Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027

Enseignante : Blanche Buet, merci à mes prédécesseur/euse Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Exercices – Calcul différentiel

On se place dans le cadre du programme de l'agrégation concernant le calcul différentiel, on considère des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou d'un espace vectoriel de dimension finie, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Étant donnés deux espaces vectoriels normés de dimension finie E et F, U un ouvert de E et $f : U \subset E \xrightarrow{F}$ une application différentiable, on notera la différentielle de f au point $x \in U$: $Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$. On notera $Df(x)(h)$ ou $Df(x).h$ l'évaluation de cette application linéaire en un vecteur $h \in E$. On rappelle que les notations $d_x f(h)$ et $D_x f(h)$ sont tout autant utilisées dans la littérature.

1 Applications différentiables

Exercice 1 (Applications bilinéaires)**.** Soit E_1, E_2 et F des evn de dimension finie et $B : E_1 \times E_2 \times \to F$ une application bilinéaire.

1. Montrer que B est différentiable et expliciter sa différentielle.
   Pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ on a
   $$B(x+h) = B(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = \underbrace{B(x_1, x_2)}_{=B(x)} + \underbrace{B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{B(h_1, h_2)}_{=o(\|h\|_\infty)},$$
   où $\|h\|_\infty = \max(\|h_1\|_{E_1}, \|h_2\|_{E_2})$. En effet, $\|B(h_1, h_2)\| \leqslant \|B\|\|h_1\|\|h_2\| \leqslant \|B\|\|(h_1, h_2)\|_\infty^2 = o(\|h\|_\infty)$. Donc B est différentiable en x et $DB(x) : h \mapsto B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)$.
2. Montrer que $DB : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1, \times E_2, F)$ est linéaire et B de classe C^1.
   Soient $x, y \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in E_1 \times E_2$, on a
   $$\begin{aligned} DB(x + \lambda y).h &= B(h_1, x_2 + \lambda y_2) + B(x_1 + \lambda y_1, h_2) \\ &= B(x_1, h_1) + \lambda B(y_1, h_2) + B(h_1, x_2) + \lambda B(h_1, y_2) \\ &= DB(x).h + \lambda DB(y).h\,. \end{aligned}$$
   Donc $DB(x + \lambda y) = DB(x) + \lambda DB(y)$ et donc DB est bien linéaire. En particulier DB est continue (car on est en dimension finie) et donc B est de classe C^1.
3. Montrer que $\mu : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.
   L'application μ est bilinéaire donc C^1. Le cas général ci-dessus montre que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $D\mu(\lambda, x) : (t, h) \mapsto tx + \lambda h$.
4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (en particulier de dimension finie), montrer $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est C^1. Expliciter sa différentielle.
   L'application $a = \langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire donc C^1. Le cas général montre que $Da(x, y) : (u, v) \mapsto \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle$ pour tout $x, y \in E$.
5. Soient E, F et G des evn de de dimension finie, montrer que $C : (L, K) \mapsto K \circ L$ est C^1 de $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ vers $\mathcal{L}(E, G)$. Expliciter sa différentielle.

Une fois encore on est dans le cas d'une application bilinéaire entre evn, donc C est de classe C^1 et pour tout $(L,K)\in\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(E,G)$,

$$DC(L,K):(P,Q)\mapsto Q\circ L+K\circ P\,.$$

Exercice 2 (Différentielle et dérivée)**.** Soient $U\subset\mathbb{R}$ un ouvert et $f:U\to\mathbb{R}^m$. Soit $x\in U$, montrer que f est différentiable en x si et seulement si elle y est dérivable. Expliciter la relation en $Df(x)$ et $f'(x)$ dans ce cas.
Notons que f est dérivable au point x si et seulement s'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\gamma\quad\iff\quad f(x+h)\underset{h\to0}{=}f(x)+h\gamma+o(h)\,.$$

et dans ce cas $f'(x)=\gamma$.
Si f est différentiable en x, alors

$$f(x+h)\underset{h\to0}{=}f(x)+Df(x)(h)+o(h)\underset{h\to0}{=}f(x)+hDf(x)(1)+o(h)$$

donc f est bien dérivable en x avec $f'(x)=Df(x)(1)$.
Inversement, si f est dérivable en x, alors $L:\mathbb{R}\to F$, $h\mapsto hf'(x)$ est linéaire et

$$f(x+h)\underset{h\to0}{=}f(x)+L(h)+o(h)\,,$$

ce qui prouve que f est différentiable en x et $Df(x)=L:h\mapsto hf'(x)$.

