# ESPACES DE HILBERT

## 1|- Espaces préhilbertiens

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ "produit scalaire"
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ "produit hermitien"

**Def - Espace préhilbertien**

Soit $E$ $\mathbb{K}$-ev muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{K}$,

(i) (linéarité à gauche)
$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$
(ii) (symétrie "hermitienne")
$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$
(iii) caractère défini positif :
$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ avec égalité ssi } x = 0$$

Un espace préhilbertien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où $E$ $\mathbb{K}$-ev et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire ou hermitien

Rque.

- (ii) garantit $\langle x,x\rangle = \overline{\langle x,x\rangle}$ donc $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$ et (iii) ne concerne que $\geq 0$
- Comme csq (i) et (ii)
  - $(\mathbb{K}=\mathbb{C})$ : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ antilinéaire à droite :
    $$\langle x, \lambda y + z\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$
  - $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinéaire
- la linéarité à gauche | est une convention.
  antilin à dte |

Exemples d'espaces préhilbertiens:

(i) $\mathbb{C}^d$ muni du p.s. hermitien
$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \bar{y}_i \quad , \quad x,y \in \mathbb{C}^d$$

(ii) $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ muni du p.s.
$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} b_{ij}$$
pour $A,B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

(iii) Pour $(X,\mu)$ un espace mesuré : $L^2(X,\mu)$ muni du p.s
$$\langle u,v\rangle = \int_X u\bar{v}\, d\mu \quad , \quad u,v \in L^2(X,\mu)$$

En particulier, si $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on retrouve $\ell^2(\mathbb{K})$ muni du p.s.
$$\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \bar{v}_n \quad , \quad u,v \in \ell^2(\mathbb{K})$$

(iv) Tout s.e.v. $V$ d'un espace préhilbertien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ muni du p.s. $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{V\times V}$ est encore un espace préhilbertien :

Par ex : $V = C([0,1], \mathbb{K})$ muni du p.s. induit par celui de $E = L^2([0,1], dx)$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad , f, g \in V$$

Dans toutes les déf / prop. on fixe $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

**Def** Pour $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

On va vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $E$.

- Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle}$
$= |\lambda| \, \|x\|$
- Axiome de séparation : $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
(caractère déf + du p.s)
- I.T csq de l'inégalité de C.S.

**Prop** Inégalité de Cauchy – Schwarz

$\forall x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

avec égalité ssi $x$ et $y$ sont colinéaires

Preuve - Soit $x, y \in E$, on peut supposer $\langle x, y \rangle \neq 0$ et en particulier $x \neq 0$ et $y \neq 0$

[si $\langle x, y \rangle = 0$, OK car $\|x\| \geq 0$, $\|y\| \geq 0$]

- Soit $t \in \mathbb{K}$, $\|tx + y\|^2 \geq 0$

$$\|tx + y\|^2 = |t|^2 \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(t\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \geq 0$$

• En particulier, pour $r \in \mathbb{R}$ et $t(r) = r\dfrac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$ ($|t(r)| = r$)

on obtient : $r^2 \|x\|^2 + 2r|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \geq 0$

• Le discriminant de la fct polynomiale en $r$ ↑ doit être $\leq 0$, i.e. :

$$4\left(|\langle x,y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

• Le discriminant étant nul ssi $\|t(r)x + y\|^2 = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$t(r)x + y = 0$$

donc $x$ et $y$ sont colinéaires.

(Dans le cas écarté au début $\langle x,y\rangle = 0$, on a égalité ssi $\|x\| = 0$ ou $\|y\| = 0$ ssi $x = 0$ ou $y = 0$ et $x$ et $y$ sont bien colinéaires.)

$= t\acute{e}$ ⇓ $x, y$ colinéaires

Réciproquement, si $x$ et $y$ sont colinéaires on a bien égalité de C.S. □

On en déduit l'I.T. pour $\|\cdot\|$ : pour $x, y \in E$, par C.S. :

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

d'où :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq 2\|x\|\|y\|} + \|y\|^2$$

$$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Prop** - $\|\cdot\|$ définit une norme sur $E$.

