1) Rappels sur les espaces de Hilbert

Def. **Espace préhilbertien.** E $\mathbb{K}$-ev muni d'un produit scalaire ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) :

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tq}$$

$\forall x,y,z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

(i) linéarité à gauche $\langle \lambda x+y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

(ii) symétrique hermitienne : $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$

(iii) caractère def + : $\langle x,x\rangle \geq 0$ avec $=$ ssi $x=0$

Rque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, antilinéaire à dte :

$$\langle x, \lambda y+z\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$

Inégalité de C.S. $\forall x,y \in E$,

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad \text{où} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Coq :

- Inégalité triangulaire : $\|\cdot\|$ est norme sur E
- $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est continue sur $E\times E$ où E est muni de $\|\cdot\|$

Def. On dit qu'un préhilbertien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un **espace de Hilbert** si $(E,\|\cdot\|)$ complet.

Orthogonalité : Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ préhilbertien.

- On dit que x et y sont orthogonaux, noté $x\perp y$ si $\langle x,y\rangle = 0$
- famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\forall i,j\in I, i\neq j$ $\langle x_i,x_j\rangle = 0$
- Pour $A\subset E$, on définit $A^\perp = \{x\in E : \forall y\in A, \langle x,y\rangle = 0\}$

Prop - $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien, $A \subset E$

- $E^\perp = \{0\}$. $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $\overline{A}^\perp = A^\perp = (\text{vect } A)^\perp$
- $A^\perp$ s.e.v. fermé ds E
- Si E Hilbert et F s.e.v de E, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$

Identité de **Pythagore** : $\forall x, y \in E$ tq $x \perp y$ alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

À partir de maintenant, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert.

Thm. de représentation de Riesz dans un Hilbert

$$I : H \longrightarrow H^* \qquad a \longmapsto \langle \cdot, a \rangle$$

est une isométrie antilinéaire bijective

Attention, l'hypothèse de **complétude** est essentielle pour ce thm.

Def - **Base hilbertienne**.

- Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de H est **orthonormée** si elle est orthogonale et $\forall i \in I$, $\|e_i\| = 1$
- Une **base hilbertienne** de H est une famille $(e_i)_{i \in I}$ orthonormée et tq : $\overline{\text{vect}(e_i : i \in I)} = H$.

Thm : Si H est un espace de Hilbert séparable (de dim ∞), alors

- H possède une **base hilbertienne** dénombrable $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$

- $\Psi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{K})$ est un isomorphisme isométrique
  $x \longmapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

H Hilbert

(2) Opérateurs auto-adjoints, opérateurs compacts

Terminologie : T est un opérateur sur H .
si T est un endomorphisme continu de H
ssi $T \in \mathcal{L}(H)$ $(\mathcal{L}(H, H))$
Une convention plus courante : $T \in \mathcal{L}(H)$ "opérateur borné"

Prop : Définition de l'adjoint d'un endomorphisme
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé adjoint de T, satisfaisant :
$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$

Preuve :

- **Unicité :** si U, V sont deux endomorphismes de H tq : $\forall x, y \in H$,
  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle = \langle x, V(y) \rangle$
  $\Rightarrow \langle x, U(y) - V(y) \rangle = 0$
  donc $U(y) - V(y) = 0$
  donc $U = V$ d'où l'unicité de T^* si existence
- **Existence.** Soit $y \in H$.
  L'appl. $\langle T(\cdot), y \rangle \in H^*$ $(x \mapsto \langle T(x), y \rangle)$
  * continuité : car T continue, $\langle \cdot, y \rangle$ cont°
  * linéaire

D'après le thm de repr. de Riesz : $\exists a_y \in H$ tq
$\forall x \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, a_y \rangle$
"$= T^*(y)$"

