Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 2 – Théorèmes de Hahn-Banach

On rappelle le théorème de Hahn–Banach (forme analytique) :

Théorème 1 (Hahn–Banach, forme analytique)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application* sous-additive et positivement homogène *(une* jauge*), c'est-à-dire : pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \geqslant 0$,*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(\lambda x) = \lambda\, p(x)\,.$$

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et $L : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $L(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{L} : E \to \mathbb{R}$ prolongeant L (i.e. $\widetilde{L}_{|F} = L$) et telle que $\widetilde{L}(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$.

Dans le cours, on a introduit $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ comme l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g), où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F, et $g : G \to \mathbb{R}$ prolonge L en restant $\leqslant p$ sur G, muni de la relation

$$(G_1, g_1) \preccurlyeq (G_2, g_2) \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \subset G_2 \text{ et } g_{2|G_1} = g_1\,.$$

Exercice 1. Vérifier que $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$ est un ensemble non vide partiellement ordonné et inductif.
Indication : étant donnée une partie $Y = \{(G_i, g_i)\}_{i\in I}$ non vide totalement ordonnée de $\mathcal{G}$, on pourra vérifier que $(G, g) \in \mathcal{G}$ donné par

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i \quad \text{et} \quad g(x) = g_i(x) \text{ pour } x \in G_i$$

est bien défini et c'est un majorant de Y.

Solution de l'exercice 1. Reprenons

$$\mathcal{G} = \{(G, g) : F \subset G \subset E \text{ sous-espace},\ g : G \to \mathbb{R} \text{ prolonge } L,\ g \leqslant p \text{ sur } G\}\,,$$

qui contient (F, L) (non vide) et

$$(G_1, g_1) \leqslant (G_2, g_2) \iff G_1 \subset G_2 \text{ et } g_{2|G_1} = g_1.$$

- *Réflexivité* : $G \subset G$ et $g_{|G} = g$.
- *Anti-symétrie* : si $(G_1, g_1) \preccurlyeq (G_2, g_2)$ et $(G_2, g_2) \preccurlyeq (G_1, g_1)$, alors $G_1 \subset G_2$ et $G_2 \subset G_1$, donc $G_1 = G_2$ et de plus $g_{2|G_1} = g_1$ avec $G_1 = G_2$ donne $g_2 = g_1$.
- *Transitivité* : si $G_1 \subset G_2 \subset G_3$ et $g_{2|G_1} = g_1$, $g_{3|G_2} = g_2$, alors $g_{3|G_1} = (g_{3|G_2})_{|G_1} = g_{2|G_1} = g_1$, donc $(G_1, g_1) \preccurlyeq (G_3, g_3)$.

C'est bien une relation d'ordre (partiel, pas total en général : deux prolongements incomparables de L à des sous-espaces différents et non inclus l'un dans l'autre ne se comparent pas).
Vérifions à présent l'inductivité. Soit $Y = \{(G_i, g_i)\}_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{G}$. Si $Y = \emptyset$, alors $(F, L) \in X$ est un majorant. On suppose à présent $Y \neq \emptyset$ et on va donner un majorant $(G, g) \in \mathcal{G}$ de Y. Posons d'abord

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i\,.$$

Pour tout $i \in I$, $F \subset G_i$ donc $F \subset G$. Il reste bien sûr à vérifier que G est un bien un sous-espace vectoriel de E (ce n'est certainement pas le cas d'une réunion de sous-espaces vectoriels en général). Définissons d'abord $g : G \to \mathbb{R}$. Pour $x \in G$, il existe $i \in I$ tel que $x \in G_i$ et on aimerait définir $g(x) = g_i(x)$. Pour cela, il nous faut vérifier que si $i, j \in I$ satisfont $x \in G_i \cap G_j$ alors $g_i(x) = g_j(x)$. En utilisant à nouveau que Y est totalement ordonné, (G_i, g_i) et (G_j, g_j) sont comparables. Par exemple $G_i \subset G_j$ et g_j prolonge g_i de sorte que g_i et g_j coïncident sur G_i et a fortiori en x.
On vérifie à présent que G est un sous-espace vectoriel de E et g est linéaire. Soient $x, y \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $i, j \in I$ tels que $x \in G_i$, $y \in G_j$. Comme Y est totalement ordonnée, (G_i, g_i) et (G_j, g_j) sont comparables, par exemple disons $(G_i, g_i) \preccurlyeq (G_j, g_j)$. On a alors $G_i \subset G_j$ et donc $x, y \in G_j$, donc $\lambda x + \mu y \in G_j \subset G$ (car G_j est un sous-espace vectoriel) et

$$g(\lambda x + \mu y) = g_j(\lambda x + \mu y) = \lambda g_j(x) + \mu g_j(y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$$

par linéarité de g_j.
Vérifions que g prolonge L à G. Soit $x \in F$ et $i \in I$ ($Y \neq \emptyset$), on a alors $x \in G_i$ et $g_i(x) = L(x)$ (car g_i prolonge L par définition de $\mathcal{G}$).
Vérifions enfin que $g \leqslant p$ sur G. Soit $x \in G$ et $i \in I$ tel que $x \in G_i$, on a alors $g(x) = g_i(x) \leqslant p(x)$ (à nouveau par définition de $\mathcal{G}$).
On vient d'établir que $(G, g) \in \mathcal{G}$, et pour tout $i \in I$, $(G_i, g_i) \preccurlyeq (G, g)$: (G, g) est un majorant de Y dans $\mathcal{G}$. □

