Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027

Enseignante : Blanche Buet, merci à mes prédécesseur/euse Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Exercices – Calcul différentiel

On se place dans le cadre du programme de l'agrégation concernant le calcul différentiel, on considère des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou d'un espace vectoriel de dimension finie, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Étant donnés deux espaces vectoriels normés de dimension finie E et F, U un ouvert de E et $f : U \subset E \xrightarrow{F}$ une application différentiable, on notera la différentielle de f au point $x \in U : Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$. On notera $Df(x)(h)$ ou $Df(x).h$ l'évaluation de cette application linéaire en un vecteur $h \in E$. On rappelle que les notations $d_x f(h)$ et $D_x f(h)$ sont tout autant utilisées dans la littérature.

1 Applications différentiables

Exercice 1 (Applications bilinéaires)**.** Soit E_1, E_2 et F des evn de dimension finie et $B : E_1 \times E_2 \times \to F$ une application bilinéaire.

1. Montrer que B est différentiable et expliciter sa différentielle.
2. Montrer que $DB : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1, \times E_2, F)$ est linéaire et B de classe C^1.
3. Montrer que $\mu : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.
4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (en particulier de dimension finie), montrer $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est C^1. Expliciter sa différentielle.
5. Soient E, F et G des evn de de dimension finie, montrer que $C : (L, K) \mapsto K \circ L$ est C^1 de $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ vers $\mathcal{L}(E, G)$. Expliciter sa différentielle.

Exercice 2 (Différentielle et dérivée)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$. Soit $x \in U$, montrer que f est différentiable en x si et seulement si elle y est dérivable. Expliciter la relation en $Df(x)$ et $f'(x)$ dans ce cas.

Exercice 3 (Règle de Leibniz)**.** Soient E, F_1, F_2 et G des evn de dimension finie, U un ouvert de E et $B : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire. Soient $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ différentiables en $x \in U$. Montrer que $g = B(f_1, f_2)$ est différentiable en x et calculer $Dg(x)$.

Exercice 4 (Application multilinéaire)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_k, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E_1 \times \ldots \times E_k \to F$ une application k–linéaire. On rappelle qu'en dimension finie, une application k–linéaire est continue et il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k$,

$$\|f(x)\|_F \leqslant M \prod_{i=1}^{k} \|x_i\|_{E_i} .$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. On suppose que $E_1 = \ldots = E_k$ que l'on note E. Montrer que $g : E \to F$, $x \mapsto f(x, \ldots, x)$ est différentiable et pour $x, h \in E$,

$$Dg(x).h = f(h, x, \ldots, x) + f(x, h, x, \ldots, x) + \ldots + f(x, \ldots, x, h) . \tag{1}$$

Exercice 5 (Composée d'applications différentiables)**.** Soient $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de la fonction F définie par

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1), v(x_1, x_2)) .$$

Exercice 6 (Inverse d'une matrice)**.** Montrer que l'application $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to M^{-1} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est de classe C^1, et déterminer sa différentielle.

Exercice 7 (Gradient)**.** On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme euclidienne. Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels l'application $n : y \in \mathbb{R}^d \to \|y\| \in \mathbb{R}$ est différentiable. En ces points, déterminer la différentielle de n ainsi que son vecteur gradient.

Exercice 8 (Polynômes)**.** Montrer que les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ sont C^1.

Exercice 9 (Différentielle du déterminant)**.** Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant.

1. Montrer que det est différentiable en Id et expliciter sa différentielle.
2. En déduire que det est différentiable sur $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et expliciter sa différentielle.

Exercice 10 (Un calcul explicite)**.** Soient $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et $g : (y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $h = g \circ f$. Justifier que h est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 11 (Un contre-exemple)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$.
3. Est-ce que f est différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 12 (Un autre contre-exemple)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$ si $x = (x_1, x_2) \neq 0$.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que f est de classe C^1 ?

2 Accroissements finis et conséquences

Exercice 13 (Suite de fonctions différentiables)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe borné. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^m$;
- il existe $g : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ telle que $Df_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ uniformément.

1. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, pour tout $x, y \in U$ on a

$$\|(f_p(x) - f_p(y)) - (f_q(x) - f_q(y))\| \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty \|y - x\| \tag{2}$$

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U, vers une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$.
3. Montrer que f est différentiable sur U et que $Df = g$.

Exercice 14 (Série de fonctions différentiables)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe borné. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(x_0)$ converge ;
- la série de fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$ converge uniformément sur U.

Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge uniformément sur U, que la somme est une fonction différentiable sur U, et que $D\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k$.

Exercice 15 (Différentiabilité de l'exponentielle)**.** Soit $\exp : L \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Montrer que exp est bien définie.
2. Montrer que exp est différentiable sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et exprimer $D\exp(L).H$ $(L, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ sous forme d'une série.
3. Soient L et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $LH = HL$, vérifier que $D\exp(L).H = \exp(L)H$.

Exercice 16 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que la fonction $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $v(x_1, x_2) = \int_0^{g(x_2)} f(x_1, s)\,\mathrm{d}s$ est de classe C^1, et calculer sa différentielle.

3 Différentielles d'ordre supérieur et formules de Taylor

Exercice 17 (Polynômes)**.** Montrer que les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ sont C^∞.

Exercice 18 (Déterminant C^∞ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)**.** Montrer que det est C^∞ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et expliciter sa différentielle en tout point. On pourra utiliser l'exercice 9.

Exercice 19. Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E \to F$ de classe C^2 satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que pour tout $x \in E$,

1. $Df(x).x = 2f(x)$,
2. $D^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$.

Exercice 20. Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to F$ une application continue sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$ et satisfaisant $f(a) = f(b) = 0$ et il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in]a, b[$, $\|f''(t)\| \leqslant M$.

1. On introduit $g :]a, b[\to F$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t - a}$. Montrer que pour tout $t \in]a, b[$,
$$\left\|g'(t)\right\| \leqslant \frac{M}{2}\,.$$
2. Montrer que l'application $h :]a, b[\to F$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t - a)(t - b)}$ admet un prolongement continu sur $[a, b]$.