Vérifions que $y \mapsto a_y$ linéaire. Pour $x \in H$

$\forall y_1, y_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$\langle x, a_{y_1+\lambda y_2} \rangle \underset{\text{déf de } a_{y_1+\lambda y_2}}{=} \langle T(x), y_1 + \lambda y_2 \rangle$$

$$\underset{\text{antilin}}{=} \underbrace{\langle T(x), y_1 \rangle}_{\langle x, a_{y_1} \rangle} + \overline{\lambda} \underbrace{\langle T(x), y_2 \rangle}_{\langle x, a_{y_2} \rangle}$$

$$\langle x, \overline{\lambda} a_{y_2} \rangle$$

$$= \langle x, a_{y_1} + \overline{\lambda} a_{y_2} \rangle$$

Donc $a_{y_1+\lambda y_2} = a_{y_1} + \overline{\lambda} a_{y_2}$

On pose $T^* : y \mapsto a_y$ et il reste à vérifier la continuité de T^* : pour $y \in H$

pour $a \in H$:
$\| \langle \cdot, a \rangle \|_{H^*} = \|a\|_H$
↑ partie isométrie du thm de Riesz

$$\|T^*(y)\|_H = \| \langle \cdot, T^*(y) \rangle \|_{H^*}$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \underbrace{|\langle x, T^*(y) \rangle|}_{= |\langle T(x), y \rangle|}.$$

$$\leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \underbrace{\|x\|}_{=1} \cdot \|y\|$$

C.S. $T \in \mathcal{L}(H)$

$$\leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|$$

donc T^* continue et $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ □

Def_ Opérateur auto-adjoint sur H :

On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$

i.e. $\forall x, y \in H$, $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ (*)

Hellinger Toeplitz

Rque : si on suppose $T : H \to H$ linéaire (pas C°)
(*) $\Rightarrow$ T est continue
(appl. du thm du graphe fermé)

Rque : la notion d'opérateur auto-adjoint sur un Hilbert H généralise la notion de matrice hermitienne.
Plus précisément, si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert de dim finie d et $f \in \mathcal{L}(V)$, l'adjoint f^* est caractérisé par

$$\forall x, y \in V, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall i, j, \quad \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ b.o.n de V

En écrivant $A = (a_{ij})_{ij} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A^* = (a^*_{ij})_{ij} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$

$$a^*_{ij} = \langle f^*(e_j), e_i \rangle = \overline{\langle e_i, f^*(e_j) \rangle}$$
$$= \overline{\langle f(e_i), e_j \rangle} \quad \text{def } f^*$$
$$= \overline{a_{ji}}$$

f auto-adjoint $\Leftrightarrow$ $(A^* =)\ \overline{A}^T = A$ $\Leftrightarrow$ A hermitienne.

Def - **Spectre** et **valeurs propres** d'un opérateur
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.
On définit
- le **spectre** de T : $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda \mathrm{Id} \text{ pas bijectif}\}$
- l'ens des **valeurs propres** de T ou spectre ponctuel de T
$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif}\} \subset \sigma(T)$$
- Pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, $E_\lambda = \ker(T - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ $T - \lambda \mathrm{Id}$ C° fermé car
sous-espace propre

Rque : en dim finie, $T-\lambda Id$ bijectif $\Leftrightarrow$ injectif
et $\sigma(T) = \sigma_p(T)$
en dim infinie, pas vrai en général :

Exemple : $H = L^2(]0,1[)$ et $T : H \to H$

$$u \longmapsto \begin{cases} T(u) :]0,1[\to \mathbb{K} \\ x \longmapsto x\,u(x) \end{cases}$$

- **T linéaire continue** : soit $u \in L^2(]0,1[)$,
$\|T(u)\|_2^2 = \int_0^1 \underbrace{|x|^2}_{\leq 1} |u(x)|^2\,dx \leq \|u\|_2^2$

$\Rightarrow T$ continue.

- **T auto-adjoint**, $\forall u, v \in L^2(]0,1[)$,
$\langle T(u), v\rangle = \int_0^1 (x\,u(x))\,\overline{v(x)}\,dx$

$= \int_0^1 u(x).\,\overline{x\,v(x)}\,dx$ "$x \in \mathbb{R}$"

$= \langle u, T(v)\rangle$

- **$\sigma(T) = [0,1]$**.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, pour $u \in L^2(]0,1[)$, $(T-\lambda Id)(u)$:

$x \longmapsto (x-\lambda)u(x)$ $\neq 0$ pour $x \in [0,1]$

* Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus [0,1]$:

