Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 2 – Théorèmes de Hahn-Banach

On rappelle le théorème de Hahn–Banach (forme analytique) :

Théorème 1 (Hahn–Banach, forme analytique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application* sous-additive et positivement homogène *(une* jauge*), c'est-à-dire : pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \geqslant 0$,*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(\lambda x) = \lambda\, p(x)\,.$$

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et $L : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $L(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{L} : E \to \mathbb{R}$ prolongeant L (i.e. $\widetilde{L}_{|_F} = L$) et telle que $\widetilde{L}(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$.

Dans le cours, on a introduit $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ comme l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g), où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F, et $g : G \to \mathbb{R}$ prolonge L en restant $\leqslant p$ sur G, muni de la relation

$$(G_1, g_1) \preccurlyeq (G_2, g_2) \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \subset G_2 \text{ et } g_{2|G_1} = g_1\,.$$

Exercice 1. Vérifier que $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ est un ensemble non vide partiellement ordonné et inductif.
Indication : étant donnée une partie $Y = \{(G_i, g_i)\}_{i\in I}$ non vide totalement ordonnée de $\mathcal{G}$, on pourra vérifier que $(G, g) \in \mathcal{G}$ donné par

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i \quad \text{et} \quad g(x) = g_i(x) \text{ pour } x \in G_i$$

est bien défini et c'est un majorant de Y.

Exercice 2.
On note

- ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles absolument convergentes qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c_0 \subset \ell^\infty$ le sous-espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0, qui est complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur ℓ^∞, telle que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ait
$$\liminf_{n\to\infty} u_n \;\leqslant\; L(u) \;\leqslant\; \limsup_{n\to\infty} u_n.$$
2. Montrer que le dual de c_0 s'identifie isométriquement à ℓ^1 via la bijection linéaire
$$u \in \ell^1 \mapsto \left(L_u : c_0 \to \mathbb{R},\, v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right) \in (c_0)^*\,.$$

3. Construire un élément $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ tel qu'il n'existe pas $u \in \ell^1$ satisfaisant

$$\Lambda(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \qquad \forall v \in \ell^\infty .$$

Théorème 2 (Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Tout point de* $\mathrm{co}(A)$ *s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $d+1$ points de A.*

Exercice 3.

1. Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Montrer que

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ : \ k \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in A,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

2. Prouver le théorème de Carathéodory.
3. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors $\mathrm{co}(A)$ est compacte.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel normé réel, $U \subset E$ un ouvert non vide et $L \in E^*$, $L \neq 0$. Alors L n'atteint pas $\sup_U L$ sur U (si ce sup est fini).

Exercice 5. On rappelle qu'un espace métrique (ou un espace topologique) X est dit séparable s'il existe une partie $D \subset X$ qui est dénombrable et dense dans X.
Montrer que, pour un espace métrique séparable X, toute partie $A \subset X$ (munie de la distance induite) est également séparable.
(facultatif) Est-ce encore vrai dans le cas d'un espace topologique (X, τ) non nécessairement métrisable ?

On rappelle le corollaire suivant du théorème de Hahn–Banach.

Corollaire 3 (Critère de densité)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est dense dans E si et seulement si pour toute forme linéaire continue $L \in E^*$, $\big(L_{|F} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0\big)$.*

Exercice 6. Prouver le corollaire précédent.

Exercice 7 (Unicité du prolongement de Hahn–Banach et stricte convexité de la boule unité)**.** Soit E un espace vectoriel normé.

1. On suppose que la boule unité fermée $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ du dual de E n'est pas strictement convexe. Montrer qu'il existe F sous-espace vectoriel de E et $L : F \to \mathbb{R}$ tels qu'il n'y a pas unicité du prolongement linéaire continu de L à E de norme égale à $\|L\|_{F^*}$ (donné par Hahn–Banach ou plus précisément par le corollaire permettant de prolonger une forme linéaire continue).
   Indication.– On pourra se donner L_1, $L_2 \in E^*$, $L_1 \neq L_2$ satisfaisant $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = 1$ et $[L_1, L_2] \subset \partial B_{E^*}(0,1)$, et considérer : $F = \ker(L_1 - L_2)$ et $L = L_{1|F} = L_{2|F}$. Commencer par le cas où E est de dimension finie peut vous aider.
2. Soit F un espace vectoriel normé isométriquement isomorphe à E, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective $\Phi : E \to F$ qui est une isométrie (pour tout $x \in E$, $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$). Vérifier que $B_E(0,1)$ est strictement convexe si et seulement si $B_F(0,1)$ l'est.
3. Rappeler(?) pourquoi le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Sa boule unité fermée est-elle strictement convexe ?