Analyse Approfondie

Master 1 – Mathématiques

Blanche Buet

Année universitaire 2026–2027

Table des matières

1 Théorème de Baire et application aux espaces de Banach **4**
1.1 Théorème de Baire . . . 4
1.2 Théorème de Banach–Steinhaus . . . 6
1.3 Théorème de l'application ouverte . . . 9
1.4 Théorème du graphe fermé . . . 13

2 Théorèmes de Hahn–Banach **15**
2.1 Dual d'un espace vectoriel normé, bidual . . . 15
2.2 Théorème de Hahn–Banach : forme analytique . . . 16
2.3 Théorème de Hahn–Banach : forme géométrique . . . 23

3 Topologie faible, topologie faible étoile **32**
3.1 Topologie la moins fine rendant une famille d'applications continues (topologie initiale) . . . 32
3.2 Topologie faible . . . 36
3.3 Topologie faible étoile . . . 42
3.4 Compacité faible dans les espaces réflexifs . . . 48
3.5 Séparabilité et réflexivité . . . 53

4 Uniforme convexité, Espaces L^p, espaces de Hilbert **60**
4.1 Espaces uniformément convexes . . . 60
4.2 Espaces L^p . . . 65
4.3 Espaces de Hilbert . . . 69
4.3.1 Espaces préhilbertiens . . . 69
4.3.2 Espaces de Hilbert et théorème de projection sur un convexe fermé . . . 72
4.3.3 Bases hilbertiennes . . . 78
4.4 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints et compacts sur un espace de Hilbert . . . 83

5 Distributions : définitions et exemples **91**
5.1 Fonctions tests . . . 91
5.2 Régularisation par convolution, troncature et fonctions plateaux . . . 93
5.3 Distribution : définition et caractérisation . . . 99
5.4 Notions de convergence pour les fonctions tests et pour les distributions . . . 103

6 Topologie des fonctions tests **107**
6.1 Topologie associée à une famille de semi-normes sur un espace vectoriel 107
6.2 Topologie des fonctions tests 111

7 Dérivation et opérations sur les distributions **116**
7.1 Dérivation d'une distribution 117
7.2 Multiplication par une fonction lisse et restriction 119
7.3 Support d'une distribution 120
7.4 Partitions de l'unité et principe de recollement 120
7.5 Exercices 120

8 Ordre d'une distribution **121**
8.1 Notion d'ordre pour une distribution 121
8.2 Prolongement des distributions d'ordre k 123
8.3 Distributions à support compact 123
8.4 Distributions positives, distributions d'ordre 0, théorème de représentation de Riesz 123

9 Distributions et espaces de Sobolev en dimension 1 **124**

Bibliographie

Ces notes de cours sont construites à partir des ouvrages et polycopiés de cours suivants : [Bre11 ; Cla13 ; Dan09 ; Fat26 ; Hul22 ; Hul25 ; Non20 ; Rud91]
De nombreux exercices et leurs corrections proviennent des quelques années joyeusement passées à donner les TDs du cours de *Distributions* avec Thomas Letendre !
J'en profite pour remercier Sebastian Bechtel et Frédéric Valet pour leurs relectures passées et à venir.

[Bre11] Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. New York : Springer, 2011.

[Cla13] Francis Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. T. 264. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2013.

[Dan09] Raphaël Danchin. *Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle. Master première année*. 2009.

[Fat26] Max Fathi. *Analyse fonctionnelle. Notes de cours*. LJLL & LPSM, Université Paris Cité. 2026.

[Hul22] Dominique Hulin. *Donjons et Dragons : Fractales, pour une introduction à l'Analyse Fonctionnelle. Polycopié du cours Mag357, Magistère L3*. Université Paris-Saclay. 2022.

[Hul25] Dominique Hulin. *Théorie des distributions, analyse de Fourier et un peu d'analyse fonctionnelle. Polycopié, Master 1 de mathématiques*. Université Paris-Saclay. 2025.

[Non20] Stéphane Nonnenmacher. *Distributions and Partial Differential Equations. Notes de cours, chapitres 1 à 3*. D'après des notes de T. Ramond et P. Gérard. Université Paris-Saclay. 2020.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. 2e éd. International Series in Pure and Applied Mathematics. New York : McGraw-Hill, 1991. ISBN : 0-07-054236-8.

CHAPITRE 1

Théorème de Baire et application aux espaces de Banach

Sauf mention explicite, on considère implicitement des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on utilisera la notation $\mathbb{K}$ pour éviter de répéter "$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$".

Commençons par passer en revue des exemples d'espaces de Banach familiers :

- Tout $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)–espace vectoriel de dimension finie muni de votre norme préférée.
- Soit (X, d) un espace métrique et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, alors $E = \mathrm{C}_b^0(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans F, muni de la norme sup :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_F$$
est un espace de Banach.
- Soit E un e.v.n. et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach. En particulier, le dual topologique de E, l'ensemble des formes linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach, même si E lui-même n'est pas un espace de Banach.
- *Espaces de Lebesgue :* soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $\mathrm{L}^p(X, \mu; \mathbb{C})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$.
- Pour une suite $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, et pour $1 \leq p < +\infty$, on note
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$
L'ensemble $\mathrm{L}^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ de toutes les suites x telles que $\|x\|_p < +\infty$, le plus souvent noté $\ell^p(\mathbb{K})$ ou ℓ^p, est un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|_p$. L'espace de toutes les suites bornées est noté ℓ^∞ et est muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$. Ces espaces sont complets.

1.1 Théorème de Baire

Théorème 1.1 (Théorème de Baire)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable*[1] *d'ouverts denses dans X. Alors*
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$
est dense dans X.

1. Pour le dire clairement, le cas d'une famille dénombrable inclut ici le cas d'une famille finie, en prenant U_n constant à partir d'un certain rang.

Remarque 1.2. Pour la culture, le théorème de Baire reste valable si (X, d) est remplacé par un espace topologique compact (non nécessairement métrisable).

Corollaire 1.3 (Version "fermés" équivalente au théorème de Baire)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés de X d'intérieur vide. Alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

est d'intérieur vide dans X.

Exercice 1.1 (Inspection des hypothèses du Théorème de Baire)**.** Il faudra donc bien penser à les vérifier sans exception quand on appliquera le théorème de Baire ...

1. Donner un exemple d'espace métrique X (qui n'est pas complet) qui peut s'écrire comme réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. Qu'en pensez-vous ?
2. Écrire $\mathbb{R}$ comme réunion d'ensembles (pas fermés) d'intérieur vide.
3. Écrire $\mathbb{R}$ comme réunion non dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Preuve de l'équivalence entre les deux versions. Il suffit de passer au complémentaire et se rappeler que :

- un ensemble est un fermé d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est un ouvert dense,
- pour une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ de X, on a

$$\bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \,.$$

□

Preuve du théorème de Baire. Soit V un ouvert de X, on doit montrer que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.

On va s'appuyer sur le fait suivant : si W, U sont des ouverts (non vides) de X et si de plus U est dense dans X, alors il existe $r > 0$, $x \in X$ tels que

$$\overline{B(x, r)} \subset W \cap U \,. \tag{1.1}$$

Par densité de U dans X et comme W est ouvert, on sait qu'il existe $x \in W \cap U$. Comme $W \cap U$ est ouvert, il existe $s > 0$ tel que $B(x, s) \subset W \cap U$. En prenant $r = \frac{s}{2}$, on a bien

$$\overline{B(x, r)} \subset \{y \in X \ : \ d(y, x) \leq \tfrac{s}{2}\} \subset B(x, s) \subset W \cap U \,.$$

Attention, la première inclusion est une égalité par exemple dans le cadre où (X, d) est induit par un espace vectoriel normé, mais dans le cadre d'un espace métrique, on a seulement l'inclusion en général.

On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe une suite décroissante d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $V_n = B(x_n, r_n)$ ($x_n \in X$, $r_n > 0$) satisfaisant

$$\overline{V_n} \subset V \cap U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n \quad \text{et} \quad r_n \leq 2^{-n} \,. \tag{P_n}$$

• $n = 0$: on applique (1.1) avec $W = V$ et $U = U_0$ de sorte qu'il existe $V_0 = B(x_0, r_0)$ tel que $\overline{V_0} \subset V \cap U_0$ et $r_0 \leq 1$ (quitte à prendre plutôt $\min(r_0, 1)$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'on a construit, $V_n = B(x_n, r_n)$ satisfaisant (P_n). On peut alors appliquer (1.1) avec $W = V_n$ et $U = U_{n+1}$ de sorte qu'on peut définir $V_{n+1} = B(x_{n+1}, r_{n+1})$ satisfaisant

$$\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap U_{n+1} \underset{(HR)}{\subset} V \cap U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap U_{n+1} \,.$$

On peut supposer $r_{n+1} \leq 2^{-(n+1)}$ quitte à prendre plutôt $\min(r_{n+1}, 2^{-(n+1)})$. On a bien établie $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$. On a de plus $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n$.
• On a construit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n), et de plus $V_{n+1} \subset V_n$ de sorte que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Vérifions à présent que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ satisfaisant $p, q \geq N$. On a alors $V_p, V_q \subset V_N$ de sorte que

$$d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam}(V_N) \leq 2r_N = 2^{-N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,.$$

Comme (X, d) est supposé complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq n$, $x_k \in V_n$ et donc $x \in \overline{V_n}$, ce qui est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque donc

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (V \cap U_0 \cap \ldots \cap U_n) = V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset\,.$$

□

Donnons quelques applications du théorème de Baire (Baireries) dont certaines seront traitées en exercice :

Exercice 1.2. On va montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$.

1. Vérifier qu'il n'existe pas de famille dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit

$$\omega(f, x) = \inf_{\delta>0} \sup_{u,v\in B(x,\delta)} |f(u) - f(v)|\,.$$

   Vérifier que f est continue au point x si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble C_f des points de continuité de f peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts et conclure.
4. *(facultatif)*– Pourquoi a-t-on caractérisé la continuité de f au point $x \in \mathbb{R}$ par $\omega(f, x) = 0$ et, par exemple, pas par $\inf_{\delta>0} \sup_{u\in B(x,\delta)} |f(u) - f(x)| = 0$?

Exercice 1.3 (Banach–Mazurkiewicz)**.** L'ensemble E des fonctions $f \in \mathrm{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ admettant une dérivée à droite finie en au moins un point de $[0, 1)$ est d'intérieur vide dans $\mathrm{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.
Si vous aviez déjà entendu dire que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables était dense dans $\mathrm{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$...

Exercice 1.4 (Une application aux espaces de Banach)**.**

1. Soit E un espace de Banach de dimension infinie, montrer que E n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. Attention, on ne parle pas ici de base hilbertienne.
2. $\mathbb{R}[X]$ peut-il être muni d'une structure d'espace de Banach ?

1.2 Théorème de Banach–Steinhaus

Théorème 1.4 (Banach–Steinhaus (ou borne uniforme))**.** *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et une famille $(L_i)_{i\in I}$ d'applications linéaires continues $L_i : E \to F$. Alors :*

$$\left(\forall x \in E,\ \sup_{i\in I} \|L_i(x)\|_F < \infty\right) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{i\in I} \|L_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty\,.$$

On dit parfois que si la famille $(L_i)_i$ est ponctuellement bornée, alors elle est uniformément bornée au sens où pour toute partie bornée $B \subset E$, on a $\sup_{x\in B} \sup_{i\in I} \|L_i(x)\| < \infty$.
Avant de passer à la preuve du théorème, donnons deux corollaires, qu'on utilisera plus souvent que le théorème de Banach–Steinhaus lui-même.

Corollaire 1.5 (Une limite d'applications linéaires continues est continue)**.** *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues $L_k : E \to F$. On suppose que pour tout $x \in E$, la limite*

$$L(x) := \lim_{k\to\infty} L_k(x)$$

existe dans F. Alors l'application linéaire L ainsi définie est automatiquement continue.

On sait que la linéarité passe à la limite simple, mais pas la continuité en général ! Le corollaire 1.5 nous dit que c'est la cas pour une suite d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach.

Corollaire 1.6 (Une application bilinéaire séparément continue est continue)**.** *Soient E, F deux espaces espaces vectoriels normés et on suppose qu'au moins l'un des deux est complet et soit G un espace vectoriel normé. Soit b une application bilinéaire de $b : E \times F \to G$. On suppose que*

- *pour tout $y \in F$, $b(\cdot, y) : E \to G$ est continue,*
- *pour tout $x \in E$, $b(x, \cdot) : F \to G$ est continue,*

alors b est continue.

Preuve du corollaire 1.5. Comme on l'a déjà dit, la limite simple préserve la linéarité, il suffit de l'écrire : soient x, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$L(x+\lambda y) = \lim_{k\to\infty} L_k(x+\lambda y) \underset{\text{(linéarité de } L_k)}{=} \lim_{k\to\infty} (L_k(x) + \lambda L_k(y)) = L(x) + \lambda L(y)\,.$$

Appliquons à présent le théorème de Banach–Steinhaus à la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On a bien une famille d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach. De plus, si on se donne $x \in E$, la suite $(L_k(x))_k$ converge dans F, elle est en particulier bornée : $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k(x)\|_F < \infty$, on en déduit que $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$. Par conséquent, pour tout $x \in E$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\|L_k(x)\|_F \le \|L_k\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \le M \|x\|_E \quad \Longrightarrow \quad \|L(x)\|_F \le M \|x\|_E\ ,$$

et L est bien continue, avec de plus $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le M$. □

Preuve du corollaire 1.6. • On commence par se ramener à la continuité de b en $(0,0)$. Supposons en effet que b soit continue en $(0,0)$, on a alors par bilinéarité : pour tout (x_0, y_0), $(x, y) \in E \times F$,

$$b(x,y) - b(x_0,y_0) = b(x-x_0, y-y_0) + b(x_0, y-y_0) + b(x-x_0, y_0)\,.$$

Lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dans $E \times F$, on a

- par continuité de b en $(0,0)$: $b(x-x_0, y-y_0) \to b(0,0) = 0$,
- par continuité des applications partielles, $b(x_0, y-y_0)+b(x-x_0, y_0) \to b(x_0,0)+b(0,y_0) = 0$,

de sorte que b est alors continue en tout point de $E \times F$.
• Montrons à présent que b est continue en $(0,0)$. Soit à présent $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E \times F$ qui converge vers $(0,0)$. On introduit pour $k \in \mathbb{N}$,

$$L_k = b(\cdot, y_k) : E \to G\,.$$

Supposons que E est un espace de Banach. Par hypothèse, $(L_k)_k$ est une suite d'applications linéaires continues définies sur l'espace de Banach E. Soit $x \in E$ fixé, toujours par hypothèse mais cette fois par continuité de $b(x, \cdot)$, on a $L_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} b(x,0)$ dans G donc $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k(x)\|_G < \infty$.

D'après le théorème de Banach–Steinhaus, on en déduit que $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_{\mathcal{L}(E,G)} < \infty$. On a finalement

$$\|b(x_k, y_k)\|_G = \|L_k(x_k)\|_G \leq M \|x_k\|_E \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

et b est bien continue en $(0,0)$.
Si c'est F qui est un espace de Banach, on effectue le même argument en considérant pour $k \in \mathbb{N}$, $T_k = b(x_k, \cdot) : F \to G$. □

Passons à présent à la preuve du Théorème de Banach-Steinhaus.

Preuve du théorème 1.4. Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F satisfaisant les hypothèses du théorème. Introduisons pour $n \in \mathbb{N}$, les ensembles

$$A_n = \left\{ x \in E \,:\, \sup_{i\in I} \|L_i(x)\|_F \leq n \right\} .$$

Les ensembles A_n sont fermés puisque pour tout $i \in I$, $f_i : x \in E \mapsto \|L_i(x)\|_F$ est continue, de sorte que $A_{n,i} = \{x \in E \,:\, f_i(x) \leq n\} = f_i^{-1}([0,n])$ est fermé et par définition

$$A_n = \{x \in E \,:\, \forall i \in I,\ f_i(x) \leq n\} = \bigcap_{i\in I} A_{n,i} .$$

Par hypothèse, on a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et E n'étant pas d'intérieur vide dans lui-même, on en déduit grâce au théorème de Baire qu'au moins l'un des A_n n'est pas d'intérieur vide.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n n'est pas d'intérieur vide et $x_0 \in E$, $r > 0$ tels que $B_E(x_0, r) \subset A_n$ et soit $i \in I$. Pour tout $h \in B_E(0,r)$, on a alors par linéarité et inégalité triangulaire :

$$\|L_i(h)\|_F \leq \|L_i(x_0 + h)\|_F + \|L_i(x_0)\|_F \leq 2n .$$

Soit maintenant $y \in E$, de norme $\|y\| = 1$ et que l'on écrit $y = th$ avec $h \in B_E(0,r)$ et $|t| = \frac{2}{r}$. On a alors

$$\|L_i(y)\|_F = |t| \, \|L_i(h)\|_F \leq \frac{4n}{r}$$

et on vient de montrer que pour tout $i \in I$, $\|L_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{4n}{r}$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Donnons un exemple illustrant l'importance de l'hypothèse de complétude dans le théorème de Banach–Steinhaus.

Exercice 1.5 (Hypothèse de complétude dans le théorème de Banach–Steinhaus)**.** On considère l'espace $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$L_n : f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right) .$$

Vérifier que $L_n : (\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue et que la suite $(L_n)_n$ converge simplement vers une forme linéaire L à identifier. La limite L est-elle continue ?

Donnons un exemple d'application du théorème de Banach–Steinhaus aux séries de Fourier.

Exercice 1.6 (Divergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction continue)**.** On va montrer qu'il existe une fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique dont la série de Fourier diverge au point 0. On note E l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π–périodiques muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on définit pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} .$$

1. On introduit le noyau de Dirichlet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(f)(x) = D_n * f(x) \quad \text{au sens où} \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t\,.$$
2. Pour $\in \mathbb{N}$, on définit $L_n : E \to \mathbb{C}$, $f \mapsto S_n(f)(0)$. Vérifier que L_n est une forme linéaire continue et montrer que $\|L_n\|_{E^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $\|L_n\|_{E^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On pourra utiliser $\sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$ pour $t \in [0,\pi]$ et utiliser une comparaison avec une série.
4. Conclure.

1.3 Théorème de l'application ouverte

Commençons par définir ce qu'est une application "ouverte" entre espaces topologiques.

Définition 1.7 (Application ouverte)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$. On dit que f est une *application ouverte* si elle envoie les ouverts de X sur des ouverts de Y : pour tout U ouvert de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.

Donnons quelques exemples d'applications ouvertes.

Exemple 1.8 (Homéomorphisme)**.** Un homéomorphisme est une application ouverte grâce à la continuité de l'inverse.

Exemple 1.9 (Difféomorphisme local)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 dont la différentielle $Df(x)$ est inversible en tout point $x \in \Omega$ alors f est une application ouverte. C'est une conséquence du théorème d'inversion locale qui nous dit que sous ces hypothèses, f réalise un difféomorphisme local au voisinage de chacun de ses points : pour tout $x \in \Omega$, il existe U_x, V_x ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $f_{|U_x} : U_x \to V_x$ est un difféomorphisme ; en particulier un homéomorphisme et donc une application ouverte. Soit maintenant $W \subset \Omega$ un ouvert,
$$f(W) = f\left(\bigcup_{x\in W} U_x \cap W\right) = \bigcup_{x\in W} f_{|U_x}(U_x \cap W)$$
qui est bien un ouvert puisqu'on vient de voir que $f_{|U_x}$ est ouverte.

Exemple 1.10 (Projections canoniques d'un produit)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques, les projections canoniques
$$\begin{array}{rccc} \pi_X & : & X\times Y & \to & X \\ & & (x,y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \pi_Y & : & X\times Y & \to & Y \\ & & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$
sont des applications (continues) ouvertes. C'est une conséquence de la définition de la topologie produit. Tout ouvert U de $X \times Y$ est de la forme $\cup_{i\in I} V_i \times W_i$ où les $(V_i)_{i\in I}$ sont des ouverts de X et les $(W_i)_{i\in I}$ sont des ouverts de Y. L'image d'une union d'ensembles est l'union des images, ainsi
$$\pi_X(U) = \bigcup_{i\in I} \pi_X(V_i \times W_i) = \bigcup_{i\in I} V_i$$
est un ouvert de X.
C'est encore vrai si on considère le produit d'une famille quelconque $(X_j)_{j\in J}$ d'espaces topologiques.

Exemple 1.11 (Projecteur linéaire sur son image)**.** Soit E un espace vectoriel normé et $p : E \to E$ un projecteur linéaire continu (c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$ avec $p^2 = p$). Alors p, vue comme application de E dans $\mathrm{Im}(p)$ (muni de la norme induite), est une application ouverte.

Énonçons à présent un lemme qui nous sera utile pour prouver le théorème de l'application ouverte (théorème 1.13), et nous éclaire sur l'hypothèse de surjectivité présente dans ce théorème. Notons que le lemme suivant est un résultat essentiellement algébrique exploitant uniquement la linéarité de l'application L.

Lemme 1.12. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $L : E \to F$ une application linéaire. Alors,*

(i) L est une application ouverte si et seulement si $L(B_E(0,1))$ contient un voisinage de 0.

(ii) si L est une application ouverte alors elle est nécessairement surjective.

Preuve. *(i)* ($\Rightarrow$) (C'est le sens facile.) Supposons L ouverte. Comme $B_E(0,1)$ est un ouvert de E, $L(B_E(0,1))$ est un ouvert de F. De plus $0 = L(0) \in L(B_E(0,1))$ qui est donc bien un voisinage de 0.

($\Leftarrow$) Supposons que $L(B_E(0,1))$ contienne un voisinage de 0 dans F, et donc une petite boule $B_F(0,\varepsilon) \subset L(B_E(0,1))$. Soit U un ouvert de E, on veut montrer que $L(U)$ est ouvert en montrant qu'il est voisinage de chacun de ses points. Soit $y \in L(U)$ et $x \in U$ tel que $y = L(x)$, comme U est ouvert, il existe une boule $B_E(x,r) \subset U$ et donc $L(B_E(x,r)) \subset L(U)$.

Le point clé est maintenant d'observer que par linéarité,

$$L(B_E(x,r)) = L(x + rB_E(0,1)) = \underbrace{L(x)}_{=y} + rL(B_E(0,1))$$

et en utilisant l'hypothèse, $rL(B_E(0,1)) \supset B_F(0,r\varepsilon)$. On en déduit que $L(U)$ contient la boule $B_F(y,r\varepsilon)$ et est bien voisinage de y. On conclut que $L(U)$ est ouvert dans F et finalement L est une application ouverte.

(ii) Supposons L ouverte. D'après *(i)*, $L(B_E(0,1))$ contient une boule $B_F(0,\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On a alors $L(E) = L(\mathrm{vect}\, B_E(0,1)) = \mathrm{vect}\, L(B_E(0,1))$ contient $\mathrm{vect}\, B_F(0,\varepsilon) = F$ et donc $L(E) = F$. On peut aussi l'écrire avec un peu plus de détails : soit $y \in F$ quelconque et écrivons $y = tu$ avec $u \in B_F(0,\varepsilon)$ et $t \geq 0$ (en prenant par exemple $u = \frac{\varepsilon}{2}\frac{y}{\|y\|_F}$ si $y \neq 0$ et $u = 0$ si $y = 0$). Il existe alors $x \in B_E(0,1)$ tel que $u = L(x)$ et donc $y = tL(x) = L(tx) \in L(E)$. On vient de vérifier que L est surjective.

□

La réciproque de cette dernière assertion est vraie si on suppose en plus que L est continue et E, F sont des espaces de Banach, c'est l'objet du théorème de l'application ouverte :

Théorème 1.13 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et $L : E \to F$ une application linéaire continue. Alors,*

$$L \text{ surjective} \quad \Longrightarrow \quad L \text{ ouverte.}$$

Avant de passer à la preuve, on donne un corollaire qui se démontre simplement à partir du théorème de l'application ouverte mais dont l'énoncé est assez parlant ! La réciproque d'une application continue et bijective entre deux espaces topologiques n'est pas nécessairement continue (on le saurait depuis le temps, non ? ! et sinon on peut penser à $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto \exp(it)$...)

Corollaire 1.14 (Théorème de l'isomorphisme de Banach)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et $L : E \to F$ une application linéaire bijective (un isomorphisme d'espaces vectoriels) qui est de plus continue, alors L^{-1} est automatiquement continue (et est ainsi également un isomorphisme au sens topologique).*

Preuve du théorème de l'isomorphisme de Banach. L'application L est en particulier une application linéaire continue et surjective entre espaces de Banach, d'après le théorème de l'application ouverte, L est ouverte. On en déduit que pour tout ouvert U de E, $(L^{-1})^{-1}(U) = L(U)$ est un ouvert de F de sorte que L^{-1} est bien continue. □

Preuve du théorème de l'application ouverte. Grâce au Lemme 1.12, il suffit de montrer que l'ensemble $L(B_E(0,1))$ contient un voisinage de 0.
• *Étape* 1 *(Baire).* On commence par montrer que pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, $\overline{L(B_E(0,N))}$ contient un voisinage de 0. Par surjectivité de L, on peut écrire :

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(B_E(0,n)) \quad \text{et a fortiori} \quad F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{L(B_E(0,n))}\,.$$

On rappelle que F est un espace de Banach (qui n'est pas d'intérieur vide dans lui-même), et d'après le théorème de Baire, l'un des fermés $\overline{L(B_E(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$, est d'intérieur non vide : il existe $N \in \mathbb{N}$, $y \in F$, $r > 0$ tels que $B_F(y,r) \subset \overline{L(B_E(0,N))}$.
• *Étape* 2 *(Linéarité).* On montre que $B_F(0,r) \subset \overline{L(B_E(0,N))}$ puis pour tout $\alpha > 0$,

$$B_F\left(0,\alpha r\right) \subset \overline{L(B_E(0,\alpha N))}\,.$$

Pour cela on utilise le fait que $L(B_E(0,N))$ est convexe et symétrique par rapport à 0 comme image par l'application linéaire L de $B_E(0,N)$ elle-même convexe et symétrique par rapport à 0 ; on peut vérifier que c'est encore vrai concernant $\overline{L(B_E(0,N))}$. Vérifions par exemple la convexité : soit x, $y \in \overline{L(B_E(0,N))}$ et $t \in [0,1]$, il existe alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites d'éléments de $B_E(0,N)$ telles que

$$x = \lim_{n\to\infty} L(u_n) \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\to\infty} L(v_n)$$

et on a alors

$$(1-t)x + ty = \lim_{n\to\infty} (1-t)L(u_n) + tL(v_n) = \lim_{n\to\infty} L((1-t)u_n + tv_n) \in \overline{L(B_E(0,N))}$$

car $(1-t)u_n + tv_n) \in B_E(0,N)$ par convexité de la boule. On en déduit alors que $B_F(-y,r) \subset \overline{L(B_E(0,N))}$ (symétrie par rapport à 0) puis $B_F(0,r) \subset \overline{L(B_E(0,N))}$ (convexité), n'hésitez pas à l'écrire précisément.
On en déduit à nouveau par linéarité (homogénéité) que $B_F\left(0,\alpha r\right) \subset \overline{L(B_E(0,\alpha N))}$. En effet, soit $x \in B_F\left(0,\alpha r\right)$, $\frac{1}{\alpha}x \in B_F(0,r)$ et donc $\frac{1}{\alpha}x = \lim_{n\to\infty} L(u_n)$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $B_E(0,N)$, il suit par linéarité que $x = \lim_{n\to\infty} L\left(\alpha u_n\right) \in \overline{L(B_E(0,\alpha N))}$ puisque $\left(\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite dans $B_E(0,\alpha N)$.
• *Étape* 3. On veut à présent "se débarasser de l'adhérence" pour pouvoir conclure en utilisant le lemme 1.12. Soit $r_0 = \frac{r}{2N}$ (on prend $\alpha = \frac{1}{2N}$ pour se donner un peu de marge) de sorte qu'on a par l'étape précédente :

$$B_F(0,r_0) \subset \overline{L\left(B_E\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)}\,,$$

et on va montrer que $B_F(0,r_0) \subset L\left(B_E\left(0,1\right)\right)$.
Soit $y \in B_F(0,r_0)$.
Par l'inclusion précédente, il existe $x_1 \in B_E\left(0,\frac{1}{2}\right)$ tel que $\|y - L(x_1)\|_F < 2^{-1}r_0$ et on note $y_1 = L(x_1)$. Par définition $y - y_1 \in B_F(0,2^{-1}r_0)$ qui est incluse dans $\overline{L(B_E(0,2^{-2}))}$ (d'après l'étape 2 avec le bon $\alpha > 0$) et il existe donc $x_2 \in B_E(0,2^{-2})$ tel que $\|(y-y_1) - L(x_2)\|_F < 2^{-2}r_0$. On pose $y_2 = L(x_2)$ et on a $y - y_1 - y_2 \in B_F(0,2^{-2}r_0)$. On itère le procédé afin de construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in E$, $y_n = L(x_n) \in F$,

$$\|x_n\|_E < 2^{-n} \quad \text{et} \quad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_F < 2^{-n}r_0\,.$$

La série $\Sigma\|x_k\|_E$ est convergente ("convergence absolue de la série Σx_k") et $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach : la série Σx_k converge alors dans E, notons x sa limite. On a déjà pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| y - L\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\|_F = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_F < 2^{-n} r_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et par continuité de L,

$$y = \lim_{n\to\infty} L\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = L(x)\,.$$

Il reste à vérifier que $\|x\|_E < 1$, ce qui vient par l'inégalité triangulaire :

$$\|x\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1\,.$$

□

Dans la preuve précédente, on a utilisé la complétude de F pour appliquer le théorème de Baire et la complétude de E pour obtenir la convergence de la série à partir de sa convergence absolue.

Exercice 1.7 (Inspection des hypothèses du théorème de l'application ouverte)**.**

1. Trouver une application linéaire continue $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
2. Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
3. On note E l'ensemble des suites "presque nulles", i.e. nulles à partir d'un certain rang, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que l'on munit de $\|\cdot\|_\infty$. Cela définit-il un espace de Banach ?
4. Trouver une application $T : E \to E$ linéaire continue et bijective, dont l'inverse T^{-1} n'est pas continu.

Exercice 1.8 (homéomorphisme, isomorphisme et complétude)**.**

1. Soient X et Y deux espaces métriques homéomorphes. Si X est complet, l'espace Y est-il toujours complet ?
2. Soit $L : E \to F$ un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective continue d'inverse continu) entre deux espaces vectoriels normés. Si E est un espace de Banach, F est-il également complet ?

Exercice 1.9 (Normes équivalentes, exercice 5.27 in [Cla13])**.** Soit E un espace de Banach par rapport à deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$.

1. Montrer que les normes sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_2 \leq d\,\|x\|_1$.
2. Donner un exemple d'espace E muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ satisfaisant :
   - $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach,
   - il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$.
   - les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

   Indication : on pourra par exemple considérer $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1.4 Théorème du graphe fermé

Comme on va l'expliquer, le théorème du graphe fermé peut s'avérer très pratique pour montrer la continuité d'une application linéaire entre deux espaces de Banach. Commençons par rappeler ce qu'on appelle le graphe $\Gamma(f)$ d'une fonction $f : X \to Y$:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\} \subset X \times Y \, .$$

Lemme 1.15. *Soient X, Y deux espaces topologiques et on suppose de plus que Y est séparé. Soit $f : X \to Y$ une application continue, alors le graphe $\Gamma(f)$ est fermé dans $X \times Y$.*

Preuve du lemme 1.15. On va montrer que le complémentaire $X \times Y \setminus \Gamma(f)$ est ouvert. Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y \setminus \Gamma(f)$ i.e. $y_0 \neq f(x_0)$ et vérifions que $X \times Y \setminus \Gamma(f)$ contient un voisinage de ce point (x_0, y_0). Comme $y_0 \neq f(x_0)$ et Y est séparé, il existe deux ouverts disjoints V, $W \subset Y$ tels que $f(x_0) \in V$ et $y_0 \in W$. Par continuité de f, $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant x_0 et donc $U \times W$ est un ouvert contenant (x_0, y_0). Il reste à vérifier que $U \times W \subset X \times Y \setminus \Gamma(f)$: soit $(x, y) \in U \times W$, on sait que $f(x) \in V$, $y \in W$ et $V \cap W = \emptyset$ de sorte que $y \neq f(x)$ ou encore $(x, y) \notin \Gamma(f)$. □

Exercice 1.10.

1. Donner une preuve dans le cas où X et Y sont des espaces métriques en utilisant la caractérisation séquentielle de la fermeture.
2. Donner une preuve dans le cas où Y est un espace vectoriel topologique (c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continue l'addition et la multiplication par un scalaire) séparé.

La réciproque du lemme 1.15 est en général fausse, il existe des fonctions dont le graphe est fermé et qui ne sont pas pour autant continues. On peut par exemple considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On a alors que f n'est pas continue en 0 et pourtant son graphe est fermé dans $\mathbb{R}^2$ (union de fermés $\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}$). On va voir que dans le cadre d'une application linéaire entre deux espaces de Banach, la réciproque est vraie et le résultat est connu sous le nom de théorème du graphe fermé que nous énonçons maintenant.

Théorème 1.16 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $L : E \to F$ une application linéaire. On a alors l'équivalence :*

L est continue si et seulement si son graphe est fermé.

Avant de passer à sa preuve, intéressons-nous à l'intérêt potentiel du théorème du graphe fermé. Comme on l'a déjà dit, le sens direct est général et ce qui est particulier au cadre Banach est la réciproque : cela permet de montrer la continuité d'applications linéaires (intéressant en dimension infinie donc). Plus précisément, en utilisant la caractérisation séquentielle de la fermeture, on obtient le critère : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E satisfaisant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans E **et** $L(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ dans F, on doit vérifier que $y = L(x)$. Si on compare au critère séquentiel de continuité, on a une étape en moins : on n'a pas besoin de montrer que $(L(x_n))_n$ converge dans F, c'est une hypothèse quand on utilise le théorème du graphe fermé.

Preuve du théorème du graphe fermé. Comme on l'a déjà dit, le sens direct est plus général et a déjà été prouvé (lemme 1.15). On suppose donc que le graphe de $\Gamma(L)$ est fermé dans $E \times F$ qui est un espace de Banach quand on considère par exemple $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$ (ou toute norme "p" pour $1 \leq p \leq \infty$), donc $\Gamma(L)$ est complet et c'est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ (on a $\Gamma(L) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}, L)$) donc c'est un espace de Banach pour $\| \cdot \|_{E\times F}$.
La projection canonique sur le premier facteur de $E \times F$, $\pi_E : E \times F \to E$, $(x, y) \mapsto x$ se restreint à $\Gamma(L)$ en une application $p : \Gamma(L) \to E$ linéaire continue bijective de réciproque $p^{-1} = (\mathrm{id}, L)$.

D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach, p^{-1} est continue : il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|(x, L(x))\|_{E\times F} \leq C\|x\|_E$. Comme $\|L(x)\|_F \leq \|(x, L(x))\|_{E\times F}$, on a bien montré la continuité de L. □

Donnons pour conclure le chapitre quelques exemples d'application du théorème du graphe fermé.

Exercice 1.11. Soit T un endomorphisme sur $\mathrm{L}^2([0,1])$. On suppose que T est continu de $(\mathrm{L}^2([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $(\mathrm{L}^2([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^1})$. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que T est aussi continu de $(\mathrm{L}^2([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $(\mathrm{L}^2([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$.

Exercice 1.12 (Théorème de Hellinger–Toeplitz, continuité des endomorphismes hermitiens)**.** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $T : H \to H$ un endomorphisme *hermitien*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle. \tag{1.2}$$

Alors T est continu.

CHAPITRE 2

Théorèmes de Hahn–Banach

2.1 Dual d'un espace vectoriel normé, bidual

Soit E un espace vectoriel normé. On notera $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. On rappelle qu'on peut munir E de la norme d'opérateur (ou norme duale) $\|\cdot\|_{E^*}$: pour $L \in E^*$,

$$\|L\|_{E^*} = \sup_{x \in E,\, \|x\|_E \leq 1} |L(x)| \ .$$

On a alors que $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ est un espace de Banach (même si E ne l'est pas). à la proposition 3.10 On (re-)verra qu'on sait identifier le dual dans le cas de certains espaces de Banach, citons par exemple :

- Le dual d'un *espace de Hilbert* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'identifie à H lui-même grâce au théorème de Riesz, à travers
$$\begin{array}{ccc} H & \to & H^* \\ x & \mapsto & < x, \cdot > \end{array} \ .$$
- Soit (X, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$, le dual de $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ s'identifie à $\mathrm{L}^{p'}(X, \mu)$ (où $1 < p' \leq \infty$ est l'exposant conjugué de p satisfaisant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$) à travers
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^{p'}(X, \mu) & \to & (\mathrm{L}^p(X, \mu))^* \\ f & \mapsto & \left(g \in \mathrm{L}^p \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu\right) \end{array} \ .$$

On peut alors considérer le *bidual* de E, c'est-à-dire le dual de $(E, \|\cdot\|_{E^*})$ et on utilisera la notation $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$. Notons qu'il existe une injection J d'un espace vectoriel normé E dans son bidual E^{**} définie comme suit. On peut associer à $x \in E$, la forme linéaire continue d'évaluation $\Phi_x : E^* \to \mathbb{K}$, $L \mapsto L(x)$ et ainsi définir

$$\begin{array}{ccccc} J & : & E & \to & E^{**} \\ & & x & \mapsto & \Phi_x \end{array} \ .$$

L'application J est bien définie, linéaire et continue. En effet, pour $L \in E^*$, on a

$$|\Phi_x(L)| = |L(x)| \leq \|L\|_{E^*} \|x\|_E \ ,$$

de sorte que $\Phi_x \in E^{**}$ et J est bien définie, on laisse le soin aux lecteurs et lectrices de vérifier la linéarité de J. On vient également de voir que

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \|\Phi_x\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E$$

de sorte que J est continue et $\|J\|_{\mathcal{L}(E,E^{**})} \leq 1$.
On va voir que c'est même une isométrie : pour tout $x \in E$, $\|J(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E$, ce sera une conséquence du théorème de Hahn-Banach (corollaire 2.8). En particulier J est injective, elle n'est pas surjective en général, lorsque ce sera le cas, on dira que E est réflexif.

Définition 2.1 (Espace réflexif)**.** Soit E un espace de Banach. On dit que E est *réflexif* si l'application J est surjective.

Par définition, si E est réflexif, alors $J : E \to E^{**}$ est un isomorphisme continu, et de plus, J^{-1} est continue car c'est une isométrie (car J est une isométrie bijective).
On a alors $E \simeq E^{**}$ (au sens d'un isomorphisme entre espaces vectoriels normés). Attention, un espace est réflexif si J est l'isomorphisme d'espaces vectoriels normés en question : on peut avoir $E \simeq E^{**}$ et J non surjective...

Remarque 2.2. On pourrait écrire la définition de réflexivité pour E un espace vectoriel normé. Cependant, puisque E^{**} est un espace de Banach, on en déduit via l'isomorphisme isométrique J que E est également un espace de Banach.

2.2 Théorème de Hahn–Banach : forme analytique

Le théorème de Hahn–Banach que l'on va énoncer est un théorème de prolongement d'applications linéaires définies sur un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$–espace vectoriel. Il n'est pas question ici de complétude, ni même de topologie comme on peut l'observer dans l'énoncé, ce sera sans doute encore plus clair au cours de la preuve.

Théorème 2.3 (Hahn–Banach, forme analytique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application* sous-additive et positivement homogène *(une* jauge*), c'est-à-dire : pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\lambda x) = \lambda\, p(x)\,.$$

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et $L : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $L(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{L} : E \to \mathbb{R}$ prolongeant L (i.e. $\widetilde{L}_{|_F} = L$) et telle que $\widetilde{L}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

On remarque ici qu'on considère des espaces vectoriels *réels*, et donc des formes linéaires *réelles*. Il est possible d'énoncer une version "complexe" du théorème de Hahn–Banach en se restreignant à considérer les jauges p qui sont des semi-normes.