$x \longmapsto \frac{1}{x-\lambda}$ continue sur $[0,1]$ donc bornée par $M \geq 0$

et on peut définir $U_\lambda : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$
par : $U_\lambda(v) \in L^2(]0,1[)$: $x \longmapsto \frac{v(x)}{x-\lambda}$ $(x \in]0,1[)$

on a bien $U_\lambda(v) \in L^2(]0,1[)$ car $\|U_\lambda(v)\|_2 \leq M\|v\|_2$

donc $T-\lambda Id$ bijective, d'inverse U_λ.
$\Rightarrow \sigma(T) \subset [0,1]$

* Si $\lambda \in [0,1]$, on va mq $T-\lambda Id$ n'est pas surjectif.
Pour $v : x \in [0,1] \longrightarrow \sqrt{|x-\lambda|}$ continue, $v \in L^2(]0,1[)$
et pour $u \in L^2(]0,1[)$ on a :

$(T-\lambda Id)(u) = v \iff$ pour p.t $x \in [0,1]$, $v(x) = (x-\lambda)u(x)$

$\iff$ pour p.t $x \in [0,1]$, $u(x) = \dfrac{v(x)}{x-\lambda}$

($\{\lambda\}$ de mesure nulle)

On a alors pour p.t $x \in [0,1]$,

$\lambda \in [0,1]$

$$|u(x)|^2 = \frac{|v(x)|^2}{|x-\lambda|^2} = \frac{1}{|x-\lambda|} \Rightarrow \|u\|_2^2 = \int_0^1 \frac{1}{|x-\lambda|}\,dx \overset{\downarrow}{=} +\infty$$

donc $(T-\lambda Id)(u) = v$ n'a pas de sol° u ds $L^2(]0,1[)$
donc $[0,1] \subset \sigma(T)$.

• $\sigma_p(T) = \emptyset$ i.e. T n'a pas de valeur propre.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in L^2(]0,1[)$ tq $(T-\lambda Id)(u) = 0$
On a alors pour p.t $x \in]0,1[$: $\quad \because x \mapsto (x-\lambda)u(x)$

$x = \lambda$ ou $u(x) = 0$

donc pour p.t $x \in]0,1[$, $u(x) = 0$ ($\{\lambda\}$ de mes 0)
Donc $T-\lambda Id$ injectif donc λ pas valeur propre de T.

Prop : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors

* $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$
* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

Preuve : • si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\exists x \in H$, $x \neq 0$ tq $T(x) = \lambda x$
et $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle$

$\lambda \|x\|^2$

$\iff \langle \lambda x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2$ $\neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ ie $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Sp}(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a pour $u_1 \in E_{\lambda_1}, u_2 \in E_{\lambda_2}$,

$$\langle T(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, T(u_2) \rangle$$

$T = T^*$

$$\Leftrightarrow \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\neq 0$

$$\Leftrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 \perp u_2.$$

□

On va restreindre la classe des opérateurs auto-adjoints considérée pour assurer l'existence de valeur propre (contrairement au cas de l'exemple précédent).

Prop - (Définition et caractérisation d'un opérateur compact)
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est un opérateur compact lorsque T vérifie une des assertions équivalentes suivantes :

(i) $T(B(0,1))$ est relativement compacte dans H $\Leftrightarrow$ (def) $\overline{T(B(0,1))}$ est compacte

(ii) $\forall$ partie $A \subset H$ bornée, $T(A)$ est relativement compacte dans H ie $\overline{T(A)}$ compacte

(iii) $\forall (x_n)_n$ suite bornée de H, la suite $(T(x_n))_n$ admet une ss-suite conv.

Preuve : voir poly (homogénéité pour (i) $\Rightarrow$ (ii) et ensuite caract. séquentielle compacité)

Prop. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact. Alors $\mathcal{G}_p(T)$ borné, au plus dénombrable et ne possède que 0 comme point d'accumulation possible. De plus, $\forall \lambda \in \mathcal{G}_p(T) \setminus \{0\}$ alors $\dim E_\lambda < +\infty$

Point d'accumulation: dans un e.v.n, ici de H, $x \in H$ est un point d'accumulation d'une partie $A \subset H$ ssi tout vois V de x contient une infinité d'éléments de A.

Preuve

- Si $\lambda \in \mathcal{G}_p(T)$, $\exists x \in H, x \neq 0$ tq $T(x) = \lambda x$.

