Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

# Feuille 1 – Théorème de Baire – Espaces de Banach

**Exercice 1** (Inspection des hypothèses du Théorème de Baire)**.** Il faudra donc bien penser à les vérifier sans exception quand on appliquera le théorème de Baire ...

1. Donner un exemple d'espace métrique $X$ (qui n'est pas complet) qui peut s'écrire comme réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. Qu'en pensez-vous ?
2. Écrire $\mathbb{R}$ comme réunion d'ensembles (pas fermés) d'intérieur vide.
3. Écrire $\mathbb{R}$ comme réunion non dénombrable de fermés d'intérieur vide.

*Solution de l'exercice 1.*

1. On sait que $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. On peut alors écrire
$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\},$$
comme réunion dénombrable de fermés (les singletons sont fermés dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ métrique, comme dans tout espace séparé) d'intérieur vide dans $\mathbb{Q}$ (aucun ouvert de $\mathbb{Q}$ n'est réduit à un point, car $\mathbb{Q}$ n'a pas de point isolé). Si le théorème de Baire s'appliquait, on en déduirait que $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide dans lui-même (or $\mathbb{Q}$ est ouvert dans lui-même donc d'intérieur $\mathbb{Q}$).
Cela ne contredit pas le théorème de Baire : l'espace métrique $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet (pas fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$).
2. On peut écrire $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Et on a bien que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$ (puisque leur complémentaires respectifs sont denses dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}$ n'est pas d'intérieur vide dans lui-même. Ce qui ne contredit pas le théorème de Baire puisque ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont fermés dans $\mathbb{R}$ (leur adhérence commune est $\mathbb{R}$).
3. On peut écrire $\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$.

□

**Exercice 2.** On va montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$.

1. Vérifier qu'il n'existe pas de famille dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit
$$\omega(f, x) = \inf_{\delta>0} \sup_{u,v\in B(x,\delta)} |f(u) - f(v)|.$$
Vérifier que $f$ est continue au point $x$ si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble $C_f$ des points de continuité de $f$ peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts et conclure.

4. *(facultatif)*– Pourquoi a-t-on caractérisé la continuité de $f$ au point $x \in \mathbb{R}$ par $\omega(f,x) = 0$ et, par exemple, pas par $\inf_{\delta>0} \sup_{u \in B(x,\delta)} |f(u) - f(x)| = 0$ ?

*Solution de l'exercice 2.* 1. Supposons que $\mathbb{Q} = \bigcap_n U_n$ avec $U_n$ ouvert. Nécessairement $U_n$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $U_n \supseteq \mathbb{Q}$. Pour $q \in Q$, notons $V_q = \mathbb{R} \setminus \{q\}$, $V_q$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$. L'intersection suivante

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \ \cap \ \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} V_q$$

est alors une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$, par le théorème de Baire, son intersection est dense dans $\mathbb{R}$, a fortiori non vide. Or

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \ \cap \ \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\}) = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset \, .$$

2. Pour $\delta > 0$, notons

$$h(\delta) = \sup_{u,v \in B(x,\delta)} |f(u) - f(v)| \, .$$

(Par inclusion de $B(x,\delta_1) \subset B(x,\delta_2)$ pour $0 < \delta_1 < \delta_2$, on a que $h$ est croissante et $\inf_{\delta>0} h(\delta) = \lim_{\delta\to 0} h(\delta)$.)
Commençons par vérifier le sens direct et supposons que $f$ est continue au point $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\delta_n > 0$ tel que pour tout $y \in B(x,\delta_n)$, on a $|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$. On a alors par inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant h(\delta_n) \leqslant \frac{2}{n} \, .$$

On vient de vérifier que $\omega(f,x) = \inf_{\delta>0} h(\delta) = \lim_{\delta\to 0} h(\delta) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\omega(f,x) = 0$ et vérifions que $f$ est continue au point $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $h(\delta) < \varepsilon$, on a alors pour tout $y \in B(x,\delta)$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{u\in B(x,\delta)} |f(u) - f(x)| \leqslant h(\delta) < \varepsilon$$

et $f$ est bien continue au point $x$.

