag.

[7] Moreau, J. J.: Fonctionnelles convexes. Séminaire d'équations aux dérivées partielles. 1966-1967. Collège de France.

[8] Rockafellar, R.T.: Conjugate Convex Functions in Optimal Control and the Calculus of Variations. J. of Math. Anal. and Appl. vol. 32 no. 1, October 1970, p. 174-222.

[9] Rockafellar, R.T.: Existence and duality Theorems for convex problems of Bolza. Trans. of the Am. Math. Society. vol. 159, September 1971, p. 1-40.

[10] Rockafellar, R.T.: Integrals which are convex functionals. Pacific J. of Math. vol. 243, 1968 p. 525-539.

[11] Rockafellar, R.T: Convex integral functionals and duality. A paraître dans: Contributions to non linear functional analysis. Zarantonello, ed. Academic Press, 1971.

[12] Rockafellar, R.T: Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. J. of Math. Anal. and Appl. vol. 28-1, 1969, p. 4-25.

[13] Rockafellar, R.T: Convex Analysis. Princeton University Press, 1970.

E

Le problème de l'observation incomplète

Le problème de l'observation incomplète

Le problème de l'observation incomplète apparaît lorsque l'état du système n'est pas directement observable. On observe généralement certaines composantes bruitées de l'état. Ce problème n'a généralement pas de solutions, même en utilisant les méthodes de G.

Nous allons voir comment notre formalisme est applicable dans les cas classiques. Les notations sont les notations de A et B .

1- Espérance conditionnelle d'un intégrant convexe par rapport à $\mathcal{T}^*$.

On note par E l'espace $\Omega \times [0,T]$ (T étant un réel positif) muni de la tribu $\mathcal{F} \otimes B([0,T])$ qu'on complètera pour la mesure $dP \otimes dt$. On a alors:

Théorème 1-1: Soient $L(V)$ et $L'(V)$ deux espaces décomposables de fonctions mesurables définies sur E, à valeurs dans V. Soient j et j^* deux integrants convexes normaux en dualité, definis sur $E \times V$.

On suppose que : (a) il existe x_0 dans $L^{\mathcal{T}^*}(V)$, tel que $j(\cdot, x_0(\cdot))$ est $dP \otimes dt$ intégrable.

(b) il existe α_0 dans $L'(V)$, tel que $j^*(\cdot, \alpha_0(\cdot))$ est $dP \otimes dt$ intégrable.

Alors on peut construire un integrant convexe normal unique à un ensemble de $dP \otimes dt$ mesure nulle près, noté $j_{\mathcal{T}^*}$, tel que si x est dans $L^{\mathcal{T}^*}(V)$,

$j_{\mathcal{T}^*}(\cdot, x(\cdot)) \in E^{\mathcal{T}^*} j(\cdot, x(\cdot))$.

De plus si $j^*_{\mathcal{T}^*}$ est l'integrant dual de j, les fonctionnelles

$$x \to \int j_{\mathcal{T}^*}(\cdot, x(\cdot))\, dP \otimes dt$$

et

$$\alpha \to \int j^*_{\mathcal{T}^*}(\cdot, \alpha(\cdot))\, dP \otimes dt$$

définies respectivement sur $L^{\mathcal{T}^*}(V)$ et $L'^{\mathcal{T}^*}(V)$ sont convexes, propres, et duales l'une de l'autre.

<u>Preuve:</u> Ce théorème n'est autre que le théorème III-3 de [A] appliqué dans un cas particulier. On a utilisé ici le fait que $\mathcal{T}^*$ est un tribu complète. Remarquons enfin que l'opérateur d'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{T}^*}$ a été défini dans la définition 1 de J .

<u>Remarque 1:</u> Il serait intéressant de savoir si ce résultat reste vrai si on se limite à la tribu $\mathcal{T}$, sans par ailleurs compléter la tribu $\mathcal{F} \otimes B([0,T])$, compte tenu de la structure particulière de $\mathcal{T}$.

Nous allons voir 2 comment ce résultat pourra être utilisé pour transformer des problèmes non observables en problèmes observables.

2- <u>Application de l'espérance conditionnelle au contrôle.</u>

On reprend l'ensemble des hypothèses de B à l'exception de la première hypothèse de II-A: on suppose ici que L est un intégrant convexe normal défini sur $\Omega \times [0,+\infty[\times V \times V \times V^m$, $\Omega \times [0,+\infty[$ étant considéré comme l'espace mesuré $(\Omega \times [0,+\infty[, \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}([0,+\infty[), dP \otimes dt)$.

Soit L' l'intégrant espérance conditionnelle de L. Alors nécessairement, pour x dans R_1

$$\varphi_{\ell, L}(x) = \varphi_{\ell, L'}(x)$$

Le couple (L', M') verifie alors les mêmes hypothèses que le couple (L, M), et on peut utiliser les résultats de [B].

Il est remarquable que malgré le caractère "évident" de cette opération, elle est à la base de tous les résultats qu'on peut obtenir lorsque l'observation est incomplète.

Nous donnons pour cela l'exemple suivant:

<u>Exemple:</u> U est un espace vectoriel de dimension finie.

A est un élément de $\mathscr{L}(V, V)$, B un élément de $\mathscr{L}(U, V)$

w est un mouvement Brownien n-dimensionnel.

Z est donné par:

$$\begin{cases} dZ = (AZ + Bu) \cdot dt + dw \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

C est un opérateur de V dans H espace vectoriel de dimension finie.

η est un mouvement Brownien indépendant de w.

L'observation est donnée par:

$$0_t = \int_0^t CZ_s \, ds + \eta_t \quad .$$

On définit alors Z_1 par:

$$\begin{cases} dZ_1 = AZ_1 \, dt + dw \\ Z_1(0) = 0 \end{cases}$$

On veut que u soit "fonction" des observations passés de façon à minimiser

$$E \int_0^T K(t, Z_t, u_t) \, dt \quad .$$

On fera les hypothèses convenables de continuité et de mesurabilité sur K et on supposera K positif. Si l'on pose:

$$H_t = \int_0^t CZ_{1s} \, ds + \eta_t \quad ,$$

on constate qu'on demande à u_t d'être "fonction" de

$$(H_s \quad s \leq t \; ; \; \int_0^s u_\sigma \, d\sigma \quad s \leq t) \quad .$$

Intuitivement, on s'aperçoit que la seule observation "effective" est $(H_s \leq t)$, lorsque la partie provenant du contrôle est supposée extérieure au système. Si l'on n'adopte pas cette convention, on arrive rapidement à des absurdités. En effet il suffit par exemple d'augmenter la dimension de l'espace des contrôles de m unités et d'appliquer suivant ces nouvelles dimensions le contrôle w_t.

Or on a :

$$w_t = \lim_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t w_s\, ds - \int_0^{t-\varepsilon} w_s\, ds\right) .$$

w_t est donc bien fonction de

$$\left(\int_0^s w_\sigma\, d\sigma \quad s \le t\right) .$$

On se ramène dans ces conditions, en partant d'un problème où l'observation est bruitée à un problème où l'observation est totale (ce qui est manifestement contraire à l'origine physique du problème) : en effet le contrôle w suivant les m composantes supplémentaires n'a pas d'action sur le système. L'interprétation précédente résulte donc d'une convention et ne peut être démontrée. On se ramène en conséquence à un problème de contrôle canonique en posant: $\mathscr{F}_t = (H_s \quad s \le t) \cup \mathscr{N}$, $\mathscr{N}$ désignant les négligeables de Ω. En effet Z_1 étant un processus de Markov à trajectoires continues, par [B] Exemple II-1 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ possède les propriétés a), b) de B-Partie I.5 (*)

Soit Z'_1 la version à trajectoires continues de $E^{\mathscr{F}_t} Z_{1t}$ donnée par le filtre de Kalman ([2] p. 126) .

Si on pose:

$$M_t = H_t - \int_0^t CZ'_{1s}\, ds \quad ,$$

(*) En utilisant une transformation de Girsanov, on pourra montrer comme en [2] (p. 232) qu'il existe une mesure de probabilité absolument continue par rapport à P pour laquelle Z_1 est un mouvement Brownien.

par la proposition 1 de [J] M_t est une martingale continue. De plus, par [1] Théorème 2 p. 92, on a :

$$\langle M_i, M_j \rangle_t = \lim \sum_k (H_i(t_{k+1}) - H_i(t_k))(H_j(t_{k+1}) - H_j(t_k))$$

$$= \lim \sum_k (w_i(t_{k+1}) - w_i(t_k))(w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k))$$

$$= \delta_{ij}\, t \quad .$$

Par [1] (proposition 5 p. 110), M_t est un mouvement Brownien.

De plus Z_1' est donné par le filtre de Kalman qui a la forme (voir par exemple [2] p. 126):

$$\begin{cases} dZ_1' = AZ_1' \, dt + k \, dM \\ Z_1'(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

k_t étant une famille d'opérateurs de $\mathscr{L}(V, V)$ dependant de manière mesurable de t.

H_t et M_t engendrent donc la même famille de tribus $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$.

Le caractère gaussien des différentes variables fait que $\{Z_{1t}' - Z_{1t}\}$ est indépendant de $\mathscr{F}_t$ pour tout t .

Soit q_t la densité gaussienne de la distribution de probabilité de $Z_{1t} - Z_{1t}'$.

On pose: $L_1(t, x, u) = \int K(t, x + y, u) q_t(y) \, dy$.

Alors $L_1(t, X + Z_{1t}'(\cdot), u)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $K'(t, X + Z_{1t}(\cdot), u)$ par rapport à $\mathscr{T}^*$.

On pose alors : $X_t = Z_t + Z'_{1t}$

X est donné par:

$$\begin{cases} dX = (AX + Bu)\, dt + k\, dM \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

et il faut minimiser:

$$E \int_0^T L_1(t, X_t, u_t)\, dt$$

avec un contrôle bien mesurable par rapport à $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$.

On s'est ramené à un problème de contrôle classique avec observation complète. Les théorèmes du type "principe de séparation" n'ont alors rien d'étonnant dans ce contexte (on remarquera que toutes ces opérations sont possibles grâce à la linéarité des équations considérées, sans hypothèse de convexité sur le critère) .

[1] Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités 1. Lecture Notes in Mathematics no. 39. pp. 72-162. Springer Verlag 1969.

[2] Wong, E.: Stochastic processes in Information and dynamical systems. McGraw Hill, 1971.

F

An example of optimal stochastic control with constraints

AN EXAMPLE OF OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL WITH CONSTRAINTS

By

Jean - Michel Bismut

Ingénieur au Corps des Mines

Personal address: 4 rue des Mariniers
Appt. 107
Paris 140
FRANCE

(*) This paper is written after the 7th chapter of a Thesis to be submitted in Pure Mathematics at the Faculté des Sciences of Paris. It has been partially supported by I. R. I. A. (Institut de Recherches en Informatique et Automatique Domaine de Voluceau 78 Rocquencourt FRANCE).

F

ABSTRACT

The purpose of this paper is to apply a very simple form of the Hahn-Banach theorem to a problem of stochastic optimization with a supply constraint. The Lagrange multiplier associated to the constraint defines a stochastic process, the properties of which are extensively studied.

The purpose of this paper is to solve an apparently very simple problem of optimal stochastic control. More specifically, we are going to find an explicit solution for a problem of minimization of a linear functional with a quadratic supply constraint on the control.

To solve the problem, a stochastic Lagrange multiplier is introduced, in the space of additive measures. It is then proved that this multiplier defines a local martingale which appears in the Ito-Watanabe-Meyer multiplicative decomposition of the right-continuous supermartingale defined by the dynamic programming process. (See [9]) The solution of the problem is then expressed very simply by means of this local martingale.

The procedure is presented in a more general duality framework for optimal stochastic control in [3]. In particular, by transforming very easily the problem which we solve into a very simple problem of optimal stochastic control, we show in [3] that a certain type of state constraint changes the Lagrange multiplier associated to some problems of optimal stochastic control, which is in many cases a semi-martingale, into a local semi-martingale. This is to compare with the results of deterministic control given in [11], where the Lagrange multiplier, which is generally an absolutely continuous function, is changed into a right continuous bounded variation function, when state constraints are introduced.

To avoid excessive notational difficulties, we give none of these generalizations, and we refer to [3] for a more general treatment of this type of constraints. This will also enable us to concentrate on the probabilistic difficulties of the problem which are far more serious here.

All the basic results in probability theory which we will use can be found in [5], [6], [7] and [8].

I The problem

Let V be a finite-dimensional space.

Let $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ be a complete probability space.

Let $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ be an increasing right-continuous sequence of complete sub-σ-fields of $\mathscr{F}$ ([5] IV 30).

Let $\mathscr{T}$ be the σ-field in $\Omega \times [0, +\infty[$ of the well-measurable sets ([5] VIII-D14), $\mathscr{T}^*$ the completion of $\mathscr{T}$ for the measure $dP \otimes dt$. For our purpose, and using the modification theorems of Meyer, we could have used for $\mathscr{T}$ the σ-field of measurable adapted sets ([5] IV D45), progressive sets ([5] IV D45), or predictable sets ([7] no. 203), which have the same completion for $dP \otimes dt$ by [7] no. 210-212-214 and 215.

Let X_t be a $\mathscr{T}^*$ measurable process with values in V, such that:

$$(1.1) \qquad E \int_0^{+\infty} |X_t|^2 \, dt < +\infty .$$

<u>Definition I-1:</u> L_{22} is the space of the $dP \otimes dt$ classes of $\mathscr{T}^*$ measurable functions u with values in V, such that

$$E \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt < +\infty$$

A norm is defined in L_{22} by:

$$(1.2) \qquad \|u\|_{22} = \left(E \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Definition I-2: H is the space of the $dP \otimes dt$ classes of $\mathcal{T}^*$ measurable functions, with values in V, such that

$$\int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt \quad \text{is in } L_\infty \quad (*)$$

Definition I-3: K is the subset of the elements u of H such that:

$$(1.3) \qquad \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt \leq 1 \quad \text{a. s.}$$

H and K are obviously subsets of L_{22}.

Let I be the linear functional defined on L_{22} by:

$$(1.4) \qquad u \to E \int_0^{+\infty} \langle X_t, u_t \rangle \, dt$$

Definition I-4: The problem of control which we want to solve is the minimization of I on K.

This problem is trivial in the deterministic case. The problem comes entirely from the stochastic nature of the problem, and more particularly from the information constraint.

(*) L_∞ is the space of real random variables, which are essentially bounded.

II Existence - Introduction of a Lagrange multiplier

The problem of existence is easy to solve

Proposition II-1: I has a minimum on K

Proof: L_{22} is a Hilbert space. K is non empty (0 is in K), convex and closed in L_{22}. To prove this last point, let $\{u^n\}_{n \in N}$ be a sequence of elements of K, converging in L_{22} to u. Then:

$$(2.1) \qquad E\left|\int_0^{+\infty} \left(|u_t^n|^2 - |u_t|^2\right) dt\right| \leq E\int_0^{+\infty} \left||u_t^n|^2 - |u_t|^2\right| dt$$

$$\leq E\int_0^{+\infty} |u_t^n - u_t||u_t^n + u_t| \; dt$$

The sequence $\{u^n\}$ being bounded in L_{22}, one can find $\kappa > 0$ such that:

$$(2.2) \qquad E\left|\int_0^{+\infty} \left(|u_t^n|^2 - |u_t|^2\right) dt\right| \leq \kappa \, \|u^n - u\|_{22}$$

(2.2) proves that

$$\int_0^{+\infty} |u_t^n|^2 \; dt$$

converges in probability to

$$\int_0^{+\infty} |u_t|^2 \; dt \quad .$$

u is then in K. K is necessarily weakly compact. I being weakly continuous has a minimum on K. ■

Theorem II-1: The problem of minimization of I on K is equivalent to the search of a saddle point on $H \times (L_\infty)^*_+$ (1) of the functional:

$$(2.3) \qquad (u,\mu) \xrightarrow[\mathscr{J}]{} I(u) + \langle \mu, \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt - 1 \rangle$$

Proof: Let B the mapping defined on H with values in L_∞ by:

$$(2.4) \qquad u \longrightarrow \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt - 1 \; .$$

If we give to L_∞ its natural order, B is convex, in the sense that for t in [0, 1] and (u_1, u_2) in H, then:

$$(2.5) \qquad B(tu_1 + (1-t)\, u_2) \leq t B(u_1) + (1-t)\, B(u_2)$$

Moreover K is the set of elements u in H such that:

$$(2.6) \qquad B(u) \leq 0$$

Besides, one has:

$$(2.7) \qquad B(0) < 0$$

because -1 is in the interior of the cone of negative elements of L_∞.

---

(1) $(L_\infty)^*_+$ is the set of positive elements of the strong dual of L_∞, which is the set of additive measures on $(\Omega, \mathscr{F}, P)$

One applies then the result given in [1]: the generalized Slater hypothesis being verified, the initial problem is equivalent to the search of a saddle point of $\mathcal{J}$ on $H \times (L_\infty)^*_+$. ■

<u>Corollary:</u> (u^0, μ) is a saddle point of $\mathcal{J}$ on $H \times (L_\infty)^*_+$ if and only if:

- u^0 is in K

- (2.8) $$\langle \mu \, , \int_0^{+\infty} |u_t^0|^2 \, dt - 1 \rangle = 0 \; .$$

- for any u in H one has:

(2.9) $$I(u^0) \leq I(u) + \langle \mu \, , \int_0^{+\infty} |u_t|^2 \, dt - 1 \rangle$$

<u>Proof:</u> This is obvious from the definition of a saddle point. ■

<u>Remark:</u> If u^1 is also an optimum of I on K , one has: $I(u^0) = I(u^1)$. (2.9) proves then that:

(2.10) $$\langle \mu \, , \int_0^{+\infty} |u_t^1|^2 - 1 \rangle = 0$$

(u^1, μ) is then also a saddle-point of $\mathcal{J}$. This proves that the set of saddle-points of $\mathcal{J}$ may be written as $K' \times M'$, K' being the set of minimums of I on K .

III Local martingale associated to a Lagrange multipler

Let (u^0, μ) be a saddle point of $\mathcal{J}$.

σ_t^0 is the continuous process defined by:

$$\sigma_t^0 = \int_0^t |u_s^0|^2 \, ds \tag{3.1}$$

Let S^0 the real function defined on Ω by:

$$S^0 = \inf \{t ; \sigma_t^0 = 1\} \quad . \tag{3.2}$$

Proposition III-1: S^0 is a predictable stopping time ([7] p. 145 no. 105)

Proof: S^0 is a stopping time by [5] IV-53.

Let $\{S_n^0\}_{n \in N}$ be the sequence of stopping times defined by:

$$S_n^0 = \inf\{t ; \sigma_t^0 \geq 1 - \frac{1}{n}\} \quad . \tag{3.3}$$

Then σ^0 being continuous, one has:

$$P\left(\lim_n \uparrow S_n^0 = S^0\right) = 1 \quad , \tag{3.4}$$

and moreover on $(S^0 < +\infty)$ for any n, $(S_n^0 < S^0)$. S^0 is then predictable ■

We keep the definition of the family $\{S_n^0\}_{n \in N}$ given in the proof of proposition III-1.

Theorem III-1: For any t in $[0, +\infty[$ and any n in N, the restriction of

$$\left(1 - \sigma^0_{t \wedge S_n^0}\right) \mu$$

to $\mathscr{F}_{t \wedge S_n^0}$ is defined by an element of $L_1^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}}$. Moreover, the restriction of μ

$$\left(1 - \sigma^0_{S_n^0}\right)\mu$$

to $\mathscr{F}_{S_n^0}$ is also defined by an element of $L_1^{\mathscr{F}_{S_n^0}}$.

<u>Proof:</u> Let A be a $\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}$ measurable set of Ω.

Let u^A be defined by:

$$(3.5)\quad \begin{cases} 0 \leq s < t \wedge S_n^0 & u^A = u^0 \\ t \wedge S_n^0 \leq s < +\infty & u^A = 1_{CA}\, u^0 \end{cases}$$

Then u^A is necessarily $\mathscr{T}^*$ measurable.

Moreover, one has:

$$(3.6)\quad \int_0^{+\infty} |u_t^A|^2\, dt = 1_A\, \sigma^0_{t\wedge S_n^0} + 1_{CA}\, \sigma^0_\infty$$

u_A is then in H. By using inequality (2.9) in the corollary of theorem II-1, one has:

$$(3.7)\quad I(u^0) \leq I(u^A) + \langle \mu\ ,\ 1_A\, \sigma^0_{t\wedge S_n^0} + 1_{CA}\, \sigma^0_\infty - 1 \rangle .$$

But one knows that:

$$(3.8)\quad \sigma^0_\infty \leq 1 \text{ a.s.}$$

μ being a positive additive measure, one has then:

$$(3.9) \qquad I(u^0) \leq I(u^A) + \langle \mu \, , \, 1_A \, \sigma^0_{t \wedge S^0_n} + 1_{CA} - 1 \rangle$$

or equivalently:

$$(3.10) \qquad I(u^0) \leq I(u^A) + \langle \mu \, , \, 1_A \left(\sigma^0_{t \wedge S^0_n} - 1 \right) \rangle$$

(3.10) may be written:

$$(3.11) \qquad \langle \left(1 - \sigma^0_{t \wedge S^0_n}\right) \mu \, , \, 1_A \rangle \leq I(u_A) - I(u_0)$$

But one has then:

$$(3.12) \qquad I(u^A) - I(u^0) = - E \, 1_A \int_{t \wedge S^0_n}^{+\infty} \langle X_s , u^0_s \rangle \, ds$$

Moreover,

$$\int_{t \wedge S^0_n}^{+\infty} \langle X_s , u^0_s \rangle \, ds$$

is an integrable random variable.

(3.11) proves then that

$$\left(1 - \sigma^0_{t \wedge S^0_n}\right) \mu$$

is absolutely continuous with respect to P. Moreover:

$$(3.13) \qquad \langle (1 - \sigma^0_{t \wedge S^0_n}) \mu \, , \, 1 \rangle \leq \langle \mu \, , 1 \rangle < +\infty$$

By the Radon-Nikodym theorem, the first part of the theorem follows. The second part is proved in the same way. ■

Let f_t^n be the Radon-Nikodym density of the restriction of

$$\left(1 - \sigma^0_{t \wedge S_n^0}\right) \mu$$

to $\mathscr{F}_{t \wedge S_n^0}$. One has necessarily:

(3.14)
$$1 - \sigma^0_{t \wedge S_n^0} \geq \frac{1}{n} .$$

One defines then g_t^n by:

$$g_t^n = \frac{f_t^n}{1 - \sigma^0_{t \wedge S_n^0}}$$

By (3.14), g_t^n is then obviously the restriction of μ to $\mathscr{F}_{t \wedge S_n^0}$, and is then necessarily positive and integrable. In the same way, we define $\tilde{f}^n$, restriction of

$$\left(1 - \sigma^0_{S_n^0}\right) \mu$$

to S_n^0, and $\tilde{g}^n$ by:

$$\tilde{g}^n = \frac{\tilde{f}^n}{1 - \sigma^0_{S_n^0}}$$

<u>Proposition III-2:</u> For any n in N, g_t^n is a positive uniformly integrable martingale, stopped at S_n^0.

<u>Proof:</u> We need only to prove that for any t in $[0,+\infty[$:

$$(3.15) \qquad g_t^n = E^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}} \tilde{g}^n \quad .$$

Let A be $\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}$ measurable. Then:

$$(3.16) \qquad E(1_A \tilde{g}^n) = \langle \mu, 1_A \rangle$$

But one has also:

$$(3.17) \qquad \langle \mu, 1_A \rangle = E(1_A \, g_t^n) \quad .$$

g_t^n being $\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}$ meaurable, (3.16) and (3.17) prove that (3.15) is true. g_t^n is then a positive uniformly integrable martingale. ■

We consider only the right continuous version of the martingales which we study.