**Prop** - Identités du parallélogramme et de polarisation

$\forall x, y \in E$,

(i) Identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(ii) Identité de polarisation :

$(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ : $2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$

$(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ : $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$

L'identité de polarisation dit que le p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est entièrement caractérisé par la norme associée $\|\cdot\|$.

"Preuve" On développe les $\|\ \|^2$ du membre de droite et on simplifie $\square$.

**Def** - (Orthogonalité)

- Soient $x, y \in E$, on dit que $x$ et $y$ sont **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.
- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une **famille** de $E$, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est **orthogonale** si $\forall i, j \in I$, $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$
- Pour $A \subset E$, on définit **l'orthogonal de $A$**, noté $A^\perp$

$$A^\perp = \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$$

**Prop** - (Propriétés de l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie $A \subset E$)

- $E^\perp = \{0\}$ ; $A \subset (A^\perp)^\perp$ ; $(\overline{A})^\perp = A^\perp$
- $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$
- $A^\perp$ est un s.e.v fermé dans $E$

($\overline{A}$ : adhérence de $A$)

**Preuve** "exercice ?"

**Prop** (Identité de Pythagore)
Soient $x, y \in E$ orthogonaux : $\langle x, y \rangle = 0$
alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Preuve** : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle}_{0} + \|y\|^2$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$ □

## 2) Espaces de Hilbert et thm de projection sur un convexe fermé

**Def** - Un **espace de Hilbert** est un préhilbertien **complet** pour la norme associée au p.s :
$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien
$(H, \|\cdot\|)$ e.v.n. complet où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in H$

Si on reprend les exemples d'espaces préhilbertiens
- $\mathbb{C}^d$, $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $L^2(X, \mu)$ sont des espaces de Hilbert pour la structure $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qu'on a définie.
- $C([0,1], \mathbb{K})$ muni du p.s. induit par $L^2([0,1], dx)$ n'est pas un espace de Hilbert : il n'est pas fermé dans $L^2([0,1], dx)$ : $C([0,1], \mathbb{K}) = L^2([0,1], dx)$ pas fermé ds $L^2$ $\Rightarrow$ pas complet

**À partir de maintenant $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.**

**Thm** (Projection sur un convexe fermé)

On suppose : $H$ espace de Hilbert et $C \subset H$ convexe $\neq \emptyset$ fermé de $H$

ou

$H$ espace préhilbertien et $C \subset H$ convexe $\neq \emptyset$ complet

Appl : $H$ pas complet mais $C = F$ s.e.v de dim finie donc complet

Alors, • pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de $C$, noté $p_C(x)$ tq

$$\|x - p_C(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\| = \text{dist}(x, C).$$

• De plus $p_C(x) \in C$ est caractérisé par :

$$\forall z \in C, \quad \text{Re} \langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0$$

• L'application $p_C$ est 1-lipschitzienne.

**Preuve** La preuve repose notamment sur l'identité du parallélogramme

Soit $x \in H$, $d = \inf_{y \in C} \|x - y\| = \text{dist}(x, C)$

• Existence. Par déf de l'inf, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in C$ tel que

$$d^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + 2^{-n}$$

Mq $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, par l'identité du parallélogramme : à $x - y_p$ et $x - y_q$ :

$$\|2x - y_p - y_q\|^2 + \|y_q - y_p\|^2 = 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2$$
$$\leq 4d^2 + 4 \cdot 2^{-\min(p,q)}$$

On a par convexité $\frac{y_p + y_q}{2} \in C$

$$\|y_q - y_p\|^2 \leq 4d^2 + 2^{-\min(p,q)+2} - 4\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2$$

$\geq d^2$ car $\frac{y_p + y_q}{2} \in C$

$\leq 2^{-\min(p,q)+2}$ $\longrightarrow 0$ quand $\min(p,q) \to +\infty$

Donc $(y_n)_n$ est de Cauchy dans $H$ complet donc $\exists y \in H$ tq $y_n \longrightarrow y$ ds $H$

$C$ fermé, $y_n \in C$, $y \in C$

On a alors

$$\operatorname{dist}(x, C) = \lim_{n\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\| \text{ par cont° de } \|\cdot\|$$

et on pose $p_C(x) = y \in C$.

