Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 3 – Topologies faible et faible étoile

Théorème 1 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction μ-intégrable et $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $u \circ f$ soit intégrable. Alors*

$$u\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) \leqslant \int_\Omega u \circ f(x)d\mu(x).$$

Exercice 1. Soit X un espace vectoriel réel et soit C un convexe fermé non vide de X.

1. Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions affines sur C à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in C$, $\sup_{i\in I} \varphi_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction u définie par $u = \sup_{i\in I} \varphi_i$ est convexe.
2. Montrons à présent la réciproque. Soit $u : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.
   (a) Soit l'ensemble $K = \{(x, a) \in C \times \mathbb{R} : \ u(x) \leqslant a\}$. Montrer que K est un convexe fermé de $X \times \mathbb{R}$.
   (b) Soit $x_0 \in C$. Montrer que pour tout $r < u(x_0)$, il existe une forme linéaire $L \in X^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\forall x \in C, \ L(x) + \lambda u(x) < L(x_0) + \lambda r.$$
   (c) En déduire qu'il existe une fonction affine $\varphi_{x_0,r} : C \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{x_0,r} \leqslant u$ et $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$.
   (d) Montrer qu'il existe une famille de fonction affines $(\varphi_i)_{i\in I}$ telle que $u = \sup_{i\in I} \varphi_i$.
3. Montrer l'inégalité de Jensen.

Solution de l'exercice 1.

1. Soient x, y dans C et $t \in [0, 1]$. Par convexité de C, on a $tx+(1-t)y \in C$, donc on peut appliquer les fonctions φ_i et u en ce point. Puisque chaque fonction φ_i est affine, on a par définition de u :
   $$\varphi_i(tx + (1 - t)y) = t\varphi_i(x) + (1 - t)\varphi_i(y) \leqslant tu(x) + (1 - t)u(y).$$
   On passe ensuite au supremum sur i dans le membre de gauche, et on obtient l'inégalité de convexité $u(tx + (1 - t)y) \leqslant tu(x) + (1 - t)u(y)$. Ainsi u est convexe.
2. (a) Si (x, a) et (y, b) appartiennent à K, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on veut montrer que le point $(tx+(1-t)y, ta+(1-t)b)$ appartient à K. Puisque $u(x) \leqslant a$ et $u(y) \leqslant b$, on a par convexité de u :
   $$u(tx + (1 - t)y) \leqslant tu(x) + (1 - t)u(y) \leqslant ta + (1 - t)b,$$
   donc le point appartient à K.
   Pour montrer que l'ensemble est fermé, on utilise la caractérisation séquentielle dans un espace métrique. Soit une suite $(x_n, a_n)_n$ de points de K qui converge vers $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$. En particulier, $(x_n)_n$ suite dans C converge vers x, et puisque C est fermé, on a $x \in C$. Ainsi $u(x)$ est bien défini, et on peut passer à la limite dans $u(x_n) \leqslant a_n$ par continuité de u sur C. On obtient $u(x) \leqslant a$, soit $(x, a) \in K$ et K est fermé.

(b) On applique le théorème d'Hahn-Banach géométrique, pour séparer le convexe fermé K du singleton $(x_0, r) \notin K$. En effet, le singleton est un ensemble convexe compact. Il existe donc une forme linéaire $\Lambda \in (X \times \mathbb{R})^*$ telle que, pour tout $(x, a) \in K$, $\Lambda(x, a) < \Lambda(x_0, r)$. On définit une application L par, pour tout $x \in X$, $L(x) := \Lambda(x, 0)$ et $\lambda := \Lambda(0, 1)$. L'application L est bien linéaire et continue par injection. On a par linéarité de Λ, $\Lambda(x_0, r) = L(x_0) + \lambda r$, et pour tout $(x, a) \in K$, $\Lambda(x, a) = L(x) + \lambda a$ et donc

$$L(x) + \lambda a < L(x_0) + \lambda r.$$

En particulier, puisque $(x, u(x)) \in K$, on a $L(x) + \lambda u(x) < L(x_0) + \lambda r$.

(c) On applique l'inégalité précédente en x_0, et on obtient $\lambda u(x_0) < \lambda r$. Or par hypothèse, $u(x_0) > r$, on a donc $\lambda < 0$. On peut donc poser $\varphi_{x_0,r}(x) = -\frac{1}{\lambda}L(x) + \frac{1}{\lambda}L(x_0) + r$, qui est affine par linéarité de L, et qui satisfait $\varphi_{x_0,r} \leqslant u$ et $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$.

(d) Pour chaque $x_0 \in C$, il existe une suite d'applications affines $\varphi_{x_0,n}$ qui satisfait $\varphi_{x_0,n} \leqslant u$ et $\varphi_{x_0,n}(x_0) = u(x_0) - \frac{1}{n}$. La famille $\{\varphi_{x_0,n}\}_{x_0 \in C, n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait donc la condition

$$\forall x \in C,\ \sup_{x_0,n} \varphi_{x_0,n}(x) \leqslant u(x).$$

De plus, pour tout $x \in C$, on a $\lim_n \varphi_{x,n}(x) = u(x)$, donc l'inégalité précédente est en fait une égalité.

3. Montrons dans un premier temps que puisque $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe, elle est continue. On commence par rappeler le cas de la dimension 1, que l'on généralisera à la dimension supérieure.
Cas $d = 1$: soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Pour montrer que u est continue, on utilise la démonstration du lemme des trois pentes, que l'on trouvera dans des ouvrages abordant la convexité : pour une fonction convexe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et trois points $x < y < z$, on peut ordonner les trois pentes reliant le point $(x, u(x))$, $(y, u(y))$ et $(z, u(z))$. On va montrer la continuité au point 0, et montrer que $u(x)$ est proche de $u(0)$ si x est proche de 0. Soit $x \in [0, 1]$. On applique l'inégalité de convexité entre les points 0, x et 1, avec $x = x \times 1 + (1 - x) \times 0$,

$$\begin{aligned} u(x) &\leqslant (1 - x)u(0) + xu(1) \\ u(x) - u(0) &\leqslant x(u(1) - u(0)), \end{aligned}$$

puis entre les points -1, 0 et x avec $0 = \frac{x}{x+1} \times (-1) + \frac{1}{x+1} \times x$

$$\begin{aligned} u(0) &\leqslant \frac{x}{x+1}u(-1) + \frac{1}{1+x}u(x) \\ u(0) - u(x) &\leqslant x(u(-1) - u(0)) \end{aligned}$$

On a donc obtenu que $|u(x) - u(0)| \leqslant C|x|$, où la constante $C := \sup_{A \in \{-1,1\}} |u(A) - u(0)|$ est indépedante de $x \in [0, 1]$,. En établissant les mêmes inégalités pour $x \in [-1, 0]$, on en déduit que u est continue en 0.
Cas $d > 1$: On va montrer la propriété plus forte suivante : si $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe, alors est localement lipschitzienne. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Soient $x, y \in B(x_0, r)$. Dans la suite, $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, on pourra par exemple penser à la norme 2. Pour établir la première inégalité, on prolonge le vecteur de x vers y, et on note z le point d'intersection avec la sphère $\mathbb{S}(x_0, r)$, qui s'écrit de la forme $z = x + \frac{|z-x|}{|y-x|}(y - x) = \left(1 - \frac{|z-x|}{|y-x|}\right) x + \frac{|z-x|}{|y-x|} y$, et on peut écrire y comme combinaison convexe entre x et z par

$$y = \left(1 - \frac{|y - x|}{|z - x|}\right) x + \frac{|y - x|}{|z - x|} z.$$

On applique ensuite l'inégalité de convexité, et on obtient

$$u(y) - u(x) \leqslant \frac{|y-x|}{|z-x|}\left(u(z) - u(x)\right).$$

On procède ensuite de manière similaire en prolongeant le vecteur de y vers x, et en notant s le point d'intersection avec la sphère, on a $s = \left(1 - \frac{|s-y|}{|x-y|}\right) y + \frac{|s-y|}{|x-y|} x$ et on déduit l'inégalité

$$u(x) - u(y) \leqslant \frac{|x-y|}{|s-y|}\left(u(s) - u(y)\right).$$

Montrons que u est localement lipschitzienne sur un ouvert plus petit, $B(x_0, \frac{r}{2})$. Pour tout $(x, y) \in B(x_0, \frac{r}{2})$, en gardant s et z dans $\mathbb{S}(x_0, r)$, on a $|z - x| > \frac{r}{2}$ et $|s - y| > \frac{r}{2}$. On déduit donc des inégalités précédentes que