Alors :

$$|\lambda| \|x\| = \|T(x)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|x\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$$

($x \neq 0$, $\|x\| > 0$)

- On va montrer le résultat suivant :

T opérateur compact et auto-adjoint $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{G}_p(T) \cap A_\varepsilon$ est de cardinal fini où $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{K} : |z| > \varepsilon\}$]]

Par contraposée : $\exists \varepsilon > 0$, tq $\mathcal{G}_p(T) \cap A_\varepsilon$ est de cardinal infini

Mq T n'est pas un opérateur compact.

$\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments deux à deux $\neq$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n \in \mathcal{G}_p(T) \cap A_\varepsilon$$

et donc $\exists x_n \in H, x_n \neq 0$ tq $T(x_n) = \lambda_n x_n$ et $\|x_n\| = 1$ (par homogénéité de)

Comme $(\lambda_n)_n$ 2 à 2 $\neq$.
alors $(E_{\lambda_n})_n$ 2 à 2 $\perp$
$\Rightarrow (x_n)_n$ famille orthonormée
donc pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \neq \ell$, $\lambda_k x_k \perp \lambda_\ell x_\ell$
et par Pythagore :

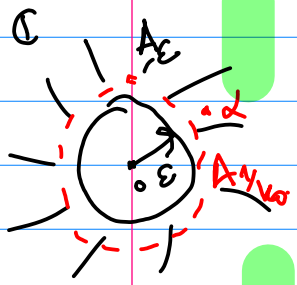
$$\|T(x_k) - T(x_\ell)\|^2 = \|\lambda_k x_k - \lambda_\ell x_\ell\|^2$$
$$= |\lambda_k|^2 + |\lambda_\ell|^2 > 2\varepsilon^2 \quad (*)$$
$$> 0$$

La suite $(x_n)_n$ est bornée ($\|x_n\| = 1 \ \forall n$)
et on va justifier que $(*)$ implique que $(T(x_n))_n$
ne possède aucune ss-suite CV donc T pas cp.
compact.

Supposons que $(T(x_n))_n$ possède une ss-suite CV $(T(x_{\theta(n)}))_n$
alors :
$2\varepsilon^2 < \|T(x_{\theta(n+1)}) - T(x_{\theta(n)})\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ exclu.

- $\sigma_p(T) \cap (\mathbb{K}\setminus\{0\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (\sigma_p(T) \cap A_{1/k})$
  (fini)
  dnb

$\Rightarrow \sigma_p(T)$ dnb.



- Soit $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $|\alpha| > \frac{1}{k_0}$.

donc A_{1/k_0} vois ouvert de α qui ne contient qu'un nb fini d'éléments du spectre $\sigma_p(T)$
$\Rightarrow$ α n'est pas point d'accumulation de $\sigma_p(T)$

- si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$.

$$T\left(B_{E_\lambda}(0,1)\right) = \{T(x) : x \in E_\lambda \text{ et } \|x\| < 1\} \quad (= E_\lambda \cap B(0,1))$$
$$= \lambda B_{E_\lambda}(0,1)$$

$\Rightarrow$ $\overline{T(B_{E_\lambda}(0,1))} = \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$ partie compacte

T opérateur compact

Comme E_λ est fermé, $\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} \overset{\text{(exo)}}{=} E_\lambda \cap \overline{B(0,1)}$ boule unité fermée de E_λ

$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$ boule unité fermée de E_λ est compacte

$\Rightarrow$ $\dim E_\lambda < +\infty$.

thm de Riesz

Exemple d'opérateur compact sur $\ell^2(\mathbb{K})$ par multé

Soit $a \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $T_a : \ell^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{K})$

$u \longmapsto au$ " $(a_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

alors T_a { bien défini, linéaire continue, auto-adjoint

De plus T est un opérateur compact $\Leftrightarrow a_n \to 0$

Mq : " $a_n \to 0 \Rightarrow T$ compact "

Soit $(u^k)_k$ bornée de $\ell^2(\mathbb{K})$ qui est réflexif

$\Rightarrow u^{\sigma(k)} \longrightarrow u$ de $\ell^2(\mathbb{K})$

" faiblet "

On pose $v^k = u^{\sigma(k)} - u \longrightarrow 0$

- Mq $\forall j \in \mathbb{N}$, $v_j^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$v^k \to 0 \Rightarrow (v^k)_k$ bornée par $C \geq 0$

