LES RETARDATEURS

Thierry BOUSCH

(Orsay)

http://topo.math.u-psud.fr/~bousch/preprints

SYSTEMES A EVENEMENTS DISCRETS

Les SED sont des systèmes pouvant être dans un nombre fini d'états, avec des transitions discrètes (aux dates $t_1, t_2, \ldots$) correspondant à des "événements". On s'intéresse aux dépendances entre ces dates :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_m \end{pmatrix} \qquad\qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Quelles propriétés ont ces fonctions, en général, et que peut-on en dire d'un pt de vue dynamique ?

Deux propriétés très naturelles (Gunawardena) :

* Croissance : $\underline{x} \leq \underline{y} \Rightarrow f(\underline{x}) \leq f(\underline{y})$ (I)
* Homogénéité additive : $f(\lambda + \underline{x}) = \lambda + f(\underline{x})$ (H)

pour λ réel, où on a posé
$\lambda + (x_1, x_2, \ldots) = (\lambda + x_1, \lambda + x_2, \ldots)$

Une troisième propriété presque aussi simple (Bousch) :

* Causalité : $\underline{x} \wedge \delta(\lambda) = \underline{y} \wedge \delta(\lambda)$ (C)

$$\Rightarrow f(\underline{x}) \wedge \delta(\lambda) = f(\underline{y}) \wedge \delta(\lambda)$$

ou, de manière équivalente,

$$f[\underline{x} \wedge \delta(\lambda)] \wedge \delta(\lambda) = f(\underline{x}) \wedge \delta(\lambda) \qquad (C')$$

où on a posé $\delta(\lambda) = (\lambda, \lambda, \ldots)$. Pour les fonctions topicales, i.e. vérifiant (I) et (H), cette condition se réduit à

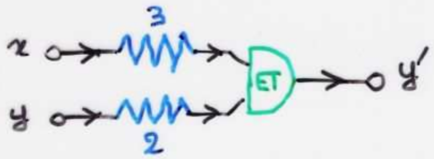
$$f(\underline{x} \wedge \underline{0}) \geq f(\underline{x}) \wedge \underline{0}$$

Exemple de fonction topicale causale : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+4 \\ (x+3) \vee (y+2) \\ x \wedge [(y+1) \vee z] \end{pmatrix}$$

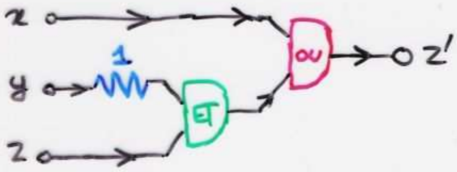
a) $x \mapsto x+4$: retard : le "signal" met 4 unités de temps à se propager :

b) $(x,y) \mapsto (x+3) \vee (y+2)$: retards et synchronisation :



(fonction max-plus)

c) $(x,y,z) \mapsto x \wedge [(y+1) \vee z]$: retard, synchronisation et choix :



(fonction min-max-plus)

Propriétés :

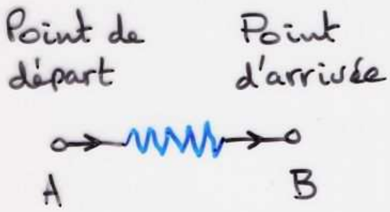
* Toute fonction topicale causale est uniformément approchable par des fonctions min-max-plus (causales) ;

* Toute fonction topicale causale admet une fonction asymptote, de portée nulle ; et, pour les endofonctions ($n = m$), un vecteur temps de cycle.

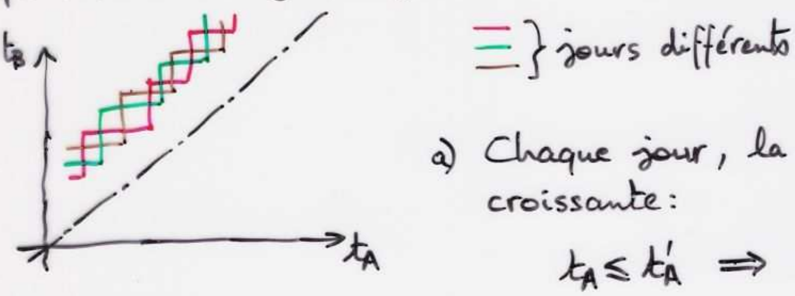
Problème : comment étendre ces notions au cas stochastique ?