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{4}{r}\|u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}|x - y|.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\|u\|_{L^\infty(B(x_0,r))}$ est fini pour conclure que u est localement Lipschitzienne (on remarquera que la constante n'est pas nécessairement uniforme en x_0). Pour $x_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,d}) \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ fixés, on considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des points de coordonnées $(x_{0,1} \pm r, \cdots, x_{0,d} \pm r)$. Ces points sont les sommets de l'hypercube $\mathcal{C}_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x - x_0\|_\infty \leqslant r\right\}$. En particulier, on déduit que $\mathrm{co}(A) = \mathcal{C}$, et par le théorème de Carathéodory (pour frimer), chaque point x de $\mathcal{C}$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $d+1$ points A_1, ..., A_{d+1} de $\mathcal{A}$: il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}) \in [0,1]^{d+1}$ tels que la somme des λ_i vaille 1 et $x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i A_i$. En appliquant la convexité de u, on obtient

$$u(x) \leqslant \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i u(A_i) \leqslant \sup_{A \in \mathcal{A}} |u(A)|.$$

Dans la dernière inégalité, le sup peut être remplacé par un max car il n'y a qu'un nombre fini de points. Cette constante étant uniforme en x, on obtient que $\|u\|_{L^\infty(B(0,r))} \leqslant \max_{A\in\mathcal{A}} |u(A)|$, ce qui conclut que u est localement lipschitzienne, et en particulier continue.

On peut à présent appliquer la question précédente. Puisque u est convexe (donc continue) et $\mathbb{R}^d$ est un convexe fermé non vide, soit $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ une famille de fonctions affines satisfaisant $u = \sup_{i\in I} \varphi_i$. Pour une fonction φ_i, soit $a_i \in \mathbb{R}^d$ et $b_i \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_i(x) = a_i \cdot x + b_i$. On a, puisque $\int_\Omega d\mu(x) = 1$,

$$\begin{aligned}\varphi_i\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) = \int_\Omega a_i \cdot f(x)d\mu(x) + b_i \int_\Omega d\mu(x) &= \int_\Omega \varphi_i \circ f(x)d\mu(x) \\ &\leqslant \int_\Omega u \circ f(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de la borne de φ_i par u et de la croissance de l'intégrale. Enfin, la borne étant uniforme en i, on obtient l'inégalité de Jensen en passant au supremum sur i dans le terme de gauche.

□

On rappelle qu'on note $\tau_{\mathcal{F}}$ la toplogie initiale associée à une famille d'applications $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$, où pour tout $i \in I$, f_i est définie sur X et à valeurs dans un espace topologique Y_i. On a vu en cours sans le démontrer :

Proposition 2 (Caractérisation de la continuité d'une fonction à valeurs dans X)**.** *Soit Z un espace topologique et $g : Z \to X$. Alors g est continue (pour $(X, \tau_{\mathcal{F}})$) si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue.*

Exercice 2.

1. Prouver la proposition 2.
2. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est fortement continue si et seulement si elle est faiblement continue :

$$T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F) \text{ continue} \quad \Longleftrightarrow \quad T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*)) \text{ continue.}$$

Solution de l'exercice 2.

1. ($\Rightarrow$) Pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue par composition d'applications continues.
($\Leftarrow$) Soit $W \in \tau_{\mathcal{F}}$, vérifions que $g^{-1}(W)$ est un ouvert de Z. On rappelle qu'on peut écrire W sous la forme

$$W = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} f_{i_{k,j}}^{-1}(U_{k,j}) \quad \text{avec pour tout } j \in J,\ k \in [|1, m_j|],\ U_{k,j} \text{ ouvert de } Y_{i_{k,j}}\,,$$

de sorte que

$$g^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} g^{-1}\left(f_{i_{k,j}}^{-1}(U_{k,j})\right) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{m_j} (f_{i_{k,j}} \circ g)^{-1}(U_{k,j})\,.$$

Pour chaque $j \in J$, $k \in [|1, m_j|]$, $U_{k,j}$ est ouvert donc $(f_{i_{k,j}} \circ g)^{-1}(U_{k,j})$ est ouvert par continuité de $f_{i_{k,j}} \circ g$ de sorte que $g^{-1}(W)$ est bien un ouvert de Z (réunion d'intersections finies d'ouverts). C'était un peu lourd à écrire formellement, mais si on résume, on a écrit W comme réunion d'intersections finies d'ensembles de la forme f_i^{-1}(ouvert de Y_i) et on a utilisé que prendre la préimage (par g) commute avec unions et intersections pour se ramener à nouveau à une réunion d'intersections finies d'ouverts de Z et conclure.

2. • ($\Rightarrow$) Continuité forte $\Rightarrow$ continuité faible.
On va appliquer le critère de continuité énoncé dans la proposition 2 : on a établi que $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ est continue si et seulement si, pour tout $L \in F^*$, $L \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{K}$ est continue.
Soit $L \in F^*$. Alors $L \circ T : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{K}$ est linéaire, et continue donc $L \circ T \in E^*$, de sorte que $L \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{K}$ est continue par définition de la topologie faible (qui rend continus les éléments de E^*). D'après la proposition 2, T est faiblement continue.
• ($\Leftarrow$) Continuité faible $\Rightarrow$ continuité forte.
On va appliquer le théorème du graphe fermé. On suppose $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ continue. Montrons que le graphe de T,

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subset E \times F,$$

est fermé pour la topologie forte de $E \times F$ (e.g. associée à la norme $\max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$). Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que $(x_n, T(x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} (x, y)$ pour la topologie forte. En particulier $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_E} x$, on en déduit $x_n \rightharpoonup x$ et par continuité faible de T, $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ dans

F. On a également $T(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_F} y$ qui implique à nouveau $T(x_n) \rightharpoonup y$ dans F. On a montré que la topologie faible était séparée, on a donc par unicité de la limite $y = T(x)$. Finalement, $(x, y) \in \Gamma(T)$ qui est fortement fermé, E, F étant des espaces de Banach, le théorème du graphe fermé s'applique et on conclut que T est fortement continue.

□

Soit (X, μ) un espace mesuré, on "rappelle" qu'on peut identifier $(\mathrm{L}^2(X,\mu))^*$ à lui-même via l'isomorphisme isométrique

$$\mathrm{L}^2(X,\mu) \to (\mathrm{L}^2(X,\mu))^*, \quad f \mapsto \left(g \in \mathrm{L}^2(X,\mu) \mapsto \int_X fg\, d\mu \right).$$

C'est une conséquence du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Exercice 3. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,[1] $\varphi \neq 0$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \varphi(\cdot - n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(u_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 et pas fortement dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \sqrt{n}\varphi(n\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $(v_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 et pas fortement dans $L^2(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^2(X,\mu)$ et $f \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$. On rappelle que $f_n \rightharpoonup f$ si et seulement si pour tout $L \in (\mathrm{L}^2(X,\mu))^*$, $L(f_n) \to L(f)$, si et seulement si

$$\int_X f_n g d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X fg d\mu \qquad \forall g \in \mathrm{L}^2(X,\mu).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M, M]$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|^2\, dx \leqslant \int_{-M+n}^{M+n} |\varphi(x-n)|^2\, dx \leqslant 2M \|\varphi\|_\infty^2 < \infty.$$

Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u_n g\, dx \right| = \left| \int_{-M+n}^{M+n} \varphi(x-n) g(x)\, dx \right| \leqslant \|\varphi\|_2 \left(\int_{n-M}^{n+M} |g|^2\, dx \right)^{1/2},$$

où on a utilisé que $\displaystyle\int_{-M+n}^{M+n} |\varphi(x-n)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2\, dx$ par changement de variable $y = x - n$. Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{n-M}^{n+M} |g|^2\, dx \leqslant \int_{n-M}^{\infty} |g|^2\, dx \to 0$ quand $n \to \infty$ (reste d'une intégrale convergente) de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x) g(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ce pour tout $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $u_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
Par invariance de la norme L^2 par translation :

$$\|u_n\|_2 = \|\varphi(\cdot - n)\|_2 = \|\varphi\|_2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On rappelle que si $(u_n)_n$ converge fortement vers u alors $(u_n)_n$ converge faiblement vers u et donc $u = 0$. Si on avait $u_n \to 0$ fortement, on aurait $\|u_n\|_2 \to 0$, contredisant $\|u_n\|_2 = \|\varphi\|_2 \neq 0$ (on a supposé $\varphi \neq 0$).