3. D'après la question précédente, on peut écrire

$$C_f = \{x \in \mathbb{R} \, : \, \omega(f,x) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \omega(f,x) < \frac{1}{n} \right\} .$$

Vérifions que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, \omega(f,x) < \alpha\}$ est bien ouvert. Soit $x \in A$. Par définition de $\omega(f,x)$ comme inf, il existe $\delta_k \to 0$ tel que $\sup_{u,v\in B(x,\delta_k)} |f(u) - f(v)| \to \omega(f,x) < \alpha$ et il existe donc $\eta = \delta_{k_0} > 0$ pour $k_0$ assez grand tel que $\sup_{u,v\in B(x,\eta)} |f(u) - f(v)| < \alpha$.
Soit $y \in B(x,\eta)$. On a alors $B(y, \eta - |y-x|) \subset B(x,\eta)$ et donc

$$\omega(f,y) \leqslant \sup_{u,v\in B(y,\eta-|y-x|)} |f(u) - f(v)| \leqslant \sup_{u,v\in B(x,\eta)} |f(u) - f(v)| < \alpha$$

donc $y \in A$. On vient de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset A$ et $A$ est bien ouvert. (On vient de montrer que les sous-niveaux stricts de $\omega(f,\cdot)$ sont ouverts ce qui caractérise la semi-continuité supérieure : la fonction oscillation de $f$, $\omega(f,\cdot)$ est semi-continue supérieurement, sans supposer aucune régularité sur $f$ elle-même).
D'après la question 1, on ne peut donc avoir $C_f = \mathbb{Q}$.

4. Cela caractériserait bien la continuité ponctuelle, le raisonnement échoue en général parce qu'avec cette définition, on n'obtiendrait pas nécessairement des sous-niveaux

$$A_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \inf_{\delta>0} \sup_{u \in B(x,\delta)} |f(u) - f(x)| < \alpha \right\}$$

ouverts ($\alpha > 0$). En fait, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est un contre-exemple pour $\alpha = 2$, car on obtiendra $A_2 = \{0\}$.

□

**Exercice 3** (Banach–Mazurkiewicz)**.** L'ensemble $E$ des fonctions $f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ admettant une dérivée à droite finie en au moins un point de $[0,1)$ est d'intérieur vide dans $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.
Deux indications sont disponibles à la fin de cette feuille.
Si vous aviez déjà entendu dire que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables était dense dans $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$...

*Solution de l'exercice 3.* Rappelons que pour $x_0 \in [0,1)$, $f$ est dérivable à droite si et seulement si le taux d'accroissement à droite,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad h > 0,$$

admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand $h$ tend vers 0 (par valeurs positives). En particulier, pour $h > 0$ assez petit, ce taux d'accroissement n'explose pas. On introduit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n = \left\{ f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R}) : \exists\, x_0 \in [0, 1 - \tfrac{1}{n}],\ \forall h \in (0, \tfrac{1}{n}],\ |f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant nh \right\}.$$

On a défini $E_n$ dans ce but, mais vérifions proprement que si $f$ est dérivable à droite en un point $x_0 \in [0,1)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \in E_n$. On sait que par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < h \leqslant \delta$,

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leqslant (|\ell| + 1),$$

Il suffit de choisir $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que

- $\frac{1}{n} \leqslant 1 - x_0$ ou encore $n \geqslant \frac{1}{1-x_0}$ $(1 - x_0 > 0)$,
- $n \geqslant |\ell| + 1$,
- $\delta \leqslant \frac{1}{n}$ i.e. $n \geqslant \frac{1}{\delta}$,

et on aura bien $f \in E_n$. On en déduit $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$.
Vérifions à présent que $E_n$ est *fermé* dans $(\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E_n$ qui converge uniformément vers $f$. Pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que pour tout $h \in (0, \frac{1}{n}]$,

$$\left| \frac{f_k(x_k+h) - f_k(x_k)}{h} \right| \leqslant n,$$

et comme $(x_k)_k$ est bornée, on peut extraire une sous-suite $(x_{k_j})_j$ qui converge vers $x \in [0, 1-1/n]$ (fermé). On peut alors passer à la limite $j \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus et obtenir : pour tout $h \in (0, \frac{1}{n}]$,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n\,,$$

et donc $f \in E_n$. En effet, comme $(f_{k_j})_k$ converge *uniformément* vers $f$, on sait que $f$ est continue (en particulier en $x$) et

$$\begin{aligned}\big|f_{k_j}(x_{k_j}) - f(x)\big| &\leqslant \big|f_{k_j}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})\big| + \big|f(x_{k_j}) - f(x)\big| \\ &\leqslant \left(\sup_{[0,1]} |f_{k_j} - f|\right) + \big|f(x_{k_j}) - f(x)\big| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