Exercice 3 (Règle de Leibniz)**.** Soient E, F_1, F_2 et G des evn de dimension finie, U un ouvert de E et $B:F_1\times F_2\to G$ bilinéaire. Soient $f_1:U\to F_1$ et $f_2:U\to F_2$ différentiables en $x\in U$. Montrer que $g=B(f_1,f_2)$ est différentiable en x et calculer $Dg(x)$.
Notons $f=(f_1,f_2)$ de U dans $F_1\times F_2$, de sorte que $g=B\circ f:U\to G$. On a d'une part que f est différentiable et pour tout $x\in U$,

$$Df(x):h\in E\mapsto(Df_1(x).h,Df_2(x).h)\in F_1\times F_2\,.$$

On a montré que B est différentiable sur $F_1\times F_2$ et calculé sa différentielle dans l'exercice 1 : $DB(y):h=(h_1,h_2)\mapsto B(y_1,h_2)+B(h_1,y_2)$ pour tout $y=(y_1,y_2)\in F_1\times F_2$. Par la règle de la chaine, on en déduit que g est différentiable en tout $x\in U$,

$$Dg(x)=D(B\circ f)(x)=DB(f(x))\circ Df(x)\quad\text{et}\quad DB(f(x)).\alpha=B(f_1(x),\alpha_2)+B(\alpha_1,f_2(x))$$

et donc pour tout $h\in E$,

$$Dg(x).h=B(f_1(x),Df_2(x).h)+B(Df_1(x).h,f_2(x))\,.$$

Exercice 4 (Application multilinéaire)**.** Soient $k\in\mathbb{N}^*$, $E_1,\dots,E_k,F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et $f:E_1\times\ldots\times E_k\to F$ une application k–linéaire. On rappelle qu'en dimension finie, une application k–linéaire est continue et il existe $M\geqslant0$ tel que pour tout $x=(x_1,\dots,x_k)\in E_1\times\ldots\times E_k$,

$$\|f(x)\|_F\leqslant M\prod_{i=1}^{k}\|x_i\|_{E_i}\,.$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
   On note $G = E_1 \times \ldots \times E_k$ qu'on munit de la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,k} \|x_i\|_{E_i}$ pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G$. Soient $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G$ et $h = (h_1, \ldots, h_k) \in G$, on a par k–linéarité :

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant k} f(y_1, \ldots, y_k) \quad \text{avec} \quad y_j = h_j \text{ si } j \in \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ et } y_j = x_j \text{ sinon.}$$

   Et pour $p \geqslant 2$ dans la somme précédente, pour $j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, on a $\|y_j\|_{E_j} = \|h_j\|_{E_j} \leqslant \|h\|_\infty$, et pour $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$, $\|y_j\|_{E_j} = \|x_j\|_{E_j} \leqslant \|x\|_\infty$ de sorte que

$$\|f(y_1, \ldots, y_k)\|_F \leqslant M \|y_1\|_{E_1} \ldots \|y_k\|_{E_k} \leqslant M \|x\|_\infty^{k-p} \|h\|_\infty^p = o(\|h\|_\infty)\,.$$

   En explicitant les termes correspondant à $p = 0$ ($f(x)$) et à $p = 1$ (terme linéaire en h), on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f(h_1, x_2, \ldots, x_k) + f(x_1, h_2, x_3, \ldots, x_k) + \ldots + f(x_1, \ldots, x_{k-1}, h_k)}_{= Df(x_1,\ldots,x_k).(h_1,\ldots,h_k) \text{ car linéaire en } h} + o(\|h\|_\infty)\,.$$

2. On suppose que $E_1 = \ldots = E_k$ que l'on note E. Montrer que $g : E \to F$, $x \mapsto f(x, \ldots, x)$ est différentiable et pour $x, h \in E$,

$$Dg(x).h = f(h, x, \ldots, x) + f(x, h, x, \ldots, x) + \ldots + f(x, \ldots, x, h)\,. \tag{1}$$

   L'application g est composée de f qui est différentiable par la question précédente, et de $\psi : E \to E^k$, $x \mapsto (x, \ldots, x)$ qui est différentiable, de différentielle

$$D\psi(x) = (\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id}) \in \mathcal{L}(E, E^k), \quad \forall x \in E\,.$$

   Par composition, on a pour tout $x \in E$, $h \in E$,

$$\begin{aligned} Dg(x).h &= Df(\psi(x))\,(D\psi(x).h) = Df(x, \ldots, x).(h, \ldots, h) \\ &= f(h, x, \ldots, x) + f(x, h, x, \ldots, x) + \ldots + f(x, \ldots, x, h) \end{aligned}$$

   en utilisant l'expression trouvée à la question précédente.