1. Si vous n'en avez jamais vu, on en reparlera bientôt...

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, par changement de variable $y = nx$,

$$\int_{\mathbb{R}} |v_n|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} n \, |\varphi(nx)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2 \, dy = \|\varphi\|_2^2 < \infty \,,$$

et donc $v_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} v_n g \, dx \right| = \sqrt{n} \left| \int_{-M/n}^{M/n} \varphi(nx) g(x) \, dx \right| \leqslant \|\varphi\|_2 \left(\int_{-M/n}^{M/n} |g|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

où on a utilisé que $n \displaystyle\int_{-M/n}^{M/n} |\varphi(nx)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2 \, dy = \|\varphi\|_2^2$ par changement de variable $y = nx$.
Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$, $h_n = \mathbb{1}_{[-M/n, M/n]} \, |g|^2$ est dominée indépendamment de $n \in \mathbb{N}$ par $|g|^2 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et de plus $h_n(x) \to 0$ pour tout $x \neq 0$. On en déduit par convergence dominée que $\displaystyle\int_{-M/n}^{M/n} |g|^2 \, dx \to 0$ quand $n \to \infty$ de sorte que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} v_n(x) g(x) \, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
Ce pour tout $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $v_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
On a vu que pour tout n, $\|v_n\|_2 = \|\varphi\|_2 \neq 0$. Cela permet de conclure que $(v_n)_n$ ne converge pas fortement comme à la question précédente.

□

Exercice 4 (Exemple d'espace non réflexif)**.** On rappelle les notations

- ℓ^∞ est l'ensemble des suites réelles bornées, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$,
- ℓ^1 est l'ensemble des suites réelles absolument convergentes, c'est un espace de Banach muni de $\|u\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.
- c_0 est le sous-espace vectoriel $c_0 = \{u = (u_n)_n \in \ell^\infty \, : \, \lim_{n \to \infty} u_n = 0\} \subset \ell^\infty$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

On va montrer que c_0 n'est pas réflexif.

1. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, vérifier que $L_u : \ell^1 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ est bien définie et que c'est une forme linéaire continue : $L_u \in (\ell^1)^*$.
2. Vérifier que l'application $I : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, $u \mapsto L_u$ est linéaire continue et bijective qui est de plus isométrique.
3. Montrer que c_0 est séparable et que ℓ^∞ ne l'est pas.
4. On rappelle que $(c_0)^* \simeq \ell^1$ via l'isométrie $I_1 : \ell^1 \to (c_0)^*$, $v \mapsto L_v$ où $L_v : c_0 \to \mathbb{K}$, $u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. On introduit l'application adjointe de I_1, $I_1^* : (c_0)^{**} \to (\ell^1)^*$ définie par

$$I_1^*(\xi) = \xi \circ I_1, \quad \forall \xi \in (c_0)^{**} \,.$$

Montrer que I_1^* est une isométrie linéaire bijective.
5. En déduire que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $u \in \ell^\infty$, vérifions que L_u est bien définie et continue. Pour tout $v \in \ell^1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \;\leqslant\; \|u\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| \;=\; \|u\|_\infty \|v\|_1 \;<\; \infty,$$

donc la série $\sum_n u_n v_n$ converge absolument. On en déduit que L_u est bien définie, elle est de plus linéaire et, pour tout $v \in \ell^1$,

$$|L_u(v)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leqslant \|u\|_\infty \|v\|_1 ,$$

donc L_u est continue, avec $\|L_u\|_{(\ell^1)^*} \leqslant \|u\|_\infty$.

2. I est bien linéaire, vérifions qu'elle est isométrique, et donc en particulier injective.
On a déjà $\|L_u\|_{(\ell^1)^*} \leqslant \|u\|_\infty$ (question 1). Concernant l'inégalité réciproque,
   - on a appliqué l'inégalité triangulaire, dans laquelle on a égalité si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont de même signe,
   - on a ensuite utilisé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \|u\|_\infty$, or u est donnée... si on avait n_0 tel que $|u_{n_0}| = \|u\|_\infty$, on pourrait obtenir l'égalité automatiquement pour tout $n \in \mathbb{N}$, en choisisant v ayant un seul terme non nul, celui de rang n_0.

   Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0}| \geqslant \|u\|_\infty - \varepsilon$ (par définition de $\|u\|_\infty$ comme supremum). Posons $v = \operatorname{sgn}(u_{n_0})\, e_{n_0} \in \ell^1$ de sorte que $\|v\|_1 = 1$. On a alors

$$L_u(v) = \operatorname{sgn}(u_{n_0})\, u_{n_0} = |u_{n_0}| \geqslant (\|u\|_\infty - \varepsilon)\, \|v\|_1 ,$$

   donc $\|L_u\|_{(\ell^1)^*} \geqslant \|u\|_\infty - \varepsilon$. Ce pour tout $\varepsilon > 0$ et par conséquent $\|L_u\|_{(\ell^1)^*} \geqslant \|u\|_\infty$. D'où $\|L_u\|_{(\ell^1)^*} = \|u\|_\infty$ et I est une isométrie.
   Il reste à vérifier que I est surjective. Soit $\Lambda \in (\ell^1)^*$, on cherche $u \in \ell^\infty$ tel que $\Lambda = L_u$, on aurait alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(e_k) = L_u(e_k) = u_k ,$$

   ce qui nous donne un candidat pour u...
   Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \Lambda(e_k)$ et $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Vérifions déjà que $u \in \ell^\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_k| = |\Lambda(e_k)| \leqslant \|\Lambda\|_{(\ell^1)^*} \|e_k\|_1 = \|\Lambda\|_{(\ell^1)^*} ,$$

   donc $\|u\|_\infty \leqslant \|\Lambda\|_{(\ell^1)^*} < \infty$.
   Montrons qu'on a bien $\Lambda = L_u = I(u)$. Soit $v = (v_n)_n \in \ell^1$. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| v - \sum_{n=0}^{N} v_n e_n \right\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |v_n| \to 0$$

   car c'est le reste d'une série convergente. Par continuité et linéarité de Λ, on a alors

$$\Lambda(v) = \lim_{N\to\infty} \Lambda\left(\sum_{n=0}^{N} v_n e_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n \Lambda(e_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n = L_u(v).$$

   Donc $\Lambda = L_u = I(u)$ et I est bien surjective.

3. • Montrons que c_0 est séparable. Soit D l'ensemble des suites à valeurs rationnelles et nulles à partir d'un certain rang :

$$D = \{(u_n)_n \in c_0 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in \mathbb{Q} \text{ et } \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n = 0\}\,.$$

On peut écrire

$$D = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} D_N \quad \text{où pour } N \in \mathbb{N},\, D_N = \{(u_n)_n \in c_0 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in \mathbb{Q} \text{ et } \forall n \geqslant N,\, u_n = 0\}\,.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, D_N est en bijection avec $\mathbb{Q}^N$, donc dénombrable, de sorte que D est dénombrable.

Vérifions que D est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $u \in c_0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to 0$, il existe N tel que $|u_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N$. Pour chaque $n \leqslant N$, on peut choisir $q_n \in \mathbb{Q}$ satisfaisant $|u_n - q_n| \leqslant \varepsilon$. On peut alors poser $v = (q_0, \dots, q_N, 0, 0, \dots) \in D$ qui vérifie

- pour $n \leqslant N$: $|u_n - v_n| = |u_n - q_n| \leqslant \varepsilon$;
- pour $n > N$: $|u_n - v_n| = |u_n - 0| = |u_n| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\|u - v\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Par conséquent D est dense dans c_0.

• Montrons maintenant que ℓ^∞ n'est pas séparable. Pour $A \subset \mathbb{N}$, on introduit la suite indicatrice de $\mathbb{1}_A \in \ell^\infty$ définie comme $(\mathbb{1}_A)_n = 1$ si $n \in A$ et $(\mathbb{1}_A)_n = 0$ si $n \notin A$, on a en particulier $\|\mathbb{1}_A\|_\infty \leqslant 1$ (avec égalité dès que A non vide).

Notons que pour $A \neq B \subset \mathbb{N}$,

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_\infty = 1.$$

La famille $\{\mathbb{1}_A : A \subset \mathbb{N}\}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'est pas dénombrable et contient des éléments deux à deux à distance exactement 1.

Supposons par l'absurde ℓ^∞ séparable. Soit alors D une partie dénombrable dense dans ℓ^∞. Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, il existe $u_A \in D$ tel que $\|\mathbb{1}_A - u\|_\infty < \frac{1}{2}$. Pour tout $A \neq B$, on a nécessairement $u_A \neq u_B$ par inégalité triangulaire

$$\|u_A - u_B\|_\infty \geqslant \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_\infty - \|u_A - \mathbb{1}_A\|_\infty - \|\mathbb{1}_B - u_B\|_\infty > 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0\,.$$

On a alors une application injective $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to D$, $A \mapsto u_A$, ce qui est impossible puisque D est dénombrable et pas $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Donc ℓ^∞ n'est pas séparable.