Corollaire 2.4 (Hahn–Banach, cas complexe)**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme i.e. pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\,.$$

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $L : F \to \mathbb{C}$ une forme linéaire satisfaisant $|L(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Il existe alors une forme linéaire $\widetilde{L} : E \to \mathbb{C}$ qui prolonge L et satisfait $|\widetilde{L}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Preuve du corollaire 2.4. Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On va se ramener au cas réel, pour cela, on considère E et F comme des $\mathbb{R}$–espaces vectoriels. Si L est une application additive sur F ($\forall x, y \in F$, $L(x+y) = L(x) + L(y)$), on dit que

- L est $\mathbb{R}$–linéaire si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in F$, $L(\lambda x) = \lambda L(x)$,
- L est $\mathbb{C}$–linéaire si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in F$, $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Si L est $\mathbb{C}$–linéaire, elle est a fortiori $\mathbb{R}$–linéaire (et la réciproque est fausse en général), et les parties réelle $\mathrm{Re}\, L$ et imaginaire $\mathrm{Im}\, L$ sont $\mathbb{R}$–linéaires. De plus, toujours en supposant que L est $\mathbb{C}$–linéaire, elle est entièrement déterminée par sa partie réelle $U = \mathrm{Re}\, L$: on a $L = U - iU(i\cdot)$. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = \mathrm{Re}z - i\mathrm{Re}(iz)$ et on a alors par $\mathbb{C}$–linéarité de L, pour tout $x \in F$,

$$L(x) = \mathrm{Re}(L(x)) - i\mathrm{Re}(iL(x)) = U(x) - i\mathrm{Re}(L(ix)) = U(x) - iU(ix)\,.$$

On a alors $U : F \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$–linéaire, et pour tout $x \in F$, $U(x) \leq |U(x)| \leq |L(x)| \leq p(x)$. La semi-norme p est en particulier une jauge sur E. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $\widetilde{U} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge U et satisfait $\widetilde{U}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. On peut alors définir l'application $\widetilde{L} = \widetilde{U} - i\widetilde{U}(i\cdot) : E \to \mathbb{C}$ qui se restreint bien à $U - iU(i\cdot) = L$ sur F. On vérifie que $\widetilde{L}$ est bien $\mathbb{C}$–linéaire. De plus, pour tout $x \in E$, il existe un complexe unitaire $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$ tel que

$$|\widetilde{L}(x)| = \omega\widetilde{L}(x) = \widetilde{L}(\omega x) \in \mathbb{R}$$

de sorte qu'on a bien $|\widetilde{L}(x)| = \widetilde{U}(\omega x) \leq p(\omega x) = |\omega|\, p(x) = p(x)$. □

On va donner plusieurs conséquences importantes du théorème de Hahn–Banach avant de se lancer dans sa preuve.

Corollaire 2.5 (Extension de formes linéaires continues)**.** *Soient E un espace vectoriel* normé*, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, et $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une forme linéaire continue $\widetilde{L} : E \to \mathbb{K}$ qui prolonge L tout en préservant sa norme : $\|\widetilde{L}\|_{E^*} = \|L\|_{F^*}$.*

À partir du moment où $\widetilde{L}_{|F} = L$, on a nécessairement $\|\widetilde{L}\|_{E^*} \geq \|L\|_{F^*}$ puisque

$$\|\widetilde{L}\|_{E^*} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|\widetilde{L}(x)|}{\|x\|_E} \geq \sup_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{|\widetilde{L}(x)|}{\|x\|_E} = \|L\|_{F^*}\,.$$

Le corollaire nous donne ainsi un prolongement qui est optimal pour ce qui est de minimiser la norme duale.

Preuve du corollaire 2.5. Faisons la preuve dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le principe est exactement le même, il faut simplement appliquer la version complexe du théorème (corollaire 2.4).
Soit $L : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur $(F, \|\cdot\|_E)$. On va appliquer le théorème de Hahn–Banach avec $p : x \in E \mapsto \|L\|_{F^*}\|x\|_E$ qui est bien une jauge. On a bien, pour tout $x \in F$, $L(x) \leq |L(x)| \leq \|L\|_{F^*}\|x\|_E = p(x)$. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe une forme linéaire $\widetilde{L} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge L et satisfait, pour tout $x \in E$,

$$\widetilde{L}(x) \leq p(x) = \|L\|_{F^*}\|x\|_E$$

et en l'écrivant en $-x$, on obtient par linéarité $-\widetilde{L}(x) \leq \|L\|_{F^*}\|x\|_E$ de sorte que $|\widetilde{L}(x)| \leq \|L\|_{F^*}\|x\|_E$ et finalement $\|\widetilde{L}\|_{E^*} \leq \|L\|_{F^*}$. □

Dans les énoncés ci-dessus, il n'est jamais question d'unicité du prolongement ... parce qu'il n'y a pas unicité en général.

Exemple 2.6 (Non-unicité du prolongement dans le théorème de Hahn–Banach)**.** Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$, soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}e_1$. Considérons la forme linéaire $L_0 : F \to \mathbb{R}$, $te_1 \mapsto t$ i.e. $L(e_1) = 1$. On a alors $\|L_0\|_{F^*} = 1$ (pour $te_1 \in F$, $|L(t,0)| = |t| = \|(t,0)\|_1$).

Soit maintenant $\beta \in \mathbb{R}$ et définissons la forme linéaire continue $\widetilde{L}_\beta : E \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{L}_\beta(e_1) = 1$, ce qui assure que $\widetilde{L}_\beta$ prolonge L_0, et $\widetilde{L}_\beta(e_2) = \beta$. On a alors $\|\widetilde{L}_\beta\|_{E^*} = \max(1, |\beta|)$. En effet, on a déjà

$$\|\widetilde{L}_\beta\|_{E^*} \geq \max\left(\frac{|\widetilde{L}_\beta(e_1)|}{\|e_1\|_1}, \frac{|\widetilde{L}_\beta(e_2)|}{\|e_2\|_1}\right) = \max(1, |\beta|)$$

et de plus, pour $x = (t, u) \in E$,

$$|\widetilde{L}_\beta(x)| = |t + \beta u| \leq |t| + |\beta|\,|u| \leq \max(1, |\beta|)\,(|t| + |u|) = \max(1, |\beta|)\,\|x\|_1 \ .$$

Le prolongement $\widetilde{L}_\beta$ de L_0 satisfait alors $\|\widetilde{L}_\beta\|_{E^*} = \|L_0\|_{F^*}$ si et seulement si $\max(1, |\beta|) = 1$ i.e., $\beta \in [-1, 1]$, ce qui fait quand même "quelques" prolongements possibles...

L'exemple précédent est un cas particulier d'espace vectoriel normé E dont le dual E^* a une boule unité fermée $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ qui n'est pas *strictement convexe*. On renvoie à l'exercice 2.1.
On dit qu'un sous-ensemble convexe $C \subset E$ est *strictement convexe* si pour tout $x, y \in C$ tels que $x \neq y$, le segment $]x, y[= \{(1-t)x + ty \ : \ t \in]0, 1[\}$ est entièrement inclus dans l'intérieur de C. Dans le cas où C est de plus fermé (et borné), on peut vérifier qu'on a de façon équivalente : C est strictement convexe si et seulement si ∂C ne contient aucun segment de longueur non nulle. On admettra cette caractérisation.

Exercice 2.1 (Unicité du prolongement de Hahn–Banach et stricte convexité de la boule unité)**.** Soit E un espace vectoriel normé.

1. On suppose que la boule unité fermée $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ du dual de E n'est pas strictement convexe. Montrer qu'il existe F sous-espace vectoriel de E et $L : F \to \mathbb{R}$ tels qu'il n'y a pas unicité du prolongement linéaire continu de L à E de norme égale à $\|L\|_{F^*}$ (donné par Hahn–Banach ou plus précisément par le corollaire 2.5).

   Indication.– On pourra se donner $L_1, L_2 \in E^*$, $L_1 \neq L_2$ satisfaisant $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = 1$ et $[L_1, L_2] \subset \partial B_{E^*}(0,1)$, et considérer : $F = \ker(L_1 - L_2)$ et $L = L_{1|F} = L_{2|F}$. Commencer par le cas où E est de dimension finie peut vous aider.
2. Soit F un espace vectoriel normé isométriquement isomorphe à E, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective $\Phi : E \to F$ qui est une isométrie (pour tout $x \in E$, $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$). Vérifier que $\overline{B_E(0,1)}$ est strictement convexe si et seulement si $\overline{B_F(0,1)}$ l'est.
3. Rappeler(?) pourquoi le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Sa boule unité fermée est-elle strictement convexe ?

En revanche, on a le résultat d'unicité suivant sous hypothèse de stricte convexité de la boule duale :

Proposition 2.7. *Si $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ est strictement convexe, alors pour tout sous-espace $F \subset E$ et toute $L \in F^*$, il y a unicité du prolongement de Hahn–Banach (préservant la norme).*

Preuve de la proposition 2.7. On peut supposer $\|L\|_{F^*} = 1$ sans perte de généralité. Soient $L_1, L_2 \in E^*$ deux prolongements de L satisfaisant $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = \|L\|_{F^*} = 1$.
On a alors que $L_3 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ est encore un prolongement de L : $(L_3)_{|F} = \frac{1}{2}(L + L) = L$ et en particulier $\|L_3\|_{E^*} \geq \|L\|_{F^*} = 1$. Par inégalité triangulaire, $\|L_3\|_{E^*} \leq \frac{1}{2}(\|L_1\|_{E^*} + \|L_2\|_{E^*}) = \|L\|_{F^*} = 1$. Donc $\|L_3\|_{E^*} = \|L\|_{F^*} = 1$.
Ainsi $L_3 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ est de norme 1, avec L_1, L_2 de norme 1. Cependant, par stricte convexité de $\overline{B_{E^*}(0,1)}$, on a $\|L_3\|_{E^*} < 1$ dès que $L_1 \neq L_2$. On en déduit $L_1 = L_2$: il y a unicité du prolongement préservant la norme. □

Corollaire 2.8. *Soit E un espace vectoriel normé.*

(*i*) *Soit $x_0 \in E$, il existe une forme linéaire continue $\widetilde{L}_0 \in E^*$ telle que*

$$\|\widetilde{L}_0\|_{E^*} = \|x_0\|_E \quad et \quad \widetilde{L_0}(x_0) = \|x_0\|_E^2 .$$

(*ii*) *Pour tout $x \in E$,*

$$\|x\|_E = \max_{L\in E^*,\, \|L\|_{E^*}\leq 1} |L(x)| .$$

(*iii*) *Soit $x \in E$ et soit $\Phi_x \in E^{**}$ la forme linéaire d'évaluation en x introduite précédemment, on a $\|\Phi_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. En particulier $J : E \to E^{**}$ est une isométrie.*

(*iv*) *E est de dimension finie si et seulement si E^* est de dimension finie.*

Preuve du corollaire 2.8.

(*i*) Si $x_0 = 0$, on peut prendre $L_0 \equiv 0$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$, on va appliquer le corollaire 2.5 avec le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{K}x_0$ et la forme linéaire continue $L_0 : F \to \mathbb{K}$ telle que $L_0(x_0) = \|x_0\|_E^2$.
Vérifions que $\|L_0\|_{F^*} = \|x_0\|_E$. On a déjà $\|L_0\|_{F^*} \geq \frac{|L_0(x_0)|}{\|x_0\|_E} = \|x_0\|_E$; de plus, pour tout $x = tx_0 \in F$, $|L_0(x)| = |t|\,\|x_0\|_E^2 = \|x_0\|_E \|x\|_E$ et donc $\|L_0\|_{F^*} \leq \|x_0\|_E$.
D'après le corollaire 2.5, il existe $\widetilde{L}_0 \in E^*$ qui prolonge L_0 et satisfait $\|\widetilde{L}_0\|_{E^*} = \|L_0\|_{F^*} = \|x_0\|_E$.

(*ii*) Pour $x \in E$, on a par définition $\sup_{L\in E^*,\, \|L\|\leq 1} |L(x)| \leq \|x\|_E$.
En utilisant (*i*), pour $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $L \in E^*$ telle que $\|L\|_{E^*} = \|x\|_E$, on peut alors définir $\widetilde{L} = \frac{1}{\|x\|_E} L$ qui est bien de norme 1, de sorte que le sup est atteint en $\widetilde{L}$ et vaut bien

$$\left|\widetilde{L}(x)\right| = \frac{|L(x)|}{\|x\|_E} = \frac{\|x\|_E^2}{\|x\|_E} = \|x\|_E .$$

(*iii*) Soit $x \in E$. Rappelons pour commencer que Φ_x est continue : pour $L \in E^*$, on a

$$|\Phi_x(L)| = |L(x)| \leq \|L\|_{E^*} \|x\|_E .$$

Par définition de la norme duale, on a

$$\|\Phi_x\|_{E^{**}} = \sup_{L\in E^*,\, \|L\|_{E^*}\leq 1} |\Phi_x(L)| = \sup_{L\in E^*,\, \|L\|_{E^*}\leq 1} |L(x)|$$

et on conclut que $\|\Phi_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ en utilisant (*ii*).

(*iv*) On sait déjà que si E est de dimension finie, alors E^* aussi et a même dimension.
Réciproquement, supposons que E^* est dimension finie, alors E^{**} aussi par ce qu'on vient de dire. Or, $J : E \to E^{**}$ est une isométrie linéaire d'après (*iii*), en particulier injective. Par conséquent, $\dim E \leq \dim E^{**} < \infty$.

□

Corollaire 2.9 (Le dual sépare les points)**.** *Soient E un espace vectoriel normé, $x, y \in E$, $x \neq y$. Il existe une forme linéaire continue $L \in E^*$ telle que $L(x) \neq L(y)$.*

Preuve du corollaire 2.9. Soit $z = x - y \neq 0$, on peut définir la forme linéaire continue $L_z : \mathbb{K}z \to \mathbb{K}$, $tz \mapsto t$. D'après le corollaire 2.5 du théorème de prolongement de Hahn–Banach, L_z se prolonge en une application linéaire continue $L : E \to \mathbb{K}$, on a donc

$$L(x - y) = L_z(x - y) = L_z(z) = 1$$

de sorte que $L(x) - L(y) = 1 \neq 0$. □

Corollaire 2.10 (Critère de densité)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est dense dans E si et seulement si pour toute forme linéaire continue $L \in E^*$, $\big(L_{|F} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0\big)$.*

Preuve du corollaire 2.10. Le sens direct est le plus facile : si L est nulle sur F, par continuité elle est nulle sur $\overline{F}$ et $\overline{F} = E$ puisqu'on suppose que F est dense dans E.
Passons à la réciproque qu'on va prouver pas contraposée. Supposons que F n'est pas dense dans E et montrons qu'il existe une forme linéaire continue $L \in E^*$ qui s'annule sur F et qui n'est pas identiquement nulle. Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. On peut considérer le sous espace vectoriel $H = \overline{F} + \mathbb{K}x_0$ et définir $L : H \to \mathbb{K}$ linéaire sur H par $L_{|\overline{F}} = 0$ et $L(x_0) = 1$. Vérifions que L est continue. Soit $y \in H$, il existe un unique $(x, t) \in \overline{F} \times \mathbb{K}$ tel que $y = x + tx_0$ et on a alors

$$|L(y)| = |L(x) + tL(x_0)| = |t| \ .$$

Faisons un dessin (Figure 2.1) et essayons de transcrire ce qu'on observe sans utiliser de structure euclidienne (pas de Pythagore !) parce qu'on n'a pas supposé que E était muni d'une telle structure ... En revanche, on voit apparaître une application du théorème de Thalès, qu'on va traduire par l'homogénéité de la fonction distance à un sous-espace vectoriel.
Posons $d := \operatorname{dist}(x_0, \overline{F}) = \inf_{z \in \overline{F}} \|x_0 - z\|_E$. Comme $\overline{F}$ est *fermé* et $x_0 \notin \overline{F}$, on a $d > 0$.
Si $t = 0$, $|L(y)| = 0 \leq \|y\|_E$ et on a l'inégalité voulue. Supposons $t \neq 0$, comme $x \in \overline{F}$ et par homogénéité de $\operatorname{dist}(\cdot, \overline{F})$ (qui découle directement de l'homogénéité de $\|\cdot\|_E$),

$$\operatorname{dist}(y, \overline{F}) = \operatorname{dist}(y - x, \overline{F}) = \operatorname{dist}(tx_0, \overline{F}) = |t| \operatorname{dist}(x_0, \overline{F}) = |t|\, d$$

et comme $0 \in \overline{F}$, $\|y\|_E = \|y - 0\|_E \geq \operatorname{dist}(y, \overline{F})$. On a donc bien $|L(y)| \leq \frac{1}{d} \|y\|_E$, L est continue.
On peut appliquer le corollaire 2.5 du théorème de Hahn–Banach afin d'étendre L en une forme linéaire continue $\widetilde{L} : E \to \mathbb{K}$ qui s'annule sur F et n'est pas identiquement nulle. Par contraposée, on conclut la preuve du corollaire.

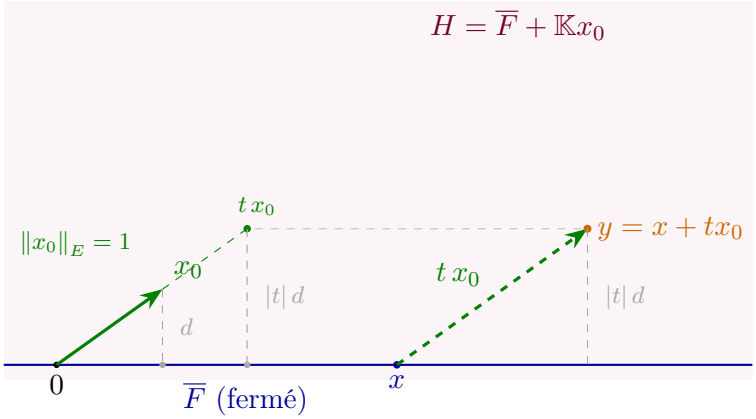


FIGURE 2.1

□

Il nous reste quand même à prouver le théorème de Hahn–Banach. Pour cela, on va procéder par prolongements successifs en s'appuyant sur la brique élémentaire suivante : prolonger L de F à $F \oplus \mathbb{R}v$ (pour $v \notin F$). Le cadre est exactement le même que dans le théorème de Hahn–Banach.

Lemme 2.11. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application* sous-additive et positivement homogène *(une* jauge*), c'est-à-dire : pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\lambda x) = \lambda\, p(x)\,.$$

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et $L : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $L(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Soit $v \in E \setminus F$ et $F_1 = F \oplus \mathbb{R}v$.
Alors il existe une forme linéaire $L_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ prolongeant L (i.e. $L_{1|F} = L$) et telle que $L_1(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F_1$.

Preuve du lemme 2.11. Prolonger linéairement L à $F_1 = F \oplus \mathbb{R}v$ revient à fixer $\beta = L_1(v)$. On cherche ainsi $\beta \in \mathbb{R}$ qui satisfait $L_1(x + tv) = L(x) + t\beta \leq p(x + tv)$ pour tout $x \in F$ et $t \in \mathbb{R}^*$ (pour $t = 0$ l'inégalité est satisfaite par hypothèse indépendamment du choix de β).
En distinguant $t > 0$ et $t < 0$, on obtient les conditions suivantes sur β.
• $\forall t > 0$, $\forall x \in F$, $\beta \leq p(x/t + v) - L(x/t)$ ou encore

$$\beta \leq \inf_{y \in F} \left(p(y + v) - L(y)\right)$$

• $\forall t < 0$, $\forall x \in F$, $\beta \geq -p(x/|t| - v) + L(x/|t|)$ ou encore

$$\beta \geq \sup_{z \in F} \left(-p(z - v) + L(z)\right)$$

Il reste à vérifier qu'on a $\sup_{z \in F} \left(-p(z - v) + L(z)\right) \leq \inf_{y \in F} \left(p(y + v) - L(y)\right)$ pour pouvoir choisir β entre les deux. Soit $y_1, y_2 \in F$, on a

$$L(y_1) + L(y_2) = L(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - v) + p(y_2 + v)\,,$$

et donc $L(y_1) - p(y_1 - v) \leq L(y_2) + p(y_2 + v)$ ce qui permet de choisir $\beta \in \mathbb{R}$ pour que L_1 satisfasse $L_1(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in F_1$.

□

Lorsque E est de dimension finie ou même F de codimension finie, il suffit d'itérer le lemme 2.11 afin de terminer la preuve du théorème de Hahn–Banach analytique.

Preuve de Hahn–Banach pour F de codimension finie. Supposons le sous-espace vectoriel $F \subset E$ de codimension finie k. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base d'un supplémentaire de F et posons $F_j = F \oplus \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_j)$ pour $1 \leq j \leq k$, et $F_0 = F$. Il suffit d'appliquer récursivement le lemme 2.11 à chaque couple $F_{j-1} \subset F_j$ $(1 \leq j \leq k)$ pour conclure. □

Dans le cas où F est de codimension dénombrable, on pourrait encore conclure par récurrence. Dans ce cas, il existe $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $E = F \oplus \mathrm{vect}\,(e_n)_n$ et on définit encore $F_n = F \oplus \mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. On montre par récurrence à partir du lemme (comme pour le cas de la codimension finie) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $L_n : F_n \to \mathbb{R}$ linéaire prolongeant L et satisfaisant $L_n \leq p$ sur F_n.
On peut alors définir $\widetilde{L} : E \to \mathbb{R}$ comme suit. On a $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ et pour $x \in E$, on peut alors définir

$$\widetilde{L}(x) = L_N(x) \quad \text{où} \quad N = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, x \in F_n\}\,.$$

Il reste bien sûr à vérifier que $\widetilde{L}$ est linéaire, prolonge L et vérifie $\widetilde{L} \leq p$ sur E.

Dans le cas général, on va appliquer le lemme de Zorn afin de mettre en oeuvre l'induction. Pour cela on introduit quelques définitions concernant les ensembles ordonnés.

Définition 2.12 (Relation d'ordre et ensemble ordonné)**.** Soit X un ensemble.
Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ sur X est définie par une partie $R \subset X \times X$. Pour $x, y \in X$, on note $x\,\mathcal{R}\,y$ (ou $x \preccurlyeq y$ si l'on note la relation $\preccurlyeq$) lorsque $(x, y) \in R$.
Une *relation d'ordre* (partielle) sur X est une relation binaire $\preccurlyeq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- *réflexivité* : $x \preccurlyeq x$ pour tout $x \in X$;
- *anti-symétrie* : pour $x, y \in X$: si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, alors $x = y$;

- *transitivité* : pour $x, y, z \in X$: si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, alors $x \preccurlyeq z$.

On dira que $(X, \preccurlyeq)$ est un ensemble (partiellement) ordonné.
Un ensemble ordonné $(X, \preccurlyeq)$ est *totalement ordonné* si pour tous $x, y \in X$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

Attention, lorsque $(X, \preccurlyeq)$ est *partiellement* ordonné, il se peut que deux éléments $x, y \in X$ ne soient pas comparables : $(x, y), (y, x) \notin R$ ou encore, on n'a ni $x \preccurlyeq y$, ni $y \preccurlyeq x$.

Exemple 2.13.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ muni de l'ordre usuel est un ensemble totalement ordonné.
- $(\mathcal{P}(X), \subset)$ muni de l'inclusion est un ensemble partiellement ordonné.
- Dans le contexte de la preuve du théorème de Hahn–Banach, l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g), où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F, et $g : G \to \mathbb{R}$ prolonge L en restant $\leq p$, est un ensemble partiellement ordonné par la relation :

$$(G_1, g_1) \preccurlyeq (G_2, g_2) \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \subset G_2 \text{ et } g_{2|G_1} = g_1 \,.$$

On introduit à présent la notion d'ensemble inductif.

Définition 2.14 (Ensemble inductif)**.** Un ensemble ordonné $(X, \preccurlyeq)$ est *inductif* lorsque toute partie $Y \subset X$ totalement ordonnée (munie de l'ordre induit) admet un majorant, c'est-à-dire qu'il existe $M \in X$ tel que pour tout $y \in Y$, $y \preccurlyeq M$ (en particulier y et M sont comparables).

Exemple 2.15. L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas inductif : $Y = \mathbb{R}$ est lui même totalement ordonné et n'admet pas de majorant.

Exercice 2.2. Vérifier que $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ est un ensemble non vide partiellement ordonné et inductif.
Indication : étant donnée une partie $Y = \{(G_i, g_i)\}_{i \in I}$ non vide totalement ordonnée de $\mathcal{G}$, on pourra vérifier que $(G, g) \in \mathcal{G}$ donné par

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{et} \quad g(x) = g_i(x) \text{ pour } x \in G_i$$

est bien défini et c'est un majorant de Y.

On peut à présent énoncer le lemme de Zorn qui est un axiome du système logique dans lequel on choisit de travailler.

Lemme 2.16 (Zorn)**.** *Tout ensemble ordonné $(X, \preccurlyeq)$ inductif (non vide) possède un élément maximal, c'est à dire qu'il existe $m \in X$ satisfaisant*

$$\forall x \in X, \qquad (m \preccurlyeq x \quad \Rightarrow \quad m = x)$$

Dans le lemme ci-dessus, le fait que $m \in X$ est un élément maximal dit qu'il est plus grand que tous les éléments auxquels il est comparable. En particulier, ce n'est pas nécessairement un majorant de X.
On peut à présent terminer la preuve du théorème de Hahn–Banach.

"Preuve" du théorème de Hahn–Banach. On a établi que $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné inductif non vide. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément maximal $(\widetilde{F}, \widetilde{L}) \in \mathcal{G}$. Si par l'absurde $\widetilde{F} \neq E$, on peut appliquer le lemme 2.11 et contredire la maximalité de $(\widetilde{F}, \widetilde{L})$. On a alors $\widetilde{F} = E$ et $\widetilde{L}$ le prolongement désiré. □

On termine cette section en rappelant un autre théorème qui permet de prolonger des applications linéaires continues, à ne surtout pas confondre avec le théorème de Hahn–Banach : il s'applique dans un cadre très différent !

Théorème 2.17 (Prolongement par densité)**.** *Soient E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel* dense *dans E, G un espace de Banach, et $T : F \to G$ une application linéaire continue. Alors il existe une unique application linéaire continue $\widetilde{T} : E \to G$ prolongeant T, et de plus $\|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \|T\|_{\mathcal{L}(F,G)}$.*

Ce théorème est de nature très différente du théorème de Hahn–Banach. Ici, l'espace d'arrivée n'est pas uniquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: ce qui est important c'est que l'espace d'arrivée est complet, F est supposé dense dans E et le prolongement est unique. On peut démontrer directement ce théorème ou bien le déduire d'un théorème plus général de prolongement des applications uniformément continues : si (X, d_X) est un espace métrique, $D \subset X$ est une partie *dense*, (Y, d_Y) est un espace métrique *complet*, et $f : D \to Y$ une application *uniformément continue*, alors il existe une unique application continue $\widetilde{f} : X \to Y$ prolongeant f, et de plus $\widetilde{f}$ est elle-même uniformément continue. 12 :30

Exercice 2.3. Prouver le théorème 2.17 directement puis en appliquant le théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Exercice 2.4.
On note

- ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles absolument convergentes qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c_0 \subset \ell^\infty$ le sous-espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0, qui est complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur ℓ^∞, telle que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ait
$$\liminf_{n\to\infty} u_n \ \leq \ L(u) \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} u_n.$$
2. Montrer que le dual de c_0 s'identifie isométriquement à ℓ^1 via la bijection linéaire
$$u \in \ell^1 \mapsto \left(L_u : c_0 \to \mathbb{R},\, v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right) \in (c_0)^* .$$
3. Construire un élément $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ tel qu'il n'existe pas $u \in \ell^1$ satisfaisant
$$\Lambda(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \qquad \forall v \in \ell^\infty .$$

Exercice 2.5. Soit E un espace vectoriel normé. Soit $D \subset E$ une partie de E satisfaisant, pour tout $L \in E^*$, $\sup_{x\in D} |L(x)| < \infty$. Montrer que D est une partie bornée.

2.3 Théorème de Hahn–Banach : forme géométrique

Rappelons quelques notions avant d'énoncer le théorème de séparation de Hahn–Banach. Soit E un espace vectoriel et $C \subset E$. On dit que C est *convexe* si
$$\forall t \in [0,1],\ \forall x, y \in C, \quad (1-t)x + ty \in C .$$
c'est-à-dire si C est stable par combinaison convexe à deux éléments.

Exercice 2.6. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient C_1 et C_2 deux ensembles convexes de E. Alors pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \ : \ a_1 \in C_1, a_2 \in C_2\}$$
est convexe.

2. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes de E. alors

$$\bigcap_{i\in I} C_i$$

est convexe.

On peut vérifier que C est convexe si et seulement si C est stable par toute combinaison convexe :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall t_1,\dots,t_N \in [0,1],\ t_1+\dots+t_N = 1,\ \forall x_1,\dots,x_N \in C, \qquad \sum_{i=1}^{N} t_i x_i \in C\,.$$

Dans le cas d'une partie $A \subset E$, on introduit l'*enveloppe convexe* de A, notée $\mathrm{co}(A)$, qui est le plus petit convexe contenant A :

$$\mathrm{co}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe de } E,\\ A\subset C}} C\,.$$

L'intersection ci-dessus est non vide puisque E est convexe et contient A, et une intersection de convexes est convexe donc $\mathrm{co}(A)$ est bien définie. Dans $\mathbb{R}^d$, le théorème de Carathéodory nous dit qu'on peut se contenter de prendre des combinaisons convexes de taille au plus $d+1$ pour décrire l'enveloppe convexe.

Théorème 2.18 (Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Tout point de* $\mathrm{co}(A)$ *s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $d+1$ points de A.*

Exercice 2.7.

1. Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Montrer que

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ :\ k\in\mathbb{N}^*,\ x_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

2. Prouver le théorème de Carathéodory.
3. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors $\mathrm{co}(A)$ est compacte.

On dit que $H \subset E$ est un hyperplan (sous-entendu affine) de E s'il existe une forme linéaire non nulle $L : E \to \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que

$$H = \{x \in E \ :\ L(x) = \alpha\}\,.$$

Dans la représentation ci-dessus (L,α) est uniquement déterminé par H à multiplication par un scalaire non nul près. On rappelle de plus que H est fermé si et seulement si la forme linéaire L est continue.

Exercice 2.8. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient $L_1, L_2 : E \to \mathbb{K}$ deux formes linéaires non nulles, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Alors

$$\{x \in E \ :\ L_1(x) = \alpha_1\} = \{x \in E \ :\ L_2(x) = \alpha_2\}$$

si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tel que $L_2 = \lambda L_1$ et $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$.

2. Soit $L : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle, $\alpha \in \mathbb{K}$ et soit $H = \{x \in E \ :\ L(x) = \alpha\}$. Montrer que H est fermé dans E si et seulement si L est continue, et si ce n'est pas le cas H est alors dense dans E.

Le théorème de Hahn–Banach forme géométrique nous dit que dans certaines situations, on peut séparer deux ensembles convexes disjoints par un hyperplan. Dans l'énoncé suivant, on se restreint au cas où E est un espace vectoriel réel, on verra comment le théorème se traduit dans le cas d'un espace vectoriel complexe (corollaire 2.30).

Théorème 2.19 (Hahn–Banach : forme géométrique)**.** *Soient C_1 et C_2 deux ensembles convexes, disjoints et non vides dans un espace vectoriel normé réel E. On peut les séparer dans les trois cas suivants :*

1. Séparation large. *Si C_1 est ouvert, il existe $L \in E^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que*
$$L(x) < \gamma \leq L(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$
2. Séparation stricte. *Si C_1 est compact et C_2 est fermé, il existe $L \in E^*$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que*
$$L(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < L(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$
3. Séparation en dimension finie. *Si E est de dimension finie, il existe L non nulle dans E^* telle que*
$$L(x) \leq L(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$

Notons que dans chacun des trois cas, quitte à considérer $-L \in E^*$ et $-\gamma \in \mathbb{R}$ $(-\gamma_1,\ -\gamma_2)$, on peut renverser les inégalités. Par exemple, dans le cas 1, on peut alternativement écrire : il existe $L \in E^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(y) \leq \gamma < L(x) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$

Par ailleurs, dans les cas 1 et 2, on ne précise pas que L n'est pas la forme linéaire nulle parce que c'est impliqué par les inégalités strictes dans chacune des conclusions.
Avant d'en venir à la preuve, passons en revue quelques exemples afin de comprendre les différentes hypothèses et conclusions. Commençons par examiner la séparation stricte en remarquant que la séparation stricte de deux parties de E implique que ces deux parties sont à distance > 0.

Remarque 2.20. Soit E un espace vectoriel normé réel et $A_1, A_2 \subset E$ deux parties non vides. S'il existe $L \in E^*$, $L \neq 0$, et $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < L(y) \qquad \forall x \in A_1,\ \forall y \in A_2,$$

alors $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$.
En effet, pour $x \in A_1$, $y \in A_2$: $L(y-x) = L(y) - L(x) > \gamma_2 - \gamma_1 > 0$, et par continuité de L, $|L(y-x)| \leq \|L\|_{E^*}\ \|y-x\|_E$, donc

$$\|y-x\|_E \geq \frac{L(y-x)}{\|L\|_{E^*}} > \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\|L\|_{E^*}} > 0.$$

En prenant l'inf sur $x \in A_1$, $y \in A_2$: $\operatorname{dist}(A_1, A_2) \geq \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{\|L\|} > 0$.

Exemple 2.21 (Inspection des hypothèses dans le cas de la séparation stricte)**.**

- En considérant dans $\mathbb{R}^2$ les convexes fermés disjoints $C_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ (l'axe des abscisses) et $C_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 > 0,\ x_2 \geq \dfrac{1}{x_1}\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geq 0,\ x_1 x_2 \geq 1\right\}$ (aucun des deux n'est compact, ils ne sont pas bornés). La forme linéaire $L : x = (x_1, x_2) \to x_2$ permet de les séparer au sens large avec $\gamma = 0$:
$$\forall x \in C_1,\ L(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in C_2,\ L(y) = y_2 \geq \frac{1}{y_1} > 0\,.$$
Mais pas au sens stricte en utilisant la remarque précédente puisque $\operatorname{dist}(C_1, C_2) = 0$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n, 0) \in C_1$, $v_n = (n, \frac{1}{n}) \in C_2$ et $\|u_n - v_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

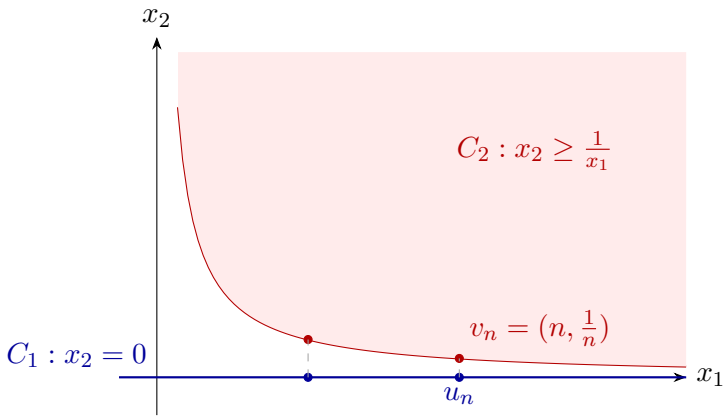


FIGURE 2.2 – C_1 (axe des abscisses) et C_2 (épigraphe de l'hyperbole), convexes fermés disjoints, pas de séparation stricte.

- En considérant dans $\mathbb{R}$, $C_1 = \{0\}$ (compact) et $C_2 =]0, 1[$ (convexe, non fermé, disjoint de K_1). La forme linéaire $L : x \mapsto x$ sépare C_1 et C_2 avec $\gamma = 0$. En effet, pour tout $x \in C_1$, $L(x) = L(0) = 0$ et pour tout $y \in C_2$, $L(y) = y > 0 = L(0)$. Vérifions qu'on ne peut pas les séparer strictement.
  Les formes linéaires non nulles sont de la forme $L : x \mapsto \lambda x$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si on avait $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que $L(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < L(y)$ pour $x = 0$, $y \in]0, 1[$, on aurait pour $\lambda < 0$,
  $$y < \frac{\gamma_2}{\lambda} < \frac{\gamma_1}{\lambda} < 0 \qquad \forall 0 < y < 1$$
  et on obtient une contradiction. Dans le cas $\lambda > 0$, on obtient de même en faisant tendre y vers 0 :
  $$0 < \frac{\gamma_1}{\lambda} < \frac{\gamma_2}{\lambda} \leq 0 \qquad \forall 0 < y < 1\,,$$
  et à nouveau une contradiction.

On s'intéresse à présent à la séparation en dimension finie, une question légitime est de se demander si on ne pourrait pas avoir la séparation large au sens de 1 gratuitement en dimension finie. L'exemple de l'axe des abscisse et de l'épigraphe de l'hyperbole vérifie par exemple la séparation stricte au sens de 1. Donnons un exemple de deux convexes disjoints en dimension finie pour lesquels la séparation au sens de 1 n'est pas vérifiée.

Exemple 2.22. Soit $C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0) \text{ ou } (x_1 < 0,\ x_2 > 0)\}$ et soit C_2 sont complémentaire. On peut vérifier que ces deux ensembles sont convexes. On peut les séparer par la forme linéaire $L : (x_1, x_2) \mapsto x_2$ dont le noyau est l'axe des abscisses, et je vous laisse vérifier qu'on ne peut pas les séparer strictement.

Une autre question légitime, est la nécessité de l'hypothèse de dimension finie pour avoir la séparation au sens de 3. Dans l'exemple qui suit, on va voir qu'en dimension infine, sans hypothèse topologique supplémentaire, on n'a ni séparation au sens de 1 ni au sens de 3, ce qui donne ainsi également un contre-exemple à la séparation sans hypothèse d'ouverture dans le cas 1.

Exemple 2.23 (Nécessité de l'ouverture de C_1 dans le cas 1)**.** Dans $E = \ell^2(\mathbb{N})$, considérons
$$C_1 = \big\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \ : \ u_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\big\}$$
l'ensemble des suites presque nulles qui est un sous-espace vectoriel, a fortiori convexe ; $C_2 = \{v\}$ où $v \in \ell^2 \setminus C_1$, on peut par exemple prendre la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Les ensembles C_1 et C_2 ainsi définis sont convexes, disjoints, non vides. En revanche C_1 n'est pas ouvert (ni fermé) dans ℓ^2.

Vérifions qu'aucune séparation, même faible, n'est possible. Soit $L \in E^*$, $L \neq 0$ vérifiant $L(x) \leq L(v)$ pour tout $x \in C_1$, alors L est majorée sur C_1. Or C_1 est un sous-espace vectoriel donc L est nulle sur C_1 (si $u \in C_1$ avec $L(u) \neq 0$ et même $L(u) > 0$ quitte à considérer $-u$, alors $nu \in C_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $L(nu) = nL(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, contredisant la majoration). Ainsi L serait nulle sur C_1.
On rappelle que C_1 est dense dans ℓ^2 et donc par continuité, L serait nulle sur ℓ^2 tout entier, contredisant $L \neq 0$.
Pour rappel concernant la densité de C_1 dans ℓ^2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et pour $k \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(k)} \in C_1$ égale à u jusqu'au rang k et nulle à partir du rang $k+1$. On a alors

$$\|u - u^{(k)}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} u_j^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

car c'est le reste d'une série convergente.

On va prouver la forme géométrique du théorème d'Hahn–Banach à partir du théorème de prolongement analytique. Pour cela, on va introduire une jauge adaptée à notre contexte.

Définition 2.24 (Jauge)**.** Soit $C \subset E$ un convexe ouvert d'un espace vectoriel réel E satisfaisant $0 \in C$. La *jauge* de C est la fonction définie en $x \in E$ par

$$p_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \ : \ \frac{x}{\alpha} \in C\right\}.$$

Vérifions tout de suite que la terminologie est cohérente : la jauge d'un convexe est bien une jauge au sens du théorème de prolongement analytique de Hahn–Banach (voir (ii) dans la proposition suivante).

