Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027
Enseignante : Blanche Buet.

Exercices : leçon 206 – Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse

Exercice 1 (Compacité locale dans un e.v.n. de dimension finie)**.** Soient (X,d) un espace métrique, $K\subset X$ une partie compacte non vide, $(E,\|\cdot\|_E)$ un e.v.n. de dimension finie et $f : K\times E\to\mathbb{R}$ continue.
On définit $\Phi : x\in E\mapsto \sup_{u\in K} f(u,x)$. Montrer que Φ est continue.
Donnons quelques indications.

1. Montrer que pour tout $x_1,x_2\in E$,
$$|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)|\leqslant \sup_{u\in K}|f(u,x_1)-f(u,x_2)|$$
2. Soit $x_0\in E$, utiliser que f est uniformément continue sur le compact $K\times\overline{B(x_0,1)}$, pour montrer que Φ est continue en x_0.

Solution de l'exercice 1. 1. Soient $x_1,x_2\in E$ fixés. On note $g_1=f(\cdot,x_1)$ et $g_2=f(\cdot,x_2)$ qui sont continues sur K. On doit montrer
$$\left|\sup_{u\in K} g_1(u)-\sup_{v\in K} g_2(v)\right|\leqslant \sup_{w\in K}|g_1(w)-g_2(w)|\,.$$
Faire par exemple un dessin en prenant $K=[0,1]\subset\mathbb{R}$. Soit $i\in\{1,2\}$, comme K est compact et g_i continue, il existe $t_i\in K$ tel que $\sup_{u\in K} g_i(u)=g_i(t_i)$. On a alors
$$g_1(t_2)\leqslant g_1(t_1)\quad\text{et}\quad g_2(t_1)\leqslant g_2(t_2)$$
de sorte que,
$$g_2(t_2)-g_1(t_1)\leqslant g_2(t_2)-g_1(t_2)\leqslant|g_2(t_2)-g_1(t_2)|\leqslant\sup_{w\in K}|g_1(w)-g_2(w)|$$
et symétriquement de sorte que
$$|g_2(t_2)-g_1(t_1)|\leqslant\sup_{w\in K}|g_1(w)-g_2(w)|\,.$$

2. On peut munir $X\times E$ de la distance "produit" :
$$\widetilde{d}\,((u,x),(v,y)):=d(u,v)+\|x-y\|_E\,,\quad (u,x),(v,y)\in X\times E\,.$$
Soit $x_0\in E$. Comme f est continue sur le compact $K\times\overline{B(x_0,1)}$ (E est de dimension finie !), elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $(u,x),(v,y)\in K\times\overline{B(x_0,1)}$,
$$\widetilde{d}\,((u,x),(v,y))<\delta\quad\Longrightarrow\quad|f(u,x)-f(v,y)|<\varepsilon\,.$$

En particulier, pour tout $x \in E$ tel que $\|x - x_0\|_E < \min(1, \delta)$ et pour tout $u \in K$, on a $\widetilde{d}((u,x),(u,x_0)) = \|x - x_0\|_E < \delta$ et donc

$$|f(u,x) - f(u,x_0)| < \varepsilon\,.$$

C'est vrai pour tout $u \in K$ de sorte que par la question 1,

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leqslant \sup_{u\in K} |f(u,x) - f(u,x_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc Φ est continue en x_0.

□

Exercice 2 (Une application du théorème de Riesz aux sous-espaces propres d'un opérateur compact)**.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ une application linéaire. On suppose que T vérifie la propriété suivante : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées d'éléments de E, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

1. Montrer que si $A \subset E$ est une partie bornée, alors $\overline{T(A)}$ est une partie compacte de E.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(T - \lambda\,\mathrm{Id})$. Montrer que
$$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} = E_\lambda \cap \overline{B_E(0,1)}\ .$$
3. Pour $\lambda \neq 0$, montrer que $\overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$ est compacte et conclure que E_λ est de dimension finie.

Solution de l'exercice 2. 1. On va utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité. Soit $(y_n)_n$ une suite de $\overline{T(A)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $\|y_n - T(x_n)\| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Par hypothèse sur T, il existe une sous-suite $\left(T\left(x_{\theta(n)}\right)\right)_n$ qui converge vers $y \in \overline{T(A)}$. On a alors

$$\left\|y_{\theta(n)} - y\right\| \leqslant \frac{1}{\theta(n)+1} + \left\|T\left(x_{\theta(n)}\right) - y\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

On en déduit que $(y_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans $\overline{T(A)}$. Comme c'est vrai pour toute suite $(y_n)_n$ de $\overline{T(A)}$, on en déduit que $\overline{T(A)}$ est compacte.

On pourrait montrer avec les mêmes arguments la caractérisation séquentielle suivante de la compacité relative, valable dans un espace métrique X : $D \subset X$ est relativement compacte $\iff$ toute suite d'éléments de D admet une sous-suite qui converge dans X (et la limite n'a pas besoin d'être dans D, elle sera dans $\overline{D}$).