- Unicité. Si $y_1, y_2 \in C$ t.q. $d = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$ par l'identité du parallélogramme avec $x - y_1$ et $x - y_2$ :

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \underbrace{2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2}_{4d^2} - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2}_{\geq d^2 \text{ car } \frac{y_1+y_2}{2} \in C}$$

$\leq 0$

donc $y_1 = y_2$.

D'où l'unicité de $p_C$.

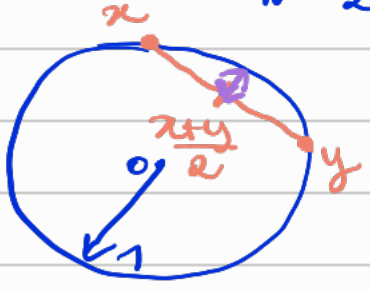
- Rque : l'identité du parallélogramme

$x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4$$

ou encore :

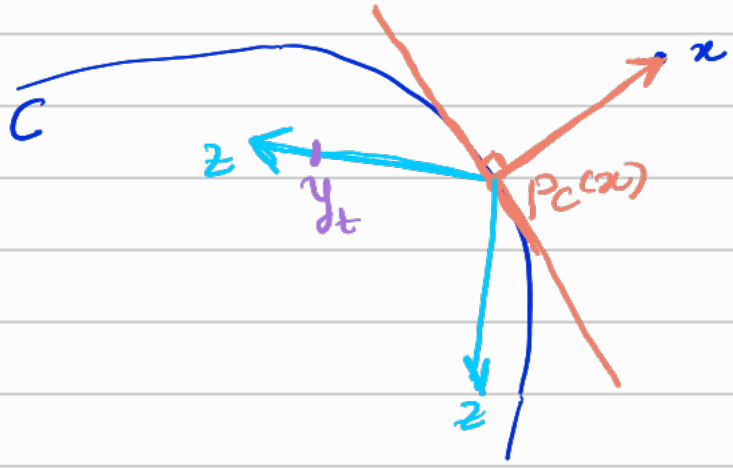
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1$$




si $\|x - y\| \geq \varepsilon$

alors $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$

• Caractérisation. Soit $z \in C$




* Pour $t \in ]0,1]$, $(1-t)p_C(x) + tz = p_C(x) + t(z - p_C(x))$ $= y_t$, $\in C$ par convexité

donc

$$\underbrace{\|x - (p_C(x) + t(z-p_C(x)))\|^2}_{= (x-p_C(x)) - t(z-p_C(x))} - \|x - p_C(x)\|^2 \geq 0$$

$y_t \in C$

$$= -2t \operatorname{Re}\langle x-p_C(x), z-p_C(x)\rangle + t^2\|z-p_C(x)\|^2 \geq 0$$

en divisant par $t>0$ puis $t \to 0$ on obtient

$$\leq -2\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), z-p_C(x)\rangle \geq 0$$

* Réciproquement, si $y \in C$ vérifie :

$\forall z \in C$, $\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$

Mq. $y = p_C(x)$.

On alors :

$$\mathbb{R} \ni \|y - p_C(x)\|^2 = \operatorname{Re}\langle y-x, y-p_C(x)\rangle + \operatorname{Re}\langle x-p_C(x), y-p_C(x)\rangle$$

$\leq 0$ par ce qu'on vient de voir

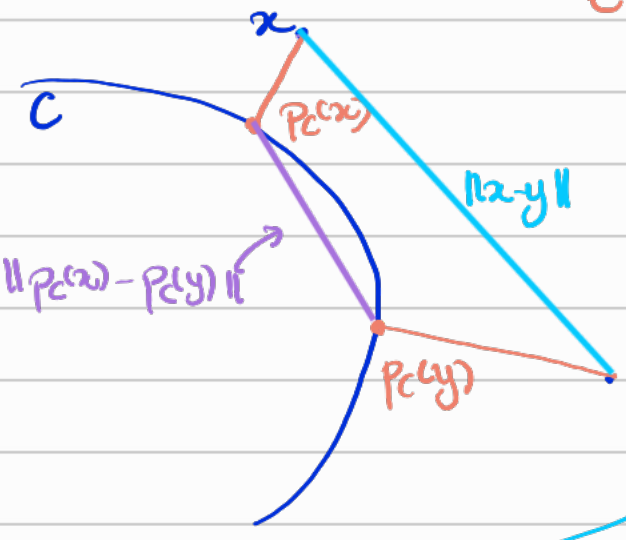
$\operatorname{Re}\langle y-p_C(x), y-p_C(x)\rangle$