Proposition 2.25. *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert d'un espace vectoriel réel E satisfaisant $0 \in C$. Alors :*

(i) *$p_C : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $p_C(x) \leq M \|x\|_E$;*

(ii) *p_C est positivement homogène et sous-additive ;*

(iii) *$C = p_C^{-1}([0,1[)$.*

Preuve de la proposition 2.25.

(i) Comme C est ouvert et contient 0, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$. Soit $x \neq 0$, pour $\alpha = \frac{2}{r}\|x\|_E$, on a

$$\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|_E = \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\alpha} \in C \quad \Rightarrow p_C(x) \leq \alpha = \frac{2}{r}\|x\|_E .$$

En particulier $p_C(x) < \infty$ et $p_C(x) \leq M\|x\|_E$ avec $M = \frac{2}{r}$ (et $p_C(0) = 0$).

(ii) L'homogénéité positive découle de la définition, pour $x \in E$ et $\lambda > 0$,

$$p_C(\lambda x) = \inf\left\{\alpha > 0 \ : \ \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\beta > 0 \ : \ \frac{x}{\beta} \in C\right\} = \lambda\, p_C(x).$$

(Et pour $\lambda = 0$, $p_C(\lambda x) = p_C(0) = 0$ et $\lambda p_C(x) = 0$.)
Vérifions la sous-additivité. Soient $x, y \in E$. Par définition de l'inf, il existe deux suites de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_C(x), \quad \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_C(y), \quad \frac{x}{\alpha_n} = u_n \in C \quad \text{et} \quad \frac{y}{\beta_n} = v_n \in C.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x + y = \alpha_n u_n + \beta_n v_n$ de sorte que par convexité de C,

$$\frac{x+y}{\alpha_n + \beta_n} = tu_n + (1-t)v_n \in C \quad \text{avec } t = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \in [0,1]$$

et donc $p_C(x+y) \leq \alpha_n + \beta_n$. Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour conclure.

(*iii*) Soit $x \in E$. Si $x \in C$, comme C est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $(1+\eta)x \in C$ et donc $p_C(x) \leq \frac{1}{1+\eta} < 1$. Réciproquement si $p_C(x) < 1$, il existe $p_C(x) \leq \alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$; et comme $0 \in C$, on a $x \in [0, \frac{x}{\alpha}] \subset C$ par convexité de C.

□

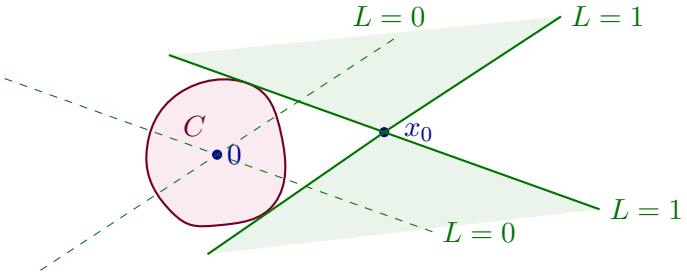
On peut à présent montrer qu'on peut séparer un convexe ouvert C (contenant 0) et tout point x_0 qui ne serait pas dans C en appliquant le théorème de prolongement de Hahn–Banach avec la jauge p_C qu'on vient d'introduire.

Lemme 2.26 (Séparation d'un convexe ouvert et d'un singleton)**.** *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert d'un espace vectoriel réel E satisfaisant $0 \in C$, et soit $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $L \in E^*$, $L \neq 0$, tel que pour tout $x \in C$,*

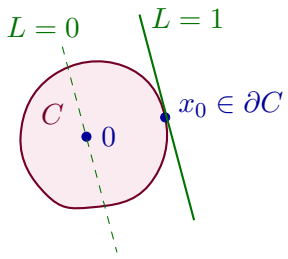
$$L(x) < L(x_0)\,.$$

Preuve du lemme 2.26. Comme $x_0 \notin C$, $x_0 \neq 0$ et on peut définir la droite vectorielle $F = \mathbb{R}x_0$. On introduit alors la forme linéaire $L_0 : F \to \mathbb{R}$, $tx_0 \mapsto t$. Vérifions que $L_0 \leq p_C$ sur F. Soit $x = tx_0 \in F$, si $t > 0$, $p_C(tx_0) = tp_C(x_0) \geq t = L_0(tx_0)$ car $p_C(x_0) \geq 1$ (par la proposition précédente (*iii*)) et si $t \leq 0$, $L_0(tx_0) = t \leq 0 \leq p_C(tx_0)$ (car la jauge p_C est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Par le théorème de Hahn–Banach (forme analytique) appliqué à la jauge p_C, la forme linéaire L_0 se prolonge en $L : E \to \mathbb{R}$ linéaire avec $L \leq p_C$ sur E tout entier. En particulier $L(x_0) = L_0(x_0) = 1$, et pour tout $x \in C$: $L(x) \leq p_C(x) < 1 = L(x_0)$.
Il reste à vérifier que L est continue. D'après la proposition précédente (*i*), pour tout $x \in E$, $L(x) \leq p_C(x) \leq M \|x\|_E$ et on en déduit également $-L(x) = L(-x) \leq M \|-x\|_E$ de sorte que

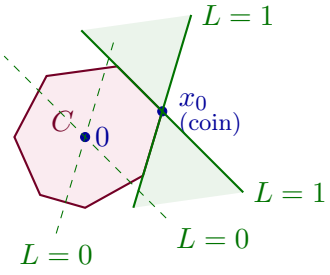
$$|L(x)| \leq M \|x\|_E\,.$$



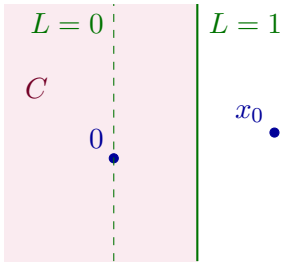
(a) $p_C(x_0) > 1$, C borné, famille de L.



(b) $p_C(x_0) = 1$, ∂C lisse en x_0, L unique.



(c) $p_C(x_0) = 1$, ∂C *non* lisse en x_0, famille de L.



(d) C demi-espace, L unique.

FIGURE 2.3 – Unicité (ou non unicité) de L à multiplication par un scalaire non nul près, quelques exemples.

□

Exercice 2.9. Soient E un espace vectoriel normé réel, $U \subset E$ un ouvert non vide et $L \in E^*$, $L \neq 0$. Alors L n'atteint pas $\sup_U L$ sur U (si ce sup est fini).

On peut à présent prouver la séparation large entre deux convexes disjoints dont au moins l'un des deux est ouvert.

Preuve du point 1 *du théorème de Hahn–Banach forme géométrique.*
Soient C_1, C_2 deux convexes disjoints (non vides) de E et on suppose de plus que C_1 est ouvert dans E. Soient $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ (tous deux non vides) et posons $x_0 = x_1 - x_2$ et

$$C = C_1 - C_2 = \{a_1 - a_2 : a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2\} \subset E \qquad \text{et} \qquad C_0 = C - x_0\,.$$

• Vérifions déjà que C_0 est convexe et ouvert dans E, $0 \notin C$ et $0 \in C_0$. Commençons par vérifier la convexité de C. Soit $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2 \in C$ (avec $a_1, b_1 \in C_1$ et $a_2, b_2 \in C_2$), pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)a + tb = \underbrace{[(1-t)a_1 + tb_1]}_{\in C_1} - \underbrace{[(1-t)a_2 + tb_2]}_{\in C_2} \in C\,.$$

Ainsi C est convexe et C_0 également.
On peut ensuite réécrire $C = \bigcup_{a_2 \in C_2} (C_1 - a_2)$ comme réunion de translatés $C_1 - a_2 = \tau_{a_2}(C_1)$ de l'ouvert C_1. On rappelle que $\tau_{a_2} : E \to E$, $x \mapsto x - a_2$ est un homéomorphisme et donc une application ouverte : $\tau_{a_2}(C_1)$ est ouvert dans E et donc C également, et $C_0 = \tau_{x_0}(C)$ également. Enfin, $x_0 \in C$ donc $0 \in C_0$ et par ailleurs, si on avait $0 \in C$, on aurait $a_1 \in C_1$ et $a_2 \in C_2$ tels que $0 = a_1 - a_2$, ce qui est impossible puisque C_1 et C_2 sont disjoints.
• On applique maintenant le lemme 2.26 pour séparer le convexe ouvert C_0 contenant 0 et le point $-x_0 \notin C_0$ (car $0 \notin C$) : il existe $L \in E^*$, $L \neq 0$ telle que pour tout $y \in C_0$, $L(y) < L(-x_0)$ ou encore pour tout $x \in C$,

$$L(x - x_0) < L(-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad L(x) < 0$$

de sorte que pour tout $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$,

$$L(a_1 - a_2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(a_1) < L(a_2)\,.$$

• On conclut en posant $\gamma = \sup_{a_1 \in C_1} L(a_1)$ (fini car $L(C_1)$ majoré par $L(x_2)$). On a alors $L(a_1) \leq \gamma$ pour tout $a_1 \in C_1$ et $\gamma \leq L(a_2)$ pour tout $a_2 \in C_2$ en prenant le supremum sur $a_1 \in C_1$ dans $L(a_1) < L(a_2)$. On obtient de plus $L(a_1) < \gamma$ pour tout $a_1 \in C_1$ en appliquant l'exercice 2.9. □

On va à présent s'appuyer sur cette séparation large qu'on vient d'établir pour prouver la séparation stricte entre un convexe compact C_1 et un convexe fermé C_2.

Preuve du point 2 *du théorème de Hahn–Banach forme géométrique.*
Soient C_1, C_2 deux convexes fermés disjoints (non vides) de E et on suppose de plus que C_1 est compact.
• La distance du fermé C_2 au compact C_1 est atteinte, et comme ces deux ensembles sont supposés disjoints, on en déduit $d = \operatorname{dist}(C_1, C_2) > 0$. On peut alors introduire $\delta = \frac{d}{3}$ et définir

$$(C_1)_\delta = C_1 + B(0,\delta) = \bigcup_{a_1 \in C_1} B(a_1, \delta) \qquad \text{et} \qquad (C_2)_\delta = C_2 + B(0,\delta) = \bigcup_{a_2 \in C_2} B(a_2, \delta)\,,$$

qui sont ouverts comme réunion de boules ouvertes, et convexes comme somme de deux convexes (voir exercice 2.6 ou le début de la preuve de la séparation 1). Par choix de δ, $(C_1)_\delta$ et $(C_2)_\delta$ sont de plus disjoints.
• On vient de vérifier que $(C_1)_\delta$ et $(C_2)_\delta$ remplissent les hypothèses de la séparation 1 du théorème de Hahn–Banach. On en déduit qu'il existe $L \in E^*$, $L \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaisant pour tout $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$ et $u_1, u_2 \in B(0,\delta)$,

$$L(a_1) + L(u_1) = L(a_1 + u_1) \leq \gamma \leq L(a_2 + u_2) = L(a_2) + L(u_2)$$

et en prenant le supremum sur $u_1 \in B(0,\delta)$, on a

$$\sup_{u_1 \in B(0,\delta)} L(u_1) = \sup_{u_1 \in B(0,\delta)} |L(u_1)| = \delta \|L\|_{E^*} \quad \text{et donc} \quad L(a_1) + \delta \|L\|_{E^*} \leq \gamma$$

et finalement, pour tout $a_1 \in C_1$, $L(a_1) \leq \gamma - \delta \|L\|_{E^*}$. On en déduit similairement en prenant l'infimum sur $u_2 \in B(0,\delta)$:

$$\inf_{u_2 \in B(0,\delta)} L(u_2) = - \sup_{u_2 \in B(0,\delta)} L(-u_2) = -\delta \|L\|_{E^*} \quad \text{et donc} \quad \gamma \leq L(a_2) - \delta \|L\|_{E^*}$$

et finalement pour tout $a_2 \in C_2$, $\gamma + \delta \|L\|_{E^*} \leq L(a_2)$. On conclut la preuve en posant $\gamma_1 = \gamma - \frac{1}{2}\delta \|L\|_{E^*}$ et $\gamma_2 = \gamma + \frac{1}{2}\delta \|L\|_{E^*}$ ($\|L\|_{E^*} > 0$ car $L \neq 0$). □

En relisant soigneusement la preuve de la séparation stricte, on note qu'on a utilisé la compacité/fermeture des convexes uniquement pour obtenir $\operatorname{dist}(C_1, C_2) > 0$. En utilisant la remarque 2.20, on déduit que deux convexes disjoints C_1 et C_2 de E peuvent être séparés strictement si et seulement si $\operatorname{dist}(C_1, C_2) > 0$.

Afin de conclure la preuve du théorème d'Hahn–Banach forme géométrique, il nous reste à établir la séparation en dimension finie de deux ensembles convexes disjoints. Pour cela, on va utiliser qu'un espace vectoriel de dimension finie est séparable (puisque $\mathbb{K}$ est lui-même séparable). Rappelons ce que cela signifie :

Définition 2.27 (Espace topologique séparable)**.** Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est séparable s'il existe une partie $D \subset X$ qui est dénombrable et dense dans X.

Dans le cas d'un espace métrique, la séparabilité se transmet à toute sous-partie.

Proposition 2.28. *Soit (X, d) un espace métrique. Toute partie $A \subset X$ (munie de la distance induite) est également séparable.*

Exercice 2.10. Montrer la proposition 2.28.
Est-ce encore vrai dans le cas dans un espace topologique (X, τ) non nécessairement métrisable ?

Preuve du point 3 *du théorème de Hahn–Banach forme géométrique.*
Soient C_1, C_2 deux convexes disjoints (non vides) de E. On définit comme précédemment $C = C_1 - C_2$ qui est lui-même convexe et ne contient pas 0. Montrons qu'il existe $L \in E^*$, $L \neq 0$ tel que pour tout $x \in C$, $L(x) \leq 0$. On aura alors que pour tout $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$,

$$L(a_1 - a_2) \leq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad L(a_1) \leq L(a_2)\,,$$

ce qui concluera la preuve.
• D'après l'exercice 2.10, C est séparable et on peut se donner $X = \{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ dense dans C. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère alors l'enveloppe convexe des $n+1$ premiers points :

$$C_n = \operatorname{co}(x_0, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \,:\, \lambda_i \in [0,1],\, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

qui est compacte. En effet, $C_n = \Phi(\Delta_n)$ où

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to E, \quad (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \Delta_n = \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^{n+1} \,:\, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

de sorte que Φ est continue et le simplexe Δ_n est compact.
• Comme C_n est un convexe compact qui ne contient pas 0 (car $C_n \subset C$ par construction), on peut séparer strictement C_n et $\{0\}$ d'après le théorème de Hahn–Banach forme géométrique

(séparation 2) : il existe $L_n \in E^*$, $L_n \neq 0$ tel que pour tout $x \in C_n$, $L_n(x) \leq 0$ (on pourrait écrire une séparation plus forte mais on ne va pas s'en servir). Quitte à considérer $\frac{L_n}{\|L_n\|_{E^*}}$, on peut de plus supposer $\|L_n\|_{E^*} = 1$.
• Comme E est de dimension finie, E^* est également de dimension finie (de même dimension) et la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on vient de construire est bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(L_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers $L \in E^*$. Vérifions que $L \leq 0$ sur l'ensemble $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Soit $x \in D$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in C_N$. Comme la suite $(C_n)_n$ est croissante pour l'inclusion, pour tout $n \geq N$, $x \in C_n$ et donc

$$L_n(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad L(x) \leq 0\,.$$

Comme L est continue et D est dense dans C (puisque $X \subset D$) on conclut que $L \leq 0$ sur C. □

Remarque 2.29. On remarque qu'on aura appliqué une seule fois le théorème de Hahn–Banach, prolongement analytique, pour prouver les différentes séparations apparaissant dans le théorème de Hahn–Banach géométrique. Plus précisément, on l'a utilisé dans la preuve du lemme 2.26 pour montrer qu'on pouvait séparer un convexe ouvert C d'un point $x_0 \notin C$.

Afin de ne pas se restreindre par la suite aux seuls espaces vectoriels réels, on donne dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'énoncé suivant qui est une conséquence du cas réel. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel normé, cela induit une structure de $\mathbb{R}$ espace vectoriel (restriction des scalaires et de la multiplication par un scalaire) normé ($\|\cdot\|_E$ est une norme sur $E_\mathbb{R}$, et $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\ \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ donc en particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$) qu'on notera $E_\mathbb{R}$. De plus, $\|\cdot\|_E$ induit la même topologie sur E et $E_\mathbb{R}$.

Corollaire 2.30 (Hahn–Banach, forme géométrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et $C_1, C_2 \subset E$ deux convexes non vides disjoints.*

1. *Si C_1 est ouvert, il existe $\Lambda \in E^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\mathrm{Re}\ \Lambda(x) < \gamma \leq \mathrm{Re}\ \Lambda(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$
2. *Si C_1 est compact et C_2 fermé, il existe $\Lambda \in E^*$ et $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\mathrm{Re}\ \Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}\ \Lambda(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$
3. *Si E est de dimension finie, il existe $\Lambda \in E^*$ non nulle et telle que*
$$\mathrm{Re}\ \Lambda(x) \leq \mathrm{Re}\ \Lambda(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$

Preuve du corollaire 2.30. On se contente de faire la preuve dans un seul des cas de séparation, par exemple la séparation stricte, l'argument sera le même dans les deux autres cas.
Notons $E_\mathbb{R}$ l'espace E vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel (même ensemble E, même norme, même topologie, seule la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel change, plus précisément l'opération de multiplication par un scalaire qui est restreinte de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$). Les ensembles C_1 et C_2 sont encore disjoints et convexes (la convexité ne fait intervenir que des combinaisons à coefficients réels $t \in [0,1]$), C_1 est compact et C_2 est fermé (topologie inchangée).
Par le point 2 du théorème de Hahn–Banach géométrique dans le cas réel il existe $L \in (E_\mathbb{R})^*$, $L \neq 0$, et $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < L(y) \qquad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2\,.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose $\Lambda = L$, $\mathrm{Re}\, L = L$ et c'est terminé.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose $\Lambda = L - iL(i\cdot)$ de sorte qu'on a $L = \mathrm{Re}\,\Lambda$, $\Lambda \neq 0$ (car $L \neq 0$). De plus $\Lambda \in E^*$, l'additivité découle de celle de L et il suffit de vérifier l'homogénéité : soit $x \in E$, $\omega = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), par $\mathbb{R}$–linéarité de L,

$$\Lambda(\omega x) = L(\omega x) - iL(i\omega x) = \alpha L(x) + \beta L(ix) - i(\alpha L(ix) - \beta L(x)) = \alpha\Lambda(x) + i\beta\Lambda(x) = \omega\Lambda(x)\,.$$

On conclut en substituant $L = \mathrm{Re}\ \Lambda$ dans l'inégalité de séparation. □

CHAPITRE 3

Topologie faible, topologie faible étoile

On renvoie à [Bre11] pour approfondissement.

3.1 Topologie la moins fine rendant une famille d'applications continues (topologie initiale)

Supposons qu'on a une famille $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ d'applications définies sur un même ensemble X et chacune à valeurs dans un espace topologique donné : pour $i \in I$, Y_i est un espace topologique et $f_i : X \to Y_i$. On aimerait définir une topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ sur X telle que

- pour tout $i \in I$, f_i est continue,
- $\tau_{\mathcal{F}}$ est la moins fine possible, c'est-à-dire contenant le moins d'ouverts possible.

C'est un type de construction que vous avez peut-être déjà croisé lorsque vous avez défini la topologie produit. Nous allons y revenir.
Pour $i \in I$, afin de rendre f_i continue, il faut et il suffit que pour tout ouvert U de Y_i, on ait ${f_i}^{-1}(U) \in \tau_{\mathcal{F}}$. Ainsi, f_i est continue pour tout $i \in I$ si et seulement si $\tau_{\mathcal{F}}$ contient

$$\mathcal{P} = \{{f_i}^{-1}(U) \ : \ i \in I, U \text{ ouvert de } Y_i\}\,.$$

On va par conséquent définir $\tau_{\mathcal{F}}$ comme la topologie engendrée par $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la plus petite (au sens de l'inclusion) topologie contenant $\mathcal{P}$.

Définition 3.1 (Topologie initiale associée à $\mathcal{F}$)**.** La topologie initiale associée à $\mathcal{F}$, qu'on notera par la suite $\tau_{\mathcal{F}}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{P}$, c'est-à-dire

$$\tau_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\substack{\tau \text{ topologie sur } X \\ \mathcal{P}\subset\tau}} \tau\,,$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ ont été définis plus haut.

- *$\tau_{\mathcal{F}}$ définit bien une topologie sur X* : l'intersection porte sur une famille non vide car la topologie discrète, constituée de toutes les parties de X, contient en particulier $\mathcal{P}$, et de plus, une intersection quelconque (non vide) de topologies est encore une topologie (vérifier qu'elle contient $\emptyset$ et X, et qu'elle est stable par intersections finies et réunions quelconques).
- *$\tau_{\mathcal{F}}$ est la plus petite topologie contenant $\mathcal{P}$* : si τ est une topologie contenant $\mathcal{P}$, elle figure dans l'intersection et donc elle contient $\tau_{\mathcal{F}}$.
- Par choix de $\mathcal{P}$, pour tout $i \in I$, $f_i : (X, \tau_{\mathcal{F}}) \to Y_i$ est *continue*.

On dira aussi que $\mathcal{P}$ est une *prébase* de la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$, on rappelle qu'une partie $\mathcal{A}$ d'une topologie τ est appelée prébase si elle engendre τ.

Caractérisation de cette topologie. On sait de plus expliciter $\tau_{\mathcal{F}}$. Pour cela on introduit l'ensemble des intersections finies d'ensembles de $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ : \ n \in \mathbb{N},\, \forall i = 1, \dots, n,\, A_i \in \mathcal{P} \right\} ;$$

et ensuite, l'ensemble obtenu en prenant toutes les unions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$,

$$\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j \ : \ (A_j)_{j \in J} \text{ famille d'éléments de } \mathcal{B} \right\} .$$

Notons qu'on autorise l'intersection vide ($n = 0$) dans la définition de $\mathcal{B}$ de sorte que $X \in \mathcal{B}$ puis $X \in \widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$, on autorise également la réunion vide dans la définition de $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$ de sorte que $\emptyset \in \widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$.

Proposition 3.2. *L'ensemble $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$ définit bien une topologie, qui coïncide avec la topologie engendrée par $\mathcal{P}$:*

$$\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}} = \tau_{\mathcal{F}} .$$

Preuve de la proposition 3.2. Tout d'abord, $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$ est une topologie : on vient de dire qu'elle contient $\emptyset$ et X, elle est stable par union quelconque par définition et elle est stable par intersection finie en utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à l'union : pour n familles $\{A_j\}_{j \in J_1}, \dots, \{A_j\}_{j \in J_n}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \ \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$$

qui est bien dans $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$ puisque $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie (par définition) de sorte que les $\bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$ sont dans $\mathcal{B}$. C'est donc une topologie qui contient $\mathcal{P}$ (intersection et union à un élément sur la partie A) et par définition de $\tau_{\mathcal{F}}$: $\tau_{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$.
Réciproquement, $\tau_{\mathcal{F}}$ est une topologie qui contient $\mathcal{P}$, elle est en particulier stable par intersection finie et contient donc $\mathcal{B}$, elle est également stable par réunion quelconque et contient donc $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}}$: $\widetilde{\tau}_{\mathcal{F}} \subset \tau_{\mathcal{F}}$. □

On a en particulier une *prébase* $\mathcal{P}$ et une *base* $\mathcal{B}$ explicites de $\tau_{\mathcal{F}}$.
Attention, si on procède en prenant d'abord toutes les réunions quelconques et ensuite les intersections finies

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} \ : \ \{A_j\}_{j \in J_1}, \dots, \{A_j\}_{j \in J_n} \text{ familles d'éléments de } \mathcal{P} \right\}$$

ne produit pas forcément une topologie : on obtient un ensemble stable par unions finies mais pas par unions quelconques en général, on peut s'en douter en regardant la formule de distributivité suivante (et il existe des exemples explicites où la stabilité par union quelconque échoue)

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j} \ = \ \bigcap_{(i_j)_{j \in J} \in \{1, \dots, n\}^J} \ \bigcup_{j \in J} A_{i_j, j},$$

où on a pris des intersections de même taille n pour simplifier. L'intersection de droite est finie uniquement si l'union portant sur J était finie.

Exemple 3.3 (Topologie produit)**.** La topologie produit sur $X = \prod_{i\in I} Y_i$ est la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ la moins fine qui rende toutes les application de projection continues : pour tout $i \in I$, $\pi_i : X \to Y_i$, $x = (x_k)_{k\in I} \mapsto x_i$ i.e. $\mathcal{F} = \{\pi_i\}_{i\in I}$. On retrouve bien qu'une base de la topologie produit est

$$\left\{ \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \ : \ \begin{array}{l} i_1, \dots, i_n \in I \\ \forall k = 1, \dots, n,\ U_k \text{ ouvert de } Y_{i_k} \end{array} \right\}.$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_n$ distincts donnés,

$$\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k) = \prod_{i\in I} V_i \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall k = 1, \dots, n,\ V_{i_k} = U_k \text{ ouvert de } Y_{i_k} \\ \forall i \notin \{i_1, \dots, i_n\},\ V_i = Y_i \end{array} \right. .$$

Par exemple, une prébase de la topologie produit sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\{\mathbb{R} \times U \ : \ U \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} \bigcup \{U \times \mathbb{R} \ : \ U \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$$

et une base est alors donnée par

$$\{U_1 \times U_2 \ : \ U_1, U_2 \text{ ouverts de } \mathbb{R}\} .$$

En utilisant que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion d'intervalles de la forme $]a, b[$, avec $a < b$,

$$\{\mathbb{R}\times]a, b[: \ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \bigcup \{]a, b[\times\mathbb{R} \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

est également une prébase de la topologie produit.

Remarque 3.4. Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base de la topologie de Y_i, une prébase de $\tau_{\mathcal{F}}$ est donnée par

$$\mathcal{P}' = \{{f_i}^{-1}(U) \ : \ i \in I,\ U \in \mathcal{B}_i\} .$$

et une base de $\tau_{\mathcal{F}}$ est donnée par

$$\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ \forall k,\ A_k \in \mathcal{P}' \right\} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} {f_{i_k}}^{-1}(U_k) \ : \ n \in \mathbb{N},\ \forall k = 1, \dots, n,\ U_k \in \mathcal{B}_{i_k} \right\} .$$

En effet, pour U ouvert de Y_i, il existe $(U_j)_{j\in J}$ ouverts de la base $\mathcal{B}_i$ tels que $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ de sorte que

$$f_i^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(U_j)$$

et la topologie τ engendrée par $\mathcal{P}'$ contient $f_i^{-1}(U)$ (stabilité par union quelconque), pour tout $i \in I$, et donc $\mathcal{P}$. Par minimalité de $\tau_{\mathcal{F}}$, on a $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$. Et comme $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, on a par construction $\tau \subset \tau_{\mathcal{F}}$ d'où l'égalité.

La proposition suivante permet de caractériser les suites convergentes pour la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$. Attention cependant, la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ n'est pas caractérisée par ses suites convergentes en général. On rappelle qu'il existe des espaces topologiques (X, τ_1), (X, τ_2) distincts ($\tau_1 \neq \tau_2$) qui ont exactement les mêmes suites convergentes. On rappelle également que cela n'arrive pas si (X, τ_1) et (X, τ_2) sont des espaces topologiques induits par des espaces métriques, dans un espace métrique, la topologie associée est caractérisée par la donnée des suites convergentes. Au-delà du cadre métrique, c'est encore vrai pour les espaces topologiques (X, τ) dits *à base dénombrable de voisinages*, c'est-à-dire tels que tout point $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages : il existe une famille dénombrable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x telle que tout voisinage V de x contient un V_n. C'est bien le cas d'un espace métrique (X, d), en considérant pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = B(x, \frac{1}{n})$.

Proposition 3.5 (Critère de convergence des suites)**.** *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(X,\tau_{\mathcal{F}})$ si et seulement si $f_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_i(x)$ dans Y_i pour tout $i \in I$.*

Preuve. Commençons par vérifier le sens direct, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers $x \in X$ au sens de la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$. Soit $i \in I$, par continuité de f_i on a bien $f_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_i(x)$. Réciproquement, soit V un voisinage de x, vérifions que $x_n \in V$ à partir d'un certain rang. Comme V est un voisinage de x, il existe un ouvert $\omega \subset V$ contenant x, on sait que $\omega = \bigcup_{j\in J} \omega_j$ est réunion de $\omega_j \in \mathcal{B}$, en particulier, il existe $j_0 \in J$, tel que $x \in \omega_{j_0}$. Écrivons

$$\omega_{j_0} = \bigcap_{k=1}^{m} f_{i_k}^{-1}(U_k) \quad \text{avec pour tout } k = 1,\dots,m, \quad U_k \text{ ouvert de } Y_{i_k}\,.$$

Soit $k \in [|1,m|]$. D'une part, $x \in \omega_{j_0}$ donc $x \in f_{i_k}^{-1}(U_k)$, de sorte que U_k est un voisinage de $f_{i_k}(x)$. De plus, $f_{i_k}(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_{i_k}(x)$, de sorte qu'il existe $N_k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_k$, $f_{i_k}(x_n) \in U_k$ i.e. $x_n \in f_{i_k}^{-1}(U_k)$. On a finalement en prenant $N = \max_{k=1\dots m} N_k$, pour tout $n \geq N$,

$$x_n \in \bigcap_{k=1}^{m} f_{i_k}^{-1}(U_k) = \omega_{j_0} \subset V\,,$$

ce qu'on voulait montrer. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers x. □

Proposition 3.6 (Topologie induite par $\tau_{\mathcal{F}}$ sur une partie de X)**.** *Soit $A \subset X$. La topologie induite par $\tau_{\mathcal{F}}$ sur A coïncide avec la topologie initiale associée à la famille $\mathcal{F}_{|A} = \{(f_i)_{|A}\}_{i\in I}$.*

Preuve de la proposition 3.6. Par définition de la topologie induite $(\tau_{\mathcal{F}})_{|A}$ sur A par $\tau_{\mathcal{F}}$, on a

$$(\tau_{\mathcal{F}})_{|A} = \{A \cap V \,:\, V \in \tau_{\mathcal{F}}\}\,.$$

Par définition de la topologie initiale $\tau_{\mathcal{F}_{|A}}$ associée aux restrictions sur A, on a une prébase de $\tau_{\mathcal{F}_{|A}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{|A} &= \{(f_i)_{|A}^{-1}(U) \,:\, i \in I,\, U \text{ ouvert de } Y_i\} = \{A \cap f_i^{-1}(U) \,:\, i \in I,\, U \text{ ouvert de } Y_i\}\\ &= \{A \cap P \,:\, P \in \mathcal{P}\}\,.\end{aligned}$$

• On voit que $\mathcal{P}_{|A} \subset (\tau_{\mathcal{F}})_{|A}$ et par définition de topologie initiale associée à $\mathcal{F}_{|A}$ (engendrée par $\mathcal{P}_{|A}$), on en déduit $\tau_{\mathcal{F}_{|A}} \subset (\tau_{\mathcal{F}})_{|A}$.
• Réciproquement, soit $W \in (\tau_{\mathcal{F}})_{|A}$ un ouvert de A pour la topologie induite, de sorte qu'il existe $V \in \tau_{\mathcal{F}}$ tel que $W = A \cap V$. Par caractérisation de $\tau_{\mathcal{F}}$, on peut écrire

$$V = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} P_{k,j}, \qquad P_{k,j} \in \mathcal{P}\,.$$

et par distributivité de l'intesection,

$$W = A \cap \bigcup_{j\in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} P_{k,j} = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} \underbrace{(A \cap P_{k,j})}_{\in \tau_{\mathcal{F}_{|A}}}\,.$$

Donc $W \in \tau_{\mathcal{F}_{|A}}$. D'où $(\tau_{\mathcal{F}})_{|A} \subset \tau_{\mathcal{F}_{|A}}$. □

La proposition suivante caractérise la continuité des applications à valeurs dans $(X,\tau_{\mathcal{F}})$.

Proposition 3.7 (Propriété universelle de la topologie initiale : caractérisation de la continuité d'une fonction à valeurs dans X)**.** *Soit Z un espace topologique et $g : Z \to X$. Alors g est continue (pour $(X,\tau_{\mathcal{F}})$) si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue.*

On pourrait vérifier que cette proposition caractérise la topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ sur X et on aurait pu la définir par cette propriété. Plus précisément, $\tau_{\mathcal{F}}$ est l'unique topologie sur X qui satisfait :

pour tout espace topologique Z, pour tout $g : Z \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$,

$$g \text{ continue} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I,\ f_i \circ g \text{ continue.}$$

C'est cette propriété qu'on appelle propriété universelle de la topologie initiale et qui la caractérise. On pourrait d'ailleurs en déduire le critère de convergence d'une suite énoncé à la proposition 3.5, en prenant

- $Z = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni d'une topologie τ qui traduit la convergence quand $n \to \infty$ en continuité en ∞,
- $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$, $g(\infty) = x$ et $g(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Plus précisément, on peut définir τ comme suit : soit $U \subset \overline{\mathbb{N}}$, $U \in \tau$ si et seulement si $U \subset \mathbb{N}$ ou ($\infty \in U$ et $\overline{\mathbb{N}} \setminus U$ est une partie finie). Avec cette définition, une base de voisinages de ∞ est $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$ avec

$$V_N = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geq N\} \cup \{\infty\}\,.$$

Exercice 3.1. Prouver la proposition 3.7.

3.2 Topologie faible

Soit E un espace vectoriel normé, on va appliquer la construction qu'on vient d'étudier afin de définir la topologie la moins fine possible qui rend toutes les applications de E^* continues.

Définition 3.8 (Topologie faible sur E)**.** Soit E un espace vectoriel normé. La topologie initiale $\tau_{\mathcal{F}}$ associée à la famille $\mathcal{F} = E^*$ des formes linéaires continues $(E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{K}$ est la topologie la moins fine pour laquelle toute $L \in E^*$ est continue, vue comme $L : (E, \tau_{\mathcal{F}}) \to \mathbb{K}$. Cette topologie est généralement appelée *topologie faible sur* E, souvent notée $\sigma(E, E^*)$.

Bien sûr, on connaît déjà une topologie qui rend toutes les applications de E^* continues : la topologie de la norme $\|\cdot\|_E$ sur E, qu'on appelle souvent par opposition *topologie forte*, c'est tautologique puisque E^* est l'ensemble des formes linéaires qui sont continues relativement à $(E, \|\cdot\|_E)$. En définissant la topologie faible, on cherche une topologie moins fine, c'est-à-dire contenant moins d'ouverts que la topologie induite par la norme de E, mais en gardant exactement le même ensemble de formes linéaires continues.
Comme on va l'expliquer, la motivation pour essayer de construire une topologie moins fine réside dans le gain potentiel de compacité. Cela aura un intérêt uniquement lorsque E n'est pas de dimension finie, on va d'ailleurs vérifier que lorsque E est de dimension finie, la topologie faible coïncide avec la topologie de la norme $\|\cdot\|_E$ sur E.
Pourquoi espère-t-on gagner en compacité en retirant des ouverts ? Si on revient à la définition de partie compacte : soit (X, τ) un espace topologique séparé, $K \subset X$ est compact si et seulement si, de tout recouvrement de K par des ouverts de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini de K. On voit que moins on a d'ouverts, moins on a de recouvrements possibles et on peut ainsi espérer avoir plus de parties compactes.
Il y a une contrepartie, si on a moins d'ouverts dans notre topologie sur E, la préimage d'un ouvert de Y par une application $f : E \to Y$ sera moins souvent un ouvert de E, on aura moins d'applications continues sur E.

Proposition 3.9. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E satisfait :*

(*i*) *Une base d'ouverts de $\sigma(E, E^*)$ est*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} {L_k}^{-1}(B(x_k, r_k)) \,:\, \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\, \forall k = 1, \ldots, n, \\ L_k \in E^*,\, x_k \in \mathbb{K},\, r_k > 0 \end{array} \right\}.$$

(*ii*) *Une base de voisinages de* $x_0 \in E$ *pour* $\sigma(E, E^*)$ *est donnée par les ouverts faibles*

$$V(x_0; L_1, \dots, L_n; r) = \{x \in E : |L_i(x) - L_i(x_0)| < r,\ i = 1, \dots, n\}\,,$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $L_1, \dots, L_n \in E^*$, $r > 0$.

(*iii*) $\sigma(E, E^*)$ *est moins fine que la topologie forte* $\tau_{\|\cdot\|_E}$ *(topologie de la norme) sur* E *:*

$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}\,.$$

Plus précisément,

(*a*) *si* E *est de dimension finie, les topologies faibles et fortes coïncident,*

(*b*) *si* E *est de dimension infinie,* $\sigma(E, E^*) \neq \tau_{\|\cdot\|_E}$ *et tout ouvert faible non vide est non borné et contient une droite.*

(*iv*) $\sigma(E, E^*)$ *est séparée.*

Preuve de la proposition 3.9.

(*i*) Une base d'ouverts de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est donnée par l'ensemble des boules ouvertes $B(x, r)$ pour $x \in \mathbb{K}$ et $r > 0$. En appliquant la remarque 3.4, on en déduit qu'une base d'ouverts pour la topologie faible sur E est donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} {L_k}^{-1}(B(x_k, r_k)) \ :\ n \in \mathbb{N},\, \forall k = 1, \dots, n,\, x_k \in \mathbb{K},\, r_k > 0 \right\}\,.$$

(*ii*) Soit $x_0 \in E$. En utilisant (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout L_1, ..., $L_n \in E^*$, $r > 0$,

$$V(x_0; L_1, \dots, L_n; r) = \bigcap_{k=1}^{n} L_k^{-1}\big(B(L_k(x_0), r)\big)$$

est un ouvert contenant x_0.

Vérifions que c'est bien une base de voisinages de x_0 : soit $\omega \subset E$ un ouvert (faible) de E contenant x_0, vérifions que ω contient un ouvert $V(x_0; L_1, \dots, L_n; r)$ de la forme précédente. On sait que ω est réunion d'ouverts de la base $\mathcal{B}$ dont au moins l'un contient x_0. Soit donc $W = \bigcap_{k=1}^{n} {L_k}^{-1}(B(x_k, r_k)) \subset \omega$ contenant x_0, de sorte que pour tout $k \in [|1, n|]$, $L_k(x_0) \in B(x_k, r_k)$, et il existe donc $s_k > 0$ tel que $B(L_k(x_0), s_k) \subset B(x_k, r_k)$ et donc ${L_k}^{-1}(B(L_k(x_0), s_k)) \subset {L_k}^{-1}(B(x_k, r_k))$. En prenant $r = \min_{k=1\dots n} s_k$, on en déduit que

$$V(x_0; L_1, \dots, L_n; r) \subset \omega\,.$$

On conclut en observant que pour $k \in [|1, n|]$,

$$L_k^{-1}\big(B(L_k(x_0), r)\big) = \{x \in E \ :\ |L_k(x) - L_k(x_0)| < r\}\,.$$

(*iii*) Par construction, $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la moins fine telle que tout $L \in E^*$ est continue, c'est-à-dire la plus petite topologie pour l'inclusion qui contient

$$\mathcal{P} = \left\{ L^{-1}(U) \ :\ L \in E^*,\, U \text{ ouvert de } \mathbb{K} \right\}\,.$$

On sait que la topologie forte $\tau_{\|\cdot\|_E}$ vérifie que tout $L \in E^*$ est continue, c'est la définition de E^*, de sorte que $\mathcal{P} \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$. Par minimalité de $\sigma(E, E^*)$, on a bien $\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$.

