Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 3 – Topologies faible et faible étoile

Théorème 1 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction μ-intégrable et $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $u \circ f$ soit intégrable. Alors*

$$u\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) \leqslant \int_\Omega u \circ f(x)d\mu(x).$$

Exercice 1. Soit X un espace vectoriel réel et soit C un convexe fermé non vide de X.

1. Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions affines sur C à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in C$, $\sup_{i\in I} \varphi_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction u définie par $u = \sup_{i\in I} \varphi_i$ est convexe.
2. Montrons à présent la réciproque. Soit $u : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.
   (a) Soit l'ensemble $K = \{(x, a) \in C \times \mathbb{R} : \ u(x) \leqslant a\}$. Montrer que K est un convexe fermé de $X \times \mathbb{R}$.
   (b) Soit $x_0 \in C$. Montrer que pour tout $r < u(x_0)$, il existe une forme linéaire $L \in X^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\forall x \in C, \ L(x) + \lambda u(x) < L(x_0) + \lambda r.$$
   (c) En déduire qu'il existe une fonction affine $\varphi_{x_0,r} : C \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{x_0,r} \leqslant u$ et $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$.
   (d) Montrer qu'il existe une famille de fonction affines $(\varphi_i)_{i\in I}$ telle que $u = \sup_{i\in I} \varphi_i$.
3. Montrer l'inégalité de Jensen.

On rappelle qu'on note $\tau_{\mathcal{F}}$ la toplogie initiale associée à une famille d'applications $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$, où pour tout $i \in I$, f_i est définie sur X et à valeurs dans un espace topologique Y_i. On a vu en cours sans le démontrer :

Proposition 2 (Caractérisation de la continuité d'une fonction à valeurs dans X)**.** *Soit Z un espace topologique et $g : Z \to X$. Alors g est continue (pour $(X, \tau_{\mathcal{F}})$) si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue.*

Exercice 2.

1. Prouver la proposition 2.
2. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est fortement continue si et seulement si elle est faiblement continue :
   $$T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F) \text{ continue} \quad \iff \quad T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*)) \text{ continue}.$$

Soit (X, μ) un espace mesuré, on "rappelle" qu'on peut identifier $(\mathrm{L}^2(X, \mu))^*$ à lui-même via l'isomorphisme isométrique

$$\mathrm{L}^2(X, \mu) \to (\mathrm{L}^2(X, \mu))^*, \quad f \mapsto \left(g \in \mathrm{L}^2(X, \mu) \mapsto \int_X fg \, d\mu\right).$$

C'est une conséquence du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Exercice 3. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, [1] $\varphi \neq 0$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \varphi(\cdot - n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(u_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 et pas fortement dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \sqrt{n}\varphi(n\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(v_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 et pas fortement dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Exemple d'espace non réflexif)**.** On rappelle les notations

- ℓ^∞ est l'ensemble des suites réelles bornées, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$,
- ℓ^1 est l'ensemble des suites réelles absolument convergentes, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

De plus, c_0 est le sous-espace vectoriel

$$c_0 = \{u = (u_n)_n \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty \,,$$

muni de $\|\cdot\|_\infty$. On va montrer qu'il n'est pas réflexif.

1. Montrer que c_0 est séparable et que ℓ^∞ ne l'est pas.
2. On rappelle que $(c_0)^* \simeq \ell^1$ via l'isométrie $I_1 : \ell^1 \to (c_0)^*$, $v \mapsto L_v$ où $L_v : c_0 \to \mathbb{K}$, $u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. On introduit l'application adjointe de I_1, $I_1^* : (c_0)^{**} \to (\ell^1)^*$ définie par

$$I_1^*(\xi) = \xi \circ I_1, \quad \forall \xi \in (c_0)^{**} \,.$$

   Montrer que I_1^* est une isométrie linéaire bijective.
3. En déduire que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.

Exercice 5 (Épigraphe, convexité et semi-continuité inférieure)**.** Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie τ et $f : A \subset E \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'*épigraphe* de f est

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y \geqslant f(x)\}.$$

On rappelle également que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en $x_0 \in A$ si,

$$\forall \lambda < f(x_0), \text{ il existe } V \text{ voisinage de } x_0 \text{ dans } A, \ \forall x \in V, \ f(x) > \lambda \,,$$

Dans le cas où (E, τ) est métrisable, on dispose d'une caractérisation séquentielle de la semi continuité inférieure (qu'on n'utilisera pas ici) : f est s.c.i. en $x_0 \in A$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers x_0, on a

$$f(x_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \,.$$

On dit que f est semi-continue inférieurement sur A si elle l'est en tout point de A.

