# Le poisson n'a pas d'arêtes

Thierry Bousch, CNRS URA 1169
Mathématique, Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex

**Résumé**. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{T}^1, x \mapsto 2x)$ l'ensemble des probabilités boréliennes de $\mathbb{T}^1$ invariantes par doublement. On démontre que pour toute fonction de la forme $\rho_\omega(t) = \cos(2\pi(t-\omega))$, il existe un unique $\mu \in \mathcal{M}$ réalisant le maximum de $\int \rho\, d\mu$, et que le support de cette mesure est contenu dans un demi-cercle. En particulier la projection de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mu \mapsto \int \exp(2i\pi t) d\mu$, dont l'image est un compact convexe (que nous appelons *le poisson*), est en fait strictement convexe; il ne porte pas d'arêtes sur son bord. Nous démontrons également que la mesure maximisante est périodique pour tout $\omega$ hors d'un certain ensemble de mesure zéro et de dimension de Hausdorff zéro.

**Abstract.** Let $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{T}^1, x \mapsto 2x)$ be the set of Borel probabilities on $\mathbb{T}^1$ which are invariant by angle-doubling. We prove that for each function $\rho_\omega(t) = \cos(2\pi(t-\omega))$, there is exactly one element $\mu \in \mathcal{M}$ which maximises $\int \rho\, d\mu$, and that the support of this measure is contained in a semicircle. In particular, the image of the map $\mu \mapsto \int \exp(2i\pi t) d\mu$, which is a compact and convex set of $\mathbb{C}$, is in fact strictly convex; it doesn't contain any line segments on its boundary. We also prove that the maximising measure is periodic for every $\omega$ except on a set which has measure zero and Hausdorff dimension zero.

**Codes matière AMS (1991) :** 52A10, 58F03, 58F11, 90C48

## 1. Enoncé du problème

Soit $\mathbb{T}^1$ le cercle unité, muni de l'application $x \mapsto 2x$, et $\mathcal{M}$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{T}^1$ invariantes par cette application. C'est un espace métrique compact, convexe, qu'on peut considérer comme le complété de l'ensemble des orbites périodiques. Sur cet espace, on veut étudier le problème variationnel suivant : pour $\rho : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ continue donnée, trouver le ou les éléments $\mu \in \mathcal{M}$ qui réalisent le maximum de $\int \rho\, d\mu$.

Dans cet article, nous étudierons les fonctions $\rho$ les plus simples possibles (après les constantes), à savoir les polynômes trigonométriques de degré un:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \alpha\cos(2\pi t) + \beta\sin(2\pi t)\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\bigl(2\pi(t-\omega)\bigr)\end{aligned}$$

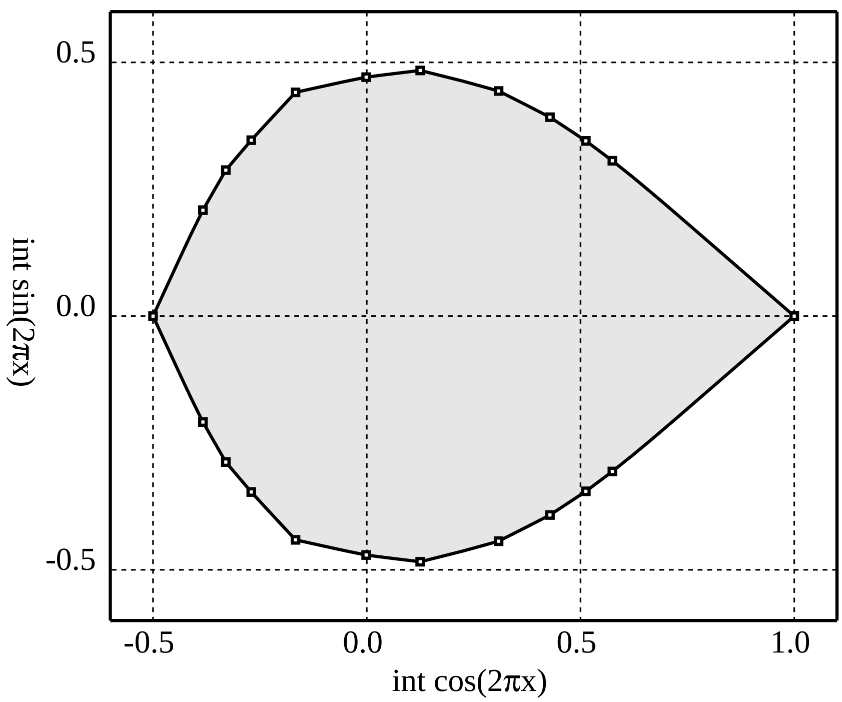
avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Nous démontrons qu'il existe une et une seule mesure invariante $\mu$ qui maximise l'intégrale de $\rho$, et qu'il s'agit d'une *mesure de Sturm*. Ces mesures (ou leur support, plutôt) apparaissent dans de nombreux autres problèmes de systèmes dynamiques. Dans le chapitre suivant, nous allons rappeler sans démonstration un certain nombre de résultats classiques sur ces mesures, dont nous aurons besoin par la suite.

### 1.1 Un autre point de vue: le poisson

Soit $p$ l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ définie par

$$p(\mu) = \int \exp(2i\pi t)\, d\mu(t) = \int \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} d\mu(t)$$

Cette application (qu'il faut penser comme une projection d'un espace de dimension infinie dans un espace de dimension deux) est continue et affine, donc son image $\mathcal{P} = p(\mathcal{M})$ est un compact convexe du plan, contenu dans le disque unité. Ce compact présente l'aspect ci-dessous ; nous l'appellerons *le poisson*.




Chercher la mesure invariante maximisant $\int \alpha \cos 2\pi t + \beta \sin 2\pi t$ équivaut à chercher (i) les points $\binom{x}{y}$ du poisson pour lesquels $\alpha x + \beta y$ est maximum, et (ii) les mesures qui se projettent (par $p$) en ces points. Si on cherche seulement la valeur du maximum, la première étape seule est utile.

En particulier, si on sait démontrer qu'il existe une unique mesure maximisante pour tout $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, alors ceci implique en particulier que le bord du poisson ne contient aucun segment. (Le dessin de $\mathcal{P}$ suggère le contraire, mais le bord ne contient effectivement aucune arête; en revanche, le bord est très bien approchable par des polygones avec un petit nombre d'arêtes.)