Exercice 5 (Composée d'applications différentiables)**.** Soient $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer les dérivées partielles de la fonction F définie par

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1), v(x_1, x_2))\,.$$

On propose plusieurs façons d'effectuer le calcul ...
L'application F est de classe C^1 par composition d'applications de classe C^1. On a de plus, pour $x \in \mathbb{R}^2$,

$$DF(x) = Df(\psi(x)) \circ D\psi(x) \quad \text{avec} \quad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1, g(x_1), v(x_1, x_2))\,.$$

On a d'une part pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D\psi(x).h = (D\psi_i(x).h)_{i=1,2,3} = \big(h_1, h_1 g'(x_1), Dv(x).h\big)$$

et d'autre part, pour $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Df(\psi(x)).u = \sum_{i=1}^{3} u_i \partial_i f(\psi(x))\,.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} DF(x).h &= \sum_{i=1}^{3} (D\psi_i(x).h)\, \partial_i f(\psi(x)) \\ &= h_1 \partial_1 f(\psi(x)) + h_1 g'(x_1)\, \partial_2 f(\psi(x)) + (Dv(x).h) \partial_3 f(\psi(x)) \end{aligned}$$

En particulier, avec $h = e_1 = (1, 0)$ on obtient, en rappelant $Dv(x).e_1 = \partial_1 v(x)$:

$$\partial_1 F(x) = DF(x).e_1 = \partial_1 f(\psi(x)) + g'(x_1)\, \partial_2 f(\psi(x)) + \partial_1 v(x) \partial_3 f(\psi(x))\,.$$

Similairement, avec $h = e_2 = (0, 1)$:

$$\partial_2 F(x) = DF(x).e_2 = \partial_2 v(x) \partial_3 f(\psi(x))\,.$$

Alternative matricielle de la règle de la chaîne. En identifiant les différentielles à leur matrice jacobienne via les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, la règle de la chaîne s'écrit : pour $x \in \mathbb{R}^2$,

$$DF(x) = Df(\psi(x))\, D\psi(x)\,.$$

On a d'une part,

$$D\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g'(x_1) & 0 \\ \partial_1 v(x) & \partial_2 v(x) \end{pmatrix}$$

et d'autre part pour $y \in \mathbb{R}^3$,

$$Df(y) = (\partial_1 f(y), \partial_2 f(y), \partial_3 f(y))\ .$$

On retrouve bien après multiplication matricielle

$$DF(x) = \big(\partial_1 f(\psi(x)) + g'(x_1) \partial_2 f(\psi(x)) + \partial_1 v(x) \partial_3 f(\psi(x)) \ \ , \ \ \partial_2 v(x) \partial_3 f(\psi(x))\big)$$

Autre alternative. Par définition, pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 F(x) = (f \circ \gamma)'(0) \quad \text{avec} \quad \gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (x_1 + t, g(x_1 + t), v(x_1 + t, x_2))\,.$$

De plus $\gamma'(0) = (x_1, g'(x_1), \partial_1 v(x))$ et $\gamma(0) = \psi(x)$ et on retrouve l'expression précédente grâce à la formule de dérivation composée

$$\partial_1 F(x) = \langle \nabla f(\gamma(0))\,, \gamma'(0) \rangle\,.$$

On a similairement

$$\partial_2 F(x) = (f \circ \gamma)'(0) \quad \text{avec} \quad \gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (1, g(x_1), v(x_1, x_2 + t))\,.$$

Et $\gamma'(0) = (0, 0, \partial_2 v(x_1, x_2))$, $\gamma(0) = \psi(x)$ et on retrouve

$$\partial_2 F(x) = \langle \nabla f(\gamma(0))\,, \gamma'(0) \rangle = \partial_2 v(x_1, x_2)\, \partial_3 f(\psi(x))\,.$$

Exercice 6 (Inverse d'une matrice)**.** Montrer que l'application $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to M^{-1} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est de classe C^1, et déterminer sa différentielle.
Voir par exemple l'exercice 16 du *PGCD* de F. Rouvière.

