CALCUL DIFFÉRENTIEL – Cours 3

Rappel – [Schwarz]

Soit $f : U \longrightarrow F$ 2 fois diff en $a \in U$.

ALORS :

$$D^2f(a)(h,k) = D^2f(a)(k,h)$$

$$[D(Df)(a)(h)](k) = [D(Df)(a)(k)](h)$$

$\rightsquigarrow$ $Df : U \to \underbrace{\mathcal{L}(E,F)}_{\tilde{F}} \Rightarrow D(Df)(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ $\tilde{F}^{\vee}$

$\Rightarrow D(Df)(a)(h) \in \mathcal{L}(E,F)$

Corollaire –

Soit $f : U \longrightarrow F$ k-fois diff en $a \in U \subset E$

Alors, la forme k-linéaire $D^kf(a) : E^k \longrightarrow F$ est "symétrique" :

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $D^kf(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = D^kf(a)(h_1, \dots, h_k)$

$\forall h_1, \dots, h_k \in E$

Preuve –

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on peut écrire $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$ où $\tau_1, \dots, \tau_p$ transposit° $(p \leq k-1)$

- Propriété (P_k)

- $k = 2$: thm de Schwarz
- Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on suppose la pté vraie jusqu'à l'ordre k. Soit $h_1, \dots, h_{k+1} \in E$

$$D^{k+1}f(a)(h_1, \dots, h_{k+1}) = \Big(\underbrace{D(D^kf)(a)[h_1]}_{\in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_k(E,F))}\Big)(h_2, \dots, h_{k+1})$$

On applique le thm à $D^{k-1}f : U \longrightarrow \mathcal{L}_{k-1}(E,F)$
$\forall (h_1,h_2) \in E^2$,

initialisat° $k=2$

$\mathcal{L}_2(E, \mathcal{L}_{k-1}(E,F)) \ni D^2(D^{k-1}f)(a)(h_1,h_2) = D^2(D^{k-1}f)(a)(h_2,h_1)$
(sym)

$\Rightarrow \forall h_3,\dots,h_{k+1} \in E$, $(h_3,\dots,h_{k+1})$

$= D(D^k f)(a)(h_2)(h_3,\dots,h_{k+1})$ (HR) avec k $\rightsquigarrow$ invariant par perm σ' de $\{2,\dots,n\}$

$= D^{k+1}f(a)(h_1,\dots,h_{k+1})$

$\rightsquigarrow$ invariant par $\tau_{1\,2}$ et tout $\sigma' \in \mathfrak{S}(\{2,\dots,n\})$

donc par toute transposition (écrire $\tau_{1j} = \tau_{12}\tau_{2j}$ $j \neq 1$)

$\Rightarrow$ permutat° $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

Ce qui conclut la récurrence.

Cas $E = \mathbb{R}^d$

$f : U \longrightarrow F$ 2-fois diff. en $a \in U$.

$\forall i = 1,\dots,d$, $\partial_i f : U \longrightarrow F$ est différentiable et $x \longmapsto Df(x)(e_i)$

- $\forall j = 1,\dots,d$:

$$\partial_j(\partial_i f) = D(\partial_i f)(e_j)$$

noté $\partial_{ji} f$

- par ailleurs, $D(\partial_i f)(x) = D(ev_{e_i})(Df(x)) \circ D^2f(x)$

$\mathcal{L}(E,F)$

$\partial_i f(x) = ev_{e_i} \circ Df(x)$ $\quad | = D^2f(x)(e_i,\cdot)$

$D(ev_{e_i})(L) = ev_{e_i} \Leftarrow ev_{e_i} : L \longmapsto L(e_i)$ linéaire

$$\partial_i\partial_j f(x) = D^2 f(x)(e_i, e_j) = D^2 f(x)(e_j, e_i) = \partial_j \partial_i f(x)$$
(Schwartz)

En itérant, si f est k-fois diff

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = D^k f(x)(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

Notation, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq k$

$$\partial^\alpha = \underbrace{\partial_1^{\alpha_1}}_{\partial_1 \cdots \partial_1 \ (\alpha_1 \text{ fois})} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$$

Def : Si $f : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fois diff en $a \in U$
La hessienne de f est la matrice sym

$$\left(\partial_i \partial_j f(a)\right)_{i,j=1\cdots d}$$

C'est la matrice de la forme bilin. sym $D^2 f(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Prop $f : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow F$
f est de classe C^k sur U
ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues
ie : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha f : U \to F$ existe et continue.