$y-x+x-p_C(x)$

donc $\|y - p_C(x)\|^2 \leq 0 \Rightarrow y = p_C(x)$

- $p_C$ est 1-lipschitzienne : soient $x, y \in H$,

$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 = \underset{\in \mathbb{R}}{\text{Re}} \langle p_C(x) - x + x - y + y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle$




$= \text{Re}\langle p_C(x) - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle$ $\leq 0$ par caract° pour $p_C(x)$

$+ \text{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle$

$+ \text{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle$ $\leq 0$ par caract° pour $p_C(y)$

$\hookrightarrow \leq |\langle x-y, p_C(x) - p_C(y) \rangle| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|x-y\| \, \|p_C(x) - p_C(y)\|$

D'où : $\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \|x-y\| . \|p_C(x) - p_C(y)\|$

$\Rightarrow \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x-y\|$ si $\|p_C(x) - p_C(y)\| \neq 0$

et encore vrai si $\|p_C(x) - p_C(y)\| = 0$ □

On peut supposer alternativ^t : H préhilbertien et F s.e.v complet de H

**Corollaire** Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H.
Alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

où $p_F, p_{F^\perp}$ désignent les projections, au sens du thm précédent sur $F, F^\perp$ qui sont des s.e.v. fermés de H donc convexes fermés $\neq \emptyset$

Ce corollaire dit en particulier que la projection sur $F$ parallèlement à $F^\perp$ coïncide avec la projection sur le convexe fermé $F$.

**Preuve** $F$ et $F^\perp$ sont des s.e.v fermés donc $p_F$ et $p_{F^\perp}$ sont bien def. ($\Rightarrow$ convexes)

- $H = F + F^\perp$. Soit $x \in H$,
on peut écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$
vérifions que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Par caractérisation de $p_F(x)$,
$$\forall z \in F, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_F(x), z - p_F(x)\rangle \leq 0$$

$\Rightarrow \forall y \in F, \ \mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0$
($z = \underbrace{y + p_F(x)}_{\in F}$)

* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : $\forall y \in F, \ \langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0$
($-y \in F$, $\geq 0$)
$\Rightarrow \forall y \in F, \ \langle x - p_F(x), y\rangle = 0$

$\Rightarrow x - p_F(x) \in F^\perp$

* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $y \in F$, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tq $|\omega| = 1$ tq
$$\langle x - p_F(x), y\rangle = \omega\,|\langle x - p_F(x), y\rangle|$$

$\Rightarrow$ (antilinéarité à dte)
$$\langle x - p_F(x), \underbrace{\omega y}_{\in F}\rangle = \overline{\omega}\langle x - p_F(x), y\rangle = |\langle x - p_F(x), y\rangle|$$
par def de $\omega$

donc $|\langle x - p_F(x), y\rangle| = \mathrm{Re}\,|\langle x - p_F(x), y\rangle|$

$= \mathrm{Re}\,\langle x - p_F(x), \omega y\rangle$ ($\omega y \in F$)

$\leq 0$

donc $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in F$

$\Rightarrow x - p_F(x) \in F^\perp$

- $F \cap F^\perp = \{0\}$. Si $x \in F \cap F^\perp$, $\forall y \in F$, $\langle x, y\rangle = 0$

en particulier ($y = x \in F$) $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$

$\Rightarrow x = 0$

- $p_{F^\perp} = \mathrm{id} - p_F$. Comme $F^\perp$ s.e.v. fermé de $H$, on lui applique la décomposit° que'on vient d'établir :

$$H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$$

Soit $x \in H$, comme $p_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp$ (cf exos)

On peut écrire :

$$x = p_{F^\perp}(x) + (x - p_{F^\perp}(x))$$

$$x = x - p_F(x) + p_F(x)$$

$x - p_F(x) \in F^\perp$ (on vient de le voir) ; $p_F(x) \in (F^\perp)^\perp$

Par somme directe (unicité de l'écriture)

$$p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x)$$

□