Exercice 7 (Gradient)**.** On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme euclidienne. Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels l'application $n : y \in \mathbb{R}^d \to \|y\| \in \mathbb{R}$ est différentiable. En ces points, déterminer la différentielle de n ainsi que son vecteur gradient.
Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On a $n(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$, par composition, n est différentiable en x et

$$Dn(x) : h \mapsto < \nabla n(x), h > \ .$$

$$\text{Pour } i \in [\![1, d]\!], \quad \partial_i n(x) = 2x_i \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|} \quad \Longrightarrow \quad \nabla n(x) = \frac{x}{\|x\|}\,.$$

Exercice 8 (Polynômes)**.** Montrer que les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ sont C^1.
Voir exercice 17.

Exercice 9 (Différentielle du déterminant)**.** Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant.

1. Montrer que det est différentiable en Id et expliciter sa différentielle.
   Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a

$$\det(\mathrm{Id} + H) = \det \begin{pmatrix} 1+h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix} \underset{H \to 0}{=} \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) + O\big(\|H\|_\infty^2\big)$$
$$\underset{H \to 0}{=} 1 + \sum_{i=1}^n h_{i,i} + O\big(\|H\|_\infty^2\big) \underset{H \to 0}{=} 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(H).$$

   Comme Tr est linéaire, on en déduit que det est différentiable en Id et $D\det(\mathrm{Id}) = \mathrm{Tr}$.

2. En déduire que det est différentiable sur $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et expliciter sa différentielle.
   Soient $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Comme $\|M^{-1}H\| \leqslant \|M^{-1}\|\|H\| \xrightarrow[H \to 0]{} 0$, on a

$$\det(M + H) = \det(M)\det(\mathrm{Id} + M^{-1}H) \underset{H \to 0}{=} \det(M)\big(\mathrm{Id} + \mathrm{Tr}\big(M^{-1}H\big) + o(M^{-1}H)\big)$$
$$\underset{H \to 0}{=} \det(M) + \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big) + o(H),$$

   où on a noté $\mathrm{co}(M)$ la matrice des cofacteurs de M et utilisé la formule ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M) = \det(M)M^{-1}$. Comme la trace et la multiplication par ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$ sont linéaires, det est différentiable en M et $D\det(M) : H \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big)$.

Exercice 10 (Un calcul explicite)**.** Soient $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et $g : (y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $h = g \circ f$. Justifier que h est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.
Les applications f et g sont différentiables car elles sont polynomiales. Donc h est différentiable comme composée de deux telles applications, par la règle de la chaine. En fait h est même $\mathcal{C}^\infty$.
On est dans un cas très explicite dans $\mathbb{R}^d$, donc calculer la différentielle revient à calculer la jacobienne. On pourrait expliciter h et calculer ses dérivées partielles, mais il est plus simple de calculer

les jacobiennes de f et g puis d'appliquer la règle de la chaîne. Dans ce qui suit on identifie les applications linéaires avec leurs matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3,\ Dg(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 & -2y_2 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} Dh(x) &= Dg(f(x))\, Df(x) = \begin{pmatrix} 2f_1(x) & -2f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} f_1(x) - f_2(x) & f_1(x) + f_2(x) & f_1(x) - f_2(x) \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_3 & x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11 (Un contre-exemple)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que f est continue.
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En $(0,0)$, on a $\|f(x_1, x_2) - f(0,0)\| = \frac{\|x_1\|\|x_2\|^2}{\|x\|^2} \leqslant \|x\| \xrightarrow[x \to (0,0)]{} 0$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
   Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $f_{0,v} : t \mapsto f((0,0) + tv) = \frac{tv_1(tv_2)^2}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} = tf(v)$ est linéaire, en particulier dérivable en $(0,0)$. Donc f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$ et, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\partial_v f(0,0) = (f_{0,v})'(0) = f(v)$.
3. Est-ce que f est différentiable en $(0,0)$?
   Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $Df(0,0) : v \mapsto \partial_v f(0,0) = f(v)$ et donc $Df(0,0) = f$. C'est absurde car f n'est pas linéaire. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 12 (Un autre contre-exemple)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$ si $x = (x_1, x_2) \neq 0$.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la fonction f est C^1 comme produit et composée de fonctions usuelles. En particulier, elle y est différentiable. Par ailleurs $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $|f(x_1, x_2)| \leqslant |x_1 x_2| \leqslant \|x\|^2 = o(\|x\|)$ lorsque $x \to 0$. Donc f est différentiable en 0 et $Df(0) = 0$.
2. Est-ce que f est de classe C^1 ?
   Soit $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$, on a $\partial_1 f(x) = x_2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right) - \frac{x_1^2 x_2}{\|x\|^3} \cos\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ et symétriquement $\partial_2 f(x) = x_1 \sin(\frac{1}{\|x\|}) - \frac{x_1 x_2^2}{\|x\|^3} \cos\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$. Si f était de classe $\mathcal{C}^1$, ses dérivées partielles seraient continues, en particulier en 0. Notamment, on aurait avec $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, pout $t \neq 0$,