(a) Comme on a déjà $\sigma(E,E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$, il nous suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit $\omega \subset E$ un ouvert (non vide) pour $\|\cdot\|_E$ et soit $x_0 \in \omega$, comme ω est un ouvert pour $\|\cdot\|_E$, il existe $r>0$, tel que $B_E(x_0,r) \subset \omega$. Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base de E, et notons $(\ell_1,\dots,\ell_d)$ la base duale de E^*, on rappelle que pour $i=1,\dots,d$, $\ell_i(x_1e_1+\dots+x_de_d)=x_i$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{d} \ell_i^{-1}\left(B(\ell_i(x_0),r)\right) &= \{x_1e_1+\dots+x_de_d \in E \,:\, \forall i=1,\dots,d,\ |x_i-(x_0)_i|<r\}\\ &= B_E(x_0,r)\end{aligned}$$

si $\|x\|_E = \|x\|_\infty = \max_{i=1\dots d}|x_i|$. Dans ce cas, on a écrit $B_E(x_0,r)$ comme un ouvert faible (de la base $\mathcal{B}$) par (i) de sorte que ω contient un ouvert faible voisinage de x_0, c'est vrai pour tout $x_0 \in \omega$. On vient de montrer que ω est voisinage faible de chacun de ses points et est donc ouvert faible.

Dans le cas d'une norme $\|\cdot\|_E$ quelconque, par équivalence des normes en dimension finie, on sait que $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ induisent la même topologie, ce qui conclut la preuve.

(b) Soit $U \subset E$ un ouvert faible non vide. Montrons qu'il contient une droite.

Soit $x_0 \in U$. On sait alors que U est voisinage faible de x_0. D'après (ii), cela signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $L_1,\dots,L_n \in E^*$ et $r>0$ tels que $x_0 \in V(x_0;L_1,\dots,L_n;r) \subset U$. On rappelle que

$$V(x_0;L_1,\dots,L_n;r) = \{x \in E : |L_i(x-x_0)|<r,\ \forall i=1,\dots,n\},$$

et contient en particulier

$$\left\{ x = x_0 + y \ :\ y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i = \ker \Lambda \right\}$$

où $\Lambda : E \to \mathbb{K}^n$, $y \mapsto (L_1(y),\dots,L_n(y))$ qui n'est pas injective ($\dim E = \infty > n = \dim \mathbb{K}^n$). En particulier $\ker\Lambda$ est un sous-espace vectoriel non trivial (donc non borné) et $\ker\Lambda \subset U$. On en déduit que U est non borné et contient une droite.

On en déduit que $B_E(0,1)$, qui est ouverte pour la topologie de la norme, est d'intérieur vide pour la topologie faible. Cela nous donne un ouvert dans $\tau_{\|\cdot\|_E}$ qui n'est pas dans $\sigma(E,E^*)$.

(iv) Soit $x,y \in E$, $x \neq y$, on cherche des ouverts faibles de E : ω_x, ω_y disjoints et tels que $x \in \omega_x$ et $y \in \omega_y$. On peut appliquer le corollaire 2.9 : soit $L \in E^*$ telle que $L(x) \neq L(y)$ et soit $r>0$ tel que $B(L(x),r) \cap B(L(y),r) = \emptyset$. En posant $\omega_x = L^{-1}\left(B(L(x),r)\right)$ et $\omega_y = L^{-1}\left(B(L(y),r)\right)$, on a par définition $x \in \omega_x$, $y \in \omega_y$ et $\omega_x \cap \omega_y = \emptyset$. Les ensembles ω_x et ω_y sont des ouverts faibles car dans $\mathcal{B}$ par (i).

□

Voyons à présent comment se traduit la topologie faible en termes de convergence de suites. On notera à partir de maintenant $x_n \rightharpoonup x$ pour dire qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers x. On conservera la notation générique $x_n \to x$ pour désigner la convergence pour la topologie de la norme.

Proposition 3.10. *Soit E un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si pour tout $L \in E^*$, $L(x_n) \to L(x)$.

(ii) $x_n \to x \quad\Longrightarrow\quad x_n \rightharpoonup x$.

(iii) (Semi-continuité.) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_E$.

(*iv*) *(Bi-continuité.) Si* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $L_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E^*}} L$ *alors* $L_n(x_n) \to L(x)$.

Preuve de la proposition 3.10.

(*i*) C'est la traduction au cas particulier de $\mathcal{F} = E^*$ sur E de la proposition 3.5.

(*ii*) Soit $L \in E^*$, par continuité forte de L, on a bien $L(x_n) \to L(x)$ et on conclut grâce à (*i*). On peut aussi directement le voir avec les définitions, soit V un voisinage faible de x dans E, c'est en particulier un voisinage fort ($\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$) et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$.

(*iii*) On rappelle que $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ est un espace de Banach sur lequel on a défini les formes linéaires continues d'évaluation en $y \in E$, $\Phi_y : L \in E^* \mapsto L(y)$; on a montré que $\|\Phi_y\|_{\mathcal{L}(E^*,\mathbb{K})} = \|y\|_E$. D'après (*i*), pour tout $L \in E^*$, $(L(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc en particulier bornée dans $\mathbb{K}$. La famille d'applications linéaires continues $(\Phi_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'espace de Banach E^* satisfait : pour tout $L \in E^*$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi_{x_n}(L)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |L(x_n)| < \infty\,.$$

D'après le théorème de Banach–Steinhaus, il vient que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi_{x_n}\|_{\mathcal{L}(E^*,\mathbb{K})} < \infty\,.$$

Comme $\|x_n\|_E = \|\Phi_{x_n}\|_{\mathcal{L}(E^*,\mathbb{K})}$ on en déduit que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$.
Par le corollaire 2.8, il existe $L \in E^*$ tel que $\|L\|_{E^*} = \|x\|_E$ et $L(x) = \|x\|_E^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L(x_n)| \leq \|L\|_{E^*} \|x_n\|_E = \|x\|_E \|x_n\|_E$.
Par convergence faible, $L(x_n) \to L(x) = \|x\|_E^2$. En passant à la lim inf dans l'inégalité $|L(x_n)| \leq \|x\|_E \|x_n\|_E$:

$$\|x\|_E^2 = \lim_n |L(x_n)| = \liminf_n |L(x_n)| \;\leq\; \liminf_n \left(\|x\|_E \|x_n\|_E \right) = \|x\|_E \cdot \liminf_n \|x_n\|_E\,.$$

Si $x \neq 0$, on peut diviser par $\|x\|_E > 0$ et si $x = 0$, l'inégalité $\|x\|_E = 0 \leq \liminf_n \|x_n\|_E$ est bien vérifiée.

(*iv*) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|L_n(x_n) - L(x)| \leq |L_n(x_n) - L(x_n)| + |L(x_n) - L(x)|$$

D'après (*i*), $|L(x_n) - L(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et de plus, on sait par le point (*iii*) que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M \geq 0$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|L_n(x_n) - L(x_n)| \leq \|L_n - L\|_{E^*} \|x_n\|_E \leq M \|L_n - L\|_{E^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

□

Exercice 3.2 (Convergence faible dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$)**.** Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, [1] $\varphi \neq 0$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \varphi(\cdot - n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 et pas fortement.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \sqrt{n}\varphi(n\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(v_n)_n$ converge faiblement vers 0 et pas fortement.

Exercice 3.3. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est fortement continue si et seulement si elle est faiblement continue :

$$T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F) \text{ continue} \quad \Longleftrightarrow \quad T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*)) \text{ continue.}$$

1. Si vous n'en avez jamais vu, on en reparlera bientôt...

On a montré que la boule "ouverte" $B_E(0,1)$ est loin d'être ouverte faiblement puisqu'elle est d'intérieur faible vide. En général les ouverts et les fermés ne sont pas les mêmes pour la topologie forte et la topologie faible en dimension infinie. Il y a cependant le cas remarquable suivant concernant les ensembles convexes.

Théorème 3.11 (Mazur)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un ensemble convexe. Alors, C est fermé pour la topologie de la norme si et seulement si C est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Preuve du théorème 3.11. • ($\Leftarrow$) La topologie faible étant moins fine que la topologie forte, $\sigma(E,E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$, par passage au complémentaire,

$$\{E \setminus U \,:\, U \in \sigma(E,E^*)\} \subset \{E \setminus U \,:\, U \in \tau_{\|\cdot\|_E}\}$$

on a l'inclusion analogue concernant les fermés, i.e. un fermé faible est a fortiori fermé fort.
• ($\Rightarrow$) Si $C = E$, C est fortement et faiblement fermé. Sinon, soit $x_0 \in E \setminus C$, on applique la séparation stricte du théorème de Hahn–Banach avec $C_1 = \{x_0\}$ convexe fortement compact disjoint de C convexe fortement fermé : on obtient $\Lambda \in E^*$ et $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\text{Re } \Lambda(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < \text{Re } \Lambda(y) \qquad \forall y \in C\,.$$

On peut alors introduire $W = \{x \in E : \text{Re}(\Lambda(x)) < \gamma_1\} = \Lambda^{-1}\big(\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < \gamma_1\}\big)$. Comme $\{z : \text{Re}(z) < \gamma_1\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et Λ est continue pour $\sigma(E,E^*)$, on en déduit que $W \subset E\setminus C$ est un ouvert faible de E contenant x_0. On en déduit que $E \setminus C$ est ouvert faible (voisinage faible de chacun de ses points) et C est donc faiblement fermé.

□

Pour les curieux et les curieuses, l'exercice suivant donne un exemple d'espace vectoriel normé E pour lequel la topologie faible $\sigma(E,E^*)$ et la topologie de la norme

- ont exactement les mêmes suites convergentes,
- sont distinctes car E est de dimension infinie ($(iii)(b)$ de la proposition 3.9).

Exercice 3.4 (Théorème de Schur)**.** On rappelle les notations

- ℓ^∞ est l'ensemble des suites réelles bornées, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$,
- ℓ^1 est l'ensemble des suites réelles absolument convergentes, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

1. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, vérifier que $L_u : \ell^1 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ est bien définie et que c'est une forme linéaire continue : $L_u \in (\ell^1)^*$.
2. Vérifier que l'application $I : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, $u \mapsto L_u$ est linéaire continue et bijective qui est de plus isométrique.
3. Soit $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, x des éléments de ℓ^1. On suppose que $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x. Le but de la fin de l'exercice est de montrer que la suite $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans ℓ^1. On suppose par l'absurde que $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers x dans ℓ^1. Montrer qu'il existe une suite $\big(y^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 satisfaisant
$$y^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \big\|y^{(n)}\big\|_1 = 1\,.$$
4. Soit $j \in \mathbb{N}$, justifier que
$$\sum_{i=0}^{j} \big|y_i^{(n)}\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

5. En utilisant la question précédente et le fait que, à $n \in \mathbb{N}$ fixé cette fois-ci, $\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$, construire deux suites $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissantes satisfaisant $j_0 = n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n_k)}\right| \geq \frac{3}{4} \quad \text{et pour tout } n \geq n_{k+1}, \ \sum_{i=0}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n)}\right| \leq \frac{1}{8}\,.$$

6. On définit à présent la suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $\gamma_i = \operatorname{sgn}\left(y_i^{(n_k)}\right)$ pour $i \in [|j_k, j_{k+1} - 1|]$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i y_i^{(n_k)} \geq \frac{3}{8}$$
et conclure.

On termine la section en proposant une définition alternative (équivalente) de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

Définition 3.12 (Semi-norme)**.** Une *semi-norme* sur un espace vectoriel E est une application $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{et} \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$
C'est une jauge symétrique, on a déjà croisé la notion lorsqu'on a énoncé une version du théorème de prolongement de Hahn–Banach adapté aux espaces vectoriels complexes.

Définition 3.13 (Espace vectoriel semi-normé)**.** Un *espace vectoriel semi-normé* $(E, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel E muni d'une famille de semi-normes $\mathcal{P}$.
On le munit de la topologie $\sigma_{\mathcal{P}}$ engendrée par les semi-boules $B_p(x, r)$, avec $p \in \mathcal{P}$, $x \in E$ et $r > 0$, où
$$B_p(x, r) = \{y \in E \ : \ p(y - x) < r\}\,.$$
Une base d'ouverts de $\sigma_{\mathcal{P}}$ est donnée par
$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} B_{p_k}(x_k, r_k) \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } k,\, p_k \in \mathcal{P},\, x_k \in E,\, r_k > 0 \right\}\,.$$

Proposition 3.14. *La topologie $\sigma(E, E^*)$ coïncide avec la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_A : A \subset E^* \text{ partie finie}\}$ où p_A est définie comme*
$$p_A(x) = \sup_{L\in A} |L(x)| = \sup_{k=1\ldots n} |L_k(x)|\,,$$
en écrivant $A = \{L_k\}_{k=1\ldots n} \subset E^*$.

Preuve de la proposition 3.14. On rappelle qu'une base d'ouvert de $\sigma(E, E^*)$ est donnée par
$$\mathcal{B}_\sigma = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} {L_k}^{-1}(B(x_k, r_k)) \ : \ n \in \mathbb{N},\, \forall k = 1, \ldots, n,\, x_k \in \mathbb{K},\, r_k > 0 \right\}\,.$$
• Vérifions que $\sigma_{\mathcal{P}} \subset \sigma(E, E^*)$. Soit $A = \{L_1, \ldots, L_n\} \subset E^*$ fini, $x \in E$, $r > 0$:
$$\begin{aligned} B_{p_A}(x, r) &= \{y \in E : p_A(x - y) < r\} = \{y : \max_k |L_k(x - y)| < r\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} \{y : |L_k(x) - L_k(y)| < r\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} L_k^{-1}\left(B(L_k(x), r)\right) \end{aligned}$$

et donc $B_{p_A}(x,r) \in \mathcal{B}_\sigma \subset \sigma(E,E^*)$ qui est une topologie. La topologie engendrée par les semi-boules satisfait donc $\sigma_\mathcal{P} \subset \sigma(E,E^*)$.
• La topologie $\sigma(E,E^*)$ est engendrée par les $L^{-1}(B(x,r))$ pour $L \in E^*$, $x \in \mathbb{K}$ et $r > 0$. Soit donc $V = L^{-1}(B(x,r))$ de cette forme. Si $L = 0$, $V = E$ ou $V = \emptyset$ (selon que $0 \in B(x,r)$ ou pas) et si $L \neq 0$, il existe $u \in E$ tel que $x = L(u)$ et donc

$$V = \{y \in E \,:\, |L(y) - x| < r\} = \{y \in E \,:\, |L(y-u)| < r\} = B_{p_A}(u,r)$$

avec $A = \{L\} \subset E^*$ finie. Donc $V \in \sigma_\mathcal{P}$ qui est une topologie, de sorte que $\sigma(E,E^*) \subset \sigma_\mathcal{P}$ (topologie engendrée par les $V = L^{-1}(B(x,r))$). □

3.3 Topologie faible étoile

Soit E un espace vectoriel normé, on va à présent définir une topologie sur E^*, qui est un espace de Banach. On dispose déjà sur E^* de

- la topologie de la norme $\|\cdot\|_{E^*}$,
- la topologie faible $\sigma(E^*,E^{**})$.

On va définir une topologie encore moins fine que la topologie faible $\sigma(E^*,E^{**})$ sur E^*, appelée topologie faible étoile. C'est une topologie initiale, de même que la topologie faible, mais on va réduire la famille $\mathcal{F}$ des applications qu'on veut rendre continues. Au lieu de considérer $\mathcal{F} = E^{**}$, comme on le fait pour la topologie faible $\sigma(E^*,E^{**})$, on va définir $\mathcal{F} = \{\Phi_x\}_{x\in E} \subset E^{**}$. Rappelons que pour $x \in E$, on avait introduit l'évaluation en x, $\Phi_x : E^* \to \mathbb{K}$, $L \mapsto L(x)$. On avait établi que $\Phi_x \in E^{**}$ et de plus $\|\Phi_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$.

Définition 3.15 (Topologie faible étoile sur E^*)**.** Soit E un espace vectoriel normé. La topologie initiale $\tau_\mathcal{F}$ associée à la famille $\mathcal{F} = \{\Phi_x\}_{x\in E} \subset E^{**}$ des évaluations est la topologie la moins fine pour laquelle toute évaluation Φ_x, $x \in E$ est continue, vue comme $\Phi_x : (E^*,\tau_\mathcal{F}) \to \mathbb{K}$. Cette topologie est généralement appelée *topologie faible étoile sur* E^*, souvent notée $\sigma(E^*,E)$.

On a alors les inclusions suivantes de topologies sur E^* :

$$\sigma(E^*,E) \subset \sigma(E^*,E^{**}) \subset \tau_{\|\cdot\|_{E^*}}\,. \tag{3.1}$$

On a déjà vu dans la proposition 3.9 que l'inclusion $\sigma(E^*,E^{**}) \subset \tau_{\|\cdot\|_{E^*}}$ est une égalité si et seulement si E^* (et donc E) est de dimension finie. L'inclusion $\sigma(E^*,E) \subset \sigma(E^*,E^{**})$ est une égalité dans le cas d'un espace réflexif, la topologie faible sur E^* étant engendrée par E^{**} et la topologie faible étoile par les évaluations $J(E)$, et par définition $E^{**} = J(E)$ pour un espace réflexif E.
L'importance de la topologie faible étoile réside dans la propriété de compacité suivante.

Théorème 3.16 (Banach–Alaoglu)**.** *La boule unité fermée (pour la norme)*

$$\overline{B_{E^*}(0,1)} = \{L \in E^* \,:\, \|L\|_{E^*} \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*,E)$.

Considérons à présent E^* comme un sous-ensemble de $\mathbb{K}^E$ (applications de E dans $\mathbb{K}$) et plus précisément, on introduit l'injection

$$\Psi : \big(E^*, \sigma(E^*,E)\big) \to \big(\mathbb{K}^E, \tau_\Pi\big)\,, \quad L \mapsto (L(x))_{x\in E}$$

où τ_Π désigne la topologie produit sur $\mathbb{K}^E = \prod_{x\in E}\mathbb{K}$. On notera Ψ^{-1} la réciproque de Ψ restreinte à son image $\Psi(E^*)$ au but. Notons que

- la topologie produit τ_Π sur $\mathbb{K}^E$ est la topologie initiale associée à la famille des projections $\{\pi_x\}_{x\in E}$ où $\pi_x : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$;

- la topologie $\sigma(E^*, E)$ sur E^* est la topologie initiale associée à la famille des évaluations $\{\Phi_x\}_{x\in E}$ où $\Phi_x : E^* \to \mathbb{K}$, $L \mapsto L(x)$, c'est-à-dire $\Phi_x = \pi_x \circ \Psi$ ou encore $\Phi_x \circ \Psi^{-1} = \pi_{x|\Psi(E^*)}$.

En particulier, on ne sera pas surpris ou surprises d'apprendre que Ψ est un homéomorphisme sur son image.

Proposition 3.17. *L'injection $\Psi : \big(E^*, \sigma(E^*, E)\big) \to \big(\mathbb{K}^E, \tau_\Pi\big)$ réalise un homéomorphisme sur son image. La topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ est en particulier séparée.*

Preuve de la proposition 3.17. Par définition, Ψ est injective donc bijective sur son image. Vérifions la bi-continuité à partir de la proposition 3.7 (propriété universelle de la topologie initiale). Pour montrer que Ψ est continue, on doit montrer que $\forall x \in E$, $\pi_x \circ \Psi : \big(E^*, \sigma(E^*, E)\big) \to \mathbb{K}$ est continue, et $\pi_x \circ \Psi = \Phi_x$ qui est bien continue pour $\sigma(E^*, E)$ par définition-même de cette topologie.
Réciproquement, pour montrer que $\Psi^{-1} : \big(\Psi(E^*), \tau_{\Pi|\Psi(E^*)}\big) \to \big(E^*, \sigma(E^*, E)\big)$ est continue, on doit montrer que pour tout $x \in E$, $\Phi_x \circ \Psi^{-1} : \big(\Psi(E^*), \tau_{\Pi|\Psi(E^*)}\big) \to \mathbb{K}$ est continue. On rappelle que la topologie produit induite sur $\Psi(E^*)$ est la topologie produit associée à $(\pi_{x|\Psi(E^*)})_{x\in E}$ par la proposition 3.6, en particulier $(\pi_x)_{|\Psi(E^*)} = \Phi_x \circ \Psi^{-1}$ est continue sur $\big(\Psi(E^*), \tau_{\Pi|\Psi(E^*)}\big)$.
Comme un produit quelconque d'espaces séparés est séparé pour la topologie produit, on en déduit que $\mathbb{K}^E$ est séparé, en particulier, $\Psi(E^*) \subset \mathbb{K}^E$ est également séparé pour τ_Π et donc $(E^*, \sigma(E^*, E))$ est séparé par l'homéomorphisme Ψ. □

La preuve du théorème 3.16 repose sur l'homéomorphisme Ψ qu'on vient d'introduire et sur le théorème de Tychonoff qu'on rappelle ici.

Théorème 3.18 (Tychonoff)**.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques compacts. Alors le produit*

$$X = \prod_{i\in I} X_i$$

muni de la topologie produit, est compact.

Les démonstrations du théorème de Tychonoff reposent sur le lemme de Zorn/l'axiome du choix.

Preuve du théorème 3.16.
• Soit $L \in \overline{B_{E^*}(0,1)}$, pour tout $x \in E$, $|L(x)| \leq \|L\|_{E^*} \|x\|_E \leq \|x\|_E$ de sorte que

$$\Psi\left(\overline{B_{E^*}(0,1)}\right) \subset K \quad \text{où} \quad K = \prod_{x\in E} \overline{B_{\mathbb{K}}(0, \|x\|_E)}$$

est compact pour la topologie produit d'après de le théorème de Tychonoff. Comme Ψ est un homéomorphisme sur son image,

$$\begin{aligned} & \overline{B_{E^*}(0,1)} \text{ est compacte pour la topologie étoile } \sigma(E^*, E) \\ \iff \quad & \Psi\left(\overline{B_{E^*}(0,1)}\right) \text{ est compacte pour la topologie produit } \tau_\Pi\,. \end{aligned}$$

• Vérifions que $\Psi(\overline{B_{E^*}(0,1)})$ est fermé dans K. Soit $f = (f_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E$, $f \in \Psi(\overline{B_{E^*}(0,1)})$ si et seulement si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f_{x+\lambda y} = f_x + \lambda f_y \quad \text{et} \quad |f_x| \leq \|x\|_E\,.$$

On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{B_{E^*}(0,1)}) &= K \cap \left\{(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E \;:\; f_{x+\lambda y} = f_x + \lambda f_y,\, \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}\right\} \\ &= K \cap \bigcap_{\substack{x,y\in E \\ \lambda\in\mathbb{K}}} A_{x,y,\lambda} \quad \text{où} \quad A_{x,y,\lambda} = \left\{(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E \;:\; f_{x+\lambda y} = f_x + \lambda f_y\right\}\,. \end{aligned}$$

Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut réécrire

$$A_{x,y,\lambda} = \left\{ f = (f_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E \ : \ \pi_{x+\lambda y}(f) = \pi_x(f) + \lambda \pi_y(f) \right\} = \left(\pi_{x+\lambda y} - \pi_x - \lambda\pi_y\right)^{-1}(\{0\})$$

qui est donc fermé dans $(\mathbb{K}^E, \tau_\Pi)$ car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$ et $\pi_{x+\lambda y} - \pi_x - \lambda\pi_y : (\mathbb{K}^E, \tau_\Pi) \to \mathbb{K}$ est continue car chaque projection π_z ($z \in E$) est continue par définition de la topologie produit τ_Π. Par intersection de fermés, on en déduit que $\Psi(\overline{B_{E^*}(0,1)})$ est fermé dans K donc compact (toujours pour la topologie produit). On conclut que $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ est compacte pour la topologie faible étoile grâce à la première partie de la preuve. □

La topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ sur E^* est la topologie la moins fine rendant les formes évaluations continues. Cela ne dit pas a priori si d'autres formes linéaires de E^{**} sont continues pour $\sigma(E^*, E)$. La proposition suivante répond à la question : les seuls éléments de E^{**} faiblement étoile continus sont les formes évaluation.

Proposition 3.19 (Caractérisation des formes linéaires faiblement étoile continues sur E^*)**.** *Les formes linéaires faiblement étoile continues sont exactement les formes évaluation :*

$$\{\xi \in E^{**} \ : \ \xi : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to \mathbb{K} \text{ est continue}\} = J(E) = \{\Phi_x \ : \ x \in E\}$$

On note qu'une forme linéaire $\xi : E^* \to \mathbb{K}$ faiblement étoile continue est a fortiori fortement continue et donc $\xi \in E^{**}$ automatiquement.
La preuve de la proposition repose sur le lemme des noyaux qui est un résultat purement linéaire que je vous laisse le soin de redémontrer et qui est la brique algébrique du théorème des extrema liés.

Lemme 3.20 (Lemme des noyaux)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $L, L_1, \dots, L_n : E \to \mathbb{K}$ des formes linéaires. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i \subset \ker L$ *;*
2. $L \in \operatorname{vect}(L_1, \dots, L_n)$*, c'est-à-dire il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $L = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.*

On va également utiliser la forme d'une base de voisinage de 0 pour la topologie faible étoile. De façon très similaire à ce qu'on avait établi pour la topologie faible, pour $L_0 \in E^*$, une base de voisinage de L_0 est donnée par l'ensemble des ouverts faible étoile de la forme

$$V_*(L_0; x_1, \dots, x_m; r) = \{L \in E^* \ : \ |L(x_i) - L_0(x_i)| < r, \ \forall i = 1, \dots, m\}$$

En effet, notons déjà que $V_*(L_0; x_1, \dots, x_m; r)$ contient L_0 par définition. D'après la caractérisation de la topologie initiale en utilisant la base de $\mathbb{K}$ formée des boules ouvertes, une base de $\sigma(E^*, E)$ est constituée des

$$\bigcap_{i=1}^{m} \Phi_{x_i}^{-1}(B_{\mathbb{K}}(a_i, r_i))$$

pour $m \in \mathbb{N}$, et pour tout $i \in [|1, m|]$, $x_i \in E$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $r_i > 0$.
Soit W un ouvert faible étoile contenant L_0. Il existe alors un ouvert de la forme précédente U inclus dans W et contenant L_0 : il existe $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in E$, $a_1, \dots a_m \in \mathbb{K}$ et $r_1, \dots, r_m > 0$ tels que

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \Phi_{x_i}^{-1}(B_{\mathbb{K}}(a_i, r_i)) \subset W \, .$$

Similairement à ce qu'on avait fait pour exhiber une base de voisinages d'un point donné pour la topologie faible, on remarque que $L_0 \in U$ de sorte que pour tout i, $L_0(x_i) = \Phi_{x_i}(L_0) \in B_{\mathbb{K}}(a_i, r_i)$ et il existe $s_i > 0$ tel que $B_{\mathbb{K}}(L_0(x_i), s_i) \subset B_{\mathbb{K}}(a_i, r_i)$ et finalement en posant $s = \min_i s_i$,

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i=1}^{m} \Phi_{x_i}^{-1}(B_{\mathbb{K}}(L_0(x_i), s)) = \bigcap_{i=1}^{m} \{L \in E^* \ : \ |L(x_i) - L_0(x_i)| < s\} \\ =&V_*(L_0; x_1, \dots, x_m; s) \subset U \subset W \, . \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 3.19. On remarque que l'inclusion "$\supset$" est une conséquence de la définition de la topologie faible étoile.
Soit $\xi \in E^{**}$ faiblement étoile continue. En particulier, $W = \xi^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0,1))$ contient un voisinage faible étoile de 0 de la forme

$$V = V_*(0; x_1, \dots, x_m; s) = \bigcap_{i=1}^{m} \{L \in E^* \,:\, |L(x_i)| < s\} \subset W \,,$$

avec $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in E$ et $s > 0$.
En particulier, pour tout $L \in F := \bigcap_{i=1}^{m} \ker \Phi_{x_i} \subset V$, $|\xi(L)| < 1$, et ξ est une forme linéaire bornée sur le sous-espace vectoriel F, donc ξ est nulle sur F (on a déjà vu cet argument...) i.e.,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker \Phi_{x_i} \subset \ker \xi$$

et on conclut avec le lemme des noyaux qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_{x_i} = \Phi_x \in J(E) \quad \text{avec} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,.$$

□

Remarque 3.21. Si E n'est pas réflexif, alors il existe $\xi \in E^{**} \setminus J(E)$, de sorte que ξ est une forme linéaire qui est faiblement continue sur E^* mais pas faiblement étoile continue d'après la proposition 3.19 qu'on vient d'établir. En particulier, la topologie faible et la topologie faible étoile ne coïncident pas, l'inclusion $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**})$ est stricte.
Réciproquement, si E est réflexif, $E^{**} = J(E) = \{\Phi_x\}_{x \in E}$ et donc $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ (topologie initiale associée à la même famille).

Remarque 3.22 (Toutes les boules fermées sont faiblement étoile compactes). Le théorème de Banach–Alaoglu établit la compacité faible étoile de la boule fermée centrée en 0 et de rayon 1, cela implique que toutes les boules fermées

$$\overline{B_{E^*}(L_0, r)} = \{L \in E^* \,:\, \|L - L_0\|_{E^*} \leq r\}, \quad \text{pour } L_0 \in E^*,\, r > 0$$

sont faiblement étoile compactes. C'est une conséquence du fait que

$$\overline{B_{E^*}(L_0, r)} = T\left(\overline{B_{E^*}(0,1)}\right) \quad \text{avec} \quad T : L \in E^* \mapsto L_0 + rL$$

et $T : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (E^*, \sigma(E^*, E))$ est continue parce que l'addition et la multiplication par un scalaire sont faiblement étoile continues comme expliqué dans la remarque ci-dessous.

Remarque 3.23 (Les topologies faible et faible étoile sont des topologies d'espace vectoriel topologique). Soit E un espace vectoriel, muni d'une topologie τ. On dit que (E, τ) est un espace vectoriel topologique (e.v.t.) lorsque la topologie τ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E au sens où l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues :

$$\begin{array}{ccc} (E,\tau)\times(E,\tau) & \to & (E,\tau) \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} (E,\tau)\times\mathbb{K} & \to & (E,\tau) \\ (x,\lambda) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.
On a que $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^*, \sigma(E^*, E))$ sont des espaces vectoriels topologiques. On le vérifie en utilisant la propriété universelle de la topologie initiale (pour la topologie faible/faible étoile/produit).

On va conclure la section en énonçant des propriétés des suites faiblement étoile convergentes similaires à celles énoncées pour les suites faiblement convergentes dans la proposition 3.10.
Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E^*, et $L \in E^*$. On note

- Convergence en norme : $L_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E^*}} L$.
- Convergence faible : $L_n \rightharpoonup L$.
- Convergence faible étoile : $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$.

Proposition 3.24. *Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E^*. On a les propriétés suivantes :*

(i) $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$ *ssi* $L_n(x) \to L(x)$ *pour tout* $x \in E$.

(ii) $L_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E^*}} L \implies L_n \rightharpoonup L \implies L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$.

On suppose de plus que E est un espace de Banach.

(iii) Si $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$ *alors* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* E^* *et* $\|L\|_{E^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{E^*}$.

(iv) $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x$ *et* $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L \implies L_n(x_n) \to L(x)$.

Preuve de la proposition 3.24. La propriété (i) est une conséquence de la définition de $\sigma(E^*, E)$ et de la proposition 3.5. La propriété (ii) est une conséquence des inclusions des topologies (3.1).
En ce qui concerne (iii), supposons que $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$: pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par (i) donc bornée. D'après le corollaire 1.5 du théorème de Banach–Steinhaus, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en norme d'opérateur.
De plus, pour tout $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, on a $|L_n(x)| \leq \|L_n\|_{E^*} \|x\|_E$, et en passant à la liminf $n \to \infty$, on obtient

$$|L(x)| = \lim_{n\to\infty} |L_n(x)| = \liminf_{n\to\infty} |L_n(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{E^*} \|x\|_E .$$

En prenant par exemple le supremum sur $x \in E$ satisfaisant $\|x\|_E = 1$, on obtient bien $\|L\|_{E^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{E^*}$.
Il reste à établir (iv). Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|L_n(x_n) - L(x)| \leq |L_n(x_n) - L_n(x)| + |L_n(x) - L(x)| \ .$$

D'une part

$$|L_n(x_n) - L_n(x)| \leq \|L_n\|_{E^*} \|x_n - x\|_E \leq M \|x_n - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

avec $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{E^*} < \infty$ d'après (iii). D'autre part $|L_n(x) - L(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après (i).
On conclut que $|L_n(x_n) - L(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

□

Remarque 3.25 (Attention à l'hypothèse de complétude). L'hypothèse de complétude est nécessaire pour (iii) (et (iv)). En effet, si on considère $E = c_{00}$ l'espace vectoriel des suites presque nulles, muni de $\|\cdot\|_\infty$. Vous avez dû voir que E n'est pas complet, il n'est pas fermé dans l'espace de Banach des suites qui tendent vers 0 par exemple.
On peut alors définir $L_n : E \to \mathbb{K}$ par $L_n(u) = nu_n$. On a alors que pour tout $u \in E$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n = 0$ et donc $L_n(u) = nu_n = 0$. En particulier $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. En revanche,

$$\|L_n\|_{E^*} \geq \frac{|L_n(e_n)|}{\|e_n\|_\infty} = n \to +\infty .$$

Attention, contrairement à ce qu'on avait dit pour la topologie faible dans le théorème 3.11, un ensemble convexe de E^* peut être fortement fermé et pas faiblement étoile fermé, un exemple est donné dans l'exercice 3.5 ci-dessous.

Exercice 3.5. On rappelle les notations

- ℓ^∞ est l'ensemble des suites réelles bornées, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$,
- ℓ^1 est l'ensemble des suites réelles absolument convergentes, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

On rappelle que $(\ell^1)^*$ s'identifie à ℓ^∞ (voir exercice 3.4) via l'isométrie bijective

$$\ell^\infty \to (\ell^1)^*, \quad u = (u_n)_n \mapsto \left(L_u : v = (v_n) \in \ell^1 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right) .$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$c_0 = \{u = (u_n)_n \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty .$$

Vérifier que c_0 est convexe, fermé pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et qu'il n'est pas faiblement étoile fermé, on pourra déterminer son adhérence faible étoile.

Exercice 3.6 (Exemple d'espace non réflexif)**.** On rappelle que c_0 est le sous-espace vectoriel

$$c_0 = \{u = (u_n)_n \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty ,$$

muni de $\|\cdot\|_\infty$. On va montrer qu'il n'est pas réflexif.

1. Montrer que c_0 est séparable et que ℓ^∞ ne l'est pas.
2. On rappelle que $(c_0)^* \simeq \ell^1$ via l'isométrie $I_1 : \ell^1 \to (c_0)^*$, $v \mapsto L_v$ où $L_v : c_0 \to \mathbb{K}$, $u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. On introduit l'application adjointe de I_1, $I_1^* : (c_0)^{**} \to (\ell^1)^*$ définie par

   $$I_1^*(\xi) = \xi \circ I_1, \quad \forall \xi \in (c_0)^{**} .$$

   Montrer que I_1^* est une isométrie linéaire bijective.
3. En déduire que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.

Exercice 3.7 (Topologie faible étoile sur le dual de ℓ^∞)**.** Soient $E = \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le forme linéaire $L_n : (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que L_n est continue et déterminer sa norme.
2. Peut-on extraire une sous-suite faiblement étoile convergente $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Est-ce que cela vous surprend ?

Dans les deux exercices suivants, on s'intéresse au cône normal d'un ensemble convexe et on montre qu'il est non trivial sous des conditions assez larges. N'hésitez pas à faire des dessins !

Définition 3.26 (Cône normal)**.** Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé, $C \subset E$ un convexe non vide et $x_0 \in C$. On définit le *cône normal* à C en x_0 comme

$$N_C(x_0) = \{L \in E^* \ : \ L(y - x_0) \leq 0 \, , \forall y \in C\} .$$

Exercice 3.8 (Cône normal)**.**

1. Montrer que $N_C(x_0)$ est un cône convexe, fermé pour la topologie de la norme et pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ de E^*.
2. Que dire de $N_C(x_0)$ si x_0 est dans l'intérieur de C ?
3. Soit A une partie convexe de E.

(a) Montrer que $\operatorname{int} A$ est convexe. On rappelle qu'on a montré en cours que $\overline{A}$ est également convexe.

(b) Si de plus A est d'intérieur non vide, montrer que $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$.

4. Soit $x_0 \in C \cap \partial C$. On suppose dans cette question que C est d'intérieur non vide. Montrer que $N_C(x_0)$ est non trivial (non réduit à $\{0\}$).

5. Soit $E = \ell^2$ et $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{1}{n}\}$. Montrer que C est convexe, fermé dans ℓ^2 et vérifier que $0 \in \partial C$. Que dire de $N_C(0)$?

   Indication : on pourra utiliser que l'application

$$\ell^2 \to (\ell^2)^*, \quad u \mapsto \left(L_u : \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \right)$$

   est un isomorphisme isométrique. C'est par exemple une conséquence du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Exercice 3.9 (Cône normal en dimension finie)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un convexe non vide et $x_0 \in C \cap \partial C$. Quitte à translater, on suppose $x_0 = 0$.

1. Montrer que si C contient une base de $\mathbb{R}^d$, alors C est d'intérieur non vide.
2. En déduire que si C est d'intérieur vide, il existe L linéaire non nulle telle que $C \subset \ker L$.
3. Conclure que $N_C(0) \neq \{0\}$.

On s'intéresse au cône normal d'un convexe notamment en raison de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une fonction convexe, que vous avez peut-être déjà croisée, sinon cela vous fait un exercice supplémentaire :

Proposition 3.27 (Condition d'optimalité)**.** *Soit $C \subset E$ convexe fermé non vide, $J : E \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable, alors*

$$x_* \in C \text{ minimise } J \text{ sur } C \quad \Longleftrightarrow \quad -DJ(x_*) \in N_C(x_*),$$

c'est-à-dire

$$DJ(x_*)(y - x_*) \geq 0 \qquad \forall y \in C.$$

3.4 Compacité faible dans les espaces réflexifs

Dans la section précédente, on a établi la compacité de la boule unité fermée $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ pour la topologie faible étoile sur E^*, mais

- ce résultat porte sur un espace qu'on peut voir comme un espace dual,
- on ne connaît pas bien les fermés faible étoile, ce qui ne nous permet pas d'utiliser le fait que les ensembles faiblement étoile fermés de $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ sont faiblement étoile compacts. On a en particulier constaté qu'un ensemble convexe pouvait être fortement fermé et pas faiblement étoile fermé, contrairement à ce qu'on sait dans le cadre de la topologie faible (théorème 3.11),
- on sait donner des conditions suffisantes assurant qu'un espace est réflexif sans identifier son dual.

Théorème 3.28 (Kakutani)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte pour la topologie faible.*

Un corollaire fondamental du sens direct du théorème de Kakutani est le critère de compacité suivant :

Corollaire 3.29. *Soit E un espace de Banach réflexif et $K \subset E$. On suppose que K est un convexe fermé (fortement) et borné, alors K est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Exercice 3.10.

1. Prouver le corollaire 3.29.
2. Pensez-vous qu'il puisse s'agir d'une caractérisation des ensembles faiblement compacts dans un espace réflexif E ?

La preuve du théorème 3.28 repose sur la proposition 3.30 et le lemme 3.31.
On a déjà établi que $J : (E, \|\cdot\|_E) \to (E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$ est une isométrie, c'est en particulier un homéomorphisme sur son image $(J(E), \|\cdot\|_{E^{**}})$ qu'on notera encore J, et J^{-1} l'application réciproque. On va à présent montrer que J est également un homéomorphisme sur son image lorsqu'on munit E de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et $J(E) \subset E^{**}$ de la topologie faible étoile $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Proposition 3.30. *Soit E un espace vectoriel normé. L'injection canonique de E dans son bidual E^{**} :*

$$J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)), \quad x \mapsto \Phi_x$$

est continue. De plus, $J^{-1} : (J(E), \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$ l'est aussi.
Si E est réflexif, J est donc un homéomorphisme de $(E, \sigma(E, E^*))$ sur $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$.

