Université Paris-Saclay — Préparation à l'agrégation
2026 – 2027

Enseignante : Blanche Buet.

Exercices : leçon 230 – Séries numériques

Version très détaillée des exercices abordés en leçon.

Exercice 1 (Comparaison série intégrale)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. On sait que $\sum f(n)$ converge ssi $\int_0^\infty f(t)\,dt < +\infty$.

1. On suppose que $\sum f(n)$ diverge. A-t-on $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_0^n f(t)\,dt$?
2. On suppose que $\sum f(n)$ converge. A-t-on $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_n^\infty f(t)\,dt$?

   (Regarder une fonction qui décroît vite vers 0, p.ex $f : t \mapsto \exp(-t)$).

Exercice 2 (Série lacunaire, critère de Cauchy)**.**

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n = 2^k \text{ pour un entier } k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
2. On suppose à présent que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de termes positifs ou nuls telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la suite $(nu_n)_n$ converge vers 0.
   Indication : on pourra utiliser le critère de Cauchy pour dire que

$$\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Exercice 3 (Application indirecte du TSA)**.** Pour $\alpha > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$u_n(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \; - \; 1.$$

On étudie la nature de la série $\sum u_n(\alpha)$ selon les valeurs du paramètre $\alpha > 0$.

1. Montrer que
$$u_n(\alpha) = \frac{(-1)^n}{2\,n^\alpha} + w_n, \qquad w_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{8\,n^{2\alpha}}.$$
2. On note $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha}$. Montrer que $\sum v_n$ converge pour tout $\alpha > 0$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum w_n$ converge.
4. Conclure.

Exercice 4. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ par séries de Fourier.

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

1. Préciser et justifier la nature de la convergence de la série de Fourier de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

   de sorte que $S_n(f) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire l'égalité, valable pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx).$$

4. En déduire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

5. Méthode alternative. On pose $g(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$, prolongée par 2π-périodicité.
   (a) Calculer la série de Fourier de g et préciser la nature de sa convergence.
   (b) En déduire valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
   (c) Vérifier que c'est cohérent avec le résultat de la question 4, en utilisant la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}.$$