<u>Theorem III-2:</u> One can find one and only one local martingale g, stopped at S^o and left-continuous at S^o such that :

$$(3.18) \qquad g_{t\wedge S_n^0} = g_t^n \quad .$$

<u>Proof:</u> Let us prove first the following relation:

$$(3.19) \qquad g^{n+1}_{t\wedge S_n^0} = g_t^n$$

Proposition III-2, and [5] VI T13 and R14a) prove that:

$$g_t^n = E^{\mathscr{F}_{t \wedge S_n^0}} g^n_{S_n^0} \tag{3.20}$$

$$g^{n+1}_{t \wedge S_n^0} = E^{\mathscr{F}_{t \wedge S_n^0}} g^{n+1}_{S^0_{n+1}} \tag{3.21}$$

To prove (3.19), we need only to prove that:

$$g^n_{S_n^0} = E^{\mathscr{F}_{S_n^0}} g^{n+1}_{S^0_{n+1}} \tag{3.22}$$

Let A be a $\mathscr{F}_{S_n^0}$ measurable set of Ω. Then:

$$E\left(1_A \, g^{n+1}_{S^0_{n+1}}\right) = \langle \mu, 1_A \rangle \tag{3.23}$$

But one has:

$$\langle \mu, 1_A \rangle = \left(E \; 1_A \, g^n_{S_n^0}\right) \tag{3.24}$$

Joining (3.23) and (3.24), (3.22) and then (3.19) holds.

We define then g on $[0, S_n^0[$ by:

$$g_t = g_t^n \; . \tag{3.25}$$

(3.19) proves that this definition is consistent on $t < S^0$, because S_n^0 increases to S^0 as $n \to +\infty$.

g is then right continuous on $[0, S^0[$. Let us prove that g_t has a limit when t increases to S^0.

Let h_t^n be defined by:

$$(3.26) \qquad h_t^n = 1_{\{t< S_n^0\}}\, g_t = 1_{\{t<S_n^0\}}\, g_{t\wedge S_n^0}$$

Then one has by definition:

$$(3.27) \qquad h_t^n = 1_{\{t<S_n^0\}}\, g_t^n$$

g_t^n being right continuous, h_t^n is right-continuous. Let us prove that h_t^n is a supermartingale. If t and t' are such that $t \leq t'$, then:

$$(3.28) \qquad 1_{\{t'<S_n^0\}} \leq 1_{\{t<S_n^0\}}$$

Then:

$$(3.29) \qquad E^{\mathscr{F}_t}\, 1_{\{t'<S_n^0\}}\, g_{t'}^n \leq 1_{\{t<S_n^0\}}\, E^{\mathscr{F}_t}\, g_{t'}^n$$

or equivalently:

$$(3.30) \qquad E^{\mathscr{F}_t}\, h_{t'}^n \leq h_t^n$$

h_t^n is then a right continuous supermartingale. S_n^0 increasing to S^0, h_t^n converges a. s. to $1_{\{t<S_n^0\}}g$, and by applying Fatou's lemma to the increasing sequence h_t^n, one has:

$$(3.31) \qquad E^{\mathscr{F}_t}\, 1_{\{t'<S^0\}}\, g_{t'} \leq 1_{\{t<S^0\}}\, g_t \quad .$$

(3.31) proves that $1_{\{t<S^0\}}g_t$ is a positive supermartingale. Moreover it is right-continuous. By applying T3 of [5]-VI, its trajectories have a. s. no oscillatory discontinuities. g_t has then a. s. a left-hand limit when t increases to S^0. We call g_{S^0} this limit, and we define g for $t \geq S^0$ by:

(3. 32) $$g_t = g_{S^0}$$

$g_{t\wedge S_n^0}$ being a martingale for any n, one has for $t \leq t'$:

(3. 33) $$E^{\mathscr{F}_t} g_{t'\wedge S_n^0} = g_{t\wedge S_n^0}$$

But we know that by definition:

(3. 34) $$g_t = \lim_{n\to +\infty} g_{t\wedge S_n^0}$$

Then by applying Fatou's lemma to (3. 33), one gets:

(3. 35) $$E^{\mathscr{F}_t} g_{t'} \leq g_t \quad .$$

(3. 35) proves that g is a supermartingale, which is right-continuous.

By the Meyer-Ito-Watanabe decomposition of right continuous supermartingales ([5] VII and [4]), one can find an increasing natural process A and a local martingale M such that:

(3. 36) $$g_t = M_t - A_t \quad .$$

But

(3. 37) $$g_t = g_{t\wedge S^0}$$

Then:

(3. 38) $$g_t = M_{t\wedge S^0} - A_{t\wedge S^0} \quad .$$

$M_{t\wedge S^0}$ being a local martingale, and $A_{t\wedge S^0}$ being an increasing natural process, the uniqueness of the decomposition (3.40) proves that M and A are stopped at S^0. But $g_{t\wedge S^0_n}$ is a martingale. Then $A_{S^0_n}$ is necessarily equal to 0. A being stopped at S^0 can only consist of a jump at S^0. But A_{S^0} is measurable with respect to

$$\bigvee_{1}^{+\infty} \mathscr{F}_{S^0_n}$$

by [5] VII T 49. g being left continuous at S^0 is

$$\bigvee_{1}^{+\infty} \mathscr{F}_{S^0_n}$$

measurable. M_{S^0} is then necessarily

$$\bigvee_{1}^{+\infty} \mathscr{F}_{S^0_n}$$

measurable. Then classically (the proof can be deduced from the method used in the proof of T47 in [5] VII), M is left continuous at S^0. A is then left continuous at S^0. Then necessarily:

$$(3.39) \qquad A_{S^0} = 0 \ .$$

A being stopped at S^0, A is the null process. Then:

$$(3.40) \qquad g = M$$

and g is a local martingale ∎

Remark: The end of the proof is inspired of the proof given by Meyer in [9], for the multiplicative decomposition of right-continuous positive supermartingales, although the origin of the problem is completely different. The relationship with this decomposition will be proved in the next parts.

Let us notice also that, even if μ is not directly related to a particular u^0, S^0 depending on u^0, g depends, at least at first sight, on u^0 (see corollary 1 of theorem IV-3)

Proposition III-3: For any n, for any u in H, one has:

$$(3.41) \qquad I(u^0) \le I\left(1_{\{t<S_n^0\}}\, u\right) + E\int_0^{S_n^0} g_t\,|u_t|^2\, dt - E(g_0)$$

Proof: Let us apply (2.9) to $1_{\{t<S_n^0\}}\, u$

$$(3.42) \qquad I(u^0) \le E\int_0^{S_n^0} \langle X_t, u_t\rangle\, dt + \langle \mu\, , \int_0^{S_n^0} |u_t|^2\, dt - 1\rangle$$

But the restriction of μ to $\mathscr{F}_{S_n^0}$ is $g_{S_n^0}$ by theorem III-1 and proposition III-2. Then:

$$(3.43) \qquad \langle \mu\, , \int_0^{S_n^0} |u_t|^2\, dt - 1\rangle = E\left(g_{S_n^0}\left(\int_0^{S_n^0} |u_t|^2\, dt - 1\right)\right)$$

By using T16 of [5] - VII, one has, because of the uniform integrability of the martingale $g_{t\wedge S_n^0}$:

$$(3.44) \qquad E\left(g_{S_n^0}\int_0^{S_n^0} |u_t|^2\, dt - 1\right) = E\int_0^{S_n^0} g_t|u_t|^2\, dt - E(g_0)$$

Then:

$$(3.45)\qquad \langle \mu, \int_0^{S_n^0} |u_t|^2\, dt - 1\rangle = E\int_0^{S_n^0} g_t |u_t|^2\, dt - E(g_0)$$

and from (3.42), one gets:

$$(3.46)\qquad I(u^0) \le E\int_0^{S_n^0} \langle X_t, u_t\rangle\, dt + E\int_0^{S_n^0} g_t |u_t|^2\, dt - E(g_0)\quad .$$

(3.46) is precisely (3.41) ∎

<u>Theorem III-3:</u> For u in L_{22}, one has:

$$(3.47)\qquad I(u^0) \le I\left(1_{\{t<S^0\}}u\right) + E\int_0^{S^0} g_t |u_t|^2\, dt - E(g_0)\quad .$$

Moreover:

$$(3.48)\qquad E\int_0^{+\infty} g_t |u_t^0|^2\, dt = E(g_0)$$

<u>Proof:</u> Let R_n be the sequence of stopping times defined by:

$$(3.49)\qquad R_n = \inf\left\{t;\ \int_0^t |u_t|^2\, dt = n\right\}$$

Then $1_{\{t<R_n\}}u$ is in H. We apply then (3.41) to $1_{\{t<R_n\}}u$.

$$(3.50) \qquad I(u^0) \leq I\left(1_{\{t\wedge R_n \wedge S_n^0\}}\, u\right) + E\int_0^{R_n\wedge S_n^0} g_t |u_t|^2\, dt - E(g_0)$$

When n increases to infinity, by taking the limit in (3. 50) one gets:

$$(3.51) \qquad I(u^0) \leq I\left(1_{\{t< S^0\}} u\right) + E\int_0^{S^0} g_t |u_t|^2\, dt - E(g_0)$$

Moreover, $g_{t\wedge S_n^0}$ being a uniformly integrable martingale, one has:

$$(3.52) \qquad \langle \mu \,, \sigma^0_{S_n^0} \rangle = E\left(g_{S_n^0} \int_0^{S_n^0} |u_t^0|^2\, dt\right)$$

$$= E\int_0^{S_n^0} g_t |u_t^0|^2\, dt$$

But by definition, one has:

$$(3.53) \qquad \left|\sigma^0_{S^0} - \sigma^0_{S_n^0}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{a. s.}$$

$\sigma^0_{S_n^0}$ converges then to $\sigma^0_{S^0}$ in L_∞. We can then take the limit in (3. 52), and get:

$$(3.54) \qquad \langle \mu, \sigma^0_{S^0} \rangle = E\int_0^{S^0} g_t |u_t^0|^2\, dt \quad .$$

But one has:

$$(3.55) \qquad \langle \mu, \sigma^0_{S^0} \rangle = \langle \mu, 1 \rangle$$

and

(3.56) $$\langle \mu, 1 \rangle = E(g_0) \quad .$$

Then u^0 being null for $t \geq S^0$:

(3.57) $$E \int_0^{+\infty} g_t |u_t^0|^2 \, dt = E(g_0) \blacksquare$$

IV Expression of an optimal control

Proposition IV-1

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \text{For } t < S^0 & X_t + 2g_t u_t^0 = 0 \\ \text{For } t \geq S^0 & u_t^0 = 0 \end{cases}$$

Proof: (3.47) says that the functional defined on L_{22}

$$(4.2)\qquad u \xrightarrow[I']{} E\int_0^{S^0} \langle X_t, u_t\rangle\, dt + E\int_0^{S^0} g_t |u_t|^2\, dt$$

has a minimum at u^0.

By using the result of Rockafellar on the subdifferential of convex integrands in [10], one gets immediately:

$$(4.3)\qquad 1_{\{t<S^0\}}(X_t + 2g_t u_t^0) = 0$$

For $t \geq S^0$, u^0 is necessarily null. ■

Let Z_t^0 the process defined by:

$$(4.4)\qquad Z_t^0 = -\frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^0\rangle\, ds\,.$$

By writing:

$$(4.5)\qquad Z_t^0 = -\frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_t} \int_0^{+\infty} \langle X_s, u_s^0\rangle\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \langle X_s, u_s^0\rangle\, ds$$

and by noticing that by (4. 1):

$$(4.6) \qquad \langle X_s, u_s^0 \rangle \leq 0$$

Z_t^o is then a right-continuous supermartingale.

Proposition IV-2: For any n, we can identify the processes $Z^0_{t\wedge S_n^0}$ and

$$\left(1 - \sigma^0_{t\wedge S_n^0}\right) g_{t\wedge S_n^0}$$

Proof: Proposition IV-1 proves that:

$$(4.7) \qquad \langle X_s, u_s^0 \rangle + 2\, g_s |u_s^0|^2 = 0$$

From (4. 7), one deduces:

$$(4.8) \qquad E^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}} \int_{t\wedge S_n^0}^{+\infty} \langle X_s, u_s^0 \rangle \, ds + 2\, E^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}} \int_{t\wedge S_n^0}^{+\infty} g_s |u_s|^2 \, ds = 0$$

By using (4. 5) and [5] VI T13 and R 14 a), one sees that:

$$(4.9) \qquad Z^0_{t\wedge S_n^0} = -\frac{1}{2}\, E^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}} \int_{t\wedge S_n^0}^{+\infty} \langle X_s, u_s^0 \rangle \, ds \quad .$$

Then (4. 8) and (4. 9) prove that:

$$(4.10) \qquad Z^0_{t\wedge S_n^0} = E^{\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}} \int_{t\wedge S_n^0}^{+\infty} g_s |u_s^0|^2 \, ds \quad .$$

Let A be $\mathscr{F}_{t\wedge S_n^0}$ measurable. Then:

$$(4.11) \qquad \langle \mu, 1_A \left(1 - \sigma^0_{S^0}\right) \rangle \geq 0 \quad .$$

But

$$(4.12) \qquad 1_A \left(1 - \sigma^0_{S^0}\right) \leq \left(1 - \sigma^0_{S^0}\right)$$

Then:

$$(4.13) \qquad \langle \mu, 1_A \left(1 - \sigma^0_{S^0}\right) \rangle \leq \langle \mu, 1 - \sigma^0_{S^0} \rangle$$

But (2.8) says that:

$$(4.14) \qquad \langle \mu, 1 - \sigma^0_{S^0} \rangle = 0$$

Comparing (4.11), (4.13) and (4.14), one gets:

$$(4.15) \qquad \langle \mu, 1_A \left(1 - \sigma^0_{S^0}\right) \rangle = 0$$

Then one has:

$$(4.16) \qquad E\left(1_A \, g_{t\wedge S_n^0} \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S_n^0}\right)\right) = \langle \mu, 1_A \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S_n^0}\right) \rangle$$

By using (4.15), one gets:

$$(4.17) \qquad E\left(1_A \, g_{t\wedge S_n^0} \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S_n^0}\right)\right) = \langle \mu, 1_A \left(\sigma^0_{S^0} - \sigma^0_{t\wedge S_n^0}\right) \rangle$$

By definition, one has:

$$(4.18) \qquad \left|\sigma^0_{S^0} - \sigma^0_{S^0_m}\right| \leq \frac{1}{m}$$

One deduces then, because of the continuity of μ with respect to the L_∞ topology:

$$(4.19)\quad \langle \mu, 1_A\left(\sigma^0_{S^0} - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\rangle = \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m\geq n}} \langle \mu, 1_A\left(\sigma^0_{S^0_m} - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\rangle$$

But by theorem III-1, one has for $m \geq n$:

$$(4.20)\quad \langle \mu, 1_A\left(\sigma^0_{S^0_m} - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\rangle = E\left(1_A\, g_{S^0_m}\left(\sigma^0_{S^0_m} - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\right)$$

Proposition III-2, and [5]-VII T16 prove then:

$$(4.21)\quad E\left(1_A\, g_{S^0_m}\left(\sigma^0_{S^0_m} - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\right) = E\left(1_A \int_{t\wedge S^0_n}^{S^0_m} g_s |u^0_s|^2\, ds\right)$$

Moreover, by Fatou's lemma, one has:

$$(4.22)\quad E\left(1_A \int_{t\wedge S^0_n}^{S^0} g_s |u^0_s|^2\, ds\right) = \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m\geq n}} E\left(1_A \int_{t\wedge S^0_n}^{S^0_m} g_s |u^0_s|^2\, ds\right)$$

By comparing (4.16), (4.19), (4.21) and (4.22), we get :

$$(4.23)\quad E\left(1_A\, g_{t\wedge S^0_n}\left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)\right) = E\left(1_A \int_{t\wedge S^0_n}^{S^0} g_s |u^0_s|^2\, ds\right)$$

(4.23) proves then that:

$$(4.24)\quad g_{t\wedge S^0_n}\left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right) = E^{\mathscr{F}_{t\wedge S^0_n}} \int_{t\wedge S^0_n}^{S^0} g_s |u^0_s|^2\, ds \quad .$$

u_t^0 being null for $t > S^0$ comparing(4.10) and (4.24), one gets:

$$(4.25) \qquad Z^0_{t\wedge S^0_n} = g_{t\wedge S^0_n}\left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)$$

The processes $Z^0_{t\wedge S^0_n}$ and

$$g^0_{t\wedge S^0_n}\left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)$$

being right-continuous, the result follows from (4.25). ■

Theorem IV-1: We can identify the processes Z_t^0 and $\left(1 - \sigma_t^0\right) g_t$

Proof: For any n, one has:

$$(4.26) \qquad Z^0_{t\wedge S^0_n} = \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right) g_{t\wedge S^0_n}$$

Then necessarily:

$$(4.27) \qquad Z^0_{S^0_n} = \left(1 - \sigma^0_{S^0_n}\right) g_{S^0_n} .$$

On $(S^0 < +\infty)$, we have necessarily:

$$\left(1 - \sigma^0_{S^0_n}\right) \to 0$$

g having a left hand limit at S^0, one deduces, for $(S^0 < +\infty)$

$$Z^0_{S^0-} = 0$$

By [5] (VII T15), Z^0 is necessarily stopped at S^0. (4.26) and (4.27) prove the result. ■

The relation given in theorem IV-I is not completely satisfactory, because Z^0 depends, at least apparently on a particular optimal solution u^0. But one has:

Lemma IV-I: Z_0^0 does not depend on a particular optimal solution.

Proof: Let u^0 and u^1 two elements of K minimizing I. Let us suppose that on a non negligible set A

$$(4.28) \qquad E^{\mathscr{F}_0} \int_0^{+\infty} \langle X_t, u_t^0 \rangle \, dt \; < \; E^{\mathscr{F}_0} \int_0^{+\infty} \langle X_t, u_t^1 \rangle \, dt \quad .$$

Then let u^2 be defined by:

$$(4.29) \qquad u_t^2 = 1_A \, u_t^0 + 1_{CA} \, u_t^1 \quad .$$

u^2 is obviously in K.

Moreover:

$$(4.30) \qquad E \int_0^{+\infty} \langle X_t, u_t^2 \rangle \, dt \; < \; E \int_0^{+\infty} \langle X_t, u_t^1 \rangle \, dt$$

or equivalently:

$$(4.31) \qquad I(u^2) \; < \; I(u^1) \quad .$$

There is a contradiction. ∎

One defines then Z_t^1 by:

$$(4.32) \qquad Z_t^1 = -\frac{1}{2} \, E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds$$

u^{0t} minimizing:

$$u \longrightarrow E \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s \rangle \, ds$$

on the set of elements u of L_{22} such that:

$$\int_t^{+\infty} |u_s|^2 \, ds \le 1 \qquad \text{a.s.}$$

Z_t^2 and Z_t^3 are then defined by:

$$(4.33) \qquad Z_t^2 = \frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_t} \left(\int_t^{+\infty} |X_s|^2 \, ds \right)^{1/2}$$

$$(4.34) \qquad Z_t^3 = \frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} e^{-s} |X_s| \, ds$$

<u>Proposition IV-3:</u> Z_t^1, Z_t^2 and Z_t^3 are right-continuous positive supermartingales, converging to 0 when $t \to +\infty$. Moreover:

$$(4.35) \qquad Z_t^3 \le Z_t^1 \le Z_t^2$$

<u>Proof:</u> We prove only here that Z_t^1 is a right continuous supermartingale.

Let t and t' in $[0, +\infty[$ with $t \le t'$. Then:

$$(4.36) \qquad Z_t^1 = -\frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds \quad .$$

$$(4.37) \qquad Z^1_{t'} = -\frac{1}{2} E^{\mathscr{F}_{t'}} \int_{t'}^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t'} \rangle \, ds \quad .$$

If we define $u^{0t'}$ on $[t, t'[$ by giving to it the value 0 on this interval, one has necessarily:

$$(4.38) \qquad \int_t^{+\infty} |u_s^{0t'}|^2 \, ds \leq 1 \quad \text{a. s.}$$

Then one will have:

$$(4.39) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds \leq E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t'} \rangle \, ds$$

or equivalently:

$$(4.40) \qquad Z^1_t \geq E^{\mathscr{F}_t} Z^1_{t'} \quad .$$

By [5] VI T4, we have to prove that $t \to E(Z^1_t)$ is right continuous. One has necessarily:

$$(4.41) \qquad E(Z^1_t) \geq E(Z^1_t)^+$$

Moreover, by the Lebesgue theorem, one has:

$$(4.42) \qquad E \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds = \lim_{\substack{t'>t \\ t'\to t}} \downarrow E \int_{t'}^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds$$

But if

$$\int_{t}^{+\infty} |u_s^{0t}|^2 \, ds \leq 1 \quad ,$$

necessarily:

$$(4.43) \qquad \int_{t'}^{+\infty} |u_s^{0t}|^2 \, ds \leq 1 \quad .$$

Then:

$$(4.44) \qquad E\int_{t'}^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t'} \rangle \, ds \leq E\int_{t'}^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds \quad .$$

By using (4.42) and (4.44), one gets:

$$(4.45) \qquad E(Z_t^1) \leq E(Z_t^1)^+$$

By comparing (4.41) and (4.45), $E(Z_t^1)$ is right-continuous. Moreover:

$$(4.46) \quad 2\, Z_t^1 \leq E^{\mathscr{F}_t}\left(\int_{t}^{+\infty} |u_s^{0t}|^2 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_{t}^{+\infty} |X_s|^2 \, ds\right)^{1/2}$$

and then necessarily:

$$(4.47) \qquad Z_t^1 \leq Z_t^2 \quad .$$

Moreover, let $\tilde{u}$ be defined by:

$$(4.48) \qquad \tilde{u}_s = -(\operatorname{sgn} X_s)\, e^{-s} \quad .$$

Then $\tilde{u}$ is in L_{22} , and moreover:

$$(4.49) \qquad \int_0^{+\infty} |\tilde{u}_s|^2 \, ds \leq 1 \text{ a.s.}$$

One deduces immediately that:

$$(4.50) \qquad Z_t^3 \leq Z_t^1 \qquad \blacksquare$$

<u>Proposition IV-4:</u> We can identify the processes Z_t^0 and

$$\left(1 - \sigma_t^0\right)^{1/2} Z_t^1$$

<u>Proof:</u> Necessarily:

$$(4.51) \qquad \int_t^{+\infty} |u_s^0|^2 \, ds \leq 1 - \sigma_t^0 .$$

If $\tilde{u}^t$ is defined by:

$$(4.52) \qquad \tilde{u}_s^t = \begin{cases} u_s^0 \, (1 - \sigma_t^0)^{-1/2} & \text{on } t \leq s < S^0 \\ 0 & \text{on } s \geq S^0 \end{cases}$$

one has necessarily:

$$(4.53) \qquad \int_t^{+\infty} |\tilde{u}_s^t|^2 \, ds \leq 1 \text{ a.s.}$$

Then:

$$(4.54) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^{0t} \rangle \, ds \leq E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{+\infty} \langle X_s, \tilde{u}_s^t \rangle \, ds$$

and (4.54) may be written, because Z_t^0 is null when σ_t^0 is null:

$$(4.55) \qquad Z_t^0 \leq \left(1 - \sigma_t^0\right)^{1/2} Z_t^1 \ .$$

Let us suppose that (4.55) holds with strict inequality on a non negligible $\mathscr{F}_t$ measurable set A.

Let u^1 be defined by:

$$(4.56) \qquad u_s^1 = \begin{cases} u_s^0 & \text{for } 0 \leq s < t \\ t \leq s < +\infty & \text{on } A: \quad u_s^1 = \left(1 - \sigma_t^0\right)^{1/2} u_s^{0t} \\ & \text{on } \complement A \quad u_s^1 = u_s^0 \end{cases}$$

Then:

$$(4.57) \qquad \int_0^{+\infty} |u_s^1|^2 \, ds \leq 1 \quad \text{a. s.}$$

Moreover, by (4.55) and (4.56), one has:

$$(4.58) \qquad \begin{cases} E \int_0^t \langle X_s, u_s^1 \rangle \, ds = E \int_0^t \langle X_s, u_s^0 \rangle \, ds \ . \\ E \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^1 \rangle \, ds < E \int_t^{+\infty} \langle X_s, u_s^0 \rangle \, ds \ . \end{cases}$$

Then one would have:

(4.59) $$I(u^1) < I(u^0) .$$

This is a contradiction.

The result follows by the right-continuity of the processes which we consider. ■

Theorem IV-2: We can identify the processes Z^1_t and $(1 - \sigma^0_t)^{1/2} g_t$.

Proof: By theorem IV-1 and proposition IV-4, one has:

(4.60) $$\begin{cases} Z^0_{t\wedge S^0_n} = \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right) g_{t\wedge S^0_n} \\ Z^0_{t\wedge S^0_n} = \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)^{1/2} Z^1_{t\wedge S^0_n} \end{cases}$$

$1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}$ being larger than $1/n$, one has then:

(4.61) $$Z^1_{t\wedge S^0_n} = \left(1 - \sigma^0_{t\wedge S^0_n}\right)^{1/2} g_t .$$

The proof continues as in the proof of theorem IV-1. ■

Let T now be the stopping time defined by:

(4.62) $$T = \inf\{t;\ Z^1_t = 0\} .$$

Proposition IV-5: $1_{t \geq T} X_t = 0 \quad dP \otimes dt \quad$ a.s.

