Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2026 – 2027 — Analyse approfondie

Enseignant·e·s : Sebastian Bechtel, Blanche Buet et Frédéric Valet.

Feuille 5 – Espaces uniformément convexes, espaces L^p, espaces de Hilbert

Exercice 1 (Convergence dominée L^p)**.** Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ telle que :

- il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;
- il existe $g \in \mathrm{L}^p(X, \mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.

Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathrm{L}^p(X, \mu)$.

Solution de l'exercice 1. Quitte à modifier f, g et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f partout sur X, et que cette suite elle est dominée par g partout sur X. En passant à la limite simple, on a $\|f\| \leqslant g$. En particulier f et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $L^p(X, \mu)$.
Alors, la suite $((f_n - f)^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur X et y est dominée par $2^p g^p$ qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on a $\|f_n - f\|_p^p = \int_X \|f_n(x) - f(x)\|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$. □

Exercice 2 (Opérateurs de composition)**.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $1 \leqslant p, q < \infty$. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et satisfaisant

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\Phi(t)| \leqslant C\left(1 + |t|^{\frac{q}{p}}\right).$$

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, on a $\Phi \circ f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$.
2. On va montrer que l'application (non linéaire)

$$f \in \mathrm{L}^q(\Omega) \longmapsto \Phi \circ f \in \mathrm{L}^p(\Omega),$$

est continue par critère séquentiel. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{L}^q(\Omega)$ qui converge vers f dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$, et telle que $(\Phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\Phi \circ f$ dans $L^p(\Omega)$.

   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\Phi \circ f_{\varphi(n)} - \Phi \circ f\right\|_p \geqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f_{\varphi(n)} - f\|_q \leqslant 2^{-n}.$$

   (b) On pose $E_n := \left\{x \in \Omega \ :\ |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| > 2^{-n/2}\right\}$. Montrer que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction $g \in L^q(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leqslant g$ *p.p.*.
   (d) Aboutir à une contradiction en montrant que $\left\|\Phi \circ f_{\varphi(n)} - \Phi \circ f\right\|_p \to 0$ en utilisant l'hypothèse de croissance sur Φ.

Proposition 1 (Radon–Riesz)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. Alors*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\|_E \to \|x\|_E \end{cases} .$$

Exercice 3. Le but de l'exercice est de montrer la proposition 1 énoncée en cours.

1. Soit E un espace vectoriel normé, on a dit en cours que $(E, \sigma(E, E^*))$ était un espace vectoriel topologique. Justifiez-le à partir de la propriété universelle de la topologie initiale.
2. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge faiblement vers $x \in E$ et satisfait de plus $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$. On suppose que $x \neq 0$ et on définit pour tout n assez grand
$$y = \frac{x}{\|x\|_E} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E} .$$
   (a) Montrer que $y_n \rightharpoonup y$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|_E = 1$.
   (c) Conclure que $\|y_n - y\|_E \to 0$ puis $\|x_n - x\|_E \to 0$.
3. Conclure la preuve de la proposition.

Preuve de la proposition 1. 1.

2. (a) On applique le critère de convergence : pour $L \in E^*$,
$$|L(y_n) - L(y)| \leqslant \underbrace{\left(\frac{1}{\|x_n\|_E} - \frac{1}{\|x\|_E} \right)}_{\to 0} \underbrace{|L(x_n)|}_{\leqslant \|L\|_{E^*}\|x_n\|_E \text{ borné}} + \frac{1}{\|x\|_E} \underbrace{|L(x_n) - L(x)|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$
   On obtient $y_n \rightharpoonup y$.
   (b) On en déduit que $\frac{1}{2}(y_n + y) \rightharpoonup y$ (on utilise ici que $\sigma(E, E^*)$ est une topologie d'e.v.t.) et par semi-continuité inférieure de la norme par rapport à la convergence faible (cours), on obtient
$$1 = \|y\|_E \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \|y_n + y\|_E \leqslant \frac{1}{2} \|y_n\|_E + \frac{1}{2} \|y\|_E \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \|y_n + y\|_E = 1 .$$
   (c) Par uniforme convexité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$\left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|_E > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|y - y_n\|_E < \varepsilon .$$
   On a donc $\|y_n - y\|_E \to 0$. Par inégalité triangulaire, on a
$$\|x_n - x\|_E = \| \|x_n\|_E y_n - \|x\|_E y \|_E \leqslant \underbrace{\|x_n\|_E}_{\text{borné}} \|y_n - y\|_E + \|y\|_E \, |\|x_n\|_E - \|x\|_E| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$
3. L'implication "⇒" suit de la continuité de la norme vis-à-vis de la toplogie qu'elle induit et du fait que la convergence forte entraine la convergence faible. La réciproque est ce qu'on a montré dans la question 2.