On vient de vérifier que $E_n$ était fermé. Montrons à présent que $E_n$ est *d'intérieur vide* dans $(\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
Soit $f \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On construit $g \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \setminus E_n$ avec $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$, ce qui montrera que $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \setminus E_n$ est dense dans $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et donc $E_n$ est d'intérieur vide.
On rappelle que les fonctions continues affines par morceaux sont denses dans $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$). Si vous aviez oublié, pour $\eta > 0$, utilisez l'uniforme continuité de $f$ sur le compact $[0,1]$ qui vous donnera une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{J-1} < t_J = 1$ de taille $\delta > 0$ telle que pour $|x-y| \leqslant \delta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \eta$. On obtient $g_0$ en reliant de façon affine par morceaux les $(t_j, f(t_j))_{j=0\ldots J}$, on peut écrire $x \in [t_j, t_{j+1}]$ comme combinaison convexe $x = (1-\theta)t_j + \theta t_{j+1}$ (avec $\theta \in [0,1]$) et on a bien

$$\begin{aligned}|f(x) - g_0(x)| &= |(1-\theta+\theta)f(x) - (1-\theta)f(t_j) - \theta f(t_{j+1})| \\ &\leqslant (1-\theta)\,|f(x) - f(t_j)| + \theta\,|f(x) - f(t_{j+1})| \leqslant \eta\,.\end{aligned}$$

Soit donc $g_0 \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ affine par morceaux telle que

$$\|f - g_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et notons

$$k_0 = \max_{x\neq y} \left|\frac{g_0(x) - g_0(y)}{x-y}\right|$$

la plus grande pente (en valeur absolue) de $g_0$. Montrons que cette quantité est bien finie. Soit $g$ une fonction affine par morceaux, et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{J-1} < t_J = 1$ une subdivision adaptée, c'est-à-dire que $g_0$ est affine sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Pour tout $j$ entre 0 et $J-1$, on dénote par $M_j$ la valeur absolue de la pente de $g_0$ sur $[t_j, t_{j+1}]$. Soient à présent $x < y$ dans $[0,1]$. S'il existe $j$ tel que $[x,y] \subset [t_j, t_{j+1}]$, alors

$$\left|\frac{g_0(x) - g_0(y)}{x-y}\right| = M_j.$$

Sinon, soit $i$ et $j$ tels que $x \in [t_i, t_{i+1}[$ et $y \in [t_j, t_{j+1}]$. On a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}|g_0(x) - g_0(y)| &\leqslant |g_0(x) - g_0(t_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{j-1} |g_0(t_k) - g_0(t_{k+1})| + |g_0(t_j) - g_0(y)| \\ &\leqslant M_i|x - t_i| + \sum_{k=i+1}^{j-1} M_k|t_k - t_{k+1}| + M_j|t_j - y| \leqslant |x-y| \max_{0\leqslant j\leqslant J-1} M_j.\end{aligned}$$

On obtient une borne uniforme en $(x, y)$ de $\left|\frac{g_0(x)-g_0(y)}{x-y}\right|$, et on a $k_0 \leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant J-1} M_j$. De plus, cette borne est atteinte en choisissant $(x, y) = (t_j, t_{j+1})$ pour que $M_j$ soit maximal.

