Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027

Enseignante : Blanche Buet.

# Exercices : leçon 229 – Fonctions monotones, fonctions convexes

*Version détaillée des exercices abordés en leçon et quelques exercices additionnels.*

**Exercice 1** (Théorème des 3 pentes ou définition de la convexité)**.** Soit $f$ convexe croissante non constante sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

**Exercice 2.** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer que $f$ admet un point fixe. Qu'en est-il pour $f$ décroissante ?

**Exercice 3** (Monotonie et dérivée)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ($I$ intervalle ouvert) une fonction continue et dérivable à droite en tout point de $I$. On suppose $f'_d$ positive, montrer que $f$ est croissante.

1. Prouvez-le en adaptant la démonstration du théorème des accroissements finis : on pourra considérer la fonction auxiliaire, pour $a, b \in I$, $a < b$,

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

*Preuve alternative.–*

2. Supposez par l'absurde qu'il existe $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(b) < f(a)$ et prouver le résultat sous l'hypothèse plus forte $f'_d > 0$ sur $I$.
3. Conclure en considérant $f_\varepsilon : x \in I \mapsto f(x) + \varepsilon(x-a)$ pour $\varepsilon > 0$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I$ intervalle ouvert. On dira que $f$ est $\frac{1}{2}$–convexe si elle satisfait

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \tag{1}$$

**Exercice 4.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que (2) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, \quad f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0\,. \tag{2}$$

2. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si elle satisfait (1).

**Exercice 5.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée qui satisfait (1). Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 6.** Soit $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Le but de l'exercice est de montrer que $f$ est convexe si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \liminf_{h\to 0} \Delta_h(f)(x) \geqslant 0 \quad \text{où} \quad \Delta_h(f)(x) = \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right)\,. \tag{3}$$

1. Que dire du sens direct ?

On suppose à présent que $f$ vérifie (3). Soit $a, b \in I$, $a < b$. On veut montrer (questions 2 et 3) que pour tout $t \in [0,1]$,

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)\,.$$

2. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - u(x) \quad \text{où} \quad u(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

   Justifier qu'on peut se ramener à montrer que si $g$ satisfait (3) alors $g \leqslant 0$.

3. Comme $g$ est continue sur $[a,b]$, on peut introduire $M = \max_{[a,b]} g$. Supposons par l'absurde que $M > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $p_\varepsilon : x \in I \mapsto \varepsilon(x-a)(b-x)$ parabole qui atteint son maximum au milieu de $[a,b]$. On introduit la fonction $v_\varepsilon = g - p_\varepsilon$.
   (a) Choisir $\varepsilon$ pour que $\sup_{[a,b]} v_\varepsilon > 0$.
   (b) Montrer que si le sup de $v_\varepsilon$ est atteint en $x_\varepsilon$ sur $[a,b]$, alors pour $h \neq 0$ assez petit,

$$\Delta_h g(x_\varepsilon) \leqslant -2\varepsilon$$

   et conclure la preuve du sens réciproque.

4. Si $f$ est deux fois dérivable, que dire de (2) ?

**Exercice 7.** Soit $f$ une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet un minimum local en $x_0 \in I$. Montrer que $f'_g(x_0) \leqslant 0 \leqslant f'_d(x_0)$.
*La convexité ne sert qu'à l'existence des dérivées à gauche et à droite ici.*

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.
On suppose que $f$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, vérifier que $f' \geqslant 0$ au sens des distributions, c'est-à-dire

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx \;\geqslant\; 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \geqslant 0\,.$$

La réciproque est vraie, à savoir que si $f$ est à dérivée distributionnelle positive, alors $f$ est égale à une fonction croissante presque partout, mais cela requiert des outils au-delà du programme de l'agrégation.