Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 4 – Espaces séparables, espaces réflexifs

Exercice 1 (Topologie faible étoile sur le dual de ℓ^∞)**.** Soient $E = \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le forme linéaire $L_n : (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que L_n est continue et déterminer sa norme.
2. Peut-on extraire une sous-suite faiblement étoile convergente $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Est-ce que cela vous surprend ?

On a énoncé en cours le corollaire suivant du théorème de Kakutani.

Corollaire 1. *Soit E un espace de Banach réflexif et $K \subset E$. On suppose que K est un convexe fermé (fortement) et borné, alors K est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Exercice 2.

1. Prouver le corollaire 1.
2. Pensez-vous qu'il puisse s'agir d'une caractérisation des ensembles faiblement compacts dans un espace réflexif E ?

Exercice 3 (La séparabilité est un invariant topologique)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques homéomorphes. Montrer que X est séparable si et seulement si Y est séparable.

Exercice 4 (Exemples d'espaces séparables)**.**

1. Rappeler pourquoi un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie est séparable.
2. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et X un ensemble dénombrable de E. Justifier que $\overline{\mathrm{vect}(X)}$ est séparable.
3. On rappelle que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable. Montrer qu'en revanche, our tout $p \in [1, +\infty[$, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable.

Exercice 5 (Séparabilité de L^p)**.** Soit $1 \leqslant p < \infty$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on note $\mathrm{L}^p(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ mesurable et } \int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x < +\infty \right\}$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ pour $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_p$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$. Le but de l'exercice est de montrer que $\left(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)$ est séparable.

1. On introduit le sous-ensemble de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$:

$$D = \{\mathbb{1}_R \,:\, R \in \mathcal{R}\} \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \left\{ \prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k[\subset \mathbb{R}^d \,:\, a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

avec la convention $]a_k, b_k[= \emptyset$ si $b_k \leqslant a_k$. Justifier que D est dénombrable et $\mathrm{Vect}(D)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Indication.– On pourra utiliser la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.

2. Conclure.

Exercice 6 (Non séparabilité de L^∞)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. On note $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,:\, \begin{array}{l} f \text{ mesurable et il existe } C \geqslant 0 \\ |f| \leqslant C \text{ presque partout dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

quotienté par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, qu'on munit de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \inf\{C \geqslant 0 \,:\, |f| \leqslant C \text{ presque partout dans } \Omega\}$ pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, on notera souvent $\|\cdot\|_\infty$ pour $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$ (attention, à ne pas confondre avec une norme "sup" sur un espace de fonctions continues).
Montrer que $\left(\mathrm{L}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\right)$ n'est pas séparable. On pourra s'inspirer de l'exercice 4 de la feuille 3 de TD.

Exercice 7 (Dual et réflexivité de ℓ^p, $1 < p < \infty$)**.** Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Pour $v = (v_n)_n \in \ell^q$, on définit $L_v : \ell^p \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ et $I_p : \ell^q \to (\ell^p)^*$, $v \mapsto L_v$.

   Montrer que I_p est une isométrie linéaire bijective.

2. Soit l'application ajointe $I_p^* : \xi \in (\ell^p)^{**} \mapsto \xi \circ I_p \in (\ell^q)^*$. Montrer que I_p^* est une isométrie linéaire bijective.

3. En déduire que ℓ^p est réflexif.

Solution de l'exercice 7. 1. Soit $v \in \ell^q$ et $L_v : u \in \ell^p \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \in \mathbb{R}$, où $p \in]1; +\infty[$ et $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

- L_v est bien définie : par l'inégalité de Hölder :

$$\forall u \in \ell^p, \ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leqslant \|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^q}.$$

  En particulier, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, donc L_v est bien définie sur ℓ^p.