Sous-problème : modéliser les retards.

UN EXEMPLE TIRÉ DE LA VIE DE TOUS LES JOURS : LE MÉTRO. (ou le bus, le tramway, ...)



Dépendance de t_B en t_A ?



a) Chaque jour, la fonction $t_A \mapsto t_B$ est croissante :

$$t_A \leq t_A' \Rightarrow u_\omega(t_A) \leq u_\omega(t_A').$$

b) Homogénéité dans le temps :

$$\lambda \triangleright u_\omega \stackrel{\mathcal{D}}{=} u_\omega \qquad \text{homogénéité en loi}$$

où $(\lambda \triangleright u_\omega)(t) = \lambda + u_\omega(-\lambda + t)$

$$\lambda \triangleright u_\omega = T^\lambda u_\omega T^{-\lambda} \qquad T^\lambda : \text{translation de vecteur } \lambda.$$

En général $\lambda \triangleright u_\omega \neq u_\omega$: les fonctions u_ω ne sont pas, individuellement, additivement homogènes ; mais elles peuvent l'être « collectivement » : $\lambda \triangleright u_\omega \stackrel{\mathcal{D}}{=} u_\omega$.

Temps discret ($G = \mathbb{Z}$)

Un retardateur à temps discret est une mesure positive finie sur $\mathbb{Z}^{\uparrow \mathbb{Z}}$, invariante par conjugaison par les translations.

Définition comme fonction aléatoire :

$(\Omega, \mathcal{T}, p)$ ensemble muni d'une tribu et d'une mesure positive finie, et

$$\mathbb{Z} \times \Omega \longrightarrow \Omega$$
$$(t,\omega) \longmapsto t+\omega$$

action de $\mathbb{Z}$ préservant la mesure, i.e.

$$0+\omega = \omega \qquad t+(t'+\omega) = (t+t')+\omega$$
$$\mu(t+A) = \mu(A) \qquad (A \subseteq \Omega \text{ mesurable})$$

Un retardateur à temps discret est alors une fonction

$$u : \Omega \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\omega, x) \longmapsto u_\omega(x)$$

mesurable, croissante en x pour ω fixé, et vérifiant

$$u_{t+\omega}(t+x) = t + u_\omega(x) \qquad (t, x \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega)$$

autrement dit, $t \triangleright u_\omega = u_{t+\omega}$.

De même, si on a une action de $\mathbb{R}$ sur Ω préservant la mesure, on peut définir un retardateur à temps continu comme une fonction

$$u : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\omega, x) \longmapsto u_\omega(x)$$

mesurable, croissante en x pour ω fixé, et vérifiant

$$u_{t+\omega}(t+x) = t + u_\omega(x)$$

pour tous $t, x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$.

Afin d'englober ces deux situations, on posera $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ selon le cas.

Autre représentation (équivalente) d'un retardateur :

$$U : \Omega \times \mathbb{G} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{G}$$
$$(\omega, x) \longmapsto (\omega, u_\omega(x))$$

Retardateur unité : noté $\mathbb{1}$, c'est l'identité de $\Omega \times \mathbb{G}$; il est donné par $u_\omega(x) = x$ pour tous ω, x.

OPÉRATIONS SUR LES RETARDATEURS

On se fixe $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, le groupe $\mathbb{G}$ ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$), et une action de $\mathbb{G}$ sur Ω préservant la mesure.

Structure de treillis

Toute paire de retardateurs admet un inf et un sup, donnés point par point :

$$(u_\omega \wedge v_\omega)(x) = u_\omega(x) \wedge v_\omega(x)$$
$$(u_\omega \vee v_\omega)(x) = u_\omega(x) \vee v_\omega(x)$$

Structure de monoïde

La composée $V \circ U$ de deux retardateurs est un retardateur :

$$(V \circ U)(\omega, x) = (\omega, v_\omega u_\omega(x))$$

et $\mathbb{1}$ est l'élément neutre.