Exercice 2.
On note

- ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles absolument convergentes qui est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c_0 \subset \ell^\infty$ le sous-espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0, qui est complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur ℓ^∞, telle que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ait
$$\liminf_{n\to\infty} u_n \ \leqslant\ L(u)\ \leqslant\ \limsup_{n\to\infty} u_n.$$
2. Montrer que le dual de c_0 s'identifie isométriquement à ℓ^1 via la bijection linéaire
$$u \in \ell^1 \mapsto \left(L_u : c_0 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right) \in (c_0)^* .$$
3. Construire un élément $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ tel qu'il n'existe pas $u \in \ell^1$ satisfaisant
$$\Lambda(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \qquad \forall v \in \ell^\infty .$$

Solution de l'exercice 2.

1. On remarque tout d'abord qu'il y a de la redondance dans ce qu'on demande. Plus précisément, si $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire qui satisafait l'inégalité de droite : pour tout $u \in \ell^\infty$, $L(u) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n$, alors L satisfait automatiquement l'inégalité de gauche. En effet, par linéarité
$$-L(u) = L(-u) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to\infty} u_n\,,$$
et donc $L(u) \geqslant \liminf_{n\to\infty} u_n$.
L'inégalité de droite suggère de considérer $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, $p(u) = \limsup_{n\to\infty} u_n$ comme jauge. Tout d'abord, pour $u \in \ell^\infty$ on a bien $\limsup_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}$ $(< +\infty)$ et p est bien définie. De plus p est bien positivement homogène et sous-additive par propriété de la limite supérieure, c'est bien une jauge.
Vérifions qu'on peut appliquer le théorème de Hahn–Banach avec le sous-espace vectoriel $F = c_0$ et la forme linéaire $L_0 = 0$ sur F. On a bien, pour tout $u \in c_0$,
$$p(u) = \limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \geqslant L_0(u)\,.$$
D'après le théorème de Hahn–Banach analytique, il existe une forme linéaire $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ qui prolonge L_0 et telle que pour tout $u \in \ell^\infty$, $L(u) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n$.
2. Soit $u \in \ell^1$, l'application linéaire $L_u : c_0 \to \mathbb{R}$, est bien définie, en effet $|u_n v_n| \leqslant |u_n| \, \|v\|_\infty$ de sorte que
$$|L_u(v)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right| \leqslant \|v\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|v\|_\infty \, \|u\|_1$$
et de plus $\|L_u\|_{(c_0)^*} \leqslant \|u\|_1$. Montrons que $u \mapsto L_u$ est une isométrie (en particulier injective).
Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit la suite $v^{(k)} \in c_0$ définie par $v_n^{(k)} = \operatorname{sgn}(u_n)$ pour $n \leqslant k$, et $v_n^{(k)} = 0$ si $n \geqslant k+1$. On a $\left\|v^{(k)}\right\|_\infty \leqslant 1$ et
$$L_u(v^{(k)}) = \sum_{n=0}^{k} |u_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1$$
de sorte que $\|L_u\|_{(c_0)^*} \geqslant \sup_k \dfrac{L_u(v^{(k)})}{\left\|v^{(k)}\right\|_\infty} \geqslant \sup_k L_u(v^{(k)}) = \|u\|_1$.
Combiné à l'inégalité précédente, $\|L_u\|_{(c_0)^*} = \|u\|_1$ et $u \mapsto L_u$ est une isométrie linéaire $\ell^1 \to (c_0)^*$.
Il reste à vérifier la surjectivité de cette isométrie, soit $\Lambda \in (c_0)^*$. On veut écrire $\Lambda = L_u$ pour $u \in \ell^1$, c'est-à-dire, pour tout $v \in c_0$,
$$\Lambda(v) = L_u(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$
Définissons pour $k \in \mathbb{N}$, la suite $e^{(k)} = \left(\delta_{k,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de sorte que tous les termes de $e^{(k)}$ sont nuls sauf le k^{ieme} qui vaut 1 ; on a $e^{(k)} \in c_0$ et $\left\|e^{(k)}\right\|_\infty = 1$. On peut ainsi tester l'égalité précédente avec $v = e^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on obtient
$$\Lambda\left(e^{(k)}\right) = u_k$$
ce qui nous donne un unique candidat potentiel u.