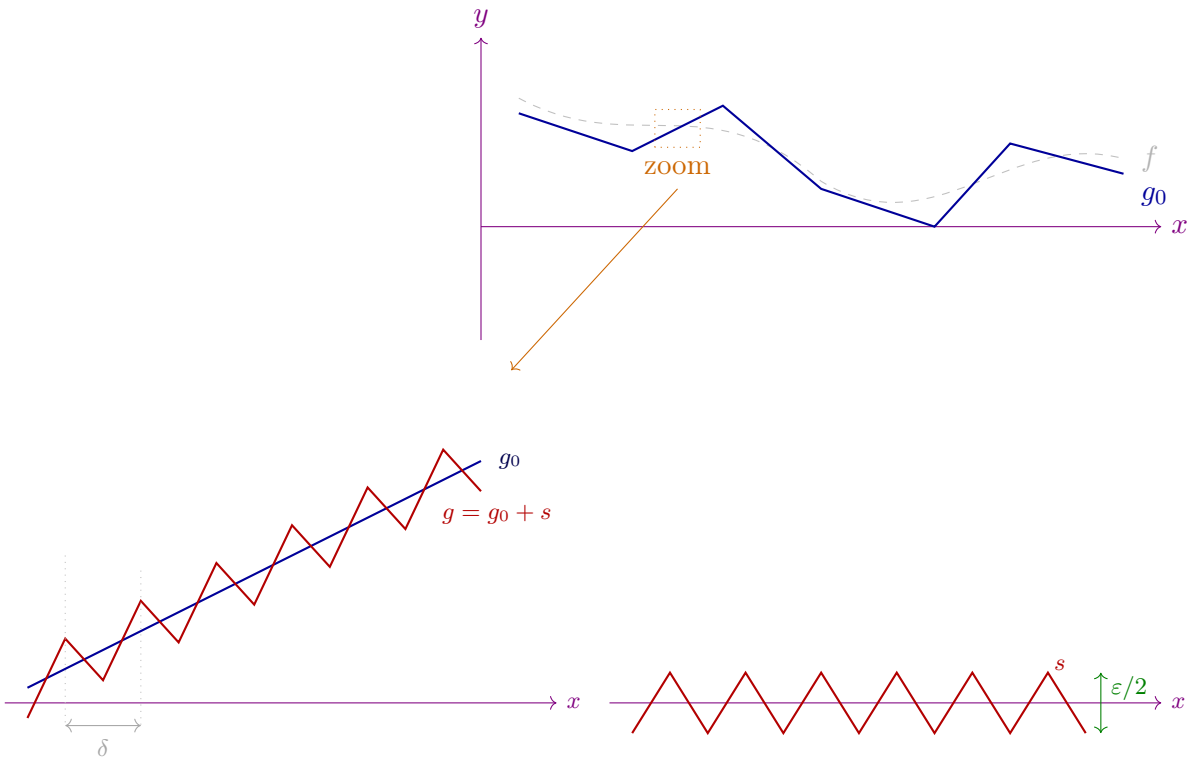



Figure 1 – Construction de $g = g_0 + s$ : $g_0$ (bleu) approche $f$ à $\varepsilon/2$ près, et la fonction en dents de scie $s$ (rouge) a des pentes supérieures ou égales à $n$ et $\|s\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$.

On va perturber $g_0$ avec une fonction $s \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ petite en norme $\|\cdot\|_\infty$ et définir $g = g_0 + s$ (sous-entendu $s_{|[0,1]}$) afin de faire exploser les pentes de $g$, tout en ayant $\|g - g_0\|_\infty = \|s\|_\infty$ petit. Plus précisément, la fonction $s$ est définie comme une fonction affine par morceaux périodique de péridode $2\delta$ ($\delta > 0$ qu'on va fixer plus loin) satisfaisant :

$$s(0) = -\frac{\varepsilon}{2}; \quad s(\delta) = \frac{\varepsilon}{2}; \quad s(2\delta) = -\frac{\varepsilon}{2}$$

et $s$ est affine sur $[0, \delta]$ et $[\delta, 2\delta]$ (voir figure 1) avec une pente constante égale à $\alpha = \frac{\varepsilon}{\delta}$ en valeur absolue, et $\|s\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a déjà bien

$$\|f - g\|_\infty \leqslant \|f - g_0\|_\infty + \|s\|_\infty < \varepsilon\,,$$

et il reste à vérifier qu'on peut choisir $\delta > 0$ pour assurer que $g \notin E_n$ c'est-à-dire, pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, il existe $h \in (0, \frac{1}{n}]$ tel que $|g(x + h) - g(x)| > nh$. Afin d'absorber une pente minimale de $-k_0$ pour $g_0$, on aimerait

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\delta} > n + k_0 \quad \text{ou encore} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{n + k_0}\,.$$

Par inégalité triangulaire (inverse) : pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on peut prendre $h \in (0, \frac{1}{n}]$ tel que $x + h$ et $x$ sont dans la même partie affine de $s$ (en effet, $h$ doit simplement être inférieur à la distance de

$x$ au prochain point ($\neq x$) de rupture de pente de $s$, ces points étant exactement espacés de $\delta$), on a alors par choix de $\delta$ et inégalité triangulaire :

$$|g(x+h)-g(x)| \geqslant |s(x+h)-s(x)| - |g_0(x+h)-g_0(x)| \geqslant (\alpha - k_0)\,h > (n+k_0-k_0)\,h \\ > n\,h\,.$$

On en déduit $g \notin E_n$ et $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ de sorte que $E_n$ est bien d'intérieur vide.
*Conclusion.* L'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$ est réunion dénombrable des $E_n$ qui sont fermés et d'intérieur vide dans l'espace de Banach (en particulier complet) $(\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, d'après le théorème de Baire, $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$ est d'intérieur vide dans $(\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. □

**Exercice 4** (Une application aux espaces de Banach)**.**

1. Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie, montrer que $E$ n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. Attention, on ne parle pas ici de base hilbertienne.
2. $\mathbb{R}[X]$ peut-il être muni d'une structure d'espace de Banach ?