EXEMPLES DE RETARDATEURS

1) $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, agissant trivialement sur Ω (i.e. $t + \omega = \omega$)
La condition d'homogénéité additive équivaut à dire que les fonctions $u_\omega : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ sont des translations :

$$u_\omega(x) = x + R(\omega) \qquad R : \Omega \to \mathbb{G} \text{ fn mesurable}$$

Les retardateurs s'identifient ici aux variables aléatoires $\Omega \to \mathbb{G}$, et la composition des retardateurs correspond à l'addition de ces variables aléatoires. En particulier, la composition est (ici!) commutative.

2) $\Omega = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$ avec son action usuelle (par translation).
La relation d'homogénéité additive

$$u_{t+\omega}(t+x) = t + u_\omega(x)$$

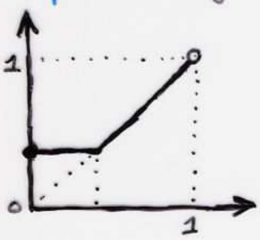
montre que :

a) les u_ω commutent avec les translations entières

b) la donnée d'un u_ω (par exemple u_0) détermine tous les autres.

Ici les retardateurs s'identifient (comme monoïde ordonné) aux fonctions $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes, commutant avec les translations entières ("Fonctions de Poincaré").

Exemple : un feu rouge



$\longrightarrow$ Possibilité de représenter des mécanismes de retard périodiques par des retardateurs.

LA FONCTION DE RETARD

La fonction $u_\omega(x) - x$ est égale à $u_{-x+\omega}(0)$, et a donc la même loi que $u_\omega(0)$. La fonction $\omega \longmapsto u_\omega(0)$ est la fonction de retard.
On veut contrôler le retard par ses queues

$$\mu\{\omega : |u_\omega(0)| > R\}$$

ou par ses moments

$$\int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}\, d\mu$$

$(p>1)$, pour les retardateurs obtenus par composition ou itération de retardateurs connus.

CONTROLE DES RETARDS PAR COMPOSITION

U, V deux $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, G, +)$-retardateurs, $V \circ U$ leur composée.

Prop: pour tous $x, y \geqslant 0$ (réels),

$$\mu\{\omega : |v_\omega u_\omega(0)| > x+y\} \leqslant \mu\{\omega : |u_\omega(0)| > x\} + \mu\{\omega : |v_\omega(0)| > y\}.$$

Preuve (dans le cas particulier $G = \mathbb{R}$, $U, V \geqslant \mathbb{1}$) : soient

$$A = \{\omega : u_\omega(0) > x\}$$
$$B = \{\omega : v_\omega(0) > y\}$$
$$C = \{\omega : v_\omega u_\omega(0) > x+y\}.$$

On a l'implication

$$u_\omega(0) \leqslant x \quad \text{et} \quad \underbrace{v_\omega(x) \leqslant x+y}_{v_{-x+\omega}(0) \leqslant y} \implies v_\omega u_\omega(0) \leqslant x+y$$

$$\omega \notin A \quad \text{et} \quad -x+\omega \notin B \implies \omega \notin C$$

$$\omega \in C \implies \omega \in A \quad \text{ou} \quad \omega \in x+B$$

$$C \subseteq A \cup (x+B)$$

et donc $\mu(C) \leqslant \mu(A) + \mu(x+B) = \mu(A) + \mu(B)$. $\square$

En utilisant ensuite la formule

$$\int_\Omega F(\omega)^{p-1}\, d\mu = (p-1)\int_0^\infty x^{p-2}\mu\{\omega : F(\omega) > x\}\, dx$$

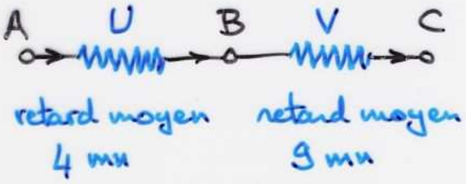
(F fn positive), on en déduit (après calcul)

$$\left(\int_\Omega |v_\omega u_\omega(0)|^{p-1}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v_\omega(0)|^{p-1}\right)^{1/p}$$

En particulier ($p=2$),

$$\sqrt{\int_\Omega |v_\omega u_\omega(0)|} \leq \sqrt{\int_\Omega |u_\omega(0)|} + \sqrt{\int_\Omega |v_\omega(0)|} .$$