Proof: (4.35) proves that $Z^3_T = 0$.

But

$$Z_T^3 = \frac{1}{2} E^{\mathcal{F}_T} \int_T^{+\infty} e^{-s} |X_s| \, ds \tag{4.63}$$

The result follows. ■

Remark: Conversely, (4.35) proves that T is the first time at which one knows that the distribution $1_{\{t \geq T\}} X_t$ is null: this follows from:

$$Z_t^1 \leq Z_t^2 . \tag{4.64}$$

The result of Ito-Watanabe-Meyer given in [9] says then that the right-continuous positive supermartingale Z_t^1 can be decomposed in a unique way into the product of M and B, M and B being such that:

- M is a local martingale stopped at T, such that if the additive decomposition of Z^1 is written

$$Z_t^1 = N_t - A_t \tag{4.65}$$

N_t being a local martingale and A_t an increasing natural process, if we define:

$$\begin{cases} \nu_c = \inf \{t ; Z_{t-}^1 = 0\} \\ \nu_1 = \inf \{t ; Z_{t-}^1 - \Delta A_t = 0 \quad \Delta A_t > 0\} \\ \nu' = \nu_c \wedge \nu_1 \end{cases} \tag{4.66}$$

M is continuous at ν'.

● B is a decreasing natural right-continuous positive process such that $B_0 = 1$, stopped at T, continuous at ν_c.

Moreover if $M'_t B'_t$ is any other decomposition of Z^1_t into the product of a local martingale M' and a decreasing right-continuous natural process B' such that $B'_0 = 1$, on $t < T$, $B'_t = B_t$, $M'_t = M_t$.

But theorem IV-2 gives precisely such a decomposition.

One has then the theorem:

<u>Theorem IV-3:</u> For u^0 to minimize I on K, it is necessary and sufficient that u^0 satisfies the following properties:

a) on $0 \leq t < T$ $\qquad u^0_t = -\dfrac{X_t}{2M_t}$

b) on $t \geq T$ $\quad u_t$ can take whatever family of values compatible with the constraint:

$$\int_0^{+\infty} |u^0_t|^2 \, ds \leq 1$$

Moreover, $1_{\{t \geq T\}} X_t = 0 \quad dP \otimes dt$ a.s.

In particular, it is possible to choose u^0 such that if $Z_{T^-} \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} |u^0_t|^2 \, dt < 1$$

<u>Proof:</u> Theorem IV-2 proves that $T \leq S^0$. Moreover the previous result states that $g_t = M_t$ on $t < T$. By proposition IV-1, for $t < T$, one has:

(4.67) $$X_t + 2M_t u_t^0 = 0$$

Moreover M_t is non null for $t < T$, and one can write:

$$u_t^0 = -\frac{X_t}{2M_t}$$

Besides, by proposition IV-5, $1_{t \geq T} X_t = 0$. For $t \geq T$, we can then choose any u^0 compatible with the constraints, without changing the value of the criteria. In particular we can take u^0 null for $t \geq T$. For such a choice of u^0, if $Z_{T-} \neq 0$, necessarily:

$$\int_0^{+\infty} |u_t^0|^2 \, dt < 1 \; . \; \blacksquare$$

Corollary 1: $g = M$

Proof: g is stopped at T. To prove this, we know that $T \leq S^0$. If $T = S^0$, g being stopped at S^0 is also stopped at T. If $T < S^0$, $(1 - \sigma_T^0)^{1/2} > 0$. Theorem IV-2 proves then that $g_T = 0$. g being a right-continuous positive supermartingale, by [5] (VII T 15), g is stopped at T.

By using the formula of change of variables given in [8],

$$\widetilde{B}_t = \left(1 - \sigma_t^0\right)^{1/2}$$

being a continuous decreasing process, one has:

(4.68) $$Z_t^1 = Z_0^1 + \int_0^t \widetilde{B}_s \, dg_s + \int_0^t g_s \, d\widetilde{B}_s$$

But this is precisely the additive decomposition of Z^1, with

$$(4.69) \qquad A_t = -\int_0^t g_s \, d\widetilde{B}_s$$

A is then continuous, and $\nu_1 = +\infty$. To prove that g is continuous at ν', we will prove only that it is continuous at ν_c.

If $T = S^0$, $\nu_c = S^0$, and by construction, g is continuous at S^0.

If $T < S^0$, let us suppose that $Z_{T-} = 0$. Then, because $1 - \sigma_T > 0$, g_{T-} is necessarily null.

Moreover, by writing:

$$(4.70) \qquad B'_t = \widetilde{B}_{t \wedge T}$$

we have, g being stopped at T:

$$(4.71) \qquad Z^1_t = g_t \, B'_t$$

g and B' have all the properties of M and B. By the uniqueness result, they are equal respectively to M and B.

<u>Remark:</u> B' is precisely associated to the particular u^0 defined in the proof of theorem IV-3. Moreover this corollary gives the important result that g, which could have depended on the particular u^0, was actually a fixed process.

Corollary 2: An expression of M is:

(4.72)
$$
\begin{array}{lll}
0 \le t < T & M_t = Z_t^1 \exp \frac{1}{8} \int_0^t \left| \frac{X_s}{Z_s^1} \right|^2 ds & \\
t \ge T & \text{if } Z_{T^-}^1 = 0 & M_t = M_{T^-} \\
 & \text{if } Z_{T^-}^1 \neq 0 & M_t = 0 .
\end{array}
$$

Proof: This result can be deduced from [9]. Let us prove it directly. On $t < T$, one has,

(4.73)
$$\sigma_t^0 = \frac{1}{4} \int_0^t \left| \frac{X_s}{M_s} \right|^2 ds .$$

But one has:

(4.74)
$$(Z_t^1)^2 = M_t^2 (1 - \sigma_t^0)$$

Then, on $s < T$, one has:

(4.75)
$$\left| \frac{X_s}{M_s} \right|^2 = \left| \frac{X_s}{Z_s^1} \right|^2 (1 - \sigma_s^0)$$

By using (4.75) in (4.73), one finds:

(4.76)
$$\frac{\dot{\sigma}_t^0}{1 - \sigma_t^0} = \frac{1}{4} \left| \frac{X_t}{Z_t^1} \right|^2$$

From (4.76), one gets on $(t < T)$:

$$(4.77) \qquad 1 - \sigma_t^0 = \exp - \frac{1}{4} \int_0^t \left| \frac{X_s}{Z_s^1} \right|^2 ds$$

Then, on $t < T$

$$(4.78) \qquad M_t = Z_t^1 \exp \frac{1}{8} \int_0^t \left| \frac{X_s}{Z_s^1} \right|^2 ds \quad .$$

If $Z_{T^-} = 0$, M is continuous at T.

If $Z_{T^-} > 0$, $1 - \sigma_T^0 > 0$ and $M_T = 0$.

Remark: Formula (4.77) allows us to give an intuitive explanation of some of the results.

If $Z_{T^-} > 0$, it is easily proved that each trajectory has a strictly positive lower bound, and

$$1 - \sigma_T^0 > 0$$

But even if $Z_{T^-} = 0$, it may happen that $1 - \sigma_T^0 > 0$, in particular in the case where X_s is a.e. equal to zero on a left-hand neighborhood of T.

This corresponds to the case where, although the predictions were "optimistic" ($Z_s > 0$ for $s < T$), X_s has in fact taken null values before T.

There is intuitively (and mathematically) a basic difference between these two cases; in the first case, the "bad luck" was unpredictable or was just instantaneous betting. In the second case, the facts have contradicted optimistic predictions. In the two cases, there are idle resources left, or useless resources.

Conclusion: We can notice that the first three parts are almost completely independent of the linear nature of the criteria, and of the quadratic nature of the constraint.

In parts IV and V on the contrary, these properties are constantly used. One of the most striking features of the problem is its close relationship with the multiplicative decomposition of positive right-continuous supermartingales, the properties of which are very much used.

We refer for applications to [3]. (1)

(1) Voir l'Annexe K.

[1] Bensoussan A., Lions J.-L., Temam R.: Décomposition des problèmes d'optimisation. To appear.

[2] Bismut J. M.: Conjugate convex functions in optimal stochastic control. To appear.

[3] Bismut J. M.: Analyse convexe et probabilités. Doctoral Dissertation. Faculté des Sciences de Paris. To appear.

[4] Ito K., Watanabe S.: Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. Fourier Grenoble t. 15 1965 pp. 13-30.

[5] Meyer P. A.: Probabilités et Potentiels. Hermann, Paris. English Translation. Blaisdell, Boston.

[6] Meyer P. A.: Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités 1. Lecture Notes in Mathematics no. 39 Springer Verlag pp. 72-162.

[7] Meyer P. A.: Guide détaillé de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités 2. Lecture Notes in Mathematics no. 51 Springer Verlag pp. 140-165.

[8] Meyer P. A. and Doléans Dade C.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de probabilités no. 4. Lecture notes in Mathematics no. 124 pp. 77-107.

[9] Meyer P. A.: On the multiplicative decomposition of positive supermartingales. In Markov Processes and Potential Theory, J. Chover, Ed. pp. 103-116. Wiley 1967.

[10] Rockafellar R.T.: Integrals which are convex functionals I. Pacific J. of Math. Vol. 24. 3, 1968 pp. 525-539.

[11] Rockafellar R.T.: State constraints in convex problems of Bolza. To appear.

G

An existence result in optimal stochastic control

AN EXISTENCE RESULT IN OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL

By

Jean-Michel Bismut

Ingénieur au Corps des Mines

Personal address: 4 rue des Mariniers
Appt. 107
Paris 14
FRANCE

(*) This paper has been written while the author was at Harvard University on leave from the Institut de Recherches en Informatique et Automatique, Domain de Voluceau 78 Rocquencourt FRANCE, during the Summer 1972. Support of National Science Foundation Contract GK 31511 is gratefully acknowledged.

G

AN EXISTENCE RESULT IN OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL

By

Jean-Michel Bismut

Division of Engineering and Applied Physics

Harvard University · Cambridge, Massachusetts

ABSTRACT

The purpose of this report is to prove under very general conditions the existence of an optimal Markov control for a certain class of problems of control of diffusions. The method which is used is entirely probabilistic. It has basically three steps:

1) Proof of the existence of a Markov control under convexity assumptions for a given starting point.

2) Proof of the existence of a Markov control under convexity assumptions for any starting point.

3) From extremality conditions proved in 2), derivation of the existence of a Markov control in the general case. A method of relaxation is implicitly used here.

The goal of this report is to prove under very general conditions the existence of an optimal Markov control for a certain class of stochastic control problems.

Namely, if u is a Borel function defined on $[0,+\infty[\times R^d$, with values in a control space U, if x^u is, at least formally, a solution with values in R^d of the stochastic differential equation:

$$\begin{cases} dx^u = b(t, x_t^u, u(t, x_t^u))\, dt + \sigma(t, x_t^u) \cdot d\beta & t \geq s \\ x_s^u = x \end{cases}$$

β being a Brownian motion, is it possible to find u^o such that the functional:

$$u \longrightarrow E \int_s^T L(t, x_t^u, u(t, x_t^u))\, dt$$

has a minimum at u^o.

Moreover, we want to prove that a choice of u^o is possible, which does not depend explicitly on the origin (s, x).

This problem has already been solved by Fleming in [6], under rather stringent Lipschitz hypothesis on the coefficients and the controls.

Beňes has proved in [1], the existence of an optimal non-anticipating control law, when the equation is led by a Brownian motion, under growth conditions on the drift and on the payoff under convexity assumptions.

We have here no convexity or Lipschitz assumptions; we prove that the optimal control may be chosen as a Markov control (i. e., does not depend on the past values of the state) and prove that this choice can be made independently of the origin.

The report is entirely based on the approach of Stroock and Varadhan given in [13] on diffusion processes. It uses the results of Freidlin on the dependence of a diffusion process relatively to its coefficients, in [8]. This result has been extended by Stroock and Varadhan, in an unpublished version of their paper (see [13], "note added in proof", page 500). A proof of this extension, based on a private communication of S. R. S. Varadhan is given first.

It is then proved that, under convexity assumptions, starting from (s,x), an optimal Markov control exists, which may depend explicitly on (s,x). Necessary and sufficient conditions, similar to the condition given by Davis and Varaiya in [4] are derived. The dynamic programming function q is proved to depend continuously on (s,x).

Moreover it is proved that the difference between any of the payoff potentials and q is an excessive function relative to the diffusion corresponding to the given payoff potential. This result is equivalent to a dynamic programming inequality(which must be proved here).

Under convexity assumptions, this proves the existence of a Markov control independent of the starting point (s,x).

The results are then extended to the non-convex case.

The main result is stated in theorem IV-1.

Remark: For all the general definitions and results on Markov processes which are used here, the reader is referred to [3], [9], [10], [11] .

I. A Basic Result

Ω is the space of continuous functions defined on $[0,+\infty[$ with values in R^d. For (α,β) in $[0,+\infty[\times[0,+\infty]$, with $\alpha\leq\beta$, M^α_β is the σ-field of Ω generated by the functions defined on Ω:

$$x \longrightarrow x_s \qquad\qquad \alpha\leq s\leq\beta \ .$$

When $\beta=+\infty$, the simplified notation will be M^α.

a is a mapping defined on $[0,+\infty[\times R^d$, with values in $R^d\otimes R^d$, such that:

I-1: a is continuous.

I-2: For (t,x) in $[0,+\infty[\times R^d$, a is positive definite.

I-3: a is uniformly bounded.

For (s,x) in $[0,+\infty[\times R^d$, $P_{(s,x)}$ is the unique probability measure on Ω, solution of the martingale problem of SV(*) for the couple $(a,0)$: existence and uniqueness follow from [13] - Theorem 5.6.

For (s,x) in $[0,+\infty[\times R^d$, and for b Borel measurable and bounded on $[0,+\infty[\times R^d$, with values in R^d, let $Q^b_{(s,x)}$ be the solution of the martingale problem of SV, for the couple (a,b): existence and uniqueness follow from [13] - Theorem 6.2.

Moreover one has:

$$\left.\frac{dQ^b_{(s,x)}}{dP_{(s,x)}}\right|_{M^s_t} = \exp\left\{\int_s^t < b(\sigma,x_\sigma), a^{-1}(\sigma,x_\sigma)dx_\sigma > -\frac{1}{2}\int_s^t < b(\sigma,x_\sigma), a^{-1}(\sigma,x_\sigma) b(\sigma,x_\sigma) > d\sigma\right\} \qquad (1.1)$$

(*) Stroock and Varadhan

Theorem 8. 1 of [13] proves that Q^b defines a strong Feller process, whose probabilities of transition are for a.e. t absolutely continuous relative to the Lebesgue measure of R^d. P being equal to Q^0, (1. 1) proves that if b and b' are two Borel functions on $[0,+\infty[\times R^d$, equivalent relative to the Lebesgue measure on $[0,+\infty[\times R^d$, Q^b and $Q^{b'}$ are equivalent. If L_∞ is the space of the Lebesgue equivalence classes of Borel functions bounded on $[0,+\infty[\times R^d$ with values in R^d, it is then possible to define Q^b unambiguously for b in L_∞.

Theorem I-1: If b_n converges to b for the $\sigma(L_\infty, L_1)$ topology, $Q^{b_n}_{(s,x)}$ converges weakly to $Q^b_{(s,x)}$. Moreover for any T larger than s, the density Z^n_T of $Q^{b_n}_{(s,x)}$ relative to $P_{(s,x)}$ on M^s_T converges in the weak topology of the $P_{(s,x)}$ integrable random variables to the density Z_T of $Q^b_{(s,x)}$ relative to $P_{(s,x)}$ on M^s_T (*) .

Proof:

Let ψ_n and ψ be the family of function defined on $[s,T]\times R^d$ by:

$$\psi_n(t,y) = E^{P(t,y)} \int_t^T b_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \qquad (1.2)$$

$$\psi(t,y) = E^{P(t,y)} \int_t^T b(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

Let P(t,y, dz) be the family of probabilities of transition associated to the Markov process P . Let U_n the family of functions defined by:

$$U_n(t,y,\sigma) = \int b_n(\sigma, z)\, P(t,y,\sigma,dz) \qquad (1.3)$$

(*) The proof of this result, given without proof in [13], is based on a private communication of S. R. S. Varadhan.

By theorem 7.1 of [13], U_n is continuous in (t, y) when t stays away from σ, and the modulus of continuity depends only on the bound of b_n.

Let us prove then that $\{\psi_n\}$ is a bounded and equicontinuous family of functions. b_n converging to b weakly, the family b_n stays uniformly bounded, almost everywhere. By modifying the functions b_n on a Lebesgue null measure set, we can assume it stays bounded everywhere.

We have then:

$$\psi_n(t, y) = \int_t^T U_n(t, y, \sigma)\, d\sigma \tag{1.4}$$

Moreover, if M is a bound for $\{b_n\}$, $\{U_n\}$ is also bounded by M. Then if t and t' are two elements of $[s, T[$, with $t' < t$, one has:

$$| \psi_n(t, y) - \psi_n(t', y')| \leq M|t' - t| + \int_t^T |U_n(t, y, \sigma) - U_n(t', y', \sigma)|\, d\sigma \tag{1.5}$$

Then, for $\epsilon > 0$, sufficiently small (t is strictly inferior to T), one has:

$$| \psi_n(t, y) - \psi_n(t', y')| \leq M|t' - t| + 2M\epsilon + \int_{t+\epsilon}^T |U_n(t, y, \sigma) - U_n(t', y', \sigma)|\, d\sigma \tag{1.6}$$

This inequality proves, with theorem 7.1 of [13], the uniform continuity of $\{\psi_n\}$ at any point (t, y) with $t < T$. Moreover, one has:

$$| \psi_n(t, y)| \leq M(T - t) \ . \tag{1.7}$$

The uniform continuity is then proved at any point (t, y). Writing ψ_n as:

$$\psi_n(t, y) = \int_t^T d\sigma \int_{R^d} p(t, y, \sigma, z)\, b_n(\sigma, z)\, dz \tag{1.8}$$

ψ_n converges simply to ψ. The sequence ψ_n being bounded and equicontinuous, ψ_n converges to ψ uniformly on each compact subset of $[0,T]\times R^d$. (*)

We have then

$$E^{P(s,x)} \left| \int_s^T (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma))\, d\sigma \right|^2 = 2E^{P(s,x)} \int_s^T (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma))\, d\sigma \int_\sigma^T (b_n(u,x_u) - b(u,x_u)\, du \tag{1.9}$$

This equality can be written:

$$E^{P(s,x)} \left| \int_s^T (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma))\, d\sigma \right|^2 = 2E^{P(s,x)} \int_s^T (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma))\, (\psi_n(\sigma,x_\sigma) - \psi(\sigma,x_\sigma))\, d\sigma \tag{1.10}$$

But this last equality is identical to:

$$E^{P(s,x)} \left| \int_s^T (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma)) \right|^2 = 2\int_s^T d\sigma \int_{R^d} (b_n(\sigma,x_\sigma) - b(\sigma,x_\sigma))\, (\psi_n(\sigma,x_\sigma) - \psi(\sigma,x_\sigma))\, p(s,x,\sigma,z)\, dz \tag{1.11}$$

(*) This last result is not strictly necessary for this proof, but it is used implicitly in the proof of theorem I-2.

Knowing that the sequence $\{b_n\}_{n\in N}$ is uniformly bounded, that the sequence $\{\psi_n\}_{n\in N}$ stays uniformly bounded, and that ψ_n converges simply to ψ, one deduces that

$$E^{P_{(s,x)}} \left| \int_s^T (b_n(\sigma, x_\sigma) - b(\sigma, x_\sigma))\, d\sigma \right|^2$$

converges to 0, and then, one sees that

$$\int_s^T b_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

converges in probability to

$$\int_s^T b(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

Theorem 2.3 and lemma 3.2 of [13] prove that the sequence of measures $\left\{Q^{b_n}_{(s,x)}\right\}$ is weakly compact. Let Q be a weak limit of a subsequence $Q^{b_{n_K}}_{(s,x)}$.

Let $Z^{n_K}_T$ be the density of

$$Q^{b_{n_K}}_{(s,x)}$$

relative to $P_{(s,x)}$ on M^s_T, $\tilde{Z}^{n_K}_T$ the density of $Q^{2b_{n_K}}_{(s,x)}$ relative to $P_{(s,x)}$ on M^s_T.

Then the uniform boundedness of $\{b_n\}$ proves by lemma 3.1 of [13] the uniform majoration:

$$\int_{\substack{\sup|x_\sigma - x| \geq \ell \\ s \leq \sigma \leq T}} Z^{n_K}_T \, dP_{(s,x)} \leq C \exp - c\ell^2 \qquad (1.12)$$

Moreover, if A_ℓ is the upper bound of $\|a^{-1}\|$ on $[s,T] \times \{y ; |y-x| \leq \ell\}$, one has:

$$\int_{\substack{\sup|x_\sigma - x| < \ell \\ s \le \sigma \le T}} |Z_T^{n_K}|^2 \, dP_{(s,x)} \le \exp \int_s^T M^2 A_\ell \, d\sigma \int \widetilde{Z}_T^{n_K} \, dP_{(s,x)}$$

$$= \exp M^2 A_\ell (T - s) \tag{1.13}$$

The sequence $\left\{Z_T^{n_K}\right\}_{n_k \in N}$ is then weakly compact in the set of $dP_{(s,x)}$ integrable random variables. It follows immediately that Q has a density Z_T relative to $P_{(s,x)}$ on M_T^s, weak limit of the sequence $\left\{Z_T^{n_K}\right\} n_k \in N$.

One has necessarily:

$$Q[x_s = x] \ge \lim\sup Q^{b_{n_K}}(x_s = x) \quad . \tag{1.14}$$

Then:

$$Q(x_s = x) = 1 \tag{1.15}$$

What is left to prove is that:

$$X_t^\theta = \exp\left\{< \theta, x_t - x > - < \theta, \int_s^t b(\sigma, x_\sigma) d\sigma > - \frac{1}{2} \int_s^t < \theta, a(\sigma, x_\sigma)\theta > d\sigma\right\} \tag{1.16}$$

is a martingale for Q.

If $X_t^{\theta\, n_K}$ is defined by:

$$X_t^{\theta\, n_K} = \exp\left\{<\theta, x_t - x > - <\theta, \int_s^t b_{n_K}(\sigma, x_\sigma) d\sigma > - \frac{1}{2} \int_s^t <\theta, a(\sigma, x_\sigma)\,\theta > d\sigma\right\} \tag{1.17}$$

one needs only to prove that for any A M_t^s measurable, for $t \le T$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A X_t^{\theta n_K} Z_T^{n_K} \, dP_{(s,x)} = \int_A X_t^\theta Z_T \, dP_{(s,x)} \quad . \tag{1.18}$$

But $\int_s^T b_{n_K}(\sigma, x_\sigma)d\sigma$ converges in probability to $\int_s^T b(\sigma, x_\sigma)d\sigma$. Then for every $N > 0$, one has:

$$\lim_{n_K \to +\infty} \int_A \left(X_t^{\theta n_K} \wedge N\right) Z_T^{n_K} \, dP_{(s,x)} = \int_A \left(X_t^\theta \wedge N\right) Z_T \, dP_{(s,x)} \tag{1.19}$$

Moreover, one has the uniform bound:

$$Q_{(s,x)}^{b_{n_K}} \left(\sup_{s \leq \sigma \leq T} |x_\sigma - x| > \ell\right) \leq C \exp - c\ell^2 \quad . \tag{1.20}$$

$\left\{x; \sup_{s \leq \sigma \leq t} |x_\sigma - x| > \ell\right\}$ being an open set, one has:

$$Q\left(\sup_{s \leq \sigma \leq T} |x_\sigma - x| > \ell\right) \leq C \exp - c\ell^2 \quad . \tag{1.21}$$

It follows that when $N \longrightarrow +\infty$

$$\sup_n \int_A |X_t^{\theta n_K} - X_t^{\theta n_K} \wedge N| Z_T^{n_K} \, dP_{(s,x)} \longrightarrow 0 \tag{1.22}$$

$$\int_A |X_t^\theta - X_t^\theta \wedge N| Z_T \, dP_{(s,x)} \longrightarrow 0 \tag{1.23}$$

X_t^θ is then a martingale for Q.