   $$\partial_1 f(t\omega) = \frac{t\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{1}{|t|}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0,$$

   ce qui impliquerait que $\cos\left(\frac{1}{|t|}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, et donc $\cos(\theta) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} 0$. C'est absurde, donc f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, les dérivées partielles sont continues comme sommes, ce qui remontre que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et que le seul problème pour la continuité de Df est en 0.

2 Accroissements finis et conséquences

Exercice 13 (Suite de fonctions différentiables)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe borné. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^m$;
- il existe $g : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ telle que $Df_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ uniformément.

1. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, pour tout $x, y \in U$ on a

$$\|(f_p(x) - f_p(y)) - (f_q(x) - f_q(y))\| \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty \|y - x\| \tag{2}$$

On applique l'inégalité des accroissements finis entre x et y à l'application $f_q - f_p$ qui est différentiable sur U. C'est bien possible puisque $[x, y] \subset U$ par convexité. Notons que par hypothèse, $(Df_n)_n$ converge uniformément donc est bornée (en $\|\cdot\|_\infty$) : il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\|Df_q - Df_p\|_\infty \leqslant 2M < \infty\,.$$

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U, vers une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$.
Comme $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, il est équivalent de montrer que $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction v. On a alors

$$f_n = f_n(x_0) + f_n - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} a + v = f.$$

Comme U est borné, il existe $R > 0$ tel que $U \subset B(x_0, R)$. En appliquant (2) avec $y = x_0$, pour tout $x \in U$, $\|(f_p(x) - f_p(x_0)) - (f_q(x) - f_q(x_0))\| \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty R$. On en déduit que $\|(f_p - f_p(x_0)) - (f_q - f_q(x_0))\|_\infty \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty R$. Comme (Df_n) converge uniformément elle est de Cauchy uniforme. L'inégalité précédente montre alors que $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy uniforme. Plus précisément, c'est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions bornées de U dans F, qui est un Banach pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U.

3. Montrer que f est différentiable sur U et que $Df = g$.
Soit $x \in U$, comme $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ il suffit de prouver que $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + g(x).h + o(h)$.
Pour tout h assez petit et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - g(x).h\| \leqslant & \|(f(x+h) - f(x)) - (f_p(x+h) - f_p(x))\| \\ & + \|f_p(x+h) - f_p(x) - Df_p(x).h\| + \|Df_p(x).h - g(x).h\| \\ \leqslant & 2\|g - Df_p\|_\infty \|h\| + \|f_p(x+h) - f_p(x) - Df_p(x).h\|,\end{aligned}$$

où on a utilisé (2) avec $y = x + h$ et $q \to +\infty$ pour contrôler le premier terme.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe p tel que $\|Df_p - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Par différentiabilité en x de f_p, pour h suffisamment petit, $\|f_p(x+h) - f_p(x) - Df_p(x).h\| \leqslant \varepsilon\|h\|$. Donc pour tout h assez petit $\|f(x+h) - f(x) - g(x).h\| \leqslant 3\varepsilon\|h\|$. Donc $\|f(x+h) - f(x) - g(x).h\| = o(h)$. Donc f est différentiable en x et $Df(x) = g(x)$.

Exercice 14 (Série de fonctions différentiables)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe borné. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(x_0)$ converge ;
- la série de fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$ converge uniformément sur U.

Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge uniformément sur U, que la somme est une fonction différentiable sur U, et que $D\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. Alors $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x_0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est différentiable sur U de différentielle $Df_n = D\left(\sum_{k=0}^{n} g_k\right) = \sum_{k=0}^{n} Dg_k$. En particulier, $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers $g = \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k$.

En appliquant le résultat de l'exercice 13 à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction différentiable de différentielle $g = \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k$. C'est exactement le résultat souhaité.