Illustration :



Alors pour le trajet total, le retard moyen est d'au plus

$$(\sqrt{4}+\sqrt{9})^2 = 25 \text{ minutes.}$$

CONTROLE DES RETARDS PAR ITÉRATION

$U^0 = \mathbb{1}$, $U^1 = U$, U^2, U^3, ... itérées du retardateur U.

$$\int_\Omega |u_\omega^n(0)| \leq n^2 \int_\Omega |u_\omega(0)|$$

En fait, la bonne constante n'est pas n^2 mais $2n-1$. De façon générale, on peut montrer que la suite

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \int_\Omega |u_\omega^k(0)|^{p-1} \right)^{1/p}$$

est sous-additive en n ($n \geqslant 0$, $p>1$) et on en déduit facilement

$$\int_\Omega |u_\omega^n(0)|^{p-1} \leq \underbrace{\left[n^p - (n-1)^p \right]}_{\substack{\text{majoré par} \\ p n^{p-1}}} \int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}$$

Ceci suggère que $u_\omega^n(0)$ est de l'ordre de n. En fait, ceci est vrai sans aucune hypothèse d'intégrabilité sur le retard.

Théorème. Soit U un retardateur. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $\frac{u_\omega^n(0)}{n}$ converge dans $\mathbb{R}$.

La limite $CT_U(\omega)$ est p.p. définie, $\mathbb{G}$-invariante, et vérifie

$$\int_\Omega |CT_U(\omega)|^{p-1} \leq p \int_\Omega |u_\omega(0)|^{p-1}.$$

Naturalité du temps de cycle :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{G} & \xrightarrow{U} & \Omega \times \mathbb{G} \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ \Omega \times \mathbb{G} & \xrightarrow{V} & \Omega \times \mathbb{G} \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad CT_U(\omega) = CT_V(\omega) \ \text{p.p.}$$

i.e. $HU = VH$

EXISTENCE DU TEMPS DE CYCLE (NOMBRE DE ROTATION) POUR LES FONCTIONS DE POINCARÉ ($\mathbb{T}$-RETARDATEURS)

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction croissante, commutant avec les translations entières (fonction de Poincaré)

Prop : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite

$$\frac{u^n(x) - x}{n}$$

admet une limite réelle quand $n \to \infty$, et cette limite est indépendante de x.

Preuve. Définissons $a_n = \lfloor u^n(0) \rfloor$, $b_n = \lceil u^n(0) \rceil$; on a

$$a_n + 0 \leq u^n(0) \leq b_n + 0$$
$$u^p(a_n + 0) \leq u^{n+p}(0) \leq u^p(b_n + 0)$$
$$a_n + a_p \leq a_n + u^p(0) \leq u^{n+p}(0) \leq b_n + u^p(0) \leq b_n + b_p$$

pour tous $n, p \geq 0$, et par conséquent,

$$a_{n+p} \geq a_n + a_p \qquad b_{n+p} \leq b_n + b_p \qquad \forall n, p.$$

Donc a_n/n et b_n/n ont des limites, $A \in]-\infty, +\infty]$ et $B \in [-\infty, +\infty[$. Mais d'autre part $|a_n - b_n| \leq 1$, donc $A = B \in \mathbb{R}$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + 0 \leq x \leq \lceil x \rceil + 0$$
$$u^n(\lfloor x \rfloor + 0) \leq u^n(x) \leq u^n(\lceil x \rceil + 0)$$
$$\lfloor x \rfloor + a_n \leq u^n(x) \leq \lceil x \rceil + b_n$$

et donc

$$\frac{u^n(x) - x}{n} \longrightarrow A$$

quand $n \to \infty$.

UN THÉORÈME ERGODIQUE SUR-MULTIPLICATIF POUR LES RETARDATEURS

Théorème. Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite sur-multiplicative de $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}, G, +)$-retardateurs, i.e. vérifiant $U_{m+p} \geqslant U_m \circ U_p$.
Ecrivons $U_n(\omega, x) = (\omega, u_{n,\omega}(x))$, et soient $p_-, p_+ : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ les fonctions (p.p. invariantes) définies par

$$p_-(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} \qquad p_+(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n}$$

Alors $p_-(\omega) > -\infty$ presque partout, et l'ensemble

$$\{\omega : p_-(\omega) = 0\} \cup \{\omega : p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$

est de mesure pleine dans Ω.