4. • Commençons par vérifier que I_1^* est bien définie, linéaire, continue.

Soit $\xi \in (c_0)^{**}$, $I_1^*(\xi) = \xi \circ I_1 : \ell^1 \to \mathbb{K}$ est linéaire, par composition d'applications linéaires, et continue : pour tout $v \in \ell^1$,

$$|I_1^*(\xi)(v)| = |\xi(I_1(v))| \leqslant \|\xi\|_{(c_0)^{**}} \|I_1(v)\|_{(c_0)^*} \underset{I_1 \text{ isométrie}}{=} \|\xi\|_{(c_0)^{**}} \|v\|_1\ ,$$

de sorte que $I_1^*(\xi) \in (\ell^1)^*$ (I_1^* est en particulier bien définie). De plus I_1^* est linéaire et pour tout $\xi \in (c_0)^{**}$, $\|I_1^*(\xi)\|_{(\ell^1)^*} \leqslant \|\xi\|_{(c_0)^{**}}$, on en déduit que I_1^* est continue et $\|I_1^*\|_{\mathcal{L}((c_0)^{**},(\ell^1)^*)} \leqslant 1$.

• Vérifions à présent que I_1^* est une isométrie, i.e., pour tout $\xi \in (c_0)^{**}$,

$$\|I_1^*(\xi)\|_{(\ell^1)^*} = \|\xi\|_{(c_0)^{**}}\ .$$

Soit $\xi \in (c_0)^{**}$. Comme I_1 est elle-même une isométrie bijective, pour tout $v \in \ell^1$, $\|I_1(v)\|_{(c_0)^*} = \|v\|_1$ et donc

$$\|I_1^*(\xi)\|_{(\ell^1)^*} = \sup_{\substack{v\in\ell^1\\ \|v\|_1=1}} |I_1^*(\xi)(v)| = \sup_{\substack{v\in\ell^1\\ \|v\|_1=1}} |\xi(I_1(v))| \underset{\substack{L=I_1(v)\\ v=I_1^{-1}(L)}}{=} \sup_{\substack{L\in(c_0)^*\\ \|L\|_{(c_0)^*}=1}} |\xi(L)| = \|\xi\|_{(c_0)^{**}}$$

• Il reste à vérifier que I_1^* est bijective. Comme I_1^* est déjà une isométrie, elle est injective et il suffit de vérifier la surjectivité. Soit $L \in (\ell^1)^*$, $\xi \in (c_0)^{**}$,

$$I_1^*(\xi) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \xi \circ I_1 = L \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = L \circ I_1^{-1}$$

et on a bien $\xi = L \circ I_1^{-1} \in (c_0)^{**}$ car I_1^{-1} est linéaire continue.

5. Vérifions que c_0 n'est pas réflexif. On a établi précédemment que $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ via l'isométrie $I_2 : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, $u \mapsto \Lambda_u$ où $\Lambda_u : \ell^1 \to \mathbb{K}$, $v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. On a alors une isométrie

$$I = (I_1^*)^{-1} \circ I_2 : \ell^\infty \xrightarrow{I_2} (\ell^1)^* \xrightarrow{(I_1^*)^{-1}} (c_0)^{**}\,.$$

Si c_0 était réflexif, on aurait $J(c_0) = (c_0)^{**} = I(\ell^\infty)$ ou encore $I^{-1} \circ J(c_0) = \ell^\infty$ de sorte que c_0 et ℓ^∞ seraient isométriquement isomorphes, en particulier homéomorphes. Ce qui est impossible car c_0 est séparable et ℓ^∞ ne l'est pas (la séparabilité se transmet par homéomorphisme).

□

Exercice 5 (Épigraphe, convexité et semi-continuité inférieure)**.** Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie τ, A une partie de E munie de la topologie induite et $f : A \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'*épigraphe* de f est

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y \geqslant f(x)\}.$$

On rappelle également que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en $x_0 \in A$ si,

$$\forall \lambda < f(x_0),\ \text{il existe } V \text{ voisinage de } x_0 \text{ dans } A,\ \forall x \in V,\ f(x) > \lambda\,,$$

Dans le cas où (E, τ) est métrisable, on dispose d'une caractérisation séquentielle de la semi continuité inférieure (qu'on n'utilisera pas ici) : f est s.c.i. en $x_0 \in A$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers x_0, on a

$$f(x_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n)\,.$$

On dit que f est semi-continue inférieurement sur A si elle l'est en tout point de A.

1. Montrer que

$$f \text{ est semi-continue inférieurement} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{epi}(f) \text{ est fermé dans } A \times \mathbb{R}\,.$$

2. On suppose de plus que A est convexe. Montrer que

$$f \text{ est convexe} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{epi}(f) \text{ est convexe.}$$

3. On suppose que A est convexe et fortement fermé dans E. En déduire que si f est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme, alors f est semi-continue inférieurement sur A muni de la topologie induite de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice suivant.

   Que dire de l'implication réciproque ?

Solution de l'exercice 5.

1. • ($\Rightarrow$) Supposons f s.c.i. Montrons que $(A\times\mathbb{R})\setminus \mathrm{epi}(f)$ est ouvert (dans $A\times\mathbb{R}$).
   Soit $(x_0,t_0)\in (A\times\mathbb{R})\setminus\mathrm{epi}(f)$, i.e. $x_0\in A$ et $t_0<f(x_0)$. Soit $\lambda\in]t_0,f(x_0)[$, par s.c.i. de f en x_0, il existe $V=\Omega\cap A$ voisinage de x_0 dans A avec Ω ouvert de E, tel que $f(x)>\lambda$ pour tout $x\in V$. On a alors que
   $$W=\Omega\times]-\infty,\lambda[\,,$$
   est ouvert et contient (x_0,t_0), de plus $W\cap(A\times\mathbb{R})\subset A\times\mathbb{R}\setminus\mathrm{epi}(f)$. Ainsi $A\times\mathbb{R}\setminus\mathrm{epi}(f)$ est un voisinage de (x_0,t_0) (dans $A\times\mathbb{R}$).
   • ($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{epi}(f)$ fermé dans $A\times\mathbb{R}$. Soit $x_0\in A$, $\lambda<f(x_0)$: $(x_0,\lambda)\in(A\times\mathbb{R})\setminus\mathrm{epi}(f)$, ouvert dans $A\times\mathbb{R}$. Par définition de la topologie produit, il existe deux ouverts $\Omega\subset E$ et $U\subset\mathbb{R}$ tels que $(x_0,\lambda)\in\Omega\times U$ et
   $$(\Omega\times U)\cap(A\times\mathbb{R})\subset(A\times\mathbb{R})\setminus\mathrm{epi}(f)\,.$$
   On peut alors prendre $V=\Omega\cap A$ qui est un voisinage de x_0 et satisfait pour $x\in V$, $(x,\lambda)\notin\mathrm{epi}(f)$ de sorte que $f(x)>\lambda$. On conclut que f est s.c.i. en x_0.
2. On suppose que f est convexe, on a alors pour tout $(x,\lambda),(y,\mu)\in\mathrm{epi}(f)$, $t\in[0,1]$, par convexité de A et f,
   $$f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)\leqslant(1-t)\lambda+t\mu$$
   de sorte que $((1-t)x+ty,(1-t)\lambda+t\mu)\in\mathrm{epi}(f)$ qui est bien convexe.
   On suppose réciproquement que $\mathrm{epi}(f)$ est convexe. Soit $x,y\in A$, $t\in[0,1]$, on a alors $(x,f(x)),(y,f(y))\in\mathrm{epi}(f)$ qui est convexe :
   $$((1-t)x+ty,(1-t)f(x)+tf(y))\in\mathrm{epi}(f)\quad\Longleftrightarrow\quad f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$$
   et f est bien convexe.
3. On suppose que f est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme. Par la question 1, $\mathrm{epi}(f)$ est fermé dans $A\times\mathbb{R}$, où A est muni de la topologie induite de la norme sur E. Puisque A est fermé pour cette topologie, on en déduit que $\mathrm{epi}(f)$ est fermé dans $(E,\|\cdot\|_E)\times(\mathbb{R},|\cdot|)$. Par l'exercice 5 bis, première question, $\mathrm{epi}(f)$ est aussi fermé dans $(E\times\mathbb{R},N)$, où la norme N est définie par $N(x,\lambda)=\|x\|_E+|\lambda|$. De plus, par la question 2, $\mathrm{epi}(f)$ est convexe. D'après le théorème de Mazur, $\mathrm{epi}(f)$ est également faiblement fermé dans $E\times\mathbb{R}$, soit la topologie $(E\times\mathbb{R},\sigma(E\times\mathbb{R},(E\times\mathbb{R})^*))$. Par l'exercice 5 bis, on en déduit que $\mathrm{epi}(f)$ est aussi fermé pour $(E,\sigma(E,E^*))\times(\mathbb{R},\sigma(\mathbb{R},\mathbb{R}^*))$. Puisque $\mathbb{R}$ est de dimension finie, la topologie faible est identique à la topologie forte. Ainsi, $\mathrm{epi}(f)$ est fermé dans $(E,\sigma(E,E^*))\times(\mathbb{R},|\cdot|)$. On intersecte ensuite avec $A\times\mathbb{R}$, et on déduit que $\mathrm{epi}(f)$ est fermé dans $A\times\mathbb{R}$ où A est muni de la topologie induite par la topologie faible sur E, et $\mathbb{R}$ de la topologie forte. Avec le sens indirect de la question 1, on déduit que f est semi-continue inférieurement pour la topologie induite sur A de la topologie faible de E.
   On peut utiliser le même argument pour montrer que la réciproque est vraie. On peut cependant remarquer que c'est directement une conséquence de la définition de s.c.i. et de $\sigma(E,E^*)\subset\tau_{\|\cdot\|_E}$ qui nous dit que tout voisinage faible V de x_0 dans la définition est en particulier un voisinage pour la norme. L'hypothèse de convexité n'est donc pas nécessaire dans ce cas.