### 1.2 Exemples d'applications

La connaissance explicite des mesures maximisantes permet de borner de manière fine les sommes de Birkhoff ; par exemple, si on sait démontrer que pour $\rho(t) = \sin 2\pi t$, la mesure maximisante est la mesure de Sturm de paramètre $1/4$, alors on peut en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2^k x) \;\leq\; \pi + \frac{\sqrt{15}}{8}\, n$$

et la constante $\frac{\sqrt{15}}{8}$ ne peut pas être améliorée.

Une autre application possible est l'étude de la bifurcation d'un Cantor hyperbolique (initialement), et en particulier la recherche de la mesure invariante de plus petit exposant de Lyapounov ; on suppose qu'il s'agira le plus souvent d'un point fixe ou périodique, mais l'étude ci-après laisse entendre que ce minimum pourrait être atteint sur une mesure invariante plus compliquée, comme une mesure de Sturm.

## 2. Les mesures de Sturm

Il existe une classe remarquable de mesures invariantes dépendant d'un paramètre, que l'on peut définir sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ou sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ munis du décalage de Bernoulli, ou sur $\mathbb{T}^1$ muni du doublement. Dans les deux premiers cas, le paramètre $\rho$ décrit $[0,1]$, mais dans le cas du cercle le paramètre vit dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, i.e. les mesures $\mu_0$ et $\mu_1$ sont confondues (il s'agit du Dirac en zéro). Ces mesures sont connues depuis longtemps (voir en particulier [1] et [7]) et je me contenterai de rappeler leur définition et leurs principales propriétés, sans démonstration. On pourrait se contenter de ne définir les $\mu_\rho$ que sur le Cantor bilatéral ; les mesures sur le Cantor unilatéral et le cercle s'en déduisent par projection.

### 2.1. Définition quasi-périodique

La mesure $\mu_\rho$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est telle que le chiffre "1" y apparaît avec probabilité $\rho$. Il faut s'imaginer que, pour tout point dans le support, les "0" et les "1" sont mélangés de la manière la plus régulière possible.

Pour cela, considérons la rotation d'angle $\rho$ sur le cercle, et la suite définie par $t_{n+1} = t_n + \rho$ modulo 1, et soit $(x_n)$ la suite définie par $x_n = 1$ si $t_n$ est dans l'intervalle $[0, \rho[$ et $x_n = 0$ dans le cas contraire. On a donc une application de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans le Cantor, qui à $t_0$ associe une certaine suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui est son itinéraire par la rotation. La mesure image de la mesure de Lebesgue par cette application sera la mesure $\mu_\rho$.

Quand $\rho$ est rationnel (écrivons le $p/q$, la fraction étant irréductible) alors on voit que $\mu_\rho$ est portée par un cycle périodique de période $q$. En particulier, $\mu_0$ et $\mu_1$ sont des diracs portés par les points fixes $\overline{0}$ et $\overline{1}$ respectivement.

## 2.2. Caractérisation "lexicographique"

Il se trouve que le support de $\mu_\rho$ est un compact invariant uniquement ergodique, si bien que sa donnée caractérise la mesure, et qui présente la propriété suivante: si $\ldots g_3 g_2 g_1 d_1 d_2 d_3 \ldots$ et $\ldots g_3' g_2' g_1' d_1' d_2' d_3' \ldots$ sont deux points de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans le support de la mesure, alors on ne peut avoir simultanément $g_1 g_2 g_3 \ldots < g_1' g_2' g_3' \ldots$ et $d_1 d_2 d_3 \ldots < d_1' d_2' d_3' \ldots$, où $<$ désigne l'ordre lexicographique. Une autre formulation, équivalente, est que si $w$ est un mot de longueur quelconque sur $\{0,1\}$, alors on ne peut pas avoir dans le support à la fois un point de la forme $\cdots 0w0 \cdots$ et un autre de la forme $\cdots 1w1 \cdots$.

Si on reformule cette condition sur le cercle $\mathbb{T}^1$ au lieu du Cantor, alors cela revient à dire que le support de la mesure est contenu dans un demi-cercle. On consultera [1] pour plus de détails.

**Proposition-définition.** *Il existe une et une seule proba invariante dont le support est contenu dans un demi-cercle donné. Une mesure sera dite "de Sturm" si elle vérifie cette propriété.*

On prouve également que pour tout $x$ dans le support de $\mu_\rho$, les itérées $x_i = 2^i x$ sont disposées sur le cercle dans le même ordre que si on itérait la rotation $x \mapsto x + \rho$, où $\rho$ est le paramètre de la mesure de Sturm. Pour cette raison, nous l'appellerons également "l'angle de rotation" de la mesure de Sturm.

## 2.3. Définition par renormalisation

La propriété énoncée dans le paragraphe précédent nous permet de dire qu'en tout point (autre que $\overline{0}$) dans le support de $\mu_\rho$, les espacements entre '1' consécutifs ne peuvent valoir que $n$ ou $n+1$ pour $n = \lfloor \rho^{-1} \rfloor$. Autrement dit, ce mot infini en 0 et 1 peut être considéré comme un mot infini construit avec les deux lettres

$$\mathbf{z} = \underbrace{0\ldots0}_{n-1}1 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Réécrivons le mot en fonction de $\mathbf{z}$ et $\mathbf{u}$, puis remplaçons $\mathbf{z}$ et $\mathbf{u}$ par 0 et 1. Alors cette nouvelle suite de 0 et 1 vérifiera exactement les mêmes propriétés que la suite dont on était parti, la seule différence étant la densité de 1 qui vaut maintenant $\rho' = \rho^{-1} - n = \{\rho^{-1}\}$. On peut réitérer ce processus, un nombre fini ou infini de fois selon que $\rho$ est rationnel ou non, les $n$ apparaissant à chaque étape étant simplement les quotients partiels du développement en fraction continue de $\rho$.

Nous n'utiliserons pas cette caractérisation des mesures de Sturm.