On définit ainsi la suite u de terme général $u_n = \Lambda(e^{(n)})$. Vérifions que $u \in \ell^1$. Par linéarité de Λ,

$$\Lambda(v^{(k)}) = \sum_{n=0}^{k} \operatorname{sgn}(u_n)\, \Lambda(e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{k} \operatorname{sgn}(u_n)\, u_n = \sum_{n=0}^{k} |u_n|.$$

Or $|\Lambda(v^{(k)})| \leqslant \|\Lambda\|_{(c_0)^*} \left\|v^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \|\Lambda\|_{(c_0)^*}$. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |u_n| \leqslant \|\Lambda\|_{(c_0)^*}$ et en faisant $k \to \infty$, $u \in \ell^1$ (avec $\|u\|_1 \leqslant \|\Lambda\|_{(c_0)^*}$).
Il reste à vérifier que $\Lambda = L_u$. Ces deux formes linéaires continues coïncident sur le sous-espace vectoriel des suites à support fini qui est dense dans c_0 pour $\|\cdot\|_\infty$, elles coïncident donc sur c_0.
À la main : soit $w \in c_0$ et $w^{(k)}$ la suite w tronquée au rang k, on a alors $\left\|w - w^{(k)}\right\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
En effet, comme $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \left\|w - w^{(k)}\right\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \max_{n\geqslant k+1} |w_n| = \limsup_{n\to\infty} |w_n| = 0\,.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda\big(w^{(k)}\big) = \sum_{n=0}^{k} w_n \Lambda(e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{k} w_n u_n = L_u\big(w^{(k)}\big)$$

Par continuité de L_u et Λ, on peut passer à la limite $k \to \infty$ dans l'égalité précédente et on obtient $\Lambda(w) = L_u(w)$.

3. Prenons $\Lambda = L$ introduite en 1. Montrons que cette forme est bien continue. Pour tout $u \in \ell^\infty$, on a

$$L(u) \leqslant \limsup_n u_n \leqslant \|u\|_\infty \text{ et } L(u) \geqslant -\limsup_n(-u_n) \geqslant -\|u\|_\infty,$$

donc $|L(u)| \leqslant \|u\|_\infty$ et $\|L\|_{(l^\infty)^*} \leqslant 1$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in \ell^1$ tel que $\Lambda(v) = L_u(v)$ pour tout $v \in \ell^\infty$ (en particulier sur $c_0 \subset \ell^\infty$).
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $v = e^{(k)} \in c_0$, on a

$$\liminf_{n\to\infty} v_n = \limsup_{n\to\infty} v_n$$

(la suite v est nulle à partir d'un certain rang), donc par l'encadrement de la question 1, $L(v) = 0$. On a donc

$$L_u(v) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n = u_k = 0$$

et donc u est la suite nulle et $\Lambda = L_u = 0$. Mais pour $v = \mathbb{1} = (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$ (suite constante égale à 1), on a

$$\liminf_{n\to\infty} v_n = \limsup_{n\to\infty} v_n = 1$$

donc $\Lambda(v) = 1$: contradiction.
Donc Λ n'est représentable par aucun $u \in \ell^1$.

□

Théorème 2 (Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Tout point de* $\mathrm{co}(A)$ *s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $d+1$ points de A.*

Exercice 3.

1. Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Montrer que
$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ : \ k \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in A,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$
2. Prouver le théorème de Carathéodory.
3. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors $\mathrm{co}(A)$ est compacte.

Solution de l'exercice 3.

1. Notons Σ l'ensemble du membre de droite. Soit $y \in \Sigma$. Par définition, y s'écrit comme combinaison convexe d'éléments de A et donc de $\mathrm{co}(A)$ puisque $A \subset \mathrm{co}(A)$, et comme $\mathrm{co}(A)$ est convexe, on en déduit que $y \in \mathrm{co}(A)$.
   Réciproquement, Σ est un ensemble convexe (car stable par combinaisons convexes) qui contient A donc $\mathrm{co}(A) \subset \Sigma$.
2. Soit $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \mathrm{co}(A)$ avec $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$ et on suppose qu'on a choisi $k \in \mathbb{N}^*$ minimal pour écrire x comme combinaison convexe d'éléments de A, en particulier, on suppose $\lambda_i > 0$ pour tout $i \leqslant k$. Montrons que $k \leqslant d+1$. Par l'absurde, supposons $k \geqslant d+2$.
   • On va montrer qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ réels non tous nuls et tels que
   $$\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0\,,$$
   ce qui nous donnera plein de façons d'écrire x comme combinaison convexe des x_i.
   La famille de $k-1 \geqslant d+1$ vecteurs $(x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1)$ est liée dans $\mathbb{R}^d$: il existe $\mu_2, \dots, \mu_k$ non tous nuls avec $\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x_i - x_1) = 0$ et on peut définir $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{k} \mu_i$, de sorte qu'on a bien la propriété voulue.
   • On vient d'établir qu'on peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\mu_i) x_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\mu_i) = 1\,.$$
   Pour tout $t \geqslant 0$, la combinaison linéaire ci-dessus est une combinaison convexe si et seulement si $\lambda_i - t\mu_i \geqslant 0$ pour tout i tel que $\mu_i > 0$ (si $\mu_i \leqslant 0$ on a automatiquement $\lambda_i - t\mu_i \geqslant 0$).
   Comme de plus les μ_i ne sont pas tous nuls et leur somme vaut 0, l'ensemble $I = \{i \ : \ \mu_i > 0\}$ n'est pas vide. Plaçons-nous à présent dans ce cas, soit $i \in I$. On a alors
   $$\lambda_i - t\mu_i \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leqslant t_i \quad \text{avec} \quad t_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$
   en choisissant $t_* = \min_{i \in I} t_i$ et i_* qui réalise ce minimum, on assure que $\lambda_i - t_* \mu_i \geqslant 0$ pour tout $i \leqslant k$ et de plus $\lambda_{i_*} - t_* \mu_{i_*} = 0$. On vient d'écrire x comme combinaison convexe
   $$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_*}}^{k} (\lambda_i - t_* \mu_i) x_i$$
   de taille $k-1$, ce qui contredit la minimalité de k.