By theorem 6.2 of [13], Q is equal to $Q_{(s,x)}^b$. Q is then necessarily the weak limit of $Q_{(s,x)}^{b_n}$. ■

For b in L_∞, we will write the expectation operator for $Q_{(s,x)}^b$ by $E_{(s,x)}^b$.

For L defined on $[0,+\infty[\times R^d$, measurable and bounded, we define V_L^b by:

$$V_L^b(s,x) = E^b_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \tag{1.24}$$

Theorem I-2: If (b_n, L_n) converges to (b, L) in the $\sigma(L_\infty, L_1)$ topology, the sequence of continuous functions $V_{L_n}^{b_n}$ converges to V_L^b uniformly on compact sets.

Proof: By using again theorem 7.1 of [13] and noticing that the different majoration in the proofs of lemma 7.2, lemma 7.3 and theorem 7.1 of [13] are related only to the bounds of b and Φ, it follows that $\left\{V_{L_n}^{b_n}\right\}_{n\in N}$ is a family of continuous functions which is bounded and equicontinous.

We only need to prove that $V_{L_n}^{b_n}$ converges simply to V_L^b.

By the proof of theorem 1, we know that

$$\int_s^T L_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

converges in $P_{(s,x)}$ probability to

$$\int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \quad .$$

Moreover the family of measures $\left\{Q^{b_n}_{(s,x)}\right\}$ is uniformly integrable with respect to $P_{(s,x)}$. Then one has:

$$\sup_n E^{b_n}_{(s,x)} \int_s^T (L_n(\sigma, x_\sigma) - L(\sigma, x_\sigma))\, d\sigma \longrightarrow 0 \quad . \tag{1.25}$$

Moreover by theorem 1, one has, because of the boundedness of $\{L_n\}$

$$E^{b_n}_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \longrightarrow E^b_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \tag{1.26}$$

Then:

$$E^{b_n}_{(s,x)} \int_s^T L_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \longrightarrow E^{b}_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \quad . \qquad \blacksquare$$

We will also need a result on existence and uniqueness of the solution of the martingale problem with (s, x) as a starting point, associated to (a, b) when b is a function defined on $[s, +\infty[\times\Omega, \mathscr{B}([s, +\infty[) \otimes M^s$ measurable, bounded and s non-anticipating. This result is not given explicitly in [13], but its proof is very similar to the proof given in theorem 6. 2 of [13]. The density $Q^b_{(s,x)}$ relative to $P_{(s,x)}$ is given by:

$$\left.\frac{dQ^b_{(s,x)}}{dP_{(s,x)}}\right|_{M^s_t} = \exp\left\{ \int_s^t < b(\sigma, x_\sigma), a^{-1}(\sigma, x_\sigma)\, dx_\sigma > \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_s^t < b(\sigma, x_\sigma), a^{-1}(\sigma, x_\sigma)\, b(\sigma, x_\sigma) > d\sigma \right\} \qquad (1.27)$$

Remark: Using Theorem I-2, we can prove that when L_n converges weakly to L, then the sequence $\int_s^T L_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$ converges in probability uniformly to $\int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$ for $s \leqslant t \leqslant T$. To see this, we write

$$\int_s^T L_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma = E^{M^s_t}\left(\int_s^T L_n(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma - V^0_{L_n}(t, x_t)\right.$$

But Remark 2 of VI in [9] will prove that the first term converges uniformly in probability for $s \leqslant t \leqslant T$. $V^0_{L_n}$ converging to V^0_L uniformly on compact sets, Lemma 3.1 of [13] will then prove that $V^0_{L_n}(t,x_t)$ converges uniformly in probability to $V^0_L(t,x_t)$.

II. Representations of Processes and Changes of Measures

In corollary 3. 2 of [13], it is proved that if a^{-1} is bounded, and if $Q^b_{(s,x)}$ is solution of the martingale problem associated to (a, b), then one can find a unique Brownian motion β^b for $Q^b_{(s,x)}$ such that x has the representation:

$$x_t = x + \int_s^t b(u, x_u)\, du + \int_s^t \sigma(u, x_u) \cdot d\beta^b_u \quad . \tag{2. 1}$$

This result is extended in [2] with no restriction on a^{-1}.(1) Moreover it is also proved that if b is defined on $[0,+\infty[\times R^d$, bounded and measurable, then β^b defines a square integrable martingale which is an additive functional for the process Q^b. The proof being technical, we refer to [2].

The theorems 6 and 6' of [11], of Kunita and Watanabe, and the application of page 135 of [11] (which is the proof of a result of Ventzel) will allow us to say that, when b is defined on $R^d \times [0,+\infty[$, bounded and measurable, then:

a) For any (s, x) in $[0,+\infty[\times R^d$, a square integrable martingale relative to $Q^b_{(s,x)}$ may be written as a stochastic integral with respect to β^b.

b) If for any (s,x) M is a square integrable martingale for $Q^b_{(s,x)}$, and if M is an additive functional for Q^b, then one can find H defined on $[0,+\infty[\times R^d$, nearly Borel, such that:

$$M_t - M_s = \int_s^t H(u, x_u) \cdot d\beta^b_u \tag{2. 2}$$

Another feature of the problem is that, because of the mutual absolute continuity of all the $Q^b_{(s,x)}$, then any non-anticipating stochastic process, defined on $(\Omega, Q^b_{(s,x)}, M^s)$ has a representation on $(\Omega, Q^{b'}_{(s,x)}, M^s)$.

---

(1) Voir l'Annexe M

Moreover, when Q^b is a Markov process, any additive functional with respect to Q^b is also an additive functional with respect to P. In the same way, Q^b and P have the same nearly Borel functions.

Proposition II-1: For any (s, x) in $[0, +\infty[\times R^d$, let X_t be a stochastic process on $(\Omega, P_{(s,x)}, M^s)$, which is a local semi-martingale, and which can be written as:

$$X_t = \int_s^T H_u \cdot d\beta_u^0 - A_t \tag{2.2}$$

H_u being not anticipative and such that:

$$\int_s^t |H_u|^2 \, du < +\infty \quad , \qquad P_{(s,x)} \quad a \cdot s \quad . \tag{2.3}$$

and A_t being a bounded variation natural process. Then X_t may be represented on $(\Omega, Q^b_{(s,x)}, M^s)$ by the local semi-martingale:

$$X_t = \int_s^t H_u \cdot d\beta_u^b + \int_s^t < H_u, \sigma^{-1}(u, x_u)\, b(u, x_u) > du - A_t \tag{2.4}$$

Proof: Let R_n and T_n be the sequence of stopping times:

$$\begin{cases} R_n = \left\{ \inf \quad t \geq s \quad ; \qquad \int_s^t |H_u|^2 \, du = n \right\} \\ T_n = \left\{ \inf \quad t \geq s \qquad\qquad |x_t| \geq n \right\} \quad . \end{cases} \tag{2.5}$$

Then:

$$X_{t \wedge T_n \wedge R_n} = \int_s^{t \wedge T_n \wedge R_n} H_u \cdot d\beta_u^0 - A_{t \wedge T_n \wedge R_n} \tag{2.6}$$

for the measure $P_{(s,x)}$.

One can then write:

$$X_{t\wedge T_n \wedge R_n} = \int_s^{t\wedge T_n \wedge R_n} < H_u \cdot \sigma^{-1}(u, x_u)\, dx_u > - A_{t\wedge T_n \wedge R_n} \tag{2.7}$$

for the measure $P_{(s,x)}$.

But one can deduce:

$$X_{t\wedge T_n \wedge R_n} = \int_s^{t\wedge T_n \wedge R_n} H_u \cdot d\beta_u^b + \int_s^{t\wedge T_n \wedge R_n} < H_u, \sigma^{-1}(u, x_u) \cdot$$

$$b(u, x_u) > du - A_{t\wedge T_n \wedge R_n} \tag{2.8}$$

for the measure $Q^b_{s,x}$, because $\sigma^{-1}(u, x_u)$ stays bounded when u varies between s and $t\wedge T_n \wedge R_n$, and moreover:

$$E^b_{(s,x)} \int_s^{t\wedge T_n \wedge R_n} |H_u|^2\, du < +\infty \quad .$$

By increasing n to infinity, the proposition follows. ∎

<u>Remark</u>: It is essential to notice that a square integrable martingale for $P_{(s,x)}$ may be only a local martingale for $Q^b_{(s,x)}$. In particular, even if X_t is an additive functional square integrable martingale, its representation on Q^b does not define directly an additive functional. One of the difficulties we will have is to prove that a given additive functional has simultaneously for a given class of Q^b a system of representation which are unambiguously additive functionals.

III. The Problem of Control: The Convex Case

One keeps the assumptions on a already done. U is a compact metrisable space. $c = (b, L)$ is a mapping defined on $[0, +\infty[\times R^d \times U$ with values in $R^d \times R$ such that:

III-1: For any u in U, the mapping

$$(t, x) \longrightarrow c(t, x, u)$$

is Borel measurable.

III-2: For any (t, x) in $[0, +\infty[\times R^d$, the mapping

$$u \longrightarrow c(t, x, u)$$

is continuous.

III-3: c is uniformly bounded.

Because of III-3, the addition of a sufficiently large constant on the last component of c will give us the property:

III-4: $L \geq 0$.

T is a finite positive constant.

Definition 1: The problem of control is the search of u defined on $[0, T] \times R^d$, Borel measurable with values in U, such that for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$, one has:

$$\int dQ^{b_u}_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma, u(\sigma, x_\sigma))d\sigma = \min_{\substack{v \text{ Borel} \\ \text{measurable}}} \int dQ^{b_v}_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma, v(\sigma, x_\sigma))d\sigma$$

It is proved in [2],(1) by using various version of the Filippov lemma that the assumptions III-1-2-3-4 may be changed into the following:

K is a set-valued mapping defined on $[0, +\infty[\times R^d$ with val es in $R^d \times R$, such that:

---

(1) Voir l'Annexe L

III-1': K has non-empty compact values.

III-2': K is Borel-measurable (see [12]).

III-3': K is uniformly bounded.

III-4': For any (t, x) in $[0, T]\times R^d$, if (b, L) belongs to $K(t, x)$, then $L \geq 0$.

The new definition of the problem of control is:

Definition 2: The problem of control is the search of a Lebesgue class of a measurable selection of K, $c = (b, L)$ such that, for any (s, x) in $[0, T)\times R^d$, by calling $\mathscr{L}$ the set of Lebesgue classes of measurable selections of K, one has:

$$\int dQ^b_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)d\sigma = \min_{(b', L')\in\mathscr{L}} \int dQ^{b'}_{(s,x)} \int_s^T L'(\sigma, x_\sigma)d\sigma . \qquad (3.1)$$

One puts on $\mathscr{L}$ the topology induced by $\sigma(L_\infty, L_1)$. $\mathscr{L}$ is then bounded, and metrisable. Let $\mathscr{H}$ the mapping defined on $[0, T]\times R^d \times \mathscr{L}$ by:

$$(s, x, c) \xrightarrow[\mathscr{H}]{} \int dQ^b_{(s,x)} \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)d\sigma \qquad \text{with } c = (b, L) . \qquad (3.2)$$

Proposition III-1: $\mathscr{H}$ is continuous.

Proof: Theorem I-2 proves that if $c_n \longrightarrow c$, then $V^{b_n}_{L_n}$ converges to V^b_L uniformly on compact sets of $[0, T]\times R^d$. The result follows. ■

We add here the following hypothesis, which will not be kept in part IV.

III-5': $K(t, x)$ is convex for any (t, x) in $[0, T]\times R^d$.

Let q be defined by:

$$q(s, x) = \inf_{c\in\mathscr{L}} \mathscr{H}(s, x, c) \quad . \qquad (3.3)$$

Proposition III-2:

$$q(s, x) = \min_{c\in\mathscr{L}} \mathscr{H}(s, x, c) \quad .$$

Proof: Under assumption III-5', $\mathscr{L}$ is now compact for the $\sigma(L_\infty, L_1)$ topology. The result follows immediately from proposition III-1. ■

Proposition III-3: q is a positive, bounded and continuous function on $[0, T]\times R^d$. Moreover, for any x in R^d, one has:

$$q(T,x) = 0 \tag{3.4}$$

Proof: Suppose $(s_n, x_n) \longrightarrow (s, x)$. One can write:

$$q(s_n, x_n) = \mathscr{H}(s_n, x_n, c_n) \quad . \tag{3.5}$$

Let c_{n_K} be a converging subsequence of c_n in $\mathscr{L}$, and let $\widetilde{c}$ be the limit ($\mathscr{L}$ is metrisable). Then

$$q(s,x) \le \mathscr{H}(s,x,\widetilde{c}) \quad . \tag{3.6}$$

But one has:

$$\mathscr{H}(s,x,\widetilde{c}) = \lim_{n_K \to +\infty} q(s_{n_K}, x_{n_K}) \quad . \tag{3.7}$$

Then

$$q(s,x) \le \liminf_{n_K \longrightarrow +\infty} q(s_{n_K}, x_{n_K}) \tag{3.8}$$

More generally, one will have as a consequence:

$$q(s,x) \le \liminf_{n \longrightarrow +\infty} q(s_n, x_n) \tag{3.9}$$

But one can write:

$$q(s,x) = \mathscr{H}(s,x,c) \quad . \tag{3.10}$$

and

$$\mathscr{H}(s,x,c) = \lim_{n \to +\infty} \mathscr{H}(s_n, x_n, c) \tag{3.11}$$

G

But

$$\mathscr{H}(s_n, x_n, c) \geq q(s_n, x_n) \tag{3.12}$$

Then:

$$q(s,x) \geq \limsup_{n \to +\infty} q(s_n, x_n) \quad . \tag{3.13}$$

By comparing (3. 8) and (3. 13), the result follows. ■

Corollary: For s in $[0,T]$, the set valued mapping Γ_s defined on R^d by:

$$x \xrightarrow[\Gamma_s]{} \left\{ c \in \mathscr{L} \; ; \qquad q(s,x) = \mathscr{H}(s,x,c) \right\} \tag{3.14}$$

has non-empty closed values. Moreover Γ_s is upper semi-continuous.

Proof: This follows immediately from the proof of proposition III-3. ■

Proposition III-4: For any c in $\mathscr{L}$, one can find M, which is a square integrable martingale additive functional for Q^b, such that, for any couple (s,x) in $[0,T) \times R^d$, one has on $t \geq s$:

$$V_L^b(t,x_t) = V_L^b(s,x) + M_t^{(s,x)} - \int_s^t L(\sigma, x_\sigma) d\sigma \quad Q^b_{(s,x)} \text{ a.s} \quad . \tag{3.15}$$

Proof: V_L^b is the Q^b potential of the additive positive increasing continuous functional:

$$\int_s^t L(\sigma, x_\sigma) d\sigma$$

L being bounded, for any (s,x), one gets $M_t^{(s,x)}$ by writing the Meyer decomposition of the bounded continuous supermartingale $V_L^b(t,x_t)$. V_L^b and L being bounded, $M_t^{(s,x)}$ is square integrable. Moreover, it is obviously an additive functional for Q^b. ■

Corollary: One can find H_c nearly Borel[(*)] for the Markov process P such that for any (s, x) in $[0, +\infty[\times R^d$,

$$E^b_{(s,x)} \int_s^{+\infty} |H_c(u, x_u)|^2 du < +\infty \tag{3.16}$$

and such that M has the representation:

$$M_t^{(s,x)} = \int_s^t H_c(u, x_u) \cdot d\beta_u^b \quad . \tag{3.17}$$

Proof: This follows from part II, by applying the theorem additive square integrable martingale given in [11] (theorem 6', p. 135), as applied in para. 3, p. 135 of [11], and by noticing that Q^b and P being mutually absolutely continuous, the processes Q^b and P have the same nearly Borel functions.■

Proposition III-5: A necessary and sufficient condition for c in $\mathscr{L}$ to be an element of $\Gamma_s(x)$ is: $dP_{(s,x)}$ a.s. for a.e. $t \geq s$, one has:

$$L(t, x_t) + \langle H_c(t, x_t), \sigma^{-1}(t, x_t)\, b(t, x_t) \rangle =$$

$$\min_{(b', L') \in K(t, x_t)} L' + \langle H_c(t, x_t), \sigma^{-1}(t, x_t) b' \tag{3.18}$$

Proof: H_c being nearly Borel, one can find a Borel function H'_c defined on $[0, +\infty[\times R^d$, such that the processes $H_c(t, x_t)$ and $H'_c(t, x_t)$ are $P_{(s,x)}$ a.s. equal. We replace then H_c by H'_c.

Let $c_1 = (b_1, L_1)$ an element of $\mathscr{L}$ such that for every (t, x) in $[0, +\infty[\times R^d$, one has:

(*) For this definition, see [3] I-10. 21.

$$L_1(t,x) + < H'_c(t,x)\,,\ \sigma^{-1}(t,x)\, b_1(t,x) >$$

$$= \min_{\substack{(b',L')\\ \epsilon K(t,x)}} L' + < H'_c(t,x),\ \sigma^{-1}(t,x)\, b' > \ . \tag{3.19}$$

A choice of c_1 is possible by corollary 4.3 of [12], because K is Borel measurable with convex values, and σ^{-1} is continuous. By proposition II-1, let us compute the representation of $V_L^b(t,x_t)$ on $Q^{b_1}_{(s,x)}$. One has:

$$V_L^b(t,x_t) = V_L^b(s,x) + \int_s^t H'_c(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b_1}$$

$$- \int_s^t (L(u,x_u) + <(H'_c(u,x_u),\ \sigma^{-1}(u,x_u)\,(b(u,x_u) - b_1(u,x_u))\, du \tag{3.20}$$

By definition one has:

$$V_L^b(t,x_t) \leq V_L^b(s,x) + \int_s^t H'_c(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b_1} - \int_s^t L_1(u,x_u)\, du\ . \tag{3.21}$$

As we have said in II,

$$\int_s^t H'_c(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b_1}$$

is generally not a martingale for $Q^{b_1}_{(s,x)}$.

But let R_n be the sequence of stopping times defined by:

$$R_n = \inf \left\{ t \geq s; \qquad \int_s^t |H'_c(u,x_u)|^2 du = n \right\} \wedge T\ . \tag{3.22}$$

One has then:

$$V_L^b(R_n, x_{R_n}) \leq V_L^b(s,x) + \int_s^{R_n} H'_c(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b_1} - \int_s^{R_n} L_1(u,x_u)du\ .$$

G

But now $\int_s^{R_n} H'_c(u, x_u) \cdot d\beta_u^{b_1}$ has a $Q_{(s,x)}^{b_1}$ mean which is null. Then:

$$E_{(s,x)}^{b_1} \; V_L^b(R_n, x_{R_n}) \le V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b_1} \int_s^{R_n} L_1(u, x_u)\, du \quad . \tag{3.23}$$

But $V_L^b(R_n, x_{R_n})$ is positive. Then:

$$V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b_1} \int_s^{R_n} L_1(u, x_u)\, du \ge 0 \quad . \tag{3.24}$$

L_1 being bounded, by the Lebesgue theorem, when $n \longrightarrow +\infty$, one has:

$$V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b_1} \int_s^{T} L_1(u, x_u) du \ge 0 \quad . \tag{3.25}$$

Moreover, if the stated relation had not been true $P_{(s,x)}$ a.s., one would have had:

$$V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b_1} \int_s^{t} L_1(u, x_u)\, du > 0 \quad . \tag{3.26}$$

and this would have been a contradiction to the optimality of c.

Conversely, let us assume that the stated relation is true. Let (b', L') in $\mathscr{L}$. Representing $V_L^b(t, x_t)$ on $Q_{(s,x)}^{b'}$, one has:

$$V_L^b(t, x_t) \ge V_L^b(s,x) + \int_s^t H'_c(u, x_u) \cdot d\beta_u^{b'} - \int_s^t L'(u, x_u)\, du \quad . \tag{3.27}$$

If R_n is the same sequence of stopping times defined in (3.22), then:

$$\begin{aligned} E_{(s,x)}^{b'} \; V_L^b(R_n, x_{R_n}) &\ge V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b'} \int_s^{R_n} L'(u, x_u)\, du \\ &\ge V_L^b(s,x) - E_{(s,x)}^{b'} \int_s^{T} L'(u, x_u)\, du \quad . \end{aligned} \tag{3.28}$$

But now the sequence of random variables $V^b_L(R_n, x_{R_n})$ is uniformly bounded and $V^b_L(R_n, x_{R_n}) \to 0\, Q^b_{(s,x)}$ a.s. Then:

$$V^b_L(s,x) \leq E^{b'}_{(s,x)} \int_s^T L'(u, x_u)\, du \tag{3.29}$$

or

$$V^b_L(s,x) \leq V^{b'}_{L'}(s,x) \quad . \blacksquare \tag{3.30}$$

Remark: This proposition and the next one are closely related to theorem 4.3 and theorem 6.2 of [4].

For (s,x) in $[0,T] \times R^d$ $\widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}$ is the set of $dt \otimes dP_{(s,x)}$ classes of sections of K, which are measurable with respect to $\mathscr{B}([s,+\infty[) \otimes M^s$, and s-non-anticipating.

$\mathscr{L}$ can then be mapped in $\widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}$. Even if this is not completely correct, we will suppose, without going in details, that this mapping is an injection, because null measure sets in $[0,T) \times R^d$ have a null $P_{(s,x)}$ potential. By the last statement of part I, for $\tilde{c}$ in $\widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}$, we can associate $Q^{\tilde{b}}_{(s,x)}$. Then, necessarily:

$$\inf_{(\tilde{b},\tilde{L}) \in \widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}} \int dQ^{\tilde{b}}_{(s,x)} \int_s^T \tilde{L}(u, x_u)\, du \leq q(s,x) \tag{3.31}$$

Proposition III-6:

$$q(s,x) = \min_{(\tilde{b},\tilde{L}) \in \widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}} \int dQ^{\tilde{b}}_{(s,x)} \int_s^T \tilde{L}(u, x_u)\, du \quad . \tag{3.32}$$

Proof: Let c be an element of $\Gamma_s(x)$. The condition of proposition III-5 is then satisfied. With proposition II-1, one represents the process $V^b_L(t, x_t)$

for the measure $Q^{\widetilde{b}}_{(s,x)}$. The calculations go exactly the same way, and one proves:

$$V^b_L(s,x) \leq \int d\, Q^{\widetilde{b}}_{(s,x)} \int_s^T \widetilde{L}(u,x_u)\, du \qquad \blacksquare \tag{3.33}$$

We are going now to prove a result which has close connections with the the classical dynamic programming inequality.

Theorem III-1. For any $c = (b, L)$ in $\mathscr{L}$, $V^b_L - q$ is an excessive function relative to Q^b.

Proof: One has to prove that $V^b_L - q$ is excessive. V^b_L being the potential of a continuous functional, and q being continuous, one has only to prove that for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$ and any t in $[s, T)$, then:

$$E^b_{(s,x)} (V^b_L(t, x_t) - q(t, x_t)) \leq V^b_L(s, x) - q(s, x) \quad . \tag{3.38}$$

Let $\gamma = (\beta, \lambda)$ be a Borel section of Γ_t defined in the corollary of proposition III-3. Such a section exists, because Γ_t is upper-semi-continuous with values in a metrizable compact space. Γ_t will be then Borel measurable, and one can apply theorem 1 of [12].