- L_v est linéaire : pour tout u, $w \in \ell^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque les séries $\sum u_n v_n$ et $\sum w_n v_n$ convergent absolument, on a

$$\lambda L_v(u) + L_v(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + v_n) v_n = L_v(\lambda u + w).$$

- L_v est continue : par le premier point, on a
$$\forall u \in \ell^p,\ |L_v(u)| \leqslant \|u\|_{\ell^p}\|v\|_{\ell^q},$$
donc $L_v \in (\ell^p)^*$ et $\|L_v\|_{(\ell^p)^*} \leqslant \|v\|_{\ell^q}$.
- On peut de plus déterminer la norme de L_v. Si $v = 0$, on obtient naturellement $\|L_v\|_{(\ell^p)^*} = 0$. Si $v \neq 0$, on introduit la suite w définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$w_n = \frac{v_n}{|v_n|^{2-q}\|v\|_{\ell^q}^{q/p}} \text{ si } v_n \neq 0, \quad \text{et } w_n = 0 \text{ sinon.}$$
On calcule la norme de w, avec $(q-1)p = q$:
$$\|w\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_n|^{(q-1)p}}{\|v\|_{\ell^q}^q} = 1,$$
et de plus
$$L_v(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2}{|v_n|^{2-q}\|v\|_{\ell^q}^{q/p}} = \|v\|_{\ell^q}.$$
Ainsi $\|L_v\|_{(\ell^p)^*} = \sup_{\|u\|_{\ell^p}=1} |L_v(u)| \geqslant \|v\|_{\ell^q}$, et avec l'inégalité montrée dans la continuité, on déduit $\|L_v\|_{(\ell^p)^*} = \|v\|_{\ell^q}$.

On considère à présent l'application $I_p : v \in \ell^q \mapsto L_v \in (\ell^p)^*$.

- I_p est bien définie, car par les points précédents, $L_v \in (\ell^p)^*$.
- I_p est linéaire : pour tout $u, w \in \ell^q$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in \ell^p$, on a $v+\lambda w \in \ell^q$ (car c'est un ev) donc $L_{v+\lambda w}$ est bien définie, et (toutes les séries sont absolument convergentes)
$$L_{v+\lambda w}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(v+\lambda w)_n u_n = L_v(u) + \lambda L_w(u) = (L_v + \lambda L_w)(u).$$
Cette égalité étant vraie pour tout $u \in \ell^p$, on a dans $(\ell^p)^*$, $I_p(v+\lambda w) = I_p(v) + \lambda I_p(w)$.
- I_p est une isométrie : pour tout $v \in \ell^q$, par ce qu'on a montré sur L_v, on a
$$\|I_p(v)\|_{(\ell^p)^*} = \|L_v\|_{(\ell^p)^*} = \|v\|_{\ell^q}.$$
On en déduit en particulier que I_p est injective.
- I_p est finalement surjective. Si $L \in (\ell^p)^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n := L(e^{(n)})$, où $e^{(n)} = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$, puis la suite v de terme général v_n.
Montrons que v appartient à ℓ^q. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la suite w^N de terme général
$$w_n^N = \frac{v_n}{|v_n|^{2-q}\left(\sum_{i=1}^N |v_i|^q\right)^{1/q}} \text{ si } n \leqslant N \text{ et } v_n \neq 0, \quad w_n^N = 0 \text{ sinon.}$$
Elle satisfait $\|w^N\|_{\ell^p} = 0$ si les N premiers termes de v sont nuls, et sinon
$$\|w^N\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{N} |w_n^N|^p = \sum_{n=1}^{N} \frac{|v_n|^{p(q-1)}}{\left(\sum_{i=1}^N |v_i|^q\right)^{p/q}} = 1.$$

De plus, si $w^N = 0$, on a $L(w^N) = 0$, et si $w^N \neq 0$,

$$L(w^N) = \sum_{n=1}^{N} v_n w_n^N = \sum_{n=1}^{N} \frac{|v_n|^q}{\left(\sum_{i=0}^{N} |v_i|^q\right)^{1/p}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |v_n|^q\right)^{1/q}.$$

Par continuité de L, on a $\left(\sum_{n=1}^{N} |v_n|^q\right)^{1/q} = |L(w^N)| \leqslant \|L\|_{(\ell^p)^*} \|w^N\|_{\ell^p} = \|L\|_{(\ell^p)^*}$. Ainsi, Puisque cette borne est uniforme en N, on déduit que $(v_n)_n \in \ell^q$.

Il reste à montrer que $L = L_v$. Par définition de v, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L(e^{(n)}) = v_n = L_v(e^{(n)})$. Par linéarité, $L = L_v$ sur $\mathrm{Vect}\{e^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$. Cependant, $\mathrm{Vect}\{e^{(n)}\}$ est dense dans ℓ^p, donc par continuité de $L - L_v$, on a $L = L_v$ sur ℓ^p, donc $L = L_v$.