3. Soit $\Delta_d = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}_+)^{d+1} \ : \ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \right\}$ le simplexe standard (compact). L'application

$$\varphi : \Delta_d \times A^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad (\lambda, x_0, \dots, x_d) \longmapsto \sum_{i=0}^{d} \lambda_i x_i$$

est continue, et $\Delta_d \times A^{d+1}$ est compact. Par Carathéodory, $\varphi(\Delta_d \times A^{d+1}) = \mathrm{co}(A)$ (tout point de $\mathrm{co}(A)$ s'obtient avec au plus $d+1$ points, donc en autorisant des coefficients nuls, exactement $d+1$ points suffisent toujours). On en déduit que $\mathrm{co}(A)$ est compacte.

□

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel normé réel, $U \subset E$ un ouvert non vide et $L \in E^*$, $L \neq 0$. Alors L n'atteint pas $\sup_U L$ sur U (si ce sup est fini).

Solution de l'exercice 4. On suppose $M = \sup_U L < +\infty$ (il n'y a rien à montrer sinon). Comme $L \neq 0$, il existe $v \in E$ tel que $L(v) > 0$ (quitte à considérer $-v$) et quitte à diviser v par $2\|v\|_E$, on peut supposer $\|v\|_E < 1$.
Soit $a \in U$. Vérifions que $L(a) < M$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et donc $a + rv \in U$. On a en particulier $L(a + rv) \leqslant M$ et $L(a + rv) = L(a) + rL(v)$ de sorte que $L(a) \leqslant M - rL(v) < M$ puisque $r > 0$ et $L(v) > 0$.

Correction alternative : par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in U$ tel que $L(y) = \sup_{x \in U} L(x)$. Puisque U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset U$. Ainsi, $y(1+\frac{1}{2}\delta) \in U$ et $L(y(1+\frac{1}{2}\delta)) = (1+\frac{1}{2}\delta)L(y) > L(y)$, ce qui contredit la maximalité de $L(y)$.

Remarque. De façon un peu plus générale, si E est un espace vectoriel normé et L une application linéaire non nulle, alors pour tout ouvert $U \subset E$, $L(U)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.
En effet, on peut procéder similairement, soit $v \in E$ tel que $\|v\|_E < 1$ et $L(v) \neq 0$.
Soit $a \in U$ et montrons que U contient un voisinage de a. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et donc $a + r\lambda v \in U$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$. On a en particulier $L(a + r\lambda v) \in L(U)$ et $L(a + r\lambda v) = L(a) + r\lambda L(v)$ de sorte que $B(L(a), r\,|L(v)|) \subset L(U)$. (Tout $z \in B(L(a), r\,|L(v)|)$ s'écrit $L(a) + u$ avec $u \in \mathbb{K}$ tel que $|u| < r\,|L(v)|$ ou encore $L(a) + r\lambda L(v)$ en posant $\lambda = \frac{u}{rL(v)}$ qui vérifie bien $|\lambda| < 1$.)

□

Exercice 5. On rappelle qu'un espace métrique (ou un espace topologique) X est dit séparable s'il existe une partie $D \subset X$ qui est dénombrable et dense dans X.
Montrer que, pour un espace métrique séparable X, toute partie $A \subset X$ (munie de la distance induite) est également séparable.
(facultatif) Est-ce encore vrai dans le cas d'un espace topologique (X, τ) non nécessairement métrisable ?

Solution de l'exercice 5. Soit $D = \{d_k : k \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de X. Pour chaque couple $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $B(d_k, 1/m) \cap A \neq \emptyset$, choisissons un point $x_{k,m} \in B(d_k, 1/m) \cap A$. L'ensemble $\Delta = \{x_{k,m} \ : \ k \in I \subset \mathbb{N},\ m \in J \subset \mathbb{N}^*\}$ est bien dénombrable.