Let $\widetilde{c} = (\widetilde{b}, \widetilde{L})$ be defined by:

$$\begin{cases} s \leq \tau < t & \widetilde{c}(\tau, x) = c(\tau, x_\tau) \\ t \leq \tau < T & \widetilde{c}(\tau, x) = \gamma_{x_t}(\tau, x_\tau) \\ \tau \geq T & \widetilde{c}(\tau, x) = c(\tau, x_\tau) \ . \end{cases} \tag{3.39}$$

$\widetilde{c}$ is then in $\widetilde{\mathscr{L}}_{(s,x)}$. But proposition III-6 proves that:

$$q(s, x) \leq \int dQ^{\widetilde{b}}_{(s,x)} \int_s^T \widetilde{L}(u, x_u)\, du \quad . \tag{3.40}$$

One has then:

$$\int dQ^{\widetilde{b}}_{(s,x)} \int_s^T \widetilde{L}(u, x_u) du = \int dQ^{\widetilde{b}}_{(s,x)} \int_s^t L(u, x_u)\, du +$$

$$\int d\, Q^{\widetilde{b}}_{(s,x)} \int_t^T \widetilde{L}(u, x_u)\, du \tag{3.41}$$

But the results of I prove that $\widetilde{Q}^{b}_{(s,x)}$ and $Q^{b}_{(s,x)}$ have the same restriction on M^{s}_{t}. Then:

$$\int d\,\widetilde{Q}^{b}_{(s,x)} \int_s^t L(u,x_u)\,du = \int dQ^{b}_{(s,x)} \int_s^t L(u,x_u)\,du \tag{3.42}$$

Moreover the restriction to M^{t}_{T} of the conditional probability of $\widetilde{Q}^{b}_{(s,x)}$ relative to M^{s}_{t} is by I nothing else than $Q^{\beta_{x_t}}_{(t,x_t)}$ By definition, one has:

$$\int d\,Q^{\beta_y}_{(t,y)} \int_t^T \lambda_y(u,x_u)\,du = q\,(t,y) \tag{3.43}$$

Then:

$$\begin{aligned}\int d\,\widetilde{Q}^{b}_{(s,x)} \int_t^T \widetilde{L}(u,x_u)\,du &= \int dQ^{b}_{(s,x)} \int dQ^{\beta_{x_t}}_{(t,x_t)} \int_t^T \lambda_{x_t}(u,x_u)\,du \\ &= \int dQ^{b}_{(s,x)}\, q(t,x_t)\end{aligned} \tag{3.44}$$

or:

$$\int d\,\widetilde{Q}^{b}_{(s,x)} \int_t^T \widetilde{L}(u,x_u)du = E^{b}_{(s,x)}\, q(t,x_t) \quad . \tag{3.45}$$

By joining (3.41), (3.42) and (3.45), one gets:

$$q(s,x) \leq V^{b}_{L}(s,x) - E^{b}_{(s,x)}\, V^{b}_{L}(t,x_t) + E^{b}_{(s,x)}\, q(t,x_t) \quad \blacksquare \tag{3.46}$$

Let us fix $c = (b,L)$ for the moment. By theorem III-1 and theorem IV-3.8 of [3], $V^{b}_{L} - q$ is the Q^{b} potential of an increasing continuous additive functional A'^{c}. Moreover Pemark 59 of VII [9] proves that we can find a constant C such that for any (s,x,c) then:

$$E^{b}_{(s,x)} \left| A'^{c}_{T} - A'^{c}_{s} \right|^2 \leqslant C \tag{3.47}$$

If we define the continuous bounded variation process A^{b} by:

$$A^{b}_{t} - A^{b}_{s} = \int_s^t L(u,x_u)\,du - (A'^{c}_{t} - A'^{c}_{s}) \tag{3.48}$$

G

then we can find a martingale $M_t^{(s,x)}$ relative to $Q^b_{(s,x)}$ such that:

$$q(t,x_t) = q(s,x) + M_t^{(s,x)} - \int_s^t d\,A_u^b \ .$$

But inequalities (3.47) and (3.48) prove immediately that:

$$E^b_{(s,x)} |A_T^b - A_s^b|^2 < +\infty \ .$$

q being bounded, $M_t^{(s,x)}$ is then square integrable. Being an additive functional for Q^b, theorem 6 of [11] proves that one can find H defined on $[0,+\infty[\ R^d$, nearly Borel for Q^b, such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t,x_t) = q(s,x) + \int_s^t H(u,x_u)\cdot d\,\beta_u^b - \int_s^t d\,A_u^b \ Q^b_{(s,x)} \ a\cdot s. \\ \\ E^b_{(s,x)} \int_s^t |H_u|^2 \,du < +\infty \end{array} \right. \qquad (3.49)$$

Let us represent then the process $q(t,x_t)$ on $Q^{b'}_{(s,x)}$ for (b',L') in $\mathscr{L}$.

By proposition II-1, one has:

$$q(t,x_t) = q(s,x) + \int_s^t H(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b'} + \int_s^t < H(u,x_u), \sigma^{-1}(u,x_u)\,(b'(u,x_u)$$

$$- b(u,x_u)) > du \ - \int_s^t dA_u^b \qquad (3.50)$$

But this is necessarily the unique decomposition of the process $q(t,x_t)$ into the sum of a continuous bounded variation process and of a martingale. 1.

Then one has also:

$$E^{b'}_{(s,x)} \int_s^T |H(u,x_u)|^2 \,du < +\infty \ . \qquad (3.51)$$

because the previous decomposition is necessarily the decomposition (3.49) relative to $Q^{b'}_{(s,x)}$.

The additive functional $\int_s^t H(u, x_u) \cdot d\beta_u^{b'}$ is then well defined for $Q^{b'}$.
One has then the following theorem:

Theorem III -2: One can find $\widetilde{H}$ Borel on $[0, T] \times R^d$, such that:

a) For any $c = (b, L)$ in $\mathscr{L}$, for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$,

$$E_{(s,x)}^b \int_s^T |\widetilde{H}(u, x_u)|^2 \, du < +\infty \quad (*) \tag{3.52}$$

b) For any $c = (b, L)$ in $\mathscr{L}$, one can find an increasing positive continuous additive functional A^b such that for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$:

$$q(t, x_t) = q(s, x) + \int_s^t \widetilde{H}(u, x_u) \cdot d\beta_u^b - \int_s^t dA_u^b \quad P_{(s,x)} \text{ a.s.} \tag{3.53}$$

c) For any $c = (b, L)$ in $\mathscr{L}$, for $c' = (b', L')$ in $\mathscr{L}$, one can choose $A^{b'}$ such that:

$$\int_s^t dA_u^{b'} = \int_s^t dA_u^b + \int_s^t \langle \widetilde{H}(u, x_u), \sigma^{-1}(u, x_u) (b(u, x_u) - b'(u, x_u)) \rangle \, du \tag{3.54}$$

Proof: Taking into account what has been previously said, the only difficulty lies in a Borel choice of $\widetilde{H}$. A priori, one knows that a nearly Borel choice of H is possible. H being nearly Borel is universally measurable ([3] p. 2), and then Lebesgue-measurable. One may find then $\widetilde{H}$ Borel, which differs from H on a Lebesgue null measure set. But this set is of null potential for all the Q^b by theorem 8. 1 of [13]. One can then replace H by $\widetilde{H}$. ∎

Let ϕ the function defined $[0, T) \times R^d$ by:

$$\phi(t, x) = \inf_{(b', L') \in K(t, x)} L' + \langle \widetilde{H}(t, x), \sigma^{-1}(t, x) \, b' \rangle \tag{3.55}$$

(*) By using the result given in the Séminaire de Probabilités n°2, Lecture Notes in Mathematics n°51, Springer Verlag, page 166, one can prove that the left-hand quantity is bounded by a constant independent of c, s, x .

By corollary 4.3 of [12], ϕ is Borel measurable.

Theorem III-3 A^b can be defined by:

$$\int_s^t dA_u^b = \int_s^t \phi(u, x_u)du - \int_s^t < \widetilde{H}(u, x_u), \sigma^{-1}(u, x_u)\, b(u, x_u) > du \tag{3.56}$$

For any choice (and such a choice is possible) of $c_o = (b_o, L_o)$ in $\mathscr{L}$ such that:

$$dt \otimes dx \text{ a.e}: \quad \phi(t, x) = L_o(t, x) + < \widetilde{H}(t, x), \ \sigma^{-1}(t, x)\, b_o(t, x) > \tag{3.57}$$

then, for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$, one has:

$$q(s, x) = V_{L_o}^{b_o}(s, x) \quad .$$

Proof: By theorem III-2, q being null at T, for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$, for $c' = (b', L')$ in $\mathscr{L}$, one has:

$$q(s, x) = E_{(s, x)}^{b'} \int_s^T d A_u^b + \int_s^T < \widetilde{H}(u, x_u), \ \sigma^{-1}(u, x_u)\, (b(u, x_u) - b'(u, x_u))\, du \tag{3.58}$$

Moreover theorem III-1 proves that $V_L^b - q$ is excessive for the Markov process $Q^{b'}$. Then one can write that for any (s, x) in $[0, T] \times R^d$,

$$\int_s^t L'(u, x_u)du - \int_s^t d A_u^b - \int_s^t < \widetilde{H}(u, x_u), \ \sigma^{-1}(u, x_u)\, (b(u, x_u) - b'(u, x_u))> du \tag{3.59}$$

is $Q_{(s,x)}^b$ a.s. (or $P_{(s,x)}$ a.s.) an increasing positive process. By corollary 4.3 of [12], one can find (b_o, L_o) in $\mathscr{L}$ such that, on $[0, T] \times R^d$:

$$\phi(u,y) = L_o(u,y) + < \widetilde{H}(u,y),\ \sigma^{-1}(u,y)\, b_o(u,y) >$$

Then necessarily, $P_{(s,x)}$ a.s, the process

$$\int_s^t L_o(u,x_u)\,du - \int_s^t dA_u^b - \int_s^t < \widetilde{H}(u,x_u),\ \sigma^{-1}(u,x_u)\,(b(u,x_u) - b_o(u,x_u)) > du \tag{3.60}$$

is positive and increasing, or equivalently:

$$\int_s^t \phi(u,x_u)\,du - \int_s^t dA_u^b - \int_s^t < \widetilde{H}(u,x_u), \sigma^{-1}(u,x_u)\, b(u,x_u) > du \tag{3.61}$$

is positive and increasing.

If the stated relation is not true, it is equivalent to write that one can find (s_o, x_o) in $[0,T]\times R^d$ such that, on a $P_{(s_o,x_o)}$ non null set, one has:

$$\int_{s_o}^T dA_u^b \leq \int_s^T \phi(u,x_u)\,du - \int_s^T < \widetilde{H}(u,x_u),\ \sigma^{-1}(u,x_u)\, b(u,x_u) > du \tag{3.62}$$

with strict inequality on a $P_{(s_o,x_o)}$ non null set. But then, for any (b',L') in $\mathscr{L}$, one would have:

$$\int_{s_o}^T dA_u^b + \int_{s_o}^T < \widetilde{H}(u,x_u),\ \sigma^{-1}(u,x_u)\,(b(u,x_u) - b'(u,x_u))> du \tag{3.63}$$

$$\leq \int_{s_o}^T L'(u,x_u)\,du$$

with strict inequality on a $Q^{b'}_{(s_o,x_o)}$ non null set. By using then theorem III-3, which says that $\int_s^T \widetilde{H}(u,x_u)\cdot d\beta_u^{b'}$ has a $Q^{b'}_{(s_o,x_o)}$ null mean, and knowing that $q(T, x_T) = 0$, one has:

$$q(s_o, x_o) = E^{b'}_{(s_o, x_o)} \left(\int_{s_o}^{T} dA_u^b + \int_{s_o}^{T} < \widetilde{H}(u, x_u), \sigma^{-1}(u, x_u) (b(u, x_u) - b'(u, x_u) \; du \right) \tag{3.64}$$

Then, by joining (3.63) and (3.64) one would have for any (b', L') in $\mathscr{L}$:

$$q(s_o, x_o) < V^{b'}_{L'}(s_o, x_o) \quad . \tag{3.65}$$

But this is a contradiction to proposition III-2. The additive functional $\int_s^t dA_u^b$ is then identical to

$$\int_s^t \phi(u, x_u)\, du - \int_s^t < \widetilde{H}(u, x_u), \sigma^{-1}(u, x_u)\, b(u, x_u) > du \quad .$$

One will check then easily that one has for (s, x) in $[0, T] \times R^d$:

$$q(s, x) = V^{b_o}_{L_o}(s, x)$$

■

One can write now the essential result of this part. Let μ a probability measure on $[0, T] \times R^d$. Let Q_μ^b be the Markov process with "initial" probability measure μ, as constructed in [3] I-5.

Corollary: For any "initial" probability measure μ, on $[0, T] \times R^d$, then:

$$\int dQ_\mu^{b_o} \int_t^T \cdot\, L_0(u, x_u)\, du = \min_{(b, L) \in \mathscr{L}} \int dQ_\mu^b \int_t^T L(u, x_u)\, du \tag{3.66}$$

Proof: By the result given in [3]-I (5.9), one has:

$$\int dQ_{\mu}^{b} \int_{t}^{T} L(u, x_u)\, du = \int d\mu(t, x)\, V_L^b(t, x) \quad . \tag{3.67}$$

But

$$V_{L_0}^{b_o}(t, x) \leq V_L^b(t, x)$$

The corollary follows. ■

IV. The General Case

We keep all the previous assumptions on K except III-5'.

$\hat{K}(t,x)$ is the closed convex hull of $K(t,x)$. $\hat{K}$ is then a Borel set-valued mapping by [12] corollary 3.3. $\hat{\mathscr{L}}$ is then the set of Lebesgue classes associated to $\hat{K}$.

Theorem IV-1: One can find (b_o, L_o) in $\mathscr{L}$, such that for any "initial" probability measure μ on $[0,T)\times R^d$, then:

$$\int dQ_\mu^{b_o} \int_t^T L_o(u, x_u)\, du = \min_{(b,L)\in\mathscr{L}} \int dQ_\mu^{b} \int_t^T L(u, x_u)\, du$$

$$= \min_{(b,L)\in\hat{\mathscr{L}}} \int dQ_\mu^{b} \int_t^T L(u, x_u)\, du \qquad (4.1)$$

Proof: $\hat{K}$ satisfies all the hypothesis of III. Let us apply theorem III-3 $\hat{K}$: Let Δ be the set-valued mapping defined by

$$(t,x) \xrightarrow[\Delta]{} \left\{ (b,L) \in K(t,x)\ ;\ \phi(t,x) = L + \langle \tilde{H}(t,x), \sigma^{-1}(t,x)\, b \rangle \right\} \qquad (4.2)$$

Δ has non-empty values, because K has compact values, and K and $\hat{K}$ have the same extremal points. Moreover, Δ is Lebesgue measurable: to prove this, one checks that it has a $\mathscr{B}(R)\otimes\mathscr{B}(R^d)\otimes\mathscr{B}(R^{d+1})$ measurable graph, and one applies theorem 2 of [12] (a proof that Δ is Borel measurable is not possible directly in this case, because K is not convex-valued).

Let $(\tilde{b}, \tilde{L})$ be a Lebesgue measurable selection of Δ, (b_1, L_1) a Borel measurable function, Lebesgue equivalent to $(\tilde{b}, \tilde{L})$. Let (b_o, L_o) a Borel measurable function, Lebesgue equivalent to (b_1, L_1), such that:

$$(b_o(t,x),\ L_o(t,x)) \in K(t,x) \qquad \text{everywhere on } [0,T)\times R^d \tag{4.3}$$

Such a choice is possible, by changing (b_1, L_1) into one of the Borel sections of K on the null measure set $\{(t,x) ; (b_1(t,x), L_1(t,x)) \notin K(t,x)\}$ which is Borel by corollary 3. 1 of [12].

Then, a. e. on $[0,T)\times R^d$, one has:

$$\phi(t,x) = L_o(t,x) + \langle \tilde{H}(t,x),\ \sigma^{-1}(t,x)\, b_o(t,x) \rangle \quad . \tag{4.4}$$

By the corollary of theorem III-3 one deduces that for any "initial" probability measure on $[0,T)\times R^d$, one has:

$$\int dQ_\mu^{b_o} \int_t^T L_o(u, x_u)\, du = \min_{(b,L)\in\hat{\mathscr{L}}} \int dQ_\mu^b \int_t^T L(u,x_u)\, du \tag{4.5}$$

But $\mathscr{L} \subset \hat{\mathscr{L}}$. Then:

$$\int dQ_\mu^{b_o} \int_t^T L_o(u, x_u)\, du = \min_{(b,L)\in\mathscr{L}} \int dQ_\mu^b \int_t^T L(u,x_u)\, du \quad \blacksquare \tag{4.6}$$

V. Conclusion

Rather surprisingly, the problem of optimal stochastic control has under relatively weak assumption far better properties than the corresponding one in deterministic control. Of course, one might think of a limiting process. Unfortunately, the convergence takes place only under the convexity assumptions, where the results are well-known.

To study more general cases where $\underline{a}$ depends on the control, convex analysis type methods on the stochastic processes can be used. They can be partially applied for the solutions of this problem. We refer the reader to [2].

Moreover the problem of optimal control with incomplete observation seems to have solutions in this framework only under stringent assumptions.

Acknowledgment

The author is indebted to Professor Y. C. Ho for providing assistance at Harvard University during the Summer of 1972, and to Professor S. R. S. Varadhan of the Courant Institute of Mathematical Sciences, for providing the proof of an unpublished result.

This report will be submitted for publication to the Transactions of the American Mathematical Society.

References

[1] Beněs, V. E.: Existence of optimal stochastic control laws, SIAM J. of Control, Vol. 9, No. 3, August 1971.

[2] Bismut, J. M.: Analyse convexe et probabilités. Doctoral Dissertation. Faculté des Sciences de Paris. To appear.

[3] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K.: Markov Processes and Potential Theory, Acad. Press, New York and London, 1968.

[4] Davis, M. H. and Varaiya, P. P.: Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems. To appear.

[5] Fleming, W. H.: Optimal continuous parameter stochastic control, SIAM Review 11 (1969), pp. 470-509.

[6] Fleming, W. H.: Optimal control of partially observable diffusions, SIAM J. of Control, 6 (1968), pp. 194-214.

[7] Fleming, W. H. and Nisio, M.: On the existence of optimal stochastic controls, J. Math. Mech. 15 (1966), pp. 777-794.

[8] Freidlin, M. I.: On small (in the weak sense) perturbations on the coefficients of a diffusion process. Theory of probability and its applications, Vol. XII, No. 3, 1967, pp. 487-490.

[9] Meyer, P. A.: Probabilités et potentiels. Hermann Paris. English Translation: Blaisdell, Boston.

[10] Meyer, P. A.: Processus de Markov, Springer Verlag, Lecture notes in mathematics, No. 26.

[11] Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques III, Seminaire de Probabilités No. 1, pp. 118-141, Springer Verlag. Lecture notes in mathematics, No. 39.

[12] Rockafellar, R.T.: Measurable Dependence of convex sets and functions on parameters, J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 28, pp. 4-25 (1969).

[13] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S.: Diffusion Processes with continuous coefficients, Comm. Pure and Appl. Math., 1969, Vol. XXII, pp. 345-400, pp. 479-530.

H

An existence result in optimal stochastic control with boundary conditions

H

An existence result in optimal stochastic control with boundary conditions.

by

Jean-Michel Bismut

Ingénieur au Corps des Mines.

Personal address: 4 rue des Mariniers
Appt 107
75014 Paris 14^o
FRANCE

This is a part of a Thesis to be submitted at the Faculté des Sciences of Paris in Pure Mathematics.

Abstract

This paper generalizes the results obtained by the author to the control of a diffusion process stopped when it enters a given region. The existence of an optimal Markov control is proved under very mild assumptions. The notations are taken from [2].

Key words: Markov processes, superharmonic functions, optimal stochastic control, boundary problems.

$E_{(s,x)}$ (resp. $E^b_{(s,x)}$) is the expectation operator for $P_{(s,x)}$ (resp. $Q^b_{(s,x)}$).

T is a strictly positive constant.

We will limit ourselves to the couples (s,x) in $[0,T]\times R^d$.

A is a closed subset of $[0,T]\times R^d$, containing $\{T\}\times R^d$, such that $\complement A$ is non empty.

For $P_{(s,x)}$, we define D_A by:

(1.2) $$D_A = \inf\{t \geq s ; (t, x_t) \in A\} .$$

By [5] XV-4, D_A is a stopping time. Moreover $D_A \leq T$.

We consider then the process $x_{t\wedge D_A}$ defined on $(\Omega, M_T^s, P_{(s,x)})$ for $t \geq s$.

P defining a strong Markov process, $x_{t\wedge D_A}$ will be a strong Markov process. In the same way, $(t\wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ will be a strong Markov process.

We can as well define this process on any $(\Omega, M_T^s, Q^b_{(s,x)})$. $(t\wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ will be in the same way a strong Markov process.

All the next results are given for <u>any of the considered measures.</u>

We define now a new space in which this process takes its values.

If $\mathscr{B}_u(\complement A)$ is the σ-algebras of the universally measurable sets of $\complement A$ ([4] II-38), we define the measurable space $(E, \mathscr{E})$ by $(\complement A, \mathscr{B}_u(\complement A))$. E has also the topology of $\complement A$.

We associate to E a δ as in [4] X-16, which will be identified to A. E' will be the set $E\cup\{\delta\}$ and $\mathscr{E}'$ the σ-algebra generated by $\mathscr{E}$ and $\{\delta\}$.

All functions defined on E will be extended to functions defined on E', by giving them the value 0 on δ.

The process $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$ will be identified to a process with values in E' by giving to it the value δ for $t \geq D_A$.

Proposition I-1: $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$ defines a Hunt process, whose duration of life is D_A. The p-excessive functions $(p \geq 0)$ for this process are Borel.

Proof: We check that the assumptions A_1, A_3, A_5 of [5] are satisfied by the semi-group defined on the $\mathscr{E}'$ measurable functions by:

$$(1.3) \qquad (P^t g)(s,x) = E^b_{(s,x)}\, g((t+s \wedge) D_A, x_{(t+s) \wedge D_A})$$

A_1: For any probability measure μ on E, one can build easily the Markov process, whose initial measure is μ. One needs only to build Q^b_μ: this is possible by [5] XIII-4 because Q^b is a Feller process. The process will then be $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$.

A_3. We have seen in [2] (Theorem I-2) that for any L Borel and bounded, at any (s,x) in $[0,+\infty[\times R^d$, for $T' > s$, for $p > 0$ the function

$$(1.4) \qquad (s,x) \rightarrow e^{ps} E^b_{(s,x)} \int_s^{T'} e^{-p\sigma} L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

is continuous.

By uniform convergence, L being Borel measurable, positive and bounded,

$$(1.5) \qquad (s,x) \rightarrow e^{ps} E^b_{(s,x)} \int_s^{+\infty} e^{-p\sigma} L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

will be continuous.

By applying again Fatou's lemma, we can remove the boundedness assumptions and find that the function is lower semi-continuous.

Finally we can apply T 64 of [4] IX to prove that any p-excessive function $(p \geq 0)$ for Q^b is lower semi-continuous. (*)

Let now f be a bounded positive Borel function defined on E'. We are going to prove that its p-potential $(p > 0)$ for $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ is Borel measurable and is right continuous on $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$. We call U_p^b the p-potential operator. One has:

$$(1.6) \qquad (U_p^b f)(s,x) = e^{ps} \left\{ E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} e^{-p\sigma} f(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma + \frac{f(\delta)}{p} E^b_{(s,x)} e^{(-pD_A)} \right\} .$$

Then let us analyze the two terms:

* Let $\tilde{f}$ be the Borel function equal to 0 on A and to f on $\complement A$. Then:

$$(1.7) \qquad E^b_{(s,x)} \int_s^{+\infty} e^{-p\sigma} \tilde{f}(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma = E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} e^{-p\sigma} f(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma + E^b_{(s,x)} \int_{D_A}^{+\infty} e^{-p\sigma} \tilde{f}(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma .$$

Let $V_p^b \tilde{f}$ be the Q^b p-potential of $\tilde{f}$.

One has:

(*) Because all the potential measures are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, we can limit ourselves to the potentials of Borel functions instead of taking the potentials of universally measurable functions. The same argument will be implicitly used for the process $(t \wedge D_A\ x_{t\wedge D_A})$.

$$(1.8)\qquad e^{-ps}\,(V_p^b\tilde{f})(s,x) = E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} e^{-p\sigma}\, f(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

$$+ E^b_{(s,x)}\, e^{(-pD_A)}\, (V_p\tilde{f})(D_A, x_{D_A}) \;.$$

We know that $e^{-ps}(V_p\tilde{f})(s,x)$ is continuous, and is then necessarily right continuous on $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$.

We have now two cases:

- $(s,x) \in A$. Then $D_A = s$ and the first term of (1.8) is null.

- $(s,x) \notin A$. $\complement A$ being an open set $D_A > s$.

$(V_p\tilde{f})$ being p-excessive for Q^b, we know that if we define T_A by:

$$T_A = \inf\{t > s;\ (t, x_t) \in A\} \quad ,$$

then by [5] XV-T 15, $(s,x) \to E^b_{(s,x)}\, e^{(-pT_A)}\, (V_p\tilde{f})(T_A, x_{T_A})$ is p-excessive for Q^b.