*Solution de l'exercice 4.* Avant de passer à la preuve du résultat, notons qu'il existe des espaces de Hilbert (en particulier des espaces de Banach) à base hilbertienne dénombrable, on renvoie au chapitre sur les espaces de Hilbert pour des exemples concrets.

1. Commençons par vérifier que tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ de dimension fini est d'intérieur vide, ce qui est équivalent à montrer que $E \setminus F$ est dense dans $E$. Soit $v \in E \setminus F$, soit $x \in F$, en posant pour $i \in \mathbb{N}^*$, $x_i = x + \frac{1}{i}v$ on a $x_i \in E \setminus F$ et $x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} x$ d'où la densité recherchée.

   On suppose à présent par l'absurde que $E$ admet une base dénombrable $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on considère pour $j \in \mathbb{N}$, les sous-espaces vectoriels de dimensions finis $F_j = \mathrm{vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_j)$ qui sont d'intérieur vide par ce qui précède. On peut alors écrire

   $$E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j$$

   comme réunion de fermés d'intérieur vide (chaque sous espace vectoriel $F_j$ est de dimension finie et donc fermé dans $E$). D'après le théorème de Baire, $E$ serait d'intérieur vide ce qui est absurde ($E$ est ouvert et l'intérieur de $E$ est $E$ lui-même).
2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ possède une base dénombrable, par exemple la base des monômes $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et ne peut donc pas être muni d'une structure d'espace de Banach.

□

**Exercice 5** (Hypothèse de complétude dans le théorème de Banach–Steinhaus)**.** On considère l'espace $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$L_n : f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right)\,.$$

Vérifier que $L_n : (\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue et que la suite $(L_n)_n$ converge simplement vers une forme linéaire $L$ à identifier. La limite $L$ est-elle continue ?

*Solution de l'exercice 5.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n$ est linéaire et pour tout $f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

$$|L_n(f)| \leqslant n\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| \leqslant 2n\|f\|_\infty\,,$$

donc $L_n$ est continue. On étudie à présent la convergence simple de $(L_n)_n$. Soit $f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

$$L_n(f) = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)\,.$$

Ainsi, $L_n$ converge simplement vers la forme linéaire $L : f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto f'(0)$.
Vérifions enfin que $L$ n'est pas continue lorsqu'on munit $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $f \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $|L(f)| = |f'(0)| \leqslant C\|f\|_\infty$ et considérons la suite $(f_k)_k$ de fonctions $\mathrm{C}^1$ dont la dérivée explose en 0, définie comme suit : pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \in [0,1] \mapsto \sin(kx)$. On a bien $f_k \in \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_k\|_\infty \leqslant 1$ et $L(f_k) = f_k'(0) = k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde.
Si on résume, les formes linéaires $L_n$ sont continues et convergent simplement vers $L$, pourtant $L$ n'est pas continue. Heureusement, cela ne met pas en défaut le théorème de Banach–Steinhaus puisque $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est en revanche un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{C}^1}$. □

**Exercice 6** (Divergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction continue)**.** On va montrer qu'il existe une fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, $2\pi$-périodique dont la série de Fourier diverge au point 0. On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et $2\pi$–périodiques muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on définit pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}\,.$$

1. On introduit le noyau de Dirichlet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(f)(x) = D_n * f(x) \quad \text{au sens où} \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t\,.$$

2. Pour $\in \mathbb{N}$, on définit $L_n : E \to \mathbb{C}$, $f \mapsto S_n(f)(0)$. Vérifier que $L_n$ est une forme linéaire continue et montrer que $\|L_n\|_{E^*} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $\|L_n\|_{E^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On pourra utiliser $\sin(\frac{t}{2}) \leqslant \frac{t}{2}$ pour $t \in [0,\pi]$ et utiliser une comparaison avec une série.
4. Conclure.