Exercice 15 (Différentiabilité de l'exponentielle)**.** Soit $\exp : L \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Montrer que exp est bien définie.
   On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle, par exemple la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L^k\| \leqslant \|L\|^k$. Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{L^k}{k!}$ converge absolument dans le Banach (dimension finie) $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ donc converge.
2. Montrer que exp est différentiable sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et exprimer $D\exp(L).H$ $(L, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ sous forme d'une série.
   On va utiliser le résultat de l'exercice 14.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $g_k : L \mapsto \frac{L^k}{k!}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(0)$ converge dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vers Id. Notons que $g_0 : L \mapsto \mathrm{Id}$ est constante (de différentielle nulle).
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $g_k = \frac{1}{k!} f_k(L, \dots, L)$ où f_k est l'application k–linéaire $(L_1, \dots, L_k) \mapsto L_k \dots L_1$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^k$ vers $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant (1), pour $L, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$Dg_k(L).H = \frac{1}{k!}\big(f_k(H, L, \dots, L) + f_k(L, H, L, \dots, L) + \cdots + f_k(L, \dots, L, H)\big).$$

$$\begin{aligned}\|Dg_k(L).H\| &\leqslant \frac{1}{k!}\big(\|f_k(H, L, \dots, L)\| + \|f_k(L, H, L, \dots, L)\| + \cdots + \|f_k(L, \dots, L, H)\|\big)\\ &\leqslant \frac{1}{k!} k \|L\|^{k-1}\|H\| = \frac{\|L\|^{k-1}}{(k-1)!}\|H\|.\end{aligned}$$

   Ainsi $\|Dg_k(L)\| \leqslant \dfrac{\|L\|^{k-1}}{(k-1)!}$.
   Soit $R > 0$, pour tout $L \in B(0, R)$, on a $\|Dg_k(L)\| \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}$, donc $\|Dg_k\|_{\infty, B(0,R)} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}$. Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$ converge normalement donc uniformément sur l'ouvert convexe borné $B(0, R)$. Par l'exercice 14, $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge uniformément vers exp sur $B(0, R)$. De plus exp

est différentiable sur $B(0,R)$ et $D\exp = \sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$. Ceci est valable pour tout $R>0$, donc exp est différentiable sur $\mathrm{M}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $L, H \in \mathrm{M}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} D\exp(L).H &= \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k(L).H \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k!}\big(f_k(H,L,\dots,L) + f_k(L,H,L,\dots,L) + \cdots + f_k(L,\dots,L,H)\big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k!}\Big(HL^{k-1} + LHL^{k-2} + \cdots + L^{k-1}H\Big) \end{aligned}$$

3. Soient L et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $LH = HL$, vérifier que $D\exp(L).H = \exp(L)H$.
   Si L et H commutent la formule précédente devient

$$D\exp(L).H = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(k-1)!} L^{k-1}H = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{L^k}{k!}\right) H = \exp(L)H\,.$$

Exercice 16 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que la fonction $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $v(x_1,x_2) = \int_0^{g(x_2)} f(x_1,s)\,\mathrm{d}s$ est de classe C^1, et calculer sa différentielle.
Montrons que v admet des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont continues. Soit $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a tout d'abord que $\gamma_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto v(x_1+t, x_2)$ est dérivable en 0 par dérivation d'une intégrale à paramètre. En effet,

- $s \mapsto f(x_1+t,s)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0, g(x_2)]$ (ou $[g(x_2), 0]$),
- $t \mapsto f(x_1+t,s)$ est dérivable et on a la domination, pour $t \in [-1,1]$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\{f(x_1+t,s)\}\right| = |\partial_1 f(x_1+t,s)| \leqslant C, \quad C = \sup_K |\partial_1 f|$$

  avec $K = [x_1-1, x_1+1] \times [0, g(x_2)]$ (ou $K = [x_1-1, x_1+1] \times [g(x_2), 0]$ si $g(x_2) < 0$) compact. La fonction constante égale à C est intégrable sur le segment $[0, g(x_2)]$ (ou $[g(x_2), 0]$).

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, γ_1 est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $t \in]-1,1[$,

$$\gamma_1'(t) = \int_0^{g(x_2)} \partial_1 f(x_1+t,s)\,\mathrm{d}s$$

en particulier, $\partial_1 v(x) = \gamma_1'(0)$ existe et

$$\partial_1 v(x) = \int_0^{g(x_2)} \partial_1 f(x_1,s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Attention, on pourrait montrer que γ_1 est de classe C^1 mais ça ne donne pas la continuité de $\partial_1 v$ par rapport à l'ensemble de ses variables. Vérifions la continuité de $\partial_1 v$ au point x. Soit $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|h\|_\infty = \max(|h_1|, |h_2|) \leqslant 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par relation de Chasles et inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} &|\partial_1 v(x+h) - \partial_1 v(x)| \\ &\leqslant \underbrace{\left|\int_{g(x_2)}^{g(x_2+h_2)} \partial_1 f(x_1+h_1,s)\,\mathrm{d}s\right|}_{I_1} + \underbrace{\left|\int_0^{g(x_2)} (\partial_1 f(x_1+h_1,s) - \partial_1 f(x_1,s))\,\mathrm{d}s\right|}_{I_2} \end{aligned}$$