One deduces immediately that

$$(s,x) \to E^b_{(s,x)}\, e^{(-pD_A)}\, (V_p\tilde{f})(D_A, x_{D_A})$$

is lower semi-continuous (A is closed, this function is null on A and lower semi-continuous on $\complement A$) and has right-continuous trajectories on $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ by [5] XIII T 23, because Q^b is a Feller process.

$$E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} e^{-p\sigma}\, f(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

is then upper semi-continuous and is right continuous on $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$

*By the same argument, 1 being excessive, $E^b_{(s,x)} e^{(-pD_A)}$ is lower semi-continuous and right continuous on the trajectories.

$U^b_p f$ is then Borel measurable and right continuous on the trajectories of $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$. A_3 is proved.

A_5: We check immediately that the assumptions of [5] XIV T 5 are satisfied: this is obvious from the Feller property of Q^b. ■

The potential measures of Q^b being absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $[0, +\infty[\times R^d$, the potential measures of $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$ are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on A, and to the Dirac measure on δ.

Assumption (L) of Meyer ([5] XV D 43) is then satisfied.

In the same way, one will deduce easily that the nearly Borel functions for $(t \wedge D_A, x_{t \wedge D_A})$ are deduced by restriction from the nearly Borel functions for x under Q^b.

II Continuous dependence of the criteria.

For b Borel measurable and bounded on $[0,T] \times R^d$, and L Borel measurable, bounded and positive, we define $U_L^b(s,x)$ by:

$$(2.1) \qquad U_L^b(s,x) = E_{(s,x)}^b \int_s^{D_A} L(t, x_t)\, dt \quad .$$

<u>Theorem II-1:</u> If (b_n, L_n) converges to (b, L) in the $\sigma(L_\infty, L_1)$ topology, $U_{L_n}^{b_n}(s,x)$ converges to $U_L^b(s,x)$.

<u>Proof:</u> We have again:

$$(2.2) \qquad E_{(s,x)}^b \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma = E_{(s,x)}^b \int_s^{D_A} L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma + E_{(s,x)}^b \int_{D_A}^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma$$

We define $V_L^b(s,x)$ by:

$$(2.3) \qquad V_L^b(s,x) = E_{(s,x)}^b \int_s^T L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \quad .$$

Then (2.2) can be written:

$$(2.4) \qquad V_L^b(s,x) = U_L^b(s,x) + E_{(s,x)}^b\, V_L^b(D_A, x_{D_A}) \quad .$$

By [2] Theorem I-2, under the stated assumptions $V_{L_n}^{b_n}(s,x)$ converges to $V_L^b(s,x)$.

This implies that $V_{L_n}^{b_n}(D_A, x_{D_A})$ converges $P_{(s,x)}$ a. s. to $V_L^b(D_A, x_{D_A})$.

By Theorem I-1 of [2], we know that the density Z_T^n of $Q_{(s,x)}^{b_n}$ with respect to $P_{(s,x)}$ converges weakly to the density Z_T of $Q_{(s,x)}^b$.

Then, the sequence $V_{L_n}^{b_n}$ being uniformly bounded:

$$E_{(s,x)}^{b_n} \; V_{L_n}^{b_n}(D_A, x_{D_A})$$

converges to $E_{(s,x)}^b \; V_L^b(D_A, x_{D_A})$.

The result is proved. ■

III The problem of control: the convex case.

We do the same assumptions as in [2]. K is a set valued mapping defined on $[0,T] \times R^d$ with values in $R^d \times R$ such that:

III-1: K has non-empty compact values.

III-2: K is Borel measurable (see [7]).

III-3: K is uniformly bounded.

III-4: For any (t,x) in $[0,T] \times R^d$, if (b,L) belongs to $K(t,x)$, then $L \geq 0$.

Definition 1: The problem of control is the search of a Lebesgue class of a measurable selection of K, $c = (b,L)$ such that for any (s,x) in $[0,T] \times R^d$, one has, by calling $\mathscr{L}$ the set of Lebesgue classes of measurable selections of K:

$$U_L^b(s,x) = \min_{(b',L') \in \mathscr{L}} U_{L'}^{b'}(s,x) \quad \blacksquare$$

One puts on $\mathscr{L}$ the $\sigma(L_\infty, L_1)$ topology.

We take here an assumption which will be removed:

III-5: K has convex values.

We define q by:

$$(3.1) \qquad q(s,x) = \inf_{(b,L) \in \mathscr{L}} U_L^b(s,x)$$

Proposition III-1: $q(s,x) = \min_{(b,L) \in \mathscr{L}} U_L^b(s,x)$

q is a Borel function.

Proof: $\mathscr{L}$ being compact, the first assertion follows from Theorem II-1.

Moreover, $\mathscr{L}$ is metrisable. If (b_n, L_n) is a countable dense subset of $\mathscr{L}$, one has:

$$(3.2) \qquad q(s,x) = \inf_n U_{L_n}^{b_n}(s,x)$$

q is then Borel by Proposition I-1, because $U_{L_n}^{b_n}$ is excessive for $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ on (Ω, Q^{b_n}) ■

Corollary: The set-valued mapping defined by

$$x \xrightarrow[\Gamma_s]{} \{(b,L) \in \mathscr{L} \, ; \, q(s,x) = U_L^b(s,x)\}$$

has non empty values, and its graph is Borel.

Proof: q is Borel measurable. U_L^b being continuous in (b, L) and Borel in (s,x) by Proposition I-1, is jointly Borel. ■

One derives then necessary and sufficient conditions for (b, L) to be in $\Gamma_s(x)$ as in Proposition III-5 of [2], and by the same procedure as for Proposition III-6 of [2], an optimal Markov control is proved to be better than any non anticipating control, for any starting point in $[0,T]\times R^d$.

Proposition III-2: q is finely upper semicontinuous relative to P.

Proof : Using the definition of the fine topology given in [10] (p152), each of the U_L^b being finely continuous, q is necessarily finely upper semi-continuous because it is the infimum of a family of finely continuous functions. ■

Proposition III-3: For any (b, L) in $\mathscr{L}$, $U_L^b - q$ is supermedian for $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ on (Ω, Q^b).

Proof: The proof is identical to the proof of Theorem III-2 of [2], with the difference that here Γ_t has only a Borel graph instead of being Borel measurable.

We need to find a selection of Γ_s which will be measurable with respect to the σ-algebra completed for the measure induced on R^d by $x_{t\wedge D_A}$.

Such a selection exists, because Γ_s has a Borel graph, by [7] Theorem 2.

The proof goes then the same way as in [2]. ■

Theorem III-1 : For any c = (b,L) in $\mathscr{L}$, $U_L^b - L$ is excessive relative to $(t\wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$ on (Ω, Q^b).

Proof: By Proposition III-2, q being finely upper semicontinuous, $U_L^b - q$ is finely lower semicontinuous. But Proposition III-3 says that this function is supermedian relative to $(t\wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$. It follows immediately that this function is necessarily excessive relative to the considered process. ■

We apply then Theorem (4.22) of IV [3]: $U^b_L - q$ is the potential of an increasing natural additive functional A'^c relative to $(t \wedge D_A, x_{t\wedge D_A})$.

Moreover Remark 59 of VII [4] proves that we can find a constant C such that:

$$(3.3)\quad E^b_{(s,x)} \left| A'^c_{D_A} - A'^c_s \right|^2 \leq C$$

By the same method as in [2], we define the additive bounded variation functional by:

$$(3.4)\quad A^b_t - A^b_s = \int_s^{t\wedge D_A} L(u,x_u)\,du - (A'^c_t - A'^c_s)$$

By using the same method as in [2], one can find H Borel on $[0,T]\times R^d$, such that for $P_{(s,x)}$:

$$(3.5)\quad q(t\wedge D_A, x_{t\wedge D_A}) = q(s,x) + \int_s^{t\wedge D_A} H(u,x_u)\cdot d\beta^b_u - \int_s^{t\wedge D_A} dA^b_u .$$

H being such that for any (s,x) in $[0,T]\times R^d$, one has:

$$(3.6)\qquad E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} |H(u,x_u)|^2\,du < +\infty .$$

By using again Proposition III-1, and the methods of [2], one has the theorem:

Theorem III-2: For any choice (and such a choice is possible) of $c_0 = (b_0, L_0)$ in $\mathscr{L}$ such that:

$$(3.7)\quad dt\otimes dx \text{ a.e. } L_0(t,x) + \langle H(t,x), \sigma^{-1}(t,x)b_0(t,x)\rangle = \min_{(b,L)\in K(t,x)} L + \langle H(t,x), \sigma^{-1}(t,x)b\rangle$$

then for any (s,x) in $[0,T]\times R^d$, one has:

$$q(s,x) = U_{L_0}^{b_0}(s,x) \quad .$$

<u>Corollary:</u> For any probability measure on $[0,T]\times R^d$, one has:

$$(3.8) \qquad \int dQ_\mu^{b_0} \int_t^{D_A} L_0(u,x_u)\,du = \min_{(b,L)\in\mathscr{L}} \int dQ_\mu^{b} \int_t^{D_A} L(u,x_u)\,du$$

IV The general case.

We remove the convexity assumption III-5. By using the same methods as in [2], Theorem III-2 will prove the existence of an optimal control.

Theorem IV-1: One can find (b_0, L_0) in $\mathscr{L}$ such that for any "initial" probability measure μ on $[0,T]\times R^d$, then:

$$(4.1) \quad \int dQ_\mu^{b_0} \int_t^{D_A} L_0(u,x_u)\,du = \min_{(b,L)\in\mathscr{L}} \int dQ_\mu^{b} \int_t^{D_A} L(u,x_u)\,du \quad \blacksquare$$

V Conclusion: The results given here are rather strong and require methods very similar to the methods of [2].

There is moreover, no partial differential equation associated easily to this problem.

This approach can be immediately applied to the problem of reaching a given target in minimal expected time of movement.

The reader will check easily that if K is a set valued mapping defined on $[0, +\infty[\times R^d$, if we replace T by $+\infty$ in the previous assumptions, if p is a strictly positive constant, if A is a closed domain of $[0, +\infty[\times R^d$, then all the previous results are valid for the criteria:

$$E^b_{(s,x)} \int_s^{D_A} e^{-p\sigma} L(\sigma, x_\sigma)\, d\sigma \quad .$$

In the homogeneous case, where b, L, a and A do not "depend" on t, one will also prove that the optimal control can be chosen independent of t.

[1] Bismut, J. M.: Analyse convexe et probabilités. Doctoral Dissertation. Faculté des Sciences de Paris. To appear.

[2] Bismut, J. M.: An existence result in optimal stochastic control. To appear.

[3] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K.: Markov Processes and Potential Theory, Acad. Press, New York and London, 1968.

[4] Meyer, P. A.: Probabilités et potentiels. Hermann, Paris. English Translation: Blaisdell, Boston.

[5] Meyer, P. A.: Processus de Markov, Springer Verlag, Lecture notes in mathematics, No. 26.

[6] Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques III, Seminaire de Probabilités No. 1, pp. 110-141, Springer Verlag, Lecture notes in mathematics, No. 39.

[7] Rockafellar, R.T. : Measurable Dependence of convex sets and functions on parameters, J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 28, pp. 4-25 (1969).

[8] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S.: Diffusion Processes with continuous coefficients, Comm. Pure and Appl. Math., 1969, Vol. XXII, pp. 345-400, pp. 479-530.

Equations différentielles stochastiques linéaires

Nous allons dans cette partie démontrer un résultat d'existence sur des équations differentielles stochastiques. Les notations sont celles de $\mathbf{B}$.

Theoreme 1: Soit w_t un mouvement brownien m-dimensionnel, M_t une martingale à valeurs dans V, de carré intégrable.

Soit A et $(B_i)_{i=1...m}$ une famille de matrices (n,n) dépendant de façon $\mathcal{T}^*$ mesurable de (ω, t) dans $\Omega \times [0, +\infty[$, telles que:

$$(1) \quad a) \int_0^{+\infty} \|A(\cdot, s)\|^2 \, ds \quad \text{est dans } L_\infty$$

$$b) \int_0^{+\infty} \operatorname*{sup\,ess}_{\omega} \|B(\cdot, s)\|^2 \, ds < +\infty$$

Soit u et $(v_i)_{i=1...m}$ une famille de fonction $\mathcal{T}^*$ mesurables à valeurs dans V, telles que:

$$a) \quad E\left(\int_0^{+\infty} |u(\cdot, t)| \, dt\right)^2 < +\infty$$

$$b) \quad E\left(\int_0^{+\infty} \|v(\cdot, t)\|^2 \, dt\right) < +\infty \quad .$$

Soit enfin Z_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable de carré integrable à valeurs dans V.

Alors l'équation:

$$(2) \quad \begin{cases} dZ = (AZ + u)\,dt + (BZ + v)\cdot dw + dM \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}.$$

possède une solution et une seule à trajectoires p. s. continues à droite et de plus pour tout T fini, on a:

$$E \sup_{0\leq t\leq T} |Z_t|^2) < +\infty$$

<u>Preuve</u>: Nous allons montrer que pour tout T fini positif, la solution existe et est unique sur $[0,T]$. Le théorème en résulte par recollement.

<u>Existence:</u> Considérons l'espace des processus X_t à valeurs dans V, adaptés (c'est à dire tels que X_t est $\mathscr{F}_t$ mesurable pour tout t), tels que:

$$(3) \qquad \sqrt{\sup_{0\leq t\leq T} E|X_t|^2} < +\infty .$$

Soit B_T le quotient de cet espace par le sous espace des processus équivalents au processus nul. On verifie que B_T est un espace de Banach pour la norme

$$(4) \qquad \sqrt{\sup_{0\leq t\leq T} E|X_t|^2}$$

Considérons également l'espace des processus Y_t à valeurs dans V, adaptés, à trajectoires p. s. continues à droite tels que

(5) $$\sqrt{E \sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2} < +\infty \quad .$$

On note cet espace C_{2d}^{T}.

On vérifie que cet espace est aussi un espace de Banach pour la norme:

(6) $$\sqrt{E \sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2}$$

Or C_{2d}^{T} s'injecte continûment dans B_T. En effet , si Y_t est dans C_{2d}^{T}, comme

(7) $$\sup_{0\le t\le T} E|Y_t|^2 \le E \sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2$$

la classe de Y_t (pour la relation d'équivalence définie par l'espace des processus équivalents au processus nul) est dans B_T. De plus, on sait qu'un processus à trajectoires p. s. continues à droite et équivalent au processus nul est nul p. s. Il y a donc bien injection continue de $\mathscr{C}_{2d}^{T}$ dans B_T.

Soit Φ l'application de $\mathscr{C}_{2d}^{T}$ dans lui-même qui à Z associe Z' par:

(8) $$\begin{cases} dZ' = (AZ+u)\,dt + (BZ+v)\cdot dw + dM \\ Z'(0) = Z_0 \end{cases}$$

Z' est bien à trajectoires p. s. continues à droite (et dépourvues de discontinuités oscillatoires), car c'est la somme d'un processus absolument continu et d'une martingale.

De plus:

$$(9) \qquad |Z'_t|^2 \leq k_1 \left[\left| \int_0^t (A_s Z_s + u_s)\, ds \right|^2 + \left| \int_0^t B_s Z_s + v_s \cdot dw_s \right|^2 + |M_t|^2 + |Z_0|^2 \right]$$

Or:

$$(10) \qquad \left| \int_0^t (AZ + u)\, ds \right|^2 \leq 2 \left(\left| \int_0^t A_s Z_s\, ds \right|^2 + \left| \int_0^t u_s\, ds \right|^2 \right)$$
$$\leq 2 \left(\int_0^T \|A(\cdot\,, s)\|^2\, ds \int_0^T |Z_s|^2\, ds + \left(\int_0^T |u_s|\, ds \right)^2 \right)$$

et comme

$$\int_0^T \|A(\cdot\,, s)\|^2\, ds$$

est dans L_∞, on aura:

$$(11) \qquad \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (AZ + u)\, ds \right|^2 \leq \lambda_1 \left\{ \int_0^T |Z_s|^2\, ds + \left(\int_0^T |u_s|\, ds \right)^2 \right\}$$

De même, par l'inégalité de Doob sur les martingales (voir [1] VI-1 Remarque 2), on aura:

$$(12) \qquad E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t B_s Z_s + v_s \,.\, dw_s \right|^2 \leq 4E \left| \int_0^T B_s Z_s + v_s \cdot dw_s \right|^2$$
$$= 4E \int_0^T \|B_s Z_s + v_s\|^2\, ds \quad .$$

Or

$$(13) \qquad E\int_0^T \|B_s Z_s + v_s\|^2\, ds \le \lambda_2\left(E\int_0^T \|B(\cdot\,,s)\|^2 |Z_s|^2 + \|v_s\|^2\, ds\right)$$

$$\le \lambda_2\left(\int_0^T \sup\text{ess}\, \|B(\cdot\,,s)\|^2\, E|Z_s|^2\, ds + E\int_0^T \|v_s\|^2\, ds\right)$$

Enfin:

$$(14) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |M_t|^2\right) \le 4E(|M_T|^2 \quad .$$

En réunissant les inégalités, et grâce aux proprietés de B, il existe h intégrable en t et une constante K telle que:

$$(15) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z'_t|^2\right) \le K + \int_0^T h(s)\, E(|Z_s|^2)\, ds \quad .$$

Z étant dans $\mathscr{C}^T_{2d}$ est dans B_T, et Z' est bien dans $\mathscr{C}^T_{2d}$.

L' inégalité précédente entraîne:

$$(16) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z'_t|^2\right) \le K + \left(\int_0^T h(s)\, ds\right) \sup_{0\le t\le T} E|Z_t|^2 \quad .$$

Φ étant une application affine définie sur $\mathscr{C}^T_{2d}$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathscr{C}^T_{2d}$, continue pour la topologie de B_T, peut être prolongée à l'adhérence de $\mathscr{C}^T_{2d}$ dans B_T, qu'on note $\bar{\mathscr{C}}^T_{2d}$. Pour tout Z de $\bar{\mathscr{C}}^T_{2d}$, on definit ainsi $\Phi(Z)$ dans $\mathscr{C}^T_{2d}$ et $Z \to \Phi(Z)$ est affine continue. Soient Z_1 et Z_2 dans $\mathscr{C}^T_{2d}$. On pose:

$$(17) \qquad Z = Z_1 - Z_2$$

$$(18) \qquad Z' = \Phi(Z_1) - \Phi(Z_2) \ .$$

L'inégalité (15) montre que:

$$(19) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z'_t|^2\right) \le \int_0^T h(s) \ E|Z_s|^2 \, ds$$

et en conséquence:

$$(20) \qquad \sup_{0\le t\le T} E|Z'_T|^2 \le \int_0^T h(s) \ E|Z_s|^2 \, ds$$

ou encore:

$$(21) \qquad \sup_{0\le t\le T} E|Z'_t|^2 \le \int_0^T h(s) \ E|Z_s|^2 \, ds \ .$$

Or on peut itérer Φ. Comme:

$$(22) \qquad \sup_{0\le t\le T} E\left|(\Phi^n(Z_2) - \Phi^n(Z_1))_t\right|^2 \le \int_0^T h(s_n) \, ds_n \int_0^{s_n} h(s-1) \, ds_{n-1} \dots \sup_{0\le t\le T} E|Z_{2_t} - Z_{1_t}|^2$$

on a:

$$(23) \qquad \sup_{0\le t\le T} E\left|(\Phi^n(Z_2) - \Phi^n(Z_1))_t\right|^2 \le \frac{\left(\int_0^T h(s)\right)^n}{n!} \sup_{0\le t\le T} E|Z_{2_t} - Z_{1_t}|^2$$

Cette relation vraie quand Z est dans $\mathscr{C}_{2d}^{T}$, se prolonge par densité à Z dans $\overline{\mathscr{C}}_{2d}^{T}$. Pour n asez grand, Φ^{n} est donc une contraction de $\mathscr{C}_{2d}^{T}$ dans lui-même, telle que le rapport de contraction est inferieur à 1 strictement. Φ a donc un point fixe unique Z par [2] II, sec. 12.

Mais comme pour Z dans $\overline{\mathscr{C}}_{2d}^{T}$, $\Phi(Z)$ est dans $\mathscr{C}_{2d}^{T}$, cela entraîne que Z est bien dans $\mathscr{C}_{2d}^{T}$, et est donc solution de l'équation différentielle stochastique du théorème.

Unicité: Soit Z' une solution de l'équation à trajectoires p. s. continue à droite.

On pose:

$$Z'' = Z - Z' \tag{24}$$

Z'' est solution de

$$\begin{cases} dZ = AZ\,dt + BZ\,dw \\ Z(0) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

ou encore on a:

$$Z''_t = \int_0^t A_s Z''_s \, ds + \int_0^t B_s Z_s \, dw_s \ .$$

Z'' est donc à trajectoires p. s. continues.

Soit alors T_n le temps d'arrêt defini par:

$$T_n = \inf \{t; \, |Z''_t| \geq n\} \ . \tag{26}$$

On pose:

$$(27) \qquad Z''^n_T = \begin{cases} Z''_t & t < T_n \\ Z''_{T_n} & t \geq T_n \end{cases}$$

Z''^n_t est donc solution de

$$(28) \qquad \begin{cases} dZ = I_{\{t < T_n\}} (AZ\, dt + BZ \cdot dw) \\ Z(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

et de plus:

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z''^n_t|^2\right) < +\infty \quad .$$

Z'' est donc dans $\mathscr{C}^T_{2d}$ pour tout T et de plus les coefficients de la nouvelle équation ont les mêmes propriétés que précedemment .

Grâce à l'unicité du point fixe démontrée dans la partie "existence," 0 étant solution de la nouvelle équation, Z''^n est indiscernable du processus nul.

Comme quand n tend vers $+\infty$, T_n tend vers $+\infty$ p. s. Z'' est indiscernable du processus nul.

L'unicité est bien démontrée. ∎

On supposera désormais que A et B sont nuls pour $(t \geq S)$, et verifient les hypothèses du théorème 1. De même, on suppose M arretée en S.

<u>Corollaire 1:</u> Si Z est solution de l'équation du théorème 1 pour un système (Z_0, u, v, M) , l'application linéaire $(Z_0, u, v, M) \to Z$

est continue de $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times L_2^S$ dans $\mathscr{C}_{2d}^T$.

Preuve: $\hat{Z}$ est arrêté en S. Les inégalités démontrées dans la démonstration du théorème 1 (inégalités (15) et (16)) montrent:

$$(29) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z_t|^2\right) \le K\left\{E|Z_0|^2 + E\left(\int_0^T |u_t|\,dt\right)^2 + E\int_0^T \|v_t\|^2\,dt + E|M_T|^2\right\}$$

et grâce aux propriétés de u, v et M (en particulier on a $M_T = M_S$) il vient:

$$(30) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z_t|^2\right) \le K\left\{E|Z_0|^2) + E\left(\int_0^S |u_t|\,dt\right)^2 + E\int_0^S \|v_t\|^2\,dt + E|M_S|^2\right\}$$

et en conséquence:

$$(31) \qquad E\left(\sup_{0\le t\le T} |Z_t|^2\right) \le K\left(E|Z_0|^2 + E\left(\int_0^S |u_t|\,dt\right)^2 + E\int_0^S \|v_t\|^2\,dt + E|M_S|^2\right).$$

Le corollaire en résulte. ■

Corollaire 2: Sous les hypothèses du corollaire 1, l'application linéaire $(Z_0, u, v, M) \to Z_S$ est linéaire continue de $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times L_2^S$ dans L_2^S.

Preuve: En effet $(Z_0, u, v, M) \to Z$ est continu de $L_2^0 \times L_{21} \times L_{22} \times L_2^S$ dans $\mathscr{C}_{2d}^T$.

De plus $Z \to Z_S$ est continu de $\mathscr{C}_{2d}^T$ dans L_2^S.

Le corollaire en résulte. ■

[1] Meyer, P.A.: Probabilités et potentiels. Hermann, Paris. Traduction anglaise: Blaisdell, Boston.

[2] Schwartz, L.: Cours de l'Ecole Polytechnique. Hermann, Paris.

Espérance conditionnelle par rapport à la tribu des ensembles bien-mesurables.

V désigne un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé complet, $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ une suite croissante de sous-tribus complètes de $\mathscr{F}$.

On fait les hypothèses suivantes sur $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$

a) la suite $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ est continue à droite ([1] IV-30)

b) la suite $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ est dépourvue de temps de discontinuité. ([1] VII-D 39) (*)

Exemples:

Exemple 1: Soit X_t un processus de Hunt (voir[3]), $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ la famille de tribus canonique associée à X. Alors $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ verifie les hypothèses a) et b) ([3] T 13 p. 37, T 36 p. 116).

Exemple 2: Soit X_t un processus de Markov, à trajectoires p. s. continues à valeurs dans V.