## 3. Le lemme de Mañé

Un résultat essentiel pour la recherche et l'étude des mesures maximisantes est le suivant ; il s'agit d'une variante d'un lemme énoncé et démontré par Mañé (voir [8]) dans un cadre très différent et par des méthodes très différentes, mais il y a quand même des ressemblances.

Nous l'énoncerons dans le cas de l'application de doublement, avec une fonction $\rho$ lipschitzienne ; mais on pourrait aussi bien prendre n'importe quelle application expansive, et $\rho$ hölderienne. La notation "$2\mu = \mu$" signifie que la proba $\mu$ est invariante par doublement.

**Lemme A.** *Soit $\rho : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ lipschitzienne de constante $k$. Alors il existe une fonction continue $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ et une constante $\beta$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{T}^1 \qquad \phi(x) = -\beta + \max_{2y=x} (\phi + \rho)(y)$$

*Démonstration.* Soit $\mathrm{Lip}_k(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des fonctions $k$-lipschitziennes de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$, muni de la distance uniforme, et $\mathrm{Lip}'_k = \mathrm{Lip}_k/\{\text{constantes}\}$. L'opérateur $\Omega$ défini par

$$\Omega : \phi \mapsto \psi \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \max_{2y=x} (\phi + \rho)(y)$$

envoie $\mathrm{Lip}_k$ dans lui-même de façon continue, et passe au quotient en un opérateur continu $\Omega'$ de $\mathrm{Lip}'_k$ dans lui-même. Mais $\mathrm{Lip}'_k$ est compact et convexe, donc $\Omega'$ y admet au moins un point fixe, en vertu du théorème de Leray-Schauder-Tychonov. Ce qui prouve le lemme.

En fait, nous n'avons pas besoin du théorème de Leray-Schauder-Tychonov sous sa forme la plus générale; en effet, $\Omega$ diminue les distances (et donc $\Omega'$ également) :

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Lip}_k \qquad d_\infty(\Omega(\phi_1), \Omega(\phi_2)) \leq d_\infty(\phi_1, \phi_2)$$

Il suffit donc d'approcher $\Omega'$ par des opérateurs contractants (envoyant $\mathrm{Lip}'_k$ dans lui-même) puis de prendre une valeur d'adhérence de la suite des points fixes.

**Lemme B.** *Si $\phi$, $\rho$ et $\beta$ vérifient l'équation fonctionnelle ci-dessus, alors $\beta = \max_{2\mu=\mu} \int \rho \, d\mu$ et $\phi$ est lipschitzienne de constante $k$.*

*Démonstration.* Soient $\phi$, $\rho$ et $\beta$ comme dans le lemme A. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{T}^1 \qquad & \phi(2x) + \beta = \phi(x) + \rho(x) + r(x), \\ & r(x) \geq 0, \\ & r(x) \cdot r(x + 1/2) = 0 \end{aligned}$$

pour une certaine fonction "reste" $r$. Intégrant cette nouvelle identité par une quelconque probabilité invariante $\mu$, il vient

$$\int \rho(x) \, d\mu(x) = \beta - \int r(x) \, d\mu(x).$$

Cette dernière intégrale est toujours positive (puisque $r$ est positive), et peut être nulle; en fait, elle sera nulle si et seulement si le support de $\mu$ est inclus dans $Z = \{x : r(x) = 0\}$. Une telle mesure existe effectivement. Pour la construire, il suffit de remarquer que le plus grand compact invariant contenu dans $Z$, à savoir

$$Z' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(Z),$$

est non vide ; en effet, tout point de $Z$ a au moins un antécédent par $f$ dans $Z$, si bien que toutes les intersections finies sont non vides. Donc $Z'$ est non vide, et par conséquent porte au moins une probabilité invariante.

On a donc bien $\beta = \max\limits_{2\mu=\mu} \int \rho(x)\, d\mu(x)$.

Examinons maintenant le module de continuité de $\phi$, soit

$$h(s) = \max_{d(x,y) \leq s} |\phi(y) - \phi(x)| \, .$$

L'équation fonctionnelle entraîne

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad h(s) \leq ks/2 + h(s/2)$$

et comme $h(s) \to 0$ quand $s \to 0$, on en déduit

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad h(s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} ks/2^n = ks,$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Lemme C.** *Si $\phi_1$ et $\phi_2$ sont deux solutions essentiellement différentes de l'équation fonctionnelle de Mañé (c.à.d. avec $\phi_2 - \phi_1$ non constante), alors il existe deux probas invariantes $\mu_1$ et $\mu_2$ de supports disjoints et maximisant l'intégrale de $\rho$. En particulier, s'il n'existe qu'une seule proba maximisante, alors $\phi$ est uniquement définie (à une constante additive près).*

*Démonstration.* Supposons $\phi_2 - \phi_1$ non constante; quitte à translater, on peut supposer que son maximum est $+\epsilon$ et son minimum $-\epsilon$, pour un certain $\epsilon > 0$. Soient $K_1$ et $K_2$ les compacts (disjoints et non vides) définis par

$$K_1 = \{x \in \mathbb{T}^1 : \phi_1(x) = \phi_2(x) + \epsilon\}$$
$$K_2 = \{x \in \mathbb{T}^1 : \phi_2(x) = \phi_1(x) + \epsilon\}$$

Le point essentiel (que le lecteur vérifiera sans peine) est que si $x \in K_1$, et si $y$ est tel que $2y = x$ et $\phi_1(x) = -\beta + (\phi_1 + \rho)(y)$ — autrement dit, $r_1(y) = 0$ — alors $y$ est également dans $K_1$. Ceci implique que le compact

$$K_1' = \{x \in \mathbb{T}^1 : 2^i x \in K_1 \text{ et } r_1(2^i x) = 0 \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}$$

est non vide. Comme $K_1'$ est invariant, il porte au moins une mesure invariante $\mu_1$, et cette mesure est maximisante puisque son support est contenu dans $\{x \in \mathbb{T}^1 : r_1(x) = 0\}$. Et, bien sûr, son support est contenu dans $K_1$. On construit de même une mesure invariante maximisante $\mu_2$ dont le support est contenu dans $K_2$. Ceci prouve le lemme C.