1. Montrer que

$$f \text{ est semi-continue inférieurement} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{epi}(f) \text{ est fermé dans } A \times \mathbb{R} \,.$$

2. On suppose de plus que A est convexe. Montrer que

$$f \text{ est convexe} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{epi}(f) \text{ est convexe.}$$

1. Si vous n'en avez jamais vu, on en reparlera bientôt...

3. On suppose que A est convexe et fortement fermé dans E. En déduire que si f est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme, alors f est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
   Que dire de l'implication réciproque ?

Exercice 6. Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞ sont définis dans l'exercice 4.

1. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, vérifier que $L_u : \ell^1 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ est bien définie et que c'est une forme linéaire continue : $L_u \in (\ell^1)^*$.
2. Vérifier que l'application $I : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, $u \mapsto L_u$ est linéaire continue et bijective qui est de plus isométrique.
3. On considère le sous-espace vectoriel
$$c_0 = \{u = (u_n)_n \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty.$$
   Vérifier que c_0 est convexe, fermé pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et qu'il n'est pas faiblement étoile fermé, on pourra déterminer son adhérence séquentielle faible étoile.

Dans l'exercice suivant, on donne un exemple d'espace vectoriel normé E pour lequel la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et la topologie de la norme

- ont exactement les mêmes suites convergentes,
- sont distinctes car E est de dimension infinie (d'après le cours).

Exercice 7 (Théorème de Schur)**.** Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞ sont définis dans l'exercice 4.

1. Soit $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, x des éléments de ℓ^1. On suppose que $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x. Le but de la fin de l'exercice est de montrer que la suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans ℓ^1. On suppose par l'absurde que $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers x dans ℓ^1. Montrer qu'il existe une suite $\left(y^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 satisfaisant
$$y^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left\|y^{(n)}\right\|_1 = 1\,.$$
2. Soit $j \in \mathbb{N}$, justifier que
$$\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$
3. En utilisant la question précédente et le fait que, à $n \in \mathbb{N}$ fixé cette fois-ci, $\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$, construire deux suites $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissantes satisfaisant $j_0 = n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{3}{4} \quad \text{et pour tout } n \geqslant n_{k+1},\ \sum_{i=0}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{8}\,.$$
4. On définit à présent la suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $\gamma_i = \operatorname{sgn}\left(y_i^{(n_k)}\right)$ pour $i \in [\![j_k, j_{k+1} - 1]\!]$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i y_i^{(n_k)} \geqslant \frac{3}{8}$$
   et conclure.

Définition (Cône normal)**.** Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, $C \subset E$ un convexe non vide et $x_0 \in C$. On définit le *cône normal* à C en x_0 comme

$$N_C(x_0) = \{L \in E^* \ : \ L(y - x_0) \leqslant 0\,, \forall y \in C\}\,.$$

Exercice 8 (Cône normal)**.**

1. Montrer que $N_C(x_0)$ est un cône convexe, fermé pour la topologie de la norme et pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ de E^*.
2. Que dire de $N_C(x_0)$ si x_0 est dans l'intérieur de C ?
3. Soit A une partie convexe de E.
   (a) Montrer que $\operatorname{int} A$ convexe. On rappelle qu'on a montré en cours que $\overline{A}$ est également convexe.
   (b) Si de plus A est d'intérieur non vide, montrer que $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$.
4. Soit $x_0 \in \partial C$. On suppose dans cette question que C est d'intérieur non vide. Montrer que $N_C(x_0)$ est non trivial (non réduit à $\{0\}$).
5. Soit $E = \ell^2$ et $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$. Montrer que C est convexe, fermé dans ℓ^2 et vérifier que $0 \in \partial C$. que dire de $N_C(0)$?
   Indication : on pourra utiliser que l'application

$$\ell^2 \to (\ell^2)^*, \quad u \mapsto \left(L_u : \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right)$$

   est un isomorphisme isométrique. C'est par exemple une conséquence du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Exercice 9 (Cône normal en dimension finie)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe contenant 0 (on suppose C non vide et on se ramène à 0 par translation) et soit $x_0 \in \partial C$.

1. Montrer que si C contient une base de $\mathbb{R}^d$, alors C est d'intérieur non vide.
2. En déduire que si C est d'intérieur vide, il existe L linéaire non nulle telle que $C \subset \ker L$.
3. Conclure.

On s'intéresse au cône normal d'un convexe notamment en raison de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une fonction convexe, que vous avez peut-être déjà croisée, sinon cela vous fait un exercice supplémentaire :

Proposition 3 (Condition d'optimalité)**.** *Soit $C \subset E$ convexe fermé non vide, $J : E \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable, alors*

$$x_* \in C \text{ minimise } J \text{ sur } C \quad \Longleftrightarrow \quad -DJ(x_*) \in N_C(x_*),$$

c'est-à-dire

$$DJ(x_*)(y - x_*) \geqslant 0 \qquad \forall y \in C.$$