Bien sûr, la notation légèrement abusive J^{-1} désigne en réalité la réciproque de J restreinte à son image au but.

Preuve de la proposition 3.30.
• Commençons par établir la continuité de J. Comme la topologie faible étoile $\sigma(E^{**}, E^*)$ sur E^{**} est la topologie initiale sur E^{**} associée à la famille d'évaluations $(\Phi_L)_{L \in E^*}$, où $\Phi_L : \xi \in E^{**} \mapsto \xi(L)$, d'après la propriété universelle de la topologie initiale (proposition 3.7),

$$\begin{aligned} & J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \text{ est continue} \\ \iff \quad & \forall L \in E^*,\ \Phi_L \circ J : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{K} \text{ est continue } . \end{aligned}$$

Or, pour $L \in E^*$ et $x \in E$, on a par définition de $J(x) = \Phi_x$,

$$(\Phi_L \circ J)(x) = \Phi_L(J(x)) = \Phi_L(\Phi_x) = \Phi_x(L) = L(x)\,.$$

On en déduit que $\Phi_L \circ J = L : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{K}$ est bien continue (puisque $L \in E^*$).
• Vérifions à présent que $J^{-1} : (J(E), \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$ est continue, où $J(E)$ est muni de la topologie induite par la topologie faible étoile et on a signalé que la topologie induite sur A par une topologie initiale coïncide avec la topologie initiale associée à $\mathcal{F}_{|A}$. Dans notre cadre, cela signifie que la topologie induite sur $J(E)$ par $\sigma(E^{**}, E^*)$ est la topologie initiale associée à $\{(\Phi_L)_{|J(E)}\}_{L \in E^*}$.
On rappelle que la topologie faible sur E, $\sigma(E, E^*)$ est la topologie initiale associée à la famille $\mathcal{F} = E^*$. Ainsi, à nouveau d'après la propriété universelle de la topologie initiale,

$$\begin{aligned} & J^{-1} : (J(E), \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*)) \text{ est continue} \\ \iff \quad & \forall L \in E^*,\ L \circ J^{-1} : (J(E), \sigma(E^{**}, E^*)) \to \mathbb{K} \text{ est continue } . \end{aligned}$$

Soit $L \in E^*$, vérifions que $L \circ J^{-1}$ est bien une forme évaluation sur E^*, et plus précisément, $L \circ J^{-1} = (\Phi_L)_{|J(E)}$. Soit $\zeta = J(x) = \Phi_x \in J(E)$, pour $x \in E$, de sorte que $J^{-1}(\zeta) = x$. On a vu dans la première partie de la preuve que $\Phi_L(\Phi_x) = L(x)$ et donc

$$(L \circ J^{-1})(\zeta) = L(x) = \Phi_x(L) = \Phi_L(\Phi_x) = \Phi_L(\zeta)\,.$$

On en déduit que $L \circ J^{-1}$ est continue sur $(J(E), \sigma(E^{**}, E^*))$ puisque la topologie induite sur $J(E)$ par $\sigma(E^{**}, E^*)$ est la topologie initiale associée à $\{(\Phi_L)_{|J(E)}\}_{L \in E^*}$. □

Lemme 3.31 (Goldstine)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Pour la topologie $\sigma(E^{**},E^*)$, $J(\overline{B_E(0,1)})$ est dense dans $\overline{B_{E^{**}}(0,1)}$.*

Preuve du lemme de Goldstine. Soit $\xi \in \overline{B_{E^{**}}(0,1)}$ et soit V un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**},E^*)$. Montrons que $V \cap J(\overline{B_E(0,1)}) \neq \emptyset$. On sait que V contient un ouvert de la forme

$$U = V_{**}(\xi; L_1,\dots,L_m; r) = \big\{\zeta \in E^{**} \ : \ \big|\zeta(L_i) - \xi(L_i)\big| < r,\ i = 1,\dots,m\big\}$$

où $L_1,\dots,L_m \in E^*$ et $r > 0$. On cherche donc à montrer l'existence de $x \in \overline{B_E(0,1)}$ tel que $J(x) = \Phi_x \in U$, c'est-à-dire

$$\big|\Phi_x(L_i) - \xi(L_i)\big| = \big|L_i(x) - \xi(L_i)\big| < r, \qquad \forall i = 1,2,\dots,m\,.$$

En définissant $\Lambda : E \to \mathbb{K}^m$ par

$$\Lambda(x) = \big(L_1(x), L_2(x), \dots, L_m(x)\big) \quad \text{et} \quad y = \big(\xi(L_1), \xi(L_2), \dots, \xi(L_m)\big) \in \mathbb{K}^m\,,$$

cela revient à demander l'existence de $x \in \overline{B_E(0,1)}$ satisfaisant $y \in B(\Lambda(x), r)$ pour $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^m$ (ce qui est équivalent à

$$\operatorname{dist}\Big(\Lambda(\overline{B_E(0,1)}), \{y\}\Big) < r)\,.$$

On va montrer que $y \in \overline{\Lambda\big(\overline{B_E(0,1)}\big)}$ (et donc $\operatorname{dist}\Big(\Lambda(\overline{B_E(0,1)}), \{y\}\Big) = 0 < r$ dans $\mathbb{K}^m$).

Supposons par l'absurde que $C_1 = \{y\}$ et $C_2 = \overline{\Lambda\big(\overline{B_E(0,1)}\big)}$ sont deux convexes disjoints de $\mathbb{K}^m$, avec C_1 compact et C_2 fermé. On rappelle que C_2 est convexe car l'adhérence d'un convexe est convexe et l'image d'un convexe par une application linéaire est convexe.
D'après la forme géométrique du théorème de Hahn–Banach géométrique (séparation stricte), il existe une forme linéaire non nulle $\theta : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ et $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re}\theta(u) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re}\theta(y) \qquad \forall u \in C_2\,.$$

En particulier,

$$\operatorname{Re}\theta(\Lambda(x)) < \gamma_1 < \operatorname{Re}\theta(y) \qquad \forall x \in \overline{B_E(0,1)}\,.$$

Ainsi, en écrivant $\theta : u \in \mathbb{K}^m \mapsto \sum_{i=1}^m \theta_i u_i$ on obtient

$$\gamma_1 < \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^m \theta_i\, \xi(L_i)\right) = \operatorname{Re}\left(\xi\left(\sum_{i=1}^m \theta_i L_i\right)\right) \le \left\|\sum_{i=1}^m \theta_i L_i\right\|_{E^*}\,,$$

puisque $\|\xi\|_{E^{**}} \le 1$. En prenant le supremum sur $x \in \overline{B_E(0,1)}$ dans $\operatorname{Re}(\theta\circ\Lambda)(x) < \gamma_1$, on obtient

$$\|\theta \circ \Lambda\|_{E^*} \le \gamma_1\,,$$

et donc une contradiction, ce qui achève la preuve du lemme.
On vient d'utiliser que pour $L \in E^*$,

$$\|L\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \operatorname{Re} L(x)\,.$$

En effet, on a déjà pour tout $x \in E$, $\operatorname{Re} L(x) \le |L(x)|$ et donc $\sup\limits_{\|x\|_E\le 1} \operatorname{Re} L(x) \le \|L\|_{E^*}$. Et réciproquement, soit $(x_n)_n$ telle que $|L(x_n)| \to \|L\|_{E^*}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_E \le 1$, on peut alors écrire $|L(x_n)| = \omega_n L(x_n)$ avec $|\omega_n| = 1$. On a alors

$$|L(x_n)| = L(\omega_n x_n) = \operatorname{Re} L(\omega_n x_n) = \operatorname{Re} L(v_n) \to \|L\|_{E^*}$$

en posant $v_n = \omega_n x_n$ qui satisfait en particulier $\|v_n\|_E = \|x_n\|_E \le 1$. D'où l'inégalité réciproque $\sup\limits_{\|x\|_E\le 1} \operatorname{Re} L(x) \ge \|L\|_{E^*}$. □

On peut à présent prouver le théorème de Kakutani.

Preuve du théorème 3.28. • ($\Rightarrow$) Supposons que E est réflexif : $J(E) = E^{**}$. L'application J réalise un homéomorphisme de $(E, \sigma(E, E^*))$ vers $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ et on sait d'après le théorème de Banach–Alaoglu (théorème 3.16) que $\overline{B_{E^{**}}(0,1)}$ est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(E^{**}, E^*)$ sur E^{**}. On en déduit que $J^{-1}\left(\overline{B_{E^{**}}(0,1)}\right)$ est faiblement compact. Et de plus

$$J^{-1}\left(\overline{B_{E^{**}}(0,1)}\right) = \{x \in E \,:\, \|\Phi_x\|_{E^{**}} \leq 1\} = \overline{B_E(0,1)}$$

puisque J est une isométrie.
• ($\Leftarrow$) Supposons à présent que $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E. D'une part, J est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ vers $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ donc $J\left(\overline{B_E(0,1)}\right)$ est compact pour $\sigma(E^{**}, E^*)$ qui est séparée, en particulier faiblement étoile fermé. On sait d'autre part, par le lemme de Goldstine, que $J\left(\overline{B_E(0,1)}\right)$ est dense dans $\overline{B_{E^{**}}(0,1)}$ pour $\sigma(E^{**}, E^*)$. On en déduit que

$$J\left(\overline{B_E(0,1)}\right) = \overline{B_{E^{**}}(0,1)}\,.$$

On en déduit que $J(E) = E^{**}$ par homogénéité (soit $\xi \in E^{**}$, $\|\xi\|_{E^{**}} > 1$, on a alors $\widetilde{\xi} = \frac{\xi}{\|\xi\|_{E^{**}}} \in \overline{B_{E^{**}}(0,1)}$ et il existe donc $x \in \overline{B_E(0,1)}$ tel que $\widetilde{\xi} = J(x)$ et finalement $\xi = J(\|\xi\|_{E^{**}}\, x) \in J(E)$). □

Remarque 3.32. Notons que E^{**} est invariant par équivalence de norme sur E. En effet, si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes équivalentes sur E, elles induisent deux normes d'opérateur équivalentes sur E^* et donc E^{**} est le même ensemble pour les deux normes. En particulier, on voit déjà que la réflexivité est une propriété invariante par équivalence de norme sur E. Le théorème de Kakutani nous dit mieux : la réflexivité est une notion de nature topologique. Plus précisément, si E et G sont des espaces vectoriels normés topologiquement isomorphes (isomorphisme linéaire qui est bicontinu) alors E est réflexif si et seulement si G est réflexif (voir (ii) de la proposition ci-dessous).

On termine la section avec des propriétés de "transmission" de la réflexivité.

Proposition 3.33. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.*

(i) *Si E est réflexif et F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors F est également réflexif.*

(ii) *Si G est un espace vectoriel normé et $T : E \to G$ est un isomorphisme bicontinu, alors E est réflexif si et seulement si G est réflexif.*

(iii) *Soit E un espace de Banach, alors, E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Preuve de la proposition 3.33.

(i) La topologie induite sur F par $\sigma(E, E^*)$ coïncide avec la topologie initiale associée aux restrictions $\{L_{|F} \,:\, L \in E^*\}$ (voir proposition 3.6).
On a $\{L_{|F} \,:\, L \in E^*\} \subset F^*$ par définition de F^*, et l'inclusion réciproque est une conséquence du théorème de Hahn–Banach (plus précisément du corollaire 2.5) : soit $L \in F^*$, d'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $\widetilde{L} \in E^*$ telle que $\widetilde{L}_{|F} = L$ (et $\left\|\widetilde{L}\right\|_{E^*} = \|L\|_{F^*}$).
On vient d'établir que la topologie induite par $\sigma(E, E^*)$ sur F est $\sigma(F, F^*)$ (et cela n'utilise pas le fait que F est supposé fermé).
On a de plus
• $\overline{B_E(0,1)} \cap F$ est fermé pour $\sigma(E, E^*)$ car $\overline{B_E(0,1)}$ l'est d'après le théorème de Kakutani et F est convexe (sev) fortement fermé donc faiblement fermé d'après le théorème de Mazur.

• $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte pour $\sigma(E,E^*)$ (à nouveau d'après le théorème de Kakutani).
On en déduit que $\overline{B_F(0,1)} = \overline{B_E(0,1)} \cap F \subset \overline{B_E(0,1)}$ est fermée dans un compact pour $\sigma(E,E^*)$ donc $\overline{B_F(0,1)}$ est compacte pour $\sigma(E,E^*)$, et donc pour $\sigma(F,F^*) = \sigma(E,E^*)_{|F}$ (la compacité ne dépend que de $\sigma(E,E^*)_{|K}$ et donc K est compact pour n'importe quelle $\sigma(E,E^*)_{|A}$ dès que $K \subset A$). D'après le théorème de Kakutani, F est réflexif.

(*ii*) On se ramène à une isométrie en définissant sur G la norme $\|\cdot\|_\#$ poussée en avant par T comme

$$\forall y \in G, \quad \|y\|_\# = \left\|T^{-1}(y)\right\|_E .$$

• On vérifie que c'est bien une norme : l'homogénéité et l'inégalité triangulaire suivent de la linéarité de T^{-1}, de plus, si $y \in G$ satisfait $\|y\|_\# = 0$, on a $T^{-1}(y) = 0$ et donc $y = 0$.
• C'est de plus une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_G$ initialement donnée sur G grâce à la bicontinuité de T. En effet, pour $y \in G$, on a

$$\begin{aligned}\|y\|_\# &= \left\|T^{-1}(y)\right\|_E \leq \left\|T^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(G,E)} \|y\|_G \\ \|y\|_G &= \left\|T(T^{-1}(y))\right\|_G \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,G)} \left\|T^{-1}(y)\right\|_E = \|T\|_{\mathcal{L}(E,G)} \|y\|_\# .\end{aligned}$$

En particulier le dual topologique G^* et donc la topologie faible $\sigma(G,G^*)$ sont les mêmes pour les normes équivalentes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_\#$ (et T est encore bicontinue).
• L'application $T : (E,\|\cdot\|_E) \to (G,\|\cdot\|_\#)$ est une isométrie (toujours bijective) puisque pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|_\# = \left\|T^{-1}(T(x))\right\|_E = \|x\|_E$$

(et on retrouve que T est bicontinue pour la nouvelle norme $\|\cdot\|_\#$ sur G). En particulier

$$\overline{B_{G,\|\cdot\|_\#}(0,1)} = T\Big(\overline{B_E(0,1)}\Big) .$$

• On a vu dans l'exercice 3.3 que si T linéaire fortement continue entre deux espaces vectoriels normés alors T est faiblement continu au sens $T : (E,\sigma(E,E^*)) \to (G,\sigma(G,G^*))$ est continu (c'était le sens réciproque qui demandait E, G Banach). En appliquant ce résultat à T et T^{-1}, on en déduit que T est un homéomorphisme entre $(E,\sigma(E,E^*))$ et $(G,\sigma(G,G^*))$ de sorte que $\overline{B_{G,\|\cdot\|_\#}(0,1)} = T\Big(\overline{B_E(0,1)}\Big)$ est faiblement compacte dans G si et seulement si $\overline{B_E(0,1)}$ est faiblement compacte dans E. D'après le théorème de Kakutani, on en déduit que E est réflexif si et seulement si G est réflexif pour $\|\cdot\|_\#$.
• Comme les normes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_\#$ sont équivalentes, elles induisent la même topologie, donc le même dual G^* et de plus, elles induisent deux normes duales équivalentes qui induisent la même topologie et donc le même bidual. En effet, il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que $\|\cdot\|_\# \leq C_1 \|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_G \leq C_2 \|\cdot\|_\#$ de sorte que pour $L \in G^*$,

$$\frac{1}{C_1} \sup_{x\in G\setminus\{0\}} \frac{|L(x)|}{\|x\|_G} \leq \sup_{x\in G\setminus\{0\}} \frac{|L(x)|}{\|x\|_\#} \leq C_2 \sup_{x\in G\setminus\{0\}} \frac{|L(x)|}{\|x\|_G} .$$

Ainsi $(G,\|\cdot\|_G)$ réflexif si et seulement si $(G,\|\cdot\|_\#)$ est réflexif, si et seulement si $(E,\|\cdot\|_E)$ réflexif par ce qui précède.

On renvoie à l'exercice 3.11 pour une preuve n'utilisant pas le théorème de Kakutani.

(*iii*) • Supposons que E est réflexif. On veut montrer que $J_* : E^* \to E^{***}$, $L \in E^* \mapsto \Phi_L$ est surjective.

Soit $\theta \in E^{***}$, on va montrer que $\theta = \Phi_L \in J_*(E^*)$ avec $L = \theta \circ J : x \in E \mapsto \theta(J(x)) \in \mathbb{K}$. En effet, soit $\xi \in E^{**}$, il existe $x \in E$ tel que $\xi = \Phi_x = J(x)$ car E est supposé réflexif. On a alors

$$\Phi_L(\xi) = \xi(L) = \Phi_x(L) = L(x) = \theta(J(x)) = \theta(\xi) .$$

On conclut que J_* est surjective et E^* est réflexif.

• Réciproquement, supposons que E^* est réflexif. On en déduit que E^{**} est réflexif (c'était le sens direct appliqué à E^*). De plus $J(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E^{**}. En effet, si $(\xi_n)_n$ est une suite d'éléments de $J(E)$ qui converge vers $\xi \in E^{**}$, il existe $(x_n)_n$ suite de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = J(x_n)$. On a alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\|x_p - x_q\|_E = \|J(x_p - x_q)\|_{E^{**}} = \|\xi_p - \xi_q\|_{E^{**}} \ .$$

Ainsi, comme $(\xi_n)_n$ converge dans E^{**}, elle est en particulier de Cauchy et par conséquent $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, on en déduit qu'elle converge vers x dans E qui est un espace de Banach. Par continuité, $\xi_n = J(x_n) \to J(x)$ et par unicité de la limite dans l'evn E^{**}, on a $\xi = J(x)$.

D'après (i), on en déduit que $J(E)$ est un espace réflexif, et en particulier un espace de Banach. De plus $J : E \to J(E)$ est un isomorphisme isométrique (bicontinu), d'après (ii), $J(E)$ réflexif implique E réflexif.

□

Exercice 3.11. Soit E, G deux espaces vectoriels normés et $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (G, \|\cdot\|_G)$ linéaire et bicontinu. On (re-)démontre que E est réflexif si et seulement si G est réflexif.

1. On définit l'application adjointe $T^* : G^* \to E^*$, $L \in G^* \mapsto L \circ T$. Vérifier que T^* est bien définie, linéaire et continue.
2. Vérifier que T^* est un isomorphisme bicontinu.
3. Conclure en itérant la construction pour obtenir $T^{**} : E^{**} \to G^{**}$.

3.5 Séparabilité et réflexivité

On rappelle qu'un espace topologique X est dit séparable s'il possède une partie dénombrable qui est dense (dans lui-même). On a vu que si E est un espace vectoriel normé séparable, alors toute partie de E est séparable (on l'a même établi pour un espace métrique). On renvoie à la définition 2.27 et à la proposition 2.28.
On rappelle que la séparabilité est un invariant topologique.

Exercice 3.12 (La séparabilité est un invariant topologique)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques homéomorphes. Montrer que X est séparable si et seulement si Y est séparable.

Donnons tout de suite quelques exemples d'espace séparables :

Exercice 3.13 (Exemples d'espaces séparables)**.**

1. Rappeler pourquoi un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie est séparable.
2. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ un ensemble dénombrable de E. Justifier que $\overline{\text{vect}\,(X)}$ est séparable.
3. On rappelle que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable. Montrer qu'en revanche, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable.

Exercice 3.14 (Séparabilité de L^p)**.** Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on note $\mathrm{L}^p(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ mesurable et } \int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$ pour $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_p$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$.
Le but de l'exercice est de montrer que $\left(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)$ est séparable.

1. On introduit le sous-ensemble de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$:

$$D = \{\mathbb{1}_R \,:\, R \in \mathcal{R}\} \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \left\{ \prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k[\subset \mathbb{R}^d \,:\, a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

avec la convention $]a_k, b_k[= \emptyset$ si $b_k \leq a_k$. Justifier que D est dénombrable et $\mathrm{vect}\,(D)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Indication.– On pourra utiliser la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.

2. Conclure.

Exercice 3.15 (Non séparabilité de L^∞)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert non vide. On note $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,:\, \begin{array}{l} f \text{ mesurable et il existe } C \geq 0 \\ |f| \leq C \text{ presque partout dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \inf\{C \geq 0 \,:\, |f| \leq C \text{ presque partout dans } \Omega\}$ pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_\infty$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$ (attention, à ne pas confondre avec une norme "sup" sur un espace de fonctions continues).
L'espace $\left(\mathrm{L}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\right)$ n'est pas séparable.

La séparabilité se transmet depuis le dual E^* vers E, et pas l'inverse, en revanche si on ajoute la réflexivité à la séparabilité, on obtient une équivalence.

Proposition 3.34.

(*i*) *Soit E un espace vectoriel normé. Alors,*

$$E^* \text{ séparable implique } E \text{ séparable.}$$

La réciproque est fausse.

(*ii*) *Soit E un espace de Banach. Alors,*

$$E \text{ est séparable et réflexif si et seulement si } E^* \text{ est séparable et réflexif.}$$

Preuve de la proposition 3.34.

(*i*) Soit $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ une partie dénombrable dense de E^*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad |L_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|L_n\|_{E^*} .$$

(On pourrait prendre n'importe quel $0 < \alpha < 1$ au lieu de $\frac{1}{2}$). Soit $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on a vu dans l'exercice 3.13 que $\overline{\mathrm{vect}\,(X)}$ est séparable.
On note $F = \mathrm{vect}\,(X)$, montrons que $\overline{F} = E$ afin de conclure. Pour cela on utilise le corollaire 2.10 du théorème de Hahn–Banach. Soit $L \in E^*$ telle que $L_{|F} = 0$, montrons que $L = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, par densité, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|L - L_N\|_{E^*} \leq \varepsilon$. Et de plus,

$$\frac{1}{2} \|L_N\|_{E^*} \leq |L_N(x_N)| = |L(x_N) - L_N(x_N)| \leq \|L - L_N\|_{E^*} \|x_N\|_E \leq \varepsilon .$$

On en déduit

$$\|L\|_{E^*} \leq \|L - L_N\|_{E^*} + \|L_N\|_{E^*} \leq 3\varepsilon ,$$

et $L = 0$ en laissant tendre ε vers 0. Par le corollaire 2.10, $F = \mathrm{vect}(X)$ est dense dans E, donc $E = \overline{\mathrm{vect}(X)}$ est séparable.
La réciproque est fausse puisque ℓ^1 est séparable tandis que son dual est isométriquement isomorphe (en particulier homéomorphe) à ℓ^∞ qui n'est pas séparable.

(*ii*) D'après (*i*), E^* séparable implique E séparable, et d'après la proposition 3.33, E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif. Il reste à montrer que si E est séparable et réflexif, alors E^* est séparable. Or, par réflexivité, $E^{**} = J(E)$, en particulier E et E^{**} sont homéomorphes, donc E^{**} est séparable et d'après (*i*), on en déduit que E^* est séparable.

□

Remarque 3.35. En dimension infinie, la topologie faible n'est pas métrisable. En effet, si par l'absurde il existe une distance d telle que (E, d) induit $\sigma(E, E^*)$, on a en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les boules ouvertes $B_d(0, \frac{1}{n})$ sont des ouverts faibles et contiennent en particulier une droite $\mathbb{K}y_n$, avec $y_n \in E$, $\|y_n\|_E = 1$, ce d'après la proposition 3.9. On a alors $x_n = ny_n \in B_d(0, \frac{1}{n})$ donc $d(x_n, 0) \leq \frac{1}{n} \to 0$ c'est-à-dire $x_n \rightharpoonup 0$. Or une suite faiblement convergente est bornée en norme $\|\cdot\|_E$, ce qui contredit $\|x_n\|_E = n \to +\infty$.
En particulier, si E est de dimension infinie, E^* également et on a $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**})$ donc tout ouvert faible étoile de E^* est un ouvert faible de E^* et contient une droite affine. Si on suppose que E est un espace de Banach, le même raisonnement que celui effectué pour la topologie faible s'applique alors pour conclure que la topologie faible étoile n'est pas métrisable sur E^*, la complétude est nécessaire pour montrer qu'une suite faiblement étoile convergente est bornée (on renvoie à la proposition 3.24 et à la remarque 3.25).
Attention, si on ne suppose plus que E est un espace de Banach, la topologie faible étoile peut s'avérer métrisable sur E^* tout entier. C'est le cas si on considère l'espace $E = c_{00} \subset \ell^\infty$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ des suites presque nulles (nulles à partir d'un certain rang). On pourrait vérifier que l'application

$$I : \ell^1 \to E^*, \quad v \mapsto L_v, \quad \text{avec} \quad L_v : u \in E \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} v_k u_k$$

est une isométrie bijective de ℓ^1 sur E^*, similairement à ce qu'on a vu dans l'exercice 2.4. On pourrait ensuite montrer que la topologie faible étoile $\sigma((c_{00})^*, c_{00})$ est métrisable sur tout $(c_{00})^*$.

On va vérifier que si E est séparable, alors la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ est métrisable sur tout ensemble borné. Et similairement, si E^* est séparable, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est métrisable sur tout ensemble borné.

Proposition 3.36 (Métrisabilité de la topologie faible étoile sur les bornés si E est séparable)**.** *Soit E un espace vectoriel normé séparable. Alors la topologie faible étoile induite sur toute partie bornée $B \subset E^*$: $\sigma(E^*, E)_{|B}$ est métrisable.*
Réciproquement, si par exemple $B_{E^*}(0, 1)$ est métrisable pour la topologie faible étoile, alors E est séparable.

Proposition 3.37 (Métrisabilité de la topologie faible sur les bornés si E^* est séparable)**.** *Soit E un espace vectoriel normé dont le dual E^* est séparable. Alors la topologie faible induite sur toute partie bornée $B \subset E$: $\sigma(E, E^*)_{|B}$ est métrisable.*
Réciproquement, si $B_E(0, 1)$ est métrisable pour la topologie faible, alors E^* est séparable.

Preuve de la proposition 3.36. ($\Rightarrow$) Soit $B \subset E^*$ borné, il existe $R > 0$ tel que $B \subset B_{E^*}(0, R)$ et il suffit de montrer que la topologie faible étoile induite sur $B_{E^*}(0, R)$ est métrisable par une distance d, on aura alors que $d_{|B \times B}$ métrise la topologie faible étoile induite sur B.
Soit $X = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite dense dans $\overline{B_E(0, 1)} \subset E$ séparable. On introduit la norme $[\cdot]$ suivante sur E^* ainsi que la distance d associée :

$$\forall L \in E^*, \ [L] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |L(x_k)| \quad \text{et} \quad \forall L_1, L_2 \in E^*, \ d(L_1, L_2) = [L_1 - L_2] .$$

Vérifions que $[\cdot]$ est bien une norme sur E^*.

- $[\cdot]$ est bien définie : pour tout $L \in E^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $|L(x_k)| \leq \|L\|_{E^*}$ de sorte que la série définissant $[L]$ converge, de plus $[L] \leq \|L\|_{E^*}$.
- $[\cdot]$ est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire (car $|\cdot|$ les vérifie).
- pour tout $L \in E^*$, si $[L] = 0$ alors L s'annule sur la suite $(x_k)_k$ qui est dense dans $\overline{B_E(0,1)}$. Par continuité, $L = 0$ sur $\overline{B_E(0,1)}$ et par homogénéité $L = 0$.

Avant de continuer notons que pour $L_1, L_2 \in B_{E^*}(0,R)$, pour tout k, $|L_1(x_k) - L_2(x_k)| \leq 2R$, de sorte que la série définissant $[L_1 - L_2]$ est dominée par une série géométrique dont les restes tendent vers 0 indépendamment du choix de L_1 et L_2. Autrement dit, un contrôle sur $[L_1 - L_2]$ revient à un contrôle sur les sommes partielles, c'est-à-dire sur un contrôle de $L_1 - L_2$ en un nombre fini de points, ce qui nous rappelle bien la forme d'un voisinage faible de L_1 (ou de L_2). C'est ce qu'on va écrire rigoureusement.

On va montrer que la topologie induite $\tau_{[\cdot]}$ par d sur $B_{E^*}(0,R)$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(E^*,E)$ sur $B_{E^*}(0,R)$.

• Soit U non vide faiblement étoile ouvert dans $B_{E^*}(0,R)$, i.e. il existe $\widetilde{U} \in \sigma(E^*,E)$ un ouvert faible étoile non vide tel que $U = \widetilde{U} \cap B_{E^*}(0,R)$. Soit $L_0 \in U$. Montrons qu'il existe $\eta > 0$, tel que la boule ouverte $B_{[\cdot]}(L_0,\eta) \in \tau_{[\cdot]}$ satisfasse $W = B_{[\cdot]}(L_0,\eta) \cap B_{E^*}(0,R) \subset U$. On sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_m \in E$ et $r > 0$ tels que

$$V = \{L \in E^* \,:\, |L(a_i) - L_0(a_i)| < r,\ \forall i = 1, \dots, m\} \subset \widetilde{U}\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, par densité de X, pour tout $i = 1, \dots, m$, il existe $k_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|a_i - x_{k_i}\|_E < \varepsilon$.[2] On a alors pour $L \in W$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |L(x_k) - L_0(x_k)| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall i = 1, \dots, m,\ |L(x_{k_i}) - L_0(x_{k_i})| < 2^{k_i}\eta$$

de sorte que pour tout $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} |L(a_i) - L_0(a_i)| &\leq |L(a_i) - L(x_{k_i})| + |L(x_{k_i}) - L_0(x_{k_i})| + |L_0(x_{k_i}) - L_0(a_i)| \\ &\leq (\|L\|_{E^*} + \|L_0\|_{E^*})\varepsilon + 2^{k_i}\eta \leq 2R\varepsilon + 2^{k_i}\eta\,. \end{aligned}$$

On peut alors choisir $\eta = \varepsilon \min_{i=1\dots m} 2^{-k_i}$ et $\varepsilon < \frac{r}{2R+1}$ pour avoir

$$L_0 \in W \subset V \cap B_{E^*}(0,R) \subset U\,,$$

avec W ouvert pour $\tau_{[\cdot]}$ dans $B_{E^*}(0,R)$. Ainsi U est voisinage pour $\tau_{[\cdot]}$ induite sur $B_{E^*}(0,R)$ de chacun de ses points donc ouvert pour $\tau_{[\cdot]}$ dans $B_{E^*}(0,R)$. On vient d'établir l'inclusion

$$\sigma(E^*,E)_{|B_{E^*}(0,R)} \subset \tau_{[\cdot]|B_{E^*}(0,R)}\,.$$

• Réciproquement, soit U ouvert non vide pour $\tau_{[\cdot]}$ dans $B_{E^*}(0,R)$, i.e. il existe $\widetilde{U} \in \tau_{[\cdot]}$ tel que $U = \widetilde{U} \cap B_{E^*}(0,R)$. Soit $L_0 \in U$. Montrons qu'il existe un ouvert faible étoile de la forme $V = V(L_0; a_1, \dots, a_m; r)$ (où $m \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_m \in E$, $r > 0$ sont à déterminer) satisfaisant $W = V \cap B_{E^*}(0,R) \subset U$. Soit $\eta > 0$ tel que $B_{[\cdot]}(L_0,\eta) \subset \widetilde{U}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, prenons pour tout $i = 1, \dots, m$, $a_i = x_i$ de sorte que pour $L \in W$, on a pour tout $i = 1, \dots, m$, $|L(x_i) - L_0(x_i)| < r$ et donc

$$\begin{aligned} [L - L_0] &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} |L(x_k) - L_0(x_k)| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |L(x_k) - L_0(x_k)| \\ &\leq r \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} + 2R \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq r + 2R \frac{2^{-(m+1)}}{1 - 2^{-1}} \\ &\leq r + 2^{-m+1} R\,. \end{aligned}$$

2. Pour être précis, X est dense dans la boule unité fermée $\overline{B_E(0,1)}$, et $a_i \in E$. On peut se ramener à $a_i \in \overline{B_E(0,1)}$ en observant que V est inchangé si l'on remplace (a_i, r) par $(a_i/c, r/c)$, pour $c > 0$. On peut alors choisir $c = \max\left(1, \max_i \|a_i\|_E\right)$ et on peut donc supposer $\|a_i\|_E \leq 1$ comme on l'a implicitement fait.

En choisissant $r < \frac{1}{2}\eta$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-m} < \frac{1}{4R}\eta$, on obtient $L \in B_{[\cdot]}(L_0, \eta)$. On a ainsi

$$L_0 \in W \subset B_{[\cdot]}(L_0, \eta) \cap B_{E^*}(0, R) \subset U\,,$$

avec W faiblement étoile ouvert dans $B_{E^*}(0, R)$. Ainsi U est voisinage faible étoile de chacun de ses points donc faiblement étoile ouvert dans $B_{E^*}(0, R)$.

($\Leftarrow$) On suppose réciproquement que la topologie faible étoile induite sur $B_{E^*}(0, 1)$ est métrisable par une distance d. On introduit pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ouverts pour d (et donc faiblement étoile ouverts) :

$$B_n = B_d(0, \tfrac{1}{n}) = \{L \in B_{E^*}(0, 1) \ : \ d(L, 0) < \tfrac{1}{n}\}\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est un ouvert faible étoile dans $B_{E^*}(0, 1)$ qui contient 0, il existe donc V_n voisinage faible étoile de 0 tel que

$$0 \in V_n \cap B_{E^*}(0, 1) \subset B_n \quad \text{avec} \quad V_n = V(0; x_1^n, \dots, x_{m_n}^n; r_n), \ \ m_n \in \mathbb{N}^*, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n \in E, r_n > 0\,.$$

On note $X_n = \{x_1^n, \dots, x_{m_n}^n\}$. On rappelle que par définition

$$\big\{L \in E^* \ : \ L(x_1^n) = \dots = L(x_{m_n}^n) = 0\big\} \subset V_n\,.$$

On définit $X = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ comme la réunion de tous les points de E apparaissant dans tous les V_n : X est une union dénombrable d'ensembles finis donc dénombrable. Comme d est une distance, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \{0\}$ et donc

$$\big\{L \in B_{E^*}(0, 1) \ : \ L_{|X} = 0\big\} \subset \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n\right) \cap B_{E^*}(0, 1) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \{0\}\,.$$

On introduit le sous-espace vectoriel $F = \text{vect}\,(X)$ et on va montrer que $\overline{F} = E$ en utilisant le critère de densité corollaire 2.10. Soit $L \in E^*$ tel que $L_{|F} = 0$, en particulier $L_{|X} = 0$ et donc, si $L \in B_{E^*}(0, 1)$ on en déduit que $L = 0$. Par homogénéité, si $L \in E^* \setminus B_{E^*}(0, 1)$, il existe $t > 0$ tel que $tL \in B_{E^*}(0, 1)$ et si $L_{|F} = 0$ alors $tL_{|F} = 0$ et par ce qui précède $tL = 0 \ \Rightarrow \ L = 0$.
Finalement F est dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et on en déduit que E est séparable puisque $F = \text{vect}\,(X)$ est séparable en prenant les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels (voir exercice 3.13). □

Preuve de la proposition 3.37. La preuve du sens direct est très similaire à celle qu'on vient de voir pour la topologie faible étoile en échangeant les rôles de E et E^*.
On peut alternativement utiliser le résultat pour la topologie faible étoile comme suit : soit $B \subset E$ borné.
• L'espace vectoriel normé E^* est séparable par hypothèse. On peut appliquer la proposition 3.36 à E^* : $\sigma(E^{**}, E^*)_{|A}$ est métrisable sur toute partie bornée A de E^{**}. Comme J est une isométrie, $J(B)$ est borné dans E^{**}. Il existe donc une distance d sur $J(B)$ qui induit $\sigma(E^{**}, E^*)_{|J(B)}$.
• D'après la proposition 3.30, J est un homéomorphisme de $\big(E, \sigma(E, E^*)\big)$ sur $J(E)$ muni de la topologie induite par $\sigma(E^{**}, E^*)$. En restreignant à B, $J_{|B}$ est un homéomorphisme de B (muni de $\sigma(E, E^*)_{|B}$) sur $J(B)$ (muni de $\sigma(E^{**}, E^*)_{|J(B)}$). On peut alors tirer la distance en arrière via l'homéomorphisme $J_{|B} : B \to J(B)$: pour $x, y \in B$, on définit $d_B(x, y) = d\big(J(x), J(y)\big)$. C'est une distance sur B car J est injective. Il reste à voir que la topologie τ_{d_B} coïncide avec $\sigma(E, E^*)_{|B}$.
Notons $h = J_{|B} : B \to J(B)$ et fixons $x \in B$, $y = h(x)$.

- Base de voisinages pour τ_{d_B} : les boules $B_{d_B}(x, r)$, $r > 0$, forment une base de voisinages de x pour τ_{d_B}.
- Base de voisinages pour $\sigma(E, E^*)_{|B}$. Les boules $B_d(y, r)$, $r > 0$, forment une base de voisinages de y dans $(J(B), d)$. Comme d induit $\sigma(E^{**}, E^*)_{|J(B)}$, h est un homéomorphisme de $(B, \sigma(E, E^*)_{|B})$ sur $(J(B), d)$ et la famille $h^{-1}\big(B_d(y, r)\big)$, $r > 0$, forme une base de $\sigma(E, E^*)_{|B}$-voisinages de x.

Et par définition de d_B, les deux bases sont les mêmes : pour tout $r > 0$,

$$h^{-1}\big(B_d(h(x), r)\big) = \{z \in B : \ d\big(h(x), h(z)\big) < r\} = B_{d_B}(x, r)\,.$$

On en déduit $\tau_{d_B} = \sigma(E, E^*)_{|B}$.
En revanche, la preuve de la réciproque ne s'adapte pas depuis le cas de la topologie faible étoile, on admettra la réciproque dans ce cas.

□

Corollaire 3.38. (*i*) *Soit E un espace vectoriel normé séparable et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E^* alors il existe une sous-suite qui converge faiblement étoile dans E^*.*

(*ii*) *Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E alors il existe une sous-suite qui converge faiblement dans E.*

Preuve du corollaire 3.38.

(*i*) La suite $(L_n)_n$ est bornée par $R = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{E^*}$, si $R \leq 1$, la suite est à valeurs dans $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ qui est faiblement étoile compacte d'après le théorème de Banach–Alaoglu, et de plus $\sigma(E^*, E)_{|\overline{B_{E^*}(0,1)}}$ est métrisable d'après la séparabilité de E et la proposition 3.36. En particulier $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ est séquentiellement faiblement étoile compacte et on en déduit qu'il existe une sous-suite $(L_{\varphi(n)})_n$ qui converge faiblement étoile dans E^*. Si $R > 1$, on applique le raisonnement précédent à la suite $(\frac{1}{R}L_n)_n$ pour conclure similairement.

(*ii*) Comme précédemment, quitte à renormaliser par une constante > 0, on peut supposer que $(x_n)_n$ est à valeurs dans $\overline{B_E(0,1)}$. On définit $M = \overline{\text{vect}\,\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}}$ où l'adhérence est prise pour la topologie forte de sorte que M est un sous-espace vectoriel fortement fermé de E réflexif et d'après la proposition 3.33, M est également réflexif. D'après le théorème de Kakutani, on en déduit que $\overline{B_M(0,1)}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(M, M^*)$ sur M. Par construction M est séparable (les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels sont denses dans M) et réflexif, donc M^* est séparable d'après la proposition 3.34. On peut donc appliquer la proposition 3.37, la topologie faible induite sur $\overline{B_M(0,1)}$ est métrisable. En particulier, $\overline{B_M(0,1)}$ est séquentiellement faiblement compacte pour $\sigma(M, M^*) = \sigma(E, E^*)_{|M}$ (d'après la proposition 3.33(*i*)) et on en déduit qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge faiblement dans E.