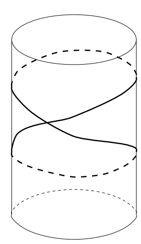
En résumé, le lemme de Mañé nous dit que $\rho$ est toujours équivalente, à un cobord près, à une fonction de la forme $\beta - r$, où $\beta$ vaut $\max\limits_{2\mu=\mu} \int \rho(x)\, d\mu(x)$, et que cette écriture est même unique dans les bons cas.

## 4. La condition de Sturm

Comme dans la section précédente, on se donne $\rho$ lipschitzienne sur le cercle, et $\phi$ est une solution continue (pas forcément unique, a priori) de l'équation fonctionnelle

$$\phi(x) + \beta = \max_{2y=x} (\phi + \rho)(y).$$

On voudrait savoir laquelle des déterminations de $x/2$ contribue au maximum, dans le second membre. Pour cela, considérons la courbe $\mathcal{C}$, définie sur le cylindre $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ comme l'image de l'application $y \mapsto (2y, (\phi + \rho)(y))$ pour $y$ décrivant $\mathbb{T}^1$. On peut s'imaginer cette courbe comme "le graphe de $x \mapsto (\phi + \rho)(x/2)$", parce qu'elle est consituée de deux "branches", et qu'au-dessus de chaque point $x$ on trouve les deux déterminations de $(\phi + \rho)(x/2)$.



$$\mathcal{C} = \Big\{ \big(2y, (\phi + \rho)(y)\big) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} : y \in \mathbb{T}^1 \Big\}$$

Le lacet $\mathcal{C}$ fait deux fois le tour du cylindre, et admet donc au moins un point d'auto-intersection. La situation la plus simple est celle où il n'y en a qu'un seul, comme dans la figure ci-dessus ; dans ce cas, il est forcément topologiquement transverse, c'est-à-dire que les deux branches s'y croisent. On dira alors que le couple $(\rho, \phi)$ vérifie la *condition de Sturm.*

**Définition.** *On dira que $(\rho, \phi)$ vérifie la condition de Sturm s'il n'existe qu'une seule paire de points $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{T}^1$ avec $y_2 = y_1 + 1/2$ et $(\phi + \rho)(y_1) = (\phi + \rho)(y_2)$.*

Notons que $(\phi+\rho)(y_1) - (\phi+\rho)(y_2) = r(y_2) - r(y_1)$ où $r$ est le "reste" dans la décomposition de Mañé, donc la condition est équivalente à $r(y_1) = r(y_2) = 0$.

**Proposition.** *Si $(\rho, \phi)$ vérifie la condition de Sturm, alors $Z = \{x \in \mathbb{T}^1 : r(x) = 0\}$ est un demi-cercle. Par conséquent, il existe une et une seule probabilité invariante par doublement et maximisant l'intégrale de $\rho$: c'est une mesure de Sturm.*

En effet, la fonction $r(y) - r(y + 1/2)$ s'annule en seulement deux points diamétralement opposés, donc elle est positive sur un demi-cercle et négative sur l'autre, cqfd.

Cette proposition nous dit en particulier que la condition de Sturm ne dépend en réalité que de la fonction $\rho$ (puisque $\phi$ sera alors uniquement définie). On dira simplement que "$\rho$ vérifie la condition de Sturm", en remarquant que la condition de Sturm sur $\rho$ reste inchangée si on ajoute un cobord à la fonction $\rho$.

## 5. Le résultat principal

**Théorème A.** *Pour tout $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la fonction $\rho_\omega(x) = \cos 2\pi(x - \omega)$ vérifie la condition de Sturm. Elle admet donc une unique mesure maximisante, qui est une mesure de Sturm.*

**Corollaire.** *Le poisson est strictement convexe.*

*Démonstration.* Nous devons démontrer que la fonction

$$R(x) = (\phi + \rho)(x) - (\phi + \rho)(x + 1/2) = r(x + 1/2) - r(x)$$

n'admet que deux zéros, dans ce cas ils seront forcément topologiquement transverses, et diamétralement opposés. La première étape consiste à localiser les zéros dans deux petits arcs de cercle centrés autour de $\omega \pm 1/4$. La deuxième étape consiste à démontrer que $R$ est strictement monotone sur ces petits arcs, en donnant une formule pour la "dérivée" de $R$.

Première étape.

**Lemme technique 1.** *Si $|x - \omega| \le 0.139$, alors $(\phi + \rho)(x) > (\phi + \rho)(x + 1/2)$.*

*Démonstration.* Pour $x \in \mathbb{T}^1$, on dira que $y$ est un *antécédent admissible* de $x$ par doublement ssi $2y = x$ et $r(y) = 0$. Un tel $y$ existe toujours, mais n'est pas toujours unique. Pour $x_0 \in \mathbb{T}^1$, on dira que la suite $(x_i)_{i \ge 0}$ est un *historique admissible* de $x_0$ par doublement ssi $x_{i+1}$ est un antécédent admissible de $x_i$ pour tout $i \ge 0$. Il est évident que tout $x_0$ admet au moins un historique admissible.

Soit $x_0 = x + 1/2$ et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un historique admissible de $x_0$. Soient $(x_i^+)_{i \ge 0}$ et $(x_i^-)_{i \ge 0}$ les suites définies par $x_i^\pm = x_i \pm 2^{-(i+1)}$. En particulier $x_0^\pm = x$. Combinant les relations

$$\phi(x_i) = -\beta + (\phi + \rho)(x_{i+1})$$
$$\phi(x_i^\pm) \ge -\beta + (\phi + \rho)(x_{i+1}^\pm)$$

il vient

$$\begin{aligned}\phi(x_i^+) + \phi(x_i^-) - 2\phi(x_i) \geq \phi(x_{i+1}^+) + \phi(x_{i+1}^-) - 2\phi(x_{i+1})\\ + \rho(x_{i+1}^+) + \rho(x_{i+1}^-) - 2\rho(x_{i+1})\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités pour $i$ variant de 0 à l'infini, il vient

$$\begin{aligned}\phi(x) - \phi(x+1/2) &\geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \rho(x_{i+1}^+) + \rho(x_{i+1}^-) - 2\rho(x_{i+1})\\ &= -\sum_{i=1}^{\infty}(1-\cos 2^{-i}\pi)\cos 2\pi(x_i - \omega)\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité suivante sur $R$,