Vérifions que Δ est dense dans A. Soit $x \in A$ et $\varepsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Par densité de D dans X, il existe $d_k \in D$ avec $d(x, d_k) < \frac{1}{m}$. On a alors $x \in B(d_k, \frac{1}{m}) \cap A$ (en particulier $\neq \emptyset$), de sorte que

$$d(x, x_{k,m}) \leqslant d(x, d_k) + d(d_k, x_{k,m}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon\,.$$

C'est encore vrai dans le cadre d'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. C'est faux en toute généralité. On peut construire un contre-exemple en considérant $\mathbb{R}$ muni de la topologie τ dont une base d'ouverts est formée par les intervalles semi-ouverts de la forme $[a, b[$, (bien stable par intersection finie : $[a, b[\cap[c, d[= [\max(a, c), \min(b, d)[$) de sorte que les ouverts de τ sont les réunions quelconques $\cup_{i\in I}[a_i, b_i[$. On vérifie que $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \tau)$: tout ouvert U non vide contient un $[a, b[$, $a < b$, qui contient lui-même un rationnel. On remarque que cette topologie contient les ouverts "habituels" (par exemple $]a, b[= \cup_n[a + \frac{1}{n}, b[$) et d'autres ouverts additionnels.
On considère maintenant l'espace produit $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie produit τ^2 induite par τ dont une base d'ouverts est formée des rectangles $[a, b[\times[c, d[$. On vérifie similairement que $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $(\mathbb{R}^2, \tau^2)$ qui est bien séparable. En revanche, si on considère la diagonale $A = \{(x, -x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, on peut vérifier qu'elle n'est pas séparable. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ de sorte que $(x_0, -x_0) \in A$ et soit $U_{x_0} = [x_0, x_0 + 1[\times[-x_0, -x_0 + 1[$ ouvert, on a alors $U_{x_0} \cap A = \{(x_0, -x_0)\}$ ouvert de A pour la topologie induite. Tous les singletons de A sont ouverts, on vient d'établir que la topologie induite sur A est la topologie discrète, ainsi, la seule partie de A qui est dense dans A est A. Finalement, A n'est pas séparable car A n'est pas dénombrable.
L'espace topologique $(\mathbb{R}^2, \tau^2)$ qu'on vient de présenter s'appelle le plan de Sorgenfrey. □

On rappelle le corollaire suivant du théorème de Hahn–Banach.

Corollaire 3 (Critère de densité)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est dense dans E si et seulement si pour toute forme linéaire continue $L \in E^*$, $\big(L_{|F} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0\big)$.*

Exercice 6. Prouver le corollaire précédent.

Preuve du corollaire 3. Le sens direct est le plus facile : si L est nulle sur F, par continuité elle est nulle sur $\overline{F}$ et $\overline{F} = E$ puisqu'on suppose que F est dense dans E.
Passons à la réciproque qu'on va prouver pas contraposée. Supposons que F n'est pas dense dans E et montrons qu'il existe une forme linéaire continue $L \in E^*$ qui s'annule sur F et qui n'est pas identiquement nulle. Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. On peut considérer le sous espace vectoriel $H = \overline{F} + \mathbb{K}x_0$ et définir $L : H \to \mathbb{K}$ linéaire sur H par $L_{|\overline{F}} = 0$ et $L(x_0) = 1$. Vérifions que L est continue. Soit $y \in H$, il existe un unique $(x, t) \in \overline{F} \times \mathbb{K}$ tel que $y = x + tx_0$ et on a alors

$$|L(y)| = |L(x) + tL(x_0)| = |t|\ .$$

Faisons un dessin (Figure 1) et essayons de transcrire ce qu'on observe sans utiliser de structure euclidienne (pas de Pythagore !) parce qu'on n'a pas supposé que E était muni d'une telle structure ... En revanche, on voit apparaître une application du théorème de Thalès, qu'on va traduire par l'homogénéité de la fonction distance à un sous-espace vectoriel.
Posons $d := \operatorname{dist}(x_0, \overline{F}) = \inf_{z\in\overline{F}} \|x_0 - z\|_E$. Comme $\overline{F}$ est *fermé* et $x_0 \notin \overline{F}$, on a $d > 0$.
Si $t = 0$, $|L(y)| = 0 \leqslant \|y\|_E$ et on a l'inégalité voulue. Supposons $t \neq 0$, comme $x \in \overline{F}$ et par homogénéité de $\operatorname{dist}(\cdot, \overline{F})$ (qui découle directement de l'homogénéité de $\|\cdot\|_E$),

$$\operatorname{dist}(y, \overline{F}) = \operatorname{dist}(y - x, \overline{F}) = \operatorname{dist}(tx_0, \overline{F}) = |t| \operatorname{dist}(x_0, \overline{F}) = |t|\, d$$

et comme $0 \in \overline{F}$, $\|y\|_E = \|y-0\|_E \geqslant \operatorname{dist}(y, \overline{F})$. On a donc bien $|L(y)| \leqslant \frac{1}{d}\|y\|_E$, L est continue. On peut appliquer le corollaire du théorème de Hahn–Banach afin d'étendre L en une forme linéaire continue $\widetilde{L} : E \to \mathbb{K}$ qui s'annule sur F et n'est pas identiquement nulle. Par contraposée, on conclut la preuve du corollaire.