   Correction alternative sans utilisation de l'exercice 5 bis : On souhaite montrer que f est faiblement semi-continue inférieurement. Puisque A est convexe et f est convexe , alors par la question précédente, l'épigraphe de f est convexe.

De plus, par la première question, puisque f est semi-continue inférieurement pour la topologie forte $(E, \|\cdot\|_E)$, son épigraphe est fermé dans $A \times \mathbb{R}$, muni de la topologie induite de la topologie produit de $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. De plus, puisque A est fortement fermé dans E, on en déduit que $A \times \mathbb{R}$ est fortement fermé dans $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Ainsi, epi$(f)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Montrons que $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un evn. En définissant la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour tout $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$, $\|(x, \lambda)\|_\infty := \max(\|x\|_E, |\lambda|)$, on obtient que $(E \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn. De plus, tout ouvert de la topologie produit de $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est ouvert de la topologie de la norme $(E \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$; en effet, on peut le vérifier pour tout produit de boules ouvertes. Si $(y, \mu) \in B_E(x, r) \times B_{\mathbb{R}}(\lambda, \varepsilon)$, alors $(y, \mu) \in B_{E\times\mathbb{R}}((y, \mu), \min(\|y - x\|_E, r - \|y\|_E, |\mu - \lambda|, \varepsilon - |\mu|))$, qui est une boule contenue dans $B_E(x, r) \times B_{\mathbb{R}}(\lambda, \varepsilon)$. Ainsi, $B_E(x, r) \times B_{\mathbb{R}}(\lambda, \varepsilon)$ est voisinage de chacun de ses points pour la topologie de sa norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est donc un ouvert pour cette norme. On en déduit que epi(f) est un fermé de $(E \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$.

On peut à présent appliquer le théorème de Masur. Puisque epi(f) est un convexe fermé de $(E \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$, c'est aussi un ensemble faiblement fermé, c'est-à-dire dans $E \times \mathbb{R}$ muni de la topologie faible $\sigma(E \times \mathbb{R}, (E \times \mathbb{R})^*)$. Supposons que cela implique que epi(f) est un fermé de $(E, \sigma(E, E^*)) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors par la première question, sens indirect, on obtiendrait que f est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $(E, \sigma(E, E^*))$, ce qui conclurait la question. Il ne reste donc plus qu'à montrer ce point.

Montrons que tout ouvert de $(E \times \mathbb{R}, \sigma(E \times \mathbb{R}, (E \times \mathbb{R})^*))$ est ouvert de $(E, \sigma(E, E^*)) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soit O un ouvert de $(E \times \mathbb{R}, \sigma(E \times \mathbb{R}, (E \times \mathbb{R})^*))$: il existe une famille J, et pour tout $j \in J$, un entier k_j fini tel que, pour tout $j \in J$, pour tout $i \in \{1, ...k_j\}$, il existe $L_{j,i} \in (E \times \mathbb{R})^*$ et un ouvert $U_{j,i} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$O = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i=1}^{k_j} L_{j,i}^{-1}(U_{j,i}).$$

Si on montre que pour tout (j, i) l'ensemble $L_{j,i}^{-1}(U_{j,i})$ est ouvert, alors O est aussi ouvert. En d'autres termes, il suffit de le montrer pour la prébase.

On fixe (j, i), et pour simplifier les notations, on note $L := L_{j,i}$ et $U := U_{j,i}$. Montrons que $L^{-1}(U)$ est ouvert de $(E, \sigma(E, E^*)) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On peut vérifier que c'est un voisinage de chacun de ses points. Soit $(x, \lambda) \in L^{-1}(U)$. On pose $a := L(x, 0)$ et $b := L(0, \lambda)$. Puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) + B(b, \varepsilon) = B(a + b, 2\varepsilon) \subset U$. On pose à présent les fonctions $\Lambda : y \in E \mapsto L(y, 0)$ et $f : \nu \in \mathbb{R} \mapsto L(0, \nu)$. Puisque L est continue sur $(E \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$, on déduit que $\Lambda : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to \mathbb{R}$ sont continues de normes inférieures ou égales à celle de L. Enfin, par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(\lambda, \eta)) \subset B(b, \varepsilon)$. On a donc un candidat, qui est $(\Lambda^{-1}(B(a, \varepsilon))) \times B(\lambda, \eta)$. Cet ensemble est bien un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Il contient (x, λ), et est inclus dans U ; en effet, pour tout $(y, \nu) \in (\Lambda^{-1}(B(a, \varepsilon))) \times B(\lambda, \eta)$, on a

$$L(y, \nu) = L(y, 0) + L(0, \nu) = \Lambda(y) + f(\nu) \in B(a, \varepsilon) + B(b, \varepsilon) \subset U.$$

On a donc montré que pour tout $U \subset \mathbb{R}$ et toute application $L \in (E \times \mathbb{R})^*$, $L^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points dans $(E, \sigma(E, E^*)) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$, c'est donc un ouvert. On en déduit que O défini précédemment est ouvert de $(E, \sigma(E, E^*)) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc epi$(f)$ est fermé pour cette topologie. En prenant l'intersection avec A, on en déduit que f est faiblement semi-continue inférieurement.

□

Exercice (5 bis). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

1. Vérifier que la topologie produit sur $(E, \|\cdot\|_E) \times (F, \|\cdot\|_F)$ est équivalente à la topologie engendrée par la norme N, où pour tout $(x,y) \in E \times F$, $N(x,y) := \|(\|x\|_E, \|y\|_F)\|_1$.
2. On rappelle que E^* est le dual topologique de $(E, \|\cdot\|_E)$, qui induit une topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E. Pour l'espace vectoriel $E \times F$ muni de la norme N, on note par τ la topologie faible qui rend les applications de $(E \times F)^*$ continues pour cette norme, soit $\tau = \sigma((E \times F), (E \times F)^*)$. Montrer que la topologie produit $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$ et $(E \times F, \tau)$ sont identiques.

1. On peut vérifier que N est une norme. Pour l'inégalité triangulaire, on a, pour tout (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $E \times F$, en utilisant les inégalités triangulaires sur E et sur F

$$\begin{aligned} N((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) &= \|x_1 + x_2\|_E + \|y_1 + y_2\|_F \\ &\leqslant \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \|y_1\|_F + \|y\|_2 = N(x_1,y_1) + N(x_2,y_2). \end{aligned}$$

   Puisque les deux espaces sont des espaces vectoriels normés, on peut utiliser la caractérisation par une base de voisinage, par exemple les boules. Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$ et $r > 0$, soit $(x,y) \in B_N((x_0,y_0), r)$, alors $B_E(x, \frac{1}{2}(r - \|x - x_0\|_E)) \times B_F(y, \frac{1}{2}(r - \|y - y_0\|_F)) \subset B_N((x_0,y_0), r)$, donc la topologie produit est plus fine que la topologie induite par N. Réciproquement, pour tout $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $r_E > 0$ et $r_F > 0$, on a pour tout $(x,y) \in B_E(x_0, r_E) \times B_F(y_0, r_F)$ que $B_N((x,y), \frac{1}{2}\min(r_E - \|x - x_0\|_E, r_F - \|y - y_0\|_F)) \subset B_E(x_0, r_E) \times B_F(y_0, r_F)$, donc les deux topologies sont équivalentes.