$$\begin{aligned}R(x) &= (\phi+\rho)(x) - (\phi+\rho)(x+1/2)\\ &\geq -\sum_{i=0}^{\infty}(1-\cos 2^{-i}\pi)\cos 2\pi(x_i-\omega)\\ &\geq -\big[2\cos\alpha + \cos(\alpha - 2t) + (1-\sqrt{2}/2)\cos(\alpha - 3t) + C_3\big]\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = 2\pi(x_0 - \omega)$ et $t = 2\pi(x_1 - x_2)$, et

$$C_3 = \sum_{i=3}^{\infty} 1 - \cos 2^{-i}\pi = 0.101756\ldots$$

Notons $f_\alpha(t)$ l'expression entre crochets. C'est une fonction périodique de $t$, et l'étude de ses variations montre que son maximum est strictement négatif si $|x-\omega| \leq 0.139$, ce qui correspond à $0.722\pi \leq \alpha \leq (2-0.722)\pi$. Par conséquent, on a bien $R(x) > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Ce premier résultat indique que $R(x)$ ne peut s'annuler que si $x$ ou $x+1/2$ est dans l'intervalle $]\omega + 0.139, \omega + 0.361[$. Il reste à voir que cet intervalle ne contient qu'une seule racine.

**Lemme technique 2.** *La fonction $R$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\omega + 0.139, \omega + 0.361]$. En fait, sa dérivée est majorée par une constante strictement négative sur cet intervalle.*

Précisons d'abord ce que nous entendons par "dérivée" d'une application lipschitzienne $f$ en un point $x$. Nous noterons

$$f'(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\left\{\frac{f(u)-f(v)}{u-v} : u, v \in [x-\epsilon, x+\epsilon] \text{ et } u \neq v\right\}}$$

Il est clair que $f'(x)$ est un intervalle compact; cet intervalle peut être réduit à un point, par exemple si $f$ est continûment différentiable en $x$.

L'équation fonctionnelle sur $\phi$ nous dit que pour tout $x_0 \in \mathbb{T}^1$,

$$\phi'(x_0) \subset \frac{1}{2} \underset{\substack{2x_1 = x_0 \text{ et} \\ \mathrm{r(x_1)=0}}}{\mathrm{Cvx}} (\phi + \rho)'(x_1)$$

où l'enveloppe convexe est prise sur les $x_1$ antécédents admissibles de $x_0$ par doublement. On en déduit que

$$\phi'(x_0) \subset \underset{\substack{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ historique} \\ \text{admissible de } \mathrm{x_0}}}{\mathrm{Cvx}} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \rho'(x_i)$$

où l'enveloppe convexe est prise sur tous les historiques admissibles $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $x_0$. Nous pouvons maintenant commencer la

*Démonstration du lemme technique 2.* Prenons $x_0 \in [\omega + 0.139, \omega + 0.361]$, et posons $y_0 = x_0 + 1/2$. La dérivée $R'(x_0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} R'(x_0) &\subset (\phi + \rho)'(x_0) - (\phi + \rho)'(y_0) \\ &\subset \underset{(x_i),(y_i)}{\mathrm{Cvx}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \big(\rho'(x_i) - \rho'(y_i)\big) \end{aligned}$$

où l'enveloppe convexe est prise sur tous les $(x_i)$ et $(y_i)$ historiques admissibles de $x_0$ et $y_0$. Donnons-nous deux tels historiques $\mathbf{x} = (x_i)$ et $\mathbf{y} = (y_i)$ et considérons l'expression

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \big(\rho'(x_i) - \rho'(y_i)\big).$$

Notons $E_i$ le $i$-ème terme de la somme ci-dessus. Comme $\rho'$ est bornée par $2\pi$, on a $\sum_{i \geq 5} E_i \leq 2\pi/8$. L'encadrement sur $x_0$ donne $E_0 \leq -4\pi \sin 0.278\pi$. Et nous allons voir que $\frac{1}{2\pi} |E_1 + E_2 + E_3 + E_4| < 1.3675$, donc finalement

$$\frac{1}{2\pi} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < -2 \sin 0.278\pi + 1.3675 + 0.125 < -0.04$$

et par conséquent $R'(x_0) < -0.08\pi$, ce qui prouvera le lemme technique 2.

**Proposition.** *Soit $k$ un entier impair défini modulo 32, et soit $f_k$ le polynôme trigonométrique en deux variables défini par*

$$\begin{aligned} f_k(\alpha, t) = \quad & \big(\sin(\alpha + 2k\pi/4) - \sin(\alpha)\big) \\ & + \frac{1}{2} \big(\sin(\alpha - 4t + 2k\pi/8) - \sin(\alpha - 4t)\big) \\ & + \frac{1}{4} \big(\sin(\alpha - 6t + 2k\pi/16) - \sin(\alpha - 6t)\big) \\ & + \frac{1}{8} \big(\sin(\alpha - 7t + 2k\pi/32) - \sin(\alpha - 7t)\big) \end{aligned}$$

*Alors* $\max_{\alpha,t}|f_k(\alpha,t)| < 2.735$. *Le plus grand maximum,* $2.734\ldots$, *est atteint pour* $k \equiv \pm 11 \bmod 32$.

Comme $f_k(\alpha+\pi,t) = -f_k(\alpha,t)$, on voit que le maximum et le minimum de la fonction seront opposés. D'autre part, on a $f_{-k}(\alpha,t) = -f_k(\alpha - 2k\pi/4, t - 2k\pi/32)$ et il suffit donc d'étudier seulement les $k$ entre 1 et 15. On obtient numériquement les maxima suivants, donnés à $10^{-3}$ près par défaut:

| $k$ | $\max f_k$ |
|---|---|
| $\pm 1$ | 1.918 |
| $\pm 3$ | 2.688 |
| $\pm 5$ | 2.548 |
| $\pm 7$ | 2.249 |
| $\pm 9$ | 2.308 |
| $\pm 11$ | 2.734 |
| $\pm 13$ | 2.673 |
| $\pm 15$ | 2.015 |

Le plus grand maximum $(2.734\ldots)$ est atteint pour $k = \pm 11$ comme on peut le voir sur le tableau ci-dessus.