Ainsi, I_p est surjective.

On a donc montré que I_p est une isométrie linéaire bijective.

2.
- Montrons que I_p^* est bien définie. Soit $\xi \in (\ell^p)^{**}$. Pour tout $v \in \ell^q$, $I_p(v) \in (\ell^p)^*$, donc $\xi(I_p(v)) = (\xi \circ I_p)(v)$ est bien définie, donc I_p^* aussi, avec pour tout $v \in \ell^q$, $(I_p^*(\xi))(v) = \xi(I_p(v))$.
- I_p^* est linéaire : soit $\xi, \zeta \in (\ell^p)^{**}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \ell^q$, alors $\xi + \lambda\zeta \in (\ell^p)^{**}$ (car c'est un ev), et on a

$$\begin{aligned} I_p^*(\xi + \lambda\zeta)(v) &= (\xi + \lambda\zeta)(I_p(v)) = \xi(I_p(v)) + \lambda\zeta(I_p(v)) \\ &= I_p^*(\xi)(v) + \lambda I_p^*(\zeta)(v) = (I_p^*(\xi) + \lambda I_p^*(\zeta))(v) \end{aligned}$$

d'où l'égalité $I_p^*(\xi + \lambda\zeta) = I_p^*(\xi) + \lambda I_p^*(\zeta)$ dans $(\ell^q)^*$, et I_p^* est linéaire.
- I_p^* est une isométrie : soit $\xi \in (\ell^p)^{**}$, on a

$$\|I_p^*(\xi)\|_{(\ell^q)^*} = \sup_{\|v\|_{\ell^q}=1} |\xi \circ I_p(v)| = \sup_{\|v\|_{\ell^q}=1} |\xi(I_p(v))|$$

or $I_p : v \in \ell^q \mapsto L_v \in (\ell^p)^*$ est une isométrie bijective

$$\|I_p^*(\xi)\|_{(\ell^q)^*} = \sup_{\|L\|_{(\ell^p)^*}=1} |\xi(L)| = \|\xi\|_{(\ell^p)^{**}}.$$

Ainsi, I_p^* est une isométrie, donc en particulier bijective.
- Il reste à montrer que I_p^* est surjective. Soit $L \in (\ell^q)^*$. Soit v l'unique suite de ℓ^p telle que $L_v = L$ (possible, car I_p est bijective !). Alors $\Phi_v : \Lambda \in (\ell^p)^* \mapsto \Lambda(v) \in \mathbb{R}$ appartient à $(\ell^p)^{**}$, et on a pour tout $u \in \ell^q$,

$$I_p^*(\Phi_v)(u) = \Phi_v(I_p(u)) = \Phi_v(L(u)) = L_u(v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = L(v),$$

d'où $I_p^*(\Phi_v) = L$ dans $(\ell^q)^*$. Ainsi, I_p^* est surjective.

On en déduit que I_p^* est une isométrie linéaire bijective.

3. Montrons que ℓ^p est réflexif, ou en d'autres termes, que l'application $J : v \in \ell^p \mapsto \Phi_v \in (\ell^p)^{**}$ est surjective. Soit $\Phi \in (\ell^p)^{**}$. Il existe un unique $L \in (\ell^q)^*$ tel que $I_p^*(\Phi) = L$, et de plus il existe un unique $v \in \ell^p$ tel que $L = I_p(v)$. On a montré qu'il existe une bijection entre ℓ^p et $(\ell^p)^{**}$, mais il reste à vérifier que $\Phi = \Phi_v$ pour que l'application corresponde à J. Par définition de v et de L, on a pour tout $u \in \ell^q$

$$I_p^*(\Phi - \Phi_v)(u) = L(u) - \Phi_v \circ I_p(u) = L(u) - \Phi_v(L_u) = L(u) - L_u(v) = 0.$$

Puisque I_p^* est injective, on a $\Phi = \Phi_v$. Ainsi, pour tout $\Phi \in (\ell^p)^{**}$, il existe un unique $v \in \ell^p$ tel que $\Phi = \Phi_v = J(v)$, donc J est surjective et ℓ^p est réflexif.

□