Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 4 – Espaces séparables, espaces réflexifs

Exercice 1 (Topologie faible étoile sur le dual de ℓ^∞)**.** Soient $E = \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le forme linéaire $L_n : (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que L_n est continue et déterminer sa norme.
2. Peut-on extraire une sous-suite faiblement étoile convergente $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Est-ce que cela vous surprend ?

On a énoncé en cours le corollaire suivant du théorème de Kakutani.

Corollaire 1. *Soit E un espace de Banach réflexif et $K \subset E$. On suppose que K est un convexe fermé (fortement) et borné, alors K est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Exercice 2.

1. Prouver le corollaire 1.
2. Pensez-vous qu'il puisse s'agir d'une caractérisation des ensembles faiblement compacts dans un espace réflexif E ?

Exercice 3 (La séparabilité est un invariant topologique)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques homéomorphes. Montrer que X est séparable si et seulement si Y est séparable.

Exercice 4 (Exemples d'espaces séparables)**.**

1. Rappeler pourquoi un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie est séparable.
2. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ un ensemble dénombrable de X. Justifier que $\overline{\mathrm{vect}(X)}$ est séparable.
3. On rappelle que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable. Montrer qu'en revanche, our tout $p \in [1, +\infty[$, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable.

Exercice 5 (Séparabilité de L^p)**.** Soit $1 \leqslant p < \infty$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on note $\mathrm{L}^p(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ mesurable et } \int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x < +\infty \right\}$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ pour $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_p$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$. Le but de l'exercice est de montrer que $\left(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)$ est séparable.

1. On introduit le sous-ensemble de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$:

$$D = \{\mathbb{1}_R \ : \ R \in \mathcal{R}\} \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \left\{ \prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k[\subset \mathbb{R}^d \ : \ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

avec la convention $]a_k, b_k[= \emptyset$ si $b_k \leqslant a_k$. Justifier que D est dénombrable et $\mathrm{Vect}(D)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Indication.– On pourra utiliser la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.

2. Conclure.

Exercice 6 (Non séparabilité de L^∞)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. On note $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ \begin{array}{l} f \text{ mesurable et il existe } C \geqslant 0 \\ |f| \leqslant C \text{ presque partout dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \inf\{C \geqslant 0 \ : \ |f| \leqslant C \text{ presque partout dans } \Omega\}$ pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_\infty$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$ (attention, à ne pas confondre avec une norme "sup" sur un espace de fonctions continues).
Montrer que $\left(\mathrm{L}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\right)$ n'est pas séparable. On pourra s'inspirer de l'exercice 4 de la feuille 3 de TD.

Exercice 7 (Dual et réflexivité de ℓ^p, $1 < p < \infty$)**.** Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Pour $v = (v_n)_n \in \ell^q$, on définit $L_v : \ell^p \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ et $I_p : \ell^q \to (\ell^p)^*$, $v \mapsto L_v$.
   Montrer que I_p est une isométrie linéaire bijective.
2. Soit l'application ajointe $I_p^* : \xi \in (\ell^p)^{**} \mapsto \xi \circ I_p \in (\ell^q)^*$. Montrer que I_p^* est une isométrie linéaire bijective.
3. En déduire que ℓ^p est réflexif.