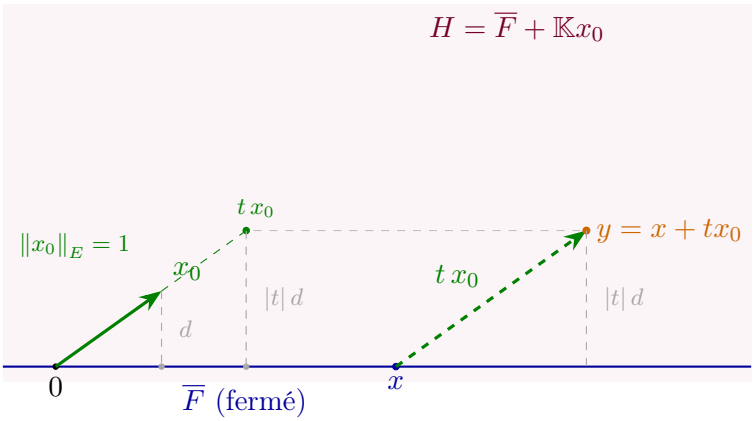


FIGURE 1

□

Exercice 7 (Unicité du prolongement de Hahn–Banach et stricte convexité de la boule unité)**.** Soit E un espace vectoriel normé.

1. On suppose que la boule unité fermée $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ du dual de E n'est pas strictement convexe. Montrer qu'il existe F sous-espace vectoriel de E et $L : F \to \mathbb{R}$ tels qu'il n'y a pas unicité du prolongement linéaire continu de L à E de norme égale à $\|L\|_{F^*}$ (donné par Hahn–Banach ou plus précisément par le corollaire permettant de prolonger une forme linéaire continue).
   Indication.– On pourra se donner L_1, $L_2 \in E^*$, $L_1 \neq L_2$ satisfaisant $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = 1$ et $[L_1, L_2] \subset \partial B_{E^*}(0,1)$, et considérer : $F = \ker(L_1 - L_2)$ et $L = L_{1|F} = L_{2|F}$. Commencer par le cas où E est de dimension finie peut vous aider.
2. Soit F un espace vectoriel normé isométriquement isomorphe à E, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective $\Phi : E \to F$ qui est une isométrie (pour tout $x \in E$, $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$). Vérifier que $B_E(0,1)$ est strictement convexe si et seulement si $B_F(0,1)$ l'est.
3. Rappeler(?) pourquoi le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Sa boule unité fermée est-elle strictement convexe ?

Solution de l'exercice 7.

1. Supposons $\overline{B_{E^*}(0,1)}$ non strictement convexe : il existe $L_1 \neq L_2 \in E^*$, $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = 1$, telles que $[L_1, L_2] \subset \partial B_{E^*}(0,1)$.
   Posons $T := L_1 - L_2 \in E^* \setminus \{0\}$, alors $F = \ker T$ est un hyperplan fermé de E (codimension 1), et par définition, L_1 et L_2 coïncident sur F, on note $L = L_{1|F} = L_{2|F}$. On a $\|L\|_{F^*} \leqslant \|L_1\|_{E^*} = 1$ (restriction d'une application de norme 1). Montrons à présent que $\|L\|_{F^*} = 1$ afin de pouvoir conclure.
   Soit $\zeta = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$, $\zeta \in [L_1, L_2]$ donc $\|\zeta\|_{E^*} = 1$.
   Dans le cas où E est de dimension finie, la sphère unité est compacte et il existe donc $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\|_E = 1$ et $|\zeta|(x_0) = 1$, et quitte à considérer plutôt $-x_0$, on peut supposer

$\zeta(x_0) = 1$. On a alors $L_1(x_0) + L_2(x_0) = 2$ et comme $L_i(x_0) \leqslant \|L_i\|_{E^*} \|x_0\|_E = 1$ on en déduit $L_1(x_0) = L_2(x_0) = 1$. En particulier, $x_0 \in F$ et donc $\|L_1\|_{F^*} = \|L_2\|_{F^*} = 1$.