Rque (CV faible ds un espace de Hilbert)

$y_n \to y$ ds H $\Leftrightarrow$ $\forall L \in H^*$, $L(y_n) \xrightarrow[n\infty]{} L(y)$

$\Leftrightarrow$ Riesz $\Leftrightarrow$ $\forall a \in H$, $\langle y_n, a\rangle \to \langle y, a\rangle$

$\forall L \in H^*$, $\exists a \in H$ tq $L = \langle \cdot, a\rangle$

ici : $\forall w \in \ell^2(\mathbb{K})$, $\langle v^k, w\rangle \xrightarrow[k\infty]{} 0$

en prenant pour $j \in \mathbb{N}$, $w = e_j = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow j}{1}, 0 \dots 0 \dots)$

on obtient $\langle v^k, e_j\rangle = v_j^k \xrightarrow[k\infty]{} 0$

Mq. $(T(v^k))_k$ converge fortement ds $\ell^2(\mathbb{K})$ vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|a_n| < \varepsilon$

de plus (N fixé) $\sum_{n=0}^{N} |v_n^k|^2 \xrightarrow[k\infty]{} 0$ par

donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$, $\sum_{n=0}^{N} |v_n^k|^2 \leq \varepsilon^2$

On a alors

$$\|T(v^k)\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 |v_n^k|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 |v_n^k|^2$$

$|a_n| \leq \|a\|_\infty$; $|a_n| \leq \varepsilon$

$$\leq \|a\|_\infty^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |v_n^k|^2}_{\leq \|v^k\|^2 \leq C^2} \to 0$$

$$\Rightarrow \|T(v^k)\|^2 \leq (\|a\|_\infty^2 + C^2)\,\varepsilon^2$$

donc $T(v^k) \longrightarrow 0$ forte dans $\ell^2(\mathbb{K})$

donc $T(u^{\theta(k)}) \longrightarrow T(u)$ forte dans $\ell^2(\mathbb{K})$

donc T compact. □

Thm dit "spectral"

Soit H un espace de Hilbert séparable
$T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint et compact
Alors, H possède une base hilbertienne composée de vecteurs propres de T

Rque - Supposons H de dim infinie, notons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H composé de vecteurs propres pour T et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de val. propres associée.
Par la prop. précédente : $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$(a_n)_n$ bornée

$\forall n \in \mathbb{N}$ tq $a_n \neq 0$, $\dim E_{a_n} < +\infty$
donc $\{n \in \mathbb{N} : |a_n| > \varepsilon\}$ fini
et donc $a_n \longrightarrow 0$
(Hyp. de l'exemple de l'op. par mult. sur $\ell^2(\mathbb{K})$ pour a)

De plus : $\psi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{K})$ isom. isométrique
$x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme T auto-adjoint et $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall y \in H$

auto-adjoint

$$((\Psi \circ T)(y))_m = \langle T(y), e_m \rangle \overset{\downarrow}{=} \langle y, T(e_m) \rangle$$
$$= \langle y, a_m e_m \rangle$$
$$= a_m \langle y, e_m \rangle$$
$$= a_m (\Psi(y))_m$$
$$= (a\Psi(y))_m$$

donc $\Psi \circ T_y = a\,\Psi(y)$ avec $y = \Psi^{-1}(x)$
donc $\Psi \circ T \circ \Psi^{-1} : x \longmapsto ax$ qui est l'opérateur "T_a" étudié ds l'exemple

La preuve du thm spectral repose sur deux résultats:

Prop 1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ opérateur compact.
Alors, pour toute suite $(u_k)_k$ de H tq $u_k \rightharpoonup u$
(i) $T(u_k) \longrightarrow T(u)$ forte^{t}/
(ii) $\langle T(u_k), u_k \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle T(u), u \rangle$

Preuve (schéma):
(i) . $T(u_k) \longrightarrow T(u)$ ($T : H \to H$ lin forte^{t} cont $\Rightarrow T : (H, \mathcal{B}(H, H^*)) \to$ faible^{t} cont)
. $\exists$ ss-suite tq $T(u_{\sigma(k)}) \longrightarrow T(u)$ forte^{t}/
$\Rightarrow$ $T(u_k) \longrightarrow T(u)$ forte^{t}/
(ii) I.T. + $u_k \rightharpoonup u \Rightarrow (u_k)_k$ bornée