□

Exercice 4 (Théorème de Hellinger–Toeplitz, continuité des endomorphismes hermitiens)**.** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $T : H \to H$ un endomorphisme *hermitien*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Alors T est automatiquement continu.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit L une forme linéaire continue.

1. Rappeler le théorème de représentation de Riesz.
2. Soit $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer, sans utiliser de résultat dépendant de l'axiome du choix, qu'il existe un prolongement $\widetilde{L} : H \to \mathbb{K}$ satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$.
3. Montrer l'unicité du prolongement satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$.

Démonstration.

1. Soit H un espace de Hilbert, et L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que, pour tout $b \in H$, on ait $L(b) = \langle a, b\rangle$. On a de plus $\|L\|_{H^*} = \|a\|_H$.
2. Puisque F est un sous-espace vectoriel fermé dans H, F est aussi un espace de Banach, et un espace de Hilbert muni du même produit scalaire que sur H. On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz : il existe un unique $a \in F$ tel que, pour tout $x \in F$, $L(x) = \langle a, x\rangle$. On peut donc poser $\widetilde{L} : x \in \mathbb{R} \mapsto \langle a, x\rangle$. C'est une forme linéaire et un prolongement de L. On vérifie la continuité : par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\widetilde{L}(x)| \leqslant |x||a|$ donc $\widetilde{L}$ est continue avec $\|\widetilde{L}\|_{H^*} \leqslant \|a\|_H$. Si $a = 0$, on a l'égalité ; sinon, on obtient l'égalité en $x = \frac{a}{\|a\|_H}$. On déduit que $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|a\|_H = \|L\|_{\widetilde{F}}$.
3. Il reste à vérifier l'unicité du prolongement : si $T \in H^*$ prolonge L avec $\|T\| = \|L\|$, par le théorème de Riesz qu'on applique cette fois à H tout entier, il existe un unique $b \in H$ tel que $T(x) = \langle x, b\rangle$ pour tout $x \in H$, avec $\|T\| = \|b\|$. Comme $T|_F = L = \langle a, \cdot\rangle|_F$, on a $\langle b - a, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$, donc $b - a \in F^\perp$. Écrivons $b = a + (b - a)$, décomposition orthogonale ($a \in F$, $b - a \in F^\perp$) ; par Pythagore,
$$\|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b - a\|^2 .$$
Or $\|b\| = \|L\|_{H^*} = \|a\|$, donc $\|b - a\|^2 = 0$, i.e. $b = a$, donc $T = \widetilde{L}$.

□

On vient donc de montrer le résultat suivant :

Théorème 2 (Prolongement de formes linéaires continues définies sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert)**.**
Soit $(H, <\cdot, \cdot>)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe), $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé *de H, et $L : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique prolongement $\widetilde{L} : H \to \mathbb{K}$ linéaire continu satisfaisant $\|\widetilde{L}\|_{H^*} = \|L\|_{F^*}$, donné explicitement par $\widetilde{L} = L \circ p_F$, où $p_F : H \to F$ est la projection orthogonale sur F.*

Petite comparaison avec le théorème de prolongement de Hahn–Banach. Dans le cadre hilbertien, insistons sur les points suivants :

- Le prolongement est *unique* ici.
- La preuve est constructive et le prolongement est explicite, elle repose sur le théorème de représentation de Riesz et non sur le lemme de Zorn.

- On suppose que F est *fermé* (pour que la projection orthogonale existe), hypothèse absente du théorème de prolongement de Hahn–Banach général, qui fonctionne pour F quelconque (fermé ou non).