□

On notera que le (*ii*) du corollaire précédent ne suppose pas que E^* est séparable pour pouvoir extraire une sous-suite qui converge faiblement !
L'exercice suivant permet de déduire la semi-continuité inférieure faible à partir de la semi-continuité forte d'une fonction **convexe**.

Exercice 3.16 (Épigraphe, convexité et semi-continuité inférieure)**.** Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie τ et $f : A \subset E \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'*épigraphe* de f est

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$

On rappelle également que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en $x_0 \in A$ si,

$$\forall \lambda < f(x_0), \text{ il existe } V \text{ voisinage de } x_0 \text{ dans } A, \ \forall x \in V, \ f(x) > \lambda\,,$$

Dans le cas où (E, τ) est métrisable, on dispose d'une caractérisation séquentielle de la semi continuité inférieure : f est s.c.i. en $\bar{x} \in A$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers $\bar{x}$, on a

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)\,.$$

On dit que f est semi-continue inférieurement sur A si elle l'est en tout point de A.

1. Montrer que si f est s.c.i., cela implique qu'elle est séquentiellement s.c.i., c'est la réciproque qui n'est pas vraie en général.
2. Montrer que
$$f \text{ est semi-continue inférieurement} \iff \operatorname{epi}(f) \text{ est fermé dans } A \times \mathbb{R}\,.$$
3. On suppose de plus que A est convexe. Montrer que
$$f \text{ est convexe} \iff \operatorname{epi}(f) \text{ est convexe.}$$
4. On suppose que A est convexe et fortement fermé dans un espace vectoriel normé E. En déduire que si f est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme, alors f est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
Que dire de l'implication réciproque ?

On énonce à présent un résultat d'existence de minimiseurs en dimension infinie qui est un résultat fondamental en calcul des variations et qui illustre l'importance des concepts qu'on a introduits dans ce chapitre.

Théorème 3.39. *Soit E un espace de Banach réflexif et $A \subset E$ un ensemble convexe fermé (fortement) non vide. Soit $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ convexe, semi-continue inférieurement et coercive :*
$$\lim_{\substack{\|x\|_E \to \infty \\ x \in A}} \mathcal{E}(x) = +\infty\,.$$
Alors $\mathcal{E}$ atteint son minimum : il existe $\bar{x} \in A$ tel que $\mathcal{E}(\bar{x}) = \min_{x \in A} \mathcal{E}(x)$.

Preuve du théorème 3.39. Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que
$$\mathcal{E}(x_n) \to m = \inf_{x \in A} \mathcal{E}(x)\,.$$
Comme $A \neq \emptyset$, on a $m < +\infty$ et on pose $c = \max(1, m+1)$ (permet de traiter le cas où $m = -\infty$). Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{E}(x_n) \leq c$. Par coercivité, il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in A$ tel que $\|x\|_E > R$, on a $\mathcal{E}(x) > c$. On en déduit que la suite $(x_n)_n$ est bornée et admet une sous-suite faiblement convergente $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup \bar{x}$ d'après le corollaire 3.38. Par hypothèse A est convexe et fortement fermé donc faiblement fermé également d'après le théorème 3.11 et donc $\bar{x} \in A$. Par hypothèse, $\mathcal{E}$ est convexe et semi-continue inférieurement et d'après la dernière question de l'exercice 3.16, on en déduit que $\mathcal{E}$ est faiblement semi-continue inférieurement, elle est en particulier séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement, de sorte que
$$\mathcal{E}(\bar{x}) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{E}(x_{\varphi(n)}) = m\,,$$
ce qui conclut la preuve du théorème. □

CHAPITRE 4

Espaces uniformément convexes, espaces L^p, espaces de Hilbert

4.1 Espaces uniformément convexes

On va donner une condition suffisante permettant d'affirmer qu'un espace de Banach est réflexif.

Définition 4.1. Soit E un espace vectoriel normé, on dit que E est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in \overline{B_E(0,1)}$,

$$\|x-y\|_E \geq \varepsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E \leq 1-\delta\,.$$

On remarque que $\|x\|_E \leq 1$, $\|y\|_E \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|x-y\|_E \leq 2$, l'implication est toujours vraie pour $\varepsilon > 2$ et il suffit de vérifier la propriété pour $\varepsilon \leq 2$.
Donnons tout de suite des premiers exemples.

Exemple 4.2 (Exemples d'espaces (non) uniformément convexes)**.**

- $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ est uniformément convexe, grâce à l'identité du parallélogramme : soit $0 < \varepsilon \leq 2$, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, et $\|x-y\| \geq \varepsilon$, on obtient

$$\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2 \leq 4-\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2} = 1-\delta$$

  avec $\delta = 1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\varepsilon^2} > 0$. Le même calcul est valable dans tout espace de Hilbert puisqu'il repose sur l'identité du parallélogramme.
- Un espace de Hilbert est donc uniformément convexe, tout préhilbertien est également uniformément convexe. En particulier, l'uniforme convexité n'implique pas la complétude.
- En revanche $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$ n'est pas uniformément convexe (si $d \geq 2$), en effet $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, \dots, 0, 1)$ satisfont $\|x-y\|_1 = 2$ et $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_1 = \frac{1}{2}\|(1,0,\dots,0,1)\|_1 = 1$. Pour $\varepsilon = 2 > 0$, aucun $\delta > 0$ ne convient.
- $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas uniformément convexe non plus (si $d \geq 2$), voir exercice 4.1. On pourra par exemple considérer $x = (1, 1, 0, \dots)$ et $y = (1, -1, 0, \dots)$ qui vérifient $\|x-y\|_\infty = 2$ et $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1$.
- $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ est uniformément convexe pour $1 < p < \infty$. On peut utiliser le résultat suivant (proposition 4.3) pour le vérifier.

L'uniforme convexité de E implique la stricte convexité de la boule unité $\overline{B_E(0,1)}$, et la réciproque est vraie en dimension finie.

Proposition 4.3. *Soit E un espace vectoriel normé.*

(*i*) *Si E est uniformément convexe, alors la boule unité fermée $\overline{B_E(0,1)}$ est strictement convexe i.e., pour tout $x \neq y$ dans $\overline{B_E(0,1)}$ et $t \in]0,1[$, on a $\|(1-t)x+ty\|_E < 1$.*

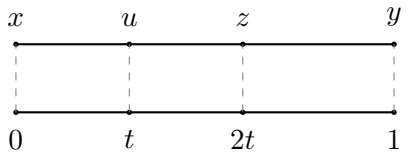
(*ii*) *Si E est de dimension finie et si $\overline{B_E(0,1)}$ est strictement convexe, alors E est uniformément convexe.*

Preuve de la proposition 4.3.

(*i*) Soit $x, y \in \overline{B_E(0,1)}$, $x \neq y$ et $t \in]0,1[$, on note $u = (1-t)x + ty$. Écrivons u comme le milieu de deux points de $\overline{B_E(0,1)}$.

Quitte à échanger x et y, on peut supposer $t \leq \frac{1}{2}$ et on a alors

$$u = \frac{1}{2}(x+z) \text{ avec } z = (1-2t)x + 2ty\,.$$



On a de plus $\|z-x\|_E = 2t\,\|y-x\|_E = \varepsilon > 0$, et par uniforme convexité de E,

$$\|u\|_E = \left\|\frac{x+z}{2}\right\|_E \leq 1 - \delta_\varepsilon < 1\,,$$

donc $u = (1-t)x + ty \in B_E(0,1)$ et $\overline{B_E(0,1)}$ est bien strictement convexe.

(*ii*) On suppose que E est de dimension finie et $\overline{B_E(0,1)}$ strictement convexe. Soit $0 < \varepsilon \leq 2$ et

$$K = \left\{(x,y) \in E^2 \,:\, \|x\|_E \leq 1,\, \|y\|_E \leq 1 \text{ et } \|x-y\|_E \geq \varepsilon\right\}\,.$$

L'ensemble $K \subset \overline{B_E(0,1)}^2$ est borné et fermé par continuité de $\|\cdot\|_E$ donc compact puisque $\dim E < \infty$. Comme $\varepsilon \leq 2$, K est non vide ($(-a,a) \in K$, avec $a \in E$ de norme 1).

Soit $f : E^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E$ continue donc atteint son minimum sur K : il existe $(x_0,y_0) \in K$ tel que

$$\delta_\varepsilon = \min_{(x,y)\in K} f(x,y) = f(x_0,y_0)\,.$$

On a $\|x_0\|_E \leq 1$, $\|y_0\|_E \leq 1$ et $x_0 \neq y_0$ (puisque $\|x_0 - y_0\| \geq \varepsilon > 0$) et donc par stricte convexité,

$$\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|_E < 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_\varepsilon = f(x_0,y_0) = 1 - \left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|_E > 0\,,$$

ce qui prouve l'uniforme convexité de E.

□

Exercice 4.1. Soit $1 < p < \infty$, montrer que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ est uniformément convexe.
On pourra utiliser la convexité/stricte convexité de $s \mapsto |s|^p$ coordonnée par coordonnée.

Exercice 4.2 (Exemple d'espace qui n'est pas uniformément convexe, dont la boule unité fermée est strictement convexe)**.** On se place dans ℓ^1, qu'on munit de la norme "mixte", pour $u \in \ell^1$,

$$\|u\| = \|u\|_1 + \|u\|_2\,.$$

1. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$, vérifier qu'on a $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ et donc les inclusions $\ell^p \subset \ell^q$.
2. En déduire que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. Est-ce que $(\ell^1, \|\cdot\|)$ est réflexif ?
3. Vérifier que $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)}$ est strictement convexe.

4. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|)$ n'est pas uniformément convexe. On pourra considérer, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u^{(k)} = \sum_{n=1}^{k} e_n \quad \text{et} \quad v^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{2k} e_n \,,$$

après renormalisation et observer que le terme impliquant $\|\cdot\|_1$ est prépondérant devant le terme impliquant $\|\cdot\|_2$.

On dit souvent qu'un espace uniformément convexe a une boule "bien ronde". On note que l'uniforme convexité n'est pas une notion topologique, on vient de donner l'exemple de deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^d$ dont l'une est uniformément convexe et l'autre non (pour $d \geq 2$). On ne peut pas espérer caractériser la réflexivité, qui est une notion topologique comme on l'a vu dans la proposition 3.33(ii). C'est cependant une condition suffisante très utile pour montrer la réflexivité d'un espace de Banach.

Théorème 4.4 (Milman–Pettis)**.** *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Remarque 4.5. Sans l'hypothèse de complétude, le théorème ci-dessus serait faux. Comme déjà mentionné, tout pré-hilbertien vérifie l'identité du parallélogramme et est donc uniformément convexe. Un espace réflexif est automatiquement complet et il existe des pré-hilbertiens qui ne sont pas complets bien sûr, il suffit de considérer un sous-espace vectoriel non fermé dans un espace de Hilbert. On a déjà croisé par exemple le sous-espace vectoriel des suites presque nulles dans l'espace de Hilbert ℓ^2.

Preuve du théorème 4.4. On a $J(E) \subset E^{**}$ et on va donc montrer l'inclusion réciproque. Par homogénéité, il suffit de montrer

$$\{\xi \in E^{**} \,:\, \|\xi\|_{E^{**}} = 1\} \subset J(E)\,.$$

On se donne $\xi \in E^{**}$ satisfaisant $\|\xi\|_{E^{**}} = 1$.
• On rappelle qu'on a établi que $J(E)$ est fortement fermé dans E^{**} dans la preuve de la proposition 3.33(iii) (en utilisant le fait qu'une isométrie préserve les suites de Cauchy, et donc la complétude de E se transmet à $J(E)$ qui est fermé). Ici la complétude de E est cruciale.
Par conséquent, il suffit de montrer que $\xi \in \overline{J\left(\overline{B_E(0,1)}\right)}$, c'est-à-dire que tout voisinage de ξ rencontre $J\left(\overline{B_E(0,1)}\right)$. En utilisant la base de voisinages de ξ formée par les boules ouvertes centrées en ξ, on est ramené à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\xi_\varepsilon \in J(E)$ tel que

$$\|\xi - \xi_\varepsilon\| \leq \varepsilon\,.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$.
• Soit $\eta > 0$ (à choisir plus tard, qui dépendra de ε), comme $\|\xi\|_{E^{**}} = 1$, il existe $L \in E^*$ tel que $\|L\|_{E^*} = 1$ et $|\xi(L)| > 1 - \eta$, i.e. $|\Phi_L(\xi)| > 1 - \eta$. On considère alors le voisinage faible étoile de ξ de la forme

$$V = \{\zeta \in E^{**} \,:\, |\xi(L) - \zeta(L)| < \eta\}$$

de sorte que si $\zeta \in V$, on a par inégalité triangulaire $|\zeta(L)| \geq |\xi(L)| - \eta > 1 - 2\eta$ et en particulier : $\|\zeta\|_{E^{**}} > 1 - 2\eta$. *Le choix de L assure que le voisinage faible étoile V ne rentre pas trop à l'intérieur de la boule, on vient d'établir qu'il est à l'extérieur de la boule de rayon $1 - 2\eta$.*
• D'après le lemme de Goldstine, $J\left(\overline{B_E(0,1)}\right)$ est faiblement étoile dense dans $\overline{B_{E^{**}}(0,1)}$, et comme $\xi \in V \cap \overline{B_{E^{**}}(0,1)}$, $V \cap J\left(\overline{B_E(0,1)}\right) \neq \emptyset$ de sorte qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$ et $J(x) = \Phi_x \in V$. On va montrer qu'en choisissant bien η, on a

$$\|\xi - \Phi_x\|_{E^{**}} \leq \varepsilon\,.$$

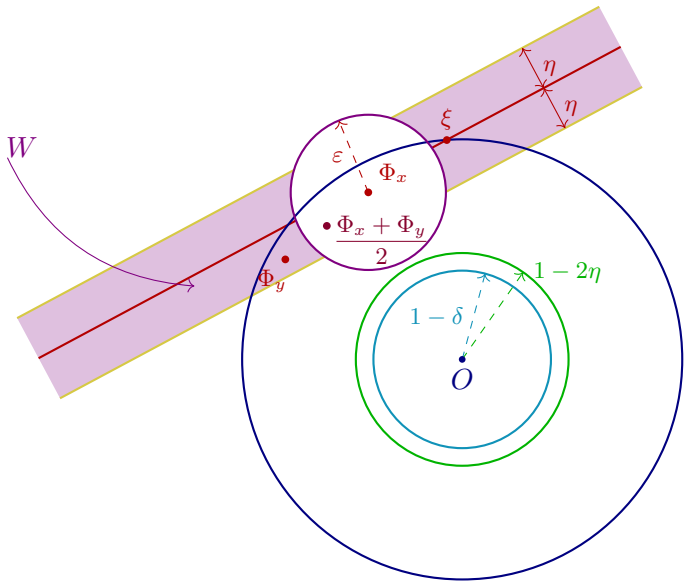
On pourra poser $\xi_\varepsilon = \Phi_x$ pour conclure la preuve.
• On suppose par l'absurde que $\|\xi - \Phi_x\|_{E^{**}} > \varepsilon$. On a alors $W = E^{**} \setminus \overline{B_{E^{**}}(\Phi_x, \varepsilon)}$ voisinage de ξ faiblement étoile ouvert (car $\overline{B_{E^{**}}(\Phi_x, \varepsilon)}$ est faiblement étoile compacte donc fermée dans E^{**} d'après le théorème de Banach-Alaoglu et la remarque 3.22). Par conséquent $V \cap W$ est un voisinage faible étoile de ξ et, à nouveau d'après le lemme de Goldstine, il existe $y \in E$ tel que $\|y\|_E \leq 1$ et $J(y) = \Phi_y \in V \cap W$.
• Comme J est une isométrie, on a d'une part

$$\|x - y\|_E = \|\Phi_x - \Phi_y\|_{E^{**}} > \varepsilon\,.$$

D'autre part, $\Phi_x, \Phi_y \in V$, et comme V est convexe (se vérifie sur sa définition), $\frac{1}{2}(\Phi_x + \Phi_y) \in V$. Par ce qui précède,

$$\left\|\frac{\Phi_x + \Phi_y}{2}\right\|_{E^{**}} > 1 - 2\eta \quad \underset{J \text{ isométrie}}{\Longrightarrow} \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_E \geq 1 - 2\eta\,.$$

On aboutit à une contradiction en notant $\delta_\varepsilon > 0$, donné par l'uniforme convexité appliquée avec $\varepsilon > 0$, et en choisissant dès le départ $\eta < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$.



□

On peut en déduire que les espaces de Hilbert sont réflexifs. Dans un espace uniformément convexe, on a la caractérisation suivante liant convergence faible et convergence forte.

Proposition 4.6 (Radon–Riesz)**.** *Soientt E un espace de Banach uniformément convexe, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $x \in E$. Alors*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\|_E \to \|x\|_E \end{cases}\,.$$

Preuve de la proposition 4.6. L'implication "⇒" suit de la continuité de la norme vis-à-vis de la topologie qu'elle induit et du fait que la convergence forte entraîne la convergence faible.
Réciproquement, on peut supposer $x \neq 0$ (pour $x = 0$, $\|x_n\|_E \to 0$ dit exactement que $(x_n)_n$ converge fortement vers 0) et par convergence des normes, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $x_n \neq 0$. On définit alors

$$y = \frac{x}{\|x\|_E} \quad \text{et pour tout } n \geq N_0,\ y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E}\,.$$

On a d'une part $y_n \rightharpoonup y$. En effet, on applique le critère de convergence : pour $L \in E^*$ et $n \geq N_0$,

$$|L(y_n) - L(y)| \leq \underbrace{\left|\frac{1}{\|x_n\|_E} - \frac{1}{\|x\|_E}\right|}_{\to 0} \underbrace{|L(x_n)|}_{\leq \|L\|_{E^*}\|x_n\|_E \text{ borné}} + \frac{1}{\|x\|_E}\underbrace{|L(x_n) - L(x)|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

On en déduit que $\frac{1}{2}(y_n + y) \rightharpoonup y$ et par semi-continuité inférieure de la norme par rapport à la convergence faible (voir proposition 3.10), on obtient pour $n \geq N_0$,

$$\frac{1}{2}\|y_n + y\|_E \leq \frac{1}{2}\|y_n\|_E + \frac{1}{2}\|y\|_E \leq 1 \quad \text{et donc} \quad 1 = \|y\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_n + y\|_E \leq 1\,.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_n + y\|_E = 1\,.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ donné par l'uniforme convexité, et il existe alors $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left\|\frac{y_n + y}{2}\right\|_E > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|y - y_n\|_E < \varepsilon$$

par contraposée de l'uniforme convexité. On a donc $\|y_n - y\|_E \to 0$ et par inégalité triangulaire

$$\|x_n - x\|_E = \|\|x_n\|_E y_n - \|x\|_E y\|_E \leq \underbrace{\|x_n\|_E}_{\text{borné}}\|y_n - y\|_E + \|y\|_E\,|\|x_n\|_E - \|x\|_E| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

□

Il existe un théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace uniformément convexe, sans la caractérisation en terme de produit scalaire qu'on connaît dans un espace de Hilbert.

Théorème 4.7 (Projection sur un convexe fermé dans un espace uniformément convexe.)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et $C \subset E$ un ensemble convexe, fermé (fortement) et non vide. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique élément de C, noté $p_C(x)$, satisfaisant*

$$\|p_C(x) - x\|_E = \min_{y\in C} \|y - x\|_E\,.$$

Comme on va le voir dans la preuve, l'existence de $p_C(x)$ est vraie en supposant seulement E réflexif, tandis que l'unicité repose sur l'uniforme convexité de E (en lisant la preuve, on peut observer que la stricte convexité de $\overline{B_E(0,1)}$ suffit, on a vu que c'était une conséquence de l'uniforme convexité).

Preuve du théorème 4.7. Commençons par établir l'existence de $p_C(x)$, pour cela on va se ramener au théorème 3.39. L'application

$$\mathcal{E} : E \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \|y - x\|_E$$

est

- convexe par composition d'une fonction affine et d'une fonction convexe,
- fortement s.c.i. car fortement continue,
- coercive, pour tout $y \in C$,

$$\|y - x\|_E \geq \|y\|_E - \|x\|_E \xrightarrow[\|y\|_E\to+\infty]{} +\infty\,.$$

L'ensemble C est convexe, fortement fermé et non vide. Comme E est réflexif (d'après le théorème 4.4), on peut appliquer le théorème 3.39 : il existe $z \in C$ tel que

$$\|z - x\|_E = \mathcal{E}(z) = \min_{y \in C} \|y - x\|_E \, .$$

Vérifions à présent l'unicité de $p_C(x)$. On note $m = \min_{y\in C} \|y - x\|_E$, supposons que $z_1, z_2 \in C$ satisfont

$$\|z_1 - x\|_E = \|z_2 - x\|_E = m \, .$$

Si $m = 0$, cela implique $z_1 = x = z_2$ et donc l'unicité. On suppose donc $m > 0$.
Si par l'absurde $z_1 \neq z_2$, posons pour $i = 1, 2$, $v_i = \frac{z_i - x}{m} \in \overline{B_E(0,1)}$ de sorte que $v_1 \neq v_2$. En appliquant l'uniforme convexité avec $\varepsilon = \|v_1 - v_2\|_E > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{1}{m} \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - x \right\|_E = \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} \right\|_E \leq 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - x \right\|_E < m$$

ce qui contredit la minimalité de m puisque $\frac{z_1+z_2}{2} \in C$ par convexité.
On a donc bien $z_1 = z_2$, c'est-à-dire l'unicité de $p_C(x)$.

□

4.2 Espaces L^p

Théorème 4.8. *Soit (X, μ) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. L'espace $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ est uniformément convexe, en particulier réflexif.*

On va prouver que $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ est uniformément convexe pour $2 \leq p < \infty$ grâce à l'inégalité de Clarkson (lemme 4.9) et on en déduira la réflexivité pour $2 \leq p < \infty$ dans un premier temps. Lorsque $1 < p < 2$, on utilisera l'isométrie "usuelle" entre $(\mathrm{L}^p)^*$ et L^q (lemme 4.10) pour se ramener au cas précédent et conclure à la réflexivité dans ce cas aussi.
On ne prouvera pas l'uniforme convexité de $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ dans le cas $1 < p < 2$.

Lemme 4.9 (Inégalité de Clarkson)**.** *Soit $2 \leq p < +\infty$, pour tout $f, g \in \mathrm{L}^p(X, \mu)$, on a :*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right) \, .$$

Preuve du lemme 4.9. Soit $2 \leq p < \infty$. La preuve de l'inégalité de Clarkson repose sur l'inégalité suivante, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p + \left| \frac{x-y}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} \left(|x|^p + |y|^p \right) \, .$$

• Vérifions déjà l'inégalité suivante : pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\left(|\alpha|^p + |\beta|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \, .$$

En effet, pour $t \in [0, 1]$ et $q \geq 1$, $t^q \leq t$ et donc

$$t^q + (1-t)^q \leq t + (1-t) = 1 \, .$$

On en déduit que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, en appliquant l'inégalité précédente avec $t = \dfrac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$ et $q = \frac{p}{2} \geq 1$ pour $p \geq 2$:

$$\left(|\alpha|^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \left(|\beta|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad \Rightarrow \quad |\alpha|^p + |\beta|^p \leq \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \, .$$

• On en déduit ensuite que pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|x|^2+|y|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}},$$

en appliquant la première inégalité avec $\alpha = \dfrac{x+y}{2}$ et $\beta = \dfrac{x-y}{2}$. On conclut en utilisant que $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ est convexe pour $p \geq 2$.
• Il nous reste à intégrer l'inégalité établie afin d'obtenir l'inégalité de Clarkson. Soit $f, g \in L^p(X, \mu)$ et $x \in X$, on a

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p - \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p &= \int_X \left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p \mathrm{d}\mu(x)\\ &\leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 4.10. *Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué. L'application linéaire*

$$\begin{array}{ccccccccc} I & : & L^q(X,\mu) & \to & (L^p(X,\mu))^* & \text{où} & T_u & : & L^p(X,\mu) \to \mathbb{K} \\ & & u & \mapsto & T_u & & & & v \mapsto \int_X uv\,\mathrm{d}\mu \end{array},$$

est une isométrie.

Preuve du lemme 4.10. On notera simplement L^p (respectivement L^q) pour $L^p(X, \mu)$ (respectivement $L^q(X, \mu)$).
• Soit $u \in L^q$. On a alors par l'inégalité de Hölder, pour $v \in L^p$,

$$\int_X |uv|\,\mathrm{d}\mu \leq \|u\|_q \|v\|_p .$$

Par conséquent T_u est bien définie, linéaire continue, de norme

$$\|T_u\|_{(L^p)^*} \leq \|u\|_q .$$

Il reste à vérifier qu'on a l'inégalité réciproque afin de conclure la preuve du lemme.
• Si $u = 0$, $T_u = 0$ et on a la propriété voulue. On suppose $u \neq 0$ et on définit $v = |u|^{q-2}\,\bar{u}\mathbb{1}_{\{u\neq 0\}}$, on a $|v|^p = |u|^{(q-1)p} = |u|^q$ donc $v \in L^p$ et $\|v\|_p^p = \|u\|_q^q$ ou encore $\|v\|_p = \|u\|_q^{\frac{q}{p}} = \|u\|_q^{q-1} \neq 0$. On a donc bien

$$|T_u(v)| = \int_X u\,|u|^{q-2}\,\bar{u}\,\mathrm{d}\mu = \|u\|_q^q = \|u\|_q \|v\|_p$$

de sorte que $\|T_u\|_{(L^p)^*} \geq \|u\|_q$ ($\|v\|_p \neq 0$). Une façon de comprendre pourquoi on choisit la fonction v donnée est de reprendre l'inégalité de Hölder et d'étudier le cas d'égalité. □

On peut à présent prouver l'uniforme convexité de $L^p(X, \mu)$ pour $2 \leq p < \infty$ et la réflexivité de $L^p(X, \mu)$ pour $1 < p < 2$.

Preuve du théorème 4.8. • On commence par montrer que $L^p(X,\mu)$ est uniformément convexe pour $2 \leq p < \infty$. Soit $0 < \varepsilon \leq 2$ et $f, g \in L^p(X,\mu)$ satisfaisant

$$\|f\|_p \leq 1, \quad \|g\|_p \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f-g\|_p \geq \varepsilon\,.$$

D'après l'inégalité de Clarkson (lemme 4.9), on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p &\leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \\ &\leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'uniforme convexité en posant $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$.

• D'après le théorème 4.4, et puisque $L^p(X,\mu)$ est un espace de Banach, on en déduit que $L^p(X,\mu)$ est réflexif pour $2 \leq p < \infty$. Supposons à présent $1 < p < 2$, d'après le lemme 4.10 (en échangeant p et q), on a $I : L^p \to (L^q)^*$ isométrie, en particulier injective. Soit $F = I(L^p)$, c'est un sous-espace vectoriel de $(L^q)^*$, et I réalise une isométrie bijective de L^p vers F. On sait de plus que L^p est complet donc son image F par l'isométrie I est également un espace complet, en particulier fermé dans $(L^q)^*$. Comme $1 < p < 2$, on a $2 < q < \infty$ et on sait que L^q est réflexif par la première partie de la preuve. On en déduit que $(L^q)^*$ est réflexif comme dual d'un espace réflexif, et finalement, F est réflexif comme sous-espace vectoriel fermé dans $(L^q)^*$ réflexif. On a utilisé plusieurs points de la proposition 3.33.
Comme F est réflexif et I réalise un isomorphisme bicontinu entre L^p et F, on conclut que L^p est réflexif. □

On va à présent s'appuyer sur la réflexivité de L^p, pour $1 < p < \infty$ afin d'établir le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 4.11 (Dualité L^p–L^q)**.** *Soit (X,μ) un espace mesuré, $1 < p < \infty$ et q l'exposant conjugué satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, l'application*

$$I : L^q(X,\mu) \to (L^p(X,\mu))^*\,, \quad u \mapsto T_u$$

est une isométrie bijective.

Preuve du théorème 4.11. On a déjà vérifié que I définissait une isométrie (lemme 4.10), elle est en particulier injective. Il reste à vérifier la surjectivité. On a vu au cours de la preuve du théorème 4.8 que $F = I(L^q)$ est fermé (fortement) dans $(L^p)^*$. Afin de conclure, on va montrer que F est dense dans $\left((L^p)^*, \|\cdot\|_{(L^p)^*}\right)$ en utilisant le critère de densité corollaire 2.10. Soit donc $\xi \in (L^p)^{**}$ une forme linéaire continue sur $(L^p)^*$ qui s'annule sur F. Montrons que $\xi = 0$.
Comme L^p est réflexif (théorème 4.8), il existe $v \in L^p$ tel que $\xi = \Phi_v$ de sorte que pour tout $L \in (L^p)^*$, $\xi(L) = L(v)$. En particulier, pour tout $u \in L^q$,

$$0 = \xi(T_u) = T_u(v) = \int_X uv \,\mathrm{d}\mu = T_v(u)$$

et on en déduit que $T_v = 0$ dans $(L^q)^*$. Comme $I : L^p \to (L^q)^*$ est toujours une isométrie (on a échangé les rôles de p et q), elle est injective et on a $v = 0$. On en déduit $\xi = \Phi_v = 0$.
Ainsi F est dense et fermé dans $\left((L^p)^*, \|\cdot\|_{(L^p)^*}\right)$ donc $F = I(L^q) = (L^p)^*$ de sorte que I est bien surjective. □

On résume pour conclure différentes propriétés des espaces L^p qu'on a croisées pour la plupart, pour les autres on renvoie à [Bre11]. Soit (X,μ) un espace mesuré, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ l'exposant conjugué satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- L'espace $\left(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p\right)$ est complet.
- Réflexivité et dual :
  - Si $1 < p < \infty$, $\left(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p\right)$ est uniformément convexe et réflexif. On a de plus
$$(L^p)^* \text{ est isométriquement isomorphe à } L^q\,.$$
  - $\left(L^1(X,\mu), \|\cdot\|_1\right)$ n'est pas réflexif (sauf s'il est de dimension finie, par exemple si μ est supportée par un ensemble fini de points). Si (X,μ) est σ–fini, alors (voir exercice 4.3)
$$(L^1)^* \text{ est isométriquement isomorphe à } L^\infty\,.$$
  - $(L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif (sauf s'il est de dimension finie, par exemple si μ est supportée par un ensemble fini de points). L'application $I : u \in L^1 \mapsto T_u \in (L^\infty)^*$ est une isométrie linéaire, mais si (X,μ) est σ–fini et L^∞ de dimension infinie, I n'est pas surjective.
- Si $X = \Omega$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, pour $1 \le p < \infty$,
  - $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ est séparable.
  - L'ensemble $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$.
  - En revanche, pour $p = \infty$, $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable, $C_c(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$.

Exercice 4.3 (Dual de L^1)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré *σ-fini* : il existe une suite croissante $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(X_j) < \infty$ et $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$. Pour $u \in L^\infty(X,\mu)$, on définit

$$I \;:\; \begin{array}{ccc} L^\infty(X,\mu) & \to & \left(L^1(X,\mu)\right)^* \\ u & \mapsto & T_u \end{array} \qquad \text{où} \qquad T_u \;:\; \begin{array}{ccc} L^1(X,\mu) & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & \int_X uv\,\mathrm{d}\mu \end{array}\,,$$

Le but de l'exercice est de montrer que I est une isométrie linéaire bijective de $L^\infty(X,\mu)$ sur $(L^1(X,\mu))^*$.

1. Soit $u \in L^\infty$, montrer que T_u est bien définie (linéaire) continue et $\|T_u\|_{(L^1)^*} \le \|u\|_\infty$.
2. On va montrer dans cette question que I est une isométrie.
   (a) Soit $u \in L^\infty$, $u \neq 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \|u\|_\infty$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable B satisfaisant $0 < \mu(B) < +\infty$ et $|u| > \alpha$ presque partout sur B.
   (b) En considérant $v = \dfrac{\bar u}{|u|}\dfrac{\mathbb{1}_B}{\mu(B)}$ montrer que $\|T_u\| = \|u\|_\infty$ (et donc I est une isométrie).
3. Dans un premier temps, on va établir la surjectivité de I en supposant que μ est une mesure finie : $\mu(X) < \infty$. Soit $\Lambda \in (L^1)^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in L^2$ telle que pour tout $v \in L^2$,
$$\Lambda(v) = \int_X uv\,\mathrm{d}\mu\,.$$
   (b) Montrer que $u \in L^\infty$ et $\|u\|_\infty \le \|\Lambda\|_{(L^1)^*}$. On pourra raisonner comme à la question 2.
   (c) Conclure par densité que $\Lambda = T_u$.
4. On revient au cas (X,μ) σ–fini. Soit $\Lambda \in (L^1)^*$. On introduit la fonction L^1 strictement positive
$$\omega = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\frac{\mathbb{1}_{X_j}}{1+\mu(X_j)}\,,$$
   et la mesure $\nu = \omega\mu$.

(a) Montrer que $\Psi : \mathrm{L}^1(X,\mu) \to \mathrm{L}^1(X,\nu)$, $v \mapsto \frac{v}{\omega}$ est une isométrie linéaire bijective.
(b) En déduire qu'il existe $u \in \mathrm{L}^\infty$ telle que $\Lambda = T_u$ et conclure. On pourra observer que $\Lambda \circ \Psi^{-1} \in \big(\mathrm{L}^1(X,\nu)\big)^*$.

Exercice 4.4 ($\mathrm{L}^1(\Omega)$ ne s'identifie pas au dual de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide qu'on munit de la mesure de Lebesgue. Le but de l'exercice est de vérifier que $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ne s'identifie pas au dual de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

1. Soit $x_0 \in \Omega$. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω qu'on munit de la norme sup $\|f\|_{\mathrm{C}_b} = \sup_\Omega |f|$ sur les fonctions continues bornées. On définit la forme linéaire

$$\Lambda_0 : \mathrm{C}_c(\Omega) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x_0)\,.$$

Justifier soigneusement qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda : \mathrm{L}^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ qui prolonge Λ_0.

2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que

$$\Lambda = T_u : v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \mapsto \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x\,.$$

On pourra admettre que si T_u s'annule sur $\mathrm{C}_c(V)$, $V \subset \Omega$ ouvert, alors $u = 0$ dans $\mathrm{L}^1(V)$.

4.3 Espaces de Hilbert

4.3.1 Espaces préhilbertiens

On commence par rappeler la notion de produit scalaire réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sur un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

Définition 4.12 (Espace préhilbertien)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un *produit scalaire* (*hermitien* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sur E est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) (*linéarité à gauche*) $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
(ii) (*symétrie hermitienne*) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
(iii) (*caractère défini positif*) $\langle x, x\rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Un *espace préhilbertien* est un couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire (hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sur E.

Remarque 4.13.
- On note que le point (ii) garantit que $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$ et donc $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, le point ($iii$) ne concerne donc que la positivité, le caractère réel est déjà acquis.
- Comme conséquence des points (i) et (ii),
  - ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), le produit scalaire hermitien est *antilinéaire à droite* : $\langle x, \lambda y + z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, c'est-à-dire sesquilinéaire.
  - ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), le produit scalaire est linéaire à droite.
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- La linéarité à gauche (et donc l'antilinéarité à droite) est une convention, usuelle en mathématiques.

Rappelons quelques exemples d'espaces préhilbertiens.

Exemple 4.14. Les espaces suivants sont des espaces préhilbertiens pour le $\langle\cdot,\cdot\rangle$ donné.

(*i*) $\mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire hermitien : pour $x, y \in \mathbb{C}^d$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}\,.$$

(*ii*) $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : pour $A, B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} b_{ij}\,.$$

(*iii*) Pour (X, μ) un espace mesuré : $\mathrm{L}^2(X, \mu)$ muni du produit scalaire, pour $u, v \in \mathrm{L}^2(X, \mu)$,

$$\langle u, v\rangle = \int_X u\overline{v}\,\mathrm{d}\mu\,.$$

En particulier, si $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on retrouve ℓ^2 muni du produit scalaire : pour $u, v \in \ell^2$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}\,.$$

(*iv*) Tout sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien muni du produit scalaire restreint. Par exemple $\mathrm{C}([0,1])$ muni du produit scalaire induit par celui sur L^2 : pour $f, g \in \mathrm{C}([0,1])$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Définition 4.15. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, on définit pour $x \in E$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

On a que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E, comme la notation le laisse penser.

Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. L'homogénéité $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ et la séparation, $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$, se déduisent de la définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On va obtenir l'inégalité triangulaire comme conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Proposition 4.16 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$,*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve de la proposition 4.16. Soit $x, y \in E$, on peut supposer $\langle x, y\rangle \neq 0$ (en particulier $x \neq 0$ et $y \neq 0$), l'inégalité étant immédiate par $\|\cdot\| \ge 0$ sinon.
On va utiliser que pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\|tx + y\|^2 \ge 0$. On a

$$\|tx + y\|^2 = |t|^2\,\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(t\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \ge 0\,.$$

En particulier, pour $r \in \mathbb{R}$ et $t(r) = r\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$ on obtient

$$r^2\,\|x\|^2 + 2r\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \ge 0\,.$$

Le discriminant de la fonction polynomiale ci-dessus est ainsi ≤ 0, c'est-à-dire

$$4\left(|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right) \le 0 \quad\Longrightarrow\quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,.$$

Le discriminant étant nul si et seulement si $\|t(r)x+y\|^2 = 0$ pour un certain r, c'est-à-dire $t(r)x+y=0$ et donc x et y sont colinéaires. Rappelons que dans le cas qu'on a écarté au départ : $\langle x,y\rangle = 0$, on a égalité si et seulement si $\|x\|=0$ ou $\|y\|=0$, i.e. $x=0$ ou $y=0$ et x et y sont encore colinéaires.
On vérifie réciproquement que si x et y sont colinéaires, on a bien égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz. □

On en déduit l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$: pour $x,y\in E$, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

de sorte que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 \ .$$

Remarque 4.17. L'inégalité de Cauchy–Schwarz dit également que

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : (E,\|\cdot\|)\times(E,\|\cdot\|)\to\mathbb{K}$$

est continue. En effet, pour $(x_0,y_0),(x,y)\in E^2$, on a

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \le \|x\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\| \ .$$

Proposition 4.18 (Identité du parallélogramme et identité de polarisation)**.** *Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x,y\in E$,*

(*i*) Identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \ .$$

(*ii*) Identité de polarisation :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}=\mathbb{R}: &\quad 2\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\\ \mathbb{K}=\mathbb{C}: &\quad 4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2 \ .\end{aligned}$$

"Preuve" de la proposition 4.18. On développe les $\|\cdot\|^2$ et on simplifie. □

On a déjà invoqué l'identité du parallélogramme pour établir qu'un espace préhilbertien est uniformément convexe. L'identité de polarisation dit que le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est entièrement caractérisé par la norme associée $\|\cdot\|$.

Définition 4.19 (Orthogonalité)**.** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

- Soient $x,y\in E$, on dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x,y\rangle = 0$.
- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E, on dit que cette famille est orthogonale si pour tout $i,j\in I$, $i\neq j \ \Rightarrow\ \langle x_i,x_j\rangle = 0$.
- Pour $A\subset E$, on définit *l'orthogonal* de A, noté $A^\perp$:

$$A^\perp = \{x\in E \ :\ \forall y\in A,\ \langle x,y\rangle = 0\} \ .$$

Proposition 4.20 (Propriétés de l'orthogonal d'une partie)**.** *Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $A\subset E$. L'orthogonal satisfait les propriétés suivantes :*

1. $E^\perp = \{0\}$,
2. $A\subset (A^\perp)^\perp$
3. $\overline{A}^\perp = A^\perp$,
4. $A^\perp = (\mathrm{vect}\,A)^\perp$,

5. *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.*

Preuve de la proposition 4.20. Exercice. □

Proposition 4.21 (Identité de Pythagore)**.** *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $x, y \in E$ orthogonaux, alors*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \,.$$

Preuve de l'identité de Pythagore. Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$. On a alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \,.$$

□

4.3.2 Espaces de Hilbert et théorème de projection sur un convexe fermé

Un espace de Hilbert est un préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 4.22 (Espace de Hilbert)**.** On dit que $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un préhilbertien et $(H, \|\cdot\|)$ est complet.