Finalement, notons que

$$\frac{1}{2\pi}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) = \frac{1}{2} f_k(2\pi(y_1 - \omega), 2\pi(y_3 - y_4))$$

avec $k$ défini par $x_4 - y_4 = 2k\pi/32$. Ainsi, la proposition entraîne le lemme technique 2, et ceci termine la démonstration du théorème A.

## 6. Verrouillage sur les orbites périodiques

Dans [1], les auteurs étudient l'angle de rotation $\rho$ de la mesure de Sturm contenue dans le demi-cercle $[\gamma, \gamma + 1/2]$, et rappellent (ou redémontrent) les résultats classiques suivants:

(a) Si $\rho = p/q$ où $p$ et $q$ sont deux entiers premiers entre eux, alors le support de la mesure de Sturm est une orbite de période $q$.

(b) Si $\rho$ est irrationnel, alors le support de la mesure de Sturm est un Cantor de dimension de Hausdorff zéro, minimal, uniquement ergodique, et contenant $\gamma$ et $\gamma + 1/2$.

(c) L'application $\gamma \mapsto \rho$ est continue, croissante, de degré un comme application de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et c'est un escalier du diable : elle est constante à valeurs rationnelles sur les composantes connexes d'un ouvert, dont le complémentaire est un Cantor de dimension de Hausdorff zéro.

Ces résultats présentent certaines analogies avec ce qu'on connaît pour les difféomorphismes du cercle, mais avec une différence notable : l'ensemble des paramètres pour lesquels $\rho \notin \mathbb{Q}$ est de mesure zéro (et même de dimension zéro).

Nous allons voir que l'application $\omega \mapsto \rho$ vérifie essentiellement les mêmes propriétés que l'application $\gamma \mapsto \rho$, parce que la correspondance entre $\omega$ et $\gamma$ est suffisamment régulière.

**Théorème B.** *L'application $\omega \mapsto \gamma$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La fonction inverse $\gamma \mapsto \omega$ admet un module de continuité en $-kx \log x$ pour un certain $k$.*

**Corollaire 1.** *L'application $\omega \mapsto \rho$ est continue, croissante, de degré $+1$ comme application de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et c'est un escalier du diable : la préimage de chaque rationnel est un intervalle, la préimage de chaque irrationnel est un point, et la préimage de l'ensemble des irrationnels est contenue dans un Cantor de mesure zéro et même de dimension de Hausdorff zéro.*

**Corollaire 2.** *Le bord du poisson est en bijection naturelle (et bicontinue) avec l'ensemble des mesures de Sturm, et ses points anguleux correspondent précisément aux mesures de Sturm périodiques, c.à.d. dont l'angle de rotation est rationnel.*

Le corollaire 1 se déduit immédiatement du théorème, en remarquant que l'application $\gamma \mapsto \omega$ est hölderienne, et donc envoie un ensemble de dimension zéro sur un autre ensemble de dimension zéro. Le corollaire 2 est plus faible, il dit (en termes géométriques) que l'application $\omega \mapsto \rho$ est surjective, qu'il y a verrouillage sur les fréquences rationnelles et seulement sur elles.

*Démonstration du théorème.* Nous avons vu que quand la condition de Sturm est remplie, alors l'équation de Mañé admet une unique solution. L'application $\omega \mapsto \phi_\omega$ est donc bien définie, et continue (pour la topologie $C^0$) d'après le principe du graphe fermé. Une deuxième application de ce principe nous dit que $\gamma_\omega$, défini comme l'unique nombre vérifiant

$$[\gamma_\omega, \gamma_\omega + 1/2] = \{x \in \mathbb{T}^1 : r_\omega(x) = 0\},$$

dépendra lui aussi de façon continue de $\omega$.

La principale difficulté est de montrer que l'application $\omega \mapsto \gamma$ est injective (et donc, forcément, bijective). Pour cela, nous allons donner un moyen de reconstruire $\omega$ connaissant $\gamma$, à partir d'une forme affaiblie de la condition de Sturm.

**Définition.** *Soit $\rho : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On dira que $\rho$ vérifie la précondition de Sturm pour le demi-cercle $C_\gamma = [\gamma, \gamma + 1/2]$ s'il existe une application $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in C_\gamma \qquad \phi(2x) = -\beta + (\phi + \rho)(x)$$

En d'autres termes, on demande que $\rho - \beta$ puisse s'écrire comme un cobord (de fonction lipschitzienne) sur le demi-cercle $C_\gamma$. Ceci entraîne en particulier que la constante $\beta$ vaut forcément $\int \rho \, d\mu$, où $\mu$ est la mesure de Sturm portée par $C_\gamma$.

La précondition de Sturm (pour un certain demi-cercle) est manifestement impliquée par la condition de Sturm. Elle présente le gros avantage d'être linéaire ; le théorème suivant explicite cette condition, et montre qu'elle est de codimension un:

**Proposition.** *Pour $x \in \mathbb{T}^1$, définissons $e_\gamma(x)$ comme le nombre d'itérations (éventuellement zéro, ou l'infini) nécessaires pour quitter le demi-cercle $C_\gamma = [\gamma, \gamma + 1/2]$ :*

$$e_\gamma(x) = \inf\{k \geq 0 : \; 2^k x \notin C_\gamma\}$$

*Alors une fonction lipschitzienne $\rho$ vérifie la précondition de Sturm pour le demi-cercle $C_\gamma$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{T}^1} \rho'(x) e_\gamma(x) dx = 0$$

*où $dx$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle, et $\rho'$ la dérivée de $\rho$ au sens des distributions, qui est un élément de $L^\infty(\mathbb{T}^1)$. On notera que la fonction $e_\gamma$ est dans $L^1(\mathbb{T}^1)$, donc la formule ci-dessus a un sens.*

*Démonstration de la proposition.* Pour alléger les notations, nous omettrons partout l'indice $\gamma$, et réutiliserons les indices pour d'autres choses. Examinons d'abord la fonction $e(x)$.

Soit $C = C_1 = [\gamma, \gamma + 1/2]$ le demi-cercle de départ, et soit $C_n = \{x \in C_1 : 2x \in C_{n-1}\}$ pour $n > 1$. Chaque $C_n$ est une réunion finie d'intervalles, de longueur totale $2^{-n}$. La fonction $e$ est manifestement la somme de leurs fonctions caractéristiques :

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(C_n)$$

donc $e$ est bien dans $L^1$, et son intégrale vaut exactement 1.