Soit C un opérateur linéaire defini sur V à valeurs dans H, qui est un espace vectoriel de dimension finie, η un mouvement brownien sur H, indépendant de X.

On pose:

(*) Cette hypothèse n'est en fait pas nécessaire. Nous la faisons pour simplifier les références.

$$Z_t = \int_0^t X_s \, ds + \eta_t$$

$$\mathscr{F}_t = (Z_s \quad s \leq t) \cup \mathscr{N} \in \mathscr{N}$$

$\mathscr{N}$ étant l'ensemble des parties négligeable de Ω. Alors $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in R^+}$ possède les propriétés a), b). En effet par une transformation de Girsanov (voir [4] p. 232), il existe une mesure de probabilité P_0 telle que P et P_0 sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et telle que pour P_0, Z_t est un mouvement brownien.

On utilise alors l'exemple 1, en tenant compte du fait que P et P_0 ont les mêmes ensembles négligeables.

Nous allons établir maintenant quelques résultats de nature technique, mais qui nous seront utiles dans la suite.

<u>Lemme 1:</u> Soit X_t un processus mesurable à valeurs dans V, tel que pour tout t, X_t soit intégrable. Il existe une version bien mesurable du processus $E^{\mathscr{F}_t} X_t$.

<u>Preuve:</u> Il suffit d'établir le résultat quand X_t est à valeurs réelles, et par différence, quand X_t est à valeurs positives.

On pose

(1) $\quad X_t^n = X_t \wedge n \quad .$

X_t^n étant borné, soit Y_t^n le processus bien mesurable unique défini dans [2]

(p. 150 no. 210) tel que pour tout temps d'arrêt T ,

$$(2) \qquad Y^n_T I_{\{T<+\infty\}} = E^{\mathscr{F}_T}(X^n_T I_{\{T<+\infty\}}) \quad .$$

Alors p. s., la suite Y^n_t est croissante. En effet si on pose

$$(3) \qquad Z^{n+1}_t = Y^n_t \vee Y^{n+1}_t \quad ,$$

on constate que Z^{n+1}_t possède les propriétés de Y^{n+1}_t, donc qu'il est indistinguable de Y^{n+1}_t. Soit

$$(4) \qquad Y_t = \lim_{n\to+\infty} \uparrow Y^n_t \quad .$$

Y_t est bien-mesurable, et comme

$$(5) \qquad Y^n_t = E^{\mathscr{F}_t}(X_t \wedge n) \quad ,$$

par le théorème de Lebesgue,

$$(6) \qquad Y_t = E^{\mathscr{F}_t} X_t \quad . \blacksquare$$

Nous allons prolonger l'opérateur défini au lemme 1 en un opérateur d'espérance conditionnelle sur une classe de fonctions mesurables .

On va en effet considérer l'espace $E_1 = \Omega \times [0,+\infty[$ muni soit de la tribu $\mathscr{F} \otimes B([0,+\infty[)$ soit de la tribu des ensembles bien mesurables $\mathscr{T}$, et de la mesure $dP \otimes dt$. On notera $(\mathscr{F} \otimes B([0,+\infty[))^*$ et $\mathscr{T}^*$ les tribus complétées de $\mathscr{F} \otimes B([0,+\infty[)$ et $\mathscr{T}$ pour la mesure $dP \otimes dt$. (*)

(*) En fait grâce à [2] no. s 210-212-214-215, les tribus des ensembles mesurables adaptés, des ensembles progressivement mesurables, des ensembles très bien mesurables ont la même $dP \otimes dt$ complétée que $\mathscr{T}$.

Soit alors $\widetilde{X}$ une $dP \otimes dt$ classe de fonctions mesurables définie sur E_1, à valeurs réelles, et X_t l'un de ses représentants $\mathscr{F} \otimes B[0, +\infty[$ mesurable. On suppose:

(7) $$\int |\widetilde{X}_t| \, dP \otimes dt < +\infty \quad .$$

On en déduit que sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, X_t est intégrable. On annulle X_t sur un ensemble Borélien négligeable le contenant : X_t reste un représentant de $\widetilde{X}$, et pour tout t, X_t est intégrable. Grâce au lemme 1, on considère alors une version bien-mesurable de $Y_t = E^{\mathscr{F}_t} X_t$, qui definit à son tour une classe $\widetilde{Y}$ de fonction mesurables par rapport à la tribu des ensembles bien-mesurables.

<u>Lemme 2:</u> La classe $\widetilde{Y}$ ne dépend que de la classe $\widetilde{X}$.

<u>Preuve:</u> Soit $\widetilde{Z}$ une classe **de fonctions** mesurables par rapport à la tribu des ensembles bien mesurables, essentiellement bornée. Si Z désigne un représentant bien mesurable de la classe $\widetilde{Z}$, par (VIII T 15), Z sera progressivement mesurable, donc adapté aux tribus $\mathscr{F}_t$.

On a alors:

(8) $$\int \widetilde{Z}\,\widetilde{X} \, dP \otimes dt = \int Z\,X \, dP \otimes dt = \int dt \int Z_t X_t \, dP$$
$$= \int dt \int Z_t \, E^{\mathscr{F}_t} X_t \, dP = \int dt \int Z_t \, Y_t \, dP = \int \widetilde{Z}\,\widetilde{Y} \, dP \otimes dt \quad .$$

On a donc pour tout $\widetilde{Z}$:

(9) $\int \widetilde{Z}\,\widetilde{X}\ dP \otimes dt \quad = \int \widetilde{Z}\,\widetilde{Y}\ dP \otimes dt$.

Le lemme en résulte. ■

Remarque 1: Ce résultat ne nous empêchera pas de privilégier certaines versions de $\widetilde{Y}_t$, en particulier celles dont les trajectoires sont suffisamment régulières.

Nous utiliserons aussi le fait que si Y et Y' sont $dP \otimes dt$ équivalents, alors p. s., $Y_.(\omega)$ et $Y'_.(\omega)$ sont dt-équivalents.

Définition 1: Avec les notations du lemme 2, nous dirons que $\widetilde{Y}$ est l'espérance conditionnelle de $\widetilde{X}$ par rapport à $\mathscr{T}^*$.

Nous allons maintenant démontrer un résultat dont nous nous servirons constamment ultérieurement.

Proposition 1: Soit $\widetilde{X}$ une classe de fonctions definies sur $\Omega \times [0,+\infty[$, $\mathscr{F} \otimes B([0,+\infty[)$ mesurables à valeurs réelles, telle que

$$E \int_0^\infty |\widetilde{X}_t|\ dt \ < \ +\infty \ .$$

Soit $\widetilde{Y}$ l'espérance conditionnelle de $\widetilde{X}$ par rapport à $\mathscr{T}^*$. On pose:

(10) $$Z_t \ = \ E^{\mathscr{F}_t} \int_0^t \widetilde{X}_s\ ds \ .$$

Alors

$$Z_t - \int_0^t \widetilde{Y}_s \, ds$$

est une martingale nulle à l'origine.

Preuve: Remarquons tout d'abord que

$$\int_0^t \widetilde{X}_s \, ds \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \widetilde{Y}_s \, ds$$

sont des variables aléatoires qui ne dépendent que $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ et non des représentants de ces classes (Cela résulte de la remarque 1). On peut donc considérer des représentants X et Y de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$, tels que pour tout t, $Y_t = E^{\mathscr{F}_t} X_t$.

Soient t et t' deux réels positifs, avec $t' > t$, et M une v. a. bornée et $\mathscr{F}_t$ mesurable.

Alors:

$$\text{(11)} \qquad E(M. \int_t^{t'} Y_s \, ds) = E \int_t^{t'} M. Y_s \, ds$$

$$= \int_t^{t'} E(M. Y_s) \, ds = \int_t^{t'} E(M. X_s) \, ds$$

$$= E (M. \int_t^{t'} X_s \, ds) \quad .$$

On en déduit:

$$(12) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{t'} Y_s \, ds = E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{t'} X_s \, ds \; .$$

Comme

$$\int_0^t Y_s \, ds$$

est $\mathscr{F}_t$ mesurable, on a en conséquence:

$$(13) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_0^{t'} Y_s \, ds = \int_0^t Y_s \, ds + E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{t'} X_s \, ds \; .$$

Cela entraîne immédiatement que

$$Z_t - \int_0^t Y_s \, ds$$

est une martingale. ■

<u>Corollaire 1:</u> Z_t est une semi-martingale, et

$$Z_t - \int_0^t Y_s \, ds$$

est le processus naturel A_t unique tel que $Z_t + A_t$ est une martingale nulle à l'origine.

<u>Preuve:</u> Remarquons tout d'abord que

$$E \int_0^{+\infty} |Y_t| \, dt < +\infty \; .$$

Cela résulte de ce que $E|Y_t| \leq E|X_t|$.

En écrivant

$$\int_0^t Y_s^+ \, ds - \int_0^t Y_s^- \, ds = \int_0^t Y_s \, ds$$

on a décomposé

$$\int_0^t Y_s \, ds$$

en une différence de deux processus croissants, nuls à l'origine, p. s. continus et intégrables. De plus

$$\int_0^t Y_s \, ds$$

étant p. s. continu, est naturel. Enfin

$$Z_t - \int_0^t Y_s \, ds$$

est nul à l'origine. L'unicité de la décomposition résulte du théorème de décomposition de Meyer dans [20] (VII T-31). ■

<u>Corollaire 2:</u> Pour tout temps d'arrêt S, on a:

$$(14) \qquad Z_S = E^{\mathscr{F}_S} \int_0^S \widetilde{X}_s \, ds$$

<u>Preuve:</u> Montrons que

$$Z_t - \int_0^t \widetilde{Y}_s \, ds$$

est une martingale uniformément intégrable. En effet:

$$(15) \qquad \left| Z_t - \int_0^t \widetilde{Y}_s \, ds \right| \leqslant E^{\mathscr{F}_t}\left(\int_0^{+\infty} |\widetilde{X}_s| \, ds + \int_0^{+\infty} |\widetilde{Y}_s| \, ds \right)$$

et par [1] V-T 19, le deuxième membre de l'inégalité définit une suite de v.a.r. uniformément intégrable. Par le théorème d'arrêt sur les martingales ([1] VI T 13 et Remarque a), on a

$$(16) \qquad Z_S - \int_0^S \tilde{Y}_s \, ds = E^{\mathscr{F}_S} (Z_\infty - \int_0^{+\infty} Y_s \, ds) \; .$$

Donc:

$$(17) \qquad Z_S - E^{\mathscr{F}_S} \int_0^S \tilde{X}_s \, ds = E^{\mathscr{F}_S} \left(\int_S^{+\infty} \tilde{X}_s \, ds - \int_S^{+\infty} \tilde{Y}_s \, ds \right) \; .$$

Or on a vu que pour tout couple (t, t') avec $0 \leq t \leq t' < +\infty$:

$$(18) \qquad E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{t'} \tilde{X}_s \, ds = E^{\mathscr{F}_t} \int_t^{t'} \tilde{Y}_s \, ds \; .$$

Soit A une partie $\mathscr{F}_S$ mesurable et L^A le processus $1_A \, 1_{t > S}$. L^A est adapté et continu à gauche. Il vient alors par [1] VII T 17:

$$(19) \qquad E \int_0^{+\infty} L_s^A \, \tilde{X}_s \, ds = E \int_0^{+\infty} L_s^A \, \tilde{Y}_s \, ds \; .$$

Cela s'écrit:

$$(20) \qquad E \; 1_A \int_S^{+\infty} \tilde{X}_s \, ds = E \; 1_A \int_S^{+\infty} \tilde{Y}_s \, ds$$

(20) implique:

$$(21)\qquad E^{\mathscr{F}_S} \int_S^{+\infty} \widetilde{X}_s \, ds = E^{\mathscr{F}_S} \int_S^{+\infty} \widetilde{Y}_s \, ds$$

et en conséquence:

$$(22)\qquad Z_S = E^{\mathscr{F}_S} \int_0^S \widetilde{X}_s \, ds \quad . \blacksquare$$

[1] Meyer, P. A.: Probabilités et Potentiels. Paris (Hermann) Traduction anglaise Blaisdell (Boston).

[2] Meyer, P. A.: Guide détaillé de la théorie générale des processus. Séminaire de probabilités no. 2. Lecture Notes in Mathematics no. 51 p. 140-165 Springer-Verlag 1968.

[3] Meyer, P. A.: Processus de Markov, Lecture Notes in Mathematics no. 39, p. 72-162, Springer-Verlag 1968.

[4] Wong, E.: Stochastic processes in Information and Dynamical systems. McGraw Hill 1971.

Dualité en contrôle stochastique et contraintes sur l'état.

Nous généralisons ici les résultats obtenus dans F à une certaine classe de problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état. On verra en particulier que la variable duale devient, sous certaines conditions, une semi-martingale locale lorsque des contraintes sur l'état primal apparaissent.

Les notations seront celles de B et F.

I Préliminaires.

Les hypothèses sont celles de B , avec $W_1 = \{0\}$. On suppose satisfaites les hypothèses suivantes:

a) Le temps d'arrêt S est égal à une constante T

b) L'état x peut se mettre sous la forme (x_1, x_2), x_2 variant dans un espace de dimension 1.

c) Les contraintes suivantes sont supposées implicitement satisfaites:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x_{2_0} = 0 \\ \dot{x}_2 \geq 0 \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

d) $\Phi_{\ell, L}$ est propre sur R_1.

H désigne l'ensemble:

$$\mathrm{dom}\ \Phi_{\ell, L} \cap \left\{ x \in R_1 \ , \ \int_0^T |\dot{x}_{2_t}| \, dt \ \in \ L_\infty \right\}$$

K est l'ensemble des éléments de H tels que $x_2(T) \leq 1$.

Définition: On dit que l'hypothèse H_1 est verifiée s'il existe x dans K tel que

$$\sup ess \ x_2(T) < 1 \ .$$

Théorème I-1: Sous l'hypothèse H_1, la recherche d'un minimum de $\Phi_{\ell,L}$ sur K est équivalente à la recherche d'un point selle sur $H \times (L_\infty)^*_+$ de la fonctionnelle:

$$(1.2) \qquad (x,\mu) \to \Phi_{\ell,L}(x) + \langle \mu, \int_0^T \dot{x}_{2_t} \ dt - 1 \rangle$$

Preuve: On considére l'application B définie sur H à valeurs dans L_∞ :

$$x \to \int_0^T \dot{x}_{2_t} \ dt - 1 \ .$$

et on utilisera les méthodes de F (Théorème II-1)

II Martingale locale associée à une solution optimale.

Definition: On dit que l'hypothèse H_2 est vérifiée si:

a) ℓ_T est finie sur L_2^T.

b) Il existe (A, B) $\mathcal{T}^*$ mesurable et $dP \otimes dt$ essentiellement borné et (b, b') dans $L_{21} \times L_{22}$ tels que pour tout x de $L_{2\infty}$, si:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A\,x_1 + b \\ \dot{x}_2 = 0 \\ H_1 = B\,x_1 + b' \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

alors

$$(2.2) \qquad E \int_0^T L(\omega, t, x(\omega, t), \dot{x}(\omega, t), H(\omega, t))\, dt < +\infty$$

On supposera ici que $\Phi_{\ell, L}$ a un minimum sur K et que l'hypothèse H_1 est verifiée.

Si (x, μ) désigne un point selle de la fonctionnelle définie au théorème I-1, σ_t est le processus:

$$(2.3) \qquad \sigma_t = \int_0^t \dot{x}_{2_t}\, dt \quad .$$

S est le temps d'arrêt défini par:

$$(2.4) \qquad S = \inf \{t ; \sigma_t = 1\} \wedge T$$

De même S_n est défini par:

$$(2.5) \qquad S_n = \inf \{t ; \sigma_t = 1 - \frac{1}{n}\} \wedge T \quad .$$

Théorème II-1: Sous les hypothèses H_1 et H_2, la restriction de $(1 - \sigma_{t \wedge S_n})\mu$ à $\mathscr{F}_{t \wedge S_n}$ est définie par un élément de $L_1^{t \wedge S_n}$.
De même la restriction de $(1 - \sigma_{S_n})\mu$ à $\mathscr{F}_{S_n}$ est définie par un élément de $L_1^{S_n}$.

Preuve: On raisonnera comme pour le théorème III-1 de F.

$\tilde{x}$ est le processus $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ défini pour $s \geq t \wedge S_n$ par

$$(2.6) \quad \begin{cases} d\tilde{x}_1 = (A\tilde{x}_1 + b)\, dt + (B\tilde{x}_2 + b') \cdot dw \\ \tilde{x}_{1_{t \wedge S_n}} = x_{1_{t \wedge S_n}} \\ \tilde{x}_{2_s} = x_{2_{t \wedge S_n}} \end{cases}$$

Si A est une partie $\mathscr{F}_{t \wedge S_n}$ mesurable de Ω, on definit x^A par:

$$0 \leq s < t \wedge S_n \qquad x_s^A = x_s$$

$$t \wedge S_n \leq s \leq t \qquad x_s^A = 1_A \tilde{x}_s + 1_{CA}\, x_s$$

x^A est alors dans K.
Grâce à H_2, la démonstration x poursuit comme en F.

Comme en F, on définit alors une martingale locale g, arrêtée et continue à gauche en S, à partit des restrictions de μ aux $\mathscr{F}_{S_n}$.

<u>Théorème</u> II-2: g est telle que:

$$(2.7) \qquad E \int_0^S g_t \dot{x}_{2_t} \, dt = E(g_0) \quad .$$

De plus tout n, pour tout x' de H tel que $\dot{x}'_{2_t} = 0$ pour $t \geq S_n$, on a

$$(2.8) \qquad \Phi_{\ell, L}(x) \leq \Phi_{\ell, L}(x') + E \int_0^S g_t \dot{x}'_{2_t} \, dt - E(g_0) \quad .$$

<u>Preuve</u>: On raisonne comme pour la proposition III-3 de F. ∎

<u>Definition:</u> On dit que l'hypothèses H_3 est verifiée si:

-- $$(2.9) \qquad E \int_0^T L(\omega, t, x(\omega, t), v(\omega, t), H(\omega, t)) \, dt < +\infty$$

implique: sur $\{ v_2 = 0 \}$ on a:

$$\begin{cases} v_1 = A x_1 + b \\ H_1 = B x_1 + b' \end{cases}$$

(A, B) possédant les propriétés données en H_2.

-- $$(2.10) \qquad (x, v, H) \underset{I}{\rightarrow} E \int_0^T L(\omega, t, x(\omega, t), v(\omega, t), H(\omega, t)) \, dt$$

est une fonctionnelle continue sur son domaine.

<u>Théorème</u> II-3: Sous les hypothèses H_1, H_2 et H_3, pour tout x' de R_1, tel que $\dot{x}'_{2_t} = 0$ pour $t \geq S$, on a:

$$(2.11) \qquad \Phi_{\ell,L}(x) \leq \Phi_{\ell,L}(x') + E \int_0^S g_t \dot{x}'_{2_t}\, dt - E(g_0) \quad .$$

<u>Preuve</u>: Soit σ'_t le processus

$$\int_0^t \dot{x}'_{2_s} \quad ds$$

Soit U_n le temps d'arrêt:

$$(2.12) \qquad U_n = \inf\{t; \sigma'_t = n\} \wedge T \quad .$$

On pose:

$$(2.13) \qquad R_n = S_n \wedge U_n$$

Soit $\tilde{x}^n_1$ la solution de:

$$(2.14) \qquad \begin{cases} d\tilde{x}^n_1 = 1_{\{t<R_n\}}(\dot{x}'_1\, dt + H'_1\, dw) + 1_{\{t\geq R_n\}}\{(A\tilde{x}^n_1 + b)\, dt + \\ \qquad\qquad (B\tilde{x}^n_1 + b')\cdot dw\} \\ \tilde{x}^n_1(0) = x'_1(0) \end{cases}$$

Une telle équation a une solution unique par le théorème 1 de I.

Soit x'^n le couple (x'^n_1, x'^n_2) défini par

$$(2.15) \qquad \begin{cases} 0 \leq t < R_n & x'^n = x' \\ R_n \leq t \leq T & \begin{cases} x'^n_1 = \tilde{x}^n_1 \\ x'^n_2 = x_{2_{R_n}} \end{cases} \end{cases}$$

De plus, on peut supposer que $\Phi_{\ell, L}(x') < +\infty$. Donc

$$(2.16) \qquad E \int_0^{R_n} L(\omega, t, x'^n(\omega, t), \dot{x}'^n(\omega, t), H'^n(\omega, t))\, dt < +\infty$$

Par H_2 on a:

$$(2.17) \qquad \begin{cases} E \int_{R_n}^{T} L(\omega, t, x'^n(\omega, t), \dot{x}'^n(\omega, t), H'^n(\omega, t))\, dt < +\infty \\ \ell_T(x_T'^n) < +\infty \, . \end{cases}$$

Donc:

$$(2.18) \qquad \Phi_{\ell, L}(x'^n) < +\infty \, .$$

Comme $\dot{x}_2'^n = 0$ pour $t \geq S_n$, on applique le théorème II-2:

$$(2.19) \qquad \Phi_{\ell, L}(x) \leq \Phi_{\ell, L}(x'^n) + E \int_0^{R_n} g_t \dot{x}'_{2_t}\, dt - E(g_0) \, .$$

On va alors passer à la limite dans cette relation. En effet, posons:

$$(2.20) \qquad \begin{aligned} u'_1 &= \dot{x}'_1 - A x'_1 - b \\ v'_1 &= H'_1 - B x'_1 - b' \end{aligned}$$

Alors (u'_1, v'_1) est dans $L_{21} \times L_{22}$. x'_1 est donc la solution unique de:

$$(2.21) \qquad \begin{cases} dx'_1 = (A x'_1 + u'_1 + b)\, dt + (B x'_1 + b' + v'_1) \cdot dw \\ x'_1(0) = x'_{10} \end{cases}$$

Grâce à H_3, u'_1 et v'_1 sont nuls pour $t \geq S$. x'^n_1 est solution de:

$$(2.20) \quad \begin{cases} dx'^n_1 = (Ax'^n_1 + 1_{t<R_n} u'_1 + b)\, dt + (Bx'^n_1 + 1_{t<R_n} v'_1 + b') \cdot dw \\ \\ x'^n_1(0) = x'_{20} \end{cases}$$

Comme R_n croît vers S, $1_{t<R_n} u'_1$ tend vers u'_1 dans L_{21} et $1_{t<R_n} v'_1$ tend vers v'_1 dans L_{22}.

Par le corollaire 1 de I x'^n_1 tend vers x'_1 dans $L_{2\infty}$, et x'^n_{1T} tend vers x'_{1T} dans L_2^T.

De même, x'^n_2 tend vers x'_2 dans $L_{2\infty}$, et x'^n_{2T} tend vers x'_{2T} dans L_2^T.

H_2 et H_3 impliquent que $\Phi_{\ell,L}(x'^n)$ tend vers $\Phi_{\ell,L}(x')$.

On passe alors à la limite dans (2.19). ■

En supposant que S est donné, on s'est ramené à un problème de minimisation sans contrainte sur l'état, mais avec la contrainte supplémentaire: $\dot{x}_2 = 0$ pour $t \geq S$.

<u>Remarque</u>: Si x' est une autre solution optimale, et si g' est la martingale locale construite à partit de μ, si S' est le temps d'arrêt correspondant, on vérifie la relation:

$$g_{t \wedge S'} = g'_{t \wedge S}\ .$$

III Problème dual

Si on pose:

$$L'(\omega, t, x, v, H) = L(\omega, t, x, v, H) + g_t \dot{x}_2 + 1_{t \geq S} \psi_{\dot{x}_1 = 0}$$

on s'est ramené au problème de minimisation de $\Phi_{\ell, L'}$.

Si M' est l'intégrant associé à L' comme en B II, on vérifiera que H_2 implique que H II-2 est vérifiée, et que comme $L' \geq L$ B H II-1 est vérifiée.

Supposons que le problème dual de ce nouveau problème a des solutions, et que les conditions du théorème B IV-1 sont verifiées.

Ecrivons alors les conditions de coextrémalité données en (Définition IV-1):

Si p est solution du nouveau problème dual, on aura

$$t < S \quad (\dot{p}_1, \dot{p}_2, p_1, p_2 - g, H_1') \in \partial L(\cdot, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, H_1)$$

$$t \geq S \quad (\dot{p}_1, \dot{p}_2, p_1, p_2, H_1') \in \partial(L + \psi_{\dot{x}_2 = 0})(\cdot, x_1, 1, \dot{x}_1, 0, H_1)$$

$$(p_0, -p_T) \in \partial \ell(x_0, x_T) \quad (*)$$

La véritable variable duale est définie par le processus

$$\{p_1, 1_{\{t<S\}}(p_2 - g) + 1_{\{t \geq S\}} p_2\} ,$$

qui est une semi-martingale locale.