Si on reprend les exemples d'espaces préhilbertiens donnés dans l'exemple 4.14, $\mathbb{C}^d$, $\mathrm{M_d}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(X,\mu)$ sont des espaces de Hilbert. En revanche, $\mathrm{C}([0,1])$ muni du produit scalaire induit par L^2 n'est pas un espace de Hilbert : il n'est pas fermé dans L^2 (et donc pas complet), on a même

$$\overline{\mathrm{C}([0,1])} = \mathrm{L}^2([0,1])\,.$$

Le théorème suivant est un résultat fondamental concernant les espaces de Hilbert.

Théorème 4.23 (Théorème de projection sur un convexe fermé)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe non vide fermé dans H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C, noté $p_C(x)$, tel que*

$$\|x - p_C(x)\| = \min_{y\in C} \|x-y\| \,.$$

De plus $p_C(x) \in C$ est caractérisé par

$$\forall z \in C,\ \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \le 0\,.$$

L'application p_C est 1–lipschitzienne.

Preuve du théorème 4.23. Notons que l'existence et l'unicité de $p_C(x)$ peuvent être obtenues comme conséquence du théorème 4.7 puisqu'un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach uniformément convexe, on l'avait vérifié à partir de l'identité du parallélogramme. On ne sera ainsi pas surpris que la preuve "directe" dans le cadre Hilbert repose sur l'identité du parallélogramme.
Soit $x \in H$ et $d = \inf_{y\in C}\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, C)$.
• *Existence.* Par définition de l'infimum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in C$ tel que $d^2 \le \|x-y_n\|^2 \le d^2 + 2^{-n}$. Montrons que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, en appliquant l'identité du parallélogramme à $x - y_p$ et $x - y_q$, on obtient

$$\|2x - y_p - y_q\|^2 + \|y_q - y_p\|^2 = 2\,\|x-y_p\|^2 + 2\,\|x-y_q\|^2 \le 4d^2 + 4\cdot 2^{-\min(p,q)}\,.$$

On a alors, puisque $\dfrac{y_p+y_q}{2} \in C$ par convexité

$$\|y_q - y_p\|^2 \le 4d^2 + 2^{-\min(p,q)+2} - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\|^2}_{\ge d^2} \le 2^{-\min(p,q)+2} \xrightarrow[\min(p,q)\to+\infty]{} 0\,.$$

La suite $(y_n)_n$ est de Cauchy dans H complet, elle converge vers y dans H, et $y \in C$ puisque C est fermé. On a alors

$$\operatorname{dist}(x, C) = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$$

et on peut poser $p_C(x) = y \in C$.

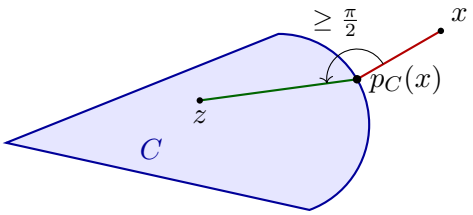
• *Unicité.* S'il existe $y_1, y_2 \in C$ tels que $d = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$, en appliquant l'identité du parallélogramme avec $x - y_1$ et $x - y_2$, on obtient

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \underbrace{2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2}_{=4d^2} - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2}_{\geq d^2} \leq 0\,,$$

de sorte que $y_1 = y_2$, ce qui établit l'unicité de $p_C(x)$.

• *Caractérisation.* Soit $z \in C$, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)p_C(x) + tz = p_C(x) + t(z - p_C(x)) \in C$ par convexité et donc

$$\|x - (p_C(x) + t(z - p_C(x)))\|^2 - \|x - p_C(x)\|^2 \geq 0\,.$$



D'autre part, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned}&\|(x - p_C(x)) - t(z - p_C(x))\|^2 - \|x - p_C(x)\|^2\\ &= -2t\,\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle + t^2\|z - p_C(x)\|^2\,.\end{aligned}$$

En divisant par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on en déduit que

$$-2\,\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0\,.$$

Réciproquement, si $y \in C$ vérifie pour tout $z \in C$,

$$\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$$

on a alors

$$\|y - p_C(x)\|^2 = \underbrace{\mathrm{Re}\langle y - x, y - p_C(x)\rangle}_{\leq 0 \text{ par hyp. sur } y,\, z = p_C(x)} + \underbrace{\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle}_{\leq 0 \text{ par le sens direct avec } z = y \in C} \leq 0\,,$$

et donc $y = p_C(x)$, ce qui conclut la preuve de la caractérisation de $p_C(x)$.

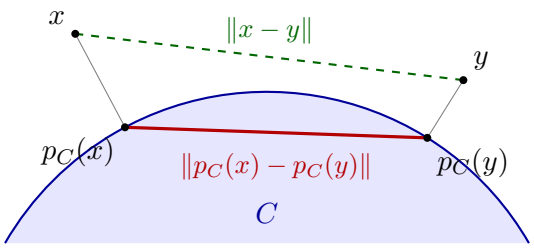
• *p_C est 1–lipschitzienne.* Soient $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned}\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 &= \langle p_C(x) - x + x - y + y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle\\ &= \mathrm{Re}\langle p_C(x) - x, p_C(x) - p_C(y)\rangle + \mathrm{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle\\ &\quad + \mathrm{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle\,.\end{aligned}$$

Le premier (respectivement le dernier) terme est ≤ 0 par caractérisation de $p_C(x)$ (respectivement de $p_C(y)$) dans le second membre précédent. On majore le deuxième terme par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, de sorte que

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|\,\|p_C(x) - p_C(y)\|\,.$$

On conclut que $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$.



□

Corollaire 4.24. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors*

$$\begin{array}{ccccc} H & = & F & \oplus & F^\perp \\ x & = & p_F(x) & + & p_{F^\perp}(x) \end{array}$$

où p_F, $p_{F^\perp}$ désignent les projections au sens du théorème 4.23. En particulier $p_F : H \to F$ est linéaire continue, de norme 1 (si $F \neq \{0\}$).

Le corollaire qu'on vient d'énoncer dit en particulier que la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ coïncide avec la projection sur le convexe fermé F définie dans le théorème 4.23.

Preuve du corollaire 4.24. On note déjà que F et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de H, en particulier convexes fermés non vides, de sorte que p_F et $p_{F^\perp}$ sont bien définies.
• $H = F + F^\perp$. Soit $x \in H$, on peut écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$, vérifions que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Par caractérisation de $p_F(x)$,

$$\forall z \in F,\ \mathrm{Re}\langle x - p_F(x), z - p_F(x)\rangle \leq 0 \quad \underset{z=y+p_F(x)\in F}{\Longrightarrow} \quad \forall y \in F,\ \mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0\,.$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit d'écrire l'inégalité pour $y, -y \in F$ pour conclure $x - p_F(x) \in F^\perp$. Dans le cas général, soit $y \in F$, il existe $\omega \in \mathbb{K}$, $|\omega| = 1$ tel que

$$\begin{aligned} \langle x - p_F(x), y\rangle = \omega\,|\langle x - p_F(x), y\rangle| \quad &\underset{\text{antilinéarité}}{\Longrightarrow} \quad \langle x - p_F(x), \omega y\rangle = \bar\omega\langle x - p_F(x), y\rangle \\ &= |\langle x - p_F(x), y\rangle|\,. \end{aligned}$$

Comme $\omega y \in F$, on en déduit

$$|\langle x - p_F(x), y\rangle| = \mathrm{Re}\,|\langle x - p_F(x), y\rangle| = \mathrm{Re}\langle x - p_F(x), \omega y\rangle \leq 0$$

et donc $x - p_F(x) \in F^\perp$.
• $F \cap F^\perp = \{0\}$. Si $x \in F \cap F^\perp$, pour tout $y \in F$, $\langle x, y\rangle = 0$, en particulier $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.
• $p_{F^\perp} = \mathrm{id} - p_F$. Comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, on peut lui appliquer la décomposition $H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$. Soit $x \in H$, comme $p_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp$, on peut écrire

$$\begin{array}{ccccc} H & = & F^\perp & \oplus & (F^\perp)^\perp \\ x & = & p_{F^\perp}(x) & + & x - p_{F^\perp}(x) \\ & = & x - p_F(x) & + & p_F(x) \end{array}$$

et par unicité de l'écriture (somme directe) on en déduit : $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x)$.
• On vient d'établir que p_F coïncide avec la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, appelée projection orthogonale sur F. C'est une application linéaire et d'après le théorème 4.23, p_F est 1–lipschitzienne de sorte que pour tout $x \in H$,

$$\|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\|$$

de sorte que p_F est continue et $\|p_F\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Comme de plus, pour $y \in F \setminus \{0\}$, $p_F(y) = y$, on en déduit $\|p_F\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. □

Remarque 4.25. On a établi dans la preuve que pour un sous-espace vectoriel F fermé dans H et pour $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique élément de F satisfaisant

$$\forall y \in F, \quad \langle x - p_F(x), y\rangle = 0\,.$$

Un espace de Hilbert est identifié à son dual via l'isométrie antilinéaire $I : a \in H \mapsto \langle\cdot, a\rangle$.

Théorème 4.26 (Théorème de représentation de Riesz dans un Hilbert)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors, l'application*

$$I : H \to H^*, \quad a \mapsto \langle\cdot, a\rangle$$

est une isométrie antilinéaire bijective.

L'hypothèse de complétude est cruciale, comme le montre l'exercice 4.6.

Preuve du théorème 4.26. • Soit $a \in H$ et $L_a = \langle\cdot, a\rangle$. On a bien que L_a est une forme linéaire continue, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, et $\|L_a\|_{H^*} \leq \|a\|$. On a de plus $|L_a(a)| = \|a\|^2$, et donc $\|L_a\|_{H^*} \geq \|a\|$. Finalement I est bien une isométrie, antilinéaire par définition du produit scalaire hermitien (linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), en particulier injective et il reste à établir la surjectivité de I.
• Soit $L \in H^*$. Si $L = 0$, on a bien $L = \langle\cdot, 0\rangle = I(0)$. On suppose à présent $L \neq 0$ et on note $F = \ker L$, sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $a_0 \in H$ tel que $L(a_0) \neq 0$ et même $L(a_0) = 1$ (quitte à renormaliser). D'après le corollaire 4.24, $H = F \oplus F^\perp$, et $a_0 = a_1 + a$ avec $a_1 \in F$, $a \in F^\perp$ et $L(a) = L(a_0) = 1$ (en particulier $a \neq 0$). On rappelle que $\dim F^\perp = 1$ (par le théorème du rang appliqué à L, tout supplémentaire de $F = \ker L$ est isomorphe à $\operatorname{Im} L = \mathbb{K}$), donc $F^\perp = \operatorname{vect} a$. Tout $x \in H$ s'écrit alors

$$x = (x - L(x)a) + L(x)a \quad \text{avec} \quad x - L(x)a \in F \text{ et } L(x)a \in F^\perp .$$

On a alors $\langle x - L(x)a, a\rangle = 0$ de sorte que

$$\langle x, a\rangle - L(x)\|a\|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|^2}\right\rangle ,$$

donc $L = I\big(\frac{a}{\|a\|^2}\big)$. □

On peut retrouver qu'un espace de Hilbert H est réflexif à partir de la représentation du dual donné par le théorème de représentation de Riesz. En effet, étant donnée $\xi \in H^{**}$, on cherche $x \in H$ tel que $\xi = \Phi_x$. Pour $a \in H$, notons $L_a = \langle\cdot, a\rangle$. Grâce au théorème 4.26, $\xi = \Phi_x$ équivaut à pour tout $a \in H$,

$$\Phi_x(L_a) = \xi(L_a) \quad \Longleftrightarrow \quad \xi(L_a) = \langle x, a\rangle .$$

On peut alors considérer $L_\xi : H \to \mathbb{K}$, $a \mapsto \xi(L_a)$, qui est une forme antilinéaire continue : pour $a \in H$,

$$|L_\xi(a)| = |\xi(L_a)| \leq \|\xi\|_{H^{**}} \underbrace{\|L_a\|_{H^*}}_{\|a\|} .$$

D'après le théorème de représentation de Riesz appliqué à $\overline{L_\xi} \in H^*$, il existe $x \in H$ tel que $\overline{L_\xi} = \langle\cdot, x\rangle$ et donc $L_\xi = \overline{\langle\cdot, x\rangle} = \langle x, \cdot\rangle$. Finalement, pour tout $a \in H$, $\xi(L_a) = L_\xi(a) = \langle x, a\rangle = \Phi_x(L_a)$ et donc $\xi = \Phi_x \in J(H)$. On retrouve que H est réflexif.

Remarque 4.27 (Convergence faible dans un espace de Hilbert). Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. On a

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Longleftrightarrow \quad \forall L \in H^*,\ L(u_n) \to L(u) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \in H,\ \langle u_n, a\rangle \to \langle u, a\rangle .$$

Théorème 4.28 (Lax–Milgram)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soit $a : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement sesquilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) continue sur H : il existe $M > 0$, tel que pour tout $x, y \in H$,*

$$|a(x, y)| \leq M\|x\|\,\|y\| .$$

On suppose de plus que a est coercive (ou H–elliptique) au sens où il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in H,\ \operatorname{Re} a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 .$$

Alors

(*i*) *pour tout $L \in H^*$, il existe un unique $x_0 \in H$ tel que*

$$L = a(\cdot, x_0)\,.$$

(*ii*) *Si de plus a est symétrique ou hermitienne (selon $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $x_0 \in H$ (tel que $L = a(\cdot, x_0)$) est l'unique minimiseur sur H de*

$$\mathcal{E} : H \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}a(x,x) - \operatorname{Re} L(x)\,.$$

Notons que pour une forme sesquilinéaire a, on n'a pas en général $a(x,x) \in \mathbb{R}$ pour $x \in H$, c'est le cas dans le (*ii*), quand on suppose que la forme sesquilinéaire a est hermitienne : $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$ pour tout $x, y \in H$. Notons également que dans le cas où a est supposée symétrique/hermitienne, on peut vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle_a = a(\cdot,\cdot)$ définit un produit scalaire sur H, dont la norme associée est équivalente à $\|\cdot\|$. On déduit alors l'existence et l'unicité de x_0 en appliquant le théorème de Riesz dans $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$.

Preuve du théorème 4.28.

1. • Soit $x \in H$, on a $a(\cdot, x) \in H^*$ par continuité de a. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément, que l'on notera $A(x)$ tel que

$$a(\cdot, x) = \langle\cdot, A(x)\rangle\,.$$

L'application $A : H \to H$ est linéaire. En effet, pour tout $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$a(\cdot, x + \lambda y) = \langle\cdot, A(x + \lambda y)\rangle$$
$$a(\cdot, x + \lambda y) = a(\cdot, x) + \overline{\lambda} a(\cdot, y) = \langle\cdot, A(x)\rangle + \overline{\lambda}\langle\cdot, A(y)\rangle = \langle\cdot, A(x) + \lambda A(y)\rangle$$

et par unicité, il vient $A(x + \lambda y) = A(x) + \lambda A(y)$. Elle est de plus continue, d'après le théorème de représentation de Riesz (isométrie),

$$\|A(x)\|_H = \|a(\cdot, x)\|_{H^*} \leq M \|x\|\,.$$

De plus, en appliquant à nouveau le théorème de Riesz à $L \in H^*$, il existe un unique $b \in H$ tel que $L = \langle\cdot, b\rangle$. On a alors pour $x \in H$,

$$L = a(\cdot, x) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\cdot, b\rangle = \langle\cdot, A(x)\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad b = A(x)\,.$$

Il suffit alors de montrer que A est bijective pour conclure la preuve de (*i*).

• Soit $x \in H$. On a par coercivité de a et l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\alpha \|x\|^2 \leq \operatorname{Re} a(x,x) = \operatorname{Re}\langle x, A(x)\rangle \leq \|x\| \|A(x)\|\,.$$

En particulier, si $A(x) = 0$, on a $x = 0$ et donc A est injective.

On a obtenu, pour $x \in H$, $\alpha \|x\| \leq \|A(x)\|$ (encore vrai pour $x = 0$). On en déduit que $F = \operatorname{Im} A$ est fermé dans H. En effet, si $(x_n)_n$ suite de H satisfait $A(x_n) \to y$ dans H, on a en particulier que $(A(x_n))_n$ est une suite de Cauchy. Pour $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \|x_p - x_q\| \leq \|A(x_p) - A(x_q)\|$$

de sorte que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy qui converge donc dans H complet vers $x \in H$ ($\alpha > 0$). Par continuité de A, on a $A(x_n) \to A(x)$ et donc $y = A(x) \in \operatorname{Im} A$.

On a alors par le corollaire 4.24,

$$H = F \oplus F^\perp$$

et pour tout $z \in F^\perp$, on a pour tout $x \in H$, $\langle z, A(x)\rangle = 0$ en particulier $\alpha \|z\|^2 \leq \operatorname{Re} a(z,z) = \operatorname{Re}\langle z, A(z)\rangle = 0$ et donc $z = 0$. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$ et $H = F = \operatorname{Im} A$. On conclut que A est surjective.

• Comme A est bijective, il existe un unique $x_0 \in H$ tel que $A(x_0) = b \iff L = a(\cdot, x_0)$.

2. Soit $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}a(x-x_0,x-x_0) &= \tfrac{1}{2}a(x,x)+\tfrac{1}{2}a(x_0,x_0)-\tfrac{1}{2}\left(a(x_0,x)+a(x,x_0)\right)\\ &= \mathcal{E}(x)+\operatorname{Re}L(x)+\tfrac{1}{2}a(x_0,x_0)-\operatorname{Re}a(x,x_0)\\ &= \mathcal{E}(x)+\tfrac{1}{2}a(x_0,x_0)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x)-\mathcal{E}(x_0) &= \tfrac{1}{2}a(x-x_0,x-x_0)-a(x_0,x_0)+\operatorname{Re}L(x_0)\\ &= \tfrac{1}{2}a(x-x_0,x-x_0) \quad \text{car } L(x_0)=a(x_0,x_0)\in\mathbb{R}\\ &\geq \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|^2 \quad \text{car } a(x-x_0,x-x_0)\in\mathbb{R}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $x = x_0$.

□

Exercice 4.5. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et G un sous-espace vectoriel de H.

1. Montrer que $(G^\perp)^\perp = \overline{G}$.
2. En déduire que G est dense dans H si et seulement si $G^\perp = \{0\}$.

On note qu'on connaissait déjà le critère de densité énoncé dans l'exercice 4.5 précédent. En effet, soit G un sous-espace vectoriel de H, d'après le corollaire 2.10, G est dense dans H si et seulement si

$$\{L \in H^* \ : \ L_{|G} = 0\} = \{0\}$$

et par le théorème de représentation de Riesz,

$$\{L \in H^* \ : \ L_{|G} = 0\} = \{\langle\cdot, a\rangle \ : \ \langle\cdot,a\rangle_{|G} = 0,\ a \in H\} = \{\langle\cdot,a\rangle \ : \ a \in G^\perp\}$$

et donc

$$\{L \in H^* \ : \ L_{|G} = 0\} = \{0\} \quad\Longleftrightarrow\quad \{\langle\cdot,a\rangle \ : \ a\in G^\perp\} = \{0\} \quad\Longleftrightarrow\quad G^\perp = \{0\}$$

Attention cependant, dans un espace préhilbertien non complet $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, le théorème de représentation de Riesz ne permet plus de faire le lien entre les deux critères de densité.
Le critère de densité donné par le corollaire 2.10 reste valable, en revanche, il existe dans E un hyperplan $F \subsetneq E$ fermé tel que $F^\perp = \{0\}$ (voir exercice 4.6), ce qui montre bien la nécessité de l'hypothèse de complétude dans l'exercice 4.5.
L'exercice suivant (plus précisément sa contraposée) montre que le théorème de représentation de Riesz caractérise les espaces de Hilbert parmi les espaces préhilbertiens : un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est complet si et seulement si toute forme linéaire continue se représente comme $\langle\cdot, a\rangle$, pour $a \in E$.

Exercice 4.6 (Forme linéaire continue non représentable dans un préhilbertien non complet)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien non complet. On va exhiber une forme linéaire qui ne se représente pas comme $\langle\cdot, a\rangle$, pour $a \in E$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui est de Cauchy mais ne converge pas dans E.

1. Vérifier que
$$L : E \to \mathbb{K}, \quad y \mapsto \lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle$$
est bien définie, linéaire et continue.
2. Montrer que L ne se représente pas sous la forme $\langle\cdot, a\rangle$, pour $a \in E$.

3. En déduire qu'il existe un hyperplan F de E qui est fermé dans E et dont l'orthogonal est trivial : $F^\perp = \{0\}$.

La partie existence du résultat suivant pourrait être vu comme une conséquence du théorème de prolongement de Hahn–Banach, on va cependant voir que la preuve est beaucoup plus simple dans le cadre hilbertien.

Proposition 4.29 (Prolongement de formes linéaires continues définies sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert)**.**
Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe), $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé *de H, et $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique prolongement $\widetilde{L} : H \to \mathbb{K}$ linéaire continu satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$, donné explicitement par*

$$\widetilde{L} = L \circ p_F,$$

où $p_F : H \to F$ est la projection orthogonale sur F.

Exercice 4.7. On va montrer le résultat précédent (proposition 4.29), on garde les notations de l'énoncé.

1. Soit $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue, montrer que $\widetilde{L} = L \circ p_F : H \to \mathbb{K}$ est un prolongement continu de L qui vérifie $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$.
2. Soient T_1, T_2 deux prolongements de L satisfaisant $\|T_1\| = \|T_2\| = \|L\|$. Montrer que $T_1 = T_2$. *On pourra utiliser le théorème de Riesz pour représenter T_i par $b_i \in H$ et montrer que $b_1 = b_2$ en utilisant $\|T_i\| = \|b_i\| = \|L\|$.*

Petite comparaison avec le théorème de prolongement de Hahn–Banach. Dans le cadre hilbertien, insistons sur les points suivants :

- Le prolongement est *unique* ici.
- La preuve est constructive et le prolongement est explicite, elle repose sur le théorème de représentation de Riesz et non sur le lemme de Zorn.
- La proposition 4.29 suppose que F est *fermé* (pour que la projection orthogonale existe). Dans le cas où F n'est pas fermé, on peut d'abord prolonger L à $\overline{F}$ par densité grâce au théorème 2.17 (L étant linéaire continue donc uniformément continue, et à valeurs dans un espace complet) avant d'appliquer la proposition 4.29.

4.3.3 Bases hilbertiennes

Définition 4.30 (Bases hilbertiennes)**.** Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H.

- la famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite *orthonormée* si elle est orthogonale : pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ et si pour tout $i \in I$, $\|e_i\| = 1$.
- la famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite *totale* si

$$\overline{\text{vect}\,\{e_i \,:\, i \in I\}} = H$$

- la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* si elle est à la fois orthonormée et totale.

Exemple 4.31. Dans ℓ^2, la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de ℓ^2. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, e_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang n qui vaut 1. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée, il suffit de vérifier qu'elle est totale. On peut le faire en observant que pour tout $u \in \ell^2$,

$$\left\| u - \sum_{i=0}^{k} u_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} |u_i|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

comme reste de série convergente.

Proposition 4.32 (Projection orthogonale sur un s.e.v. engendré par une famille orthonormée finie)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_1, \dots, e_d)$ une famille orthonormée de H et $F = \text{vect}\,(e_1, \dots, e_d)$. Alors, la projection orthogonale sur F s'écrit :*

$$\forall x \in H, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i\rangle e_i\,.$$

Preuve de la proposition 4.32. Soit $x \in H$. En utilisant la caractérisation donnée dans la remarque 4.25, on doit vérifier que $p_F(x) \in F$, ce qui est bien le cas par définition et, pour tout $y \in F$,

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0\,.$$

Soit $j \in [|1, d|]$, on a

$$\langle p_F(x), e_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle x - p_F(x), e_j\rangle = 0$$

et par linéarité, $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$. □

Proposition 4.33 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre dénombrable de H. Alors, il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H qui "orthonormalise" $(x_n)_n$ au sens où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\text{vect}\,(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{vect}\,(e_0, e_1, \dots, e_n)\,.$$

Preuve de la proposition 4.33. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \text{vect}\,(x_0, x_1, \dots, x_n)$, qui est un sous-espace fermé dans H (car de dimension finie). On laisse en exercice le soin de vérifier que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|} \quad \text{et pour } n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - p_{F_n}(x_{n+1})}{\|x_{n+1} - p_{F_n}(x_{n+1})\|}$$

convient. □

Exemple 4.34 (Polynômes orthogonaux)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $w : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue (non identiquement nulle) et on considère l'espace de Hilbert $L^2(I, w\mathrm{d}x)$ (muni du produit scalaire sur L^2 associé à $\mu = w\mathrm{d}x$). On suppose que w satisfait : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_I P(x)^2 w(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.
En appliquant le procédé de Gram–Schmidt à la famille libre $(1, X, \dots, X^n)$ de $L^2(I, w\mathrm{d}x)$, on obtient une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ satisfaisant

$$\text{vect}\,(P_0, P_1, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$$

(on a identifié un polynôme avec la fonction polynomiale associée : $I \to \mathbb{R}$). On obtient :

- les polynômes de Hermite pour $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = \exp^(-x^2)$,
- les polynômes de Legendre pour $I =]-1, 1[$ et $w = 1$,
- les polynômes de Tchebytchev pour $I =]-1, 1[$ et $w = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition 4.35 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Alors, pour tout $x \in H$, la suite $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2\,.$$

Preuve de l'inégalité de Bessel. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in H$. On note $F_n = \text{vect}\,(e_0, e_1, \dots, e_n)$. D'après la proposition 4.32, on a

$$p_{F_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad \underset{(e_n)_n \text{ orthonormée}}{\Longrightarrow} \qquad \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

et d'après l'identité de Pythagore,

$$\|p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \left\|p_{F_n^\perp}(x)\right\|^2 \leq \|x\|^2 \,.$$

On en déduit l'inégalité de Bessel. □

Théorème 4.36. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Si H est séparable alors H possède une base hilbertienne dénombrable.*

On remarque que la réciproque est vraie, si H possède une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $H = \overline{\text{vect}\,\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}}$ qui est séparable par l'exercice 3.13.

Preuve du théorème 4.36. On note déjà que dans le cas où H est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$, on obtient une base hilbertienne $(e_n)_{n=0\dots d-1}$ de H en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base algébrique, et on a de plus $H = \text{vect}\,\{e_n \,:\, n = 0 \dots d-1\}$.
On suppose à présent que H n'est pas de dimension finie et soit $\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable et dense dans H. La preuve consiste alors à extraire une famille libre de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ et de lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
• *Extraction d'une famille libre.* On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ pour extraire une famille $\left(u_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ libre vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{vect}\,\left\{u_{\theta(n)} \,:\, 0 \leq n \leq k\right\} = \text{vect}\,\{u_n \,:\, 0 \leq n \leq \theta(k)\}\,. \tag{4.1}$$

On définit $\theta(0) = \min\{n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0\}$ (on ne peut pas avoir tous les u_n nuls sinon on aurait par densité $H = \{0\}$). Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons construits $\theta(0) < \ldots < \theta(k)$ tels que $\left(u_{\theta(n)}\right)_{0\leq n\leq k}$ est libre et vérifie (4.1). On définit alors

$$\theta(k+1) = \min\{n > \theta(k) \,:\, u_n \notin \text{vect}\,\left(u_{\theta(0)}, \dots, u_{\theta(k)}\right)\}$$

notons qu'on prend bien le minimum d'une partie minorée non vide puisque sinon on aurait H de dimension finie :

$$H = \overline{\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\,\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}} = \text{vect}\,\left(u_{\theta(0)}, \dots, u_{\theta(k)}\right)\,,$$

ce qu'on a exclu. La propriété (4.1) est vérifiée au rang $k+1$ et $\left(u_{\theta(n)}\right)_{0\leq n\leq k+1}$ est libre par choix de $\theta(k+1)$, ce qui conclut l'hérédité.
Par construction, $\text{vect}\,\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \text{vect}\,\left\{u_{\theta(n)} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ et donc

$$H = \overline{\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\,\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{vect}\,\left\{u_{\theta(n)} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}}\,. \tag{4.2}$$

• On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille libre dénombrable $\left(u_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{vect}\,(e_0, e_1, \dots, e_k) = \text{vect}\,\left(u_{\theta(0)}, \dots, u_{\theta(k)}\right)$$

et donc $\text{vect}\,\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \text{vect}\,\left\{u_{\theta(n)} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ et on conclut par (4.2),

$$H = \overline{\text{vect}\,\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}}\,.$$

□

Théorème 4.37. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors, pour tout $x \in H$,*

(i) $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$,

(ii) (Identité de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Preuve du théorème 4.37. *(i)* On commence par montrer *(i)*. Notons $F = \text{vect}\,\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \text{vect}\,\{e_n \,:\, 0 \le n \le k\}$.

Soit $x \in H$, on a alors que la suite $(d(x, F_k))_k$ est décroissante minorée par 0 donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. De plus, $\ell = 0$, en effet, par densité de F dans H, il existe $(y_j)_j \in F$ tel que $\|x - y_j\| \to 0$. Par définition de F, chaque $y_j \in F_{k_j}$ pour un certain $k_j \in \mathbb{N}$ et on peut supposer $(k_j)_j$ strictement croissante par croissance de $(F_k)_k$. On a donc

$$d(x, F_{k_j}) \le \|x - y_j\| \to 0$$

et donc $\ell = 0$.

On a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par le théorème de projection sur un convexe fermé,

$$\|x - p_{F_k}(x)\| = d(x, F_k) \to 0 \tag{4.3}$$

et on obtient *(i)* puisque $p_{F_k}(x) = \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle\, e_n$ par la proposition 4.32.

(ii) Montrons à présent l'identité de Parseval. D'après le théorème de Pythagore et le corollaire 4.24, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 = \|p_{F_k}(x)\|^2 + \left\|p_{F_k^\perp}(x)\right\|^2 = \|p_{F_k}(x)\|^2 + \|x - p_{F_k}(x)\|^2$$

et on en déduit par (4.3)

$$\|x\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \|p_{F_k}(x)\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2 \,.$$

□

On déduit des deux résultats précédents que les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sur $\mathbb{K}$ sont tous isométriquement isomorphes à $\ell^2(\mathbb{K})$ *via le choix d'une base hilbertienne* :

Corollaire 4.38. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors*

$$I : H \to \ell^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

est un isomorphisme isométrique.

Preuve du corollaire 4.38. On applique le théorème 4.36 pour se donner une base hilbertienne de H (implicitement fait dans l'énoncé du théorème). La linéarité de I vient de la linéarité à gauche du produit scalaire réel/hermitien. Le caractère isométrique est exactement l'identité de Parseval et donc I est injective. Par ailleurs I est surjective : pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, on a $\|x_n e_n\| = |x_n|$. Vérifions que la série $\sum_n x_n e_n$ converge. Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, on a par Pythagore :

$$\left\|\sum_{j=p+1}^{q} x_j e_j\right\|^2 = \sum_{j=p+1}^{q} \|x_j e_j\|^2 = \sum_{j=p+1}^{q} |x_j|^2 \xrightarrow[\min(p,q)\to\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad (x_j)_j \in \ell^2 \,.$$

On en déduit que la série $\sum_n x_n e_n$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet et converge donc dans H vers $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$.
On a par continuité du produit scalaire

$$\langle x, e_n\rangle = \lim_{k\to+\infty} \left\langle \sum_{j=0}^{k} x_j e_j, e_n \right\rangle = x_n \quad \text{car} \quad \left\langle \sum_{j=0}^{k} x_j e_j, e_n \right\rangle = x_n,\ \forall k \geq n\,.$$

On a en particulier montré que I est d'inverse

$$I^{-1} : \ell^2(\mathbb{K}) \to H, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n\,.$$

□

Exercice 4.8. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, \overline{\langle y, e_n\rangle}\,.$$

en cours de rédaction ...

Exemple 4.39 (Exemple fondamental : la décomposition en série de Fourier dans L^2)**.**

4.4 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints et compacts sur un espace de Hilbert

Dans toute la section, on fixe un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Terminologie On utilisera la terminologie *opérateur* pour désigner un endomorphisme *continu* T de H et on notera $T \in \mathcal{L}(H)$.
Attention aux conventions : étant donné $T : H \to H$, dans la littérature, "T est un opérateur" renvoie souvent uniquement au caractère linéaire de T, et on précise alors que T est un *opérateur borné* pour dire que T est continu.

Proposition 4.40 (Adjoint d'un endomorphisme)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé* l'adjoint *de T, satisfaisant*

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle\,.$$

Preuve de la proposition 4.40. Unicité. Supposons que U, V sont deux endomorphismes de H satisfaisant

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y\rangle = \langle x, U(y)\rangle = \langle x, V(y)\rangle\,.$$

On a alors pour tout $y \in H$, $U(y) - V(y) \in H^\perp = \{0\}$ donc $U(y) = V(y)$. On n'a pas utilisé la continuité de T^* pour l'unicité.
Existence. Soit $y \in H$. L'application $\langle T(\cdot), y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, par continuité de T et de $\langle\cdot, y\rangle$. D'après le théorème 4.26 de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert, il existe un unique $a_y \in H$ tel que

$$\langle T(\cdot), y\rangle = \langle\cdot, a_y\rangle\,.$$

Vérifions que $y \in H \mapsto a_y$ est linéaire. Pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned}\langle x, a_{y_1+\lambda y_2}\rangle &\underset{\text{def de } a_{y_1+\lambda y_2}}{=} \langle T(x), y_1 + \lambda y_2\rangle \underset{\text{anti-linéarité}}{=} \langle T(x), y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle T(x), y_2\rangle \\ &\underset{\text{def de } a_{y_1}, a_{y_2}}{=} \langle x, a_{y_1}\rangle + \overline{\lambda}\langle x, a_{y_2}\rangle \underset{\text{anti-linéarité}}{=} \langle x, a_{y_1} + \lambda a_{y_2}\rangle\,,\end{aligned}$$

et donc $a_{y_1+\lambda y_2} = a_{y_1} + \lambda a_{y_2}$.
On pose alors $T^*(y) = a_y$ et il reste à vérifier que T^* est continue. On a pour $y \in H$, par la partie isométrie du théorème de Riesz

$$\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*(y)\rangle| \quad \text{et} \quad |\langle x, T^*(y)\rangle| = |\langle T(x), y\rangle| \le \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\,\|x\|\,\|y\|$$

de sorte que $\|T^*(y)\| \le \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\,\|y\|$ et T^* est continue. □

Définition 4.41 (Opérateur auto-adjoint sur H)**.** On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est *auto-adjoint* (ou *hermitien*) si $T^* = T$, c'est-à-dire,

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle\,. \tag{4.4}$$

On rappelle que d'après l'exercice 1.12, si on suppose seulement que $T : H \to H$ est linéaire, la propriété de symétrie (4.4) implique automatiquement la continuité de T qui est alors auto-adjoint au sens de la définition 4.41.

Remarque 4.42. La notion d'opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert généralise la notion de matrice hermitienne en dimension finie. Plus précisément, si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert de dimension finie d et $f \in \mathcal{L}(V)$, l'adjoint $f^* \in \mathcal{L}(V)$ de f est caractérisé par

$$\forall x, y \in V, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\,,$$

ce qui est équivalent à, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ est une base orthonormée de V :

$$\forall i, j \in [\![1, d]\!], \quad a^*_{ij} = \langle f^*(e_j), e_i \rangle = \overline{\langle e_i, f^*(e_j) \rangle} = \overline{\langle f(e_i), e_j \rangle} = \overline{a_{ji}} \quad \iff \quad A^* = \overline{A}^T$$

où $A^* = (a^*_{ij})_{ij} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$ est la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$ et $A = (a_{ij})_{ij} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$. On retrouve que f est auto-adjoint au sens de la définition 4.41 si et seulement si $A = \overline{A}^T$.

On va à présent vérifier que, similairement au cas de la dimension finie, un opérateur auto-adjoint a des valeurs propres réelles et des sous-espaces propres deux à deux orthogonaux (voir proposition 4.45).

Définition 4.43 (Spectre et valeurs propres d'un opérateur)**.** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur sur H, on définit

- Le *spectre* de T : $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ T - \lambda \mathrm{id} \text{ n'est pas bijectif } \}$.
- L'ensemble des valeurs propres ou *spectre ponctuel* de T :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ T - \lambda \mathrm{id} \text{ n'est pas injectif}\} \subset \sigma(T)\,.$$

- Pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, $E_\lambda = \ker(T - \lambda \mathrm{id})$ est le *sous-espace propre* associé à la valeur propre λ.

Exercice 4.9 (Le spectre d'un opérateur est borné)**.** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur sur H. Alors $\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|_{\mathcal{L}(H)})}$.

En dimension finie, $T - \lambda \mathrm{id}$ est inversible si et seulement si $T - \lambda \mathrm{id}$ est injectif de sorte que $\sigma_p(T) = \sigma(T)$. Ce n'est revanche plus le cas en dimension infinie, comme le montre l'exemple suivant. Ce qui reste vrai, c'est que si $T - \lambda \mathrm{id}$ est bijectif, son inverse est continu d'après le théorème de l'isomorphisme de Banach.

Exemple 4.44 (Opérateur auto-adjoint sans valeur propre et de spectre continu)**.** On considère l'opérateur $T : \mathrm{L}^2(]0,1[) \to \mathrm{L}^2(]0,1[)$, $u \mapsto T(u)$ où $T(u) : x \mapsto xu(x)$.

- L'application T est un *opérateur auto-adjoint*. En effet, T est linéaire et pour tout $u \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$,

$$\|T(u)\|_2^2 = \int_0^1 |x|^2 \, |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \underset{|x| \leq 1}{\leq} \|u\|_2^2 \,,$$

  de sorte que T est continu. De plus, pour tout $u, v \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$,

$$\langle T(u), v \rangle = \int_0^1 xu(x)\overline{v(x)} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)\overline{xv(x)} \, \mathrm{d}x = \langle u, T(v) \rangle \,.$$

- On a $\sigma(T) = [0,1]$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, pour $u \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$, on a $(T - \lambda \mathrm{id})(u) : x \mapsto (x - \lambda)u(x)$. Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus [0,1]$, on a $x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$ continue sur $[0,1]$ donc bornée par $M \geq 0$, et on peut définir $U_\lambda : \mathrm{L}^2(]0,1[) \to \mathrm{L}^2(]0,1[)$ par

$$U_\lambda(v) : x \mapsto \frac{v(x)}{x - \lambda}, \quad \forall v \in \mathrm{L}^2(]0,1[)\,.$$

  On a bien $U_\lambda(v) \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ puisque $\|U_\lambda(v)\|_2 \leq M \|v\|_2$. On en déduit que $T - \lambda \mathrm{id}$ est inversible d'inverse U_λ, par conséquent $\sigma(T) \subset [0,1]$.
  Par ailleurs, si $\lambda \in [0,1]$, on va montrer que $T - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas surjectif. On considère $v : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{|x - \lambda|} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ car continue sur $[0,1]$. Pour $u \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$, on a

$$\begin{aligned} (T - \lambda \mathrm{id})(u) = v \quad &\iff \quad \text{pour p.t. } x \in [0,1], \ v(x) = (x - \lambda)u(x) \\ &\iff \quad \text{pour p.t. } x \in [0,1], \ u(x) = \frac{v(x)}{x - \lambda} \end{aligned}$$

puisque $\{\lambda\}$ est de mesure nulle. On a alors pour presque tout $x \in [0,1]$,

$$|u(x)|^2 = \frac{|v(x)|^2}{|x-\lambda|^2} = \frac{1}{|x-\lambda|} \text{ de sorte que } \|u\|_2^2 = \int_0^1 \frac{1}{|x-\lambda|}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

et donc $u \notin \mathrm{L}^2(]0,1[)$. Par conséquent v n'a pas d'antécédent dans $\mathrm{L}^2(]0,1[)$ par T. Ainsi $T - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas inversible et $[0,1] \subset \sigma(T)$.