Prop 2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact de H, $H \neq \{0\}$.
Alors T possède une valeur propre

Preuve : Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\{|\langle T(x), x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \neq \emptyset$$

majoré par $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ par C.S

$S_T = \sup$ ↑

- $S_T = 0$, $\forall x, y \in H$, $\langle T(x), x\rangle = \langle T(y), y\rangle = 0$ (vrai si $\|x\| = \|y\| = 1$ + homogénéité)

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle + \underbrace{\langle T(y), x\rangle}_{\langle y, T(x)\rangle \text{ auto-adj}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\langle T(x), y\rangle = 0$$

donc $T(x) \perp y$ $\forall y \in H \Rightarrow T(x) = 0$

donc $T = 0$ donc $0 \in \sigma_p(T)$.

- $S_T > 0$. Soit $(x_k)_k$ de H tq $\|x_k\| = 1$ $\forall k$ tq.

$$|\langle T(x_k), x_k\rangle| \xrightarrow[k\to\infty]{} S_T$$

* $(x_k)_k$ est bornée et H est réflexif

donc, il existe ss-suite $x_{\theta(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ ds H

D'après la prop 1 (ii) : $\langle T(x_{\theta(k)}), x_{\theta(k)}\rangle$

$\downarrow k\to\infty$

$\langle T(x), x\rangle = S_T > 0$

$\Rightarrow x \neq 0$

* Semi-cont. inf de la norme vis à vis de la CV faible :

$\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_{\theta(k)}\| = 1$ ($\|x_{\theta(k)}\| = 1$)

Par homogénéité $\|x\| = 1$. En effet, $\lambda = \frac{1}{\|x\|} \geq 1$

$\|\lambda x\| = 1$

$\Rightarrow |\langle T(\lambda x), \lambda x\rangle| \leq S_T$ par def de S_T

$\|$

$|\lambda|^2 |\langle T(x), x\rangle| = |\lambda|^2 S_T$

donc $S_T \leq |\lambda|^2 S_T \leq S_T$ donc $\lambda = 1$

donc $\|x\| = 1$

* Quitte à considérer $-T$ ($\lambda \in \sigma_p(-T) \Leftrightarrow -\lambda \in \sigma_p(T)$)

$\langle T(x), x\rangle = |\langle T(x), x\rangle| = S_T > 0$.

On se donne $w \in H$ tq $w \perp x$ et $\|w\| = 1$

(possible si $H \neq \mathrm{vect}(x)$ et si $H = \mathrm{vect}(x)$ et $T(x) \neq x$ colin)

$\gamma : \mathbb{R} \to \{y \in H : \|y\| = 1\}$

$t \mapsto (\cos t)\, x + (\sin t)\, w$

$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto \langle T(\gamma(t)), \gamma(t)\rangle$

- $x \perp w \Rightarrow$ (Pythagore) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma(t)\|^2 = \|(\cos t)x\|^2 + \|(\sin t)w\|^2$

$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

($\|x\| = \|w\| = 1$)

- $\gamma(0) = x$

γ est C^∞, Φ est C^∞ par comp.
et Φ atteint son maximum S_T en $t=0$

Donc $\Phi'(0) = 0$

- $(T\circ\gamma)'(t) = \underbrace{DT(\gamma(t))}_{T \text{ car } T \text{ lin cont°}}(\gamma'(t)) = T(\gamma'(t))$

donc $\Phi'(t) = \langle (T\circ\gamma)'(t), \gamma(t)\rangle + \langle T(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$
$= \langle T(\gamma'(t)), \gamma(t)\rangle + \quad //$

$\gamma'(0) = w$

$\Phi'(0) = \langle T(w), x\rangle + \langle T(x), w\rangle$
$= 2\langle T(x), w\rangle$ auto-adj

donc $\langle T(x), w\rangle = 0 \quad \forall w \perp x$
$(\|w\| = 1$ par homogénéité)

donc $T(x) \in (\mathrm{rect}(x)^\perp)^\perp$
$= \mathrm{rect}(x)$ car $\mathrm{rect}(x)$ fermé

donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ T(x) = \lambda x$
$(x \neq 0)$

donc $\lambda \in \mathcal{S}_p(T)$ □