On commence par contrôler le premier terme. On définit $K_1 = [x_1 - 1, x_1 + 1] \times g([x_2 - 1, x_2 + 1])$ qui est compact par continuité de g et $C = \sup_{K_1} |\partial_1 f| < \infty$ car $\partial_1 f$ est continue sur le compact K_1. Toujours par continuité de g, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|h_2| < \delta$, $|g(x_2) - g(x_2 + h_2)| < \varepsilon$. On en déduit

$$I_1 \leqslant C\,|g(x_2) - g(x_2 + h_2)| \leqslant C\varepsilon\,.$$

En ce qui concerne le deuxième terme, la fonction $\partial_1 f$ est uniformément continue sur le compact $K_2 = [x_1 - 1, x_1 + 1] \times [0, g(x_2)]$ et il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|h_1| < \eta$ et pour tout $s \in [0, g(x_2)]$, $|\partial_1 f(x_1 + h_1, s) - \partial_1 f(x_1, s)| < \varepsilon$ et donc

$$I_2 \leqslant |g(x_2)|\,\varepsilon\,.$$

On a finalement, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $\|h\|_\infty < \min(1, \delta, \eta)$,

$$|\partial_1 v(x + h) - \partial_1 v(x)| \leqslant (C + |g(x_2)|)\varepsilon\,,$$

et $\partial_1 v$ est continue en tout point $x \in \mathbb{R}^2$.

On considère maintenant $\gamma_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto v(x_1, x_2 + t) = F(g(x_2 + t))$ où $F : y \mapsto \displaystyle\int_0^y f(x_1, s)\,\mathrm{d}s$.

Comme l'intégrande $s \mapsto f(x_1, s)$ est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F' : y \mapsto f(x_1, y)$. Par composition, γ_2 est dérivable et

$$\gamma_2'(t) = F'(g(x_2 + t))g'(x_2 + t) = f(x_1, g(x_2 + t))g'(x_2 + t)\,.$$

En particulier $\partial_2 v(x) = \gamma_2'(0)$ existe et

$$\partial_2 v(x) = f(x_1, g(x_2))g'(x_2)\,.$$

On observe que $\partial_2 v$ est continue par composition d'applications continues.

On conclut que v admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues et donc v est de classe C^1 et pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$Dv(x) : h = (h_1, h_2) \mapsto h_1\partial_1 v(x) + h_2\partial_2 v(x) = h_1 \int_0^{g(x_2)} \partial_1 f(x_1, s)\,\mathrm{d}s + h_2 f(x_1, g(x_2))g'(x_2)\,.$$

3 Différentielles d'ordre supérieur et formules de Taylor

Exercice 17 (Polynômes)**.** Montrer que les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ sont C^∞.

Il suffit de le prouver pour les monômes, le résultat s'en déduit ensuite par combinaison linéaire. Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $X^\alpha : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$. Pour $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, tout $i \in [\![1, d]\!]$, si $\alpha_i = 0$ on a $\partial_i X^\alpha = 0$, et sinon $\partial_i X^\alpha = \alpha_i X^\beta$ où $\beta_i = \alpha_i - 1$ et $\beta_j = \alpha_j$ pour $j \neq i$. Donc X^α a des dérivées partielles, qui sont des monômes de degré strictement plus petit, en particulier continues.

Par récurrence sur le degré total du monôme, X^α admet des dérivées partielles continues à tout ordre. Donc X^α est C^∞.

Exercice 18 (Déterminant C^∞ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)**.** Montrer que det est C^∞ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et expliciter sa diffentielle en tout point. On pourra utiliser l'exercice 9.

L'application det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale en les coefficients, donc C^∞. Les applications $D\det$ et $M \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)\cdot\big)$ sont donc deux applications continues de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, par exemple parce que les coefficients de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$ sont polynomiaux en ceux de M. Elles coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ donc partout. Donc, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $D\det(M) : H \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big)$.