Si E n'est pas supposé de dimension finie, on effectue un raisonnement similaire même si la perte de compacité nous complique un peu la vie. Comme $\|\zeta\|_{E^*} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\|_E = 1$ et $|\zeta(x_n)| \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ ou encore, quitte à considérer $-x_n$, $\zeta(x_n) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$. On a alors $L_1(x_n) + L_2(x_n) \geqslant 2 - \frac{2}{n}$ et comme pour $i = 1, 2$, $L_i(x_n) \leqslant 1$, on en déduit

$$L_i(x_n) \geqslant 1 - \frac{2}{n} \qquad \text{et} \qquad L_i(x_n) \to 1\,,$$

donc en particulier $|T(x_n)| = |L_1(x_n) - L_2(x_n)| \leqslant \frac{2}{n}$ et x_n est "proche" de $F = \ker T$. Soit $v_0 \in E$ tel que $T(v_0) \neq 0$, on peut définir

$$y_n = x_n - \frac{T(x_n)}{T(v_0)} v_0 \in F$$

(rassurez-vous ce y_n ne sort pas du chapeau, on a $E = \ker T \oplus \mathbb{R}v_0$ et y_n est la projection de x_n sur F parallèlement à $\mathbb{R}v_0$). On en déduit :

$$\|x_n - y_n\|_E \leqslant \frac{|T(x_n)|}{|T(v_0)|} \|v_0\|_E \leqslant C_0 \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{avec} \quad C_0 = \frac{\|v_0\|_E}{T(v_0)}\,.$$

On va montrer que la $\|L_1\|_{E^*}$ est "réalisée" (au sens du sup) par la suite $(y_n)_n$ d'élements de F, qui est la suite projetée de $(x_n)_n$ sur F (parallèlement à un supplémentaire qu'on s'est donné, son choix n'importe pas ici). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - C_0 \frac{2}{n} \leqslant \|x_n\|_E - \|y_n - x_n\|_E \leqslant \|y_n\|_E \leqslant \|x_n\|_E + \|y_n - x_n\|_E \leqslant 1 + C_0 \frac{2}{n}$$

de sorte que $\|y_n\|_E \to 1$ et par continuité de L_1 et choix de $(x_n)_n$,

$$L(y_n) = L_1(y_n) = L_1(x_n) + L_1(y_n - x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + L_1(0) = 1\,.$$

On a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|L(y_n)|}{\|y_n\|_E} = 1$ donc $\|L\|_{F^*} = 1$ (on savait déjà que $\|L\|_{F^*} \leqslant 1$).

Pour conclure, L_1 et L_2 sont deux prolongements linéaires continus distincts de L satisfaisant bien $\|L_1\|_{E^*} = \|L_2\|_{E^*} = \|L\|_{F^*}$.

2. Comme Φ est une isométrie bijective, elle envoie la sphère unité de E sur la sphère unité de F. Et comme Φ est de plus linéaire, elle envoie tout segment $[x, y] \subset E$ sur le segment $[\Phi(x), \Phi(y)] \subset F$ (par linéarité : $\Phi(\theta x + (1-\theta)y) = \theta\Phi(x) + (1-\theta)\Phi(y)$).

   Par symétrie de l'énoncé ($\Phi^{-1} : F \to E$ est automatiquement une isométrie linéaire bijective), supposons par exemple que $\overline{B_E(0,1)}$ n'est pas strictement convexe : il existe $x, y \in E$ tels que $\|x\|_E = \|y\|_E = 1$, $x \neq y$, tels que le segment $[x, y]$ est entièrement inclus dans la sphère unité de E. Alors $\overline{x} = \Phi(x)$ et $\overline{y} = \Phi(y)$ sont distincts (injectivité de Φ) et appartiennent à la sphère unité de F, de même que $[\overline{x}, \overline{y}]$ (car Φ envoie les points de la sphère unité de E sur la sphère unité de F). Donc $\overline{B_F(0,1)}$ n'est pas non plus strictement convexe.

3. Le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est $\Lambda = \{L_{(\alpha,\beta)} : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha u + \beta v \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ muni de la norme duale

$$\left\|L_{(\alpha,\beta)}\right\| = \sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2, |u|+|v|=1} |\alpha u + \beta v| \leqslant \max(|\alpha|, |\beta|)(|u| + |v|) = \|(\alpha, \beta)\|_\infty$$

donc $\left\|L_{(\alpha,\beta)}\right\| \leqslant \|(\alpha,\beta)\|_\infty$. Par ailleurs, si par exemple $|\alpha| = \max(\alpha,\beta)$, on peut prendre $(u,v) = (1,0)$ et on a bien $|u|+|v| = 1$ et $|L(u,v)| = |\alpha| = \|(\alpha,\beta)\|_\infty$ d'où $\left\|L_{(\alpha,\beta)}\right\| = \|(\alpha,\beta)\|_\infty$. Le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ via