2. Montrons dans un premier temps que toute application $L \in (E \times F)^*$ peut se décomposer de la forme $L(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$, où $\varphi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. Considérons l'injection $i_E : x \in (E, \|\cdot\|_E) \to (x, 0) \in (E, \|\cdot\|_E) \times (F, \|\cdot\|_F)$. Par définition cette injection est continue. Par la première question, l'application identité $i : (E, \|\cdot\|_E) \times (F, \|\cdot\|_F) \to (E \times F, N)$ est un homéomorphisme, donc par composition l'application $\varphi : x \in (E, \|\cdot\|_E) \to L \circ i \circ i_E(x) \in \mathbb{R}$ est aussi continue. On fait de même pour l'application $\psi : y \in (F, \|\cdot\|_F) \to L \circ i \circ i_F(y) \in \mathbb{R}$, et on a les candidats $\varphi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. Par linéarité, on vérifie que pour tout $(x,y) \in E \times F$, on a $L(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.
   Soit τ_p la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications $L : (E, \|\cdot\|_E) \times (F, \|\cdot\|_F) \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $\varphi \in E^*$ et $\psi \in F^*$ telles que $L(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Montrons dans un second temps que la topologie produit sur $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$ est τ_p. Par définition de la topologie faible, toute application L se décomposant de cette forme est continue pour $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$: en effet, l'application projection $\pi_E : (x,y) \in (E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*)) \mapsto x \in (E, \sigma(E, E^*))$ est continue, et puisque $\varphi \in E^*$, φ est aussi continue pour la topologie $\sigma(E, E^*)$. Ainsi, $\varphi \circ \pi_E : (E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*)) \to \mathbb{R}$ est continue. On peut faire de même avec la projection π_F, et montrer que $\psi \circ \pi_F : (E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*)) \to \mathbb{R}$ est continue. On obtient par somme que toute application $L : (E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*)) \to \mathbb{R}$ est continue, et $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$ est plus fine que τ_p.
   L'étape suivante consiste à montrer l'inclusion réciproque. D'une part, considérons toutes les applications L de la forme $L(x,y) = \varphi(x)$, pour tous les $\varphi \in E^*$. Alors, par définition de E^*, pour tout ouvert U de $\sigma(E, E^*)$, on a $U \times F \in \tau_p$. De même pour les ouverts V de $\sigma(F, F^*)$, on a $E \times V \in \tau_p$. Par intersection finie d'ouverts, on déduit que $\sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*) \subset \tau_p$. Ceci conclut cette première égalité de topologie.
   En conclusion, par définition de la topologie faible, τ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications de $(E \times F)^*$, qui par l'étape précédente s'écrivent de la forme

$\varphi \circ \pi_E + \psi \circ \pi_F$ où $\varphi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. C'est aussi la définition de la topologie produit vue dans la première étape, d'où l'égalité entre les deux topologies.

2. (Solution alternative, avec la propriété universelle)
   On considère l'application identité $id : (x,y) \in (E, \sigma(E,E^*)) \times (F, \sigma(F,F^*)) \mapsto (x,y) \in (E \times F, \tau)$. Montrer que les deux topologies sont équivalentes revient à montrer que cette application est un homéomorphisme.
   Montrons que id est continue. Puisque $(E \times F, \tau)$ est une topologie initiale, par la propriété universelle, cela revient à montrer que pour toute application $L \in (E \times F)^*$ (où la continuité est associée à la norme N), l'application $L \circ id : (E, \sigma(E,E^*)) \times (F, \sigma(F,F^*)) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue. Soit donc $L \in (E \times F)^*$. On remarque que l'on peut décomposer, par linéarité, $L(x,y) = L(x,0) + L(0,y)$. Posons $\varphi : x \mapsto L(x,0)$ et $\psi : y \mapsto L(0,y)$. La forme linéaire φ appartient à E^* : en effet, par définition de L et de la norme N, on a

$$\forall x \in E,\ |\varphi(x)| = |L(x,0)| \leqslant \|L\|_{(E\times F)^*} N(x,0) = \|L\|_{(E\times F)^*} \|x\|_E,$$

   donc φ est continue et $\|\varphi\|_{E^*} \leqslant \|L\|_{(E\times F)^*}$. Par définition des topologies faibles, on déduit que $\varphi : (E, \sigma(E,E^*)) \to \mathbb{R}$ est aussi continue. De la même manière, $\psi : (F, \sigma(F,F^*)) \to \mathbb{R}$ est aussi continue. Soit la projection $\pi_E : (x,y) \in (E, \sigma(E,E^*)) \times (F, \sigma(F,F^*)) \mapsto x \in (E, \sigma(E,E^*))$. Par définition de la topologie produit, π_E est continue. De même avec $\pi_F : (x,y) \in (E, \sigma(E,E^*)) \times (F, \sigma(F,F^*)) \mapsto y \in (F, \sigma(F,F^*))$. Ainsi, on peut décomposer $L \circ id = \varphi \circ \pi_E + \psi \circ \pi_F$ et par composition d'application linéaire (sur les bons espaces), on en déduit que $L \circ id$ est continue.
   Montrons que id^{-1} est continue. Puisque la topologie produit est une topologie initiale associée aux projections π_E et π_F définies ci-dessus (avec les mêmes topologies), on déduit par la propriété universelle que : id^{-1} est continue si et seulement si $\pi_E \circ id^{-1} : (E \times F, \tau) \to (E, \sigma(E,E^*))$ et $\pi_F \circ id^{-1} : (E \times F, \tau) \to (F, \sigma(F,F^*))$ sont continues. On peut le montrer pour $\pi_E \circ id^{-1}$, le raisonnement est similaire pour $\pi_F \circ id^{-1}$. Appliquons de nouveau la propriété universelle pour $\pi_E \circ id^{-1}$ car $\sigma(E,E^*)$ est une topologie initiale : $\pi_E \circ id^{-1} : (E \times F, \tau \to (E, \sigma(E,E^*))$ est continue si et seulement si pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, $\varphi \circ \pi_E \circ id^{-1} : (E \times F, \tau) \to \mathbb{R}$ est continue. Soit $\varphi \in E^*$. Par définition de la topologie faible, il suffit de montrer que $\varphi \circ \pi_E \circ id^{-1} \in (E \times F)^*$. On a

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ |\varphi \circ \pi_E \circ id^{-1}(x,y)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{E^*} \|x\|_E \leqslant \|\varphi\|_{E^*} N(x,y).$$

   On en déduit que $\varphi \circ \pi_E \circ id^{-1} \in (E \times F)^*$. Ceci conclut que id^{-1} est continue.
   Ainsi, id est bi-continue, et les deux topologies sont équivalentes.

Exercice 6. Les espaces c_0 et ℓ^∞ sont définis dans l'exercice 4. Vérifier que c_0 est convexe, fermé pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et qu'il n'est pas faiblement étoile fermé, on pourra déterminer son adhérence séquentielle faible étoile.

Solution de l'exercice 6.
On a déjà utilisé que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, il est complet donc fermé dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, n'hésitez pas à le vérifier. Par ailleurs c_0 est convexe car c'est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞.
Convergence faible étoile dans ℓ^∞ : soit $\left(u^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^∞ et $u \in \ell^\infty$. On a

$$u^{(k)} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v \in \ell^1, \quad L_{u^{(k)}}(v) - L_u(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_n^{(k)} - u_n\right) v_n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

On va montrer que la fermeture faible étoile de c_0 dans ℓ^∞ est ℓ^∞ tout entier.
Soit $u \in \ell^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite tronquée au rang k,

$$u^{(k)} = (u_0, \dots, u_k, 0, 0, \dots)$$

qui est nulle à partir du rang k donc dans c_0. Soit $v \in \ell^1$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_n - u_n^{(k)} \right) v_n \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n v_n \right| \leqslant \|u\|_\infty \sum_{n=k+1}^{\infty} |v_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \,.$$

car c'est le reste d'une série convergente.
On vient de montrer que tout $u \in \ell^\infty$ est limite faible étoile d'éléments de c_0, la fermeture séquentielle étant incluse dans la fermeture (fait général dans un espace topologique), on en déduit $\overline{c_0}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)} \supset \ell^\infty$, et on a donc égalité puisqu'on s'intéresse à la fermeture dans ℓ^∞. En particulier c_0 n'est pas $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$–fermé. □

Dans l'exercice suivant, on donne un exemple d'espace vectoriel normé E pour lequel la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et la topologie de la norme

- ont exactement les mêmes suites convergentes,
- sont distinctes car E est de dimension infinie (d'après le cours).