Énoncé dual : si la suite $U_1, U_2, \ldots$ est sous-multiplicative, alors $p_+(\omega) < \infty$ p.p., et l'ensemble

$$\{\omega : p_+(\omega) = 0\} \cup \{\omega : p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$

est de mesure pleine dans Ω.

Suites multiplicatives (existence du temps de cycle) :
$U_n = U^n$, et $u_{n,\omega} = u_\omega^n$.
On a ici $-\infty < p_-(\omega) \leq p_+(\omega) < +\infty$ p.p., et les ensembles

$$\{\omega : p_-(\omega) = 0 \ \text{ou}\ p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$
$$\{\omega : p_+(\omega) = 0 \ \text{ou}\ p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$

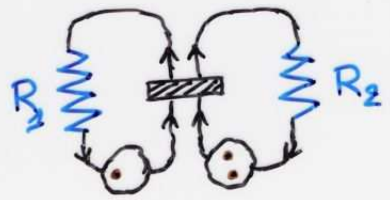
sont de mesure pleine, et donc leur intersection aussi :

$$\{\omega : p_-(\omega) = 0 = p_+(\omega) \ \text{ou}\ p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$
$$= \{\omega : p_-(\omega) = p_+(\omega)\}$$

Autrement dit, $u_\omega^n(0)/n$ converge (dans $\mathbb{R}$), pour presque tout $\omega \in \Omega$.

PERSPECTIVES

1) Réseaux de Petri retardés — en particulier, graphes d'événements retardés



Existence du temps de cycle, calcul, bornes...

2) Fonctions hélicales :

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(\omega, \underline{x}) \longmapsto f_\omega(\underline{x})$$

f mesurable, croissante en $\underline{x}$ pour ω fixé, et

$$f_{t+\omega}(t+\underline{x}) = t + f_\omega(\underline{x})$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Existe-t-il des propriétés généralisant ce qu'on sait pour les fonctions topicales (causales) ? En particulier, pour $n = m$ existe-t-il un "vecteur temps de cycle" stochastique ?

EXISTENCE D'UN TEMPS DE CYCLE POUR CERTAINES FONCTIONS HELICALES

$$\mathbb{R} \underset{\lfloor\,\rfloor,\ \lceil\,\rceil}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fonction diagonale

$\delta(x) = x + \underline{0} = (x, x, \cdots, x)$

$\lfloor \underline{x} \rfloor, \lceil \underline{x} \rceil$: plus petite et plus grande coordonnée de $\underline{x}$ $(\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$.

Théorème. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction hélicale telle que

$$d\left[f_\omega^n(\underline{0}),\ \mathrm{Im}\,\delta \right] = o(n)$$

quand $n \to \infty$, pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $f_\omega^n(\underline{0})/n$ converge vers un point de la diagonale $(\mathrm{Im}\,\delta)$ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soient $u_n, v_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les retardateurs définis par

$$u_{n,\omega}(x) = \lfloor f_\omega^n\, \delta(x) \rfloor \qquad \text{(suite sur-multiplicative)}$$

$$v_{n,\omega}(x) = \lceil f_\omega^n\, \delta(x) \rceil \qquad \text{(suite sous-multiplicative)}$$

Par hypothèse, $u_{n,\omega}(0) - v_{n,\omega}(0) = o(n)$; et donc

$$p_-(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n}$$

$$p_+(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n,\omega}(0)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{v_{n,\omega}(0)}{n}$$

D'après les théorèmes sur- et sous-multiplicatif, on a
$-\infty < p_-(\omega) \le p_+(\omega) < +\infty$ p-p-, et

$$p_-(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad p_-(\omega) = p_+(\omega) \quad \text{p-p-}$$

$$p_+(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad p_-(\omega) = p_+(\omega) \quad \text{p-p-}$$

et donc $p_-(\omega) = p_+(\omega)$ p-p-