Exercice 19. Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E \to F$ de classe C^2 satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que pour tout $x \in E$,

1. $Df(x).x = 2f(x)$,
2. $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

Soit $x \in E$. Commençons par prouver le premier point. On introduit la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to E$, $t \in \mathbb{R} \mapsto tx$, qui est de classe C^∞ et satisfait $\gamma'(t) = x$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'une part $\psi = f \circ \gamma$ est différentiable par composition et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = Df(\gamma(t)).\gamma'(t) = Df(tx).x$$

et d'autre part $\psi(t) = f(tx) = t^2 f(x)$ donc $\psi'(t) = 2tf(x)$. On en déduit $Df(tx).x = 2tf(x)$, d'où le résultat demandé pour $t = 1$.
Notons que $\psi' = \mathrm{ev}_x \circ Df \circ \gamma$, où $\mathrm{ev}_x : \mathcal{L}(E,F) \to F$, $L \mapsto L(x)$ est linéaire donc C^∞ et pour tout $L \in \mathcal{L}(E,F)$, $D\mathrm{ev}_x(L) = \mathrm{ev}_x$. Par composition, $g = \mathrm{ev}_x \circ Df$ est différentiable et pour $y \in E$,

$$Dg(y) = \underbrace{D\mathrm{ev}_x\left(Df(y)\right)}_{\mathrm{ev}_x} \circ D(Df)(y) = \mathrm{ev}_x \circ D(Df)(y)\,.$$

On en déduit

$$\psi''(t) = (g \circ \gamma)'(t) = Dg(\gamma(t)).\gamma'(t) = \left(\mathrm{ev}_x \circ D(Df)(y)\right).x = \left(D(Df)(tx).x\right).x = D^2 f(tx)(x,x)\,.$$

Par ailleurs, $\psi''(t) = 2f(x)$, on en déduit $D^2 f(tx)(x,x) = 2f(x)$ et le résultat pour $t = 0$.
Alternative. Comme $f(0) = 0$ (prendre $t = 0$) et $Df(0) = 0$ (on a vu que $Df(tx).x = 2f(tx)$ et en $t = 0$, $Df(0).x = 2f(0) = 0$ pour x quelconque), on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$t^2 f(x) = f(tx) = \tfrac{1}{2} D^2 f(0)(tx,tx) + o(t^2 \|x\|^2)\,.$$

En divisant par t^2 et en faisant $t \to 0$, on retrouve $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

Exercice 20. Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to F$ une application continue sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$ et satisfaisant $f(a) = f(b) = 0$ et il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in]a,b[$, $\|f''(t)\| \leqslant M$.

1. On introduit $g :]a,b[\to F$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t-a}$. Montrer que pour tout $t \in]a,b[$,

$$\left\|g'(t)\right\| \leqslant \frac{M}{2}\,.$$

Soit $t \in]a,b[$,

$$g'(t) = \frac{f'(t)(t-a) - f(t)}{(t-a)^2}\,.$$

Soit $a < c < t$, on a $[c,t] \subset]a,b[$ et f est deux fois dérivable sur $]a,b[$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2,

$$\|f(c) - f(t) - f'(t)(c-t)\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{[c,t]} \left\|f''\right\| (c-t)^2 \leqslant \frac{M}{2}(t-c)^2\,.$$

Attention, on ne pouvait pas appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange, sauf si $F = \mathbb{R}$.

En faisant tendre $c \to a$, on obtient $f(c) \to f(a) = 0$ par continuité de f sur $[a,b]$ et donc

$$\|f(t) - f'(t)(t-a)\| \leqslant \frac{M}{2}(t-a)^2 \quad \underset{\times \frac{1}{(t-a)^2}}{\Longrightarrow} \quad \|g'(t)\| \leqslant \frac{M}{2}\,.$$

Et on ne pouvait pas appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange directement sur $[a,t]$ qui n'est pas inclus dans $]a,b[$.

2. Montrer que l'application $h :]a,b[\to F$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t-a)(t-b)}$ admet un prolongement continu sur $[a,b]$.
On a pour $t \in]a,b[$, $h(t) = g(t)\frac{1}{t-b}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-b}$ se prolonge par continuité en a. Quant à g, on vient de voir que g est uniformément continue, puisque M–lipschitzienne sur $]a,b[$ grâce à l'inégalité des accroissements finis. Or $]a,b[$ est dense dans $[a,b[$ et F est complet car evn de dimension finie, il existe donc (un unique) prolongement continu de g à $[a,b[$. On en déduit que h se prolonge par continuité en a. On procède similairement pour montrer que h se prolonge par continuité en b.