Exercice 7 (Théorème de Schur)**.** Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞ sont définis dans l'exercice 4.

1. Soit $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, x des éléments de ℓ^1. On suppose que $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x. Le but de la fin de l'exercice est de montrer que la suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans ℓ^1. On suppose par l'absurde que $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers x dans ℓ^1. Montrer qu'il existe une suite $\left(y^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 satisfaisant

$$y^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left\|y^{(n)}\right\|_1 = 1 \,.$$

2. Soit $j \in \mathbb{N}$, justifier que

$$\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

3. En utilisant la question précédente et le fait que, à $n \in \mathbb{N}$ fixé cette fois-ci, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$, construire deux suites $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissantes satisfaisant $j_0 = n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{3}{4} \quad \text{et pour tout } n \geqslant n_{k+1},\ \sum_{i=0}^{j_{k+1}-1} \left|y_i^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{8} \,.$$

4. On définit à présent la suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $\gamma_i = \operatorname{sgn}\left(y_i^{(n_k)}\right)$ pour $i \in [\![j_k, j_{k+1} - 1]\!]$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i y_i^{(n_k)} \geqslant \frac{3}{8}$$

et conclure.

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $u^{(n)} = x^{(n)} - x$ qui converge faiblement vers 0 mais pas fortement. Par définition de la limite, il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \geqslant n$ tel que $\left\|u^{(k_n)}\right\|_1 \geqslant \varepsilon$. La suite extraite $\left(u^{(k_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes de norme $\|\cdot\|_1 \geqslant \varepsilon$ de sorte qu'on peut définir la suite

$$y^{(n)} = \frac{u^{(k_n)}}{\left\|u^{(k_n)}\right\|_1} \quad \text{qui vérifie bien} \quad \left\|y^{(n)}\right\|_1 = 1\,.$$

   De plus, pour tout $L \in (\ell^1)^*$,

$$\left|L\left(y^{(n)}\right)\right| = \frac{\left|L\left(u^{(k_n)}\right)\right|}{\left\|u^{(k_n)}\right\|_1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left|L\left(u^{(k_n)}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad u^{(k_n)} \rightharpoonup 0\,.$$

   On en déduit que $y^{(n)} \rightharpoonup 0$ grâce au critère de convergence faible d'une suite.

2. Pour $j \in \mathbb{N}$, la suite $\delta_j = (\delta_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\delta_{j,j} = 1$ et $\delta_{j,n} = 0$ pour $n \neq j$ est dans ℓ^∞ de sorte que $L_{\delta_j} \in \left(\ell^1\right)^*$ et donc

$$y_j^{(n)} = L_{\delta_j}\left(y^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} L_{\delta_j}(0) = 0$$

   et par somme finie, on a bien $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \left|y_i^{(n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

   • Pour $k = 0$, on a $n_0 = j_0 = 0$. Concernant la première condition, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \left|y_i^{(0)}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$ et on peut donc choisir j_1 assez grand pour assurer $\displaystyle\sum_{i=0}^{j_1} \left|y_i^{(n)}\right| \geqslant \frac{3}{4}$. En utilisant la question précédente à j_1 fixé, il existe $n_1 > n_0 = 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j_1-1} \left|y_i^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{8}$.

   • Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que la propriété est vérifiée au rang k. Par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $n \geqslant n_{k+1}$,

$$\sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} \left|y_i^{(n)}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} > \frac{3}{4}$$

   et on peut donc choisir $j_{k+2} > j_{k+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=j_{k+1}}^{j_{k+2}-1} \left|y_i^{(n_{k+1})}\right| \geqslant \frac{3}{4}$. En utilisant la question précédente à j_{k+2} fixé, il existe $n_{k+2} > n_{k+1}$ tel que pour tout $n \geqslant n_{k+2}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j_{k+2}-1} \left|y_i^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{8}$. Ce qui conclut l'hérédité.

4. La suite γ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, on a donc $\gamma \in \ell^\infty$, de sorte que $L_\gamma \in \left(\ell^1\right)^*$ et

$$L_\gamma\left(y^{(n_k)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} L_\gamma(0) = 0\,.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} L_\gamma\big(y_i^{(n_k)}\big) &= \sum_{i=0}^{j_k-1} \gamma_i y_i^{(n_k)} + \sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} \big|y_i^{(n_k)}\big| + \sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} \gamma_i y_i^{(n_k)} \\ &\geqslant -\sum_{i=0}^{j_k-1} \big|y_i^{(n_k)}\big| + \frac{3}{4} - \sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} \big|y_i^{(n_k)}\big| \\ &\geqslant -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\,, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\displaystyle\sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} \big|y^{(n_k)}\big| = 1 - \sum_{i=0}^{j_{k+1}-1} \big|y^{(n_k)}\big| \leqslant 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Ce qui donne la contradiction recherchée.

On a montré dans les questions 3 à 6 que la convergence faible de la suite $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^1 implique sa convergence forte dans ℓ^1. L'implication réciproque étant toujours vraie, on peut en déduire le théorème de Schur.

□

Définition (Cône normal)**.** Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé, $C \subset E$ un convexe non vide et $x_0 \in C$. On définit le *cône normal* à C en x_0 comme

$$N_C(x_0) = \{L \in E^* \ : \ L(y - x_0) \leqslant 0\,, \forall y \in C\}\,.$$

Exercice 8 (Cône normal)**.**

1. Montrer que $N_C(x_0)$ est un cône convexe, fermé pour la topologie de la norme et pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ de E^*.
2. Que dire de $N_C(x_0)$ si x_0 est dans l'intérieur de C ?
3. Soit A une partie convexe de E.
   (a) Montrer que $\operatorname{int} A$ convexe. On rappelle qu'on a montré en cours que $\overline{A}$ est également convexe.
   (b) Si de plus A est d'intérieur non vide, montrer que $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$.
4. Soit $x_0 \in \partial C$. On suppose dans cette question que C est d'intérieur non vide. Montrer que $N_C(x_0)$ est non trivial (non réduit à $\{0\}$).
5. Soit $E = \ell^2$ et $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$. Montrer que C est convexe, fermé dans ℓ^2 et vérifier que $0 \in \partial C$. que dire de $N_C(0)$?
   Indication : on pourra utiliser que l'application

$$\ell^2 \to (\ell^2)^*, \quad u \mapsto \left(L_u : \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right)$$

   est un isomorphisme isométrique. C'est par exemple une conséquence du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

Solution de l'exercice 8.

1. • Pour tout $L \in N_C(x_0)$, on a pour tout $y \in C$, $L(y - x_0) \leqslant 0$ de sorte que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $(\lambda L)(y - x_0) \leqslant 0$ et donc $\lambda L \in N_C(x_0)$ qui est bien un cône.

   • On rappelle que $\sigma(E^*, E) \subset \tau_{\|\cdot\|_{E^*}}$, et par passage au complémentaire, si un ensemble est faiblement étoile fermé, alors il est également fermé pour la topologie de la norme.

   Montrons que $N_C(x_0)$ est faiblement étoile fermé. On a par définition et en rappelant que pour $L \in E^*$ et $y \in E$, $\Phi_{y-x_0}(L) = L(y - x_0)$,

$$N_C(x_0) = \bigcap_{y \in C} \{L \in E^* \ : \ L(y - x_0) \leqslant 0\} = \bigcap_{y \in C} \Phi_{y-x_0}^{-1}(]-\infty, 0]) \, .$$

   On a $]-\infty, 0]$ fermé dans $\mathbb{R}$ et $\Phi_{y-x_0} : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to \mathbb{R}$ continue par définition de la topologie faible étoile, on conclut que $N_C(x_0)$ est faiblement étoile fermé par intersection quelconque d'ensembles faiblement étoile fermés.

   • Soient $t \in [0, 1]$ et $L_1, L_2 \in N_C(x_0)$. Pour tout $y \in C$,

$$((1-t)L_1 + tL_2)(y - x_0) = (1-t)\underbrace{L_1(y - x_0)}_{\leqslant 0} + t\underbrace{L_2(y - x_0)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

   et on en déduit que $N_C(x_0)$ est convexe.

