Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027

Enseignante : Blanche Buet.

Exercices : leçon 206 – Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse

---

Exercice 1 (Compacité locale dans un e.v.n. de dimension finie)**.** Soient (X, d) un espace métrique, $K \subset X$ une partie compacte non vide, $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. de dimension finie et $f : K \times E \to \mathbb{R}$ continue.
On définit $\Phi : x \in E \mapsto \sup_{u\in K} f(u, x)$. Montrer que Φ est continue.
Donnons quelques indications.

1. Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in E$,
$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leqslant \sup_{u\in K} |f(u, x_1) - f(u, x_2)|$$
2. Soit $x_0 \in E$, utiliser que f est uniformément continue sur le compact $K \times \overline{B(x_0, 1)}$, pour montrer que Φ est continue en x_0.

Exercice 2 (Une application du théorème de Riesz aux sous-espaces propres d'un opérateur compact)**.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ une application linéaire. On suppose que T vérifie la propriété suivante : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées d'éléments de E, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

1. Montrer que si $A \subset E$ est une partie bornée, alors $\overline{T(A)}$ est une partie compacte de E.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(T - \lambda \,\mathrm{Id})$. Montrer que
$$\overline{B_{E_\lambda}(0, 1)} = E_\lambda \cap \overline{B_E(0, 1)} \; .$$
3. Pour $\lambda \neq 0$, montrer que $\overline{B_{E_\lambda}(0, 1)}$ est compacte et conclure que E_λ est de dimension finie.

Exercice 3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynomes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus d. On suppose qu'il existe $z_0, z_1, \ldots, z_d \in K$ deux à deux distincts et tels que chacune des $d + 1$ suites suivantes
$$(P_k(z_0))_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (P_k(z_d))_{k\in\mathbb{N}}$$
converge dans $\mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe un polynome $Q \in \mathbb{C}[X]$, de degré au plus d et tel que
$$\sup_{z\in K} |P_k(z) - Q(z)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \, .$$

Indication.– On pourra montrer que
$$\|f\| = \max\left(|f(z_0)|, \ldots, |f(z_d)|\right)$$
définit une norme sur $E = \{f = P_{|K} : K \to \mathbb{C} \; : \; P \in \mathbb{C}_d[X]\}$. On pourra penser aux polynomes interpolateurs de Lagrange.