(*) $\psi_{\dot{x}_2 = 0}$ est l'indicatrice de $\{\dot{x}_2 = 0\}$.

K

IV Applications.

Les résultats précédents s'appliquent immédiatement aux problèmes de contrôle avec contraintes de "consommation".

Supposons par exemple que l'on contrôle le système:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} dx = (Ax + Cu)\, dt + (Bx + Du) \cdot dw \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et qu'on veuille minimiser:

$$(4.2) \qquad E \int_0^T K(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))\, dt$$

avec les hypothèses de l'exemple II-1 de B sous la contrainte:

$$(4.3) \qquad \int_0^T \delta(\cdot, t, u(\cdot, t))\, dt \leq 1 \quad \text{p. s.}$$

δ étant un intégrant convexe positif vérifiant les mêmes hypothèses que K, et tel que x pour tout (ω, t)

$$(4.4) \qquad K(\omega, t, u) = 0 \iff u = 0$$

Pour se ramener au cas précédent, on définit L par:

$$(4.5) \qquad L(\omega, t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, H_1) = \inf_u K(\omega, t, x_1, u)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Cu \\ H_1 = Bx_1 + Du \\ \delta(\omega, t, u) \leq \dot{x}_2 \end{cases}$$

Sous des hypothèses convenables, on se ramène ainsi au cas précédent.

En particulier sous certaines conditions, on peut montrer que si u^0 est une solution optimale, si S^0 est le temps d'arrêt défini par:

$$(4.6) \qquad S^0 = \inf \{t \; ; \int_0^t \delta(\cdot, s, u(\cdot, s))\, ds = 1\} \wedge T$$

alors il existe une martingale locale positive g continue à gauche en S^0, telle que u^0 minimise l'expression

$$(4.7) \quad E \int_0^T K(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))\, dt + E \int_0^T g_t(\delta + 1_{t \geq S^0}\, \psi_{u=0})(\omega, t, x(\omega, t), u(\omega, t))\, dt$$

On s'est ramené à un problème de contrôle classique. ∎

V . <u>Conclusion</u>

On a vu ici comment l'introduction de certaines contraintes sur l'état transforme l'état dual en une semi-martingale locale.

Des contraintes plus complexes conduisent vraisemblablement à un problème pratiquement insoluble: en effet, si la contrainte peut être saturée plusieurs fois (et même une infinité de fois), on aura un enchevêtrement inextricable de prévisions sur le premier temps de saturation, le deuxième temps etc. ...

L

Equivalence des formulations des problèmes de contrôle données en G

Nous montrons ici l'équivalence trés simple des deux formulations du problème de contrôle données dans G III.

Soit K la multiapplication:

$$(t,x) \to \{c(t,x,u)\} .$$

K est Borélienne. En effet si $\{u_n\}_{n\in N}$ désigne une partie dénombrable dense de U alors $\{c(t,x,u_n)\}_{n\in N}$ est dense dans $K(t,x)$ grâce à III-2. En utilisant III-1, on applique le théorème 1 de [1] pout montrer que K est Borélienne.

Pour montrer l'équivalence des deux formulations, il suffira de prouver que si γ est une $dt\otimes dx$ classe de section Lebesgue mesurable de K, il existe $\tilde{u}$ Borélienne à valeurs dans U telle que:

$$dt \otimes dx \quad p.s., \qquad c(t,x,\tilde{u}(t,x)) = \gamma(t,x)$$

Soit $\tilde{\gamma}$ une représentant Borélien de γ. On peut supposer que $\tilde{\gamma}$ est une section de K en modifiant éventuellement $\tilde{\gamma}$ sur

$$\{(t,x);\ \gamma(t,x) \notin K(t,x)\}$$

qui est un ensemble Borélien, par le corollaire 3.1 de [1], et en lui donnant sur cet ensemble les valeurs d'une section Borélienne de K (une telle section existe par la construction même de K).

Soit alors Γ la multiapplication à valeurs dans U:

L

$$(t,x) \rightarrow \{u;\ c(t,x,u) = \tilde{\gamma}(t,x)\} \quad .$$

Γ est à valeurs fermées non vides, et son graphe est Borélien, puisque c est Borélien par rapport à toutes les variables.

Par le théorème 2 de [1], soit u une section Lebesgue mesurable de Γ, et soit $\tilde{u}$ une modification Borélienne de u. $\tilde{u}$ répond à la question.

[1] R. T. Rockafellar: Measurable Dependence of Convex Sets and Functions on Parameters. J. of Math. Anal. and Appl. vol. 28 p. 4-25 (1969).

Représentation des diffusions .

Stroock et Varadhan ont montré dans [2] Théorème 3.3 que si $\underline{a}$ satisfait aux hypothèses de G I, s'il existe $A' > 0$ tel que:

$$(1) \qquad A'|\theta|^2 \leq \langle \theta, a\theta \rangle$$

si $P_{(s,x)}$ est solution du problème des martingales d'origine (s,x), il existe un mouvement Brownien β tel que, si σ est la racine positive de a, alors le processus x_t a la représentation:

$$(2) \qquad x_t = x + \int_s^t \sigma(u, x_u)\, d\beta_u \quad .$$

Nous étendons ce résultat en supprimant la condition (1), et nous montrons que β définit une fonctionnelle additive martingale de carré intégrable pour x.

• Extension du résultat

Pour k entier, soit a_K une application definie sur $[0, +\infty[\times R^d$ à valeurs dans $R^d \otimes R^d$, qui possède les mêmes propriétés que $\underline{a}$, qui coïncide avec a sur $\{(t,x); t \leq K; |x| \leq K\}$, et qui est telle que a_K^{-1} est bornée uniformément.

Soit $P^K_{(s,x)}$ la solution du problème des martingales associée à a_K.

Soit T_K le temps d'arrêt défini par:

$$(3) \qquad T_K = \inf\{t \geq s; |x_t| \geq K\} \wedge K$$

Alors en utilisant les méthodes du lemme 5.6 de [2], on montre immédiatement que la restriction de $P^K_{(s,x)}$ à $M^s_{T_K}$ coïncide avec la restriction de $P_{(s,x)}$ à $M^s_{T_K}$.

Par le théorème 3.3 de [2], on peut trouver β^K mouvement Brownien pour $P^K_{(s,x)}$ tel que:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_t = x + \int_s^t \sigma_K(u, x_u)\, d\beta^K_u \\ \beta^K_t = \int_s^t \sigma_K^{-1}(u, x_u) \cdot dx_u \end{cases}$$

Donc:

$$(5) \qquad \beta^{K+1}_{t\wedge T_K} = \int_s^{t\wedge T_K} \sigma^{-1}(u, x_u) \cdot dx_u$$

On en déduit:

$$(6) \qquad \beta^{K+1}_{t\wedge T_K} = \beta^K_{t\wedge T_K}$$

On peut alors poser:

$$(7) \qquad \beta_t = \lim_{K\to+\infty} \beta^K_t \, .$$

β est alors un processus à trajectoires continues $P_{(s,x)}$ p.s. .

De plus, on a:

$$(8) \qquad \beta_t = \lim_{K\to+\infty} \beta^K_{t\wedge T_K}$$

Enfin comme:

$$(9) \qquad E_{(s,x)} |\beta^K_{t\wedge T_K} - \beta^K_{t'\wedge T_K}|^2 = E_{(s,x)} |t\wedge T_K - t'\wedge T_K|$$

on aura:

$$(10) \qquad E_{(s,x)} |\beta_t - \beta_{t'}|^2 = |t - t'| \quad .$$

$\beta^K_{t\wedge T_K}$ étant une martingale pour $P_{(s,x)}$, (9) et (10) impliquent que β_t est une martingale. De plus β étant à trajectoires continues, (10) implique que β est un mouvement Brownien par [1] (p. 110) ∎

● β <u>est une fonctionnelle additive</u>.

x_t ayant la représentation (2) est une martingale de carré intégrable pour $P_{(s,x)}$. C'est de plus nécessairement une fonctionnelle additive pour le processus P.

Par le théorème 4 (p. 127) de [1], on peut définir la martingale de carré intégrable fonctionnelle additive

$$\int_s^t \sigma^{-1}(u, x_u) \cdot dx_u \quad .$$

En effet, nous savons par le théorème 8.1 de [2] que les mesures potentiels sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue dans $[0, +\infty[\times R^d$, et de plus

$$E_{(s,x)} \int_{s}^{t} |\sigma^{-1}(u, x_u)|^2 \, d\langle x_u, x_u\rangle < +\infty$$

Si l'on note encore par β cette fonctionnelle additive, on vérifie immédiatement qu'on a bien pour toute mesure initiale μ sur $[0, +\infty[\times R^d$, pour tout s, t avec $t \geq s$:

$$x_t = x_s + \int_s^t \sigma(u, x_u) \cdot d\beta_u \qquad \text{p. s.}$$

● On étendra ces résultats aux mesures Q^b avec b mesurable et borné sur $[0, +\infty[\times R^d$.

[1] Meyer, P.A. : Intégrales stochastiques, Séminaire de probabilités I. Lecture Notes in Mathematics, no. 39 p. 72-162, Springer-Verlag. 1967.

[2] Stroock, D.W. and S.R.S. Varadhan: Diffusion Processes with continuous coefficients. Comm. Pure and Appl. Math., 1969 vol XXII pp. 345-400, pp. 473-530.

Contrôle des densités et dualité

L'objet de ce chapitre est de faire le lien entre les méthodes de dualité utilisées dans B et les méthodes utilisées dans G pour la démonstration de l'existence d'un contrôle optimal markovien.

Nous ne ferons qu'esquisser les démonstrations, les résultats obtenus ne servant qu'à faire le lien entre deux approches.

Les notations sont celles de B et G .

I-Préliminaires.

Nous reprenons ici les notations de G .

K est une multiapplication définie sur $\Omega \times [0, T]$ à valeurs dans R^m.

On fait les hypothèses suivantes sur K :

(I-1) K est à valeurs non vides et compactes.

(I-2) K est $\mathscr{T}^*$ mesurable.

(I-3) K est uniformément bornée.

(I-4) K est à valeurs convexes.

(I-4) n'est utilisée que dans les trois premières parties.

$\mathscr{M}$ désigne l'ensemble des classes de sections $\mathscr{T}^*$ mesurable de K pour la mesure $dP \otimes dt$. Le théorème 1 de [2] montre que $\mathscr{M}$ est non vide.

Pour m dans $\mathscr{M}$, soit Z la solution de l'équation:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} dZ = Zm \cdot dw \\ Z(0) = 1 \end{cases}$$

Par le théorème 1 de I , (1.1) a une solution unique, et Z_T est dans L_2^T.

Il est classique que Z_t s'écrit:

$$(1.2) \qquad Z_t = \exp\left\{ \int_0^t m_s \cdot dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t |m_s|^2 \, ds \right\}$$

Z_t est donc un processus positif.

Soit alors A_T un élément de L_2^T.

Définition: Le problème de contrôle consiste dans la minimisation de

$$(1.3) \qquad E(A_T Z_T)$$

quand Z est donné par (1.1).

II Forme canonique du problème

Soit Γ la correspondance définie sur $\Omega \times [0, T]$ à valeurs dans R^{m+2} par:

$$(2.1) \qquad (\omega, t) \to \{(x, 0, xk) \mid x \geq 0 \quad k \in K(\omega, t)\}$$

Γ est alors $\mathscr{T}^*$ mesurable: on peut en effet appliquer le théorème 2 de [2].

Γ est de plus à valeurs convexes; en effet $\Gamma(\omega,t)$ est le cône de sommet 0 et de base $(1,0,K(\omega,t))$.

Soit L l'intégrant convexe normal indicatrice de Γ.

Soit ℓ_0 et ℓ_T les fonctionnelles définies par L_2^0 et L_2^T par:

- ℓ_0 est l'indicatrice de 1.
- ℓ_T est la forme linéaire:

$$Z_T \to E(A_T Z_T) \quad .$$

Posons:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} W_1 = \{0\} \\ W_2 = W^{\perp} \end{cases}$$

Le problème de contrôle est équivalent à la minimisation de $\Phi_{\ell,L}$ sur R_1.

<u>Proposition II-1</u>: Le problème de contrôle a une solution optimale.

<u>Preuve</u>: On utilisera les méthodes de Beneš dans [1] pour montrer que l'ensemble des Z_T accessibles est faiblement compact.

III <u>Problème dual</u>

Soit L^* l'intégrant dual de L. Si $\varphi(\omega,t,\cdot)$ est la fonction d'appui de $K(\omega,t)$, on vérifie que L^* est l'indicatrice de:

$$\{\dot{p}, p, H'; \ \dot{p} + \varphi(\omega, t, H') \leq 0\} \quad .$$

Le problème dual consiste dans la minimisation de $E(p_0)$ sur l'ensemble des p de R_2 vérifiant:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} p_T = -A_T \\ \dot{p}(\omega,t) + \varphi(\omega,t,H'(\omega,t)) \leq 0 \quad . \end{cases}$$

Si on pose:

$$(3.2) \qquad M(\omega,t,p,\dot{p},H') = L^*(\omega,t,\dot{p},p,H')$$

on vérifiera que le couple (L,M) satisfait aux hypothèses II-1 et II-2 de B, ce qui prouve que le problème de contrôle et son dual sont bien duaux au sens de B.

On vérifiera que les conditions de coextrémalité définies en IV-1 entre Z dans R_1 et p dans R_2 s'écrivent:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \dot{p} = -\varphi(\omega,t,H'(\omega,t)) \\ \langle H'(\omega,t), m(\omega,t)\rangle = \varphi(\omega,t,H'(\omega,t)) \quad . \end{cases}$$

<u>Proposition III-1</u>: Le problème de minimisation de $\Phi_{m,M}$ sur R_2 a une solution unique p. p est la solution unique de l'équation:

$$(3.4) \qquad \begin{cases} dp = -\varphi(\cdot,\cdot,H'(\cdot,\cdot))\,dt + H'\cdot dw + dM' \\ p_T = -A_T \end{cases}$$

avec (p_0, H, M') dans $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$. Pour que Z minimise $\varphi_{\ell, L}$ sur R_1, il faut et il suffit qu'on ait:

$$(3.5) \qquad \langle H'(\omega,t), m(\omega,t)\rangle = \varphi(\omega, t, H'(\omega,t))$$

On a alors la relation:

$$(3.6) \qquad p_t = -\frac{E^{\mathscr{F}_t} A_T Z_T}{Z_t}$$

<u>Preuve</u>: Soit Z une solution optimale du problème initial, et soit m l'élément de $\mathscr{M}$ qui le définit.

Soit $\tilde{p}$ la solution unique au sens du théorème II-2 de **C** de l'équation:

$$(3.7) \qquad \begin{cases} d\tilde{p} = -\langle \tilde{H}, m\rangle\, dt + \tilde{H}\cdot dw + d\tilde{M}' \\ \tilde{p}_t = -A_T \end{cases}$$

avec $(\tilde{p}_0, \tilde{H}, \tilde{M}')$ dans $L_2^0 \times L_{22} \times W^{\perp}$. Par la proposition I-1 de **B** on vérifie que $\tilde{p}_t Z_t$ est une martingale.

On a donc:

$$(3.8) \qquad \tilde{p}_t Z_t = E^{\mathscr{F}_t} p_T Z_T$$

Ce qui s'écrit:

$$(3.9) \qquad \tilde{p}_t = -\frac{E^{\mathscr{F}_t} A_T Z_T}{Z_T}$$

En particulier:

(3. 10) $\quad E(\widetilde{p}_0) + E(A_T Z_T) = 0$.

Si sur un ensemble $dP \otimes dt$ non négligeable, on a

(3. 11) $\quad \langle \widetilde{H}(\omega,t), m(\omega,t)\rangle < \varphi(\omega,t,\widetilde{H}(\omega,t))$

on modifie m en m' sur cet ensemble de telle façon que:

(3. 12) $\quad \langle \widetilde{H}(\omega,t), m'(\omega,t)\rangle = \varphi(\omega,t,\widetilde{H}(\omega,t))$.

On aura alors:

(3. 13) $\quad E(\widetilde{p}_0) + E(A_T Z'_T) + E\int_0^t \langle \widetilde{H}_t, m'_t - m_t\rangle\, dt = 0$

ce qui implique:

(3. 14) $\quad E(A_T Z'_T) < E(A_T Z_T)$

Z ne serait pas optimal.

On a donc bien:

(3. 15) $\quad \langle \widetilde{H}(\omega,t), m(\omega,t)\rangle = \varphi(\omega,t,\widetilde{H}(\omega,t))$. $\quad dP \otimes dt$ p. s.

Cela implique en particulier par (3. 10)

(3. 16) $\quad \Phi_{\ell,L}(Z) + \Phi_{m,M}(p) = 0$.

La conditions a) du théorème IV-1 de B est verifiée.

Le théorème IV-2 de B montre donc que pour que Z et p soient solutions des problèmes primal et dual, il faut et il suffit que les conditions de coextrémalité soient vérifiées.

Si p est solution de (3. 4), grâce à (3. 3) on peut trouver Z'' tel que p et Z'' soient coextrémaux.

Mais p et Z seront coextrémaux, et p sera identique à $\tilde{p}$.

(3. 4) a donc une solution unique. ■

IV <u>Relaxation de l'hypothèse de convexité</u>.

On supprime l'hypothèse I-4, et on cherche encore à résoudre le problème de contrôle.

<u>Théorème IV-1</u>: Le problème de contrôle a une solution.

<u>Preuve</u>: Soit $\hat{k}(\omega, t)$ l'enveloppe fermée convexe de $k(\omega, t)$. Alors par le corollaire 3. 3 de [2], $\hat{k}$ est $\mathcal{T}^*$ mesurable.

Soit $\varphi(\omega, t, \cdot)$ la fonction d'appui de $\hat{k}(\omega, t)$, qui coïncide avec la fonction d'appui de $k(\omega, t)$. Par la proposition III-1, l'équation:

$$(4.1) \quad \begin{cases} dp = -\varphi(\cdot, \cdot, H'(\cdot, \cdot))\, dt + H' \cdot dw + dM' \\ p_T = - A_T \end{cases}$$

avec (p_0, H', M') dans $L_2^0 \times L_{22} \times W^\perp$ a une solution unique.

$K(\omega, t)$ et $\hat{K}(\omega, t)$ ayant mêmes points extrémaux, on peut trouver m dans $\mathcal{M}$ tel que:

$$\langle H'(\omega, t), m(\omega, t)\rangle = \varphi(\omega, t, H'(\omega, t))$$

Z correspondant à m est nécessairement optimal par la proposition III-1. ■

V Application aux problèmes de contrôle généraux.

On reprend les hypothèses et notations de G . On supposera qu'il existe $A > 0$ tel que:

$$\langle a(t, x)\theta, \theta\rangle \geq A|\theta|^2 .$$

(s, x) est un élément de $[0, T] \times R^d$.

$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in R^+}$ sera la famille $\{M^s_{s+t}\}_{t\in R^+}$. On cherche (b, L) minimisant

$$E^b_{(s,x)} \int_s^t L(u, x_u)\, du$$

sur l'ensemble des classes des sections $\mathscr{T}^*$ mesurables de $(\omega, t) \to K(t, x_t)$.

Si Z^b_T désigne la densité de $Q^b_{(s,x)}$ par rapport à $P_{(s,x)}$ définie en G , on a:

$$(5.1) \qquad E^b_{(s,x)} \int_s^T L(u, x_u)\, du = E^0_{(s,x)} \left(\int_s^T L(u, x_u)\, du \right) Z^b_T$$

Si L est "fixe", c'est à dire si le seul objet du contrôle est b, on s'est ramené au problème précédent.

Sinon on peut utiliser le procédé de Beněs qui consiste à "ajouter" à

$$\int_s^t L(u, x_u)\, du$$

un mouvement brownien indépendent de x, qu'on note η, qui prend la valeur 0 à l'instant s.

Si $P'_{(s,x)}$ désigne la mesure définie sur l'espace des fonctions **continues** à valeurs dans R^{m+1} associée à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et un "point de départ" $(s, x, 0)$, si $E'_{(s,x)}$ est l'opérateur d'espérance associé à $P'_{(s,x)}$, on a:

$$(5.2) \qquad E^b_{(s,x)} \int_s^T L(u, x_u)\, du = E'_{(s,x)} (\eta_T Z'^{(b,L)}_T)$$

en notant par $Z'^{(b,L)}_T$ la densité de $Q^{(b,L)}_{(s,x)}$ par rapport à $P'_{(s,x)}$.

$Z'^{(b,L)}_T$ est donné par l'équation:

$$(5.3) \qquad \begin{cases} dZ' = Z'(\langle \sigma^{-1} b, d\beta \rangle + L\, d\eta) \\ Z'_s = 1 \end{cases}$$

σ^{-1} étant borné, on est bien ramené au problème précédent.

Mais on a alors un problème nouveau; en effet, en ajoutant un nouveau mouvement Brownien, on crée une information supplémentaire. Le contrôle optimal trouvé sera alors aussi fonction de cette information. Le contrôle trouvé sera en un certain sens "mixte", ce qui est un inconvénient grave, sur lequel Beneš ne donne d'ailleurs aucune indication dans [1].

Appliquons alors la proposition III-1. $\varphi(\omega, t, \cdot, \cdot)$ étant la fonction d'appui de

$$\{(\sigma^{-1}(t, x_t)\, b, L);\ (b, L) \in k(t, x_t)\}$$

soit p la solution de:

$$(5.3)\quad \begin{cases} dp = -\varphi(\cdot, \cdot, H_1'(\cdot, \cdot), H_2'(\cdot, \cdot)) + H_1' \cdot d\beta + H_2'\, d\eta \\ p_T = -\eta_T \end{cases}$$

Pour que $Z'^{(b, L)}$ soit optimal, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\langle H_1', \sigma^{-1} b\rangle + H_2' L = \varphi(\cdot, \cdot, H_1', H_2')\ dP \otimes dt \quad \text{p. s.}$$

Si on admet qu'il existe un contrôle optimal (b, L) non anticipatif par rapport à <u>la famille de tribus initiales</u> (*), alors on peut montrer que $H_2' = -1$, et on aura:

$$(5.4)\qquad p_t = -\eta_t - E^{\mathscr{F}_t} \int_t^T L(u, x_u)\, du\, Z_T^b \quad .$$

Si on pose:

$$(5.5)\qquad q_t = -(p_t + \eta_t) \quad ,$$

(*) Ce qui suppose résolue une bonne partie du problème...

q est donc solution de:

$$(5.6)\quad \begin{cases} dq = -\inf\limits_{(b',L')\in k(t,x_t)} \{L' + \langle H, \sigma^{-1}(t,x_t)b'\rangle\}\, dt + H\, d\beta \\ q_T = 0 \end{cases}$$

avec H dans L_{22}, et on aura:

$$(5.7)\quad q_t = E^{\mathscr{F}_t} \int_t^T L(u, x_u)\, du\, Z_T^b$$

(b, L) sera optimal si et seulement si:

$$(5.8)\quad L + \langle H, \sigma^{-1}(t,x_t)\, b\rangle = \inf_{(b',L')\in K(t,x_t)} \{L' + \langle H', \sigma^{-1}(t,x_t)b'\rangle\}$$

$dP \otimes dt$ p. s.

Le lien est donc fait avec G : en particulier q_t n'est autre que le processus $q(t, x_t)$ défini en G.

<u>Conclusion</u>:

Bien que nous ayons fait le lien entre les méthodes de dualité et les méthodes utilisées en G les premières sont moins fortes que les secondes. En effet:

a) Les méthodes de dualité donnent en général des contrôles mixtes, alors que les méthodes markoviennes donnent un contrôle non anticipatif.

b) Elles ne donnent pas de résultat sur l'existence d'un contrôle markovien quand il en existe.

c) On ne peut aisément changer de "point initial."

On voit cependant que certaines problèmes de contrôle sont en fait des problèmes de contrôle de densité de probabilité. La martingale des densités obéit elle-même à une équation très simple.

[1] Beneš, V.E.: Existence of optimal stochastic control laws. SIAM J. of Control, Vol. 9, no. 3, August, 1971.

[2] Rockafellar, R.T.: Measurable dependence of convex sets and functions on parameters, J. of Math. Analysis and Appl. Vol. 28-1, p. 4-25, 1969