Définissons $d(x)$ comme l'unique détermination de $x/2$ contenue dans le demi-cercle $C$. Cette fonction est bien définie partout, sauf en $2\gamma$. Elle est donc définie presque partout ainsi que toutes ses itérées.

Supposons que $\rho$ vérifie la précondition de Sturm. On a, pour une certaine fonction $\phi$ *lipschitzienne* (cette condition est essentielle) et une certaine constante $\beta$,

$$\forall x \in C \qquad \phi(2x) = -\beta + \phi(x) + \rho(x)$$

ou, de manière équivalente,

$$\forall x \in \mathbb{T}^1 - \{2\gamma\} \qquad \phi(x) = -\beta + (\phi + \rho)[d(x)].$$

Dérivant les deux membres, on voit que pour presque tout $x \in \mathbb{T}^1$

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}(\phi' + \rho')(d(x))$$

et par conséquent

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho'[d^n(x)]$$

Intégrant cette formule sur $\mathbb{T}^1$, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^1} 2^{-n} \rho'[d^n(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_n} \rho'(x) dx = \int_{\mathbb{T}^1} \rho'(x) dx \sum_{n=1}^{\infty} \chi(C_n)(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}^1} \rho'(x) e(x) dx \end{aligned}$$

qui est la condition donnée dans la proposition; celle-ci est donc nécessaire. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée. Alors on peut trouver une fonction $\phi$ lipschitzienne telle que

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho'[d^n(x)]$$

presque partout sur $\mathbb{T}^1$, puisque le second membre est une fonction $L^\infty$ d'intégrale nulle. Mais alors

$$\phi'(x) - \frac{1}{2}(\phi' + \rho')(d(x)) = 0 \quad \text{p.p.}$$

Le premier membre s'interprète comme la dérivée de $\phi(x) - (\phi + \rho)(d(x))$ ; cette fonction est donc constante, et la précondition de Sturm est remplie.

Ceci termine la preuve de la proposition.

Avant de revenir au théorème, faisons encore quelques remarques sur la proposition que nous venons de démontrer. La forme linéaire $L_\gamma(\rho) = \int e_\gamma \rho'$ est visiblement continue en $\gamma$ et en $\rho$ (pour la distance de Lipschitz) puisque l'application $\gamma \mapsto e_\gamma$ est continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $L^1(\mathbb{T}^1)$. Plus précisément :

**Lemme.** *L'application* $e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to L^1(\mathbb{T}^1)$ *admet un module de continuité en* $-kx \log x$ *pour un certain* $k$. *Par conséquent, pour* $\rho$ *fixée, l'application* $\gamma \mapsto L_\gamma(\rho)$ *admet un module de continuité de la même forme.*

En effet, écrivons

$$e(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \chi(C_n)(x)}_{e_n(x)} + \underbrace{\sum_{k>n} \chi(C_n)(x)}_{r_n(x)}$$

On voit facilement que $\gamma \mapsto e_n$ est lipschitzienne de constante $4n$, et que par ailleurs la norme de $r_n(x)$ est bornée par $2^{-n}$. Par conséquent,

$$\|e_u - e_v\|_{L^1} \leq 2\left(2n\delta + 2^{-n}\right)$$

où on a posé $\delta = |u - v|$. Choisissons maintenant $n = \lceil \log_2 \delta^{-1} \rceil$, alors $2^{-n} \leq \delta$ et

$$\|e_u - e_v\|_{L^1} \leq 2\delta \lceil 1 + 2 \log_2 \delta^{-1} \rceil$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenons maintenant au théorème B. Choisissons un $\gamma$ quelconque dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons $\rho_{\alpha,\beta}$ la fonction $x \mapsto \alpha \cos 2\pi x + \beta \sin 2\pi x$ et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les fonctions de cette forme ; c'est un espace vectoriel de dimension deux, sur lequel on cherche le noyau de $L_\gamma$. Remarquons d'abord que $L_\gamma$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{V}$; en effet, pour la fonction $\rho_*(x) = -\cos 2\pi(x - \gamma)$, on a

$$L_\gamma(\rho_*) = \int_{\mathbb{T}^1} \rho_*'(x) e_\gamma(x) dx = \int_{C_\gamma} \rho_*'(x) e_\gamma(x) dx > 0$$

puisque $\rho_*'$ et $e_\gamma$ sont strictement positives sur $C_\gamma$. Notre forme linéaire s'écrit donc

$$L_\gamma(\rho_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\int \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \sin 2\pi x \end{pmatrix} e_\gamma(x) dx}_{\mathbf{U}(\gamma)}$$

avec un vecteur $\mathbf{U}(\gamma)$ qui est toujours *non nul.*

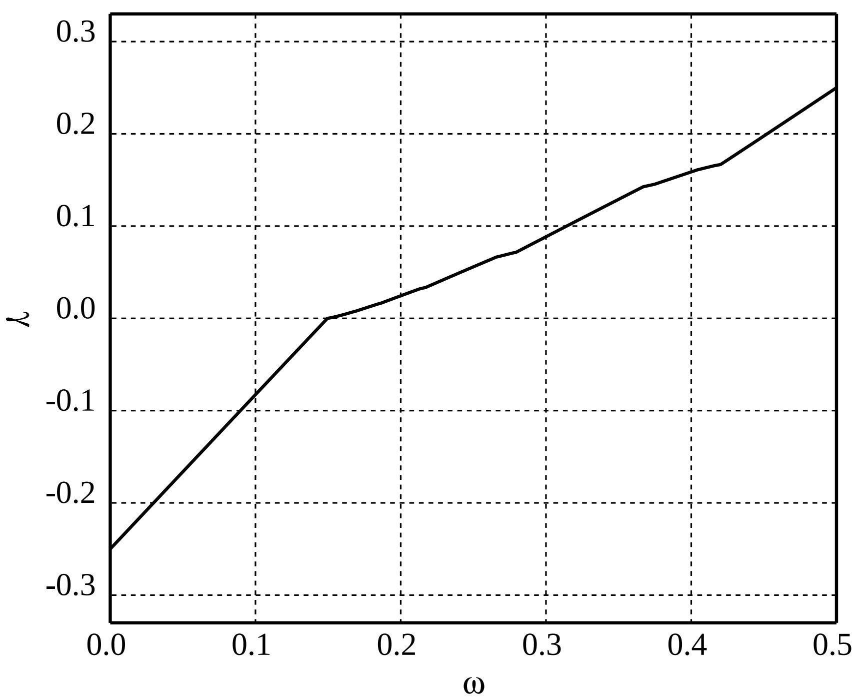
Le noyau de $L_\gamma$ est donc une droite, ce qui détermine $\rho$ à une constante multiplicative près. Nous avons presque terminé : nous connaissons la direction de droite de $\rho$ (autrement dit nous connaissons $2\omega$ modulo un) et nous voudrions connaître la direction de demi-droite. La précondition de Sturm, par son caractère linéaire, ne peut pas nous donner cette information, puisqu'elle ne peut pas distinguer $\rho$ de $-\rho$. En revanche, le "lemme technique 1" nous dit que $C_\gamma$ doit être entièrement contenu dans $]\omega - 0.361, \omega + 0.361[$, autrement dit, on doit avoir $|\gamma + 1/4 - \omega| < 0.111$.