- On a $\sigma_p(T) = \emptyset$. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ tels que $(T - \lambda\mathrm{id})(u) = 0$. On a alors pour presque tout $x \in [0,1]$, $u(x) = 0$ ou $x = \lambda$ de sorte que $u = 0$ p.p. et $T - \lambda\mathrm{id}$ est injectif et λ n'est pas valeur propre de T.

Proposition 4.45. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.*

Notons que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ par définition, il reste l'orthogonalité des sous-espaces propres.

Preuve de la proposition 4.45. Les valeurs propres sont réelles. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$. Comme $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle$, on en déduit :

$$\langle \lambda x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \|x\|^2 = \overline{\lambda}\,\|x\|^2$$

et donc $\lambda = \overline{\lambda}$ (puisque $x \neq 0$), $\lambda \in \mathbb{R}$.
Orthogonalité des sous-espaces propres. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$ telles que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a pour $u_1 \in E_{\lambda_1}$ et $u_2 \in E_{\lambda_2}$:

$$\langle T(u_1), u_2\rangle = \langle u_1, T(u_2)\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle \underset{\overline{\lambda_2}=\lambda_2}{\Longleftrightarrow} (\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2\rangle = 0\,,$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ i.e. $u_1 \perp u_2$. □

Comme le montre l'exemple 4.44, sans hypothèse supplémentaire, on peut avoir un opérateur auto-adjoint de spectre continu et sans valeur propre, et la conclusion de la proposition précédente est en particulier vide pour cet opérateur. On introduit la notion d'*opérateur compact* :

Proposition 4.46 (Définition et caractérisations d'un opérateur compact)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur sur H. On dit que T est un* opérateur compact *lorsque T vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

(i) $T(B(0,1))$ est relativement compacte dans H.

(ii) Pour toute partie bornée $A \subset H$, $T(A)$ est relativement compacte dans H.

(iii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de H, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

On rappelle qu'une partie B d'un espace topologique X est relativement compacte si l'adhérence de B dans X est une partie compacte.

Preuve de la proposition 4.46. $(i) \Rightarrow (ii)$: soit $A \subset H$ partie bornée, il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0,R)$ et on a par homogénéité $T(A) \subset T(B(0,R)) = RT(B(0,1))$. D'après (i), $\overline{T(B(0,1))}$ est compacte, donc $\overline{T(B(0,R))}$ est compacte et $\overline{T(A)}$ est compacte car fermée dans le compact $\overline{T(B(0,R))}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H, il existe $R > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(0,R)$ et $T(x_n) \in \overline{T(B(0,R))}$ qui est une partie compacte. Par caractérisation séquentielle de la compacité (valable dans un espace métrique et donc dans H), la suite $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente.
$(iii) \Rightarrow (i)$: on passe à nouveau par la caractérisation séquentielle de la compacité pour montrer que $T(B(0,1))$ est relativement compacte. Soit $(y_n)_n$ une suite de $\overline{T(B(0,1))}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe $x_n \in B(0,1)$ tel que $\|y_n - T(x_n)\| \leq \frac{1}{n+1}$ et d'après (iii), il existe une sous-suite $\left(T\left(x_{\theta(n)}\right)\right)_n$ qui converge vers $y \in \overline{T(B(0,1))}$. On a alors

$$\left\|y_{\theta(n)} - y\right\| \leq \frac{1}{\theta(n)+1} + \left\|T\left(x_{\theta(n)}\right) - y\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

On en déduit que $(y_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans $\overline{T(B(0,1))}$. Comme c'est vrai pour toute suite $(y_n)_n$ de $\overline{T(B(0,1))}$, on en déduit que $\overline{T(B(0,1))}$ est compacte. □

Proposition 4.47. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, $\sigma_p(T)$ est borné, au plus dénombrable et ne possède que 0 comme point d'accumulation possible. De plus, pour tout $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, le sous-espace propre associé E_λ est de dimension finie.*

On rappelle que si A est une partie d'un espace topologique X, on dit que $x \in X$ est
- un point d'accumulation de A si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
- un point adhérent à A (i.e. $x \in \overline{A}$) si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$.

On observe que tout point d'accumulation de A est dans $\overline{A}$, et si de plus $x \notin A$, les deux notions coïncident puisqu'alors $(V \setminus \{x\}) \cap A = V \cap A$. En revanche, si $x \in A$ est un point isolé, on a $x \in A \subset \overline{A}$ et x n'est pas un point d'accumulation de A. On en déduit que $\overline{A} = A \cup \mathrm{acc}(A)$, où $\mathrm{acc}(A)$ désigne l'ensemble des points d'accumulation de A, et l'union n'est pas disjointe en général.
Si comme ici, X est un espace vectoriel normé et $x \in X$ est un point d'accumulation de A, alors tout voisinage V de x contient une infinité d'éléments de A. On peut le voir en prenant une première boule ouverte $B(x, r_0) \subset V$ qui contient un élément $x_1 \in A$, $x_1 \neq x$. On pose alors $r_1 = \|x_1 - x\| < r_0$ et $B(x, r_1)$ contient un élément $x_2 \in A$, $x_2 \neq x$ (et $x_2 \neq x_1$ car $\|x_2 - x\| < \|x_1 - x\|$), en itérant le processus, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de A deux à deux distincts (car $(\|x_n - x\|)_n$ est strictement décroissante) et dans V.

Preuve de la proposition 4.47. • Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$. On a alors $|\lambda|\,\|x\| = \|T(x)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\,\|x\|$, donc $|\lambda| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ et $\sigma_p(T) \subset \overline{B\left(0, \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\right)}$. On note que cela utilise uniquement la continuité de T, et c'est vrai pour tout le spectre d'après l'exercice 4.9.
• On va montrer le résultat suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, on note $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{K} \,:\, |z| > \varepsilon\}$, alors

$$\sigma_p(T) \cap A_\varepsilon \text{ est de cardinal fini.} \tag{4.5}$$

Par contraposée, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sigma_p(T) \cap A_\varepsilon$ est de cardinal infini. Il existe en particulier une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels deux à deux distincts telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \sigma_p(T) \cap A_\varepsilon$ et il existe $x_n \in E_{\lambda_n} \setminus \{0\}$, quitte à considérer $\frac{x_n}{\|x_n\|}$, on peut supposer $\|x_n\| = 1$. Comme les $(\lambda_n)_n$ sont deux à deux distincts, on sait par la proposition 4.45 que les sous-espaces propres $(E_{\lambda_n})_n$ sont deux à deux orthogonaux de sorte que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \neq \ell$, on a $\lambda_k x_k \perp \lambda_\ell x_\ell$ et d'après l'identité de Pythagore,

$$\|T(x_k) - T(x_\ell)\|^2 = \|\lambda_k x_k - \lambda_\ell x_\ell\|^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_\ell|^2 > 2\varepsilon^2\,. \tag{4.6}$$

La suite $(x_n)_n$ est bornée et on va justifier que (4.6) implique que $(T(x_n))_n$ ne possède aucune sous-suite convergente donc T n'est pas un opérateur compact. Supposons que $(T(x_n))_n$ possède une sous-suite $\left(T(x_{\theta(n)})\right)_n$ convergente, alors

$$\left\|T\left(x_{\theta(n+1)}\right) - T\left(x_{\theta(n)}\right)\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui contredit (4.6).

• On peut écrire

$$\sigma_p(T) \cap (\mathbb{K} \setminus \{0\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\sigma_p(T) \cap A_{\frac{1}{k}} \right)$$

qui est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis d'après (4.5), et donc $\sigma_p(T)$ est également dénombrable (on rajoute au plus 0).
• Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\alpha| > \frac{1}{k_0}$ et donc $\alpha \in A_{\frac{1}{k_0}}$. Comme $A_{\frac{1}{k_0}}$ est un voisinage ouvert de α qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $\sigma_p(T)$, on en déduit que α n'est pas un point d'accumulation de $\sigma_p(T)$.
• Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, on a alors

$$T\left(B_{E_\lambda}(0,1)\right) = \{\underbrace{T(x)}_{=\lambda x} \,:\, x \in E_\lambda,\ \|x\| < 1\} = \lambda B_{E_\lambda}(0,1)\,.$$

Comme T est un opérateur compact et $B_{E_\lambda}(0,1)$ est une partie bornée,

$$\overline{T\left(B_{E_\lambda}(0,1)\right)} = \lambda \overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$$

est compacte. Or $\lambda \neq 0$, donc $\overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$ est compacte, par ailleurs $E_\lambda = \ker(T - \lambda \mathrm{id}) = (T - \lambda \mathrm{id})^{-1}(\{0\})$ est fermé par continuité de $T - \lambda \mathrm{id}$ et donc

$$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} = \overline{E_\lambda \cap B(0,1)} \subset E_\lambda \cap \overline{B(0,1)}\,.$$

On a de plus $E_\lambda \cap \overline{B(0,1)} \subset \overline{E_\lambda \cap B(0,1)}$ par homogénéité : si $x \in E_\lambda$ satisfait $\|x\| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (1 - 2^{-n})x \in E_\lambda \cap B(0,1)$ et $x_n \to x$ donc $x \in \overline{E_\lambda \cap B(0,1)}$. Ainsi $\overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$ est compacte et c'est la boule unité fermée de E_λ. On en déduit que E_λ est de dimension finie d'après un théorème de Riesz.

□

Exercice 4.10 (Exemple d'opérateur compact : un opérateur de multiplication)**.** Soit $a \in \ell^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T : \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K})$, $u \mapsto au$ est un opérateur auto-adjoint de $\ell^2(\mathbb{K})$, où $au = (a_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la multiplication terme à terme.
2. Montrer que T est un opérateur compact si et seulement si $a_n \to 0$.

On énonce le théorème spectral pour un opérateur auto-adjoint et compact de H un espace de Hilbert *séparable*.

Théorème 4.48 (Théorème spectral)**.** *Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact de H. Alors H possède une base hilbertienne composée de vecteurs propres de T.*

Remarque 4.49. Supposons H de dimension infinie. Notons $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne composée de vecteurs propres de T et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres correspondantes. On sait par la proposition 4.47 que a est bornée et converge vers 0. En effet, chaque valeur propre $\lambda \neq 0$ apparaît au plus $\dim E_\lambda < \infty$ fois dans a (les e_n associés forment une famille orthonormée de E_λ). Par (4.5), pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{n : |a_n| > \varepsilon\}$ est donc fini, c'est-à-dire que $a_n \to 0$. Par ailleurs, $a_n \in \mathbb{R}$ car T est auto-adjoint et $|a_n| \leq \|T\|$.
De plus, par le corollaire 4.38, on sait que

$$I : H \to \ell^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \left(\langle x, e_n \rangle\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est un isomorphisme isométrique d'inverse

$$I^{-1} : \ell^2(\mathbb{K}) \to H, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n\,.$$

Comme T est auto-adjoint et $a_n \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in H$,

$$(I \circ T(y))_n = \langle T(y), e_n\rangle = \langle y, T(e_n)\rangle = \langle y, a_n e_n\rangle = a_n\langle y, e_n\rangle = a_n(I(y))_n = (aI(y))_n\,,$$

et donc $I \circ T(y) = aI(y)$ et pour tout $x \in H$, avec $y = I^{-1}(x)$, on obtient $I \circ T \circ I^{-1}(x) = ax$. On peut alors voir T comme un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{K})$ via $I \circ T \circ I^{-1} : x \mapsto ax$ qui est un opérateur de multiplication comme dans l'exercice 4.10.

La preuve du théorème spectral repose sur le fait qu'un opérateur compact envoie une suites qui converge faiblement sur une suite qui converge fortement (proposition 4.50) et l'existence d'une valeur propre pour un opérateur auto-adjoint compact (proposition 4.51). On a vu dans l'exemple 4.44 qu'il existait des opérateurs auto-adjoints n'admettant pas de valeur propre.

Proposition 4.50. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Alors, pour toute suite $(u_k)_k$ de H telle que $u_k \rightharpoonup u$, on a*

(i) $T(u_k) \to T(u)$ *fortement dans* H,

(ii) $\langle T(u_k), u_k\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle T(u), u\rangle$.

Preuve de la proposition 4.50. *(i)* Soit $(u_k)_k$ une suite de H qui converge faiblement vers u dans H, montrons que $T(u_k) \rightharpoonup T(u)$. On pourrait invoquer le fait que T est linéaire fortement continu entre deux espaces de Banach et donc faiblement continu d'après l'exercice 3.3. On le retrouve assez facilement ici : soit $v \in H$, par convergence faible de $(u_k)_k$, on a

$$\langle T(u_k), v\rangle = \langle u_k, T^*(v)\rangle \to \langle u, T^*(v)\rangle = \langle T(u), v\rangle$$

et c'est vrai pour tout $v \in H$ de sorte que $T(u_k) \rightharpoonup T(u)$.

On va en déduire que $T(u_k) \to T(u)$ fortement dans H. Supposons que ce n'est pas le cas, il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extraction θ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \big\|T(u_{\theta(k)}) - T(u)\big\| \geq \varepsilon\,. \tag{4.7}$$

Comme $(u_k)_k$ converge faiblement, elle est en particulier bornée, la suite $(u_{\theta(k)})_k$ est donc bornée et T est un opérateur compact, $\big(T(u_{\theta(k)})\big)_k$ admet une sous-suite qui converge fortement vers $w \in H$, et converge a fortiori faiblement vers w de sorte que par unicité de la limite faible $w = T(u)$. Or, par (4.7), $\big(T(u_{\theta(k)})\big)_k$ n'admet pas de sous-suite qui converge fortement vers $T(u)$. On en déduit que $T(u_k) \to T(u)$ fortement dans H.

(ii) On rappelle que $(u_k)_k$ est bornée, notons $R = \sup_k \|u_k\| < \infty$, on a alors

$$\begin{aligned}|\langle T(u_k), u_k\rangle - \langle T(u), u\rangle| &\leq |\langle T(u_k) - T(u), u_k\rangle| + |\langle T(u), u_k - u\rangle| \\ &\leq R\underbrace{\|T(u_k) - T(u)\|}_{\to 0} + \underbrace{|\langle u_k - u, T(u)\rangle|}_{\to 0 \text{ car } u_k - u \rightharpoonup 0} \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

□

Proposition 4.51. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact de H, on suppose $H \neq \{0\}$. Alors T possède une valeur propre.*

Preuve de la proposition 4.51. On effectue la preuve dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{|\langle T(x), x\rangle| \,:\, x \in H,\ \|x\| = 1\}$$

est non vide et majoré par $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ par Cauchy–Schwarz, on note S_T son supremum.

• Si $S_T = 0$, on a alors par homogénéité, pour tout $x, y \in H$, $\langle T(x), x\rangle = \langle T(y), y\rangle = 0$ et donc

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle = 0$$

et comme $\langle T(y), x\rangle = \langle y, T^*(x)\rangle = \langle y, T(x)\rangle = \langle T(x), y\rangle$, on en déduit que $2\langle T(x), y\rangle = 0$, i.e. $T(x) \perp y$. Ce pour tout $y \in H$ donc $T(x) \in H^\perp = \{0\}$ et donc $T(x) = 0$. On conclut que $T = 0$ et $\lambda = 0$ est valeur propre.
• On suppose à présent $S_T > 0$. Par définition de S_T, soit $(x_k)_k$ une suite de H satisfaisant $\|x_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$|\langle T(x_k), x_k\rangle| \to S_T\,.$$

La suite $(x_k)_k$ est bornée dans l'espace réflexif H, elle admet donc une sous-suite faiblement convergente dans H : $x_{\theta(k)} \rightharpoonup x$. D'après la proposition 4.50, on a

$$\left|\left\langle T(x_{\theta(k)}), x_{\theta(k)}\right\rangle\right| \to |\langle T(x), x\rangle|$$

et donc $|\langle T(x), x\rangle| = S_T$, en particulier $S_T > 0$ implique $x \neq 0$. De plus, par semi-continuité inférieure de la norme vis-à-vis de la convergence faible,

$$\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \left\|x_{\theta(k)}\right\| = 1\,.$$

On a donc $\|x\| \leq 1$ et par homogénéité, on a $\|x\| = 1$, en effet, soit $\lambda = \frac{1}{\|x\|} \geq 1$ tel que $\|\lambda x\| = 1$, alors

$$|\langle T(\lambda x), \lambda x\rangle| \leq S_T \quad \text{et} \quad |\langle T(\lambda x), \lambda x\rangle| = |\lambda|^2 |\langle T(x), x\rangle| = |\lambda|^2 S_T$$

On a donc $|\lambda|^2 S_T \leq S_T$, et comme $\lambda \geq 1$, on en déduit que $\lambda = 1$, i.e. $\|x\| = 1$.
Quitte à considérer $-T$ (puisque $\sigma_p(T) \neq \emptyset \iff \sigma_p(-T) \neq \emptyset$), on peut supposer

$$\langle T(x), x\rangle = |\langle T(x), x\rangle| = S_T > 0\,.$$

On se donne $w \in H$ tel que $w \perp x$ et $\|w\| = 1$, ce qui est possible dès que H n'est pas réduit à $\mathrm{vect}\,(x)$, ce qu'on peut exclure puisque si $H = \mathrm{vect}\,(x)$, $T(x)$ et x sont nécessairement colinéaires et $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. On définit alors l'application

$$\gamma : \mathbb{R} \to \{y \in H \ : \ \|y\| = 1\}, \quad t \mapsto (\cos t)x + (\sin t)w\,.$$

Notons qu'on a $x \perp w$, $\|x\| = \|w\| = 1$ et par Pythagore, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma(t)\|^2 = |\cos t|^2 + |\sin t|^2 = 1$. L'application γ est de classe C$^\infty$ de sorte que

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle T \circ \gamma(t), \gamma(t)\rangle$$

est de classe C$^\infty$ comme composée de l'application bilinéaire continue (donc C$^\infty$) $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de γ et de l'application linéaire continue T (donc C$^\infty$). En particulier, Φ est dérivable et pour $t \in \mathbb{R}$, $(T\circ\gamma)'(t) = DT(\gamma(t))(\gamma'(t)) = T(\gamma'(t))$ puisque $DT(x) = T$ pour tout $x \in H$. On en déduit,

$$\Phi'(t) = \langle \underbrace{(T\circ\gamma)'(t)}_{=T(\gamma'(t))}, \gamma(t)\rangle + \left\langle T\circ\gamma(t), \gamma'(t)\right\rangle$$

et en particulier, puisque $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = w$,

$$\Phi'(0) = \langle T(w), x\rangle + \langle T(x), w\rangle = 2\langle T(w), x\rangle$$

car T est auto-adjoint. Par définition et puisque $\|\gamma(t)\| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, Φ atteint son maximum S_T en $t = 0$ et donc $\Phi'(0) = 0$, i.e. $T(x) \perp w$, et ce pour tout $w \in \mathrm{vect}\,(x)^\perp$ tel que $\|w\| = 1$, et donc pour tout $w \in \mathrm{vect}\,(x)^\perp$. On en déduit que $T(x) \in (\mathrm{vect}\,(x)^\perp)^\perp = \mathrm{vect}\,(x)$ car

vect (x) est fermé. On vient d'établir que $T(x)$ et x sont colinéaires, $x \neq 0$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(x) = \lambda x$, d'où $\lambda \in \sigma_p(T)$.
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer H comme un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, par restriction des scalaires, qu'on munit du produit scalaire $\mathrm{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$. On vérifie que cela définit bien un espace de Hilbert réel sur lequel T est encore un opérateur compact (la topologie est inchangée puisque la norme est inchangée : pour $x \in H$, $\|x\|^2 = \mathrm{Re}\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle$) et auto-adjoint (appliquer Re à la définition de T auto-adjoint : pour tout $u, v \in H$, $\mathrm{Re}\langle T(u), v\rangle = \mathrm{Re}\langle u, T(v)\rangle$). On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$, $x \neq 0$ tels que $T(x) = \lambda x$ et donc $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

On peut à présent pouver le théorème spectral.

Preuve du théorème 4.48. On définit le sous-espace vectoriel V engendré par tous les vecteurs propres :

$$V = \oplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} E_\lambda \, .$$

Pour $x \in V$, $\exists \lambda \in \sigma_p(T)$, $T(x) = \lambda x \in V$ de sorte que $T(V) \subset V$. Si $(v_n)_n$ est une suite de V telle que $T(v_n)$ converge vers w dans H, on a pour tout n, $T(v_n) \in V$ et donc $w \in \overline{V}$ de sorte que $T\left(\overline{V}\right) \subset \overline{V}$.
Comme T est auto-adjoint, on a aussi $T\left(\overline{V}^\perp\right) \subset \overline{V}^\perp$. En effet, si $u \in \overline{V}^\perp$, on a pour tout $v \in \overline{V}$, $T(v) \in \overline{V}$ et donc

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle = 0$$

donc $T(u) \in \overline{V}^\perp$.
L'espace vectoriel $W = \overline{V}^\perp$ est fermé dans H de sorte que $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert et $T(W) \subset W$ donc T est un opérateur sur W qui reste auto-adjoint et compact (en écrivant les définitions). Si $W \neq \{0\}$, d'après la proposition 4.51, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in W$, $x \neq 0$ tels que $T(x) = \lambda x$, mais $x \in H$ est alors un vecteur propre de T sur H donc $x \in V$ par définition de V donc $x \in V \cap \overline{V}^\perp \subset V \cap V^\perp = \{0\}$ ce qui est exclu. On en déduit que $W = \{0\}$ et donc $H = \overline{V}$.
On peut alors concaténer des bases orthonormées (algébriques) des espaces propres de dimension finie E_λ, pour $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, avec une base hilbertienne de E_0 (qui est fermé donc Hilbert et séparable car H est séparable et on peut appliquer le théorème 4.36). Comme ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux, on obtient une famille orthonormée $(e_n)_n$ de V telle que

$$V \subset \overline{\mathrm{vect}\,\{e_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{V} \subset \overline{\mathrm{vect}\,\{e_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}}$$

qui est une base hilbertienne de H puisque $\overline{V} = H$. □

CHAPITRE 5

Distributions : définitions et exemples

Dans tout le chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On note pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$\mathrm{L}^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \ f \in \mathrm{L}^p(K) \text{ pour tout } K \subset \Omega \text{ compacte}\}\,.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\mathrm{L}^q_{loc}(\Omega) \subset \mathrm{L}^p_{loc}(\Omega)$ et en particulier $\mathrm{L}^q(\Omega) \subset \mathrm{L}^q_{loc}(\Omega) \subset \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$.

5.1 Fonctions tests

On commence par introduire l'espace des *fonctions tests* sur lequel les distributions sont définies. Rappelons ce qu'est le support d'une fonction continue.

Définition 5.1 (Support d'une fonction continue)**.** Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Le support de f, noté $\operatorname{supp} f$ est

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}\,,$$

ou de façon équivalente, $\operatorname{supp} f$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f s'annule, qu'on peut définir comme la réunion de tous les ouverts sur lesquels f s'annule.

Par définition, $\operatorname{supp} f$ est fermé dans X. On remarque que $\operatorname{supp} f = \emptyset$ si et seulement si f est la fonction nulle. Et on fera attention au fait qu'on prend l'adhérence des points où f est non nulle : on peut avoir $x \in \operatorname{supp} f$ et $f(x) = 0$. Par exemple $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule en 0 et $\operatorname{supp} \mathrm{id} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$. En revanche, f est bien nulle à l'extérieur de son support.

Définition 5.2 (Espace vectoriel des fonctions tests)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

- On dit que f est à support compact si le support de f est compact et on note $\mathrm{C}_c(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.
- Pour $k \geq 1$, on note $\mathrm{C}^k_c(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur Ω et à support compact.
- Quand on parle de fonctions tests et de distributions, on note souvent $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur Ω et à support compact.

On notera qu'une fonction continue f à support compact dans Ω est nulle dans un voisinage du bord de Ω (pour $\Omega \neq \mathbb{R}^d$). En effet, la distance du compact $\operatorname{supp} f$ au fermé $\partial\Omega$ est strictement

positive : $\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, f, \partial\Omega) > 0$ puisque ces ensembles sont disjoints (voir exercice 5.1). Ainsi, f est nulle sur l'ensemble

$$V_\delta = \{x \in \Omega \,:\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\} = \Omega \cap \bigcup_{y\in\partial\Omega} B(y, \delta)\,.$$

Exercice 5.1 (Distance entre une partie fermée et une partie compacte disjointes)**.** Soient (X, d) un espace métrique et F une partie fermée dans X. Rappeler pourquoi, pour tout $x_0 \in X$,

$$\mathrm{dist}(x_0, F) = 0 \iff x_0 \in F\,.$$

En déduire que si $K \subset X$ est une partie compacte disjointe de F, on a

$$\mathrm{dist}(K, F) > 0\,.$$

Exemple 5.3 (Fonction continue à support compact)**.** La fonction

$$h : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - |t| & \text{si} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geq 1 \end{cases}$$

est continue à support compact dans $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{supp}\, h = [-1, 1]$, dans $]-2, 2[$ mais pas dans $]-1, 1[$. En effet

$$\mathrm{supp}(h_{|]-1,1[}) =]-1, 1[$$

qui n'est pas compact.

Il n'est pas difficile de donner des exemples de fonctions continues à support compact, comme le montre l'exemple précédent. En revanche, ce n'est pas si clair si on demande en plus à la fonction d'être de classe C^∞. Vérifions tout de suite que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne se réduit pas à la fonction nulle.

Proposition 5.4. *La fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \|x\| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & si \quad \|x\| < 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathrm{supp}\, \psi = \overline{B(0,1)}$.
En particulier, $\rho = \dfrac{\psi}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi \mathrm{d}x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est positive, d'intégrale 1 et à support dans $\overline{B(0,1)}$.

Preuve de la proposition 5.4. • Soit

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

On a déjà $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^*) \cap C(\mathbb{R})$ (le recollement est bien continu en 0). De plus, on peut vérifier par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, que

$$\forall t > 0, \quad g^{(j)}(t) = Q_j\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}$$

où Q_j est une fonction polynomiale.
• Montrons par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$ que g est k–fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g^{(j)}(0) = 0$, (P_j).
- $j = 0$, g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$.
- Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, supposons (P_j). On a $g^{(j)}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et en 0 :

$$\frac{g^{(j)}(t) - g^{(j)}(0)}{t} \underset{(HR)}{=} \frac{g^{(j)}(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{t} Q_j\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \xrightarrow[t\to 0]{} 0\,,$$

par croissance comparée $uQ_j(u)e^{-u} \to 0$ quand $u \to +\infty$. Donc $g^{(j)}$ est dérivable en 0 et $g^{(j+1)}(0) = 0$.

- On a donc g j–fois dérivable pour tout $j \in \mathbb{N}$ donc $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

• On a $\psi = g \circ h$ avec $h : x \in \mathbb{R}^d \mapsto 1 - \|x\|^2 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ donc ψ est bien de classe C^∞ et par définition, $\psi = 0$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0,1)}$ donc $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{B(0,1)}$ et de plus $\psi \neq 0$ sur $B(0,1)$ donc $\overline{B(0,1)} \subset \operatorname{supp}\psi$. □

En particulier, quitte à restreindre ψ, on a $\psi \in \mathcal{D}(B(0,r))$ pour tout $r > 1$, en revanche, on n'a pas $\psi \in \mathcal{D}(B(0,1))$. En effet, si on restreint ψ à $B(0,1)$, on a $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in B(0,1)$ et en particulier

$$\operatorname{supp}(\psi_{|B(0,1)}) = B(0,1)$$

qui n'est pas vraiment compact !

Exercice 5.2. Déduire de la proposition 5.4 que $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Remarque 5.5. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. On peut voir une fonction de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ comme une fonction de $\mathcal{D}(\Omega_2)$ et on l'utilisera souvent. Plus précisément :

(*i*) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ satisfait $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1$, alors $\varphi_{|\Omega_1} \in \mathcal{D}(\Omega_1)$. En effet, $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_1)$ et de plus, $\varphi_{|\Omega_1}$ s'annule sur $\Omega_1 \setminus \operatorname{supp}\varphi$ qui est ouvert dans Ω_1 car $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1$ est compact donc fermé dans Ω_1. On a donc $\operatorname{supp}(\varphi_{|\Omega_1}) \subset \operatorname{supp}\varphi$ donc $\operatorname{supp}(\varphi_{|\Omega_1})$ est compact.

(*ii*) On a réciproquement l'inclusion

$$\iota : \mathcal{D}(\Omega_1) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega_2), \quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi} : x \in \Omega_2 \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1 \end{cases},$$

autrement dit $\widetilde{\varphi}$ prolonge φ par 0 dans $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. Vérifions que $\widetilde{\varphi}$ est bien de classe C^∞ sur Ω_2. En effet, $\widetilde{\varphi}$ est de classe C^∞ :
- sur l'ouvert Ω_1 puisque $\widetilde{\varphi} = \varphi$ sur Ω_1,
- sur l'ouvert $\Omega_2 \setminus \operatorname{supp}\varphi$ puisque $\widetilde{\varphi} = 0$ sur cet ouvert.

Comme $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1$, on a $\Omega_2 = \Omega_1 \cup (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = \Omega_1 \cup (\Omega_2 \setminus \operatorname{supp}\varphi)$, on en déduit que $\widetilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur Ω_2.

Comme $\widetilde{\varphi}$ s'annule sur l'ouvert $\Omega_2 \setminus \operatorname{supp}\varphi$, on a $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi} \subset \operatorname{supp}\varphi$ est compact (on a même égalité des supports puisque $\varphi \neq 0$ implique $\widetilde{\varphi} = \varphi \neq 0$).

On en profite pour rappeler qu'être de classe C^∞ est une propriété *locale* (c'est ce qu'on vient d'utiliser) : il suffit de vérifier la propriété au voisinage de chaque point, en particulier, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $U = \cup_{i\in I} U_i$ est recouvert par une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ si et seulement si $f \in \mathrm{C}^\infty(U_i)$ pour tout $i \in I$. Attention, on applique ce résultat avec des ouverts s'il vous plaît !

5.2 Régularisation par convolution, troncature et fonctions plateaux

On se contente de rappeler les résultats qui nous seront utiles par la suite.

Définition 5.6 (Convolution)**.** Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Si f et g sont positives ou si $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, on note

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,.$$

Un changement de variable $(y \mapsto x - y)$ montre qu'alors $g * f(x)$ est bien défini et égal à $f * g(x)$. La fonction $f * g$ est appelée la *convolée* de f et g.

Supposons pour simplifier que f et g sont positives et d'intégrale 1. On peut alors interpréter $f * g(x)$ comme la moyenne de g vis-à-vis de la mesure $f(x-y)\mathrm{d}y$, la fonction $f * g$ est alors une sorte de moyenne glissante de g. On s'attend naturellement à ce que cette moyenne glissante soit au moins aussi régulière que la fonction initiale g, et par symétrie, il suffit d'avoir de la régularité sur une des deux fonctions pour récupérer de la régularité. La proposition suivante est plus précise : la structure de la moyenne effectuée en définissant $f * g$ commute à la dérivation ! On en déduira que la convolée fait mieux que prendre la meilleure des régularités de f ou g, elle les cumule (voir le corollaire 5.8).
On note enfin que le seul fait de "moyenner" suffit à gagner en régularité dans certains cas. Par exemple si on convole deux indicatrices de segments, on obtient une fonction continue, et si on convole une indicatrice de segment avec une fonction de classe C^k, on obtient une fonction de classe C^{k+1} (voir exercice 5.4).

Proposition 5.7 (Convolution et dérivation)**.** *Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathrm{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$, $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$,*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g \,.$$

Le résultat est encore vrai si on suppose plutôt $f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact au sens où il existe $S \subset \mathbb{R}^d$ compact en-dehors duquel g est nulle presque partout.

Preuve de la proposition 5.7. On renvoie à l'exercice 5.5 vu en TD. □

Corollaire 5.8. *Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$, $f * g \in \mathrm{C}^{k+\ell}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ satisfaisant $|\alpha| \leq k$, $|\beta| \leq \ell$, on a*

$$\partial^{\alpha+\beta}(f * g) = (\partial^\alpha f) * (\partial^\beta g) \,.$$

Si de plus g est également à support compact, alors $f * g \in \mathrm{C}_c^{k+\ell}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve du corollaire 5.8. Comme $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, d'après la proposition 5.7 on sait déjà que $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$,

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = g * (\partial^\alpha f) \,.$$

On peut alors réappliquer la proposition avec $\partial^\alpha f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (qui est en particulier dans L^1 et à support compact) et $g \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir que $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g$ est de classe C^ℓ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\beta| \leq \ell$,

$$\partial^{\alpha+\beta}(f * g) = (\partial^\alpha f) * (\partial^\beta g) \,.$$

On vient d'établir que $f * g$ admet des dérivées partielles continues à tout ordre inférieur ou égal à $k + \ell$ puisqu'on peut toujours écrire $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq k + \ell$ sous la forme $\gamma = \alpha + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$ et $|\beta| \leq \ell$. Ainsi $f * g \in \mathrm{C}^{k+\ell}(\mathbb{R}^d)$.
Si de plus g est également à support compact, on a pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, $f(x-y)g(y) \neq 0 \implies y \in \operatorname{supp} g, x - y \in \operatorname{supp} f$ et donc $x \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Par contraposée, pour $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est identiquement nulle et donc $f * g(x) = 0$. La somme de deux compacts est compacte donc

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

est compact. □

La proposition suivante est un cas particulier de l'inégalité de Young (voir exercice 5.7) qui établit la continuité de l'application bilinéaire $* : (f, g) \in \mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q \mapsto f * g \in \mathrm{L}^r$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Proposition 5.9 (Convolution $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$)**.** *Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 \,.$$

Preuve de la proposition 5.9. Voir exercice 5.6. □

Proposition 5.10 (Continuité des translations dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation $\tau_a : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a(f) : x \mapsto f(x-a)$. Pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0. \tag{5.2}$$

Une petite remarque concernant l'intitulé de la proposition. Si on considère l'application suivante, définie pour $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ fixée,

$$\mathbb{R}^d \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \quad a \mapsto \tau_a f\,,$$

la proposition exprime sa continuité en 0, de laquelle découle la continuité sur $\mathbb{R}^d$ en observant que pour tout $a_0, a \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\tau_{a+a_0}(f) - \tau_{a_0} f\|_p = \|\tau_{a_0}(\tau_a(f) - f)\|_p = \|\tau_a(f) - f\|_p\,.$$

La preuve de la proposition 5.10 est un exemple typique de preuve par densité, que vous avez sans doute déjà rencontré, par exemple pour prouver le lemme de Riemann-Lebesgue.

Preuve de la proposition 5.10. On va raisonner par densité.
• On commence par montrer que (5.2) est vraie lorsque $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
Soient $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\tau_a(f) - f$ est continue à support dans $B(0, R+1)$ et :

$$\|\tau_a(f) - f\|_p^p = \int_{B(0,R+1)} |\tau_a(f)(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq C\,\|\tau_a(f) - f\|_\infty^p \quad \text{avec} \quad C = \mathrm{Vol}(B(0,R+1))\,.$$

Comme $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$, elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour tout $a \in B(0,\delta)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x-a) - f(x)| \leq \varepsilon$, i.e. pour tout $a \in B(0,\delta)$, $\|\tau_a f - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc finalement $\|\tau_a(f) - f\|_\infty \xrightarrow[a\to 0]{} 0$ et donc $\|\tau_a(f) - f\|_p \leq C^{\frac{1}{p}}\,\|\tau_a(f) - f\|_\infty \xrightarrow[a\to 0]{} 0$.
• On va conclure grâce à la densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.
Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\left(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\right)$ il existe $g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. D'après la première étape, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_a(g) - g\|_p < \varepsilon$ dès que $\|a\| < \delta$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < \delta$ on a donc

$$\begin{aligned}\|\tau_a(f) - f\|_p &\leq \|\tau_a(f) - \tau_a(g)\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p + \|g - f\|_p = 2\,\|f - g\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p \\ &\leq 3\varepsilon\,,\end{aligned}$$

ce qui établit (5.2).

□

On peut à présent étendre la propriété connue de densité dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ des fonctions continues à support compact aux fonctions de classe C^∞ à support compact, i.e. $\mathcal{D}(\Omega)$. On note qu'on a bien $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathrm{C}_c(\Omega) \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$. Rappelons l'argument : pour $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$, il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$ et par conséquent

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{B(0,R)} |\varphi|\,\mathrm{d}x \leq C\,\|\varphi\|_\infty \quad \text{avec} \quad C = \mathrm{Vol}(B(0,R)) = \int_{B(0,R)} \mathrm{d}x\,.$$

Et on a utilisé ci-dessus $\mathrm{C}_c(\Omega) \subset \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Théorème 5.11 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $1 \leq p < \infty$. Alors le sous-espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.*

Pour cela, on va d'abord introduire la notion de suite régularisante, qui nous permettra de montrer la densité de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)\cap\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On utilisera ensuite un argument de *troncature* pour en déduire le résultat pour tout ouvert Ω.

Proposition 5.12 (Régularisation par convolution)**.** *Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ positive et d'intégrale 1. On définit la suite* régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par*

$$\rho_n : x \in \mathbb{R}^d \mapsto n^d\rho(nx) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,.$$

Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Alors

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_n \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,*
2. *lorsque $n \to +\infty$, on a $\|f - f * \rho_n\|_p \to 0$.*

Preuve de la proposition 5.12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.
• On a déjà $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et d'après la proposition 5.7, $f*\rho_n \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\rho_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, d'après la proposition 5.9, $f * \rho_n \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.
• Soit $x \in \mathbb{R}^d$, comme ρ est d'intégrale 1, ρ_n également (par changement de variable $y \mapsto n^{-1}y$ de jaconbien n^{-d} dans $\mathbb{R}^d$) et on obtient

$$(f * \rho_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\,\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

D'après l'inégalité de Hölder (Jensen) appliquée avec la mesure $\rho_n(y)\mathrm{d}y$ (de masse 1), on a

$$|(f * \rho_n)(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p\,\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

On peut alors intégrer sur $\mathbb{R}^d$ et appliquer le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\|f * \rho_n - f\|_p^p &\leq \int_{y\in\mathbb{R}^d}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x))|^p\,\mathrm{d}x\right)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p\,\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

• Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 5.10, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, si $\|y\| < \delta$, $\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon$. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\rho \subset B(0,R)$, on a alors $\operatorname{supp}\rho_n \subset B(0,\frac{R}{n})$ et pour $n > \frac{R}{\delta}$, on a

$$\|f * \rho_n - f\|_p^p \leq \int_{B(0,\delta)} \|\tau_y f - f\|_p^p\,\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,\mathrm{d}y = \varepsilon^p\,,$$

et par conséquent $\|f * \rho_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Exhaustion compacte. L'argument de troncature qui permet de déduire le théorème 5.11 de la proposition 5.12 repose sur ce qu'on appelle une exhaustion de compacts de l'ouvert Ω. C'est une famille $(K_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dénombrable croissante de compacts qui satisfait

$$\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} K_j \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*,\, K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}\,.$$

En particulier, tout compact $K \subset \Omega$ est inclus dans un des compacts de l'exhaustion. En effet, si $x \in K \subset \Omega$, il existe $j_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in K_{j_x} \subset \overset{\circ}{K}_{j_x+1}$, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset K_{j_x+1}$. On a recouvert le compact K par la famille de boules ouvertes $(B(x,r_x))_{x\in K}$ et on peut extraire un sous-recouvrement fini, de sorte qu'il existe $J \subset \mathbb{N}^*$ ensemble fini tel que

$$K \subset \cup_{j\in J} K_j \subset K_{\max J}\,.$$

On n'utilisera pas cette dernière propriété dans la preuve du théorème 5.11 mais elle est essentielle pour définir une topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ou encore pour régulariser une distribution par convolution.