III.3. Formules de Taylor

Notation : si f est k-diff en $a \in U \overset{c}{\subset} E$. On note :

$$P_k f(a) : h \in E \longmapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(a)(\underbrace{h, \dots, h}_{j \text{ fois}})$$

↳ partie principale des dvpt de Taylor de f

Si $U \subset \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{j!} D^j f(a)(h, \dots, h)$

$h = \sum_{i=1}^{d} h_i e_i$

$= \frac{1}{j!} \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_j=1}^{d} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_j} f(a) h_{i_1} \cdots h_{i_d}$ (j-linéarité)

et $D^j f(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}) = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_j} f(a)$

pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| = j$ on regroupe tous les $(i_1, \dots, i_j)$ tq $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_j} = \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$

$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| = j}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) \underbrace{h_1^{\alpha_1} \cdots h_d^{\alpha_d}}_{\text{"} h^\alpha \text{"}}$

$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$

(?) $\#\{(i_1, \dots, i_j) : \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_j} = \partial^\alpha\} = \binom{j}{\alpha_1} \binom{j-\alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{j-\alpha_1-\cdots-\alpha_{d-1}}{\alpha_d}$ ($= 1$)

$= \frac{j!}{\alpha_1!(j-\alpha_1)!} \cdot \frac{(j-\alpha_1)!}{\alpha_2!(j-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{(j-\alpha_1-\cdots-\alpha_{d-1})!}{\alpha_d! \, 0!}$

$= \frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}$ autre interprétation avec permutat° ?

Si $F = \mathbb{R}$, c'est un polynôme à d variables "pol. de Taylor d'ordre j de f en a"

Théorème [Taylor-Young]

Soit $f : U \subset E \to F$, U ouvert contenant a

Si f est k-diff en a alors :

$$f(a+h) = P_k f(a)(h) + o(\|h\|^k)$$

$\rightarrow$

ie $$\frac{f(a+h) - P_k f(a)(h)}{\|h\|^k} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Preuve

On montre le thm par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$

- $k = 1$: si $f : U \to F$ est 1-diff en a :

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + Df(a)(h)}_{P_1 f(a)(h)} + o(\|h\|_E)$$

ne def de diff en a.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose le thm vrai à l'ordre k

Soit $f : U \to F$ $(k+1)$-diff en a.

Alors $\exists \alpha > 0$ tq f est diff sur $B(a, \alpha)$ et donc

$$\varphi : B(0, \alpha) \to F$$
$$h \longmapsto f(a+h) - \underbrace{P_{k+1} f(a)(h)}_{\text{polynomiale}}$$

est diff et on a :

$\forall v \in E$,

$$D\varphi(h)(v) = Df(a+h)(v) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(j-1)!} D^j f(v, h, \dots, h)$$

- $f(a+h) = f \circ t_a$ $\quad h \xrightarrow{t_a} a+h$ aff

$Dt_a(h) = Id_E$

Et, $\varphi(0) = f(a) - f(a) = 0$

But : $\|D\varphi(h)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = o(\|h\|^k)$

- pour $j \leq k+1$, $h \mapsto D^j f(a)(h,\dots,h)$ j-linéaire

$$D^j f(a)(h+v,\dots,h+v) = D^j f(v,h,\dots,h) + D^j f(h,v,h,\dots,h) + \dots + D^j f(h,\dots,h,v) + o(\|v\|)$$

par ex. $\|D^j f(a)(v,v,h,\dots,h)\|_F \leq \|D^j f(a)\| \, \|v\|_E^2 \, \|h\|_E^{k-2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{j!} D g_j(h)(v) = \underbrace{\frac{j}{j!}}_{\frac{1}{(j-1)!}} D^j f(v,h,\dots,h)$$