*Solution de l'exercice 6.* 1. Calcul direct, inversion somme finie intégrale sur un segment.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$. Par défintion, $D_n$ est paire et $S_n(f)(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t)\mathrm{d}t$ par la question précédente, de sorte que

$$|L_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)D_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

L'application linéaire $L_n$ est donc continue et $\|L_n\|_{E^*} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|$. Montrons l'inégalité inverse, pour cela, il serait pratique d'évaluer $L_n$ en $f = \mathrm{signe}(D_n)$ qui est $2\pi$–périodique mais pas continue (et pas définie) en les points où $D_n$ s'annule.
Soit $t \in ]0, 2\pi[$. En revenant à la définition de de $D_n$, on a par somme géométrique et multiplication par l'angle de moitié

$$D_n(t) = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = e^{-int}\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\,,$$

et $D_n(0) = 2n+1$. En particulier, pour $t \in [0, 2\pi]$, $D_n$ s'annule en un nombre fini de points

$$X = \left\{ t \in ]0, 2\pi[\,:\, \left(n+\frac{1}{2}\right)t \in \pi\mathbb{Z} \right\} = \left\{ t_j := \frac{2j\pi}{2n+1} \;:\; j \in [|1, 2n|] \right\}.$$

Ainsi, $\mathrm{signe}(D_n)$ est constante égale à $-1$ ou $1$ sur $[0, 2\pi] \setminus X$ et on peut l'approcher par une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues avec convergence en norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1}$ sur $[0, 2\pi]$, comme $D_n(0) = D_n(2\pi) = 2n+1 > 0$ et $D_n$ continue, on sait que $\mathrm{signe}D_n$ est égale à 1 au voisinage de 0 et $2\pi$ et on peut demander $f_p(0) = f_p(2\pi)$ de sorte que $f_p$ s'étend bien en une fonction continue $2\pi$–périodique sur $\mathbb{R}$ (sinon on sait qu'on peut prendre $f_p$ continue à support compact dans $]0, 2\pi[$ et dans ce cas $f_p(0) = f_p(2\pi) = 0$). On a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f_p(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^{2\pi} |\mathrm{signe}(D_n(t)) - f_p(t)|\,|D_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (2n+1)\,\|\mathrm{signe}(D_n) - f_p\|_{\mathrm{L}^1} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$|L_n(f_p)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f_p(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[p\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qui nous donne l'inégalité manquante et finalement $\|L_n\|_{E^*} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

3. $|D_n(t)| \geqslant \dfrac{2}{t}\,|\sin((n+\frac{1}{2})t)|$. Par parité de $D_n$, et en utilisant l'indication, on obtient

$$\|L_n\|_{E^*} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = (n+\frac{1}{2})t$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\,,\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} 1/k \geqslant \ln(n)$ (comparaison série-intégrale), on obtient même plus précisément la minoration $\dfrac{4}{\pi^2}\ln(n) \to \infty$.

4. On rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. En effet, il suffit de vérifier que $E$ est fermé dans l'espace de Banach $(\mathrm{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ (fonctions continues bornées). C'est bien le cas car la $2\pi$–périodicité passe à la limite simple, a fortiori à la limite uniforme.
   Supposons par l'absurde que pour toute $f \in E$, la série de Fourier de $f$ converge en 0, i.e. la suite $(S_n(f)(0))_n = (L_n(f))_n$ converge dans $\mathbb{C}$. On aurait en particulier
   $$\forall f \in E, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n(f)| < \infty.$$
   $E$ étant un espace de Banach et $(L_n)_n$ une famille de formes linéaires continues sur $E$, le théorème de Banach–Steinhaus donnerait
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{E^*} < \infty\,,$$
   ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente. Il existe donc $f_0 \in E$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n(f_0)| = +\infty$ : la suite $(S_n(f_0)(0))_n$ est non bornée et la série de Fourier de $f_0$ diverge donc au point 0.

*Remarque.* Le théorème de Banach–Steinhaus garantit l'existence de $f_0$, sans jamais l'exhiber explicitement. Dans ce cas précis, il existe également des constructions explicites.

□

**Exercice 7** (Inspection des hypothèses du théorème de l'application ouverte)**.**

1. Trouver une application linéaire continue $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
2. Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
3. On note $E$ l'ensemble des suites "presque nulles", i.e. nulles à partir d'un certain rang, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que l'on munit de $\|\cdot\|_\infty$. Cela définit-il un espace de Banach ?
4. Trouver une application $T : E \to E$ linéaire continue et bijective, dont l'inverse $T^{-1}$ n'est pas continu.