Ceci détermine entièrement $\omega$, et l'application $\omega \to \gamma$ est donc bien injective. C'est donc un homéomorphisme, et la borne sur $\gamma + 1/4 - \omega$ montre qu'il est de degré $+1$.

Remarquons enfin que le noyau de $L_\gamma$ dans $\mathcal{V}$ bouge à la même vitesse que $\mathbf{U}(\gamma)$ ; par conséquent, le module de continuité de $\omega$ (comme fonction de $\gamma$) sera le même que celui de $\mathbf{U}(\gamma)$, c'est-à-dire en $-kx \log x$.

Ceci termine la démonstration du théorème B.

Les formules ci-dessus se prêtent très bien à des calculs numériques, et permettent de calculer le graphe de l'application $\omega \mapsto \gamma$ ou vice-versa. Voici, à titre d'illustration, le graphe de l'application $\omega \mapsto \gamma$ pour $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$ ; pour obtenir le graphe complet sur une période, effectuer une symétrie autour du point $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1/4 \end{smallmatrix}\right]$.



**Annexe. Quelques points sur le bord du poisson**

Le tableau ci-dessous énumère, pour les valeurs rationnelles les plus simples de $\rho$, l'affixe $z$ du point correspondant sur le bord du poisson, l'intervalle des valeurs de $\gamma$ et l'intervalle des valeurs de $\omega$ correspondant à ce paramètre. Les nombres $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$ s'interprètent géométriquement comme les directions des deux demi-tangentes en $z$.

| $\rho$ | $z = \int e^{2i\pi t} d\mu_\rho(t)$ | $\gamma_{\min}$ | $\gamma_{\max}$ | $\omega_{\min}$ | $\omega_{\max}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $-1/2$ | 0 | $-0.149550$ | 0.149550 |
| 1/6 | $0.429 + 0.392i$ | 1/126 | 1/63 | 0.169381 | 0.184907 |
| 1/5 | $0.308 + 0.444i$ | 1/62 | 1/31 | 0.185846 | 0.213509 |
| 1/4 | $(1 + i\sqrt{15})/8$ | 1/30 | 1/15 | 0.216946 | 0.266213 |
| 1/3 | $(-1 + i\sqrt{7})/6$ | 1/14 | 1/7 | 0.279199 | 0.367215 |
| 2/5 | $-0.329 + 0.288i$ | 9/62 | 5/31 | 0.374417 | 0.404815 |
| 1/2 | $-1/2$ | 1/6 | 1/3 | 0.420148 | 0.579852 |
| 3/5 | $-0.329 - 0.288i$ | 21/62 | 11/31 | 0.595185 | 0.625583 |
| 2/3 | $(-1 - i\sqrt{7})/6$ | 5/14 | 3/7 | 0.632785 | 0.720801 |
| 3/4 | $(1 - i\sqrt{15})/8$ | 13/30 | 7/15 | 0.733787 | 0.783054 |
| 4/5 | $0.308 - 0.444i$ | 29/62 | 15/31 | 0.786491 | 0.814154 |
| 5/6 | $0.429 - 0.392i$ | 61/126 | 31/63 | 0.815093 | 0.830619 |

Ainsi, par exemple, on voit que $\omega = 1/4$ est contenu dans l'intervalle $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ pour $\rho = 1/4$. Par conséquent, la mesure maximisante pour $\rho(t) = \sin 2\pi t$ est bien la mesure de Sturm de paramètre 1/4, comme nous l'avions affirmé (sans démonstration) au début de cet article.

## Bibliographie


[1] S. BULLETT et P. SENTENAC, *Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994)

[2] J. M. GAMBAUDO, O. LANFORD et C. TRESSER, *Dynamique symbolique des rotations*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **299** (1984)

[3] B. R. HUNT et E. OTT, *Optimal periodic orbits of chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996)

[4] B. R. HUNT et E. OTT, *Optimal periodic orbits of chaotic systems occur at low period*, Phys. Rev. E **54** (1996)

[5] O. M. JENKINSON, *Conjugacy rigidity, cohomological triviality, and barycentres of invariant measures*, thèse, Université de Warwick (1996)

[6] O. M. JENKINSON, *On barycentres of invariant measures for circle maps*, preprint 97-28, Institut de Mathématiques de Luminy (1997), à paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems

[7] O. M. JENKINSON, *Frequency-locking on the boundary of the barycentre set*, preprint 97-29, Institut de Mathématiques de Luminy (1997), à paraître dans Experimental Mathematics

[8] R. MAÑÉ, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity **9** (1996)

[9] M. MORSE et G. A. HEDLUND, *Symbolic Dynamics II. Sturmian Trajectories*, Am. J. Math. **62** (1940)

[10] J. P. VEERMAN, *Symbolic dynamics and rotation numbers*, Physica **134A** (1986)

[11] J. P. VEERMAN, *Symbolic dynamics and order-preserving orbits*, Physica **29D** (1987)