2. Remarquons tout d'abord que le résultat de la question 1 implique la continuité de l'application linéaire T. En effet, pour $S = \{x \in E \ : \ \|x\| = 1\}$ la sphère unité fermée de E qui est bornée, on a par la question 1 que $\overline{T(S)}$ est compacte et donc bornée : il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$,
$$\|T(x)\| \leqslant M = M\,\|x\|\ .$$
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La norme sur E_λ est la norme induite par celle de E et donc
$$B_{E_\lambda}(0,1) = \{x \in E_\lambda \ : \ \|x\| < 1\} = E_\lambda \cap B_E(0,1)\,.$$
Comme $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ est continue, $E_\lambda = (T - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}(\{0\})$ est fermé, donc $E_\lambda \cap \overline{B_E(0,1)}$ est fermé et par définition de l'adhérence :
$$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} \subset E_\lambda \cap \overline{B_E(0,1)}\,.$$
On a de plus $E_\lambda \cap \overline{B_E(0,1)} \subset \overline{E_\lambda \cap B_E(0,1)}$ par homogénéité : si $x \in E_\lambda$ satisfait $\|x\| \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (1 - 2^{-n})x \in E_\lambda \cap B_E(0,1)$ et $x_n \to x$ donc $x \in \overline{E_\lambda \cap B_E(0,1)}$.

3. En appliquant la question 1 avec $A = B_{E_\lambda}(0,1)$ qui est une partie bornée, on en déduit que $\overline{T(B_{E_\lambda}(0,1))} = \overline{\lambda B_{E_\lambda}(0,1)}$ puisque $T = \lambda \operatorname{Id}$ sur E_λ. De plus, pour $\lambda \neq 0$, $h_\lambda : E \to E$, $x \mapsto \lambda x$ est un homéomorphisme et donc $\overline{\lambda B_{E_\lambda}(0,1)} = \lambda \overline{B_{E_\lambda}(0,1)}$. On en déduit que

$$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} = h_{\frac{1}{\lambda}}\left(\lambda \overline{B_{E_\lambda}(0,1)}\right)$$

est compacte comme image continue d'un compact. D'après la question 2, et le fait que dans un e.v.n. la boule fermée est l'adhérence de la boule ouverte (faux en général dans un espace métrique)

$$\overline{B_{E_\lambda}(0,1)} = \{x \in E_\lambda \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$$

est la boule unité fermée de l'e.v.n. $(E_\lambda, \|\cdot\|)$ et on vient de montrer qu'elle est compacte, d'après le théorème de Riesz, E_λ est de dimension finie.

□

Exercice 3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynomes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus d. On suppose qu'il existe $z_0, z_1, \ldots, z_d \in K$ deux à deux distincts et tels que chacune des $d+1$ suites suivantes

$$(P_k(z_0))_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (P_k(z_d))_{k\in\mathbb{N}}$$

converge dans $\mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe un polynome $Q \in \mathbb{C}[X]$, de degré au plus d et tel que

$$\sup_{z\in K} |P_k(z) - Q(z)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Indication.– On pourra montrer que

$$\|f\| = \max\left(|f(z_0)|, \ldots, |f(z_d)|\right)$$

définit une norme sur $E = \{f = P_{|K} : K \to \mathbb{C} \ : \ P \in \mathbb{C}_d[X]\}$. On pourra penser aux polynomes interpolateurs de Lagrange.

Solution de l'exercice 3. $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire et est homogène. De plus, soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$. Il existe $P \in \mathbb{C}_d[X]$ tel que $f = P_{|K}$, le polynome P s'annule alors en $z_0, z_1, \ldots, z_d \in K$ qui sont deux à deux distincts et P a donc au moins $d+1$ racines de sorte que $P = 0$ (puisque P est de degré inférieur ou égal à d) et donc $f = P_{|K} = 0$. On conclut que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E. Comme E est de dimension finie $d+1$, puisque $\mathbb{C}_d[X] \to E$, $P \mapsto P_{|K}$ est un isomorphisme (surjectif par définition de E et injectif par le même argument que précédemment), $\|\cdot\|$ et la norm sup $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Or, par hypothèse la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ vers $Q \in \mathbb{C}_d[X]$, où Q est le polynome interpolateur associée à $((z_i, \beta_i)_{i=0,1,\ldots,d}$ pour $\beta_i = \lim_{k\to\infty} P_k(z_i)$. La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge également vers Q pour $\|\cdot\|_\infty$ et on a bien

$$\sup_{z\in K} |P_k(z) - Q(z)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Version alternative directement avec les interpolantes de Lagrange. Soit $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ la base de Lagrange associée aux z_i (satisfaisant $L_i(z_j) = \delta_{ij}$ et $\deg L_i = d$). Tout $P \in \mathbb{C}_d[X]$ s'écrit $P = \sum_{i=0}^d P(z_i)L_i$. En l'appliquant à $P = P_k - Q$, dont les valeurs en z_i sont $P_k(z_i) - \beta_i$, on obtient :

$$\sup_{z\in K} |P_k(z) - Q(z)| \leqslant C \sum_{i=0}^d |P_k(z_i) - \beta_i| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,$$

où $C = \max_{i=0\ldots d} \sup_K |L_i| < \infty$ sont finis puisque K est compact et chaque L_i est continue. □