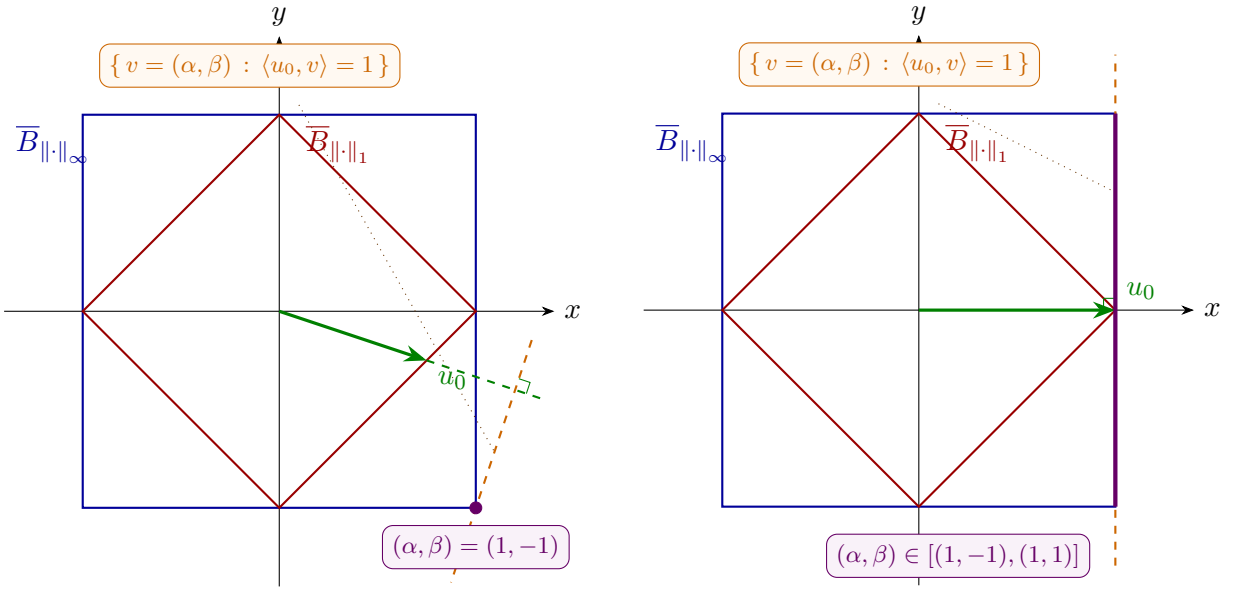
$$\mathbb{R}^2 \to \Lambda, \quad (\alpha,\beta) \mapsto L_{(\alpha,\beta)}\,.$$

Le dual de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ dont la boule unité fermée n'est pas strictement convexe : le bord de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un carré de sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ qui contient notamment le segment $\{(1,\beta) : \beta \in [-1,1]\}$.

Attention, cet exercice ne dit pas : "il n'y a pas unicité du prolongement de Hahn–Banach pour tout choix de F et L... Par exemple, toujours dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, considérons $F = \operatorname{vect}(u_0)$ pour $u_0 \notin \{\pm e_1, \pm e_2\}$ et $\|u_0\|_1 = 1$ (n'importe quelle droite différente des deux axes canoniques). On peut écrire toute forme linéaire (continue) sous la forme $L : tu_0 \in F \mapsto tL(u_0)$ et la question de l'unicité ne change pas si on multiplie L par un scalaire, donc on peut supposer $L(u_0) = 1$ (et en particulier $\|L\| = |L(u_0)| = 1$). En écrivant $u_0 = (x_0, y_0)$ les prolongements possibles de L sont les applications linéaires $L_{(\alpha,\beta)}$ satisfaisant $L_{(\alpha,\beta)}(u_0) = 1$ i.e. $\alpha x_0 + \beta y_0 = 1$ et $\max(|\alpha|, |\beta|) = 1$. On vérifie qu'il y a une seule solution pour (α,β) qui est l'un des sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ de la boule unité pour $\|\|_\infty$. Sauf dans les cas qu'on a exclus $u_0 \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$ et dans chacun de ces cas on a une infinité de solutions (un des côtés de la boule unité pour $\|\|_\infty$). Si par exemple $x_0 > 0$ et $y_0 < 0$, $1 = |x_0| + |y_0| = x_0 - y_0$ et

$$\alpha x_0 + \beta y_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha x_0 + \beta y_0 = x_0 - y_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha-1)x_0 + (\beta+1)y_0 = 0$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\alpha - 1, \beta + 1) = \lambda u_0^\perp$ ou encore $(\alpha,\beta) = (1,-1) + \lambda u_0^\perp$



(a) u_0 générique (intérieur d'une arête, $x > 0, y < 0$) : unicité, $(\alpha,\beta) = (1,-1)$.

(b) u_0 à un sommet de $\overline{B}_{\ell^1}$: non-unicité, $(\alpha,\beta) \in \{1\} \times [-1,1]$.

FIGURE 2 – Unicité (à gauche) contre non-unicité (à droite) du point $v \in \overline{B}_{\ell^\infty}$ tel que $\langle u_0, v\rangle = 1$, selon la position de u_0 sur $\partial\overline{B}_{\ell^1}$

□