2. Si $x_0 \in \operatorname{int} C$, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset C$. Soit $L \in N_C(x_0)$, on a alors pour tout $y \in B_E(0, r)$, $x_0 + y \in B_E(x_0, r) \subset C$, et par conséquent $L(y) = L(x_0 + y - x_0) \leqslant 0$. Par symétrie de $B_E(0, r)$, on a également $-L(y) = L(-y) \leqslant 0$ et donc $L(y) = 0$ et $L = 0$. Ainsi $N_C(x_0) = \{0\}$.

3. Soit A une partie convexe de E.

   (a) Soient $x, y \in \operatorname{int} A$ et $t \in [0, 1]$. Par convexité de A, $z = (1-t)x + ty \in A$. Soit $r > 0$ tel que $B_E(x, r), B_E(y, r) \subset \operatorname{int} A$, on a alors $B_E(z, r) = (1-t)B_E(x, r) + tB_E(y, r) \subset A$ et donc $z \in \operatorname{int} A$.

   Vérifions $B_E(z, r) = (1-t)B_E(x, r) + tB_E(y, r)$. Si $w \in B_E(z, r)$ alors il existe $u \in B_E(0, r)$ tel que $w = z + u = (1-t)x + ty + u = (1-t)(x+u) + t(y+u) \in (1-t)B_E(x, r) + tB_E(y, r)$. Réciproquement, si $w \in (1-t)B_E(x, r) + tB_E(y, r)$, il existe $u, v \in B_E(0, r)$ tels que $w = (1-t)(x+u) + t(y+v) = z + (1-t)u + tv \in B_E(z, r)$ car $(1-t)u + tv \in B_E(0, r)$.

   (b) On suppose de plus A d'intérieur non vide : soit $\alpha \in \operatorname{int} A$ et soit $r > 0$ tel que $B_E(\alpha, r) \subset A$. Il suffit de vérifier que $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$ et par définition de l'adhérence, on aura $\overline{A} \subset \overline{\operatorname{int} A}$, l'inclusion réciproque découlant de $\operatorname{int} A \subset A$.

   Soit $x \in A$, vérifions que $[\alpha, x[\subset \operatorname{int} A$. Soit $y \in [\alpha, x[$ et $t \in [0, 1[$ tel que $y = (1-t)\alpha + tx$, on a alors par convexité de A,

$$B_E(y, (1-t)r) = (1-t)B_E(\alpha, r) + t\{x\} \subset A$$

   de sorte que $y \in \operatorname{int} A$ $(1 - t > 0)$. On peut alors prendre pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $y_n = (1 - t_n)\alpha + t_n x \in A$ et $y_n \to x$. Donc $x \in \overline{\operatorname{int} A}$.

4. On suppose dans cette question que C est d'intérieur non vide. On applique le théorème de séparation de Hahn–Banach (cas 1) avec $C_1 = \operatorname{int}(C)$ (convexe par ce qui précède et non vide par hypothèse) et $C_2 = \{x_0\}$ convexe disjoint de C_1, il existe alors $L \in E^*$ non nulle telle que pour tout $y \in \operatorname{int} C$,

$$L(y) \leqslant L(x_0) \, .$$

   On a montré que dans le cas d'un convexe d'intérieur non vide, $\operatorname{int} C$ est dense dans C, par continuité de L, on en déduit que pour tout $y \in C$, $L(y) \leqslant L(x_0)$ de sorte que $L \in N_C(x_0)$.

5. On peut écrire

$$C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} C_k \quad \text{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ C_k = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2 \ :\ |u_k| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la forme linéaire $L_k : \ell^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_k$ est continue puisque

$$|L_k(u)| = |u_k| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_2 \ .$$

Par composition avec $|\cdot|$, $\varphi_k : u \mapsto |u_k|$ est également continue et $C_k = \varphi_k^{-1}([0, \frac{1}{k}])$ est fermé. On en déduit que C est également fermé (intersection quelconque de fermés).

• Soient u, $v \in C$ et $t \in [0,1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|(1-t)u_k + tv_k| \leqslant (1-t)\,|u_k| + t\,|v_k| \leqslant \frac{1}{k}$$

donc C est convexe.

• Vérifions que C est d'intérieur vide dans ℓ^2, comme $0 \in C$, on aura en particulier $0 \in \partial C$. Pour cela, on va montrer que $\ell^2 \setminus C$ est dense dans ℓ^2.

Soit $u \in C$, on remarque que si $v \in \ell^2$ ne diffère de u qu'en un rang $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|u - v\| = |u_k - v_k|$. On peut alors définir $v^{(k)} \in \ell^2 \setminus C$ comme

$$v_n^{(k)} = u_n \text{ si } n \neq k \quad \text{et} \quad v_k^{(k)} = \frac{2}{k}\,.$$

On obtient

$$\left\|v^{(k)} - u\right\|_2 = \left| u_k - \frac{2}{k} \right| \leqslant \frac{3}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

• Montrons finalement que $N_C(0) = \{0\}$. Soit $L \in N_C(0)$ et soit $u \in \ell^2$ telle que $L = L_u$. Pour tout $v \in C$,

$$L_u(v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant 0\,.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, en évaluant L_u en $v = \pm\frac{1}{k} e_k \in C$ (e_k suite nulle sauf au rang k où elle vaut 1), on obtient $L_u(v) = \pm\frac{1}{k} u_k \leqslant 0$ et donc $u_k = 0$. On a bien $u = 0$ et $L_u = 0$.

□

Exercice 9 (Cône normal en dimension finie)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe contenant 0 (on suppose C non vide et on se ramène à 0 par translation) et soit $x_0 \in \partial C$.

1. Montrer que si C contient une base de $\mathbb{R}^d$, alors C est d'intérieur non vide.
2. En déduire que si C est d'intérieur vide, il existe L linéaire non nulle telle que $C \subset \ker L$.
3. Conclure.

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $(u_1, \dots, u_d) \sum_{i=1}^d \lambda_i$ une base de $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout i, $u_i \in C$. Comme de plus $0 \in C$, on a que C contient tout le simplexe engendré par $(0, u_1, \dots, u_d)$ qui est d'intérieur non vide. Plus précisément, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^d \lambda_i \leqslant 1$, on pose $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i$ et on a par convexité de C, $\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i \in C$ (on attribue λ_0 à 0).
   L'application $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x = \sum_{i=1}^d x_i u_i \mapsto (x_1, \dots, x_d)$ est (bien définie et) linéaire donc continue (dimension finie). L'ensemble

$$\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ \forall i,\, 0 < x_i < 1,\, x_1 + \dots + x_d < 1\}$$

   est ouvert dans $\mathbb{R}^d$ (et non vide) de sorte que $\phi^{-1}(\Delta)$ est ouvert non vide, et inclus dans C par définition de Δ.
2. Si C est d'intérieur vide. On remarque que si $C = \{0\}$, n'importe quelle forme linéaire non nulle convient, on suppose donc C non réduit à $\{0\}$, sinon il faut juste réfléchir un peu quand on prend des bases...
   Montrons que $\operatorname{vect}(C) \neq \mathbb{R}^d$. Rappelons pourquoi C contient une base de $\operatorname{vect}(C)$. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base de $\operatorname{vect}(C)$, $1 \leqslant p \leqslant d$. Par définition, chaque v_i est combinaison linéaire d'au plus d vecteurs de C, et on obtient une famille génératrice $\mathbb{G} \subset C$ (de taille au plus dp) de laquelle on peut extraire une famille libre et donc une base de $\operatorname{vect}(C)$ de taille p. D'après la question précédente, $p < d$ puisque C est d'intérieur vide. Donc $\operatorname{vect}(C)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^d$ qui est inclus dans un hyperplan vectoriel qui est le noyau d'une forme linéaire L non nulle.
3. Si C est d'intérieur vide, on vient de voir que $C \subset \ker L$ où L est une forme linéaire non nulle, continue (dimension finie). On a en particulier $L \in N_C(0)$ et donc $N_C(0)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
   Si C est d'intérieur non vide, on utilise l'exercice 8 pour conclure que $N_C(0)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

□

On s'intéresse au cône normal d'un convexe notamment en raison de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une fonction convexe, que vous avez peut-être déjà croisée, sinon cela vous fait un exercice supplémentaire :

Proposition 3 (Condition d'optimalité)**.** *Soit $C \subset E$ convexe fermé non vide, $J : E \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable, alors*

$$x_* \in C \text{ minimise } J \text{ sur } C \quad \Longleftrightarrow \quad -DJ(x_*) \in N_C(x_*),$$

c'est-à-dire

$$DJ(x_*)(y - x_*) \geqslant 0 \qquad \forall y \in C.$$