*Solution de l'exercice 7.*

1. L'application nulle $L : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$ envoie l'ouvert $\mathbb{R}$ (et n'importe quel ouvert non vide) sur le fermé $\{0\}$. Bien sûr, $L$ est linéaire continue ... et pas surjective sur $\mathbb{R}$.
2. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x$ est continue, surjective mais pas ouverte : $f(]-2,2[) = [-2,2]$.
   Pas d'inquiétude bien sûr, $f$ n'est pas vraiment linéaire !
3. L'espace $E$ est un sous-espace vectoriel des suites bornées $\ell^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est un espace de Banach lorsqu'on le munit de $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi $E$ est complet si et seulement si $E$ est fermé dans $\ell^\infty$. Et on observe par exemple que si on considère pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $a^{(k)}$, nulle à partir du rang $k$ et donnée par
   $$a^{(k)} = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right)$$

et la suite $a^{(\infty)} \notin E$ donnée par $a_n^{(\infty)} = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left\| a^{(k)} - a^{(\infty)} \right\|_\infty = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Ainsi $E$ n'est pas fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ dans $\ell^\infty$ : ce n'est pas une espace de Banach.
On remarque qu'il est possible d'approcher de façon similaire n'importe quelle suite $a^{(\infty)}$ tendant vers 0, en considérant les suites $a^{(k)}$ partielles tronquées au rang $k$. On pourrait vérifier que

$$\overline{E}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$$

où $c_0$ désigne l'espace des suites tendant vers 0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, selon le choix pour $E$) qui est lui bien un espace de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. Soit $T : E \to E$ définie, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, par

$$(T(x))_n = \frac{x_n}{n+1}.$$

*$T$ est bien définie, linéaire et continue.* Si $x$ est presque nulle, $T(x)$ l'est aussi (mêmes indices non nuls), donc $T$ est bien définie et on vérifie que $T$ est bien linéaire. En ce qui concerne la continuité : pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|}{n+1} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty\,,$$

donc $T$ est continue et $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.
*$T$ est bijective,* d'inverse $T^{-1} : E \to E$ définie, pour $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, par

$$(T^{-1}(y))_n = (n+1)\, y_n\,.$$

On a bien par définition $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_E$.
*L'inverse $T^{-1}$ n'est pas continu.* On a $T^{-1}(y)_n = (n+1)y_n$. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, considérons la suite $e_N := (\delta_{N,n})_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang $N$ qui est égal à 1. Alors

$$T^{-1}(e_N) = (N+1)\, e_N, \qquad \text{et} \qquad \frac{\left\|T^{-1}(e_N)\right\|_\infty}{\|e_N\|_\infty} = \left\|T^{-1}(e_N)\right\|_\infty = N+1 \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $T^{-1}$ n'est pas continue et en particulier $T$ n'est pas ouverte (pour un ouvert $U$ de $E$, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ de sorte que $T$ est ouverte si est seulement si $T^{-1}$ est continue, c'est la preuve du théorème de l'isomorphisme de Banach).

□

**Exercice 8** (Homéomorphisme, isomorphisme et complétude)**.**

1. Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques homéomorphes. Si $X$ est complet, l'espace $Y$ est-il toujours complet ?
2. Soit $L : E \to F$ un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective continue d'inverse continu) entre deux espaces vectoriels normés. Si $E$ est un espace de Banach, $F$ est-il également complet ?

*Solution de l'exercice 8.* La complétude est une notion métrique tandis qu'un homéomorphisme traduit une équivalence topologique (correspondance entre compacts, connexes ...). Un homéomorphisme bi-lipschitzien (ou même bi-uniformément continu) donnera une correspondance entre les suites de Cauchy et ainsi une équivalence pour ce qui est de la complétude. Et il se trouve qu'une application linéaire continue est lipschitzienne.

1. Non, en général. Donnons un contre-exemple (n'oublions pas de chercher des contre-exemples aussi simples que possible !). La fonction arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un homéomorphisme (de réciproque tan restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$), ici $X = \mathbb{R}$ et $Y = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont munis de la distance usuelle $|\cdot|$. Cependant, $X = \mathbb{R}$ est complet tandis que $Y = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (si $(Y, |\cdot|)$ était complet, il serait fermé dans $\mathbb{R}$).
2. Oui ! Contrairement à un homéomorphisme générique, un isomorphisme d'espaces vectoriels normés (bijection linéaire bicontinue) préserve la complétude : la linéarité transforme la continuité en une propriété lipschitzienne, on va l'utiliser ici pour $L^{-1}$.
   En effet, $L^{-1}$ étant linéaire continue, pour tout $x, y \in E$,
   $$\left\|L^{-1}(x) - L^{-1}(y)\right\|_F = \left\|L^{-1}(x-y)\right\|_F \leqslant C \left\|x - y\right\|_E \qquad \text{avec } C = \left\|L^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} .$$
   Soit maintenant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $F$ : $\|y_p - y_q\|_F \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$. On a alors pour $p, q \in \mathbb{N}$,
   $$\left\|L^{-1}(y_p) - L^{-1}(y_q)\right\|_E \leqslant C \left\|y_p - y_q\right\|_F \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0,$$
   donc $(L^{-1}(y_n))_n$ est de Cauchy dans $E$. Comme $E$ est complet, cette suite converge vers un point $x \in E$ et par continuité de $L$,
   $$y_n = L(L^{-1}(y_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} L(x) \in F.$$
   Donc $(y_n)_n$ converge dans $F$. On a bien montré que $F$ est complet.