Mq $D\varphi(h) = Df(a+h) - \underset{\text{ok}}{\uparrow} T_k(Df)(a)(h) \in ds\mathcal{L}(E,F)$

Pour $j \leq k+1$, $D^j f(a)(v,h,\dots,h) = \overbrace{D^{j-1}(Df)(a)(h,\dots,h)}^{\in \mathcal{L}_{j-1}(E,\mathcal{L}(E,F))}(v)$

$\wedge^{\mathcal{L}}$

u

$\downarrow$

$\mathcal{L}(E,F)$

$$\Rightarrow D\varphi(h) = Df(a+h) - \underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1}(Df)(a)(h,\dots,h)}_{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j(Df)(a)(h,\dots,h)}$$

$\xRightarrow[(HR)]{}$ $D\varphi(h) = o(\|h\|^k)$

à Df

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ($\delta < \alpha$), $\forall h \in B(0,\delta)$,

$$\|D\varphi(h)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon \|h\|_E^k$$

$\Longrightarrow$ A.F à φ qui est diff sur $B(0,\alpha)$ $\supset B(0,\delta) \supset [0,h]$

$$\|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \|\varphi(h)\| \leq \sup_{u \in [0,h]} \|D\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|$$
$$\leq \varepsilon \|u\|^k \|h\|$$
$$\leq \varepsilon \|h\|^{k+1}$$

$$\Rightarrow f(a+h) - P_{k+1}(f)(a)(h) = o(\|h\|^{k+1})$$

□

Thm - [Taylor - Lagrange]

Soit $f : U \longrightarrow F$ $(k+1)$ fois diff sur U

On suppose

$\exists M \geq 0, \forall x \in U, \|D^{k+1} f(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$

Soient $a \in U$, $h \in E$ tq $[a, a+h] \subset U$, alors

$$\|f(b) - P_k f(a)(h)\|_F \leq \frac{M}{(k+1)!} \|h\|^{k+1}$$

Preuve.

- Cas $E = \mathbb{R}$ et $[0,1] \subset U \subset \mathbb{R}$

$$\varphi : t \in U \longmapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j)}(t)$$

φ est dérivable et $\forall t \in U$,

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(-\frac{j(1-t)^{j-1}}{j!} f^{(j)}(t) + \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(t) \right)$$

$\frac{j}{j!} = \frac{1}{(j-1)!}$

$$= \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \|\varphi'(t)\| \leq \frac{(1-t)^k}{k!} M = g'(t) \text{ où } g : t \mapsto -\frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!} M$$

$\Longrightarrow$ I.A.F à φ dérivable sur $U = [0,1]$

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq g(1) - g(0) \leq \frac{M}{(k+1)!}$$

$$f(1) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

Si on majore $(1-t)^k$ par 1 ça ne marche pas... on a $\frac{1}{k!}$ au lieu de $\frac{1}{(k+1)!}$

. Retour au cas "général" $U \subset E$ evn

On applique le résultat précédent avec

$$\psi : t \mapsto f(a+th) \qquad \underline{\text{exo}}$$

- $\psi'(t) = Df(a+th)(h)$
- $\psi''(t) = D^2 f(a+th)(h,h)$
- $\psi^{(j)}(t) = D^j f(a+th)(h,\dots,h)$

$\Rightarrow \psi^{(j)}(0) = D^j f(a)(h,\dots,h)$

et $\psi(1) = f(a+h)$

↓ composition de $t \mapsto Df(a+th)$ avec l'évaluat° en h :

$\mathcal{L}(E,F) \to F$, $L \mapsto L(h)$

□

Thm [TRI]

Soit $f : U \longrightarrow F$ de classe C^{k+1}

$a \in U$, $h \in E$ tq $[a, a+h] \subset U$

Alors $$f(a+h) = P_k f(a)(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h, \dots, h)\, dt$$

Preuve

- Cas $E = \mathbb{R}$, $x = 0$, $h = 1$, $[0,1] \subset U$

$$f(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$$

Par réc sur $p \in \mathbb{N}$, $p \leq k$ (On peut faire la réc pour f fixée contrairement à la preuve de T.Y.

