Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 5 – Espaces uniformément convexes, espaces L^p, espaces de Hilbert

Exercice 1 (Dual et réflexivité de ℓ^p, $1 < p < \infty$)**.** Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Pour $v = (v_n)_n \in \ell^q$, on définit $L_v : \ell^p \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ et $I_p : \ell^q \to (\ell^p)^*$, $v \mapsto L_v$.
   Montrer que I_p est une isométrie linéaire bijective.
2. En déduire que ℓ^p est réflexif.

Exercice 2 (Convergence dominée L^p)**.** Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ telle que :

- il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;
- il existe $g \in \mathrm{L}^p(X, \mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.

Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathrm{L}^p(X, \mu)$.

Exercice 3 (Opérateurs de composition)**.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $1 \leqslant p, q < \infty$. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et satisfaisant

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\Phi(t)| \leqslant C\left(1 + |t|^{\frac{q}{p}}\right).$$

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, on a $\Phi \circ f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$.
2. On va montrer que l'application (non linéaire)

   $$f \in \mathrm{L}^q(\Omega) \longmapsto \Phi \circ f \in \mathrm{L}^p(\Omega),$$

   est continue par critère séquentiel. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{L}^q(\Omega)$ qui converge vers f dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$, et telle que $(\Phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\Phi \circ f$ dans $L^p(\Omega)$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\left\|\Phi \circ f_{\varphi(n)} - \Phi \circ f\right\|_p \geqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f_{\varphi(n)} - f\|_q \leqslant 2^{-n}.$$

   (b) On pose $E_n := \left\{x \in \Omega \ :\ |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| > 2^{-n/2}\right\}$. Montrer que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction $g \in L^q(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leqslant g$ *p.p.*.
   (d) Aboutir à une contradiction en montrant que $\left\|\Phi \circ f_{\varphi(n)} - \Phi \circ f\right\|_p \to 0$ en utilisant l'hypothèse de croissance sur Φ.

Proposition 1 (Radon–Riesz)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. Alors*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\|_E \to \|x\|_E \end{cases}.$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer la proposition 1 énoncée en cours.

1. Soit E un espace vectoriel normé, on a dit en cours que $(E, \sigma(E, E^*))$ était un espace vectoriel topologique. Justifiez-le à partir de la propriété universelle de la topologie initiale.
2. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge faiblement vers $x \in E$ et satisfait de plus $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$. On suppose que $x \neq 0$ et on définit pour tout n assez grand

$$y = \frac{x}{\|x\|_E} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E}\,.$$

   (a) Montrer que $y_n \rightharpoonup y$.

   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|_E = 1$.

   (c) Conclure que $\|y_n - y\|_E \to 0$ puis $\|x_n - x\|_E \to 0$.
3. Conclure la preuve de la proposition.

Exercice 5 (Théorème de Hellinger–Toeplitz, continuité des endomorphismes hermitiens)**.** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $T : H \to H$ un endomorphisme *hermitien*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Alors T est automatiquement continu.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit L une forme linéaire continue.

1. Rappeler le théorème de représentation de Riesz.
2. Soit $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer, sans utiliser de résultat dépendant de l'axiome du choix, qu'il existe un prolongement $\widetilde{L} : H \to \mathbb{K}$ satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$.
3. Montrer l'unicité du prolongement satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$.

On vient donc de montrer le résultat suivant :

Théorème 2 (Prolongement de formes linéaires continues définies sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert)**.**
Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe), $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé *de H, et $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique prolongement $\widetilde{L} : H \to \mathbb{K}$ linéaire continu satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$, donné explicitement par $\widetilde{L} = L \circ p_F$, où $p_F : H \to F$ est la projection orthogonale sur F.*

Petite comparaison avec le théorème de prolongement de Hahn–Banach. Dans le cadre hilbertien, insistons sur les points suivants :

- Le prolongement est *unique* ici.
- La preuve est constructive et le prolongement est explicite, elle repose sur le théorème de représentation de Riesz et non sur le lemme de Zorn.
- On suppose que F est *fermé* (pour que la projection orthogonale existe), hypothèse absente du théorème de prolongement de Hahn–Banach général, qui fonctionne pour F quelconque (fermé ou non).