□

**Exercice 9** (Normes équivalentes)**.** Soit $E$ un espace de Banach par rapport à deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$.

1. Montrer que les normes sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_2 \leqslant d\|x\|_1$.
2. Donner un exemple d'espace $E$ muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ satisfaisant :
   - $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach,
   - il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$.
   - les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

   *Indication :* on pourra par exemple considérer $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

*Solution de l'exercice 9.*

1. L'application $\iota_{2\to1} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$, $x \mapsto x$ est linéaire et bijective d'inverse $\iota_{1\to2} : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$, $x \mapsto x$. L'hypothèse de l'énoncé assure de plus que $\iota_{2\to1}$ est continue de norme $\leqslant c$ : pour tout $x \in E$,
   $$\|\iota_{2\to1}(x)\|_1 = \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 .$$

D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach (par hypothèse, $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont des espaces de Banach) l'inverse de $\iota_{2\to 1}$ est automatiquement continue, c'est-à-dire qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\|\iota_{1\to 2}(x)\|_2 = \|x\|_2 \leqslant d\,\|x\|_1 \ .$$

2. On peut munir $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour laquelle $E$ est complet. On peut également considérer une norme $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leqslant p < \infty$. on aura alors bien l'inégalité $\|\cdot\|_p \leqslant c\,\|\cdot\|_\infty$ avec $c = 1$ : pour tout $f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$,

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty \ .$$

Cependant, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E$. Il suffit d'exhiber une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ dont la norme $\|f_n\|_\infty$ explose tandis que la norme $\|f_n\|_p$ reste bornée quand $n$ tend vers $+\infty$.

Pour $p = 1$, on peut considérer pour $n \geqslant 2$ la fonction $f_n \in E$ affine par morceaux définie par : $f_n$ est nulle sur $[0,1] \setminus [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = n$ et $f_n$ est affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$. Voir figure 2.

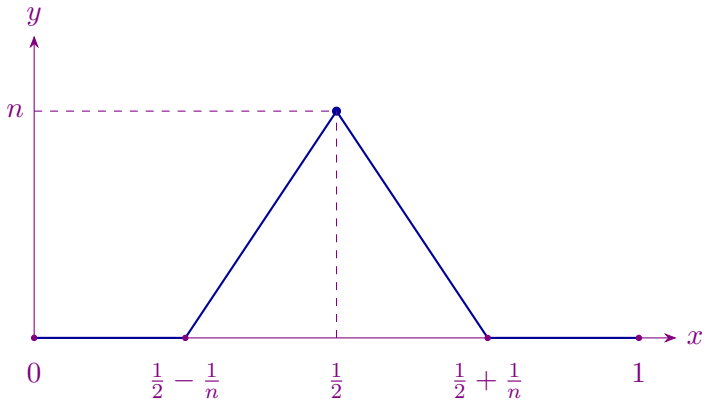



Figure 2 – Graphe de la fonction $f_n$

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on peut considérer une suite de fonctions $(f_n)_n$ de $E$ similaire, en changeant la valeur maximale : $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = a$. On peut alors simplement majorer $f_n$ par $n^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]}$ et obtenir

$$\|f_n\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

qui est bien borné indépendamment de $n$ tandis que $\|f_n\|_\infty = n^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

□

Indications pour l'exercice 3 :

1. Montrer que les ensembles $E_n$ définis par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n := \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \ : \ \exists x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}],\ \forall h \in (0, \frac{1}{n}],\ |f(x_0 + h) - f(x_0)| \leqslant nh \right\}.$$

sont fermés dans $(\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

2. Soit $g$ une fonction affine par morceaux sur $[0;1]$. Montrer que

$$k := \sup_{x \neq y} \left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right|$$

est borné.