* $p = 0$:

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t)\, dt$$ Thm fond de l'analyse

* Soit $p \leq k-1$, on suppose la pté vraie au rang p.

On a alors :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, dt \underset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p)}(t)\, dt$$

$u : t \mapsto \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}$

$v = f^{(p)}$

sont C^1 sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ pté au rang $p+1$

- Cas $U \subset E$ evn

À nouveau, on applique le cas précédent à $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ □

Rque sur les formules de Taylor

- Attention aux hyp, en toute généralité, l'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas csq de TRI (hyp plus faible)

- Les démo de T.L et TRI se ramènent aux cas d'une variable réelle, pas celle de T.Y.

- Appl "partout" en analyse et en géométrie
  ex: théorie des distributions
  Aussi en analyse numérique (schémas d'ordre "élevé" EDO-EDP ≠ ces finies formules quadrature Convergence quadrat de Newton...)

- Rappel. diff au point $\Leftrightarrow$ TY ordre 1 (déf°)
  k-diff au point $\Rightarrow$ TY ordre k

ex: $x \xmapsto{f} \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

exo

pas 2-fois dérivable

$\left|x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^3 \Rightarrow f(x) = o(x^2)$

f dérivable ($f'(0)=0$) pas 2 fois dérivable en 0

$3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 0$

$= 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^{\,x}]{} 0$

$- \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite

III.4. Extrema locaux

Prop. $f : \underset{\text{ouvert}}{U} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$

(i) si f est diff en a et a extremum local
alors $Df(a) = 0$ Cond Néc. d'opt. d'ordre 1

(ii) si f est 2-diff en a et a minimum local
alors $D^2f(a)(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in E$

(iii) si f est 2-diff en a et

$$\begin{cases} Df(a) = 0 \\ \exists c > 0 \text{ tq } D^2f(a)(h,h) \geq c\|h\|^2 \quad \forall h \in E \end{cases} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow$ ($\dim E < \infty$) $\quad D^2f(a)(h,h) > 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}$

alors a est un min local de f

$(*)$ $c = \min_{\|h\|=1} D^2f(a)(h,h)$ ($c > 0$, $D^2f(a)(h,h) > 0$)
↑ sphère compacte

Rque

$x \xmapsto{f} x^3$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et 0 pas extremum local

Preuve (exo)

(i) Soit $h \in E$, $Df(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = 0$

signe constant p/ t petit

t change de signe

$\Rightarrow \lim_{t \to 0_+}$ et $\lim_{t \to 0_-}$ sont de signes opposés

$=$

(ii) Taylor-Young ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{Df(a)(h)}_{=0 \text{ par (i)}} + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, $\varepsilon : B(0,\delta) \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$,
pour $h \in B(0,\delta)$, $0 < t \leq 1$

$$0 \leq f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} D^2 f(a)(th,th) + \|th\|^2 \varepsilon(th)$$

$$\xrightarrow[\times \frac{1}{t^2} > 0]{} \quad 0 \leq \frac{1}{2} D^2 f(a)(h,h) + \|h\|^2 \underbrace{\varepsilon(th)}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0}$$

(iii) On reprend Taylor-Young ordre 2

$$\forall h \in B(0,\delta), \quad f(a+h) - f(a) = \underbrace{Df(a)(h)}_{0 \text{ (hyp)}} + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow \quad \geq \left(\frac{1}{2} c + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} \right) \|h\|^2$$
$\frac{1}{2} c > 0$

$\exists \eta > 0$ ($\eta < \delta$), $\forall h \in B(0,\eta)$, $\frac{1}{2} c + \varepsilon(h) \geq \frac{c}{4} > 0$

(a est un min local strict). □